EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

Dinamik Topolojik Lojiklerin İfade Güçleri

Okan AÇIKSÖZ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.05.01
Sunuş Tarihi: 17.08.2011

Bornova-İZMİR
2011

Okan AÇIKSÖZ tarafından **Doktora Tezi** olarak sunulan "**Dinamik Topolojik Lojiklerin İfade Güçleri**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 17.08.2011 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER	....
Raportör Üye	: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER	....
Üye	: Prof. Dr. Rafail ALİZADE	....
Üye	: Doç. Dr. Alev FIRAT	....
Üye	: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR	....

ÖZET

Dinamik Topolojik Lojiklerin İfade Güçleri

ACIKSÖZ, Okan

Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER
17 Ağustos 2011, 51 sayfa

Bu tezin amacı, dinamik topolojik lojiği, topolojik dinamik sistemlerin noktalarının yörüngeleri hakkında çıkarımlar yapabilmek için kullanmaktır.

Tez, beş bölümden oluşmaktadır.

Tez ile ilgili genel bilgilerin yer aldığı giriş bölümünden sonra, önbilgiler bölümünde çeşitli temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, yörünge kavramı tanıtıldı ve yörünge davranışları sınıflandırıldı.

Dördüncü bölümde, temel dinamik dilin, yörüngelerin topolojik olarak ilginç özelliklerinin çoğunu ifade edebilmek için yeterli ifade gücüne sahip olmadığı gösterildi ve sonra amaçlanan ifade gücüne sahip olan zenginleştirilmiş dile ulaşmak için nominaller ve bazı operatörler eklenerek dil genişletildi.

Beşinci bölümde, dinamik modalite için yeni bir yorum önerildikten sonra bu yorum altındaki temel dinamik dilin de yörüngelerin topolojik olarak ilginç özelliklerinin çoğunu ifade edebilmek için yeterli ifade gücüne sahip olmadığı gösterildi. Son olarak, bu dil melezleştirilerek ve genişletilerek elde edilen zenginleştirilmiş diller ile ilgili ulaşılan sonuçlar doğrultusunda, yeni yorumun eskisinden daha fazla ifade gücü sağladığına ve dolayısıyla, topolojik dinamik sistemler hakkında çıkarımlarda bulunmak için daha uygun olduğuna karar verildi.

Anahtar Kelimeler: Melez lojik; dinamik topolojik lojik; topolojik dinamik sistemler; yörüngeler.

ABSTRACT

Expressivity of Dynamic Topological Logics

AÇIKSÖZ, Okan

Ph.D. in Mathematics
Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER
17 August 2011, 51 pages

The aim of this thesis is to put dynamic topological logic in use for reasoning about the orbits of the points in topological dynamical systems.

This thesis consists of five sections.

After the introduction chapter in which the general information concerning to the thesis is given, in the Preliminaries, various fundamental notions are mentioned.

In the Section 3, we remind the orbit notion and present the classification for orbit behaviors.

In the Section 4, we show that the basic dynamic language does not have enough expressive power to express most of the topologically interesting properties of the orbits and to obtain the enriched language which has intended expressive power, we expand the language by adding some operators and nominals.

In the Section 5, we first suggest a new interpretation for the dynamic modality. Then, we show that the basic dynamic language under this new interpretation also does not have enough expressive power to express most of the topologically interesting properties of the orbits. Our results obtained by expanding the new language indicate that this new interpretation provides more expressive power then the old one does and so, it is more convenient for reasoning about topological dynamical systems.

Keywords: Hybrid logic; dynamic topological logic; topological dynamical systems; orbits.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi danışmanlığımı üstlenerek her türlü bilgi ve yardımı esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Tahsin ÖNER'e, alanında sahip olduğu engin tecrübelerinden yararlanmama izin verdiği için Sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER'e, desteği, sevgisi ve değerli görüşleri ile her zaman yanımda olan Sevgili Dr. Gizem GÜNEL'e, tanıştığımız ilk günden beri bana gerçek bir bilim insanının nasıl olması gerektiğini öğreten sevgili dostum Dr. David GABELAIA'ya, gösterdikleri sabır ve anlayış için aileme ve doktora sürecim boyunca herhangi bir maddi kaygıya kapılmadan işime odaklanabilmemi sağlayan TÜBİTAK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Dinamik topolojik sistemler hakkında çıkarımlarda bulunmak amacıyla dinamik topolojik lojikler ilk olarak (Artemov, S., Davoren, J. and Nerode, A., 1997) ve (Kremer, P. and Mints, G., 1997) de tanıtılmıştır. Bu doğrultuda daha sonra yapılan araştırmalarda çoğunlukla aksiyomatizasyon ve saptanabilirlik üzerine yoğunlaşılmıştır (Kremer, P., 1997), (Kremer, P., Mints, G. and Rybakov, V., 1997) ve (Konev, B., Kontchakov, R., Wolter, F. and Zakharyaschev, M., 2006). Biz bu oluşumların ifade güçleri sorusunu ele alıyoruz. Bu tezde, temel dinamik topolojik dilin topolojik olarak ilginç yörünge davranışlarını ayırt etmeye yetecek kadar güçlü olmadığı gösterildikten sonra amaçlanan ifade gücüne sahip olan dili ararken dili zenginleştirmek için çeşitli yollar sorgulanmış ve dinamik sistemler üzerindeki temel modal bağlaçlar için farklı bir yorum önerilmiştir. Sonuçlarımız bu yeni yorumun dinamik sistemler hakkında çıkarımlarda bulunmak için daha uygun olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Bir (X, f) *topolojik dinamik sistem* (tds), bir X topolojik uzayı ve bir $f : X \to X$ sürekli dönüşümünden oluşur. Topolojik dinamik lojiğin dili, X in topolojisi 'hakkında konuşmak için' bir 'uzaysal' modalite ve f dönüşümünün davranışları 'hakkında konuşmak için' bir veya iki 'zamansal' modaliteye sahip olan bir çok modaliteli dildir. $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle}$ ile gösterdiğimiz dil (Artemov, S., Davoren, J. and Nerode, A., 1997) ve (Kremer, P. and Mints, G., 1997) de önerilmiştir. Bu dil X in alt kümeleri üzerinde topolojik kapanış operatörü olarak yorumlanan bir uzaysal modalite $\langle c\rangle$ ve X in alt kümeleri üzerinde f^{-1} olarak yorumlanan bir zamansal modalite $\langle\to\rangle$ içerir. Tez boyunca $\langle\to\rangle^+$ operatörü, $\langle\to\rangle$ nin yansımalı kapanışı olarak ele alınmış ve dili zenginleştirirken eklenen operatörler dilin adının sağ altında gösterilmiştir (örneğin, $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$, $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle}$ dilinin E evrensel modalitesi ile zenginleştirilmisinden elde edilen dildir).

$\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle}$ nin ifade gücü, yörünge davranışlarını ayırt edebilme becerisi analiz edilerek araştırılmıştır. Bir $x{\in}X$ noktasının bir (X, f) tds üzerindeki *yörüngesi*, x i ve x üzerinde f nin tüm iterasyonlarını içeren bir $O_x = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$ kümesidir. Bir x noktasının yörüngesine eğer O_x sonlu ise *sonlu*, aksi durumda *sonsuz* denir. Sonlu yörüngeler kendi içinde *periyodik* (öyle bir $n > 0$ için $f^n(x) = x$) ve *bir süre sonra periyodik* (öyle bir $m > 0, n \geq 0$ için $f^{m+n}(x) = f^m(x)$) olarak ikiye ayrılabilir. x in yörüngesi periyodik ve $n > 1$, $f^n(x) = x$ olacak şekilde en küçük doğal sayı ise n*-periyodik*, $n = 1$ ise *sabit* adını alır. Sonsuz yörüngeler de kendi içinde *yakınsak* (O_x en az bir yığılma noktasına sahiptir) ve *ıraksak* (O_x hiçbir yığılma noktasına sahip değildir) olmak üzere ikiye ayrılabilir.

Örneğin, $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve τ, $\mathbb{R}$ üzerinde doğal topoloji olmak üzere $(\mathbb{R}, f)$ tds için $O_1 = \{1, 1, 1, ...\}$ sabit, $O_{-1} = \{-1, 1, 1, ...\}$ bir süre sonra sabit, $O_{\frac{1}{3}} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, ...\}$ yakınsak ve $O_5 = \{5, 25, 625, ...\}$ ıraksak yörüngelerdir. $X = \mathbb{R}$ ve $f(x) = 1 - x^2$ olmak üzere $(\mathbb{R}, f)$ tds için $O_1 = \{1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...\}$ 2-periyodik ve $O_{-1} = \{-1, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...\}$ bir süre sonra periyodik, dolayısıyla bir süre sonra $2-$periyodik yörüngelerdir.

Yörüngelerin bir P özelliği için aşağıdaki çift yönlü gerektirme sağlanacak şekilde öyle bir $\varphi \in L$ formülü var ise P, verilen bir L dili ve $\models$ yorumu altında $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde ifade edilebilir:

$$(X, f), x \models \varphi \quad \text{ancak ve ancak} \quad O_x, \ P \text{ özelliğine sahiptir.}$$

Dolayısıyla, ifade gücünün sorgulanmasında *noktalı yapılarda* geçerlilik kavramı göz önünde bulundurulacaktır.

İlk sonucumuz, sabit ve periyodik yörüngelerin $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ dilinde halihazırda ifade edilebildikleri olmuştur. Uygun bir bisimülasyon ve devamında tds arasında bir geçerlilik koruyan morfizma kavramı tanımlanarak, ele alınan diğer yörünge davranışlarının (bir süre sonra periyodik olma, yakınsaklık ve ıraksaklık) dile evrensel modalite E eklenmesi durumunda bile ifade edilemez oldukları gösterilmiştir. Ayrıca, sabit-değil, periyodik-değil ve $n-$periyodik-değil yörüngelerin de $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle, E}$ dilinde elde edilemedikleri kanıtlanmıştır.

Bu durum, yörünge davranışlarının daha ayrıntılı bir analizini amaçlıyorsak ifade gücünü daha fazla arttırmaya ihtiyacımız olduğunu ortaya koymuştur. Dile *nominaller* ekleme ihtimali üzerinde düşünülmüştür. Elde edilen temel melez dinamik topolojik dil $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ ile gösterilmiştir. Bunun, ifade gücünde ufak bir artışa neden olduğu kanıtlanmıştır. Daha açık olarak, $n-$ periyodik, $m-$adım sabit, $m-$adım periyodik, $m-$adım $n-$periyodik, sabit-değil, periyodik-değil ve $n-$periyodik değil özellikleri nominaller yardımıyla tanımlanabilir olmuştur. Yine de, $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle, E}$ nin bir süre sonra periyodik yörüngeler ile bile baş edebilecek kadar güçlü görünmemesinden dolayı dile çok daha kuvvetli olan *aşağı yönde ok* operatörünün eklenmesine karar verilmiştir. Bunun ifade gücünü oldukça arttırdığı gösterilmiştir. Öncelikle, aşağıdaki genel sonuç kanıtlanmıştır:

Teorem: Yörüngelerin bir P özelliğinin $\varphi(i)$ saf melez formülü tarafından ifade edilebildiğini kabul edelim. O zaman, 'bir süre sonra P' özelliği

$$\downarrow u.(\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{+} \downarrow v.\varphi(j := v))$$

formülü tarafından ifade edilebilirdir. Burada $:=$ sembolü ikame anlamında kullanılmıştır.

Yukarıdaki teoremin ışığında bir süre sonra sabit, bir süre sonra periyodik ve bir süre sonra $n-$periyodik yörüngelerin $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ dilinde ifade edilebilir oldukları kanıtlanmıştır. Diğer yandan, yakınsak ve ıraksak yörüngelerin de $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ dilinde ifade edilebildikleri gösterilmiştir. Dolayısıyla, $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ dili yörüngelerin temel sınıflarını ayırt edebilecek kadar zengindir. Fakat, aşağı yönde ok operatörünün çok güçlü olduğu (Areces, C., Blackburn, P. and Marx, M., 2001) bilindiği için bu şaşırtıcı değildir. Bu nedenle, $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ nin sınırlı ifade gücünü arttırmak için bir başka yaklaşım göz önünde bulundurulmuş ve bir tds üzerindeki uzaysal ve zamansal modalitelerin tümü için farklı yorumlar önerilmiştir.

İlk tavsiyemiz olan 'zamansal' modalitelerin yorumlarını değiştirmek doğrultusunda dinamik diamond operatörü, bir (X, f) tds üzerinde f^{-1} olarak değil de f olarak ele alınmıştır. $\langle\leftarrow\rangle$ ve $\langle\leftarrow\rangle^{+}$ içeren dil $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ ile gösterilmiştir. İlk gözlemimiz, temel seviyede bu yeni yorumun eskisinden güçlü olmadığı yönünde olmuştur. Yine yalnızca sabit ve periyodik yörüngeler elde edilmiş, sabit-değil, periyodik-değil ve $n-$periyodik-değil yörüngeler bile $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ nin kapasitesi dışında kalmıştır. Fakat, dile nominaller ve evrensel modalite eklenmesi ile ifade gücünün son derece hızlı ve etkili bir biçimde arttığı gösterilmiştir. Daha açık olarak, n-periyodik (her $n > 0$ için), bir süre sonra sabit, bir süre sonra n-periyodik, bir süre sonra periyodik, $m-$adım sabit, $m-$adım n-periyodik, $m-$adım periyodik yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilebilir olmuşlardır.

Bu yeni yorum dile nominaller ve evrensel diamond eklendiği andan itibaren *sonlu* yörünge davranışlarının iyi bir analizini yapabilmemizi sağlamıştır. Yine de, yörüngelerin yakınsaklığını ve ıraksaklığını ifade edebilmek için bir yorumsal değişikliğe daha gereksinim duyulur. 'Uzaysal' box ı *iç* operatörü olarak yorumlamak yerine *limit* operatörü olarak yorumlamak önerilmiştir. Karşılık gelen modalite $[d]$ ile gösterilmektedir. Yığılma noktalarının kümesi yorumunun, kapanış operatörü yorumundan genel olarak daha güçlü olduğu bilinmektedir (Bezhanishvili, G., Esakia, L. and Gabelaia, D., 2005). Bu durum dinamik topolojik lojik söz konusu iken de korunmaktadır. Özel olarak, yakınsak ve ıraksak yörüngeler

$\texttt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ dilinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirdir:

$$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+}i \wedge A((\langle\leftarrow\rangle^{+}i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+}j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftarrow\rangle^{+}i)$$

$$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+}i \wedge A(((\langle\leftarrow\rangle^{+}i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+}j) \wedge [d]\neg\langle\leftarrow\rangle^{+}i)),$$

Böylece, amaçlanan ifade gücüne sahip ve aynı zamanda güçlü $\downarrow$ bağlama operatörünü içermeyen bir ikinci dil $\texttt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ elde edilmiştir.

Bu sonuçlar, ‘zamansal’ operatörün tarafımızdan yapılan yorumunun topolojik dinamik sistemler hakkında modal çıkarım yapma alanında çalışan araştırmacılar için yeni ve etkili bir bakış açısı sağladığını ortaya koymaktadır. Bulgularımızın dinamik topolojik lojikler alanında göz önünde bulundurulmaya değer alternatif bir araştırma alanına yol açmasını umuyoruz.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezin anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla bazı temel terim ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1 (Engelking, R., 1989) Bir $X = (X, \tau)$ *topolojik uzayı*, boştan farklı bir X kümesi ve X in alt kümelerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir τ koleksiyonundan oluşur:

a) $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$,

b) $U_1 \in \tau$ ve $U_2 \in \tau$ ise $U_1 \bigcap U_2 \in \tau$,

c) Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \tau$.

τ nin elemanları *açıklar* ve açıkların tümleyenleri *kapalılar* olarak adlandırılır. $x \in U \in \tau$ ise U ya x in bir *açık komşuluğu* denir. Bu tez boyunca bu U_x ile gösterilecek. Her U_x için $U_x \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ ise $x \in X$ noktasına $A \subset X$ in *yığılma noktası* denir. τ, X in tüm altkümelerinin kümesine eşit ise *ayrık topoloji* ve $\tau = \{X, \emptyset\}$ ise *aşikar topoloji* denir. $X = \mathbb{R}$ ve τ, her $x \in U$ için öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$ olacak şekilde $U \subset \mathbb{R}$ kümelerinin bir ailesi ise *doğal topoloji* adını alır. (X, τ) ve $(X^{'}, \tau^{'})$ iki topolojik uzay ve g, (X, τ) dan $(X^{'}, \tau^{'})$ ne bir dönüşüm olsun. $U \in \tau$ iken $g(U) \in \tau^{'}$ oluyorsa g bir *açık dönüşüm*, $U^{'} \in \tau^{'}$ iken $g^{-1}(U^{'}) \in \tau$ oluyorsa g bir *sürekli dönüşüm*, ve her ikisi de sağlanıyorsa bir *iç dönüşüm* adını alır. Her $y \in Y$ için $g^{-1}(y)$, X in bir ayrık alt uzayı ise g *noktasal ayrıktır*. g bir iç dönüşüm ve noktasal ayrık ise bir $d-$*dönüşüm* adını alır.

Tanım 2.2 (Blackburn, P., Rijke, M. and Venema Y., 2001) *Temel modal dil*, önerme harflerinin bir $PROP = \{p, q, r, ...\}$ sayılabilir kümesi, boole bağlaçları $\wedge, \neg$, doğruluk sabiti $\top$ ve bir modal box operatörü $[c]$ den oluşur. Modal formüller aşağıdaki şekilde inşa edilir:

$$\phi ::= \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi;$$

$\langle c \rangle \phi$, $\neg[c]\neg\phi$ için bir kısaltmadır.

Şimdi temel modal dil için topolojik modelleri hatırlayalım:

Tanım 2.3 (McKinsey and Tarski, 1944) Bir M *topolojik modeli* bir (X, υ) sıralı ikilisidir; burada X bir topolojik uzay ve $\nu : PROP \rightarrow \wp(X)$ önerme harflerini X in alt kümelerine gönderen bir valuasyondur. $M, x \vDash \phi$ gösterimi (ya da basitçe $x \vDash \phi$) "M topolojik modelinin x noktasında ϕ formülü doğrudur" anlamına gelir. Doğruluk tanımı aşağıdaki şekilde devam eder:

$$
\begin{array}{lcl}
M, x \vDash \top & \Leftrightarrow & \text{daima} \\
M, x \vDash p & \Leftrightarrow & x \in \upsilon(p) \\
M, x \vDash \neg\phi & \Leftrightarrow & M, x \nvDash \phi \\
M, x \vDash \phi \wedge \psi & \Leftrightarrow & M, x \vDash \phi \text{ ve } M, x \vDash \psi \\
M, x \vDash [c]\phi & \Leftrightarrow & \exists U_x \in \tau \text{ vardır ki } \forall y \in U_x,\ M, y \vDash \phi
\end{array}
$$

$X \vDash \phi$ (ϕ, X de geçerlidir), her υ valuasyonu için $(X, \upsilon) \vDash \phi$ anlamına gelir.

3. YÖRÜNGE DAVRANIŞLARININ SINIFLANDIRILMASI

Tanım 3.1 (Brown, J., R., 1976) and (Katok, A. and Hasselblatt, B., 1998) Bir *topolojik dinamik sistem* (tds) bir (X, f) sıralı ikilisidir; burada X bir topolojik uzay ve f, X üzerinde bir sürekli fonksiyondur.

Tanım 3.2 Bir $x \in X$ noktasının bir (X, f) tds üzerindeki *yörüngesi*, x i ve f nin x üzerinde tüm iterasyonlarını içeren bir $O_x = \{x, f(x), f^2(x), ..., f^n(x), ...\}$ kümesidir.

Örneğin, iterasyon için kullandığımız fonksiyon $f(x) = x^2$ ise $x_0 = 2$ başlangıç noktasının yörüngesi $O_2 = \{2, 4, 16, ..., 2^n, ...\}$ dir. Bir x noktasının yörüngesi, O_x kümesi sonlu ise *sonlu*, aksi durumda *sonsuz* olarak adlandırılır.

Aşağıda görülebileceği gibi, farklı başlangıç değerlerinin aynı fonksiyon altındaki yörüngeleri farklı davranabilirler:

Örnek 3.3 $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^2$ ve τ, $\mathbb{R}$ üzerinde doğal topoloji olsun. 0, $\frac{1}{3}$, 1 ve -1 noktalarının $(\mathbb{R}, f)$ tds üzerindeki yörüngeleri aşağıdaki gibidir:

a) $O_0 = \{0, 0, 0, ...\}$,

b) $O_{\frac{1}{3}} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{14}{81}, ...\}$,

c) $O_1 = \{1, 0, 0, ...\}$,

d) $O_{-1} = \{-1, -2, -6, -42, ...\}$.

Örnek 3.4 $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 5\}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$ ve τ, X üzerinde ayrık topoloji olsun. (X, f) tds üzerinde

$$O_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, ..., 4, 3, ...\}$$

dir.

Örnek 3.5 $X = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ve τ, X üzerinde doğal topoloji olsun. (X, f) tds üzerinde

$$O_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$$

dir.

(X, f) bir tds olsun. $x \in X$ noktalarının f fonksiyonu altındaki yörüngeleri aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

Sabit yörünge: x noktasının yörüngesi *sabit* ve x in kendisi *sabitlenmiş nokta* olarak adlandırılır ancak ve ancak $f(x) = x$ dir.

n**-periyodik yörünge:** x noktasının yörüngesi n*-periyodik* olarak adlandırılır ancak ve ancak sabit değildir, $f^n(x) = x$ ve her $1 < m < n$ için $f^m(x) \neq x$ dir.

Periyodik yörünge: x noktasının yörüngesi *periyodik* olarak adlandırılır ancak ve ancak öyle bir $n > 1$ için n-periyodiktir veya sabittir.

P, yörüngelerin herhangi bir özelliği olsun.

$m-$**adım** P **yörünge:** Herhangi bir $m > 0$ için x noktasının yörüngesi $m-$*adım* P olarak adlandırılır ancak ve ancak $O_{f^m(x)}$, P özelliğine sahiptir ve her $n < m$ için $O_{f^n(x)}$, $P-$değil özelliğine sahiptir.

Bir süre sonra P **yörünge:** x noktasının yörüngesi *bir süre sonra* P olarak adlandırılır ancak ve ancak öyle bir $m > 0$ için $m-$adım P dir.

Yakınsak yörünge: x noktasının yörüngesi *yakınsak* olarak adlandırılır ancak ve ancak periyodik değildir, bir süre sonra periyodik değildir ve en az bir yığılma noktasına sahiptir.

Iraksak yörünge: x noktasının yörüngesi *ıraksak* olarak adlandırılır ancak ve ancak periyodik değildir, bir süre sonra periyodik değildir ve herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir.

Yukarıdaki sınıflandırmanın ışığında aşağıdaki örnekler verilebilir:

Örnek 3.6 $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve τ, $\mathbb{R}$ üzerinde doğal topoloji olsun.

$(\mathbb{R}, f)$ tds üzerinde,

a) $O_1 = \{1, 1, 1, ...\}$ sabit yörünge, 1 sabitlenmiş nokta,

b) $O_{-1} = \{-1, 1, 1, ...\}$ 1-adım sabit yörünge, dolayısıyla, bir süre sonra sabit yörünge,

c) $O_{\frac{1}{3}} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, ...\}$ yakınsak yörünge,

d) $O_5 = \{5, 25, 625, ...\}$ ıraksak yörünge.

Örnek 3.7 $X = \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$ ve τ, $\mathbb{R}$ üzerinde ayrık topoloji olsun. $(\mathbb{R}, f)$ tds üzerinde,

a) $O_1 = \{1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...\}$ 2-periyodik yörünge, dolayısıyla, periyodik yörünge,

b) $O_{-1} = \{-1, 0, 1, 0, 1, ..., 0, 1, ...\}$ 1-adım 2-periyodik yörünge, dolayısıyla, 1-adım periyodik yörünge, bir süre sonra 2-periyodik yörünge ve bir süre sonra periyodik yörünge.

4. $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ TEMEL DİNAMİK DİLİNİN İFADE GÜCÜ

Bu bölümde, $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ temel dinamik dilinin ifade gücünü inceleyeceğiz.

Tanım 4.1 (Kremer, P. and Mints, G., 1997) $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ *temel dinamik dili*, önerme harflerinin bir $PROP = \{p, q, r, ...\}$ sayılabilir kümesi, boole bağlaçları $\wedge, \neg$, doğruluk sabiti $\top$, modal box operatörü $[c]$ ve zamansal operatörler $\langle\rightarrow\rangle$(bir sonraki an), $\langle\rightarrow\rangle^+$(bir süre sonra) dan oluşur. Daha açık olarak, $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ formüller aşağıdaki yinelemeli tanım ile verilir:

$$\phi ::= \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid \langle\rightarrow\rangle\phi \mid \langle\rightarrow\rangle^+\phi;$$

$\langle c\rangle\phi$, $\neg[c]\neg\phi$ için bir kısaltmadır ve $[\rightarrow]^+$(gelecekte her zaman), $\langle\rightarrow\rangle^+$ nın dualidir. $\langle\rightarrow\rangle$ kendisinin dualidir, yani $\neg\langle\rightarrow\rangle\psi \equiv \langle\rightarrow\rangle\neg\psi$.

Şimdi, temel dinamik dil için topolojik dinamik modelleri hatırlayalım:

Tanım 4.2 (Katok, A. and Hasselblatt, B., 1998) Bir M *topolojik dinamik modeli* (tdm) bir (X, f, υ) sıralı üçlüsüdür; burada (X, f) bir tds ve υ her bir önermesel değişkeni X in bir altkümesine eşleyen bir valuasyon fonksiyonudur. Doğruluk tanımı aşağıdaki biçimde sürdürülür:

$$
\begin{aligned}
M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle\phi \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = y \text{ ve } M, y \vDash \phi,\\
M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle^+\phi \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n > 0 \text{ vardır ki } f^n(x) = y \text{ ve } M, y \vDash \phi,\\
M, x \vDash [\rightarrow]^+\phi \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n > 0 \text{ için } f^n(x) = y \text{ ise } M, y \vDash \phi.
\end{aligned}
$$

$(X, f), x \vDash \phi$ (ϕ, x noktasında geçerlidir) her υ valuasyonu için $(X, f, \upsilon), x \vDash \phi$ anlamına gelir.

Yörüngelerin bir P özelliği için aşağıdaki çift yönlü gerektirme sağlanacak şekilde öyle bir $\varphi \in L$ formülü var ise P, verilen bir L dili ve $\vDash$ yorumu altında $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde ifade edilebilir:

$$(X, f), x \vDash \varphi \quad \Leftrightarrow \quad O_x, \;\; P \text{ özelliğine sahiptir.}$$

Dolayısıyla, ifade gücünün sorgulanmasında *noktalı yapılar*da geçerlilik kavramı göz önünde bulundurulacaktır.

Teorem 4.3 Sabit ve periyodik yörüngeler, $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ temel dinamik dili ile sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$,

b) $p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle^+ p$.

Kanıt

a) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin sabit olduğu kabul edilsin. $(X, f), x \vDash p$ olsun. Bu durumda, bu formül her valuasyon altında doğrudur. Özel olarak, $\upsilon(i) = \{x\}$ seçilsin. Karşılık gelen (X, f, υ) tdm, M ile gösterilsin. Buradan, $M, x \vDash p$ dir.

$f(x) = x$ olduğundan bu $M, f(x) \vDash p$ olarak yazılabilir. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından $M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle p$ sonuçlanır. Bu nedenle, $M, x \vDash p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$ dir. Sonuç olarak, $(X, f), x \vDash p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \vDash p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$ olduğu kabul edilsin. Dolayısıyla, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğrudur. Özel olarak, $\upsilon(p) = \{x\}$ olacak şekilde bir υ valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Buradan, her $M = (X, f, \upsilon)$ tdm için $M, x \vDash p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$ dir. Aynı zamanda $\upsilon(p) = \{x\}$ olduğundan $M, x \vDash p$ ye de sahibiz. Bunu $M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle p$ izler. Dolayısıyla, $M, f(x) \vDash p$. $\upsilon(p) = \{x\}$ olduğundan $f(x) = x$ elde edilir.

b) $a)$ ile benzer şekilde kanıtlanabilir.

$\square$

4.1 $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle, E}$ Dilinde İfade Edilemezlik

Diğer yandan, E evrensel modalitesi bir formülün bir modelin herhangi bir yerinde sağlandığını ifade etmemize olanak sağlar: $E\phi$ bir x noktasında doğrudur ancak ve ancak ϕ yi sağlayan öyle bir y noktası vardır (x ile ilişkili olmak zorunda değil). $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ temel dinamik dilinin evrensel diamond ile zenginleştirilmesi ile elde edilen dil $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle, E}$ nin formülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi ::= \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid \langle\rightarrow\rangle\phi \mid \langle\rightarrow\rangle^{+}\phi \mid E\phi;$$

burada $p \in PROP$ dir. E nin duali A ile gösterilir.

4.1.1 Geçerlilik koruyan dönüşümler: bisimilasyonlar ve morfizmalar

Tanım 4.4 $X = (X, \tau)$ ve $X^{'} = (X^{'}, \tau^{'})$ topolojik uzaylar olmak üzere $M = (X, f, \upsilon)$ ve $M^{'} = (X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ iki tdm olsun. aşağıdaki koşullar sağlanıyor ise $\mathcal{Z} : M \rightarrow M^{'}$ bağıntısına bir "$D_{\langle\rightarrow\rangle, E}$-bisimülasyon" denir:

$D_{\langle\rightarrow\rangle, E}b_1)$ Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise her $p \in PROP$ için $x \in \upsilon(p)$ ancak ve ancak $x^{'} \in \upsilon^{'}(p)$ dir,

$D_{\langle\rightarrow\rangle, E}b_2)$ $U \in \tau$ ise $\mathcal{Z}[U] \in \tau^{'}$,

$D_{\langle\rightarrow\rangle, E}b_3)$ $U^{'} \in \tau^{'}$ ise $\mathcal{Z}^{-1}[U^{'}] \in \tau$,

$D_{\langle\to\rangle,E}b_4$) Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise $f(x)\mathcal{Z}f^{'}(x^{'})$,

$D_{\langle\to\rangle,E}b_5$) Her $y \in X$ için $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'} \in X^{'}$ ve her $y^{'} \in X^{'}$ için $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

Teorem 4.5 $X = (X, \tau)$ ve $X^{'} = (X^{'}, \tau^{'})$ topolojik uzaylar olmak üzere $M = (X, f, \upsilon)$ ve $M^{'} = (X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ iki tdm olsun. $\mathcal{Z}$, M ve $M^{'}$ arasında bir $D_{\langle\to\rangle,E}$-bisimülasyon ise her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise $M, x \vDash \phi$ ancak ve ancak $M^{'}, x^{'} \vDash \phi$.

Kanıt ϕ nin karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\underline{\phi :: p}$ olsun. $D_{\langle\to\rangle,E}b_1$ den $M, x \vDash p \Leftrightarrow M^{'}, x^{'} \vDash p$ dir.

$\underline{\phi :: \varphi}$ olsun ve $M, x \vDash \varphi \Leftrightarrow M^{'}, x^{'} \vDash \varphi$ olduğu kabul edilsin,

$\underline{\phi :: \neg\varphi}$ olsun. $M, x \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow M^{'}, x^{'} \vDash \neg\varphi$ doğrudan tümevarım adımından elde edilir.

$\underline{\phi :: \varphi \wedge \psi}$ olsun. $M, x \vDash \varphi \wedge \psi$ olduğu varsayılsın. Böylece, $M, x \vDash \varphi$ ve $M, x \vDash \psi$. Dolayısıyla, tümevarım adımından $M^{'}, x^{'} \vDash \varphi$ ve $M^{'}, x^{'} \vDash \psi$ dir. Buradan, $M^{'}, x^{'} \vDash \varphi \wedge \psi$ elde edilir.

$\underline{\phi :: [c]\varphi}$ olsun. $M, x \vDash [c]\varphi$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla, x in öyle bir U açık komşuluğu vardır ki $M, U \vDash \varphi$ dir. $D_{\langle\to\rangle,E}b_2$ den $\mathcal{Z}[U]$, $x^{'}$ nün bir açık komşuluğudur ve tümevarım hipotezinden $M^{'}, \mathcal{Z}[U] \vDash \varphi$ elde edilir. Buradan, $M^{'}, x^{'} \vDash [c]\varphi$ olur. Diğer yön $D_{\langle\to\rangle,E}b_3$ yardımı ile benzer şekilde ispatlanabilir.

$\underline{\phi :: \langle\to\rangle\varphi}$ olsun. $M, x \vDash \langle\to\rangle\varphi$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla, $M, f(x) \vDash \varphi$ dir. $D_{\langle\to\rangle,E}b_4$ den $f(x)\mathcal{Z}f^{'}(x^{'})$ ne sahibiz ve tümevarım hipotezinden, $M^{'}, f^{'}(x^{'}) \vDash \varphi$ elde edilir. Buradan, $M^{'}, x^{'} \vDash \langle\to\rangle\varphi$ olur. Diğer yön benzer şekilde ispatlanabilir.

$\underline{\phi :: E\varphi}$ olsun. $M, x \vDash E\varphi$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla, öyle bir $y \in X$ vardır ki $M, y \vDash \varphi$ dir. $D_{\langle\to\rangle,E}b_5$ den öyle bir $y^{'} \in X^{'}$ vardır ki $y\mathcal{Z}y^{'}$ olur. Tümevarım hipotezinden, $M^{'}, y^{'} \vDash \varphi$ elde edilir. Buradan, $M^{'}, x^{'} \vDash E\varphi$ dir. Diğer yön benzer şekilde ispatlanabilir.

İddia 1 $M = (X, f, \upsilon)$ ve $M^{'} = (X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ iki tdm, $x \in X$ ve $x^{'} \in X^{'}$ olsun. $\mathcal{Z} : M \to M^{'}$ bir $D_{\langle\to\rangle,E}-$bisimülasyon ve $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise her $m > 0$ için $f^m(x)\mathcal{Z}(f^{'})^m(x^{'})$ dir.

Kanıt m üzerinde tümevarımla yapılır.

$\underline{m=1}$ $D_{\langle\to\rangle,E}b_4$ den $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise $f(x)\mathcal{Z}f^{'}(x^{'})$,

$\underline{m=k}$ $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise $f^k(x)\mathcal{Z}(f^{'})^k(x^{'})$ olduğu varsayılsın,

$\underline{m=k+1}$ $f(x)\mathcal{Z}f^{'}(x^{'})$ olduğundan tümevarım adımından $f^k(f(x))\mathcal{Z}$ $(f^{'})^k(f^{'}(x^{'}))$ elde edilir. Buradan, $f^{k+1}(x)\mathcal{Z}(f^{'})^{k+1}(x^{'})$ sonuçlanır. □

$\underline{\phi :: \langle\to\rangle^+\varphi}$ olsun. $M,x\vDash\langle\to\rangle^+\varphi$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla, öyle bir $m>0$ vardır ki $M,f^m(x)\vDash\varphi$ dir. İddia 1 den $f^m(x)\mathcal{Z}(f^{'})^m(x^{'})$ ve tümevarım hipotezinden, $M^{'},(f^{'})^m(x^{'})\vDash\varphi$ elde edilir. Buradan, $M^{'},x^{'}\vDash\langle\to\rangle^+\varphi$ sonuçlanır. Diğer yön benzer şekilde ispatlanabilir.

$\underline{\phi :: [\to]^+\varphi}$ olsun. $M,x\vDash[\to]^+\varphi$ olduğu varsayılsın. Dolayısıyla, her $n>0$ için $M,f^n(x)\vDash\varphi$ dir. İddia 1 den, $f^n(x)\mathcal{Z}(f^{'})^n(x^{'})$ ve tümevarım hipotezinden, $M^{'},(f^{'})^n(x^{'})\vDash\varphi$ elde edilir. Buradan, $M^{'},x^{'}\vDash[\to]^+\varphi$ sonuçlanır. Diğer yön benzer şekilde ispatlanabilir. □

Tanım 4.6 (X,f) ve $(X^{'},f^{'})$ iki tds olsun. Aşağıdakileri sağlayan bir $g:(X,f)\to(X^{'},f^{'})$ dönüşümüne bir "$D_{\langle\to\rangle,E}$-p.morfizma" adı verilir:

$D_{\langle\to\rangle,E}p_1)$ açık dönüşüm,

$D_{\langle\to\rangle,E}p_2)$ sürekli dönüşüm,

$D_{\langle\to\rangle,E}p_3)$ $gof=f^{'}og$,

$D_{\langle\to\rangle,E}p_4)$ g örten.

Teorem 4.7 $g:(X,f)\to(X^{'},f^{'})$ bir $D_{\langle\to\rangle,E}-p.morfizma$ olsun. Her ϕ modal formülü ve her $x\in X$ için $(X,f),x\vDash\phi$ ise $(X^{'},f^{'}),g(x)\vDash\phi$ dir.

Kanıt Öyle bir $\upsilon^{'}$ için $(X,f),x\vDash\phi$ ve $(X^{'},f^{'},\upsilon^{'}),g(x)\nvDash\phi$ olduğu kabul edilsin. υ valuasyonu $\upsilon(p)=g^{-1}(\upsilon^{'}(p))$ ile tanımlansın. g nin grafı (X,f,υ) ve $(X^{'},f^{'},\upsilon^{'})$ arasında bir $D_{\langle\to\rangle,E}-$bisimülasyondur. Dolayısıyla, Teorem 5.2 den $(X,f,\upsilon),x\nvDash\phi$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(X^{'},f^{'}),g(x)\vDash\phi$ dir. □

Teorem 4.8 $m > 0$ veya $n > 1$ için $m-$adım $n-$periyodik yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

Kanıt $m > 0$ veya $n > 1$ olduğu kabul edilsin, $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < m+n\}$ ve

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < m+n-1 \\ m, & x = m+n-1 \end{cases}$$

olsun. τ, X üzerinde ayrık topoloji, $X^{'} = \{x^{'}\}$, $f^{'}(x^{'}) = x^{'}$, $\tau^{'}$, $X^{'}$ üzerinde tek olası topoloji ve $g(x) = x^{'}$ olmak üzere $g : (X, f) \to (X^{'}, f^{'})$ dönüşümü göz önünde bulundurulsun. g nin bir $D_{\langle\to\rangle,E} - p.morfizma$ olduğu kolayca görülür. 0 noktasının (X, f) üzerindeki yörüngesi $m-$adım n-periyodiktir. $D_{\langle\to\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan $g(0) = x^{'}$ noktasının $(X^{'}, f^{'})$ üzerinde yörüngesi de $m-$adım n-periyodik olmalıdır, fakat sabittir. $m > 0$ veya $n > 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $m > 0$ veya $n > 1$ için $m-$adım n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler. □

Sonuç 4.9 Yörüngelerin aşağıdaki özellikleri $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler:

a) n-periyodik$(n > 1)$,

b) $m-$adım sabit$(m > 0)$,

c) $m-$adım periyodik$(m > 0)$,

d) Bir süre sonra sabit,

e) Bir süre sonra n-periyodik$(n > 1)$,

f) Bir süre sonra periyodik.

Kanıt

a) $m = 0$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır,

b) $n = 1$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır,

c) Her $n > 0$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır,

d) Her $m > 0$ ve $n = 1$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır,

e) Her $m > 0$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır,

f) Her $m > 0$ ve her $n > 0$ için Teorem 4.8 den sonuçlanır.

□

Teorem 4.10 Yakınsak ve ıraksak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

Kanıt $X = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, τ, X üzerinde doğal topoloji, $X' = \{1\}$, $f'(x') = 1$, τ', X' üzerinde tek olası topoloji ve $g(x) = 1$ olacak şekilde bir $g : (X, f) \to (X', f')$ dönüşümünü alınsın. g nin bir $D_{\langle\to\rangle,E} - p.morfizma$ olduğu kolayca görülür. 1 noktasının (X, τ) üzerindeki yörüngesi yakınsaktır. $D_{\langle\to\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan, $g(1) = 1$ noktasının (X', τ') üzerindeki yörüngesi de yakınsak olmalıdır, ancak sabittir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, yakınsak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

$X = \mathbb{R}^+$ yerine $X = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ alındığında 1 noktasının (X, τ) üzerindeki yörüngesi ıraksak olur. $D_{\langle\to\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan $g(1) = 1$ noktasının (X', τ') üzerindeki yörüngesi de ıraksak olmalıdır, ancak sabittir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, ıraksak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

$\square$

$\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\to\rangle,E}$ ve $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\to\rangle,E}$ dilleri için elde edilen ifade gücü sonuçları aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Sabit	$p \to \langle\to\rangle p$
Periyodik	$p \to \langle\to\rangle^+ p$
n**-periyodik**	ifade edilemez
Bir süre sonra sabit	ifade edilemez
Bir süre sonra periyodik	ifade edilemez
Bir süre sonra n**-periyodik**	ifade edilemez
$m-$**adım sabit**	ifade edilemez
$m-$**adım periyodik**	ifade edilemez
$m-$**adım** n**-periyodik**	ifade edilemez
Yakınsak	ifade edilemez
Iraksak	ifade edilemez

Tablo 1: $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\to\rangle,E}$ ve $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\to\rangle,E}$

4.2 Melez Dinamik Dillerin İfade Güçleri

Bu bölümde, amaçlanan ifade gücünü elde etmek için ilk olarak $\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle}$ temel dinamik diline *nominaller* ve @ *gerçekleme operatörü* eklenecek, daha sonra $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle}$ dili sırasıyla $\downarrow$ *bağlayıcısı* ve E *evrensel modalitesi* ile genişletilecektir.

4.2.1 $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle}$ nin ifade gücü

Temel modal dilin ifade gücünü arttırmak için dile nominaller eklenebilir. Tek elemanlı kümeleri temsil eden *nominaller* genellikle $i, j, k, ...$ harfleri ile gösterilir. Nominaller için doğruluk tanımı önerme harflerinde olduğu gibidir: $M, x \models i \Leftrightarrow v(i) = \{x\}$. Nominaller içeren modal diller *melez diller* olarak adlandırılırlar. Sadece nominaller içeren ve hiçbir önerme harfi içermeyen melez formüllere *saf melez formüller* denir.

$\mathtt{DL}_{\langle\to\rangle}$ nin nominaller ve gerçekleme operatörü ile genişletilmesi olan $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle}$ dinamik melez dili aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.11 (Blackburn, P., 1993) Önerme harflerinin bir $PROP$ sayılabilir kümesi ve nominallerin $PROP$ dan ayrık bir NOM sayılabilir kümesi verilsin. $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle}$ nin formülleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi ::= \top \mid p \mid i \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid @_i\phi \mid \langle\to\rangle\phi \mid \langle\to\rangle^+\phi;$$

burada $p \in PROP$ ve $i \in NOM$ dir.

ϕ nin bir ikame örneği, nominallerin yerine sadece nominallerin koyulabileceği ek koşulu ile önermesel lojikte olduğu gibi tanımlıdır.

Tanım 4.12 Bir M melez tdm bir (X, f, v) sıralı üçlüsüdür; burada (X, f) bir tds, v her bir önermesel değişkeni X in bir altkümesine ve her bir nominali X in bir tek elemanlı alt kümesine eşleyen bir valuasyon fonksiyonudur. @ nin semantiği aşağıdaki gibidir:

$$M, x \models @_i\phi \quad \Leftrightarrow \quad v(i) = \{y\} \text{ için } M, y \models \phi$$

Yörüngelerin bir P özelliği, verilen bir L dilinde, verilen bir $\models$ yorumu altında modeller seviyesinde ifade edilebilir ancak ve ancak verilen bir M modelinde aşağıdaki çift yönlü gerektirme sağlanacak şekilde bir $\varphi(i)$ formülü vardır:

$M \models @_i\varphi(i)$ ancak ve ancak i nominali tarafından adlandırılan noktanın yörüngesi

P özelliğine sahiptir.

Teorem 4.13 Sabit, periyodik ve n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ de modeller seviyesinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $\langle\rightarrow\rangle i$,

b) $\langle\rightarrow\rangle^{+} i$,

c) $\neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^{k} i$.

Kanıt i tarafından adlandırılan nokta x olsun.

a) ($\Rightarrow$) x noktasının yörüngesinin sabit olduğu kabul edilsin. O zaman, $f(x) = x$ dir. $M, x \models i$ olduğundan $M, f(x) \models i$ elde edilir. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından $M, x \models \langle\rightarrow\rangle i$ sonuçlanır. Sonuç olarak, $M \models @_i\langle\rightarrow\rangle i$ dir.

($\Leftarrow$) $M \models @_i\langle\rightarrow\rangle i$ olduğu kabul edilsin. i tarafından adlandırılan nokta x olduğundan $M, x \models \langle\rightarrow\rangle i$ elde edilir. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından $M, f(x) \models i$ sonuçlanır. i bir nominal olduğundan $f(x) = x$ dir.

b) $a)$ ile benzer şekilde kanıtlanabilir.

c) Bir $n > 1$ için,

($\Rightarrow$) x noktasının yörüngesinin $n-$periyodik olduğu kabul edilsin. O halde, $f^n(x) = x$ dir. i tarafından adlandırılan nokta x olduğundan $M, x \models i$ ve böylece $M, f^n(x) \models i$ olur. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından bunu $M, x \models \langle\rightarrow\rangle^n i$ izler. Şimdi $M, x \models \langle\rightarrow\rangle^k i$ olacak şekilde bir $0 < k < n$ olduğu varsayılsın. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından $M, f^k(x) \models i$ sonuçlanır. i bir nominal olduğundan $f^k(x) = x$ dir ve bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, her $0 < k < n$ için $M, x \models \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ dir. Bu $M, x \models \neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ olarak yazılabilir. Buradan, $M, x \models \neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ elde edilir. Sonuç olarak, $M \models @_i(\neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i)$ dir.

($\Leftarrow$) $M \vDash @_i(\neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i)$ olduğu kabul edilsin. i tarafından adlandırılan nokta x olduğundan, $M, x \vDash \neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ dir. Bu $M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle^n i$ ve $M, x \vDash \bigwedge_{k=1}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ olarak yazılabilir. Bu yüzden, $M, f^n(x) \vDash i$ ve her $0 < k < n$ için $M, x \vDash \neg\langle\rightarrow\rangle^k i$ olur. i bir nominal olduğundan $f^n(x) = x$ dir. Şimdi $f^k(x) = x$ olacak şekilde bir $0 < k < n$ olduğu varsayılsın. $M, x \vDash i$ olduğundan $M, f^k(x) \vDash i$ elde edilir. $\langle\rightarrow\rangle$ nin tanımından $M, x \vDash \langle\rightarrow\rangle^k i$ sonuçlanır ve bu bir çelişkidir. Böylece, her $0 < k < n$ için $f^k(x) \neq x$ dir. Sonuç olarak, x noktasının yörüngesi n-periyodiktir.

$\square$

Yardımcı Teorem 4.14 Yörüngelerin P ve Q özellikleri modeller seviyesinde sırasıyla $\phi(i)$ ve $\varphi(i)$ tarafından ifade edilebiliyorsa, $P-$değil, P ve Q, P veya Q modeller seviyesinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\neg\phi(i)$,

b) $\phi(i) \wedge \varphi(i)$,

c) $\phi(i) \vee \varphi(i)$.

Kanıt "$M \vDash @_i\phi(i) \quad \Leftrightarrow \quad i$ nominali tarafından adlandırılan noktanın yörüngesi P özelliğine sahiptir" ve "$M \vDash @_i\varphi(i) \quad \Leftrightarrow \quad i$ nominali tarafın dan adlandırılan noktanın yörüngesi Q özelliğine sahiptir" olduğu bilinmektedir.

a) Doğrudan elde edilir.

b) $M \vDash @_i(\phi(i) \wedge \varphi(i))$ olduğu kabul edilsin. $\upsilon(i) = \{x\}$ olsun. Bu durumda, $M, x \vDash \phi(i) \wedge \varphi(i) \Leftrightarrow M, x \vDash \phi(i)$ ve $M, x \vDash \varphi(i) \Leftrightarrow M \vDash @_i\phi(i)$ ve $M \vDash @_i\varphi(i)$ $\Leftrightarrow i$ nominali tarafından adlandırılan noktanın yörüngesi P ve Q özelliğine sahiptir.

c) $M \vDash @_i(\phi(i) \vee \varphi(i))$ olduğu kabul edilsin. $\upsilon(i) = \{x\}$ olsun. Bu durumda, $M, x \vDash \phi(i) \vee \varphi(i) \Leftrightarrow M, x \vDash \phi(i)$ veya $M, x \vDash \varphi(i) \Leftrightarrow M \vDash @_i\phi(i)$ veya $M \vDash @_i\varphi(i) \Leftrightarrow i$ nominali tarafından adlandırılan noktanın yörüngesi P veya Q özelliğine sahiptir.

$\square$

Sonuç 4.15 Sabit-değil, periyodik-değil ve n-periyodik-değil yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ de modeller seviyesinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\neg\langle\rightarrow\rangle i$,

b) $\neg\langle\rightarrow\rangle^{+} i$,

c) $\langle\rightarrow\rangle i \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{k} i$.

Kanıt Teorem 4.13 ve Yardımcı Teorem 4.14 den sonuçlanır. □

Teorem 4.16 Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilsin ve $v(i) = \{x\}$ olsun. Bu durumda, P aynı zamanda $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \rightarrow \phi(i)$ ile ifade edilebilir.

Kanıt P nin modeller seviyesinde $\phi(i)$ tarafından ifade edilebildiği ve $v(i) = \{x\}$ olduğu, fakat $i \rightarrow \phi(i)$ nin $(X, f), x$ üzerinde P yi ifade etmediği kabul edilsin. $(X, f), x \models i \rightarrow \phi(i)$ olsun. Dolayısıyla, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olmalıdır. Özel olarak, $v(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir v valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Buradan, her $M = (X, f, v)$ melez tdm için $M, x \models i \rightarrow \phi(i)$ olur. Aynı zamanda $v(i) = \{x\}$ olduğundan $M, x \models i$ ye de sahibiz. Bunu $M, x \models \phi(i)$ izler. Bu $M \models @_i\phi(i)$ olarak yazılabilir. P modeller seviyesinde $\phi(i)$ tarafından ifade edilebildiğinden ve $v(i) = \{x\}$ olduğundan O_x, P özelliğine sahiptir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, P özelliği $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \rightarrow \phi(i)$ tarafından ifade edilebilir. □

Sonuç 4.17 Sabit-değil, periyodik-değil ve $n-$periyodik-değil yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle i$,

b) $i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle^{+} i$,

c) $i \rightarrow (\langle\rightarrow\rangle i \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{k} i)$.

Kanıt Sonuç 4.15 ve Teorem 4.16 dan sonuçlanır. □

Teorem 4.18 Yörüngelerin bir P özelliği bir $\phi(i)$ melez formülü tarafından modeller seviyesinde ifade edilebilir ve $v(i) = \{x\}$ ise $m-$adım P, $(X, f), x$

noktalı yapısı üzerinde $(i \to \neg\phi(i)) \wedge \langle\to\rangle^m (j \to \phi(j)) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s (k \to \neg\phi(k))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Kanıt

$(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin $m-$adım P olduğu kabul edilsin. O zaman, x noktasının yörüngesi $P-$değil, $f^m(x)$ noktasının yörüngesi P ve her $0 < s < m$ için $f^s(x)$ noktasının yörüngesi $P-$değildir. $f^m(x)$ ve $f^s(x)$ nın sırasıyla j ve k nominalleri tarafından adlandırıldıkları varsayılsın. x, i nominali tarafından adlandırıldığından, Yardımcı Teorem 4.14 den $M \vDash @_i\neg\varphi(i)$, $M \vDash @_j\varphi(j)$ ve $M \vDash @_k\neg\varphi(k)$ sonuçlanır. Dolayısıyla, Teorem 4.16 dan $(X,f), x \vDash i \to \neg\varphi(i)$, $(X,f), f^m(x) \vDash j \to \varphi(j)$ ve $(X,f), f^s(x) \vDash k \to \neg\varphi(k)$ dir. $\langle\to\rangle$ nin tanımından $(X,f), x \vDash \langle\to\rangle^m(j \to \varphi(j))$ ve her $0 < s < m$ için $(X,f), x \vDash \langle\to\rangle^s(k \to \neg\varphi(k))$ sonuçlanır. Bu $(X,f), x \vDash \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s(k \to \neg\varphi(k))$ olarak yazılabilir. Böylece, $(X,f), x \vDash (i \to \neg\varphi(i)) \wedge \langle\to\rangle^m(j \to \varphi(j)) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s(k \to \neg\varphi(k))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $(X,f), x \vDash (i \to \neg\varphi(i)) \wedge \langle\to\rangle^m(j \to \varphi(j)) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s(k \to \neg\varphi(k))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $(X,f), x \vDash i \to \neg\varphi(i)$, $(X,f), x \vDash \langle\to\rangle^m(j \to \varphi(j))$ ve $(X,f), x \vDash \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s(k \to \neg\varphi(k))$ dır. $\langle\to\rangle$ nin tanımından bunu $(X,f), x \vDash i \to \neg\varphi(i)$, $(X,f), f^m(x) \vDash j \to \varphi(j)$ ve her $0 < s < m$ için $(X,f), f^s(x) \vDash k \to \neg\varphi(k)$ izler. Yardımcı Teorem 4.14 ve Sonuç 4.17 den O_x, $P-$değil, $O_{f^m(x)}$, P ve her $0 < s < m$ için $O_{f^s(x)}$ $P-$değil olur. Böylece, O_x, $m-$adım P dir. $\square$

Sonuç 4.19 Sabit, periyodik ve n-periyodik, $m-$adım sabit, $m-$adım periyodik ve $m-$adım n-periyodik yörüngeler $(X,f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $i \to \langle\to\rangle i$,

b) $i \to \langle\to\rangle^+ i$,

c) $i \to \neg\langle\to\rangle i \wedge \langle\to\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\to\rangle^k i$,

d) $(i \to \neg\langle\to\rangle i) \wedge \langle\to\rangle^m(j \to \langle\to\rangle j) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\to\rangle^s(k \to \neg\langle\to\rangle k)$,

e) $(i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle^{+} i) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \langle\rightarrow\rangle^{+} j) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle^{+} k),$

f) $(i \rightarrow \langle\rightarrow\rangle i \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{t} i) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle j \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{l=2}^{n-1} [\rightarrow]^{l} \neg j) \wedge$
$\bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \langle\rightarrow\rangle k \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} k \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{t} k).$

Kanıt $a)$, $b)$ ve $c)$ Teorem 4.13 ve Teorem 4.16 dan, $c)$, $d)$, $e)$ ve $f)$ Teorem 4.13 ve Teorem 4.18 den sonuçlanır. □

4.2.2 $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ nin ifade gücü

Yörüngelerin bir süre sonra-özelliklerinin bile $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ ye E evrensel modalitesi ekleyerek ifade edilebilmeleri olası görünmediğinden daha güçlü bir operatör ile çalışılması gerektiği açıktır. Aşağı yönde ok operatörünün ifade gücünün çok fazla olduğu (Areces, C., Blackburn, P. and Marx, M., 2001) den bilindiğinden, bu bölümde $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ temel melez dinamik diline aşağı yönde ok operatörü eklenecektir. $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ nin durum değişkenleri ve $\downarrow$ bağlayıcısı ile genişletilmesi olan zenginleştirilmiş dil $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ aşağıdaki gibidir:

Tanım 4.20 Durum değişkenleri, eylemin o anki noktasını $\downarrow$ bağlayıcısı kullanarak bağlayabilir. Önerme harflerinin bir $PROP$ sayılabilir kümesi, nominallerin $PROP$ dan ayrık bir NOM sayılabilir kümesi ve durum değişkenlerinin $PROP$ ve NOM dan ayrık bir $SVAR = \{u, v, w, ...\}$ sayılabilir sonsuz kümesi verilsin. $\texttt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ nin formülleri aşağıdaki yinelemeli tanım ile verilir:

$$\phi ::= \top \mid p \mid i \mid u \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid @_i\phi \mid \langle\rightarrow\rangle\phi \mid \langle\rightarrow\rangle^{+}\phi \mid \ \downarrow u.\phi;$$

burada $p \in PROP$, $i \in NOM$ ve $u \in SVAR$ dir.

M bir tdm olsun; durum değişkenlerinin ve $\downarrow$ bağlayıcısının semantikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lcl} M, g, x \models u & \Leftrightarrow & g(u) = x \\ M, g, x \models \downarrow u.\phi & \Leftrightarrow & M, g^{[u \mapsto x]}, x \models \phi; \end{array}$$

burada $g^{[u \mapsto x]}$, u yu x e gönderen ve tüm diğer değişkenler için g ile aynı davranan bir atayıcıdır.

Yardımcı Teorem 4.21 Tek nominal içeren her φ saf melez formülü ve her M melez tdm için,

$$M, x \vDash \varphi(i) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \varphi(i := u)$$

dır; burada $:=$ ikameyi temsil eder.

Kanıt φ nin karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\underline{\varphi :: i}$ olsun. $M, x \vDash i \Leftrightarrow \upsilon(i) = \{x\} \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash u$,

$\underline{\varphi :: \phi(i)}$ olsun ve $M, x \vDash \varphi(i) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \varphi(i := u)$ olduğu kabul edilsin,

$\underline{\varphi :: \neg\phi(i)}$ olsun. $M, x \vDash \neg\phi(i) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \neg\phi(i := u)$ tümevarım adımından doğrudan elde edilir,

$\underline{\varphi :: \phi(i) \wedge \psi(i)}$ olsun. $M, x \vDash \phi(i) \wedge \psi(i) \Leftrightarrow M, x \vDash \phi(i)$ ve $M, x \vDash \psi(i)$. Tümevarım adımından, $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \phi(i := u)$ ve $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \psi(i := u)$ $\Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \phi(i := u) \wedge \psi(i := u)$,

$\underline{\varphi :: [c]\phi(i)}$ olsun. $M, x \vDash [c]\phi(i) \Leftrightarrow$ öyle bir $U_x \in \tau$ vardır ki $M, U_x \vDash \phi(i)$. Tümevarım adımından, $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, U_x \vDash \phi(i := u) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash [c]\phi(i := u)$,

$\underline{\varphi :: \langle\to\rangle\phi(i)}$ olsun. $M, x \vDash \langle\to\rangle\phi(i) \Leftrightarrow M, f(x) \vDash \phi(i)$. Tümevarım adımından, $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, f(x) \vDash \phi(i := u) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \langle\to\rangle\phi(i := u)$,

$\underline{\varphi :: \langle\to\rangle^+\phi(i)}$ olsun. $M, x \vDash \langle\to\rangle^+\phi(i) \Leftrightarrow$ öyle bir $n > 0$ vardır ki $M, f^n(x) \vDash \phi(i)$. Tümevarım adımından, $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, f^n(x) \vDash \phi(i := u) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash \langle\to\rangle^+\phi(i := u)$,

$\underline{\varphi :: [\to]^+\phi(i)}$ olsun. $M, x \vDash [\to]^+\varphi(i) \Leftrightarrow$ her $n > 0$ için $M, f^n(x) \vDash \varphi(i)$. Tümevarım adımından, $M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, f^n(x) \vDash \varphi(i := u) \Leftrightarrow M, g^{[u \mapsto \upsilon(i)]}, x \vDash [\to]^+\varphi(i := u)$. □

Teorem 4.22 Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilsin ve $\upsilon(i) = \{x\}$ olsun. Bu durumda, P aynı zamanda $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $\downarrow u.\phi(i := u)$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Kanıt P nin modeller seviyesinde $\phi(i)$ tarafından ifade edilebildiği ve $v(i) = \{x\}$ olduğu, fakat $\downarrow u.\phi(i := u)$ formülünün $(X, f), x$ üzerinde P yi ifade etmediği kabul edilsin. $(X, f), x \vDash \downarrow u.\phi(i := u)$ olduğu varsayılsın. O zaman, bu formül x noktasında her v valuasyonu ve her g atayıcısı altında doğru olmalıdır. Buradan, her $M = (X, f, v)$ tdm için $M, g, x \vDash \downarrow u.\phi(i := u)$ dir ve bunu $M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash \phi(i := u)$ izler. Yardımcı Teorem 4.21 den $v(i) = \{x\}$ ve $M, x \vDash \phi(i)$ dir. Dolayısıyla, $M \vDash @_i \phi(i)$ olur. Böylece, i nominali tarafından adlandırılan noktanın yörüngesi P özelliğine sahiptir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, P özelliğinin $(X, f), x$ üzerinde $\downarrow u.\phi(i := u)$ tarafından ifade edilebilir olduğu elde edilir. □

Sonuç 4.23 Sabit-değil, periyodik-değil ve $n-$periyodik-değil yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle,\downarrow}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\downarrow u.\neg\langle\to\rangle u,$

b) $\downarrow u.\neg\langle\to\rangle^{+} u,$

c) $\downarrow u.(\langle\to\rangle u \vee \neg\langle\to\rangle^{n} u \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\to\rangle^{k} u).$

Kanıt Teorem 4.13 ve Teorem 4.22 dan sonuçlanır. □

Tanım 4.24 Yörüngelerin herhangi bir P özelliği için, O_x, bir süre sonra $P-$değil özelliğine sahiptir ancak ve ancak O_x, P özelliğine sahiptir veya her $n > 0$ için $O_{f^n(x)}$, $P-$değil özelliğine sahiptir.

Teorem 4.25 Yörüngelerin bir P özelliğinin bir $\varphi(i)$ saf melez formülü ile ifade edilebildiği ve $v(i) = \{x\}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda "bir süre sonra P" ve "bir süre sonra $P-$değil" özellikleri $(X, f), x$ üzerinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\downarrow u.\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\to\rangle^{+} \downarrow v.\varphi(j := v),$

b) $\downarrow u.\varphi(i := u) \vee [\to]^{+} \downarrow v.\neg\varphi(j := v).$

Kanıt

a) $(\Rightarrow)$ O_x in bir süre sonra P özelliğine sahip olduğu kabul edilsin. O zaman, $v(i) = \{x\}$ ve $M \vDash @_i \neg\varphi(i)$ dir. Teorem 4.22 den $(X, f), x \vDash \downarrow u.\neg\varphi(i := u)$ elde edilir. Diğer yandan, $v(j) = \{f^n(x)\}$ ve $M \vDash @_j \varphi(j)$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Buradan ve Teorem 4.22 den $(X, f), f^n(x) \vDash \downarrow v.\varphi(j)$ olur ve $\langle\to\rangle^{+}$ nın tanımından $(X, f), x \vDash \langle\to\rangle^{+} \downarrow v.\varphi(j)$ sonuçlanır. Böylece, $(X, f), x \vDash \downarrow u.\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\to\rangle^{+} \downarrow v.\varphi(j)$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $(X, f), x \vDash \downarrow u.\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\to\rangle^+ \downarrow v.\varphi(j)$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her v valuasyonu ve her $g : SVAR \to X$ atayıcısı altında doğru olmalıdır. Buradan, her $M = (X, f, v)$ tdm için $M, g, x \vDash \downarrow u.\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\to\rangle^+ \downarrow v.\varphi(j := v)$ olur. O halde, $M, g, x \vDash \downarrow u.\neg\varphi(i := u)$ ve $M, g, x \vDash \langle\to\rangle^+ \downarrow v.\varphi(j := v)$ dir. Buna göre, $M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash \neg\varphi(i := u)$ dir ve $M, g, f^n(x) \vDash \downarrow v.\varphi(j := v)$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Böylece, $M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash \neg\varphi(i := u)$ ve $M, g^{[v \mapsto f^n(x)]}, f^n(x) \vDash \varphi(j := v)$ bulunur. O zaman, Yardımcı Teorem 4.21 den $v(i) = \{x\}$, $M \vDash @_i\neg\varphi(i)$, $v(j) = \{f^n(x)\}$ ve $M \vDash @_j\varphi(j)$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Bu nedenle O_x, $P-$değil özelliğine ve $O_{f^n(x)}$, P özelliğine sahip olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Sonuç olarak, O_x, bir süre sonra P özelliğine sahiptir.

b) ($\Rightarrow$) O_x in bir süre sonra $P-$değil özelliğine sahip olduğu kabul edilsin. O zaman, $v(i) = \{x\}$ ve $M \vDash @_i\varphi(i)$ dir veya her $n > 0$ için $v(j) = \{f^n(x)\}$ ise $M \vDash @_j\neg\varphi(j)$ dir. Böylece, Teorem 4.22 den $(X, f), x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u)$ veya $(X, f), f^n(x) \vDash \downarrow v.\neg\varphi(j)$ elde edilir. $[\to]^+$ nın tanımından bunu $(X, f), x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u)$ veya $(X, f), x \vDash [\to]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j)$ izler. O halde, $(X, f), x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u) \vee [\to]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j)$ dir.

($\Leftarrow$) $(X, f), x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u) \vee [\to]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j)$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her v valuasyonu ve her $g : SVAR \to X$ atayıcısı altında doğru olmalıdır. Buradan, her $M = (X, f, v)$ tdm için $M, g, x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u) \vee [\to]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j := v)$ olur. Bu nedenle, $M, g, x \vDash \downarrow u.\varphi(i := u)$ veya $M, g, x \vDash [\to]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j := v)$ elde edilir. Dolayısıyla, $M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash \varphi(i := u)$ veya $M, g, f^n(x) \vDash \downarrow v.\neg\varphi(j := v)$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Böylece, $M, g^{[u \mapsto x]}, x \vDash \varphi(i := u)$ veya $M, g^{[v \mapsto f^n(x)]}, f^n(x) \vDash \neg\varphi(j := v)$. Yardımcı Teorem 4.21 den $v(i) = \{x\}$ ve $M \vDash @_i\varphi(i)$ dir veya $v(j) = \{f^n(x)\}$ ve $M \vDash @_j\varphi(j)$ olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Bu nedenle, O_x, P özelliğine sahiptir veya her $n > 0$ için $O_{f^n(x)}$, $P-$ değil özelliğine sahiptir. Sonuç olarak, O_x, bir süre sonra $P-$değil özelliğine sahiptir.

□

Sonuç 4.26 Bir süre sonra sabit, bir süre sonra periyodik ve bir süre sonra n-periyodik yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\to\rangle,\downarrow}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\downarrow u.\neg\langle\to\rangle u \wedge \langle\to\rangle^+ \downarrow v.\langle\to\rangle v$,

b) $\downarrow u.\neg\langle\to\rangle^+ u \wedge \langle\to\rangle^+ \downarrow v.\langle\to\rangle^+ v$,

c) $\downarrow u.(\langle\to\rangle u \vee \neg\langle\to\rangle^n u \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\to\rangle^k u) \wedge \langle\to\rangle^+ \downarrow v.(\neg\langle\to\rangle v \wedge \langle\to\rangle^n v \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\to\rangle^k v)$.

Kanıt Teorem 4.13 ve Teorem 4.25 den sonuçlanır. $\square$

Tanım 4.27 O_x sonsuzdur ancak ve ancak O_x periyodik-değildir ve bir süre sonra periyodik-değildir.

Sonuç 4.28 Sonsuz yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ de $\downarrow u.\neg\langle\rightarrow\rangle^+ u \wedge [\rightarrow]^+ \downarrow v.\neg\varphi(j := v)$ formülü ile ifade edilebilir.

Kanıt Sonuç 4.23 ve Teorem 4.25 den sonuçlanır. $\square$

4.2.3 $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ nin ifade gücü

$\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ melez dinamik dilinin evrensel diamond ile zenginleştirilmesi ile elde edilen dil $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ aşağıdaki gibi tanımlıdır:

Tanım 4.29 Önerme harflerinin bir $PROP$ sayılabilir kümesi, nominallerin $PROP$ dan ayrık bir NOM sayılabilir kümesi ve durum değişkenlerinin $PROP$ ve NOM dan ayrık bir $SVAR = \{u, v, w, ...\}$ sayılabilir sonsuz kümesi verilsin. $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ nin formülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi ::= \top \mid p \mid i \mid u \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid @_i\phi \mid \langle\rightarrow\rangle\phi \mid \langle\rightarrow\rangle^+\phi \mid \downarrow \phi \mid E\phi;$$

burada $p \in PROP$, $i \in NOM$ ve $u \in SVAR$ dir.

Teorem 4.30 Yakınsak ve ıraksak yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle^+ u \wedge [\rightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^+ v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$,

b) $\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle^+ u \wedge [\rightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^+ v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \rightarrow w_1)))$.

Kanıt

a) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, sonsuzdur ve en az bir yığılma noktasına sahiptir. Sonuç 4.28 den "x noktasının yörüngesi sonsuzdur ancak ve ancak $(X, f), x \vDash \downarrow u.\neg\langle\rightarrow\rangle^+ u \wedge [\rightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^+ v)$ dir" olduğu biliniyor. v herhangi bir valuasyon ve $M = (X, f, v)$ karşılık gelen tdm olsun. $g(u) = \{x\}$ ve $M, g, x \vDash A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \rightarrow w_1)$ olacak şekilde bir $g : SVAR \rightarrow X$ atayıcısı olduğu varsayılsın. O zaman, her $y \in X$ için $M, g, y \vDash \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \rightarrow w_1)$ dir. Buradan, $g(w_1) = y$

ve $M, g, y \models [c](\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)$ olur. Bu nedenle, her $z \in U_y$ için $M, g, z \models \downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)$ olacak şekilde bir U_y vardır. O halde, $g(w_2) = z$ ve $M, g, z \models E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1$ dir. Böylece, $M, g, z_1 \models \langle\to\rangle^+ w_2$ ve $M, g, z_1 \models u$ ise $M, g, z \models w_1$ olacak şekilde bir $z_1 \in X$ vardır. $\langle\to\rangle^+$ nın tanımından $M, g, f^m(z_1) \models w_2$ ve $M, g, z_1 \models u$ ise $M, g, z \models w_1$ olacak şekilde bir $m > 0$ vardır. $g(w_2) = z$, $g(u) = x$ ve $g(w_1) = y$ olduğundan $f^m(z_1) = z$ ve $z_1 = x$ ise $z = y$ olacak şekilde her $y \in X$ için bir U_y ve her $z \in U_y$ için bir $m > 0$ vardır. $f^m(x) = z$ ise $z = y$ olacak şekilde her $y \in X$ için bir U_y ve her $z \in U_y$ için bir $m > 0$ vardır. Bu nedenle, her $y \in X$ için $O_x \bigcap (U_y \setminus \{y\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir U_y vardır. Bu, O_x herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir anlamına gelir ve bu bir çelişkidir. O halde, $g(u) = \{x\}$ olacak şekilde her $g : SVAR \to X$ atayıcısı için $M, g, x \models E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ dir. Böylece, $(X, f), x \models \downarrow u.(E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$ dir. Buradan, $(X, f), x \models \downarrow u.(\neg\langle\to\rangle^+ u \wedge [\to]^+(\downarrow v.\neg\langle\to\rangle^+ v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \models \downarrow u.(\neg\langle\to\rangle^+ u \wedge [\to]^+(\downarrow v.\neg\langle\to\rangle^+ v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her v valuasyonu ve her $g : SVAR \to X$ atayıcısı altında doğru olmalıdır. Karşılık gelen (X, f, v) tdm, M ile gösterilsin. Buradan, $M, g, x \models \downarrow u.(\neg\langle\to\rangle^+ u \wedge [\to]^+(\downarrow v.\neg\langle\to\rangle^+ v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$ olur. Bu nedenle, $g(u) = \{x\}$ ve $M, g, x \models \neg\langle\to\rangle^+ u \wedge [\to]^+(\downarrow v.\neg\langle\to\rangle^+ v)$ ve $M, g, x \models E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ dir. Sonuç 4.28 den O_x sonsuzdur ve $M, g, x \models E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ dir. Dolayısıyla, öyle bir $y \in X$ vardır ki $M, g, y \models \downarrow w_1.<c>(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ dir. Böylece, $g(w_1) = y$ ve $M, g, y \models \langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ dir. Buradan, her U_y için $M, g, z \models \downarrow w_2.(E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)$ olacak şekilde bir $z \in U_y$ vardır. Bu nedenle, $g(w_2) = z$ ve $M, g, z \models E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1$ dir. Dolayısıyla, $M, g, z \models E(\langle\to\rangle^+ w_2 \wedge u)$ ve $M, g, z \models \neg w_1$ olur. Böylece, $M, g, z_1 \models \langle\to\rangle^+ w_2$, $M, g, z_1 \models u$ ve $M, g, z \models \neg w_1$ olacak şekilde bir $z_1 \in X$ vardır. $\langle\to\rangle^+$ nın tanımından öyle bir $k > 0$ vardır ki $M, g, f^k(z_1) \models w_2$, $M, g, z_1 \models u$ ve $M, g, z \models \neg w_1$ dir. $g(w_2) = z$, $g(u) = x$ ve $g(w_1) = y$ olduğundan $f^k(z_1) = z$, $z_1 = x$ ve $z \neq y$ elde edilir. Böylece, öyle bir $y \in X$ vardır ki her U_y için $f^k(x) = z$ ve $z \neq y$ olacak şekilde bir $z \in U_y$ ve bir $k > 0$ vardır. Bu her U_y için $O_x \bigcap (U_y \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır anlamına gelir. O halde, O_x sonsuzdur ve en az bir yığılma noktasına sahiptir, dolayısıyla, yakınsaktır.

b) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin ıraksak olduğu kabul edilsin. O zaman, sonsuzdur ve herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir. Sonuç 6.18 den "$(X, f), x \models \neg\langle\to\rangle^+ u \wedge [\to]^+(\downarrow v.\neg\langle\to\rangle^+ v)$ ancak ve ancak O_x sonsuzdur" olduğu biliniyor. v herhangi bir valuasyon ve $M = (X, f, v)$ karşılık gelen tdm olsun.

$g(u) = \{x\}$ ve $M, g, x \models E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ olacak şekilde bir $g : SVAR \to X$ atayıcısının olduğu varsayılsın. $a)$ şıkkından kolayca görülebileceği gibi $E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1))$ en az bir yığılma noktasına sahip olmayı ifade eder ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, $g(u) = \{x\}$ olacak şekilde her $g : SVAR \to X$ atayıcısı için $M, g, x \models A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1))$ dir. O halde, $(X, f), x \models \downarrow u.(A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)))$ olur. Sonuç olarak, $(X, f), x \models \downarrow u.(\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ u \wedge [\leftrightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)))$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \models \downarrow u.(\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ u \wedge [\leftrightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her v valuasyonu ve her $g : SVAR \to X$ atayıcısı altında doğru olmalıdır. Karşılık gelen (X, f, v) tdm, M ile gösterilsin. Buradan, $M, g, x \models \downarrow u.(\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ u \wedge [\leftrightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1)))$ olur. O halde, $g(u) = \{x\}$, $M, g, x \models \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ u \wedge [\leftrightarrow]^+(\downarrow v.\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ v)$ ve $M, g, x \models A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1))$ dir. Sonuç 4.28 den O_x sonsuzdur. Bunun yanında, $a)$ şıkkından kolayca görülebileceği gibi $A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ w_2 \wedge u) \to w_1))$ hiç bir yığılma noktasına sahip olmamayı ifade eder. Böylece, O_x sonsuzdur ve herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir. O halde, ıraksaktır.

□

$\texttt{DHL}_{\langle\leftrightarrow\rangle,\downarrow,E}$ dili için elde edilen ifade gücü sonuçları arka sayfadaki Tablo 2 de özetlenmiştir.

Sabit	$p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$
Periyodik	$p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle^{+} p$
n**-periyodik**	$i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^{k} i$
$m-$**adım sabit**	$(i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle i) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \langle\rightarrow\rangle j) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle k))$
$m-$**adım periyodik**	$(i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle^{+} i) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \langle\rightarrow\rangle^{+} j) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle^{+} k))$
$m-$**adım** n**-periyodik**	$(i \rightarrow \langle\rightarrow\rangle i \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{t} i) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle j \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{l=2}^{n-1} [\rightarrow]^{l} \neg j) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \langle\rightarrow\rangle k \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} k \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{t} k))$
Bir süre sonra sabit	$\downarrow u.\neg\langle\rightarrow\rangle u \wedge \langle\rightarrow\rangle^{+} \downarrow v.\langle\rightarrow\rangle v)$
Bir süre sonra periyodik	$\downarrow u.\neg\langle\rightarrow\rangle^{+} u \wedge \langle\rightarrow\rangle^{+} \downarrow v.\langle\rightarrow\rangle^{+} v)$
Bir süre sonra n**-periyodik**	$\downarrow u.(\langle\rightarrow\rangle u \vee \neg\langle\rightarrow\rangle^{n} u \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\rightarrow\rangle^{k} u) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{+} \downarrow v.(\neg\langle\rightarrow\rangle v \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} v \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^{k} v))$
Yakınsak	$\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle{+}u \wedge [\rightarrow]^{+}(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^{+} v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^{+} w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$
Iraksak	$\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle{+}u \wedge [\rightarrow]^{+}(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^{+} v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^{+} w_2 \wedge u) \rightarrow w_1)))$

Tablo 2: $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$

5. $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ NİN İFADE GÜCÜ

Bu bölümde ‘zamansal’ modaliteler için yeni bir yorum öneriliyor. Dinamik diamond operatörü, bir (X, f) tds üzerinde f^{-1} olarak değil de f olarak ele alınacaktır. $\langle\leftarrow\rangle$ ve $\langle\leftarrow\rangle^+$ içeren dil $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ ile gösterilecek ve bu dilin ifade gücünü incelenecektir.

Tanım 5.1 Önerme harflerinin bir $PROP$ sayılabilir kümesi verilsin. $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ nin formülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi ::= \top \mid p \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid \langle\leftarrow\rangle\phi \mid \langle\leftarrow\rangle^+\phi;$$

burada $p \in PROP$ dir.

ϕ nin bir ikame örneği önermesel lojikte olduğu gibidir.

$\langle\leftarrow\rangle, [\leftarrow], \langle\leftarrow\rangle^+$ ve $[\leftarrow]^+$ dinamik operatörlerinin semantikleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lcl}
M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle\phi & \Leftrightarrow & \exists y \in X \text{ vardır ki } f(y) = x \text{ ve } M, y \vDash \phi \text{ dir,} \\
M, x \vDash [\leftarrow]\phi & \Leftrightarrow & \forall y \in X \text{ için } f(y) = x \text{ ise } M, y \vDash \phi \text{ dir,} \\
M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle^+\phi & \Leftrightarrow & \exists y \in X \text{ ve } \exists n > 0 \text{ vardır ki } f^n(y) = x \text{ ve } M, y \vDash \phi \text{ dir,} \\
M, x \vDash [\leftarrow]^+\phi & \Leftrightarrow & \forall y \in X \text{ ve } \forall n > 0 \text{ için } f^n(y) = x \text{ ise } M, y \vDash \phi \text{ dir.}
\end{array}$$

$\langle\leftarrow\rangle^n$ ile $\langle\leftarrow\rangle$ nin n kez uygulanması gösterilecektir.

Teorem 5.2 Sabit ve periyodik yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ dilinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $p \to \langle\leftarrow\rangle p$,

b) $p \to \langle\leftarrow\rangle^+ p$.

Kanıt

a) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin sabit olduğu kabul edilsin. O zaman, $f(x) = x$ dir. v herhangi bir valuasyon olsun. Karşılık gelen (X, f, v) tdm, M ile gösterilsin. $M, x \vDash p$ olsun. O halde, $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $M, f(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle p$ sonuçlanır.

$f(x) = x$ olduğundan $M, x \vDash \langle\leftrightarrow\rangle p$ elde edilir. Sonuç olarak, $M, x \vDash p \to \langle\leftrightarrow\rangle p$ dir.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \vDash p \to \langle\leftrightarrow\rangle p$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olmalıdır. Özel olarak, $\upsilon(p) = \{x\}$ seçilsin. Buradan, her $M = (X, f, \upsilon)$ tdm için $M, x \vDash p \to \langle\leftrightarrow\rangle p$ dir. Aynı zamanda $\upsilon(p) = \{x\}$ olduğundan $M, x \vDash p$ dir ve bunu $M, x \vDash \langle\leftrightarrow\rangle p$ izler. Böylece, $f(y) = x$ ve $M, y \vDash p$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $\upsilon(p) = \{x\}$ olduğundan $f(x) = x$ elde edilir.

b) $a)$ ile benzer şekilde kanıtlanabilir.

□

5.1 $\mathtt{DL}_{\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ de İfade Edilemezlik

5.1.1 Geçerlilik koruyan dönüşümler: bisimülasyonlar ve morfizmalar

Tanım 5.3 (X, f, υ) ve (X', f', υ') iki tdm olsun. Aşağıdakiler sağlanıyorsa $\mathcal{Z} : (X, f, \upsilon) \to (X', f', \upsilon')$ dönüşümüne bir "$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}-$bisimülasyon" denir:

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_1)$ Her $x \in X$ ve her $x' \in X'$ için $x\mathcal{Z}x'$ ise her $p \in PROP$ için $x \in \upsilon(p)$ ancak ve ancak $x' \in \upsilon'(p)$,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_2)$ $U \in \tau$ ise $\mathcal{Z}[U] \in \tau'$,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_3)$ $U' \in \tau'$ ise $\mathcal{Z}^{-1}[U'] \in \tau$,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_4)$ Her $y \in X$ ve her $x' \in X'$ için $f(y)\mathcal{Z}x'$ ise $f'(y') = x'$ ve $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y' \in X'$ vardır,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_5)$ Her $y' \in X'$ ve her $x \in X$ için $x\mathcal{Z}f'(y')$ ise $f(y) = x$ ve $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_6)$ Her $y \in X$ için $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y' \in X'$ ve her $y' \in X'$ için $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

Teorem 5.4 $\mathcal{Z}$, (X, f, υ) ve (X', f', υ') tdm arasında bir $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}-$bisimülasyon olsun. Her $x \in X$ ve her $x' \in X'$ için $x\mathcal{Z}x'$ ise $(X, f, \upsilon), x \vDash \phi$ ancak ve ancak $(X', f', \upsilon'), x' \vDash \phi$ dir.

Kanıt Kanıt modal formüllerin karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır.

$\underline{\varphi :: p}$ olsun. $M, x \vDash p \Leftrightarrow M', x' \vDash p$, $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_1$ den elde edilir.

$\underline{\varphi :: \phi}$ olsun ve $M, x \vDash \phi \Leftrightarrow M', x' \vDash \phi$ olduğu varsayılsın.

$\underline{\varphi :: \neg\phi}$ olsun. $M, x \vDash \neg\phi \Leftrightarrow M', x' \vDash \neg\phi$ tümevarım adımından doğrudan elde edilir.

$\underline{\varphi :: \phi \wedge \psi}$ olsun. $M, x \vDash \phi \wedge \psi \Leftrightarrow M, x \vDash \phi$ ve $M, x \vDash \psi$. O zaman, $M', x' \vDash \phi$ ve $M', x' \vDash \psi$ tümevarım adımından doğrudan elde edilir. Buradan, $M', x' \vDash \phi \wedge \psi$.

$\underline{\varphi :: [c]\phi}$ olsun. $M, x \vDash [c]\phi$ dir. O zaman, $M, U \vDash \phi$ olacak şekilde x in bir U açık komşuluğu vardır. $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_2$ den $\mathcal{Z}[U]$ nun x' nün bir açık komşuluğu olduğu elde edilir ve tümevarım hipotezinden $M, \mathcal{Z}[U] \vDash \phi$ olur. Buradan, $M', x' \vDash [c]\phi$ elde edilir. Diğer yön $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_3$ ü kullanarak benzer şekilde ispatlanabilir.

$\underline{\varphi :: \langle\leftrightarrow\rangle\phi}$ olsun. $M, x \vDash \langle\leftrightarrow\rangle\phi$ dir. O zaman, $f(y) = x$ ve $M, y \vDash \phi$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_4$ den öyle bir $y' \in X'$ vardır ki $f'(y') = x'$ ve $y\mathcal{Z}y'$ elde edilir. Tümevarım hipotezinden, $M', y' \vDash \phi$ olur. $\langle\leftrightarrow\rangle$ nin tanımından $M', f'(y') \vDash \langle\leftrightarrow\rangle\phi$ sonuçlanır. $f'(y') = x'$ olduğundan $M', x' \vDash \langle\leftrightarrow\rangle\phi$ elde edilir. Diğer yön $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_5$ i kullanılarak benzer şekilde ispatlanabilir.

İddia 2 (X, f, v) ve (X', f', v') iki tdm, $x \in X$ ve $x' \in X'$ olsun. $\mathcal{Z}$ bu iki tdm arasında bir $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle}-$bisimülasyon ve $x\mathcal{Z}x'$ ise,

a) Her $n > 0$ ve her $y \in X$ için $f^n(y) = x$ ise $(f')^n(y') = x'$ ve $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y' \in X'$ vardır.

b) Her $n > 0$ ve her $y' \in X'$ için $(f')^n(y') = x'$ ise $f^n(y) = x$ ve $y\mathcal{Z}y'$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

Kanıt n üzerinde tümevarım ile yapılır,

a)

$\underline{n = 1}$ $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} b_4$ den sonuçlanır.

$\underline{n=k}$ Doğru olduğu kabul edilsin.

$\underline{n=k+1}$ $f^{k+1}(y)=x$ olacak şekilde bir $y\in X$ olduğu varsayılsın.

O zaman, $f^k(f(y))=x$ dir. $n=k$ adımından $(f^{'})^k(z^{'})=x^{'}$ ve $f(y)\mathcal{Z}z^{'}$ olacak şekilde bir $z^{'}\in X^{'}$ vardır ve $n=1$ adımından $f^{'}(y^{'})=z^{'}$ ve $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'}\in X^{'}$ vardır. Böylece, $(f^{'})^k(f^{'}(y^{'}))=x^{'}$ ve $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'}\in X^{'}$ vardır. Sonuç olarak, $(f^{'})^{k+1}(y^{'})=x^{'}$ ve $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'}\in X^{'}$ vardır.

b)

$\underline{n=1}$ $D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}b_5$ den sonuçlanır.

$\underline{n=k}$ Doğru olduğu kabul edilsin.

$\underline{n=k+1}$ $a)$ şıkkı ile benzer şekilde kanıtlanır.

$\square$

$\underline{\varphi :: \langle\leftarrow\rangle^+\phi}$ olsun. $M,x\vDash\langle\leftarrow\rangle^+\phi$ dir. O zaman, $f^n(y)=x$ ve $M,y\vDash\phi$ olacak şekilde bir $y\in X$ ve bir $n>0$ vardır. İddia $2,\ a)$ şıkkından öyle bir $y^{'}\in X^{'}$ vardır ki $y\mathcal{Z}y^{'}$ dir ve tümevarım adımından $M^{'},y^{'}\vDash\phi$ dir. Böylece, $\langle\leftarrow\rangle^+$ nın tanımından $M^{'},(f^{'})^n(y^{'})\vDash\langle\leftarrow\rangle^+\phi$ sonuçlanır. Tekrar İddia $2,\ a)$ şıkkından $(f^{'})^n(y^{'})=x^{'}$ olur. Sonuç olarak, $M^{'},x^{'}\vDash\langle\leftarrow\rangle^n\phi$ dir. Diğer yön İddia $2,\ b)$ den benzer şekilde kanıtlanır.

$\underline{\varphi :: E\phi}$ olsun. $M,x\vDash E\phi$ dir. O zaman, $M,y\vDash\phi$ olacak şekilde bir $y\in X$ vardır. $D_{\langle c\rangle,\langle\rightarrow\rangle,E}B_5$ den $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'}\in X^{'}$ vardır. Tümevarım hipotezinden $M^{'},y^{'}\vDash\phi$ elde edilir. O halde, $M^{'},x^{'}\vDash E\phi$ dir. Diğer yön benzer şekilde kanıtlanabilir. $\square$

Tanım 5.5 (X,f) ve $(X^{'},f^{'})$ iki tds olsun. Aşağıdakiler sağlanıyorsa, $g:(X,f)\rightarrow(X^{'},f^{'})$ dönüşümüne bir "$D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}-p.morfizma$" denir:

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}p_1)$ açık dönüşüm,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}p_2)$ sürekli dönüşüm,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}p_3)$ $gof=f^{'}og$,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}p_4)$ $gof^{-1} = (f^{'})^{-1}og$,

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}p_5)$ g örten.

Teorem 5.6 $g : (X, f) \to (X^{'}, f^{'})$ bir $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E} - p.morfizma$ olsun. Her ϕ modal formülü ve her $x \in X$ için $(X, f), x \vDash \phi$ ise $(X^{'}, f^{'}), g(x) \vDash \phi$ dir.

Kanıt $(X, f), x \vDash \phi$ olduğu kabul edilsin ve bir $\upsilon^{'}$ için $(X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'}), g(x) \nvDash \phi$ olsun. υ valuasyonu $\upsilon(p) = g^{-1}(\upsilon^{'}(p))$ ile tanımlansın. g nin grafı (X, f, υ) ve $(X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ arasında bir $D_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}-$bisimülasyon olur. Teorem 5.4 den $(X, f, \upsilon), x \nvDash \phi$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(X, f), x \vDash \phi$ ise $(X^{'}, f^{'}), g(x) \vDash \phi$ dir. □

Tanım 5.7 (X, f, υ) ve $(X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ iki tdm olsun. Aşağıdakiler sağlanıyor ise $\mathcal{Z} : (X, f, \upsilon) \to (X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ bir "$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}-$bisimülasyon" denir:

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_1)$ Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise her $p \in PROP$ için $x \in \upsilon(p)$ ancak ve ancak $x^{'} \in \upsilon^{'}(p)$ dir,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_2)$ $U \in \tau$ ise $\mathcal{Z}[U] \in \tau^{'}$ dir,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_3)$ $U^{'} \in \tau^{'}$ ise $\mathcal{Z}^{-1}[U^{'}] \in \tau$ dir,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_4)$ Her $y \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $f(y)\mathcal{Z}x^{'}$ ise $f^{'}(y^{'}) = x^{'}$ ve $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y^{'} \in X^{'}$ vardır,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_5)$ Her $y^{'} \in X^{'}$ ve her $x \in X$ için $x\mathcal{Z}f^{'}(y^{'})$ ise $f(y) = x$ ve $y\mathcal{Z}y^{'}$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_6)$ Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ve $x\mathcal{Z}y^{'}$ ise $x^{'} = y^{'}$ dir,

$D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}b_7)$ Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ve $y\mathcal{Z}x^{'}$ ise $x = y$ dir.

Teorem 5.8 $\mathcal{Z}$, (X, f, υ) ve $(X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'})$ tdm arasında bir $D_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}-$ bisimülasyon olsun. Her $x \in X$ ve her $x^{'} \in X^{'}$ için $x\mathcal{Z}x^{'}$ ise $(X, f, \upsilon), x \vDash \phi$ ancak ve ancak $(X^{'}, f^{'}, \upsilon^{'}), x^{'} \vDash \phi$ dir.

Kanıt Kanıt modal formüllerin karmaşıklığı üzerinde tümevarım ile yapılır. $p, \neg\phi, \phi \wedge \varphi, \langle\leftrightarrow\rangle\phi, \langle\leftrightarrow\rangle^{+}\phi$ ve $E\phi$ durumları Teorem 5.4 deki ile aynıdır. Sadece $\langle d\rangle\phi$ durumu incelenecektir.

$M^{'}, x^{'} \vDash \langle d\rangle\phi$ olsun. O zaman, $M^{'}, U^{'}\backslash\{x^{'}\} \vDash \phi$ olacak şekilde $x^{'}$ nin bir U' açık komşuluğu vardır. Tümevarım hipotezinden, $M, \mathcal{Z}^{-1}(U' \backslash \{x'\}) \vDash \phi$ olur. O halde, $M, \mathcal{Z}^{-1}(U') \backslash \mathcal{Z}^{-1}(\{x'\}) \vDash \phi$ dir. $x\mathcal{Z}x'$ olduğundan ve $D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle} B_6$ den $M, \mathcal{Z}^{-1}(U') \backslash \{x\} \vDash \phi$ sonuçlanır. $D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle} B_3$ den $\mathcal{Z}^{-1}(U') \in \tau$ dir. $x' \in U'$ olduğundan $x \in \mathcal{Z}^{-1}(U')$ dir. Buradan, $\mathcal{Z}^{-1}(U')$, x in bir açık komşuluğudur. $M, \mathcal{Z}^{-1}(U') \backslash \{x\} \vDash \phi$ den $M, x \vDash \langle d \rangle \phi$ elde edilir. Diğer yön $D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle} B_5$ i kullanarak benzer şekilde kanıtlanabilir. $\square$

Tanım 5.9 (X, f) ve (X', f') iki tds olsun. Aşağıdakiler sağlanıyorsa $g : (X, f) \to (X', f')$ bir "$D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} - p.morfizma$" denir:

$D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} p_1)$ $d-$dönüşüm,

$D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} p_2)$ $gof = f'og$,

$D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} p_3)$ $gof^{-1} = (f')^{-1}og$,

$D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} p_4)$ g örten.

Teorem 5.10 $g : (X, f) \to (X', f')$ bir $D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} - p.morfizma$ olsun. Her ϕ modal formülü ve her $x \in X$ için $(X, f), x \vDash \phi$ ise $(X', f'), g(x) \vDash \phi$ dir.

Kanıt $(X, f), x \vDash \phi$ olduğu kabul edilsin ve $(X', f', v'), g(x) \nvDash \phi$ olacak şekilde bir v' valuasyonu olduğu kabul edilsin. v valuasyonu $v(p) = g^{-1}(v'(p))$ ile tanımlansın. g nin grafı (X, f, v) ve (X', f', v') arasında bir $D_{\langle d \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E}-$bisimülasyon olur. O zaman, Teorem 4.8 den $(X, f, v), x \nvDash \phi$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $(X, f), x \vDash \phi$ ise $(X', f'), g(x) \vDash \phi$ dir. $\square$

Teorem 5.11 $m > 0$ veya $n > 1$ ise $m-$adım $n-$periyodik yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle c \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E}$ de ifade edilemezler.

Kanıt $m > 0$ veya $n > 1$ olsun ve $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < m + n\}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < m + n - 1 \\ m, & x = m + n - 1 \end{cases}$$

τ, X üzerinde bir ayrık topoloji, $X' = \{x'\}$, $f'(x') = x'$, τ', X' üzerinde olası tek topoloji ve $g(x) = x'$ olmak üzere $g : (X, f) \to (X', f')$ dönüşümü göz önünde bulundurulsun. g nin bir $D_{\langle c \rangle, \langle \leftrightarrow \rangle, E} - p.morfizma$ olduğu kolayca görülür. 0 noktasının (X, f) üzerindeki yörüngesi $m-$adım n-periyodiktir. $D_{\langle \leftrightarrow \rangle, E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan $g(0) = x'$ noktasının (X', f') üzerinde yörüngesi de

$m-$adım n-periyodik olmalıdır, fakat sabittir. $m > 0$ veya $n > 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde, $m > 0$ veya $n > 1$ ise $m-$adım n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezler. $\square$

Sonuç 5.12 Yörüngelerin aşağıdaki özellikleri $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezler:

a) n-periyodik$(n > 1)$,

b) $m-$adım sabit$(m > 0)$,

c) $m-$adım periyodik$(m > 0)$,

d) Bir süre sonra sabit,

e) Bir süre sonra n-periyodik$(n > 1)$,

f) Bir süre sonra periyodik.

Kanıt

a) $m = 0$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır,

b) $n = 1$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır,

c) Herhangi bir $n > 0$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır,

d) Herhangi bir $m > 0$ ve $n = 1$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır,

e) Herhangi bir $m > 0$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır,

f) Herhangi bir $m > 0$ ve herhangi bir $n > 0$ için Teorem 5.10 dan sonuçlanır.

$\square$

Sonuç 5.13 Topolojik box operatörünün yorumu yukarıdaki yörünge davranışlarının ifade edilmesini etkilemeyeceğinden, bu özellikler aynı zamanda $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ dilinde de ifade edilemezler.

Teorem 5.14 Yakınsak ve ıraksak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezdir.

Kanıt $X = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, τ, X üzerinde doğal topoloji ve $X' = \{1\}$, $f'(x') = 1$, τ', X' üzerinde olası tek topoloji ve $g(x) = 1$ olacak şekilde $g : (X, f) \to (X', f')$ dönüşümü alınsın. g nin bir $D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E} - p.morfizma$ olduğu kolayca görülür. 1 noktasının (X, τ) üzerindeki yörüngesi yakınsaktır.

$D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan, $g(1) = 1$ noktasının $(X^{'}, \tau^{'})$ üzerinde yörüngesi de yakınsak olmalıdır, fakat sabittir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, yakınsak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

$X = \mathbb{R}^+$ yerine $X = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ alındığında, 1 noktasının (X, τ) üzerindeki yörüngesi ıraksak olur. $D_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan $g(1) = 1$ noktasının $(X^{'}, \tau^{'})$ üzerinde yörüngesi de ıraksak olmalıdır, fakat sabittir ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, ıraksak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezler. □

Sonuç 5.15 Yakınsak ve ıraksak yörüngeler $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ de ifade edilemezler.

Kanıt Teorem 5.14 deki g dönüşümü bir örten $d-$dönüşüm olduğundan aynı zamanda bir $D_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E} - p.morfizma$ dır. $D_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E} - p.morfizma$ geçerliliği koruduğundan kanıt Teorem 5.14 deki gibi sürdürülebilir. □

$\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ ve $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ dilleri için elde edilen ifade gücü sonuçları aşağıdaki Tablo 3 de özetlenmiştir.

Sabit	$p \to \langle\leftarrow\rangle p$
Periyodik	$p \to \langle\leftarrow\rangle^+ p$
n-**periyodik**	ifade edilemez
Bir süre sonra sabit	ifade edilemez
Bir süre sonra periyodik	ifade edilemez
Bir süre sonra n-**periyodik**	ifade edilemez
$m-$**adım sabit**	ifade edilemez
$m-$**adım periyodik**	ifade edilemez
$m-$**adım** n-**periyodik**	ifade edilemez
Yakınsak	ifade edilemez
Iraksak	ifade edilemez

Tablo 3: $\mathtt{DL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$ ve $\mathtt{DL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$

5.2 Melez Dinamik Dillerin İfade Güçleri

Bu bölümde, amaçlanan ifade gücünü elde etmek için ilk olarak $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ dinamik dili nominaller ve gerçekleme operatörü $@$ ekleyerek melezleştirildi. Ardından $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ ye E evrensel modalitesi eklendi ve son olarak topolojik box operatörünün yorumunu değiştirildi.

5.2.1 $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ nin ifade gücü

$\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ nin nominaller ve gerçekleme operatörü ile genişletilmesi olan $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ dinamik melez dili aşağıdaki gibidir:

Tanım 5.16 Önerme harflerinin bir $PROP$ sayılabilir kümesi ve nominallerin $PROP$ dan ayrık bir NOM sayılabilir kümesi verilsin. $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ formüller aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi ::= \top \mid p \mid i \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid [c]\phi \mid @_i\phi \mid \langle\leftarrow\rangle\phi \mid \langle\leftarrow\rangle^+\phi;$$

burada $p \in PROP$ ve $i \in NOM$ dir.

ϕ nin bir ikame örneği nominallerin yerine sadece nominallerin koyulabileceği ek koşulu ile aynen önermesel lojikte olduğu gibi tanımlıdır.

Teorem 5.17 Sabit, periyodik ve n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ de modeller seviyesinde sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilir:

a) $\langle\leftarrow\rangle i$,

b) $\langle\leftarrow\rangle^+ i$,

c) $\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i.$

Kanıt i tarafından adlandırılan nokta x olsun,

a) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin sabit olduğu kabul edilsin. $M, x \vDash i$ olduğundan $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $M, f(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle i$ sonuçlanır. $f(x) = x$ olduğundan $M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle i$ elde edilir. O halde, $M \vDash @_i\langle\leftarrow\rangle i$ dir.

$(\Leftarrow)$ $M \vDash @_i\langle\leftarrow\rangle i$ olduğu kabul edilsin. i tarafından adlandırılan nokta x olduğundan $M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle i$ elde edilir. $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $f(y) = x$ ve $M, y \vDash i$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $y = x$ dir ve buradan, $f(x) = x$ olur.

b) $a)$ ile benzer şekilde kanıtlanabilir.

c) Öyle bir $n > 1$ için,

$(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin $n-$periyodik olduğu kabul edilsin. i tarafından adlandırılan nokta x olduğundan $M, x \vDash i$ dir. $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $M, f^n(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle^n i$ sonuçlanır. $f^n(x) = x$ olduğundan $M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle^n i$ elde edilir. Şimdi $M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle^k i$ olacak şekilde bir $0 < k < n$ olduğu varsayılsın. $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $f^k(y) = x$ ve $M, y \vDash i$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $y = x$ dir ve buradan, $f^k(x) = x$ olur. Bu bir çelişkidir. O halde, her $0 < k < n$ için $M, x \vDash \neg\langle\leftarrow\rangle^k i$ elde edilir. Bu $M, x \vDash \neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i$ olarak yazılabilir. Böylece, $M, x \vDash \neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i$ dir. Sonuç olarak, $M \vDash @_i(\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i)$ dir.

$(\Leftarrow)$ $M \vDash @_i(\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i)$ olduğu kabul edilsin. i nominali tarafından adlandırılan nokta x olduğundan $M, x \vDash \neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^n i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^k i$ dir. Buradan $f^n(y) = x$ ve $M, y \vDash i$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır ve her $0 < k < n$ için $M, x \vDash \neg\langle\leftarrow\rangle^k i$ dir. i bir nominal olduğundan $f^n(x) = x$ dir. Şimdi $f^k(x) = x$ olacak şekilde bir $0 < k < n$ olduğu varsayılsın. $M, x \vDash i$ olduğundan, $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $M, f^k(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle^k i$ sonuçlanır. Bundan dolayı, $M, x \vDash \langle\leftarrow\rangle^k i$ olur ve bu bir çelişkidir. Böylece, her $0 < k < n$ için $f^k(x) \neq x$ dir. Sonuç olarak, x noktasının yörüngesi n-periyodiktir.

$\square$

Sonuç 5.18 Sabit-değil, periyodik-değil ve n-periyodik-değil yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ de modeller seviyesinde, sırasıyla, aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $\neg\langle\leftarrow\rangle i,$

b) $\neg\langle\leftarrow\rangle^+ i,$

c) $\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^n i \vee \bigvee_{k=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^k i.$

Kanıt Teorem 5.17 ve Yardımcı Teorem 4.14 den sonuçlanır. $\square$

5.2.2 $\texttt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle,E}$ nin ifade gücü

Teorem 5.19 Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilir ve $\upsilon(i) = \{x\}$ ise $m-$adım P, $(X,f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k))))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Kanıt

$(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin $m-$adım P olduğu kabul edilsin. O zaman, O_x, $P-$değil özelliğine, $O_{f^m(x)}$, P özelliğine ve her $0 < s < m$ için $O_{f^s(x)}$, $P-$değil özelliğine sahiptir. Buradan $M \vDash @_i\neg\phi(i)$ sonuçlanır ve $M, x \vDash \neg\phi(i)$ olur. Diğer yandan, $M, x \vDash i$ olduğundan $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $M, f^m(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle^m i$ elde edilir. Şimdi $\upsilon(j) = \{f^m(x)\}$ olduğu varsayılsın. O zaman, $M, f^m(x) \vDash \langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j$ dir. $O_{f^m(x)}$, P özelliğine sahip olduğundan $M \vDash @_j\phi(j)$ olur. Bundan dolayı, $M, f^m(x) \vDash \phi(j)$ dir. Böylece, $M, f^m(x) \vDash (\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)$ elde edilir. Buradan, $M, x \vDash E((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j))$ olur. Bu nedenle, $M, x \vDash \neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j))$ dir. Şimdi $M, x \vDash E(\bigvee_{s=1}^{m-1}(\langle\leftarrow\rangle^s i \to (k \wedge \phi(k))))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $M, y \vDash \langle\leftarrow\rangle^s i$ ise $M, y \vDash k$ ve $M, y \vDash \phi(k)$ olacak şekilde bir $y \in X$ ve bir $0 < s < m$ vardır. $\langle\leftarrow\rangle$ nin tanımından $f^s(z) = y$ ve $M, z \vDash i$ ise $\upsilon(k) = \{y\}$ ve $M, y \vDash \phi(k)$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $f^s(x) = y$ ise $\upsilon(k) = \{y\}$ ve $M, y \vDash \phi(k)$ sonuçlanır. Böylece, $\upsilon(k) = \{f^s(x)\}$ ve $M, f^s(x) \vDash \phi(k)$ elde edilir. Buradan, $M \vDash @_k\phi(k)$ dir. Bu nedenle, $O_{f^s(x)}$, P özelliğine sahip olacak şekilde bir $0 < s < m$ vardır ve bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, $M, x \vDash A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k)))$ olur. Böylece, $M, x \vDash \neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k)))$ dır. Buradan,

$$M, x \vDash i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k))))$$

elde edilir. Sonuç olarak, $(X,f), x \vDash i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k))))$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $(X,f), x \vDash i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k))))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olur. Özel olarak, $\upsilon(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir υ valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Buradan, her $M = (X, f, \upsilon)$ tdm için $M, x \vDash i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k))))$ dir. $M, x \vDash i$ olduğundan $M, x \vDash \neg\phi(i)$, $M, x \vDash E(((\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge j) \to \phi(j)))$ ve $M, x \vDash A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k)))$ sonuçlanır. Bu nedenle, $M \vDash @_i\neg\phi(i)$ dir ve $M, y \vDash \langle\leftarrow\rangle^m i$ ve $M, y \vDash j$ ise $M, y \vDash \phi(j)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır ve her $z \in X$ ve her $0 < s < m$ için $M, z \vDash (\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\phi(k)$ dir. Buradan, O_x, $P-$değil özelliğine sahiptir, $f^m(y) = y$, $M, y \vDash i$, $\upsilon(j) = \{y\}$ ise $M, y \vDash \phi(j)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır ve $f^s(z_1) = z$, $M, z_1 \vDash i$ ve $M, z \vDash k$ ise $M, z \vDash \neg\phi(k)$ olacak şekilde bir $z_1 \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $f^n(x) = y$, $\upsilon(j) = \{y\}$ ise $M, y \vDash \phi(j)$, $f^s(x) = z$ ve $\upsilon(k) = \{f^s(x)\}$ ise $M, z \vDash \neg\phi(k)$ dir. Bundan dolayı, $\upsilon(j) = \{f^n(x)\}$ ise $M, f^n(x) \vDash \phi(j)$ ve $\upsilon(k) = \{f^s(x)\}$ gerektirir $M, f^s(x) \vDash \neg\phi(k)$. Böylece, $M \vDash @_j\phi(j)$ ve $M \vDash @_k\neg\phi(k)$ olur. Buradan, $O_{f^n(x)}$, P özelliğine sahip olacak şekilde bir $n > 0$ vardır ve her $0 < s < m$ için $O_{f^s(x)}$, $P-$ değil özelliğine sahiptir. Sonuç olarak, O_x, $m-$adım P özelliğine sahip olur. □

Sonuç 5.20 $m-$adım sabit, $m-$adım periyodik ve $m-$adım n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle,E}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $i \to (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \langle\leftarrow\rangle j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\langle\leftarrow\rangle k))),$

b) $i \to (\neg\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \langle\leftarrow\rangle^+ j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \neg\langle\leftarrow\rangle^+ k))),$

c) $i \to (((\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^n i \vee \bigvee_{t=2}^{n-1}\langle\leftarrow\rangle^t i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^m i \wedge j) \to \neg\langle\leftarrow\rangle j \wedge \langle\leftarrow\rangle^n j \wedge \bigwedge_{l=2}^{n-1}[\leftarrow]^l\neg j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}(((\langle\leftarrow\rangle^s i \wedge k) \to \langle\leftarrow\rangle k \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^n k \vee \bigvee_{t=2}^{n-1}\langle\leftarrow\rangle^t k))).$

Kanıt Teorem 5.17 ve Teorem 5.19 den sonuçlanır. □

Teorem 5.21 Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilir ve $\upsilon(i) = \{x\}$ ise bir süre sonra P, $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \to (\neg\phi(i) \wedge E(((\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge j) \to \phi(j)))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Kanıt i tarafından adladırılan nokta x olsun,

$(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin bir süre sonra P olduğu kabul edilsin. O zaman, O_x, $P-$değil özelliğine sahiptir ve $O_{f^n(x)}$, P özelliğine sahip olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Buradan, $M \models @_i \neg\phi(i)$ sonuçlanır ve böylece, $M, x \models \neg\phi(i)$ dir. Diğer yandan, $M, x \models i$ olduğundan $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nin tanımından $M, f^n(x) \models \langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ elde edilir. Şimdi $v(j) = \{f^n(x)\}$ olduğu varsayılsın. O zaman, $M, f^n(x) \models \langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j$ olur. $O_{f^n(x)}$, P özelliğine sahip olduğundan $M \models @_j\phi(j)$ bulunur. Buradan, $M, f^n(x) \models \phi(j)$ elde edilir. Böylece, $M, f^n(x) \models (\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j)$ dir. O halde, $M, x \models E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j))$ olur ve böylece, $M, x \models \neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j))$ dir. Buradan, $M, x \models i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j)))$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j \rightarrow \phi(j)))$ dir.

($\Leftarrow$) $(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j)))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olmalıdır. Özel olarak, $v(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir v valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Buradan, her $M = (X, f, v)$ tdm için $M, x \models i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j)))$ dir. $M, x \models i$ olduğundan $M, x \models \neg\phi(i)$ ve $M, x \models E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \phi(j)))$ sonuçlanır. Bu nedenle, $M \models @_i \neg\phi(i)$ dir ve $M, y \models \langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ ve $M, y \models j$ ise $M, y \models \phi(j)$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Buradan, O_x, $P-$değil özelliğine sahiptir, $f^n(z) = y$, $M, z \models i$ ve $v(j) = \{y\}$ ise $M, y \models \phi(j)$ olacak şekilde bir $z \in X$ ve bir $n > 0$ vardır. i bir nominal olduğundan $f^n(x) = y$ ve $v(j) = \{y\}$ ise $M, y \models \phi(j)$ dir. Bundan dolayı, $v(j) = \{f^n(x)\}$ ise $M, f^n(x) \models \phi(j)$ dir. Böylece, $M \models @_j\phi(j)$ olur. Buradan, $O_{f^n(x)}$, P özelliğine sahip olacak şekilde bir $n > 0$ vardır. Sonuç olarak, O_x, bir süre sonra P özelliğine sahiptir. □

Sonuç 5.22 Bir süre sonra sabit, bir süre sonra periyodik ve bir süre sonra n-periyodik yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle i \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \langle\leftrightarrow\rangle j))$,

b) $i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$,

c) $i \rightarrow ((\langle\leftrightarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftrightarrow\rangle^n i \vee \bigwedge_{k=2}^{n-1} \langle\leftrightarrow\rangle^k i) \wedge E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle j \wedge \langle\leftrightarrow\rangle^n j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftrightarrow\rangle^k j))$.

Kanıt Teorem 5.17 ve Teorem 5.21 den sonuçlanır. □

$\mathtt{DHL}_{\langle c\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ dili için elde edilen ifade gücü sonuçları arka sayfadaki Tablo 4 de özetlenmiştir.

Sabit	$p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle p$
Periyodik	$p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} p$
n**-periyodik**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^{k} i)$
$m-$**adım sabit**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle k)))$
$m-$**adım periyodik**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+} k)))$
$m-$**adım** n**-periyodik**	$i \rightarrow (((\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{t} i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle j \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{l=2}^{n-1} [\rightarrow]^{l} \neg j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle k \vee$ $\neg\langle\leftarrow\rangle^{n} k \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{t} k))$
Bir süre sonra sabit	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle j))$
Bir süre sonra periyodik	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} j))$
Bir süre sonra n**-periyodik**	$i \rightarrow (((\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^{n} i \vee \bigwedge_{k=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{k} i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle j \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^{k} j))$

Tablo 4: $\mathtt{DHL}_{\langle c\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$

5.2.3 $\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ nin ifade gücü

Bu bölümde, $\mathtt{DHL}_{\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ nin ifade gücünü arttırmak için topolojik box operatörünün yorumu limit olarak değiştirilecek ve karşılık gelen modalite $[d]$ ile gösterilecektir. M bir tdm olsun. $[d]$ için doğruluk tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$M, x \vDash [d]\phi \Leftrightarrow \exists U_x \in \tau$ vardır ki $\forall y \in U_x$, $y \neq x$ ise $M, y \vDash \phi$.

Teorem 5.23 Sonsuz yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde $\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ de $i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Kanıt

($\Rightarrow$) Sonuç 5.18 den "O_x periyodik-değildir ancak ve ancak $\upsilon(i) = \{x\}$ ve $M \vDash @_i\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ dir" olduğu biliniyor. Bu nedenle, $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ dir. Şimdi $M, x \vDash E(\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j \wedge \langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ olduğu kabul edilsin. O zaman, $M, y \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ i$, $M, y \vDash j$ ve $M, y \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ j$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nin tanımından $f^n(z) = y$ ve $M, z \vDash i$ olacak şekilde bir $n > 0$ ve bir $z \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $z = x$ dir ve böylece, $f^n(x) = y$ olur. Bunun yanında, $M, y \vDash j$ olduğundan $\upsilon(j) = \{f^n(x)\}$ elde edilir. $M, y \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ j$ olduğundan $f^k(z_1) = y$ ve $M, z_1 \vDash j$ olacak şekilde bir $k > 0$ ve bir $z_1 \in X$ vardır. $\upsilon(j) = \{f^n(x)\}$ olduğundan $z_1 = f^n(x)$ sonuçlanır. O halde, $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ olacak şekilde bir $k > 0$ vardır. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $M, x \vDash A(\neg(\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \vee \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ olur. Bundan dolayı, $M, x \vDash A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ elde edilir ve böylece, $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ dir. Buradan, $M, x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ olur. Sonuç olarak, $(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olur. Özel olarak, $\upsilon(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir υ valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Karşılık gelen (X, f, υ) melez tdm, M ile gösterilsin. Bu durumda, $M, x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ dir. $M, x \vDash i$ olduğundan $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ ve $M, x \vDash A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ sonuçlanır. Sonuç 5.18 den "$\upsilon(i) = \{x\}$ ve $M \vDash @_i\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ dir ancak ve ancak O_x periyodik-değildir" olduğu biliniyor. O halde, "$M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ dir ancak ve ancak O_x, periyodik-değildir". Şimdi $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ olacak şekilde bir $n > 0$ ve bir $k > 0$ olduğu varsayılsın. $M, x \vDash i$ olduğundan $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nin tanımından $M, f^n(x) \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ sonuçlanır. $\upsilon(j) = \{f^n(x)\}$ olsun. O zaman, $M, f^n(x) \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j$ elde edilir. $\upsilon(j) = \{f^n(x)\}$ olduğundan aynı zamanda $M, f^n(x) \vDash j$ dir. $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nin tanımından $M, f^{n+k}(x) \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ j$ bulunur. $f^{n+k}(x) = f^n(x)$ olduğundan bu $M, f^n(x) \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ j$

olarak yazılabilir. Böylece, $M, f^n(x) \models (\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \langle\leftrightarrow\rangle^+ j$ olur. Bu durumda, $M, x \models E((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. O halde, her $n > 0$ ve her $k > 0$ için $f^{n+k}(x) \neq f^n(x)$ dir. Sonuç olarak, O_x, sonsuzdur. $\square$

Teorem 5.24 Yakınsak ve ıraksak yörüngeler $\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ de sırasıyla aşağıdaki formüller tarafından ifade edilebilirler:

a) $i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$,

b) $i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$.

Kanıt

a) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin yakınsak olduğu kabul edilsin. O zaman, sonsuzdur ve en az bir yığılma noktasına sahiptir. v herhangi bir valuasyon olsun. Karşılık gelen (X, f, v) melez tdm, M ile gösterilsin ve $M, x \models i$ olsun. Teorem 5.23 den "O_x sonsuzdur ancak ve ancak $(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ dir" olduğu biliniyor. Şimdi $M, x \models A[d]\langle\leftrightarrow\rangle^+\neg i$ olduğu varsayılsın. O zaman, her $y \in X$ için $M, y \models [d]\langle\leftrightarrow\rangle^+\neg i$ dir. Bu durumda, her $z \in U_y$ için $z \neq y$ ise $M, z \models \langle\leftrightarrow\rangle^+\neg i$ olacak şekilde bir U_y vardır. $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nın tanımından her $n > 0$ ve her $z_1 \in X$ için $f^n(z_1) = z$ ve $M, g, z_1 \models \neg i$ sonuçlanır. i bir nominal olduğundan $z_1 \neq x$ dir. Bundan dolayı, her $y \in X$ ve her $z \in U_y$ için $z \neq y$ ise her $n > 0$ ve her $z_1 \in X$ için $f^n(z_1) = z$ ve $z_1 \neq x$ olacak şekilde bir U_y vardır. Bu, her $y \in X$ için $U_y \cap (O_x \setminus \{y\}) = \emptyset$ olacak şekilde bir U_y vardır anlamına gelir. Dolayısıyla, O_x herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir ve bu bir çelişkidir. Böylece, $M, g, x \models E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ u$ olur. Bu nedenle, $M, x \models \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ u$ ve buradan, $M, x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$ dir.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olur. Özel olarak, $v(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir v valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Karşılık gelen (X, f, v) melez tdm, M ile gösterilsin. Buradan, $M, x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$ dir. $v(i) = \{x\}$ olduğundan, aynı zamanda $M, x \models i$ de elde edilir ve böylece, $M, x \models \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ sonuçlanır. Teorem 5.23 den "$(X, f), x \models i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ dir ancak ve ancak O_x sonsuzdur" olduğu biliniyor. Diğer yandan, $M, g, x \models E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ olduğundan $M, g, y \models \langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu nedenle, her U_y için $z \neq y$ ve $M, g, z \vDash \langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ olacak şekilde bir $z \in U_y$ vardır. $\langle\leftrightarrow\rangle^+$ nın tanımından $f^k(z_1) = z$ ve $M, g, z_1 \vDash i$ olacak şekilde bir $k > 0$ ve bir $z_1 \in X$ vardır. i bir nominal olduğundan $z_1 = x$ dir. Bundan dolayı, $f^k(x) = z$ olur. Böylece, her U_y için $z \neq y$ ve $f^k(x) = z$ olacak şekilde bir $y \in X$ ve bir $z \in U_y$ vardır. Buradan, her U_y için $U_y \cap (O_x \setminus \{y\}) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Sonuç olarak, $x \in X$ noktasının yörüngesi sonsuzdur ve en az bir yığılma noktasına sahiptir. O halde, yakınsaktır.

b) $(\Rightarrow)$ x noktasının yörüngesinin ıraksak olduğu kabul edilsin. O zaman, sonsuzdur ve herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir. v herhangi bir valuasyon olsun. Karşılık gelen (X, f, v) melez tdm, M ile gösterilsin ve $M, x \vDash i$ olsun. Teorem 5.23 den "O_x sonsuzdur ancak ve ancak $(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ dir" olduğunu biliyoruz. Şimdi, $M, x \vDash E\langle d\rangle\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$ olduğu varsayılsın. $a)$ şıkkından kolaylıkla görülebileceği gibi bu O_x in en az bir yığılma noktasına sahip olması anlamına gelir ve bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, $M, x \vDash A[d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i$. Sonuç olarak, $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i)$ dir. Böylece, $M, x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ elde edilir. Sonuç olarak, $(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ olur.

$(\Leftarrow)$ $(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ olduğu kabul edilsin. O zaman, bu formül x noktasında her valuasyon altında doğru olmalıdır. Özel olarak, $v(i) = \{x\}$ olacak şekilde bir v valuasyonu göz önünde bulundurulsun. Karşılık gelen (X, f, v) melez tdm, M ile gösterilsin. Dolayısıyla, $M, x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ olur. $v(i) = \{x\}$ olduğundan, aynı zamanda $M, x \vDash i$ elde edilir. Buradan, $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ dir. Böylece, $M, x \vDash \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A(((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j)$ ve $M, x \vDash A[d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ elde edilir. Teorem 5.23 den "$(X, f), x \vDash i \rightarrow (\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftrightarrow\rangle^+ i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ j))$ dir ancak ve ancak O_x sonsuzdur" olduğu biliniyor. Diğer yandan, $a)$ şıkkından "$M, x \vDash A[d]\neg\langle\leftrightarrow\rangle^+ i))$ dir ancak ve ancak O_x herhangi bir yığılma noktasına sahip değildir" olduğu da biliniyor. O halde, $x \in X$ noktasının yörüngesi ıraksaktır.

$\square$

$\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftrightarrow\rangle,E}$ dili için elde edilen ifade gücü sonuçları arka sayfadaki Tablo 5 de özetlenmiştir.

Sabit	$p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle p$
Periyodik	$p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} p$
n**-periyodik**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^{k} i)$
$m-$**adım sabit**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle k)))$
$m-$**adım periyodik**	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+} k)))$
$m-$**adım** n**-periyodik**	$i \rightarrow (((\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^{n} i \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{t} i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle j \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{l=2}^{n-1} [\leftarrow]^{l} \neg j) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1} ((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle k \vee$ $\neg\langle\leftarrow\rangle^{n} k \vee \bigvee_{t=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{t} k))$
Bir süre sonra sabit	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle j))$
Bir süre sonra periyodik	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+} j))$
Bir süre sonra n**-periyodik**	$i \rightarrow (((\langle\leftarrow\rangle i \vee \neg\langle\leftarrow\rangle^{n} i \vee \bigwedge_{k=2}^{n-1} \langle\leftarrow\rangle^{k} i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle j \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} j \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\leftarrow\rangle^{k} j))$
Yakınsak	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge A((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+} j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftarrow\rangle^{+} i)$
Iraksak	$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge A(((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \neg\langle\leftarrow\rangle^{+} j) \wedge [d]\neg\langle\leftarrow\rangle^{+} i))$

Tablo 5: $\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle,\langle\leftarrow\rangle,E}$

6. SONUÇ

Bu tezde topolojik dinamik sistemlerin noktalarının yörüngeleri hakkında modal çıkarımlar yapabilmek için dinamik topolojik lojik kullanıldı ve dinamik dillerin ifade güçleri üzerine çalışıldı. İlk olarak, yörünge kavramı hatırlatılıp yörünge davranışları sınıflandırıldıktan sonra $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ temel dinamik dilinde sadece sabit ve periyodik yörüngelerin, sırasıyla, $p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle p$ ve $p \rightarrow \langle\rightarrow\rangle^{+} p$ formülleri tarafından ifade edebildikleri kanıtlanarak $\mathtt{DL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ nin, yörüngelerin topolojik olarak ilginç özelliklerinin çoğunu ifade etmeye yetecek kadar güçlü olmadığı gösterildi. Amaçlanılan ifade gücüne sahip olan zenginleştirilmiş dile ulaşmak için bazı operatörler ve nominaller eklenerek dil genişletildi ve sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edildi:

Temel melez dinamik dil $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle}$ da $n-$periyodik yörüngelerin

$$i \rightarrow \neg\langle\rightarrow\rangle i \wedge \langle\rightarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1} \neg\langle\rightarrow\rangle^{k} i$$

formülü ile ifade edilebildiği kanıtlandı ve aşağıdaki teorem verildi:

Yörüngelerin bir P özelliği $\phi(i)$ tarafından modeller seviyesinde ifade edilebilir ve $v(i) = \{x\}$ ise $m-$adım P, $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde

$$(i \rightarrow \neg\phi(i)) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{m}(j \rightarrow \phi(j)) \wedge \bigwedge_{s=1}^{m-1} \langle\rightarrow\rangle^{s}(k \rightarrow \neg\phi(k))$$

formülü tarafından ifade edilebilir.

Daha sonra, dile güçlü aşağı yönde ok bağlacını eklendi ve Teorem 4.25 de yörüngelerin bir P özelliği bir $\varphi(i)$ saf melez formülü ile ifade edilebilir ve $v(i) = \{x\}$ ise "bir süre sonra P" özelliği $(X, f), x$ üzerinde

$$\downarrow u.\neg\varphi(i := u) \wedge \langle\rightarrow\rangle^{+} \downarrow v.\varphi(j := v)$$

formülü tarafından $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow}$ dilinde ifade edilebilir olduğu kanıtlandı.

4. Bölümde son olarak, dile E evrensel modalitesi eklendi ve Teorem 4.30 da yörüngelerin sonsuz özellikleri olan yakınsaklık ve ıraksaklığın sırasıyla

$$\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle^{+}u \wedge [\rightarrow]^{+}(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^{+}v) \wedge E \downarrow w_1.\langle c\rangle(\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^{+}w_2 \wedge u) \wedge \neg w_1)))$$

ve

$$\downarrow u.(\neg\langle\rightarrow\rangle^{+}u \wedge [\rightarrow]^{+}(\downarrow v.\neg\langle\rightarrow\rangle^{+}v) \wedge A \downarrow w_1.[c](\downarrow w_2.(E(\langle\rightarrow\rangle^{+}w_2 \wedge u) \rightarrow w_1)))$$

formülleri tarafından $\mathtt{DHL}_{\langle\rightarrow\rangle,\downarrow,E}$ dilinde ifade edebildikleri kanıtlandı. Böylece, amaçlanan ifade gücüne sahip olan ilk zenginleştirilmiş dil elde edildi.

5. Bölümde dinamik modalite için yeni bir yorum önerildikten sonra temel seviyede bu yorum altındaki temel dinamik dilin de yörüngelerin topolojik olarak ilginç özelliklerinin çoğunu ifade edebilecek kadar güçlü olmadığı görüldü. Yine sadece sabit ve periyodik yörüngelerin sırasıyla $p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle p$ ve $p \rightarrow \langle\leftarrow\rangle^{+}p$ formülleri ile $\mathtt{DL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ da ifade edilebildiklerini gösterildi. Dili melezleştirdiğimizde ise sadece $n-$periyodik yörüngeler $(X, f), x$ üzerinde

$$i \rightarrow (\neg\langle\leftarrow\rangle i \wedge \langle\leftarrow\rangle^{n} i \wedge \bigwedge_{k=2}^{n-1}\neg\langle\leftarrow\rangle^{k} i)$$

formülü ile $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle}$ dilinde ifade edilebilir oldu. Fakat, bu dile E evrensel modalitesi eklenerek elde edilen $\mathtt{DHL}_{\langle\leftarrow\rangle,E}$ dilinde ifade gücü gözle görülür bir biçimde arttı ve aşağıdaki sonuçlar elde edildi:

Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilir ve $\upsilon(i) = \{x\}$ ise $m-$adım P, $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{m} i \wedge j) \rightarrow \phi(j)) \wedge A(\bigwedge_{s=1}^{m-1}((\langle\leftarrow\rangle^{s} i \wedge k) \rightarrow \neg\phi(k))))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

Yörüngelerin bir P özelliği modeller seviyesinde bir $\phi(i)$ formülü tarafından ifade edilebilir ve $\upsilon(i) = \{x\}$ ise bir süre sonra P, $(X, f), x$ noktalı yapısı üzerinde $i \rightarrow (\neg\phi(i) \wedge E((\langle\leftarrow\rangle^{+} i \wedge j) \rightarrow \phi(j)))$ formülü tarafından ifade edilebilir.

5. bölümde son olarak, topolojik box operatörünün yorumunu limit olarak değiştirdiğimizde yörüngelerin sonsuz özellikleri olan yakınsaklık ve ıraksaklığın $(X, f), x$ üzerinde, sırasıyla

$$i \to (\neg\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge j) \to \neg\langle\leftarrow\rangle^+ j) \wedge E\langle d\rangle\langle\leftarrow\rangle^+ i)$$

ve

$$i \to (\neg\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge A((\langle\leftarrow\rangle^+ i \wedge j) \to \neg\langle\leftarrow\rangle^+ j) \wedge [d]\neg\langle\leftarrow\rangle^+ i)$$

formülleri tarafından $\mathtt{DHL}_{\langle d\rangle\langle\leftarrow\rangle,E}$ dilinde ifade edilebildikleri kanıtlandı. Böylece, amaçlanan ifade gücüne sahip olan, aynı zamanda güçlü aşağı yönde ok bağlayıcısı $\downarrow$ u içermeyen ikinci bir zenginleştirilmiş dil elde edildi.

Tez boyunca elde edilen sonuçlar doğrultusunda, dinamik modalite için önerdiğimiz yeni yorumun eskisinden daha fazla ifade gücü sağladığı ve dolayısıyla, topolojik dinamik sistemler hakkında çıkarımlarda bulunmak için daha uygun olduğu belirlendi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Areces, C., Blackburn, P. and Marx, M., 2001, Hybrid logics: Characterization, Interpolation and Complexity, Journal of Symbolic logic, 66(3):977-1010.

Artemov, S., Davoren, J. and Nerode, A., 1997, Modal logics and topological semantics for hybrid systems, Technical Report MSI 97-05, Cornell University.

Bezhanishvili, G., Esakia, L. and Gabelaia, D., 2005, Some results on modal axiomatization and definability for topological spaces, Studia logica, 81(3):325–355.

Blackburn, P., 1993, Nominal tense logic, Notre Dame J. Formal logic 34.

Blackburn, P., Rijke, M. and Venema Y., 2001, Modal logic, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53, Cambridge University Press, ISBN-10: 0521527147, ISBN-13: 978-0521527149.

Brown, J., R., 1976, Ergodic Theory and topological Dynamics, Academic Press.

Engelking, R., 1989, General topology. Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin.

Katok, A. and Hasselblatt, B., 1998, Introduction to the Modern Theory of Dynamical systems, Cambridge, Cambridge University Press.

Konev, B., Kontchakov, R., Wolter, F. and Zakharyaschev, M., 2006, Dynamic topological logics over spaces with continuous functions, Advances in Modal logic, vol.6, G. Governatori, I. Hodkinson and Y. Venema (eds.), pp.299-318, College Publications, London.

Kremer, P., 1997, Temporal logic over **S4**: An axiomatizable fragment of dynamic topological logic, Bulletin of Symbolic logic, 3:375–376.

Kremer, P. and Mints, G., 1997, Dynamic topological logic, Bulletin of Symbolic logic, 3:371–372.

Kremer, P., Mints, G. and Rybakov, V., 1997, Axiomatizing the next-interior fragment of dynamic topological logic, Bulletin of Symbolic logic, 3:376–377.

McKinsey and Tarski, 1944, J. C. C. McKinsey and A. Tarski, The Algebra of Topology, Annals of Mathematics, 45, 141-191.

ÖZGEÇMİŞ

05.08.1980 tarihinde İzmir'in Bornova ilçesinde dünyaya geldi. İlköğrenimini Kemal Reis İlkokulu, orta ve lise öğrenimlerini sırasıyla 9 Eylül Ortaokulu ve Karataş Lisesi'nde tamamladı. 28.06.2002 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2003-2004 öğretim yılında Çankaya Değişim Dershanesi'nde Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 11.02.2004 tarihinde 9 Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda tezsiz yüksek lisansını tamamladı. 15.05.2006 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı. 2006-2007 öğretim yılında Hava Teknik Okullar Komutanlığı Astsubay Meslek Yüksek Okulu ve Ege Üniversitesi Çeşme Turizm Meslek ve Otelcilik Yüksek Okulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 19.09.2006 tarihinde Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı ve TÜBİTAK Yurtiçi Doktora Burs Programı'ndan burs almaya hak kazandı.