

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK DOĞRUSAL REGRESYONDA
PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

FATİH ERDUVAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Birsen Eygi ERDOĞAN

İSTANBUL 2011

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK DOĞRUSAL REGRESYONDA
PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

FATİH ERDUVAN
(521108001)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Birsen Eygi ERDOĞAN

İSTANBUL 2011

TEŞEKKÜR

Bulanık doğrusal regresyonda parametre tahmin yöntemleri adlı tez çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Birsen Eygi ERDOĞAN' a ve hayatım boyunca beni destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	V
SEMBOLLER.....	VI
KISALTMALAR.....	VIII
ŞEKİL LİSTESİ.....	IX
TABLO LİSTESİ.....	X
BÖLÜM I. GİRİŞ VE AMAÇ.....	1
I.1. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
BÖLÜM II. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜMELER.....	5
II.1 BULANIK MANTIK KAVRAMI	5
II.2 BULANIK KÜME TEORİSİ.....	7
II.2.1 Bulanık Kümelerin Gösterimi.....	8
II.3 ÜYELİK FONKSİYONU.....	9
II.3.1 Üçgen Üyelik Fonksiyonu.....	9
II.3.2 Yamuk Üyelik Fonksiyonu.....	10
II.4 BULANIK KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR.....	11
II.5 GENİŞLETME PRENSİBİ.....	13
II.6 BULANIK KÜMELERDE İŞLEMLER.....	13
II.6.1 Kesişim.....	13
II.6.2 Birleşim.....	14
II.6.3 Tümleme.....	15
II.6.4 Kapsama.....	15
II.6.5 Eşitlik.....	15

II.6.6 Cebirsel çarpım.....	16
II.6.7 Cebirsel toplam.....	16
II.6.8 Cebirsel fark.....	16
II.7 BULANIK SAYILAR.....	17
II.7.1 Üçgen Bulanık Sayı.....	17
II.7.2 Yamuk Bulanık Sayı.....	18
II.8 BULANIK SAYILARDA İŞLEMLER.....	19
 BÖLÜM III. BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ VE BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ.....	21
III.1 BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ.....	21
III.2 BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ.....	22
III.2.1 Tanaka Yöntemi.....	22
III.2.2 Peters Yöntemi.....	25
III.2.3 Minimum Bulanıklık Kriteri	26
III.2.4 Özelkan Yöntemi.....	27
III.2.5 Chen Yöntemi	27
III.2.6 Modarres Yöntemi	28
III.2.7 Hojati-Bector-Simimou Yöntemi(HBS1).....	29
III.2.8 Hojati-Bector-Simimou Yöntemi(HBS2).....	30
III.2.9 Nasrabadi Yöntemi	31
 BÖLÜM IV. UYGULAMA.....	32
IV.1 UYGULAMA I.....	32
IV.2 UYGULAMA II.....	38
 BÖLÜM V. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	43
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	48

ÖZET

BULANIK DOĞRUSAL REGRESYONDA PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

Bulanık mantık; insanın kesin olmayan ifadeler ile düşünmesini konu eden bir kavramdır. Bulanık mantık içinde tanımlanan bulanık küme ise, değişik üyelik derecesinde öğeleri olan bir topluluk olarak tanımlanır. Doğrusal regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişken ya da değişkenler arasındaki ilişkiyi analiz ederek, gözlemlere dayalı tahminler yapmamıza olanak sağlar. Klasik doğrusal regresyon analizinde kesin verilerle çalışmak oldukça kolaydır. Ancak, bağımlı ve bağımsız değişkenler veya aralarındaki ilişkinin bulanık ise bulanık doğrusal regresyonun kullanılması kaçınılmazdır. Bu çalışmada bulanık doğrusal regresyon için bazı parametre tahmin yöntemleri incelenmiştir. Bulanık doğrusal regresyonun parametreleri temelde iki farklı yaklaşım ile elde edilir. Bu yaklaşımlardan ilki doğrusal programlamaya dayalı yöntemleri içerir. İkincisi ise, bulanık en küçük kareler yöntemine dayanmaktadır.

Çalışmamızın birinci bölümü giriş ve önceki çalışmaları içermektedir. İkinci bölümde bulanık mantık kavramı, bulanık mantığın uygulama alanları, bulanık küme kavramı, üyelik fonksiyonu ve türleri, bulanık kümelerde temel kavramlar, bulanık kümeler üzerinde yapılan temel işlemler, bulanık sayılar ve bulanık sayılarda yapılan işlemler ele alınmıştır. Üçüncü bölümde bulanık doğrusal regresyon analizinin genel bir açıklaması verilmiş ve bulanık doğrusal regresyona dayalı parametre tahmini yapmak için kullanılan yöntemlerden bir kısmı incelenmiştir. Dördüncü bölümde, bu yöntemlerin bazıları İstanbul/Ataşehir'deki konut fiyatlarının tahmini için kullanılmıştır. Sonuç ve tartışma bölümünde ise, incelenen yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır.

Eylül, 2011

Fatih ERDUVAN

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMATION METHODS IN FUZZY LINEAR REGRESSION

Fuzzy logic is the concept that concerns people's thinking with imprecise statements. Fuzzy set, which is defined in fuzzy logic, is described as a collection of items that have different degrees of membership. The analysis of linear regression allows us to make some estimation based on the observations by analyzing the relation between the dependent variable and independent variable or variables. It is very easy to work with accurate data through the classic linear regression analysis. However, it is inevitable to use fuzzy linear regression if the dependent or independent variables or the relation between them are fuzzy. In this study, some of parameter estimation methods for fuzzy linear regression were researched. The parameters of the fuzzy linear regression generally are gained by two approaches. The first one of these approaches includes the methods that are based on linear programming. The second one is based on the methods of the fuzzy least squares.

The first chapter of our study includes the introduction and the literature survey of the subject. In the second chapter the fuzzy logic concept, the areas of the implementation of the fuzzy logic, the function of membership and its variations, the fundamental concepts of fuzzy sets, the fundamental processing in fuzzy sets, fuzzy numbers and processing with fuzzy numbers were handled. In the third chapter the general explanation of the fuzzy linear regression analysis was given and some of the techniques that are used to make parameter estimation based on fuzzy linear regression were analysed. In the fourth chapter some of the methods were used to estimate about the Istanbul/Ataşehir housing prices. In the section of conclusion and discussion, the results obtained from examined methods were compared and evaluated.

September, 2011

Fatih Erduvan

SEMBOLLER

$\vee$	: veya Sembolü
$\wedge$	: ve Sembolü
$\tilde{A}$	: Bulanık Küme
$\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$	: $\tilde{A}$ Bulanık Kümesinin Üyelik Fonksiyonu
$h(\tilde{A})$	: $\tilde{A}$ Bulanık Kümesinin Yüksekliği
$\text{Supp}(\tilde{A})$	: $\tilde{A}$ Bulanık Kümesinin Destek Kümesi
$\tilde{A}_{\alpha}$	: α - Kesim Kümesi
H	: Uyum ölçüsü
ε	: Hata Vektörü
σ^2	: Hata Varyansı
I_n	: n Boyutlu Birim Vektör
$\mathbf{X}$	: Bağımsız Değişken Vektörü
$\tilde{A}_j$	: j. Tahmin Edilen Parametre
$\mathbf{c}$	: $\tilde{A}_j$ Parametrelerinin Merkez Değerlerinin Vektörü
$\mathbf{s}$	: $\tilde{A}_j$ Parametrelerinin Yayılım Değerlerinin Vektörü
$\mathbf{c}_j$	: j. Tahmin Edilen Parametrenin Merkezi
$\mathbf{s}_j$	: j. Tahmin Edilen Parametrenin Yayılımı
$\tilde{Y}_i$	: i. Tahmin Değeri
$\tilde{y}_i$	: i. Tahmin Değerinin Merkezi
$\tilde{e}_i$	: i. Tahmin Değerinin Yayılımı
Y_i	: i. Gözlem Değeri
e_i	: i. Gözlem Değerinin Merkezi
y_i	: i. Gözlem Değerinin Yayılımı
d_0	: Peters Modelinde Amaç Fonksiyonun İstenen Değeri
M	: Gözlem Sayısı
d_{iU}	: i. Üst Sapma Değişkeni
d_{iL}	: i. Alt Sapma Değişkeni
d_{iU}^+	: i. Tahmini Aralığın Üst Noktası
d_{iU}^-	: i. Gözlem Aralığının Üst Noktası

d_{iL}^+ : i. Tahmini Aralığın Alt Noktası
 d_{iL}^- : i. Gözlem Aralığının Alt Noktası

KISALTMALAR

HBS1 : Hojati-Bector-Simimou yöntemi (girdisi kesin çıktısı bulanık sayı olan durumlar için)

HBS2 : Hojati-Bector-Simimou yöntemi (girdisi ve çıktısı bulanık sayı olan durumlar için)

HKO : Hata Kareler Ortalaması

ŞEKİLLER

SAYFA NO

Şekil II.1 Başarı-Başarısızlık için Klasik Kümenin Grafik Gösterimi.....	7
Şekil II.2 Başarı-Başarısızlık İçin Bulanık Kümenin Grafik Gösterimi.....	8
Şekil II.3 Üçgen Üyelik Fonksiyonunun Grafikle Gösterimi Ve Kısımları.....	9
Şekil II.4 Yamuk Üyelik Fonksiyonunun Grafikle Gösterimi Ve Kısımları.....	10
Şekil II.5 Normal Ve Normal Olmayan Bulanık Küme.....	12
Şekil II.6 Konveks ve Konveks Olmayan Bulanık Küme.....	12
Şekil II.7 $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ Bulanık Kümelerinin Üyelik Fonksiyonları.....	14
Şekil II.8 $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ Bulanık Kümesinin Üyelik Fonksiyonu.....	14
Şekil II.9 $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ Bulanık Kümesinin Üyelik Fonksiyonu.....	14
Şekil II.10 $\tilde{A}$ Bulanık Kümesi Ve Tümleninin Üyelik Fonksiyonu.....	15
Şekil II.11 Üçgensel Bulanık Sayının Grafikle Gösterimi	17
Şekil II.12 Yamuksal Bulanık Sayının Grafikle Gösterimi.....	18
Şekil III.1 Bulanık Y_i gözlem değerlerinin $\tilde{Y}_i$ tahmin değerlerine uygunluk derecesi..	24
Şekil IV.1 Tanaka Modeli için $Y_i, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri.....	37
Şekil IV.2 Özelkan Modeli için $Y_i, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri.....	37
Şekil IV.3 Minimum Bulanıklık Kriteri için $Y_i, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri.....	37
Şekil IV.4 Özelkan Modeli için $y_{i-merkez}, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri.....	42
Şekil IV.5 HBS1 Modeli için $y_{i-merkez}, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri..	42
Şekil IV.6 Modarres Modeli için $y_{i-merkez}, \tilde{Y}_{alt}, \tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri.....	42

TABLolar

SAYFA NO

Tablo II.1 X kümesindeki elemanların Y kümesindeki görüntüleri.....	13
Tablo IV.1 Ataşehirdeki Konut Fiyatları ve Konut Fiyatlarını Etkileyen Etmenler Listesi.....	33
Tablo IV.2 Tanaka Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	34
Tablo IV.3 Özelkan Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	35
Tablo IV.4 Minimum Bulanıklık Kriteri ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	36
Tablo IV.5 Ataşehirdeki Konutların Bulanık Fiyatları ve Konut Fiyatlarını Etkileyen Etmenler Listesi.....	38
Tablo IV.6 Özelkan Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	39
Tablo IV.7 HBS1 Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	40
Tablo IV.8 Modarres Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri.....	41
Tablo V.1 Uygulama1 için HKO değerleri.....	43
Tablo V.2 Uygulama2 için HKO değerleri.....	44

BÖLÜM I

GİRİŞ VE AMAÇ

İnsanoğlu zamanının büyük çoğunluğunu yaşadığı dünyayı anlamaya çalışmak için harcamaktadır. Araştırmacılar karşılaştıkları olaylarla ilgili neden-sonuç ilişkilerini incelerken bazen iki sonuçlu (doğru-yanlış) klasik mantıktan yararlanırlar. Ancak, bazen karşılaşılan olaylar belirsizlik içerirler. Bu durumla başa çıkmak üzere ‘‘Bulanık Mantık’’ kavramı ortaya çıkmış olup, son yıllarda birçok alana uygulanmaktadır.

Bulanık mantığın uygulamada pek çok yararı bulunmaktadır. Bulanık mantık esnek olup, kesin olmayan verileri, belirsizlik ve olasılık durumlarını, karmaşık ve doğrusal olmayan fonksiyonları uzman görüşüne dayandırarak modelleyebilir. Ayrıca bulanık mantık, doğal olup konuşma diliyle modelleme imkanı sağlar. (Baykal ve Beyan, 2004)

Bulanık mantığın kullanıldığı alanlardan biri de bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin modellenmesi amacını taşıyan regresyon analizidir. Klasik regresyon analizinde, gözlem ve tahmin değerleri arasındaki sapmaların rastgele hatalar olduğu varsayımı yapılır. Böylece istatistiksel teknikler regresyon analizinde tahminlemede ve çıkarımda kullanılır. Bununla birlikte bu hatalar bazen sistem bilgisinin yetersizliğinden veya belirsiz verilerden kaynaklanır. Regresyon modelinin bu tipindeki belirsizlik, rasgelelikten daha çok bulanıklık gösterir. Böyle durumlarda bulanık regresyon kullanılarak daha iyi sonuçlar elde edilir. Bulanık regresyon araştırmacıya çok sayıda alternatif sonuç sunduğu için araştırmacı, bunlardan en uygun olanını seçme olanağına sahiptir.

Ayrıca bulanık doğrusal regresyon klasik doğrusal regresyon ile ilgili varsayımların sağlanamaması durumunda da tercih edilen bir yöntemdir. Doğrusallık koşulunu sağlayan ve bağımlı değişkenle ilişkili olan her değişken modele katılabilir. (İşbilen, 2005)

Bu çalışmada bulanık doğrusal regresyonun parametre tahmininde kullanılan yöntemler incelenmiştir. Uygulama çalışmalarında ise incelenen bazı yöntemler ile İstanbul'un Ataşehir ilçesindeki konut fiyatları tahmin edilmiş ve sonuçlar birbiri ile karşılaştırılmıştır. Uygulama için Ataşehir'in seçilme nedeni, bu bölgenin Türkiye'nin finans merkezi olacak şekilde planlanmasıdır.

I.1 ÖNCEKİ ALIşMALAR

Bulanık regresyon oldukça yeni ve gelişmeye açık bir konudur. Bu bölümde literatürde yer alan çalışmalardan bahsedilecektir.

Bulanık doğrusal regresyon konusundaki ilk çalışmayı Tanaka (1982) yapmıştır. Tanaka'nın girdisi ve çıktısı kesin değerler olan, fakat sistem yapısının bulanık olduğu durumlar için önerdiği yaklaşım doğrusal programlama tekniğine dayanmaktadır. Tanaka bu çalışmasında prefabrik evlerin fiyatlarıyla ilgili 15 gözlemden oluşan bir örnek üzerinde uygulama yapmış ve bu tür bulanık sistem uygulamalarında daha farklı parametre tahmin yöntemlerinin de kullanılabileceği önerisinde bulunmuştur.

Daha sonraki bir çalışmasında Tanaka (1987), girdisi kesin, çıktısı bulanık olan verilerin analizi için olabilirlik doğrusal modelleri önermiştir. Bu çalışmada bulanık parametrelili polinom biçimindeki modellerin alt ve st tahminleri lineer programlama probleminin çözümü ile elde edilmektedir.

Diamond (1988) girdisi kesin, çıktısı bulanık ve girdisi bulanık, çıktısı bulanık sayılı olan veriler için en küçük kareler yöntemine dayanan modeller geliştirmiştir. Diamond bulanık veri setlerinin modellenmesi ile ilgili çalışmasında klasik en küçük kareler yöntemine benzer şekilde normal denklemlerin ıkarılışlarına da yer vermiştir.

Sakawo ve Yano (1992) girdisi ve çıktısı bulanık sayılı olan veriler için çok amaçlı programlama metodunu geliştirmişlerdir.

Kim ve Bishu (1998) bağımlı değişkenin tahmin ve gözlem üyelik değerleri arasındaki farkın minimizasyonuna dayalı regresyon modeli önermişlerdir. Ayrıca gözlem ve tahmin değerlerinin üyelik fonksiyonları arasındaki uyum ölçüsüne dayalı olarak yöntemleri karşılaştırma kriteri önermişlerdir.

Wang ve Tsaur (2000) Tanaka tarafından tanımlanmış girdisi kesin ve çıktısı bulanık sayı olan problemin çözümü için değiştirilmiş bulanık en küçük kareler yöntemini önermişlerdir.

Xu ve Li (2001) girdisi kesin çıktısı normal bulanık sayı olan veriler için klasik en küçük kareler yöntemine benzer bir yöntem önermiştir.

Ishibuchi ve Manuba (2001) simetrik üçgensel bulanık katsayılara sahip bulanık regresyonun bazı sınırlamalara sahip olduğuna işaret etmiş ve daha sonra bulanık katsayıları simetrik olmayan üçgensel sayılar ve yamuksal bulanık sayılar olarak genişletmişlerdir.

Yang ve Lin (2002) bulanık girdi ve bulanık çıktı değişkenleri için bulanık en küçük kareler yaklaşımı altında iki tahminleme yöntemi önermişlerdir. Heterojen veri kümesi ve aykırı değerleri belirlemek için kümeleme analizinden yararlanmışlardır.

Nasrabadi ve Nasrabadi (2003) girdisi ve çıktısı kesin-bulanık sayı olan durumlar için kuadratik programlamaya dayalı yöntem önermişlerdir. Ayrıca h seviyesini belirlemek amacıyla bir algoritma sunmuşlardır.

Modarres ve ark. (2004) girdisi kesin çıktısı bulanık sayı olan veri grubu için kuadratik programlamaya dayalı yöntem önermişlerdir. Ayrıca h seviyesini belirlemek amacıyla bir algoritma sunmuşlardır.

Nasrabadi ve ark. (2005) çok amaçlı programlama yaklaşımı ile bulanık doğrusal regresyon analizi adlı bir çalışma yapmıştır. Bulanık regresyonun aykırı değer durumlarındaki eksiklikleri yok etmek için çok amaçlı bulanık doğrusal regresyon modeli geliştirmişlerdir.

Hojati ve ark. (2005) girdisi kesin, çıktısı bulanık ve girdisi bulanık, çıktısı bulanık sayı olan veriler için parametre tahminine yönelik doğrusal programlamaya dayalı yöntem önermişlerdir.

Arabpour ve Tata (2008) üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar üzerinde bazı metrikleri göz önüne aldılar. Araştırmacılar en küçük kareler modeliyle ilişkili normal denklemleri kullanarak bulanık lineer regresyon katsayılarını hesaplamak için üç farklı model önermişlerdir.

Hassanpour ve ark. (2009b) yaptıkları çalışmada bulanık lineer regresyon modelinin katsayılarını tahmin etmek amacıyla hedef programlama yöntemini önermişlerdir. Önerdikleri yöntem simetrik ve simetrik olmayan bulanık sayılara uygulanabilmektedir. Ayrıca önerdikleri yöntemi literatürde adı geçen bazı yöntemlerle karşılaştırmışlardır.

Hassanpour ve ark. (2011) bulanık girdiler ve bulanık çıktı üzerine önerdikleri modelde yayılım değerlerinin yanı sıra merkez değerlerini de hesaba katmışlardır. Üstelik model hem simetrik hem de simetrik olmayan sayılar üzerinde uygulanabilmektedir.

Bundan sonraki bölümde bulanık doğrusal regresyonla ilgili parametre tahmin yöntemlerine girmeden önce bulanık mantık ve bulanık küme kavramlarından söz edilecektir.

BÖLÜM II

BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜMELER

II.1 BULANIK MANTIK KAVRAMI

Bulanık mantık kavramını ilk olarak; 1965 yılında yayınlamış olduğu ‘Fuzzy Sets’ isimli makale ile California Berkeley Üniversitesinden Prof. Lotfi Asker Zadeh duyurmuştur.

Bulanık mantık belirsizliklerin anlatımı ve belirsizlikler ile çalışılabilmesi için kurulmuş katı bir matematik düzen olarak tanımlanabilir. Bilindiği gibi istatistikte ve olasılık kuramında belirsizlikler ile değil kesinliklerle çalışılır. Ama insanın yaşadığı ortam daha çok belirsizliklerle doludur. Bu yüzden insanoğlunun sonuç çıkarabilme yeteneğini anlayabilmek için belirsizliklerle çalışmak gerekir. (Aksoy, 2003)

Bulanık mantığın genel özellikleri Zadeh tarafından şöyle ifade edilmiştir;

- 1- Bulanık mantıkta kesin değerlere dayanan düşünme yerine yaklaşık düşünme kullanılır.
- 2- Bulanık mantıkta her şey $[0,1]$ aralığında belirli bir derece ile gösterilir.
- 3- Bulanık mantıkta bilgi büyük, küçük, çok az gibi sözel ifadeler şeklindedir.
- 4- Bulanık çıkarım işlemi sözel ifadeler arasında tanımlanan kurallar ile yapılır.
- 5- Her mantıksal sistem bulanık olarak ifade edilebilir.
- 6- Bulanık mantık matematiksel modeli çok zor elde edilen sistemler için çok uygundur.
- 7- Bulanık mantık tam olarak bilinemeyen veya eksik girilen bilgilere göre işlem yapma yeteneğine sahiptir. (Elmas, 2003)

Klasik mantıkta bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. Bulanık mantıkta ise, bir önermenin belirli ölçüde doğruluk ya da yanlışlık payı vardır. Yani, klasik mantık bir önermenin doğruluğunu irdelerken siyah beyaz ayrımı yapar. Bulanık mantık ise gri

bölgeleri de dikkate alır. Şimdi bu durumu daha iyi anlayabilmek için çelişmezlik ve üçüncünün olmazlığı ilkesini verelim.

Klasik mantıkta çelişmezlik ilkesi ($p \wedge p' = 0$) ve üçüncünün olmazlığı ilkesi ($p \vee p' = 1$) geçerli iken bulanık mantıkta böyle bir durum söz konusu değildir. Çelişmezlik ilkesi bir önermenin hem doğru hem de yanlış olamayacağı anlamına gelir. Üçüncünün olmazlığı ilkesi ise birbirinin olumsuzu olan iki önermeden yalnızca birinin doğru ya da yalnızca birinin yanlış olacağı anlamına gelmektedir. Lukasiewicz (1964) tarafından yapılan tanım şöyledir:

$$p \vee q = \max(p, q) ; p \wedge q = \min(p, q) ; p' = 1 - p \quad (\text{II.1})$$

Şimdi bulanık mantıkta çelişmezlik ilkesinin sağlanmadığını görelim.

$$p \wedge p' = \min(p, p') = \min(p, 1 - p) = \begin{cases} p & \text{ise } 0 \leq p \leq 0.5 \\ 1 - p & \text{ise } 0.5 \leq p \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$p = 0$ ve $p = 1$ olduğu durumlarda $p \wedge p' = 0$; diğer durumlarda ise $0 < p \wedge p' \leq 0.5$
O halde $p \wedge p' \neq 0$ olduğu durumların var olduğu açıktır.

Şimdi ise, bulanık mantıkta üçüncünün olmazlığı ilkesinin sağlanmadığını görelim.

$$p \vee p' = \max(p, p') = \max(p, 1 - p) = \begin{cases} 1 - p & \text{ise } 0 \leq p \leq 0.5 \\ p & \text{ise } 0.5 \leq p \leq 1 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

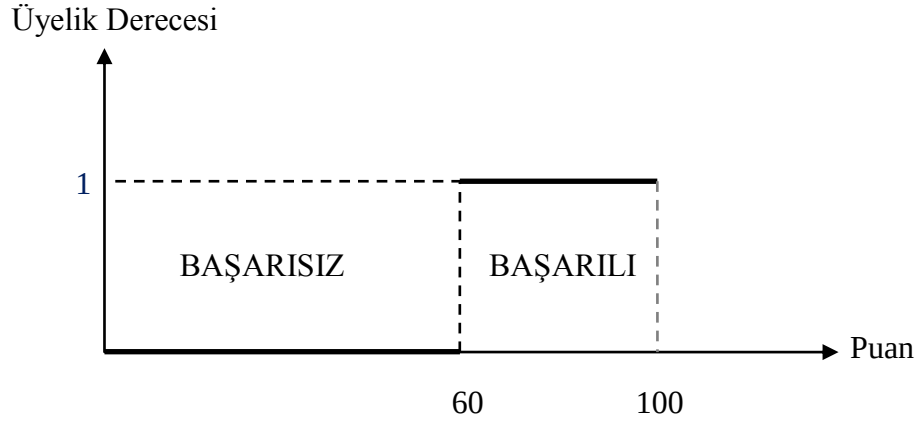
$p = 0$ ve $p = 1$ olduğu durumlarda $p \vee p' = 1$; diğer durumlarda ise $0.5 \leq p \vee p' < 1$
O halde $p \vee p' \neq 1$ olduğu durumların var olduğu açıktır.

1980' den sonra bulanık sistemin; elektrikli süpürgeler, çamaşır makineleri, asansörler, metro ve şirket işletimi gibi konularda kullanılmasında patlama olmuştur. Son yıllarda birçok mühendislik alanında, veri tabanlarının sözelleştirilmesinde, tele-sekreterlerin cevaplamasında ve buna benzer birçok konuda bulanık mantık tüm dünyada kullanılır hale gelmiştir. (Şen, 2001)

II.2. BULANIK KÜME TEORİSİ

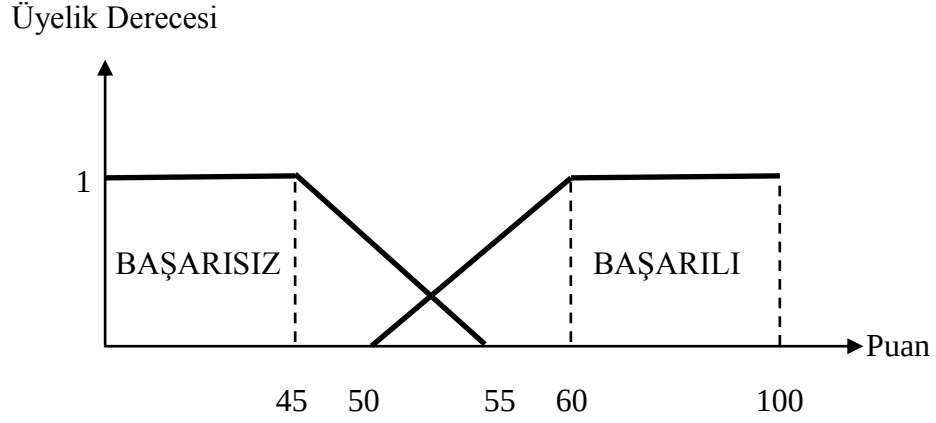
Bulanık küme teorisi esas olarak; insan düşünce ve algılarındaki belirsizlikle ve bu belirsizliğin sayısallaştırılması ile ilgilenmektedir. Yani tam ve kesin olmayan bilgiler ışığında insanların tutarlı ve doğru kararlar vermelerini sağlar.

Aristo mantığına göre çalışan ve şimdiye kadar alışlagelen klasik küme kuramında, bir öge bir kümeye ya aittir ya da değildir. Kümeye ait ise, üyelik derecesi 1' dir. Kümeye ait değil ise üyelik derecesi 0' dır. İkisi arasında hiçbir üyelik derecesi düşünülemez. Hâlbuki bulanık kümeler kuramında 0 ile 1 arasında değişen, değişik üyelik derecelerinden söz etmek mümkündür. Böylece bulanık kümelerdeki öğelerin üyelik derecelerinin kesintisiz olarak 0 ile 1 arasında değişebileceğini ileriye süren, kümeler teorisinde geniş uygulamaya sahip ve doğal hayatla uyumlu olan, bulanık küme teorisi geliştirilmiştir. Bu kadar basit temeli olan bulanık kümeler kavramının özellikle 1980 yılı sonrasındaki teknoloji ve bilimsel çalışmalarda etkisi büyük olmuştur. (Şen, 2001)



Şekil II.1 Başarı-Başarısızlık için Klasik Kümenin Grafik Gösterimi

Şekil II.1 deki grafikte klasik küme teorisine göre 60 ile 100 arası puan alan bir öğrenci başarılı sayılırken; 59,5 puan alan bir öğrenci başarısız durumuna düşmektedir. Görüldüğü gibi klasik küme teorisinin hiçbir esnekliği yoktur. Gerçekte ise sınırlar bu kadar keskin değildir.



Şekil II.2 Başarı-Başarısızlık İçin Bulanık Kümenin Grafik Gösterimi

Şekil II.2 de ise, 0 dan 45 puana kadar puan alanlar başarısız sayılmış olup, bu bölgede yer alanlar başarısız bulanık kümenin tam üyeliğine sahiptir. 45 ile 55 puan arasında başarısız bulanık küme için dereceli üyelik mevcuttur. 50 ile 55 puan arasında ise, bulanık kümelerin birbirlerini kestiği durum olan örtüşüm ortaya çıkmıştır. Bu bölge hem başarılı hem başarısız olarak ele alınabilir. 50 ile 60 puan arasında başarılı bulanık küme için dereceli üyelik mevcuttur. 60 ile 100 puan arası ise başarılı sayılmış ve bu bölge başarılı bulanık kümenin tam üyeliğine sahiptir.

II.2.1 Bulanık Kümelerinin Gösterimi

Bulanık kümelerde; klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyon, $\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$ yerini üyelik fonksiyonuna bırakır. Bu da; $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ biçiminde gösterilir.

Bulanık küme, bir nesne ve bu nesnenin ilgili kümeye üyelik derecesini gösteren sıralı çiftlerden oluşup $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\}$ biçiminde ifade edilir. Eğer X kümesi kesikli bir küme ise, $\tilde{A}$ bulanık kümesi $\tilde{A} = \{\sum \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i\}$ olarak ifade edilir. Bulanık kümenin sürekli olması durumunda ise $\tilde{A} = \{\int \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i\}$ biçiminde ifade edilir. Bu notasyonda bölüm işareti bölme işlemi değil; alttaki küme üyesine üstteki üyelik derecesinin karşılık geldiğini göstermektedir. $\sum$ ve $\int$ işaretleri de küme öğelerinin topluluğunu ifade etmektedir. (Baykal ve Beyan, 2004)

II. 3 ÜYELİK FONKSİYONU

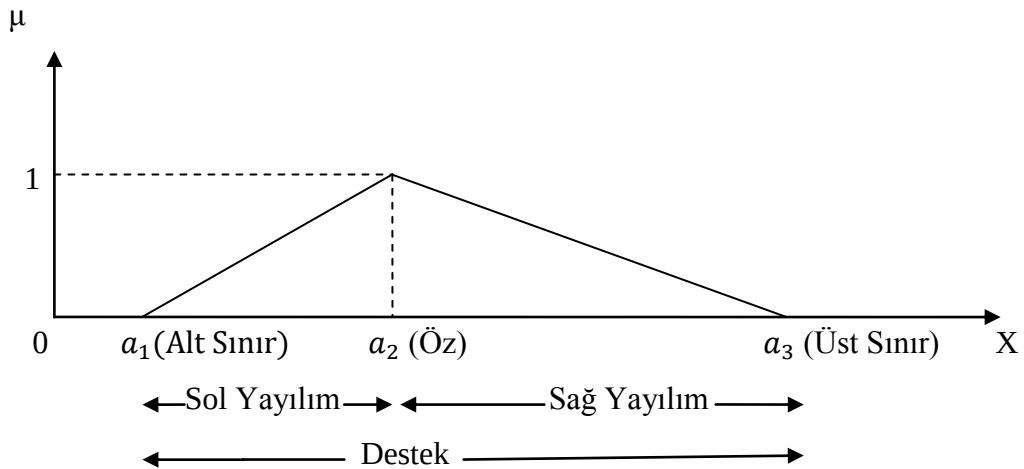
Bulanık kümede her bir öğenin, bulanık kümeye ait olma derecesi vardır. Bu dereceler üyelik fonksiyonu ile belirlenir. Üyelik fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değer alır ve $\mu(x)$ ile gösterilir. Örneğin $\mu_{\tilde{A}}(x)=0.6$ olduğunda, x elemanının $\tilde{A}$ bulanık kümesine ait olma derecesi 0.6'dır. Yani x elemanı $\tilde{A}$ kümesinde %60 olasılıkla bulunmaktadır. Üyelik dereceleri ile belirlenmiş bir bulanık kümenin, benzer değerler alan olasılık değerlerinden farklılığı olmasına rağmen bulanık üyelik değerleri ile olasılık arasında kesin bir ilişki bulunmaktadır.

Üyelik fonksiyonlarının seçiminde belli bir yöntem yoktur. En uygun fonksiyon uzmanlar tarafından deneyler sonucunda bulunur. Bu da oldukça uzun bir zaman alabilir. En çok bilinen üyelik fonksiyon türleri üçgen ve yamuk şeklinde olanlardır. Bu üyelik fonksiyonlarının tanımları aşağıda verilmektedir. (Baykal ve Beyan, 2004)

II.3.1 Üçgen Üyelik Fonksiyonu

Üçgen üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3 olmak üzere üç parametre ile tanımlanır. (II.4) eşitliği ile ifade edilen üçgen üyelik fonksiyonun grafiği Şekil II.3 de verilmektedir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 & \text{ise} & (x - a_1)/(a_2 - a_1) \\ a_2 \leq x \leq a_3 & \text{ise} & (a_3 - x)/(a_3 - a_2) \\ x > a_3 \text{ veya } x < a_1 & \text{ise} & 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$



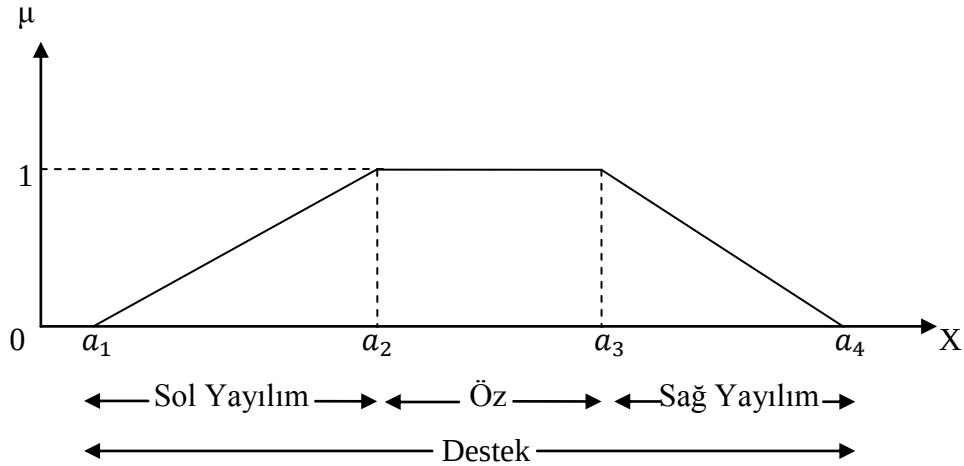
Şekil II.3 Üçgen Üyelik Fonksiyonunun Grafikle Gösterimi Ve Kısımları

Alt sınır (sol ayak) a_1 , üst sınır (sağ ayak) a_3 olup merkez ise a_2 değeridir. $\mu(x)=1$ olan kısım özdür. Öz'ün sola ve sağa doğru olan ve alt ve üst sınırları aşmayan kısımlarına sırayla sol ve sağ yayılım denir. Bunlar $(a_2 - a_1)$ ve $(a_3 - a_2)$ olan kısımlardır. Eğer yayılım(yayılış) olarak ifade edilen $(a_2 - a_1)$ ve $(a_3 - a_2)$ eşit ise üçgensel üyelik fonksiyonu simetrik olur. Alt sınırdan üst sınıra kadar olan ve üyelik değeri sıfırdan büyük olan noktaların kümesine ise destek (support) denir.

II.3.2 Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonu a_1, a_2, a_3, a_4 olmak üzere dört parametre ile tanımlanır. (II.5) eşitliği ile ifade edilen yamuk üyelik fonksiyonun grafiği Şekil II.4 de verilmektedir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 & \text{ise } (x - a_1)/(a_2 - a_1) \\ a_2 \leq x \leq a_3 & \text{ise } 1 \\ a_3 \leq x \leq a_4 & \text{ise } (a_4 - x)/(a_4 - a_3) \\ x > a_4 \text{ veya } x < a_1 & \text{ise } 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$



Şekil II.4 Yamuk Üyelik Fonksiyonunun Grafikle Gösterimi Ve Kısımları

Alt sınır (sol ayak) a_1 ve üst sınır (sağ ayak) a_4 ile ifade edilmektedir. $[a_2, a_3]$ kapalı aralığı özdür. Sol ve sağ yayılımlar sırasıyla $(a_2 - a_1)$ ve $(a_4 - a_3)$ olan kısımlardır. Eğer $(a_2 - a_1) = (a_4 - a_3)$ ise yamuksal üyelik fonksiyonu simetrik olur. Destek ise (a_1, a_4) açık aralığıdır. $a_2 = a_3$ olduğu durum için yamuk üyelik fonksiyonunun üçgen üyelik fonksiyonuna dönüştüğü söylenebilir. Dolayısıyla üçgen üyelik fonksiyonu yamuk üyelik fonksiyonun özel bir halidir.

II.4 BULANIK KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

Bulanık kümeler ile ilgili temel kavramlar aşağıda tanımlanmıştır. (Baykal ve Beyan, 2004)

Tanım II.1 Destek Kümesi

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin sıfırdan büyük üyelik derecelerine sahip elemanlarının oluşturduğu kümeye destek kümesi denir.

$$\text{Supp}(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (\text{II.6})$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek II.1 $\tilde{A} = \{(4,0.3), (7,0.8), (2,0), (9,1)\}$ ise $\text{Supp}(\tilde{A}) = \{4,7,9\}$

Tanım II.2 α -Kesim (α -Seviye) Kümesi

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin üyelik dereceleri α ' ya eşit veya büyük olan elemanlarından oluşan klasik kümeye α -kesim kümesi denir.

$$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad (\text{II.7})$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek II.2 $\tilde{A} = \{(4,0.3), (5,0.5), (7,0.8), (2,0), (9,1)\}$ ve $\alpha = 0.5$ ise $\tilde{A}_{0.5} = \{5,7,9\}$

Tanım II.3 Yükseklik

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği üyelik derecesi en büyük olan değere eşittir.

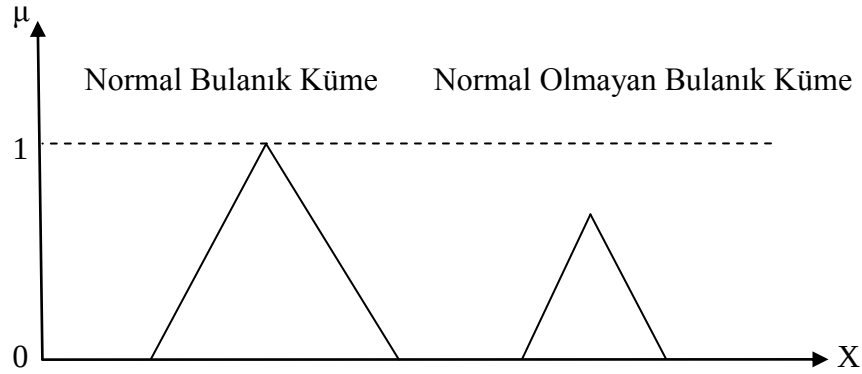
$$h(\tilde{A}) = \sup(\mu_{\tilde{A}}(x)), \forall x \in X \quad (\text{II.8})$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek II.3 $\tilde{A} = \{(4,0.3), (7,0.8), (2,0)\}$ ise $h(\tilde{A}) = 0.8$ dır.

Tanım II.4 Normallik

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin en az bir elemanının üyelik derecesi 1' e eşit ise $\tilde{A}$ bulanık kümesine normaldir denir. Yani normal küme, yüksekliği 1 ($\sup(\mu_{\tilde{A}}(x)) = 1$) olan kümedir. Normal olmayan bir küme tüm elemanlarının üyelik derecelerinin yüksekliğe bölünmesi ile normalleştirilebilir. Şekil II.5 de normal ve normal olmayan bulanık kümelerin grafiklerle gösterimleri verilmiştir.



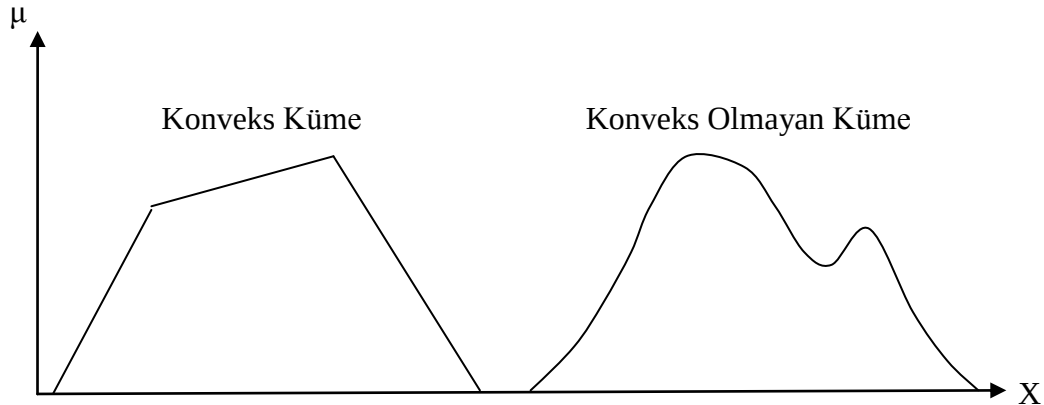
Şekil II.5 Normal Ve Normal Olmayan Bulanık Küme

Tanım II.5 Konveks Küme

$\tilde{A}$ bulanık kümesi için; $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \quad (II.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\tilde{A}$ bulanık kümesi konvekstir denir. Şekil II.6 da konveks ve konveks olmayan bulanık kümeye ait grafik verilmiştir.



Şekil II.6 Konveks ve Konveks Olmayan Bulanık Küme

II.5 GENİŞLETME PRENSİBİ

$\tilde{A}$ bulanık kümesi X de tanımlı $\tilde{B}$ bulanık kümesi Y de tanımlı olmak üzere;

f: $X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ise $\tilde{B} = f(\tilde{A})$ belirlenmek istendiğinde

$$\mu_{f(\tilde{A})}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)), y \in Y \text{ biçiminde tanımlanır.}$$

Buradan $\tilde{B}$ ' nin üyelik fonksiyonu; $\mu_{\tilde{B}}(y) = \max \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ } x \in f^{-1}(y), y \in Y$ biçimindedir.

Örnek II.4 $X = \{20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65\}$ $Y = \{2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5\}$

f: $X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X kümesindeki elemanların Y kümesindeki görüntüleri Tablo II.1' de verilmiştir.

Tablo II.1 X kümesindeki elemanların Y kümesindeki görüntüleri

X	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
f(x)	2.5	2.5	3.0	3.5	3.5	4.0	4.0	4.5	4.5	5.0

$$\tilde{A} = 1/20 + 1/25 + 0.8/30 + 0.6/35 + 0.4/40 + 0.2/45 + 0/50 + 0/55 + 0/60 + 0/65 \text{ ise } \tilde{B} = ?$$

Yukarıdaki tanımdan hareketle $\tilde{B} = 1/2.5 + 0.8/3 + 0.6/3.5 + 0.2/4 + 0/4.5 + 0/5$ bulunur.

II. 6 BULANIK KÜMELERDE İŞLEMLER

Bulanık kümelerde yapılan işlemlerle ilgili kurallar aşağıda tanımlanmıştır.
(Zadeh, 1965)

II.6.1 Kesişim

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ olup üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (\text{II.10})$$

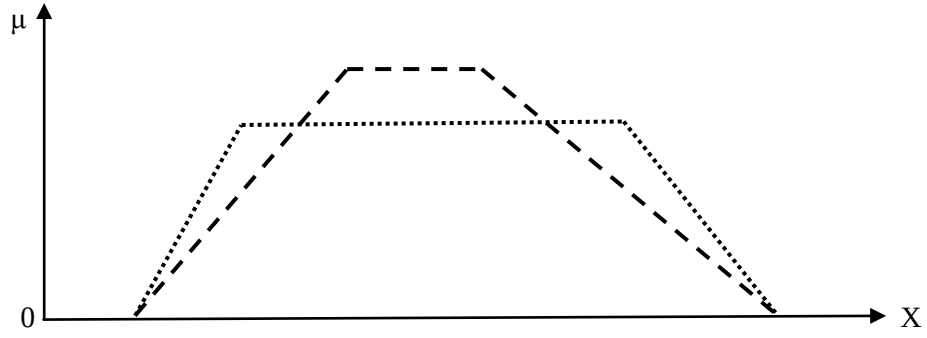
olarak tanımlanır.

II.6.2 Birleşim

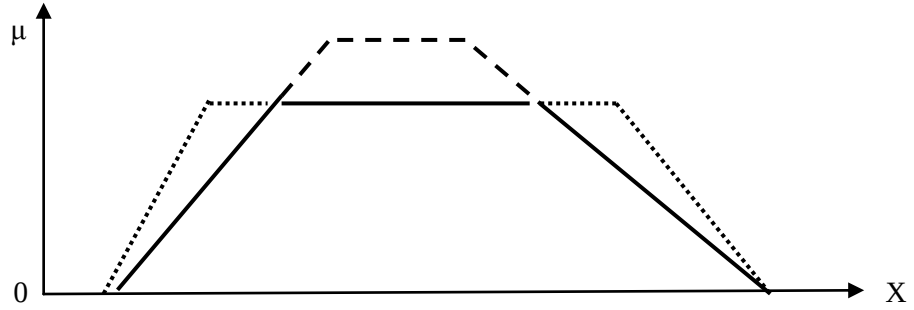
$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşimi $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ olup üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (\text{II.11})$$

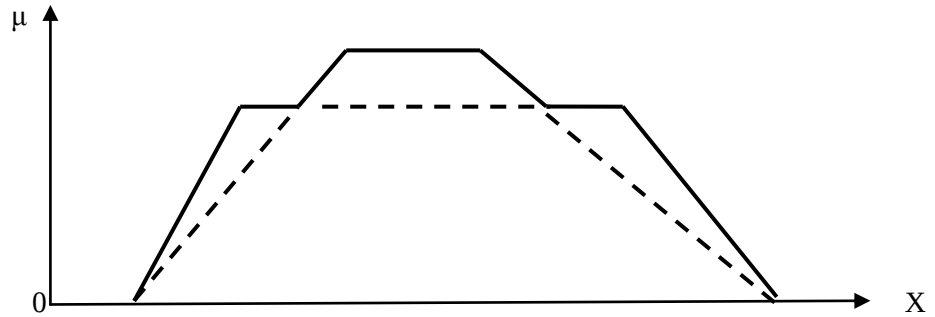
olarak tanımlanır. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ ve $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ kümelerinin üyelik fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil II.8 ve Şekil II.9 da verilmiştir.



Şekil II.7 $\tilde{A}$ - - - ve $\tilde{B}$ Bulanık Kümelerinin Üyelik Fonksiyonları



Şekil II.8 $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ ——— Bulanık Kümesinin Üyelik Fonksiyonu



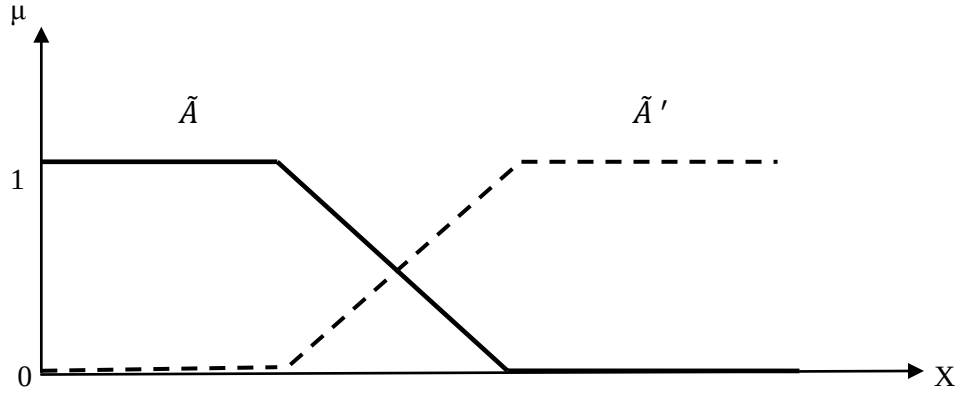
Şekil II.9 $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ ——— Bulanık Kümesinin Üyelik Fonksiyonu

II.6.3 Tümlleme

$\tilde{A}$, X ' in bulanık alt kümesi olsun. $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleneni $\tilde{A}'$ olup $\tilde{A}'$ nin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\tilde{A}'}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad (\text{II.12})$$

olarak tanımlanır. Şekil II.10 da $\tilde{A}$ ve $\tilde{A}'$ kümelerinin üyelik fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Şekil II.10 $\tilde{A}$ Bulanık Kümesi Ve Tümleneni Üyelik Fonksiyonları

II.6.4 Kapsama

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinde $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ise bunun üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (\text{II.13})$$

eşitsizliği ile ifade edilir.

II.6.5 Eşitlik

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümeleri eşit ise $\tilde{A} = \tilde{B}$ biçiminde gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (\text{II.14})$$

eşitliği ile ifade edilir.

II.6.6 Cebirsel Çarpım

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ olup üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (\text{II.15})$$

eşitliği ile ifade edilir.

II.6.7 Cebirsel Toplam

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel toplamı $\tilde{A} \oplus \tilde{B}$ olup üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A} \oplus \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (\text{II.16})$$

eşitliği ile ifade edilir.

II.6.8 Cebirsel Fark

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X ' in iki bulanık alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin farkı $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$ olup üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}'}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}'}(x)\} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad (\text{II.17})$$

eşitliği ile ifade edilir.

Örnek II.5 $\tilde{A} = \{(4,0.2), (7,0.8), (2,1), (1,0)\}$ ve $\tilde{B} = \{(4,0.3), (7,0.5), (2,1), (1,0.1)\}$ bulanık kümeleri verilsin. Buna göre;

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(4,0.2), (7,0.5), (2,1), (1,0)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(4,0.3), (7,0.8), (2,1), (1,0.1)\}$$

$$\tilde{A}' = \{(4,0.8), (7,0.2), (2,0), (1,1)\}$$

$$\tilde{B}' = \{(4,0.7), (7,0.5), (2,0), (1,0.9)\}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = \{(4,0.06), (7,0.4), (2,1), (1,0)\}$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(4,0.44), (7,0.9), (2,1), (1,0.1)\}$$

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}' = \{(4,0.2), (7,0.5), (2,0), (1,0)\}$$

II.7 BULANIK SAYILAR

Bulanık sayılar dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonu olan ve gerçekte sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir. Bulanık sayı normal ve dışbükey olmalıdır. Her bulanık sayı bir bulanık küme olduğu halde her bulanık küme bir bulanık sayı değildir.

Bulanık kümeler üyelik fonksiyonları ile tanımlandıkları için bulanık sayılar da kendi üyelik fonksiyonları ile aynı kavramdadırlar. Bu nedenle üyelik fonksiyonu çeşidi kadar bulanık sayı çeşidi vardır. Üçgen ve yamuk bulanık sayılara ilişkin tanımlar Bölüm II.7.1 ve Bölüm II.7.2 de verilmektedir. (Baykal ve Beyan 2004)

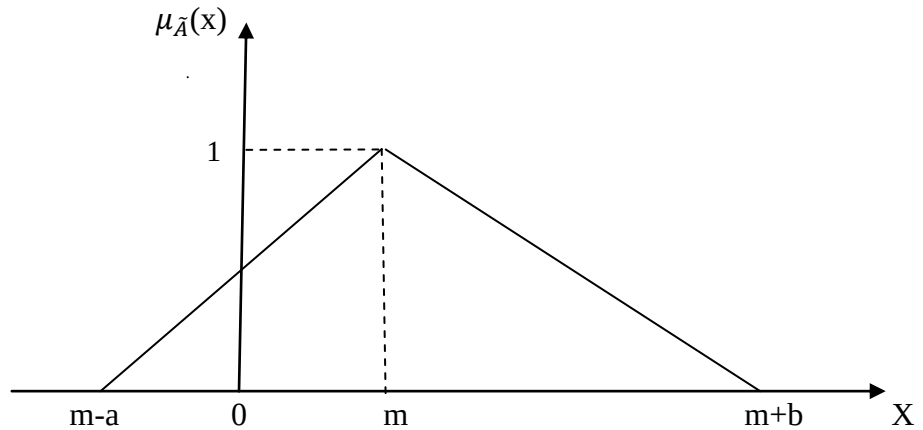
II.7.1 Üçgen Bulanık Sayı

Üçgen bulanık sayı $\tilde{A} = (m, a, b)$ olarak tanımlanır. Burada m merkez, a sol yayılım, b sağ yayılımdır. $\tilde{A}$ üçgensel bulanık sayısının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{a} & , \quad m-a < x \leq m \\ 1 - \frac{x-m}{b} & , \quad m < x \leq m+b \\ 0 & x > m+b \vee x < m-a \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$\tilde{A}$ üçgensel bulanık sayısının α -kesim kümesi;

$\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_1(\alpha), \tilde{A}_2(\alpha)] = [m-a(1-\alpha), m+b(1-\alpha)]$ olarak ifade edilir.



Şekil II.11 Üçgensel Bulanık Sayının Grafikle Gösterimi

Eğer $a=b$ ise üçgensel bulanık sayı simetrik üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır ve $\tilde{A} = (m,a)$ şeklinde gösterilir. Burada m merkez, a ise yayılımdır. $\tilde{A}$ simetrik üçgensel bulanık sayısının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|m-x|}{a} , & m - a \leq x \leq m + a \\ 0 & , \quad x > m + a \vee x < m - a \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

$\tilde{A}$ simetrik üçgensel bulanık sayısının α -kesim kümesi ;

$\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_1(\alpha), \tilde{A}_2(\alpha)] = [m-a(1-\alpha), m+a(1-\alpha)]$ olarak ifade edilir.

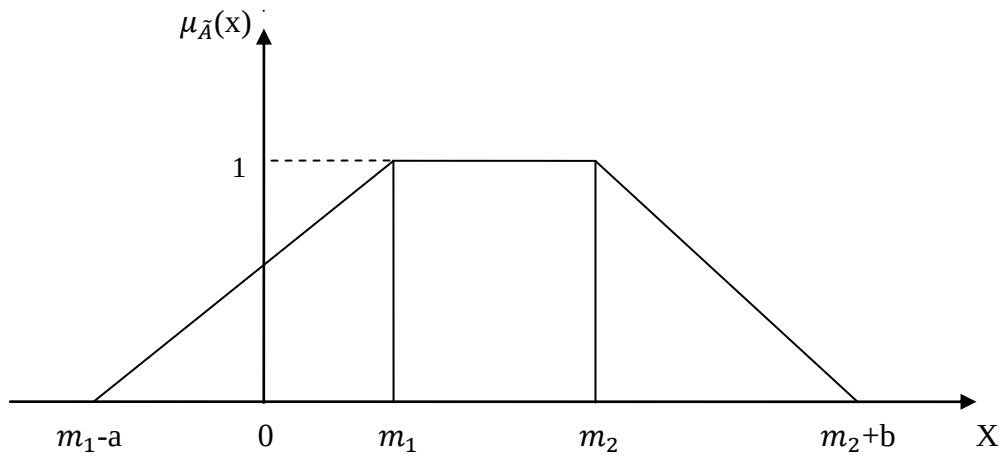
II.7.2 Yamuksal Bulanık Sayı

Yamuksal bulanık sayı $\tilde{A} = (m_1, m_2, a, b)$ biçiminde tanımlanır. Burada m_1 ve m_2 üyelik fonksiyonu değerleri 1 olan merkez değerlerini, a sol yayılımı, b sağ yayılımı ifade etmektedir. $\tilde{A}$ yamuksal bulanık sayısının üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m_1-x}{a} , & m_1 - a \leq x \leq m_1 \\ 1 , & m_1 \leq x \leq m_2 \\ 1 - \frac{x-m_2}{b} , & m_2 \leq x \leq m_2 + b \\ 0 , & x \leq m_1 - a \vee x \geq m_2 + b \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

$\tilde{A}$ yamuksal bulanık sayısının α -kesim kümesi ;

$\tilde{A}_\alpha = [\tilde{A}_1(\alpha), \tilde{A}_2(\alpha)] = [m_1-a(1-\alpha), m_2+b(1-\alpha)]$ olarak ifade edilir.



Şekil II.12 Yamuksal Bulanık Sayının Grafikle Gösterimi

Eğer $a=b$ ise yamuksal bulanık sayı simetrik yamuksal bulanık sayı olarak adlandırılır ve $\tilde{A} = (m_1, m_2, a)$ şeklinde gösterilir. Burada m_1 ve m_2 merkez, a ise yayılımdır. Eğer $m_1=m_2$ ise yamuksal bulanık sayı üçgensel bulanık sayıya dönüşür.

II.8 BULANIK SAYILARDA İŞLEMLER

Bulanık sayılarda dört işlem yaparken α -kesim işlemleri yaygın olarak kullanılır. $\tilde{A} = [a_1, a_3]$ ve $\tilde{B} = [b_1, b_3]$ olmak üzere: a_1 ve b_1 ; $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayılarının alt sınırını, a_3 ve b_3 ; $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayılarının üst sınırını göstermektedir. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ 'nin α - kesimleri $\tilde{A}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha = [b_1^\alpha, b_3^\alpha]$ olmak üzere toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemleri sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir. (Baykal ve Beyan 2004)

A) Toplama İşlemi

$$\tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] + [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_3^\alpha + b_3^\alpha]$$

B) Çıkarma İşlemi

$$\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] - [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha - b_3^\alpha, a_3^\alpha - b_1^\alpha]$$

C) Çarpma İşlemi

$$\tilde{A}_\alpha \cdot \tilde{B}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] \cdot [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha \cdot b_1^\alpha, a_3^\alpha \cdot b_3^\alpha]$$

D) Bölme İşlemi

$$\tilde{A}_\alpha : \tilde{B}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] : [b_1^\alpha, b_3^\alpha] = [a_1^\alpha : b_3^\alpha, a_3^\alpha : b_1^\alpha]$$

Örnek II.6 $\tilde{A}=(1,2)$ ve $\tilde{B}=(3,2)$ Burada $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ simetrik üçgensel sayılarının merkezleri sırası ile 1 ve 3 olup yayılımları ise 2 ile ifade edilmektedir.

$$\tilde{A} + \tilde{B}=? \quad \tilde{A}-\tilde{B}=? \quad \tilde{A}.\tilde{B}=? \quad \tilde{A}:\tilde{B}=?$$

Öncelikle $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ üçgensel sayılarının α - kesimlerini bulalım.

$$\tilde{A}_\alpha = [1-2(1-\alpha), 1+2(1-\alpha)] = [-1+2\alpha, 3-2\alpha]$$

$$\tilde{B}_\alpha = [3-2(1-\alpha), 3+2(1-\alpha)] = [1+2\alpha, 5-2\alpha]$$

$$\tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = [(-1+2\alpha) + (1+2\alpha), (3-2\alpha) + (5-2\alpha)] = [4\alpha, 8-4\alpha]$$

$$\alpha = 0 \text{ için } \tilde{A}_0 = [0,8] \text{ ve } \alpha = 1 \text{ için } \tilde{A}_1 = [4,4]$$

$$\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha = [(-1+2\alpha) - (5-2\alpha), (3-2\alpha) - (1+2\alpha)] = [-6+4\alpha, 2-4\alpha]$$

$$\alpha = 0 \text{ için } \tilde{A}_0 = [-6,2] \text{ ve } \alpha = 1 \text{ için } \tilde{A}_1 = [-2,-2]$$

Böylece $\tilde{A} + \tilde{B} = (4,0,8)$ ve $\tilde{A} - \tilde{B} = (-2,-6,2)$ bulunur. $\tilde{A} + \tilde{B}$ için 4 merkez değerini, 0 sol ayağı, 8 ise sağ ayağı ifade etmektedir. $\tilde{A} - \tilde{B}$ için -2 merkez değerini, -6 sol ayağı, 2 ise sağ ayağı ifade etmektedir. Başka bir şekilde merkez ve yayılım cinsinden $\tilde{A} + \tilde{B} = (4,4)$ ve $\tilde{A} - \tilde{B} = (-2,4)$ olarak ifade edilebilir. Simetrik iki üçgensel sayının toplamı veya farkı da simetrik üçgensel sayıdır.

$$\tilde{A}_\alpha \cdot \tilde{B}_\alpha = [(-1+2\alpha) \cdot (1+2\alpha), (3-2\alpha) \cdot (5-2\alpha)] = [-1+4\alpha^2, 15-16\alpha+4\alpha^2]$$

$$\alpha = 0 \text{ için } \tilde{A}_0 = [-1,15] \text{ ve } \alpha = 1 \text{ için } \tilde{A}_1 = [3,3]$$

$$\tilde{A}_\alpha : \tilde{B}_\alpha = [(-1+2\alpha)/(5-2\alpha), (3-2\alpha)/(1+2\alpha)]$$

$$\alpha = 0 \text{ için } \tilde{A}_0 = [-1/5,3] \text{ ve } \alpha = 1 \text{ için } \tilde{A}_1 = [1/3,1/3]$$

Böylece $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ ve $\tilde{A} : \tilde{B}$ 'nin yaklaştırılması ile $\tilde{A} \cdot \tilde{B} \cong (3,-1,15)$ ve $\tilde{A} : \tilde{B} \cong (1/3,-1/5,3)$ elde edilir. $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ için 3 merkez değerini, -1 sol ayağı, 15 ise sağ ayağı ifade etmektedir. $\tilde{A} : \tilde{B}$ için 1/3 merkez değerini, -1/5 sol ayağı, 3 ise sağ ayağı ifade etmektedir. İki üçgensel sayının çarpımı veya bölümü üçgensel sayı olmak zorunda olmadığından yaklaştırma sonucu $\tilde{A} \cdot \tilde{B}$ ve $\tilde{A} : \tilde{B}$ üçgensel sayıları elde edilmiştir. Simetrik üçgensel sayıların çarpımının veya bölümünün yaklaştırma sonuçları simetrik üçgensel sayı değildir.

BÖLÜM III

III. BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ VE BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

III. 1. BULANIK DOĞRUSAL REGRESYON ANALİZİ

Bulanık regresyon üzerindeki ilk çalışma Hideo Tanaka tarafından 1982 yılında yapılmıştır. Zadeh (1965)' in bulanık küme teorisi ve genişletme prensibi, bu yöntemin temelini teşkil eder. Bulanık doğrusal regresyon analizi üzerine Tanaka' dan sonra geniş bir şekilde çalışmalar yapıldı. Bunun sonucunda ise bulanık doğrusal regresyon analizi çeşitli alanlara uygulandı.

Klasik regresyon modeli:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n + \varepsilon \quad (\text{III.1})$$

ile ifade edilir. $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]'$ hata teriminin sağladığı koşullar:

- 1) $E(\varepsilon) = \mathbf{0}$,
- 2) $\text{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ dir.

Buradaki $\text{Cov}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ hem $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ hem de $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ varsayımlarını içermektedir. Yani hata terimleri sabit varyansa sahip ve birbirlerinden bağımsızdırlar. (Searle, 1970)

Klasik doğrusal regresyon analizinde bağımlı değişkeni açıklama olasılığı olan fakat modele dahil edilmeyen değişkenlerden veya ölçüm hatalarından dolayı hata tek bir terim üzerinde toplanır. Bulanık doğrusal regresyon analizinde ise, hata tüm model katsayılarına dağıtılır. Dolayısıyla ayrıca bir hata terimi (ε) yoktur.

Bulanık regresyonda, klasik regresyonda olduğu gibi verilerin normal dağılması ve büyük örneklem zorunluluğu yoktur. Dolayısıyla özellikle klasik regresyon

varsayımlarının sağlanmadığı durumlarda bulanık regresyondan yararlanmak tercih edilebilmektedir.

Girdi “bağımsız değişken” ve çıktı “bağımlı değişken” verisi için üç durum söz konusudur. Bu durumlara bağlı olarak farklı parametre tahmin yöntemleri önerilmiştir. Önerilen parametre tahmin yöntemlerinden bazıları bu çalışmada ele alınmıştır. Bunlar;

- 1)Girdisi ve çıktısı kesin sayı olan modeller “ Tanaka Modeli, Peters Modeli, Minimum Bulanıklık Kriteri ”
- 2)Girdisi kesin sayı, çıktısı bulanık sayı olan modeller “Tanaka Modeli, Özelkan Modeli, Chen Modeli, Modarres Modeli, Hojati-Bector-Simou (HBS1) Modeli,”
- 3)Girdisi ve çıktısı bulanık sayı olan modeller “Hojati-Bector-Simou (HBS2) Modeli, Nasrabadi Modeli,”

III.2. BAZI PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİ

III.2.1 Tanaka Yöntemi

Bulanık doğrusal regresyon modeli ilk olarak Tanaka ve arkadaşları (1982) tarafından geliştirilmiştir. Model girdisi ve çıktısı kesin sayı ve girdisi kesin çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiş olup, (III.2) deki gibi ifade edilir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X} \quad (III.2)$$

$\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_n]^T$ bağımsız değişken vektörüdür. $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n]$ bulanık katsayı vektörüdür. $\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$ ’ler merkezleri c_j ’ler ve yayılımları s_j ’ler olan simetrik üçgensel bulanık sayılar olup üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\mu_{\tilde{A}_j}(a_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|c_j - a_j|}{s_j} & c_j - s_j \leq a_j \leq c_j + s_j \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (III.3)$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$ ’ler (III.2) denklemlerinde yazıldığında (III.4) deki denklemlere ulaşılır.

$$\tilde{Y}_i = (c_0, s_0)X_{i0} + (c_1, s_1)X_{i1} + (c_2, s_2)X_{i2} + \dots + (c_n, s_n)X_{in} \quad (\text{III.4})$$

Burada $X_{i0} = 1$ olup $\tilde{Y}_i = (\tilde{y}_i, \tilde{e}_i)$ tahmin edilen simetrik üçgensel bulanık sayılardır. Burada $\tilde{Y}_i$ 'nin merkez değeri $\tilde{y}_i = \sum_{j=0}^n c_j X_{ij}$ ve yayılım değeri $\tilde{e}_i = \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}|$ olduğu kolayca görülür. ($i=1,2,\dots,m$)

$$\tilde{Y}_i = (\tilde{y}_i, \tilde{e}_i) = \left(\sum_{j=0}^n c_j X_{ij}, \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \right) \text{ yazabiliriz.} \quad (\text{III.5})$$

Zadeh' in genişletme ilkeleri kullanılarak $\tilde{Y}_i$ 'nin üyelik fonksiyonu (III.6) daki gibi bulunur.

$$\mu_{\tilde{Y}_i}(y_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|y_i - \tilde{y}_i|}{\tilde{e}_i} & , \quad \tilde{y}_i - \tilde{e}_i \leq y_i \leq \tilde{y}_i + \tilde{e}_i \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

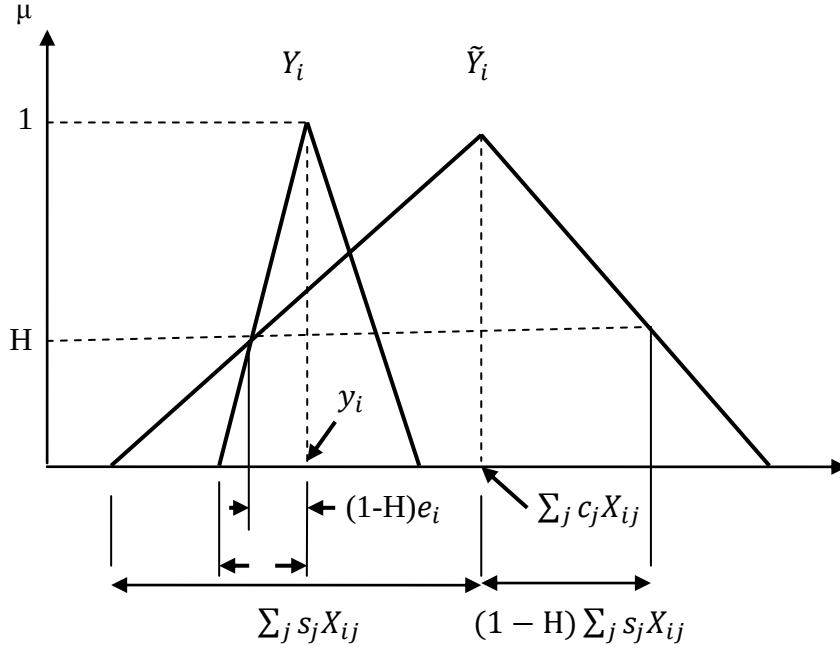
Bulanık regresyonda H terimi, veriler ile regresyon modeli arasındaki uyumluluk derecesi' nin bir ölçüsü olarak tanımlanır. (Tanaka ve ark. 1982)

Burada H' ın değerine [0,1] aralığında analist karar verir. H değeri küçüldükçe yani 0'a yaklaştıkça bulanıklık artarken H değeri büyüdüğü yani 1'e yaklaştıkça bulanıklık azalır. Örneğin H=0,7 ise veriler ile regresyon modeli arasındaki uyum derecesinin % 70 olduğu, bulanıklık seviyesinin ise 0,3 olduğu varsayılır. H=1 olduğunda klasik regresyonun değerleri ile hemen hemen aynı sonuçlar elde edilir. H=0 olduğunda ise, bulanık doğrusal regresyona aralık regresyonu denir.

$Y_i^L = \sum_{j=0}^n (c_j - s_j)X_{ij}$ ve $Y_i^U = \sum_{j=0}^n (c_j + s_j)X_{ij}$ sırasıyla $\tilde{Y}_i$ 'nin alt ve üst sınır doğrularıdır. Eğer Y_i^L ve Y_i^U doğruları gözlem değerlerini kapsamıyorsa, yani gözlem değerlerinin bir kısmı Y_i^L ve Y_i^U doğrularının dışında kalıyorsa bulanıklığı arttırmak gerekir. Bu da H uyum seviyesi bir miktar azaltılarak yapılır. Diğer yandan Y_i^L ve Y_i^U doğruları gereğinden fazla genişse bulanıklığı azaltmak gerekir. Bu da H uyum seviyesi bir miktar artırılarak yapılabilir. Böyle bir durumla karşılaşıldığında her defasında kısıtları baştan yazmaya gerek yoktur. Bu durumla ilgili olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem III.1 Bulanık doğrusal regresyon modelinin H seviyesindeki optimal çözümü $A_H^*=(c_H^*, s_H^*)$ ise H' seviyesindeki optimal çözümü $A_{H'}^*=(c_H^*, \frac{|L^{-1}(H)|}{|L^{-1}(H')|} s_H^*)$ dır.

Burada $L^{-1}(H)=1-H$ ve $L^{-1}(H')=1-H'$ dür. Teorem III.1'e göre H seviyesinin farklı değerleri bulanık parametrelerin yayılım değerlerinin artmasına ya da azalmasına sebep olurken merkez değerlerini değiştirmedigi görülmektedir.



Şekil III.1 Bulanık Y_i gözlem değerlerinin $\tilde{Y}_i$ tahmin değerlerine uygunluk derecesi

Tanaka' nın bulanık doğrusal regresyon modelinin çözümü (III.7) deki doğrusal programlama problemi çözülerek elde edilir. Bu doğrusal programlama problemindeki amaç, sistemin toplam bulanıklığını minimize edecek bulanık parametrelerin tahmin edilmesidir. Tahmin edilen aralıkların gözlenen bağımlı değişken değerlerini en az H uyum seviyesinde içermesi gerekmektedir. Şekil III.1 den anlaşılabileceği gibi bu şart (III.7) denkleminde verilen kısıtlar ile sağlanır.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \\
 & \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} + (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \geq y_i + (1-H)e_i \\
 & \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} - (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \leq y_i - (1-H)e_i \\
 & s_j \geq 0, \quad (j=0,1,2,\dots,n) \quad (i=1,2,\dots,m)
 \end{aligned} \tag{III.7}$$

Kısıtlar her bir Y_i gözlem değerinin $\tilde{Y}_i$ ye en az H derecesi ile bağlı olmasını gerektirir. Bu bağıllık ölçüsü h_i ile gösterilir. Yani,

$$h_i = 1 - \frac{|Y_i - \sum_{j=0}^n c_j X_{ij}|}{\sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| - e_i} \geq H \quad (\forall i=1,2,\dots,m) \quad (\text{III.8})$$

Burada $Y_i = (y_i, e_i)$ gözlem değerleri olup; Y_i gözlemlerinin merkez değerleri y_i , yayılım değerleri ise e_i dir. Eğer gözlemlenen veriler kesikli ise $Y_i = (y_i, e_i)$ bulanık çıktılarında $e_i = 0$ olacağı görülür.

Yukarıdaki modelde gözlem sayısı m , bağımsız değişken sayısı n ’ dir. Kısıt sayısı ise gözlem sayısının iki katı kadardır. Sözü edilen kısıtlar klasik doğrusal regresyondaki güven aralıklarına benzetilebilir.

Tanaka modeli aykırı değerlere karşı oldukça duyarlı bir yöntemdir. Ayrıca modelde gözlem sayısı arttıkça tahmin edilen bağımlı değişkenlerin yayılımları da artacaktır. Bu durum “Gözlem sayısı arttıkça daha iyi tahmin yapılır.” ifadesine aykırıdır.

III.2.2. Peters Yöntemi

Peters (1994), bu modeli girdisi kesin çıktısı kesin olan veriler için, aykırı değer olduğu durumlarda kullanılmak üzere önermiştir. Önerdiği modelde aralık değerlerinin sınırlarını bulanık değerler olarak yazarken yeni bir değişkeni de modele eklemiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \quad (\text{III.9})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j ’ler ve yarıçapları s_j ’ler olan bulanık parametrelerdir. $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^t$ ve $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_n)^t$ sırasıyla $\tilde{A}_j$ bulanık parametrelerinin merkez ve yayılım vektörleridir. $|\mathbf{x}_i| = (1, |x_{i1}|, |x_{i2}|, \dots, |x_{in}|)^t$ i. gözlem için bağımsız değişken vektörüdür. ($i=1,2,\dots,m$)

Bu yöntem (III.10) daki doğrusal programlama problemi çözülerek hesaplanır.

$$\begin{aligned}
& \text{Max } \lambda \\
& (1-\lambda) p_0 - \sum_{i=1}^m s^t |x_i| \geq -d_0 \\
& (1-\lambda) p_i + c^t x_i + (1-H) s^t |x_i| \geq y_i \\
& (1-\lambda) p_i - c^t x_i + (1-H) s^t |x_i| \geq -y_i \\
& -\lambda \geq -1, \quad \lambda, s \geq 0 \quad i=1,2,\dots,m
\end{aligned} \tag{III.10}$$

Burada λ tolerans katsayısıdır ve d_0 amaç fonksiyonunun istenen değerini gösterir. p_0 istenen alt sınırın toleransı olarak ifade edilir ve p_i ise y_i 'nin tolerans aralık değerinin genişliği olarak düşünülür. p_0 ve p_i 'nin değerleri probleme dayalı şekilde belirlenmektedir. Bu değerlerin belirlenmesi kolay değildir. Tahmin edilen aralık değerlerinin genişliği seçilen d_0, p_0, p_i değerlerine bağlıdır.

Peters modelinde λ maksimize edilerek $(1-\lambda) p_0$ minimize edilir. Yani Tanaka modelinden farklı olarak Peters modelinde amaç fonksiyonu herhangi bir değerle kıyaslanarak minimize edilir.

III.2.3 Minimum Bulanıklık Kriteri

Savic ve Pedrycz (1991) girdisi ve çıktısı kesin sayılar olan bu durum için klasik en küçük kareler prensibi ve Tanaka Modelini birleştirerek bu yöntemi geliştirmişlerdir. İlk olarak klasik en küçük kareler regresyonu kullanılarak bulanık regresyon katsayılarının merkez değerleri bulunur; ikinci adımda ise minimum bulanıklık kriteri kullanılarak bulanık regresyon modelinin yayılım değerleri elde edilir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \tag{III. 11}$$

Bu yöntemin yayılım değerlerini bulmak için (III.12) deki doğrusal programlama önerilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \\
& \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} + (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \geq y_i \\
& \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} - (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \leq y_i \\
& s_j \geq 0, \quad (j=0,1,2,\dots,n) \quad (i=1,2,\dots,m)
\end{aligned} \tag{III.12}$$

III.2.4 Özelkan Yöntemi

Bu model Özelkan (2000) tarafından girdisi kesin sayı çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \quad (\text{III. 13})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $Y_i = (y_i, e_i)$ merkezleri y_i 'ler, yarıçapları e_i 'ler olan gözlem değerleridir. ($i=1,2,\dots,m$)

Bu yöntem (III.14) deki doğrusal programlama problemi çözülerek hesaplanır.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^m (d_{iU} + d_{iL}) \\ & \sum_{j=0}^n (c_j + (1-H)s_j)x_{ij} \geq y_i + (1-H)e_i - d_{iU} \\ & \sum_{j=0}^n (c_j - (1-H)s_j)x_{ij} \leq y_i - (1-H)e_i - d_{iL} \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n s_j x_{ij} \leq v \\ & d_{iL}, d_{iU} \geq 0; \quad s_j \geq 0; \quad c_j = \text{serbest} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Burada v keyfi bir değer olup, d_{iU} üst sapma değişkenlerini, d_{iL} alt sapma değişkenlerini göstermektedir. Bu problemdeki amaç fonksiyonu, sapmaların minimizasyonunu hedeflemektedir.

III.2.5 Chen Yöntemi

Chen (2001) girdisi kesin çıktısı bulanık sayı olan veriler için kullanılan bu yöntemi, Tanaka yönteminin aykırı değerlere karşı duyarlı olması sebebiyle, aykırı değerlerin olduğu durumlar için geliştirmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \quad (\text{III.15})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^t$ ve $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_n)^t$ sırasıyla $\tilde{A}_j$ bulanık parametrelerinin

merkez ve yayılım vektörleridir. $|x_i| = (1, |x_{i1}|, |x_{i2}|, \dots, |x_{in}|)^t$ i. gözlem için bağımsız değişken vektörüdür. ($i=1,2,\dots,m$)

Bu yöntem (III.16) daki doğrusal programlama problemi çözülerek hesaplanır.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } \sum_{i=1}^m s^t |x_i| \\
 & c^t x_i + (1-H) s^t |x_i| \geq y_i + (1-H) e_i \\
 & c^t x_i - (1-H) s^t |x_i| \geq y_i - (1-H) e_i \\
 & s^t |x_i| - e_i \leq k, \quad i=1,\dots,m
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

Bu çözüm yaklaşımındaki en temel sorun k değerinin nasıl seçileceğidir. Eğer k değeri çok küçük seçilirse, konulan kısıt çok keskin olur ve gerçekte aykırı değer olmayan değerler bile aykırı değer olarak tespit edilebilir. Eğer k değeri çok büyük seçilirse kısıt çok gevşek olacağından aykırı değerler veri kümesinin sıradan elemanları olarak parametre tahmininde yer alır. Chen (2001), k değerinin seçimi için şu formülleri önermiştir.

$$\begin{aligned}
 k &= \text{Max}\{e_i\}_{i=1}^m - \text{Max}\{e_j\}_{j \neq i=1}^m \\
 k &= \text{Max}\{e_i\}_{i=1}^m \\
 k &= \text{Min}\{e_i\}_{i=1}^m \\
 k &= \frac{(\text{Max}\{e_i\}_{i=1}^m + \text{Min}\{e_i\}_{i=1}^m)}{2} \\
 k &= \text{Max}\{e_i\}_{i=1}^m - \text{Min}\{e_i\}_{i=1}^m \\
 k &= \bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^m e_i}{m} \\
 k &= 3s_{e_i} = 3\left(\sum_{i=1}^m \frac{(e_i - \bar{e})^2}{m-1}\right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{III. 17}$$

III.2.6 Modarres Yöntemi

Bu model Modarres ve ark.(2005) tarafından girdisi kesin çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \tag{III.18}$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^t$ ve $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_n)^t$ sırasıyla $\tilde{A}_j$ bulanık parametrelerinin merkez ve yayılım vektörleridir. $|\mathbf{X}_i| = (1, |X_{i1}|, |X_{i2}|, \dots, |X_{in}|)^t$ i. gözlem için bağımsız değişken vektörüdür. $Y_i = (y_i, e_i)$; merkezleri y_i 'ler ve yarıçapları e_i 'ler olan gözlem değerleridir.

Bu yöntem (III.19) daki kuadratik programlama çözülerek hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} & \text{Min } \sum_{i=1}^m (\mathbf{s}|\mathbf{X}_i| - e_i)^2 \\ & \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} + (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \geq y_i - (1-H)e_i \\ & \sum_{j=0}^n c_j X_{ij} - (1-H) \sum_{j=0}^n s_j |X_{ij}| \leq y_i + (1-H)e_i \quad (\text{III.19}) \\ & \mathbf{s}|\mathbf{X}_i| \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad 0 \leq H \leq 1 \end{aligned}$$

H seviyesini belirlemek için aşağıdaki algoritma önerilmiştir.

Adım 1. $H=0$, $H_L=0$ ve $H_U=1$ al.

Adım 2. Problemi çöz ve amaç fonksiyonun en uygun değerini z_0^* ile göster.

Adım 3. $H=(H_L+H_U) / 2$ ve problemi çöz. Amaç fonksiyonun en uygun değerini z^* ile göster. Eğer $z_0^*=z^*$ ise $H_L=H$ alarak diğer durumlarda $H_U=H$ alarak H_L ve H_U nun değerlerini güncelleştir.

Adım 4. İki ardışık H değeri arasındaki fark ε dan daha küçük ise algoritma sonlandırılır ve bulanık parametreler kararlaştırılır. Aksi takdirde 3. adıma gidilir. Burada ε kabul edilebilir hata payıdır.

III.2.7 Hojati-Bector-Smimou (HBS1) Yöntemi

Bu model Hojati ve ark. (2005) tarafından girdisi kesin sayı çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0 X_0 + \tilde{A}_1 X_1 + \dots + \tilde{A}_n X_n \quad (\text{III.20})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})^t$ i. gözlem için bağımsız değişken vektörüdür. $Y_i = (y_i, e_i)$ merkezleri y_i 'ler, yarıçapları e_i 'ler olan gözlem değerleridir. ($i=1,2,\dots,m$)

Bu yöntem (III.21) deki doğrusal programlama problemi çözülerek hesaplanır.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \sum_{i=1}^m (d_{iU}^+ + d_{iU}^- + d_{iL}^+ + d_{iL}^-) \\
& \sum_{j=0}^n (c_j + (1-H)s_j)x_{ij} + d_{iU}^+ - d_{iU}^- = y_i + (1-H)e_i \\
& \sum_{j=0}^n (c_j - (1-H)s_j)x_{ij} + d_{iL}^+ - d_{iL}^- = y_i - (1-H)e_i \quad (\text{III.21}) \\
& d_{iU}^+, d_{iU}^-, d_{iL}^+, d_{iL}^- \geq 0; s_j \geq 0; c_j = \text{serbest} \quad (j=0,1,2,\dots,n) \quad (i=1,2,\dots,m)
\end{aligned}$$

Burada d_{iU}^+ tahmini aralığın üst noktasını, d_{iU}^- gözlem aralığının üst noktasını d_{iL}^+ tahmini aralığın alt noktasını d_{iL}^- gözlem aralığının alt noktasını göstermektedir.

III.2.8 Hojati-Bector-Smimou (HBS2) Yöntemi

Bu model Hojati ve ark. (2005) tarafından girdisi ve çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0\tilde{X}_0 + \tilde{A}_1\tilde{X}_1 + \tilde{A}_2\tilde{X}_2 + \dots + \tilde{A}_n\tilde{X}_n \quad (\text{III.22})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $\tilde{X}_{ij} = (\bar{x}_{ij}, f_{ij})$; merkezleri $\bar{x}_{ij}$, yarıçapları f_{ij} olan bulanık bağımsız değişkenlerdir. $\mathbf{x}_i = (1, \bar{x}_{i1}, \bar{x}_{i2}, \dots, \bar{x}_{in})$ ve $\mathbf{f}_i = (1, f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in})$ sırasıyla i. gözlem için bulanık bağımsız değişkenin merkez ve yayılım değerlerinin vektörüdür.

Bu yöntem (III.23) deki doğrusal programlama problemi çözülerek hesaplanır. Gösterimi basitleştirmek için model tek bağımsız değişken için verilmiştir.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } \sum_{i=1}^m (d_{iU}^+ + d_{iU}^- + d_{iL}^+ + d_{iL}^- + d_{iU}^+ + d_{iU}^- + d_{iL}^+ + d_{iL}^-) \\
& \sum_{j=0}^1 (c_j + (1-H)s_j)(\bar{x}_{ij} - (1-H)f_{ij}) + d_{iU}^+ - d_{iU}^- = y_i + (1-H)e_i \\
& \sum_{j=0}^1 (c_j + (1-H)s_j)(\bar{x}_{ij} + (1-H)f_{ij}) + d_{iU}^+ - d_{iU}^- = y_i + (1-H)e_i \\
& \sum_{j=0}^1 (c_j - (1-H)s_j)(\bar{x}_{ij} - (1-H)f_{ij}) + d_{iL}^+ - d_{iL}^- = y_i - (1-H)e_i \quad (\text{III.23}) \\
& \sum_{j=0}^1 (c_j - (1-H)s_j)(\bar{x}_{ij} + (1-H)f_{ij}) + d_{iL}^+ - d_{iL}^- = y_i - (1-H)e_i \\
& d_{iU}^+, d_{iU}^-, d_{iU}^+, d_{iU}^-, d_{iL}^+, d_{iL}^-, d_{iL}^+, d_{iL}^- \geq 0 \\
& s_j \geq 0; c_j = \text{serbest} \quad (j=0,1) \quad (i=1,2,\dots,m)
\end{aligned}$$

Burada l indisi; bağımsız değişken aralıklarının alt noktasını, r indisi; bağımsız değişken aralıklarının üst noktasını, U indisi; gözlem ve tahmin aralıklarının üst noktasını, L indisi; gözlem ve tahmin aralıklarının alt noktasını göstermektedir.

III.2.9 Nasrabadi Yöntemi

Bu model Nasrabadi ve ark. (2004) tarafından girdisi ve çıktısı bulanık sayı olan durumlar için önerilmiştir.

$$\tilde{Y} = \tilde{A}_0\tilde{X}_0 + \tilde{A}_1\tilde{X}_1 + \dots + \tilde{A}_n\tilde{X}_n \quad (\text{III.24})$$

$\tilde{A}_j = (c_j, s_j)$; merkezleri c_j 'ler ve yarıçapları s_j 'ler olan bulanık parametrelerdir. $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^t$ ve $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_n)^t$ sırasıyla $\tilde{A}_j$ bulanık parametrelerinin merkez ve yayılım vektörleridir. $\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}, r_{ij})$; merkezleri x_{ij} 'ler ve yarıçapları r_{ij} 'ler olan bulanık bağımsız değişkenlerdir. $\mathbf{x}_i = (1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ ve $\mathbf{r}_i = (1, r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$ sırasıyla i . gözlem için bulanık bağımsız değişkenin merkez ve yayılım değerlerinin vektörüdür. $Y_i = (y_i, e_i)$; merkezleri y_i 'ler ve yarıçapları e_i 'ler olan gözlem değerleridir.

Bu yöntem (III.25) deki kuadratik programlama problemi çözülerek hesaplanır. H seviyesini belirlemek için Modarres yöntemindeki algoritma uygulanır.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \sum_{i=1}^m (\mathbf{s} \mathbf{r}_i^T - e_i)^2 \\ & \sum_{j=0}^n c_j x_{ij} + (1-H) \sum_{j=0}^n s_j r_{ij} \geq y_i - (1-H)e_i \\ & -\sum_{j=0}^n c_j x_{ij} + (1-H) \sum_{j=0}^n s_j r_{ij} \geq -y_i - (1-H)e_i \quad (\text{III.25}) \\ & c_j \text{ ve } s_j \in \mathbb{R}, \quad (j=0,1,2,\dots,n) \quad (i=1,2,\dots,m) \quad 0 \leq H \leq 1 \end{aligned}$$

BÖLÜM IV

IV.1 UYGULAMA I

Bu bölümde üçüncü bölümde incelenen bulanık doğrusal regresyonda parametre tahmin yöntemlerinin bir kısmına ilişkin uygulamalara yer verilmiştir.

İstanbul'un Ataşehir ilçesinin merkezinde bulunan konutların fiyatlarının tahminine yönelik yapmış olduğumuz uygulama çalışmamızda 50 adet gözlem değeri bulunup veriler Tablo IV.1 de verilmektedir.

Konut fiyatlarının; konut alanı, site içinde olup olmadığı ve malzeme kalitesi değişkenlerine bağlı olduğu durumlar bulanık doğrusal regresyon analizi ile incelenmiştir.

Y_i = Konutun Fiyatı (Bin TL)

X_{i1} = i. Konutun alanı (m^2)

X_{i2} = i. Konutun site içinde olup-olmadığı (evet=1, hayır=0)

X_{i3} = i. Konutun malzeme kalitesi (çok iyi=5, iyi=4, orta=3, kötü=2, çok kötü=1)

Bu bölümde karşılaştırılan yöntemler Tanaka yöntemi, Özelkan yöntemi ve Minimum Bulanıklık Kriteridir. Çözüm sürecinde WINQSB ve EXCEL paket programlarından faydalanılmıştır.

Bu bölümde yöntemleri karşılaştırmada hata kareler ortalaması değeri;

$$HKO = \frac{1}{M} \sum [(y_i - \tilde{y}_i)^2 + (e_i - \tilde{e}_i)^2] \text{ den yararlanılmıştır.}$$

Burada $Y_i = (y_i, e_i)$ ve $\tilde{Y}_i = (\tilde{y}_i, \tilde{e}_i)$ gözlem ve tahmin değerleri olup M gözlem sayısıdır.

Tablo IV.1 Ataşehirdeki Konut Fiyatları ve Konut Fiyatlarını Etkileyen Etmenler Listesi

i	Y_i (Bin TL)	X_{i1} (m^2)	X_{i2}	X_{i3}	i	Y_i (Bin TL)	X_{i1} (m^2)	X_{i2}	X_{i3}
1	390	152	1	3	26	280	88	1	3
2	350	160	0	2	27	285	58	1	5
3	280	118	0	2	28	310	170	0	1
4	475	150	1	3	29	230	90	0	2
5	300	140	0	2	30	290	120	0	2
6	280	160	0	1	31	210	84	0	2
7	540	139	1	4	32	290	120	0	2
8	230	80	1	3	33	310	134	0	2
9	200	70	1	2	34	265	130	0	2
10	130	55	0	2	35	240	115	0	2
11	270	118	0	2	36	250	125	0	2
12	200	57	1	4	37	265	146	0	1
13	200	67	1	2	38	270	80	1	3
14	210	62	1	3	39	340	114	1	3
15	220	68	1	3	40	500	135	1	4
16	240	120	0	2	41	275	88	1	3
17	220	73	1	3	42	315	120	1	2
18	260	108	0	2	43	320	124	0	2
19	310	114	1	2	44	285	68	1	4
20	260	94	1	3	45	300	72	1	4
21	290	150	0	1	46	400	90	1	5
22	270	100	1	2	47	210	57	1	4
23	300	114	1	2	48	250	109	0	2
24	480	134	1	4	49	270	88	1	3
25	270	97	1	3	50	250	120	0	2

IV.1.1 Tanaka Yöntemi İle Tahmin

Tanaka yöntemi ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ için aşağıdaki gibi olup HKO=7885,54 olarak hesaplanmıştır.

$$\hat{Y} = (0, 18.46) + (1.69, 0)X_1 + (1, 0)X_2 + (49.51, 21.82)X_3$$

Tablo IV.2 Tanaka Yöntemi ile Tahmin Edilen $\hat{Y}$ Değerleri

H=0 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	390	322,49	490,33	26	280	214,33	382,17
2	350	307,32	431,52	27	285	219,01	474,13
3	280	236,34	360,54	28	310	296,53	377,09
4	475	319,11	486,95	29	230	189,02	313,22
5	300	273,52	397,72	30	290	239,72	363,92
6	280	279,63	360,19	31	210	178,88	303,08
7	540	328,21	539,69	32	290	239,72	363,92
8	230	200,81	368,65	33	310	263,38	387,58
9	200	156,22	280,42	34	265	256,62	380,82
10	130	129,87	254,07	35	240	231,27	355,47
11	270	236,34	360,54	36	250	248,17	327,37
12	200	189,63	401,11	37	265	255,97	336,53
13	200	151,15	275,35	38	270	200,81	368,65
14	210	170,39	338,23	39	340	258,27	426,11
15	220	180,53	348,37	40	500	321,45	532,93
16	240	239,72	363,92	41	275	214,33	382,17
17	220	188,98	356,82	42	315	240,72	364,92
18	260	219,44	343,64	43	320	246,48	370,68
19	310	230,58	354,78	44	285	208,22	419,70
20	260	224,47	392,31	45	300	214,98	426,46
21	290	262,73	343,29	46	400	273,09	528,21
22	270	206,92	331,12	47	210	189,63	401,11
23	300	230,58	354,78	48	250	221,13	335,33
24	480	319,76	531,24	49	270	214,33	382,17
25	270	229,54	397,38	50	250	239,72	363,92

IV.1.2 Özelkan Yöntemi İle Tahmin

Özelkan yöntemi ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ ve $v=1900$ için aşağıdaki gibi olup $HKO=3295,79$ olarak hesaplanmıştır.

$$\hat{Y} = (0, 28.69) + (1.69, 0)X_1 + (1, 0)X_2 + (36.42, 3.61)X_3$$

Tablo IV.3 Özelkan Yöntemi ile Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ Değerleri

H=0, v=1900 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir.)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	390	327,62	406,66	26	280	219,46	298,5
2	350	303,72	382,76	27	285	241,60	320,64
3	280	232,74	311,78	28	310	284,20	363,24
4	475	232,74	403,28	29	230	185,42	264,46
5	300	269,92	348,96	30	290	236,12	315,16
6	280	267,30	346,34	31	210	175,28	254,32
7	540	342,07	421,11	32	290	236,12	315,16
8	230	205,94	284,98	33	310	259,78	338,82
9	200	152,62	231,66	34	265	253,02	332,06
10	130	126,27	205,31	35	240	227,67	306,71
11	270	232,74	311,78	36	250	244,57	323,61
12	200	203,49	282,53	37	265	243,64	322,68
13	200	147,55	226,59	38	270	205,94	284,98
14	210	175,52	254,56	39	340	263,40	342,44
15	220	185,66	264,7	40	500	335,31	414,35
16	240	236,12	315,16	41	275	219,46	298,5
17	220	194,11	273,15	42	315	237,12	316,16
18	260	215,84	294,88	43	320	242,88	321,92
19	310	226,98	306,02	44	285	222,08	301,12
20	260	229,60	308,64	45	300	228,84	307,88
21	290	250,40	329,44	46	400	295,68	374,72
22	270	203,32	282,36	47	210	203,49	282,53
23	300	226,98	306,02	48	250	217,53	296,57
24	480	333,62	412,66	49	270	219,46	298,5
25	270	234,67	313,71	50	250	236,12	315,16

IV.1.3 Minimum Bulanıklık Kriteri İle Tahmin

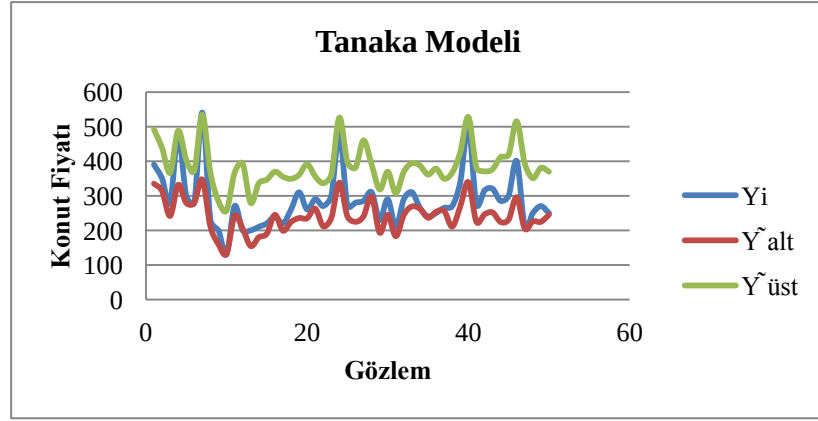
Minimum Bulanıklık Kriteri ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ için aşağıdaki gibi olup $HKO=6787,64$ olarak hesaplanmıştır.

$$\tilde{Y} = (-151.6694, 18.46) + (2.583396, 0)X_1 + (38.01774, 0)X_2 + (55.00562, 21.82)X_3$$

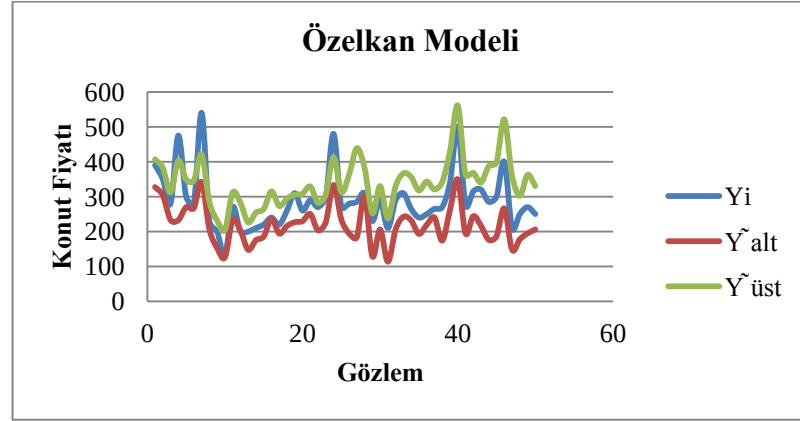
Tablo IV.4 Minimum Bulanıklık Kriteri ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri

H=0 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir.)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\tilde{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\tilde{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	390	360,124	527,96	26	280	194,78	362,64
2	350	309,58	433,78	27	285	183,65	438,77
3	280	201,08	325,28	28	310	302,23	382,79
4	475	354,95	522,79	29	230	128,74	252,94
5	300	257,91	382,11	30	290	206,24	330,44
6	280	276,39	356,95	31	210	113,24	237,44
7	540	359,72	571,20	32	290	206,24	330,44
8	230	174,11	341,95	33	310	242,41	366,61
9	200	115,09	239,29	34	265	232,08	356,28
10	130	38,32	162,52	35	240	193,33	317,53
11	270	201,08	325,28	36	250	219,16	343,36
12	200	147,88	359,36	37	265	240,23	320,79
13	200	107,34	231,54	38	270	174,11	341,95
14	210	127,61	295,45	39	340	261,95	429,79
15	220	143,11	310,95	40	500	349,38	560,86
16	240	206,24	330,44	41	275	194,78	362,62
17	220	156,03	323,87	42	315	244,26	368,46
18	260	175,24	299,44	43	320	216,58	340,78
19	310	228,76	352,96	44	285	176,30	387,78
20	260	210,28	378,12	45	300	186,63	398,11
21	290	250,56	331,12	46	400	266,32	521,44
22	270	192,59	316,79	47	210	147,88	359,36
23	300	228,76	352,96	48	250	177,83	302,03
24	480	346,80	558,28	49	270	194,78	362,62
25	270	218,03	385,87	50	250	206,24	330,44

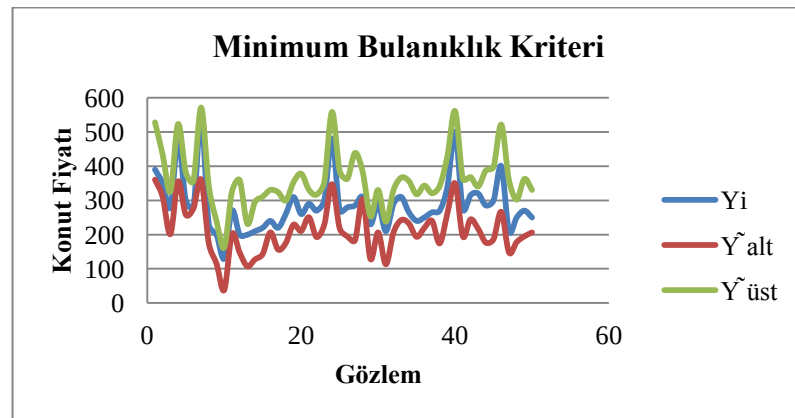
Tablo IV.2, IV.3, IV.4 deki verilerin serpilme grafikleri aşağıda sırasıyla verilmiştir.



Şekil IV.1 Tanaka Modeli için Y_i , $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri



Şekil IV.2 Özelkan Modeli için Y_i , $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri



Şekil IV.3 Minimum Bulanıklık Kriteri için Y_i , $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri

IV.2 UYGULAMA II

Burada Ataşehirdeki konut fiyatları 5 Bin TL yarıçaplı üçgen bulanık sayılar olarak ele alınmış olup, çıktıların bulanık sayı olması durumu incelenmiştir.

Bu bölümde Özelkan, HBS1 ve Modarres yöntemleri kullanılarak çözüm elde edilmiştir.

Tablo IV.5 Ataşehirdeki Konutların Bulanık Fiyatları ve Konut Fiyatlarını Etkileyen Etmenler Listesi

i	Y_i (Bin TL)	X_{i1} (m^2)	X_{i2}	X_{i3}	i	Y_i (Bin TL)	X_{i1} (m^2)	X_{i2}	X_{i3}
1	(390,5)	152	1	3	26	(280,5)	88	1	3
2	(350,5)	160	0	2	27	(285,5)	58	1	5
3	(280,5)	118	0	2	28	(310,5)	170	0	1
4	(475,5)	150	1	3	29	(230,5)	90	0	2
5	(300,5)	140	0	2	30	(290,5)	120	0	2
6	(280,5)	160	0	1	31	(210,5)	84	0	2
7	(540,5)	139	1	4	32	(290,5)	120	0	2
8	(230,5)	80	1	3	33	(310,5)	134	0	2
9	(200,5)	70	1	2	34	(265,5)	130	0	2
10	(130,5)	55	0	2	35	(240,5)	115	0	2
11	(270,5)	118	0	2	36	(250,5)	125	0	2
12	(200,5)	57	1	4	37	(265,5)	146	0	1
13	(200,5)	67	1	2	38	(270,5)	80	1	3
14	(210,5)	62	1	3	39	(340,5)	114	1	3
15	(220,5)	68	1	3	40	(500,5)	135	1	4
16	(240,5)	120	0	2	41	(275,5)	88	1	3
17	(220,5)	73	1	3	42	(315,5)	120	1	2
18	(260,5)	108	0	2	43	(320,5)	124	0	2
19	(310,5)	114	1	2	44	(285,5)	68	1	4
20	(260,5)	94	1	3	45	(300,5)	72	1	4
21	(290,5)	150	0	1	46	(400,5)	90	1	5
22	(270,5)	100	1	2	47	(210,5)	57	1	4
23	(300,5)	114	1	2	48	(250,5)	109	0	2
24	(480,5)	134	1	4	49	(270,5)	88	1	3
25	(270,5)	97	1	3	50	(250,5)	120	0	2

IV.2.1 Özelkan Yöntemi İle Tahmin

Özelkan yöntemi ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ ve $v=2000$ için aşağıdaki gibi olup $HKO=3193,786$ olarak hesaplanmıştır.

$$\hat{Y} = (0, 33.69) + (1.69, 0)X_1 + (1, 0)X_2 + (35.25, 2.44)X_3$$

Tablo IV.6 Özelkan Yöntemi ile Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ Değerleri

H=0, v=2000 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir.)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	(390,5)	322,62	404,64	26	(280,5)	214,46	296,48
2	(350,5)	302,33	379,47	27	(285,5)	229,38	321,16
3	(280,5)	231,35	308,49	28	(310,5)	286,42	358,68
4	(475,5)	319,24	401,26	29	(230,5)	184,03	261,17
5	(300,5)	269,92	345,67	30	(290,5)	234,73	311,87
6	(280,5)	268,53	341,78	31	(210,5)	173,89	251,03
7	(540,5)	333,46	420,36	32	(290,5)	234,73	311,87
8	(230,5)	200,94	282,96	33	(310,5)	258,39	335,53
9	(200,5)	151,23	228,37	34	(265,5)	251,63	328,77
10	(130,5)	124,88	202,02	35	(240,5)	226,28	303,42
11	(270,5)	231,35	308,49	36	(250,5)	243,18	320,32
12	(200,5)	194,88	281,78	37	(265,5)	245,86	318,12
13	(200,5)	146,16	223,3	38	(270,5)	200,94	282,96
14	(210,5)	170,52	252,54	39	(340,5)	258,4	340,42
15	(220,5)	180,66	262,68	40	(500,5)	326,7	413,6
16	(240,5)	234,73	311,87	41	(275,5)	214,46	296,48
17	(220,5)	189,11	271,13	42	(315,5)	235,73	312,87
18	(260,5)	214,45	291,59	43	(320,5)	241,49	318,63
19	(310,5)	225,59	302,73	44	(285,5)	213,47	300,37
20	(260,5)	224,6	306,62	45	(300,5)	220,23	307,13
21	(290,5)	252,62	324,88	46	(400,5)	283,46	375,24
22	(270,5)	201,93	279,07	47	(210,5)	194,88	281,78
23	(300,5)	225,59	302,73	48	(250,5)	216,14	293,28
24	(480,5)	325,01	411,91	49	(270,5)	214,46	296,48
25	(270,5)	229,67	311,69	50	(250,5)	234,73	311,87

IV.2.2 HBS1 Yöntemi İle Tahmin

HBS1 yöntemi ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ için aşağıdaki gibi olup HKO=4403,914 olarak hesaplanmıştır.

$$\tilde{Y} = (0, 0) + (1.64, 0.22)X_1 + (1, 0)X_2 + (42.85, 0.99)X_3$$

Tablo IV.7 HBS1 Yöntemi ile Tahmin Edilen $\tilde{Y}$ Değerleri

H=0 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir.)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\tilde{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\tilde{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	(390,5)	372,82	384,84	26	(280,5)	269,14	278,6
2	(350,5)	385,77	396,13	27	(285,5)	218,56	230,78
3	(280,5)	317,73	326,41	28	(310,5)	402,96	411,74
4	(475,5)	369,58	381,52	29	(230,5)	272,37	279,93
5	(300,5)	353,37	362,93	30	(290,5)	320,97	329,73
6	(280,5)	386,76	395,14	31	(210,5)	262,65	269,97
7	(540,5)	350,77	364,25	32	(290,5)	320,97	329,73
8	(230,5)	256,18	265,32	33	(310,5)	343,65	352,97
9	(200,5)	240,97	247,73	34	(265,5)	337,17	346,33
10	(130,5)	215,67	221,83	35	(240,5)	312,87	321,43
11	(270,5)	317,73	326,41	36	(250,5)	329,07	338,03
12	(200,5)	217,93	228,13	37	(265,5)	364,08	371,9
13	(200,5)	236,11	242,75	38	(270,5)	256,18	265,32
14	(210,5)	227,02	235,44	39	(340,5)	311,26	321,76
15	(220,5)	236,74	245,4	40	(500,5)	344,29	357,61
16	(240,5)	320,97	329,73	41	(275,5)	269,14	278,6
17	(220,5)	244,84	253,7	42	(315,5)	321,97	330,73
18	(260,5)	301,53	309,81	43	(320,5)	327,45	336,37
19	(310,5)	312,25	320,77	44	(285,5)	235,75	246,39
20	(260,5)	278,86	288,56	45	(300,5)	242,23	253,03
21	(290,5)	370,56	378,54	46	(400,5)	270,4	283,9
22	(270,5)	289,57	297,53	47	(210,5)	217,93	228,13
23	(300,5)	312,25	320,77	48	(250,5)	303,15	311,47
24	(480,5)	342,67	355,95	49	(270,5)	269,14	278,6
25	(270,5)	283,72	293,54	50	(250,5)	320,97	329,73

IV.2.3 Modarres Yöntemi İle Tahmin

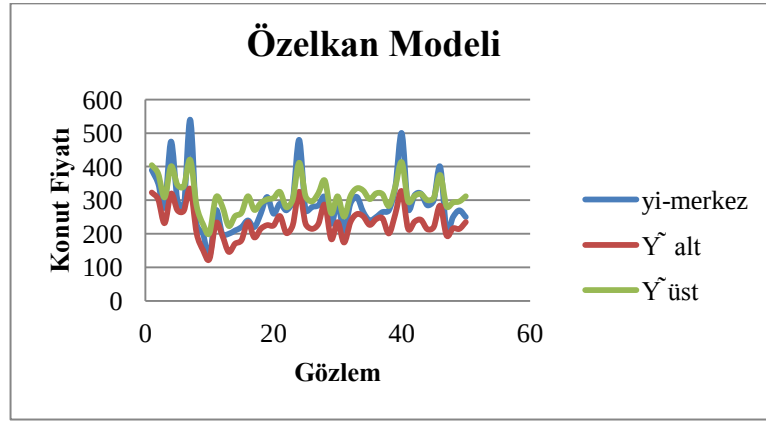
Modarres yöntemi ile elde edilen regresyon eşitliği $H=0$ için aşağıdaki gibi olup HKO=6721,728 olarak hesaplanmıştır.

$$\hat{Y} = (0, 30.82) + (1.73, 0)X_1 + (1, 0)X_2 + (49.83, 15.8)X_3$$

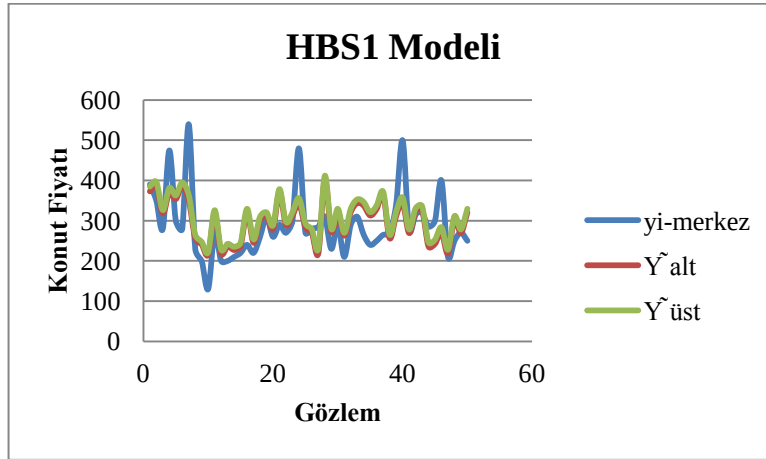
Tablo IV.8 Modarres Yöntemi ile Tahmin Edilen $\hat{Y}$ Değerleri

H=0 (Fiyatlar Bin TL cinsindendir.)							
Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri		Gözlem No	Gözlem Değerleri	Tahmin Edilen $\hat{Y}_i$ lerin Alt ve Üst Sınır Değerleri	
		Alt sınır	Üst sınır			Alt sınır	Üst sınır
1	(390,5)	335,23	491,67	26	(280,5)	224,51	380,95
2	(350,5)	314,04	438,88	27	(285,5)	240,67	460,31
3	(280,5)	241,38	366,22	28	(310,5)	297,31	390,55
4	(475,5)	331,77	488,21	29	(230,5)	192,94	317,78
5	(300,5)	279,44	404,28	30	(290,5)	244,84	369,68
6	(280,5)	280,01	373,25	31	(210,5)	182,56	307,4
7	(540,5)	346,77	534,81	32	(290,5)	244,84	369,68
8	(230,5)	210,67	367,11	33	(310,5)	269,06	393,9
9	(200,5)	159,34	284,18	34	(265,5)	262,14	386,98
10	(130,5)	132,39	257,23	35	(240,5)	236,19	361,03
11	(270,5)	241,38	366,22	36	(250,5)	253,49	378,33
12	(200,5)	204,91	392,95	37	(265,5)	255,79	349,03
13	(200,5)	154,15	278,99	38	(270,5)	210,67	367,11
14	(210,5)	179,53	335,97	39	(340,5)	269,49	425,93
15	(220,5)	189,91	346,35	40	(500,5)	339,85	527,89
16	(240,5)	244,84	369,68	41	(275,5)	224,51	380,95
17	(220,5)	198,56	355	42	(315,5)	245,84	370,68
18	(260,5)	224,08	348,92	43	(320,5)	251,76	376,6
19	(310,5)	235,46	360,3	44	(285,5)	223,94	411,98
20	(260,5)	234,89	391,33	45	(300,5)	230,86	418,9
21	(290,5)	262,71	355,95	46	(400,5)	296,03	515,67
22	(270,5)	211,24	336,08	47	(210,5)	204,91	392,95
23	(300,5)	235,46	360,3	48	(250,5)	225,81	350,65
24	(480,5)	338,12	526,16	49	(270,5)	224,51	380,95
25	(270,5)	240,08	396,52	50	(250,5)	244,84	369,68

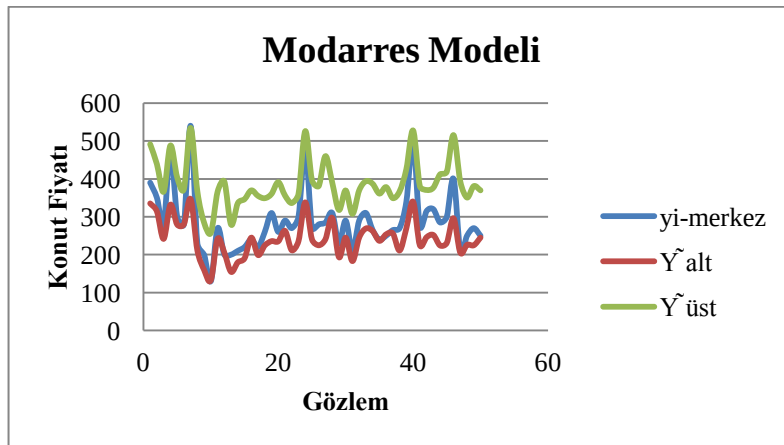
Tablo IV.6, IV.7, IV.8 deki veriler için serpilme grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil IV.4 Özelkan Modeli için y_i -merkez, $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri



Şekil IV.5 HBS1 Modeli için y_i -merkez, $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri



Şekil IV.6 Modarres Modeli için y_i -merkez, $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin serpilme grafikleri

BÖLÜM V

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Regresyon analizi bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkinin modellenmesi ve bu ilişkiye bağlı olarak tahmin yapılmasını sağlayan istatistiksel bir tekniktir. Değişkenler arasındaki ilişki bazen kesin ifadelerle tanımlanamayabilir. Bu durum bulanık mantık ile düşünmeyi gerekli kılar. Böyle durumlarda bulanık küme teorisi üzerinde yapılandırılmış olan bulanık doğrusal regresyon analizinden yararlanılabilir.

Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin değerleri kesin ya da bulanık sayı olabilir. Bulanık regresyonda kullanılan H uyum ölçüsü, çalışmanın amacına göre ayarlanabildiği için araştırmacının esnek çözümler üretmesine olanak sağlar.

Bu çalışmamızda bulanık doğrusal regresyon için önerilen bazı parametre tahmin yöntemleri incelenmiş olup bu yöntemlerin bir kısmı ile İstanbul'un Ataşehir ilçesindeki konut fiyatlarıyla ilgili tahminler yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bulanık regresyon ile ilgili birinci uygulamamızda girdi ve çıktıları kesin sayılar olan veriler için Tanaka Yöntemi, Özelkan Yöntemi ve Minimum Bulanıklık Kriteri Yöntemi kullanılarak regresyon denklemleri elde edilmiş olup karşılaştırma kriteri olarak HKO değerleri hesaplanmıştır.

Tablo V.1 Uygulama1 için HKO değerleri

	Tanaka Yöntemi	Özelkan Yöntemi	Minimum Bulanıklık Kriteri
HKO	7885,54	3295,79	6787,64

Tablo V.1 den görülebileceği gibi birinci uygulama için Özelkan yönteminin HKO değerinin diğer yöntemlere göre daha küçük bir değere sahip olması sebebiyle

daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Şekil IV.1, IV.2, IV.3 deki verilerin serpilme grafikleri incelendiğinde de problemin amacına uygun olarak, Özelkan modelinin alt ve üst sınırlarının, yani $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin gözlem değerlerinden sapmalarının Tanaka ve Minimum Bulanıklık Kriteri'ne göre daha küçük olduğu görülmektedir.

Bulanık regresyon ile ilgili ikinci uygulamamızda ise girdileri kesin çıktıları bulanık sayılar olan veriler için HBS1 Yöntemi, Özelkan Yöntemi, Modarres Yöntemleri kullanılarak regresyon denklemleri elde edilmiş olup karşılaştırma kriteri olarak HKO değerleri hesaplanmıştır.

Tablo V.2 Uygulama2 için HKO değerleri

	HBS1 Yöntemi	Özelkan Yöntemi	Modarres Yöntemi
HKO	4403,914	3193,78	6721,72

Tablo V.2 den görülebileceği gibi ikinci uygulama için Özelkan Yönteminin HKO değerinin diğer yöntemlere göre daha küçük bir değere sahip olması sebebiyle daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir. Şekil IV.4, IV.5, IV.6 daki verilerin serpilme grafikleri incelendiğinde de problemin amacına uygun olarak, Özelkan modelinin alt ve üst sınırlarının, yani $\tilde{Y}_{alt}$, $\tilde{Y}_{üst}$ değerlerinin gözlem değerlerinin merkezinden sapmalarının HBS1 ve Modarres yöntemlerine göre daha küçük olduğu görülmektedir.

Bu çalışmasında bazı çoklu “multiple” bulanık doğrusal regresyon modelleri tanıtılarak uygulama sonuçları karşılaştırılmıştır. Daha sonraki çalışmalarda modellerin etkinliği simülasyon çalışmaları ile de karşılaştırılabilir. Tüm bu çalışmalar çok değişkenli “multivariate” bulanık doğrusal regresyon modelleri için yapılabilir.

KAYNAKLAR

Aksoy, S.: “*İnşaat Mühendisliğinde Çok Amaçlı Değerlendirme ve Karar Vermede Fuzzy Yaklaşımı*”, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, **(2003)**.

Arabpour A. R.; Tata M.: “Estimating the parameters of a Fuzzy Linear Regression Model”, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 5 (2008) 1-19.

Baykal,N.; Beyan, T.; *Bulanık Mantık İlke Ve Temelleri*, Bıçaklar Kitabevi, Ankara, **(2004)**.

Chen, Y.S.: “*Outlier detection and confidence interval modificationin fuzzy regression*”, Fuzzy sets and systems, 119 **(2001)** 259-272.

Diamond, P.: “*Fuzzy Least Squares*”, Information Sciences, 46 **(1988)** 141- 157

Elmas, Ç.: *Bulanık Mantık Denetleyicileri* , Seçkin Kitabevi, Ankara, **(2003)**.

G, Peters.: “*Fuzzy Linear Regression With Fuzzy Intervals*”, Fuzzy Sets and systems, 63 **(1994)** 45-55.

Hassanpour, H.; Maleki, H.R.; Yaghoobi M.A.: “A Goal Programing Approach to Fuzzy Linear Regression with Non-Fuzzy Input And Fuzzy Output Data”, Asia Journal of Operational Research, 5 **(2009b)** 587-604.

Hassanpour, H.; Maleki, H.R.; Yaghoobi M.A.: “A goal programming approach to fuzzy linear regression with fuzzy input–output data” Springer-Verlag **(2011)**

Hojati, M.; Bector, C.R.; Simimou, K.: “*A simple Method for Computation of Fuzzy Linear Regression*”, European Journal of Operational Research, 166 **(2005)** 172-184.

İşbilen, Leyla.: “*Bulanık regresyon: Türkiye’de 1980-2004 döneminde kayıt dışı ekonominin bulanık yöntemlerle tahminine ilişkin bir uygulama*”, Yüksek Lisans Tezi , İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, Türkiye, **(1988)** 1-3

Ishibuchi, H.; Manabu, N.: “*Fuzzy Regression Using Asymmetric Fuzzy Coefficient And Fuzzified Neural Networks*”, Fuzzy Sets and Systems, 119 **(2001)** 273-290.

Kim, B.; Bishu, R.R.: “*Evaluation of Fuzzy Linear Regression Models by Comparing Membership Functions*”, Fuzzy Set and Systems, 100 **(1998)** 342-352.

Klir, G.J.; Clair,U.S.; Yuan, B.: “*Fuzzy Set Theory Foundations And Applications*’ Prentice Hall PTR USA **(1997)**.

Klir, G. J.; Yuan, B.: “*Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*” Prentice Hall PTR, New Jersey, **(1995)**.

Lukasiewicz, J.: *Elements of Mathematical Logic* New York, Macmillan **(1964)**.

Modarres, M., Nasrabadi, E., Nasrabadi M.M., “*Fuzzy Linear Regresyon Models with Least Square Errors*”, Applied Mathematics And Computation, 163 **(2005)** 977-989.

Nasrabadi, M. M.; Nasrabadi, E.: “*A Mathematical-Programming Approach to Fuzzy Linear Regression Analysis*”, Applied Mathematics And Computation, 155 **(2004)** 873-881.

Nasrabadi, M. M.; Nasrabadi, E.; Nasrabady, A.R.: “*Fuzzy Linear Regression Analysis: A Multi Objective Programming Approach*”, Applied Mathematics And Computation 163 **(2005)** 245-251.

Özelkan, E.C.; Duckstein, L.: “*Multi-Objective Fuzzy Regression a General framework*”, Computers and Operations Research 27 **(2000)** 635-652.

Searle, S.R.: "Linear Models", John Wiley&Sons. NewYork, **(1970)**.

Sakawa, M.; Yano, H.: “*Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data*”, Information Sciences, 63 **(1992)** 191-206.

Savic, D.; Pedrycz, W.: “*Evaluation of Fuzzy Regression Models*”, Fuzzy Sets and Systems, 39 **(1991)** 51-63.

Şen, Z.: “*Bulanık Mantık Ve Modelleme İlkeleri*”, İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilge Kültür Sanat Yayınevi, İstanbul **(2001)**.

Şen, Z.: “*Mühendislikte Bulanık Mantık ile Modelleme Prensipleri*” Su vakfı, İstanbul **(2004)**.

Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K., “*Linear regression analysis with fuzzy model*”, IEEE, Trans , System Management, Sybernet, 12(6) **(1982)** 903 -907.

Tanaka, H.: “*Fuzzy Data Analysis by possibilistic linear models*”, Fuzzy Sets And Systems, 24 **(1987)** 363-375.

Tanaka, H.; Guo, P.: “*Possibilistic Data Analysis for Operations research*” Physica-Verlag Heidelberg, NewYork **(1998)**.

Wang, H. F.; Tsaur, R. C.: “*Resolution of Fuzzy Regression Model*”, European Journal of Operational Research, 126 **(2000)** 637 – 650.

Xu, R.; Li, C.: “*Multidimensional Least Squares Fitting with a Fuzzy Model* ” Fuzzy Sets and systems 119 **(2001)** 215-223.

Yang, M.S.; Lin, T.S.: “*Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data*”, Fuzzy Sets and Systems, 126 **(2002)** 389-399.

Zadeh, L.A.: “*Fuzzy Sets, Information and Control*” 8 **(1965)** 338-353.

Zadeh, L.A.: “*Fuzzy Sets*” , www.cs.berkeley.edu/~zadeh/papers/Fuzzy%20Sets-1965.Pdf

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Erduvan 1985 yılında İzmit’ te doğdu. İlköğrenimini 28 Haziran İlköğretim Okulu ve Lise öğrenimini İzmit Lisesinde tamamladı. Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümünü 2007 yılında bölüm birinciliği ile bitirdi. Mezun olduğu yıl Sakarya Üniversitesinde Tezsiz Yüksek Lisansa başlayıp Formasyon aldı. 2008 yılından itibaren Marmara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Tezli Yüksek Lisans yapmaktadır.