T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YEREL KAPALILIK ÜZERİNE

Muhammet Mustafa BAHŞI

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: **10/06/2011**

Tez Danışmanı:

Doç. Dr. Erdal EKİCİ

ÇANAKKALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ SINAV SONUÇ FORMU

MUHAMMET MUSTAFA BAHŞI tarafından **DOÇ. DR. ERDAL EKİCİ** yönetiminde hazırlanan **"YEREL KAPALILIK ÜZERİNE"** başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal EKİCİ
Danışman

Doç. Dr. Faruk SOYDUGAN
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. İlhan HACIOĞLU
Jüri Üyesi

Sıra No:

Tez Savunma Tarihi: 10/06/2011

Prof. Dr. İsmet KAYA
Müdür
Fen Bilimleri Enstitüsü

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Muhammet Mustafa BAHŞI

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda engin bilgileriyle bizi büyük bir özenle yetiştiren tez danışmanım Sn. Doç. Dr. Erdal EKİCİ’ ye, bizleri bugünlere getiren değerli hocalarıma ve yaşamımın her döneminde destek ve yardımlarını esirgemeyen hayattaki en değerli varlığım aileme çok teşekkür ederim.

Muhammet Mustafa BAHŞI

ÖZET

YEREL KAPALILIK ÜZERİNE

Muhammet Mustafa BAHŞI
Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Erdal EKİCİ
10/06/2011, 46

Bu tezde gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümeler çalışılmıştır. gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümelerin özellikleri ve karakterizasyonları araştırılmıştır. gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: gδpr-yerel kapalı küme, gδpr*-yerel kapalı küme, gδpr-açık küme, gδpr-kapalı küme.

ABSTRACT

ON LOCALLY CLOSED SETS

Muhammet Mustafa BAHŞI
Çanakkale Onsekiz Mart University
Graduate School of Science And Engineering
Chair of Mathematics Thesis of Master of Science
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal EKİCİ
10/06/2011, 46

In this thesis, gδpr-locally closed sets and gδpr*-locally closed sets are studied. Properties and characterizations of gδpr-locally closed sets and gδpr*-locally closed sets are investigated. The relationships between gδpr-locally closed sets and gδpr*-locally closed sets are investigated.

Anahtar sözcükler: gδpr-locally closed set, gδpr*-locally closed set, gδpr-open set, gδpr-closed set.

İÇERİK **Sayfa**

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tezdeki amaç gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümeleri çalışmak olmuştur.

gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümelerin özellikleri ve karakterizasyonları araştırılmıştır.

gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümeler arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Öte yandan gδpr*-lc-sürekli ve gδpr*-lc-kararsız fonksiyonlar ve özellikleri araştırılmıştır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde tezimizi tanıtan bilgiler sunulmaktadır.

İkinci bölümde tezde kullanılan temel tanım ve teoremler sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr-yerel kapalı kümelerin özellikleri çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde gδpr-lc-sürekli ve gδpr-lc-kararsız fonksiyonlar çalışılmıştır.

Beşinci bölümde gδpr-yerel kapalı kümeler ve gδpr*-yerel kapalı kümelerin ilişkileri araştırılmıştır.

Altıncı bölümde gδpr*-lc-sürekli ve gδpr*-lc-kararsız fonksiyonlar çalışılmıştır.

Öte yandan gδpr*-yerel kapalı kümeler ailesinin çeşitli özellikleri ve karakterizasyonları incelenmiştir.

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde topolojik uzayları **(**X,τ) ve (Y,σ) ya da kısaca X ve Y ile göstereceğiz.

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin kapanışını cl(A) ve içini int(A) ile göstereceğiz.

Tanım 2.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.
A=int(cl(A)) ise A kümesine düzenli açık denir (Stone,1937).

Tanım 2.2. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A= cl(int(A)) ise A kümesine düzenli kapalı denir (Stone,1937).

Tanım 2.3. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.
Eğer $A \subset$ int(cl(A)) ise A kümesine önaçık denir (Mashhour ve ark., 1982).

Tanım 2.4. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Önaçık kümelerin tümleyenlerine önkapalı kümeler denir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.
$\forall\,(x\in B)\in \tau$ için $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)) \cap A \neq \emptyset$ ise x noktasına A kümesinin bir δ-kapanış noktası denir (Velicko, 1968).

A kümesinin tüm δ-kapanış noktalarının kümesine A nın δ-kapanışı denir ve δ-cl(A) ile gösterilir (Velicko, 1968).

Tanım 2.6. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A \subset$ int(δ-cl(A)) ise A kümesine δ-önaçıktır denir (Raychaudhuri ve Mukherjee,1993).

Tanım 2.7. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. δ-önaçık kümelerin tümleyenlerine δ-önkapalı kümeler denir (Raychaudhuri ve Mukherjee,1993).

Tanım 2.8. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A kümesini kapsayan tüm δ-önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin δ- ön kapanışı denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.9. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinde bulunan tüm δ-önaçık kümelerin birleşimine A kümesinin δ-öniçi denir (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.10. (X,τ) bir topolojik uzay ve A, $B \subset X$ olsun. Bu durumda $A \subset B$ ise δ-pcl(A) $\subset$ δ-pcl(B) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.11. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ-pcl(A) kümesi δ-ön kapalıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.12. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda δ-pcl(δ-pcl(A))=δ-pcl(A) olur (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Teorem 2.13. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

Bu durumda $x \in$ δ-pcl(A) olması için gerek ve yeter koşul $\forall (x \in) B \in$ δ-PO(X) için $A \cap B \neq \emptyset$ olmasıdır (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993).

Tanım 2.14. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. B açık küme olmak üzere $A \subseteq B$ iken cl(A) $\subseteq$ B oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş kapalı küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca g-kapalı küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.15. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus A$ g-kapalı ise A kümesine genelleştirilmiş açık küme denir (Levine, 1970).

Genelleştirilmiş açık kümeye kısaca g-açık küme denir (Levine, 1970).

Tanım 2.16. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğunda δ-pcl(A) $\subset B$ oluyorsa A kümesine gδpr-kapalıdır denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.17. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus A$ gδpr-kapalı ise A kümesine gδpr-açık denir (Ekici ve Noiri, 2006).

Tanım 2.18. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A kümesini kapsayan tüm önkapalı kümelerin arakesitine A kümesinin önkapanışı denir (El-Deeb ve ark., 1983).

Tanım 2.19. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğunda cl(A) $\subset B$ oluyorsa A kümesine düzenli genelleştirilmiş kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Düzenli genelleştirilmiş kapalı kümeye kısaca rg-kapalı küme denir (Palaniappan ve Rao, 1993).

Tanım 2.20. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \subset B$ ve $B \subset X$ düzenli açık olduğunda pcl(A) $\subset B$ oluyorsa A kümesine genelleştirilmiş öndüzenli kapalı küme veya düzenli genelleştirilmiş önkapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri, 1998).

Düzenli genelleştirilmiş önkapalı kümeye kısaca gpr-kapalı küme denir (Gnanambal, 1997; Noiri, 1998).

Uyarı 2.21. (Ekici ve Noiri, 2006). (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki diyagram geçerlidir.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{kapalı} & \rightarrow & \text{g-kapalı} & \rightarrow & \text{rg-kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{önkapalı} & \rightarrow & \text{gp-kapalı} & \rightarrow & \text{gpr- kapalı} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\delta\text{-önkapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{p-kapalı} & \rightarrow & \text{g}\delta\text{pr-kapalı}
\end{array}$$

Tanım 2.22. (X,τ) bir topolojik uzay ve $C \subset X$ olsun.

$C=A \cap B$ olacak biçimde $A \in \tau$ ve B kapalı kümeleri varsa C kümesine yerel kapalı küme denir (N. Bourbaki, 1966).

Uyarı 2.23.(Balachandran ve ark., 1996) Aşağıdakiler özellikler geçerlidir.

(i) (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yerel kapalıdır gerek ve yeter koşul $X \backslash A$ açık ve kapalı kümelerin birleşimidir.

(ii) X uzayının her açık(kapalı) alt kümesi yerel kapalıdır.

(iii) Yerel kapalı kümelerin tümleyeni yerel kapalı olmak zorunda değilir.

Tanım 2.24. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A=B \cap C$ olacak biçimde B g-açık ve C g-kapalı kümeleri varsa A kümesine genelleştirilmiş yerel kapalı küme denir (Balachandran ve ark., 1996).

Tanım 2.25. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $A=B \cap C$ olacak biçimde B g-açık ve C kapalı kümeleri var ise $A \in GLC^*(X, \tau)$ olarak tanımlanır (Balachandran ve ark., 1996).

Tanım 2.26. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ tanımlı fonksiyon olsun.

Herbir A∈ GLC*(Y,σ) için f^{-1}(A) ∈ GLC*(X,τ) oluyorsa f fonksiyonuna GLC*-kararsız fonksiyon denir (Balachandran ve ark., 1996).

Tanım 2.27. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f:(X,τ)→(Y,σ) tanımlı fonksiyon olsun.

Herbir A∈σ için f^{-1}(A) ∈ GLC*(X,τ) oluyorsa f fonksiyonuna GLC*-sürekli fonksiyon denir (Balachandran ve ark., 1996).

Tanım 2.28. (Balachandran ve ark., 1996) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f:(X,τ)→(Y,σ) tanımlı fonksiyon olsun.

(Y,σ) uzayının β tabanı vardır öyleki A∈β için f^{-1}(A) ∈ GLC*(X,τ) oluyorsa f sub-GLC*-sürekli fonksiyon olarak adlandırılır.

Teorem 2.29. (Balachandran ve ark., 1996) (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f:(X,τ)→(Y,σ) tanımlı fonksiyon olsun.

Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) f sub-GLC*-süreklidir ancak ve ancak (Y,σ) uzayının ρ alt tabanı vardır öyleki A∈ ρ için f^{-1}(A) ∈ GLC*(X,τ) dur.

(ii) f sub-LC-sürekli ise f sub-GLC*-süreklidir.

BÖLÜM 3

TOPOLOJİK UZAYLARDA

gδpr- YEREL KAPALI

KÜMELER AİLESİ

Tanım 3.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A=B\cap C$ olacak biçimde B gδpr-açık ve C kapalı kümeleri varsa A kümesine gδpr-yerel kapalı küme denir.

Örnek 3.2. $X=\{a,b,c,d\}$ $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\}\}$ olmak üzere $C=\{b,d\}$ ve $B=\{b,c,d\}$ kümelerini alalım.

C kümesi kapalı ve B kümesi gδpr-açıktır.

Bu durumda $C\cap B=\{b,d\}$ olduğundan $\{b,d\}$ kümesi gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.3. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her kapalı küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olsun ve $A \subset X$ alalım.

A kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$A=A\cap X$$

ve X gδpr-açık olduğundan A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Uyarı 3.4. Her gδpr-yerel kapalı küme kapalı olmak zorunda değildir.

Örnek 3.5. $X=\{a,b,c,d\}$ $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\},\{a,c,d\}\}$ olmak üzere $A=\{a,b\}$ kümesini alalım.

A kümesi gδpr-yerel kapalı kümedir.

Ancak A kümesi kapalı küme değildir.

Teorem 3.6. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her gδpr-açık küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olsun ve $A\subset X$ alalım.

A kümesi gδpr açık küme olsun. Bu durumda

$$A=A\cap X$$

ve X kapalı olduğundan A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.7.(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her yerel kapalı küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

$A\subset X$ yerel kapalı küme olsun. Bu durumda $A=B\cap C$ olacak biçimde B açık kümesi ve C kapalı kümesi vardır. B açık küme olduğundan Uyarı 2.21. den gδpr-açık kümedir.

Bu durumda A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.8. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun.

$A\in GLC^*(X,\tau)$ ise A, gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

$A \in GLC^*(X, \tau)$ olduğundan tanım gereğince A= B∩C olacak biçimde B g-açık kümesi ve C kapalı kümesi vardır. B g-açık olduğundan Uyarı 2.21. gereğince gδpr-açık kümedir.

Bu durumda A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.9. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A gδpr-yerel kapalı kümedir ancak ve ancak A=B∩cl(A) olacak biçimde B, gδpr-açık kümesi vardır.

İspat:

($\Rightarrow$:) A gδpr-yerel kapalı küme olsun. A=B∩C olacak biçimde B gδpr-açık kümesi ve C kapalı kümesi vardır.

Buradan $A \subset B$ ve $A \subset cl(A)$ olduğundan $A \subset B \cap cl(A)$ dır.

Tersine $A \subset C$ ve C kapalı küme olduğundan

$$cl(A) \subset cl(C)=C$$

dır. Öyleyse $cl(A) \subset C$dir. Buradan

$$\begin{aligned} A &= B \cap C \\ &\supset B \cap cl(A) \end{aligned}$$

dır.

Yani $A \supset B \cap cl(A)$ dır.

Öyleyse A=B∩cl(A) olduğu bulunur.

($\Leftarrow$:) B gδpr-açık ve cl(A) kapalı olduğundan A=B∩cl(A) gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.10. **(**X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr-yerel kapalı küme ise cl(A) \A gδpr-kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A gδpr-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.9 gereğince A=B∩cl(A) , olacak biçimde B gδpr-açık kümesi vardır.

$$cl(A) \setminus A = cl(A) \cap (X \setminus B)$$

dur.

cl(A) kapalı olduğundan gδpr-kapalı küme ve B gδpr-açık küme olduğundan X\B gδpr-kapalı kümedir.

Öyleyse cl(A)\A gδpr-kapalı kümedir.

Teorem 3.11. **(**X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

cl(A) \A gδpr-kapalı küme ise A gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ için cl(A) \A gδpr-kapalı küme olsun.

$$B = X \setminus (cl(A) \setminus A)$$

olsun.

cl(A) \ A gδpr- kapalı olduğundan B kümesi gδpr-açık kümedir ve

$$A=B \cap cl(A)$$

olur.

Buradan B gδpr-açık küme olduğundan Teorem 3.9. gereğince A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Sonuç 3.12. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

Bu durumda A gδpr-yerel kapalı kümedir ancak ve ancak cl(A) \A gδpr-kapalı kümedir.

Teorem 3.13. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr-yerel kapalı küme ise $A \cup (X \backslash cl(A))$ gδpr-açıktır.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ gδpr-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.10 gereğince cl(A) \A gδpr-kapalı kümedir.

$$B= cl(A) \backslash A$$

diyelim.

Bu durumda cl(A) \A gδpr- kapalı olduğundan

$$X \backslash B= X \backslash (cl(A) \backslash A)$$

$$= A \cup (X \backslash cl(A))$$

gδpr-açık kümedir.

Yani $A \cup (X \backslash cl(A))$ gδpr-açık kümedir.

Teorem 3.14. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \cup (X \backslash cl(A))$ gδpr-açık ise A gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere $A \cup (X \backslash cl(A))$ gδpr-açık olsun.

$$B = A \cup (X \backslash cl(A))$$

diyelim.

B gδpr-açık küme olduğundan $X \backslash B$ gδpr- kapalı kümedir ve

$$X \backslash B = X \backslash (A \cup (X \backslash cl(A)))$$

$$= cl(A) \backslash A$$

olduğundan $cl(A) \backslash A$ gδpr-kapalıdır.

Buradan Teorem 3.11. gereğince A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Sonuç 3.15. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr-yerel kapalı kümedir ancak ve ancak $A \cup (X \backslash cl(A))$ gδpr-açıktır.

Teorem 3.16. (X,τ) topolojik uzay ve $A,B \subset X$ olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

A ve B kümeleri gδpr-yerel kapalı kümeler ise A∩B kümesi gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve A,B$\subset$X olmak üzere A, B gδpr-yerel kapalı küme olsun.

A ve B gδpr-yerel kapalı kümeler olduğundan Teorem 3.9. gereğince A=C∩cl(A) olacak biçimde C, gδpr-açık kümesi ve B=D∩cl(B) olacak biçimde D, gδpr-açık kümesi vardır.

C ∩D gδpr- açık ve cl(A) ∩cl(B) kapalı olduğundan A∩B gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.17. (X,τ) topolojik uzay A$\subset$X, Y$\subset$X ve A$\subset$Y olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun. Y düzenli açık olsun.

Y, **(**X,τ) topolojik uzayında g-açık ve A, **(**Y,τ|Y) topolojik uzayında gδpr-yerel kapalı küme ise A, **(**X,τ) topojik uzayında gδpr- yerel kapalı kümedir.

İspat:

A, **(**Y,τ|Y) topolojik uzayında gδpr-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.9. gereğince

$$A=B \cap cl_Y(A)$$

olacak biçimde B gδpr-açığı vardır. Ayrıca

$$cl_Y(A)=Y\cap cl(A)$$

idi. B, (Y,τ|Y) topolojik uzayında gδpr-açık olduğundan B, (X,τ) topolojik uzayında gδpr-açıktır.

Buradan Y∩B gδpr-açıktır.

$$A=(Y\cap B)\cap cl(A)$$

ve Y∩B gδpr- açık küme olduğundan Teorem 3.9. gereğince A, (X,τ) topolojik uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.18. (X,τ) bir topolojik uzay ve A, $B\subset X$ olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu birleşimi gδpr-açık olsun.

A, B gδpr-yerel kapalı kümeler olmak üzere A ve B ayrılmış kümeler (Yani A∩cl(B)=∅ ve B∩cl(A)= ∅) ise $A\cup B$ gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve A, $B\subset X$ ayrılmış kümeler olmak üzere A, B gδpr-yerel kapalı kümeler olsun.

A, B gδpr-yerel kapalı kümeler olduğundan Teorem 3.9 gereğince A=G∩cl(A) olacak biçimde G gδpr-açık kümesi ve B=S∩cl(B) olacak biçimde S, gδpr-açık kümesi vardır.

$$U=G\cap(X\backslash cl(B))$$

ve

$$V=S\cap(X\backslash cl(A))$$

diyelim.

A=U∩cl(A) ve B=V∩cl(B) olur. Ayrıca

$$V\cap cl(A)=\varnothing$$

ve

$$U \cap cl(B) = \emptyset$$

dir.

$$A \cup B = (U \cap cl(A)) \cup (V \cap cl(B))$$

$$= (U \cup V) \cap (cl(A) \cup cl(B))$$

$$= (U \cup V) \cap cl(A \cup B)$$

olur.

Buradan $U \cup V$ gδpr-açık $cl(A \cup B)$ kapalı olduğundan Teorem 3.9. gereğince $A \cup B$ gδpr-yerel kapalı kümedir.

Tanım 3.19. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. **(**X,τ) uzayının her yoğun alt kümesi gδpr-açık ise **(**X,τ) uzayına gδpr-submaximal uzay denir.

Teorem 3.20. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

(X,τ) uzayı gδpr-submaximal uzay ise X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

Kabul edelim ki $A \subset X$
ve

$$B = A \cup (X \backslash cl(A))$$

olsun.

cl(B)=X dur. Öyleyse B yoğun kümedir. B yoğun ve uzay gδpr-submaximal olduğundan U gδpr-açıktır.

Teorem 3.14. gereğince A gδpr-yerel kapalı kümedir. Buradan X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.21. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı küme ise **(**X,τ) uzayı gδpr-submaximal uzaydır.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ kümesini alalım.

A, **(**X,τ) uzayında yoğun küme olsun. Yani cl(A)=X olsun. Buradan

$$A=A \cup (X \backslash cl(A))$$

dir.

A, gδpr yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.13. gereğince A gδpr açık kümedir.

Öyleyse **(**X,τ) topolojik uzayı gδpr-submaximal uzaydır.

Sonuç 3.22. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

(X,τ) uzayı gδpr-submaximal uzaydır gerek ve yeter koşul X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.23. (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay olsun. gδpr-açık kümelerin çarpımlarıda gδpr-açık olsun.

$A \subset X$ ve $B \subset Y$ olmak üzere A, **(**X,τ) topolojik uzayında gδpr-yerel kapalı küme ve B, (Y,σ) topolojik uzayında gδpr-yerel kapalı küme ise $A \times B$ kümesi **(**$X \times Y, \tau \times \sigma$) uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

İspat:

A, gδpr-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.9. gereğince

$$A=U\cap cl(A)$$

olacak biçimde (X,τ) uzayında U, gδpr-açık kümesi var ve
B, gδpr-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 3.9. gereğince

$$B=V\cap cl(B)$$

olacak biçimde (Y,σ) uzayında V, gδpr-açık kümesi vardır.

$$A\times B= (U\cap cl(A))\times(V\cap cl(B))$$

$$= (U\times V)\cap(cl(A)\times cl(B))$$

$$= (U\times V)\cap(cl(A\times B))$$

dir.

$U\times V$ gδpr-açık küme olduğundan $A\times B$ gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 3.24. (X,τ) topolojik uzayı ve $A\subset X$ olsun.

A gδpr-yerel kapalı küme ise $A=B\cap cl^*(A)$ olacak ve biçimde B, gδpr-açık kümesi vardır. ($cl^*(A)= \cap\{C:A\subset C$, C, X uzayında g-kapalı$\}$)

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A\subset X$ gδpr-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr-yerel kapalı küme olduğundan $A=B\cap C$ olacak biçimde B, gδpr-açık kümesi ve C kapalı kümeleri vardır.

$A\subset B$ ve $A\subset cl^*(A)$ olduğundan $A\subset B\cap cl^*(A)$ olur.

Tersine C kapalı olduğundan g-kapalı kümedir. Buradan,

$$cl^*(A)\subset C(=cl^*(C))$$

olur.

Yani

$$A=B\cap C\supset U\cap cl^*(A)$$

olur.

Buradan $A=B\cap cl^*(A)$ bulunur.

BÖLÜM 4

TOPOLOJİK UZAYLARDA

gδpr- lc-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım 4.1. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Y uzayındaki herbir A gδpr-yerel kapalı kümesi için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme oluyorsa f fonksiyonuna gδpr-lc-kararsız fonksiyon denir.

Tanım 4.2. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Herbir A$\in$ σ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme oluyorsa f fonksiyonuna gδpr-lc-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.3. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu LC-sürekli ise gδpr-lc-süreklidir.

İspat:

f fonksiyonu LC- sürekli olsun. Herbir A$\in$ σ için f^{-1}(A) X uzayında yerel kapalıdır.

Teorem 3.7 dan f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir. Buradan herbir A$\in$ σ için f^{-1}(V) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olur.

Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.4. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f **:(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f gδpr-lc-kararsız fonksiyon ise gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

Herbir A$\in$ σ için A, Y uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir ve f gδpr-lc-kararsız fonksiyon olduğundan f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Buradan her A$\in$ σ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir. Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.5. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f **:(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f sürekli fonksiyon ise gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

Kabul edelimki f sürekli fonksiyon olsun. Buradan f sürekli fonksiyon olduğundan her A$\in$ σ için f^{-1}(A)$\in$ τ dur. Buradan herbir A$\in$ σ için f^{-1}(A), X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.6. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f GLC* sürekli fonksiyon ise gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

f GLC* sürekli fonksiyon olsun.

Buradan her A∈ σ için f^{-1}(A)∈GLC***(**X,τ) olur. Teorem3.10 dan f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Yani her A∈ σ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.7. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f GLC* kararsız fonksiyon ise gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

f GLC* sürekli fonksiyon olsun.

Her A∈σ için A∈GLC***(**Y,σ) dır. Ayrıca f GLC* kararsız fonksiyon olduğundan her A∈GLC***(**Y,σ) için f^{-1}(A)∈GLC***(**X,τ) olur.Teorem 3.8. dan f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Yani her A∈ σ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.8. (X,τ) topolojik uzay olsun.

X uzayı gδpr-submaximal ise X üzerinde tanımlı her fonksiyon gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

Kabul edelim ki X uzayı gδpr-submaximal ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

X uzayı gδpr-submaximal olduğundan Teorem3.20 gereğince X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı kümedir.

Buradan her $A\in\sigma$ için $f^{-1}(A)$ X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse f gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.9. (X,τ) topolojik uzay olsun. gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

X uzayında tanımlı her fonksiyon gδpr-lc-sürekli fonksiyon ise X uzayı gδpr-submaximal dir.

İspat:

$Y=\{0,1\}$ olmak üzere $\sigma=\{\emptyset,\{0\},Y\}$ topolojisini alalım.

A, (X,τ) uzayının bir alt kümesi olmak üzere $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$, $x\in A$ iken $f(x)=0$ ve $x\notin A$ iken $f(x)=1$ olarak tanımlansın. X uzayının bir alt kümesi A için f gδpr-lc-sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(\{0\})=A$ ve A de X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Buradan X uzayındaki her küme gδpr-yerel kapalı küme olur.

Öyleyse Teorem 3.21 gereğince X uzayı gδpr-submaximaldir.

Sonuç 4.10. (X,τ) topolojik uzay olsun. gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

X uzayı gδpr-submaximaldir ancak ve ancak X üzerinde tanımlı her fonksiyon gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.11. (X,τ), (Y,σ) ve (Z, ϑ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ), g :(Y,σ)$\rightarrow$(Z, ϑ) tanımlı bir fonksiyonlar olsun.

f ve g gδpr-lc-kararsız fonksiyonların birleşimi gof gδpr-lc-kararsız fonksiyondur.

İspat:

f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) ve g :(Y,σ)$\rightarrow$(Z, ϑ) fonksiyonları gδpr-lc-kararsız olsun.

g gδpr-lc-kararsız fonksiyon olduğundan Z uzayındaki her A gδpr-yerel kapalı kümesi için g^{-1}(A) Y uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Ayrıca f gδpr-lc-kararsız fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(A))=(gof)^{-1}(A)$$

X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olur.

Buradan Z uzayındaki her A gδpr-yerel kapalı kümesi için $(gof)^{-1}$(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse gof gδpr-lc-kararsız fonksiyondur.

Teorem 4.12. (X,τ), (Y,σ) ve (Z, ϑ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ), g :(Y,σ)$\rightarrow$(Z, ϑ) tanımlı bir fonksiyonlar olsun.

g sürekli ve f gδpr-lc-sürekli fonksiyon ise gof gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

f :(X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) fonksiyonları gδpr-lc-sürekli ve g :(Y,σ) $\rightarrow$ (Z, ϑ) sürekli fonksiyonlar olsun.

g sürekli fonksiyon olduğundan her A∈ ϑ için g^{-1}(A)∈σ dir. Ayrıca f gδpr-lc-sürekli fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}(g^{-1}(A)) = (gof)^{-1}(A)$$

X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Buradan her A∈ ϑ için $(gof)^{-1}$(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse gof gδpr-lc-sürekli fonksiyondur.

Tanım 4.13. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Her A∈ β için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde (Y,σ) uzayının β tabanı varsa f fonksiyonuna sub-gδpr-lc- sürekli fonksiyon denir.

Teorem 4.14. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ) $\rightarrow$ (Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu sub-gδpr-lc sürekli fonksiyon ise (Y,σ) uzayında her A∈ρ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alttabanı vardır.

İspat:

f :**(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) sub-gδpr-lc sürekli fonksiyon olsun.

f sub-gδpr-lc sürekli fonksiyon olduğundan her A∈β için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde (Y,σ) uzayının β tabanı vardır. β tabanı aynı zamanda alttaban olduğundan her A∈ β alttabanı için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Teorem 4.15. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

(Y,σ) uzayında her A∈ρ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alttabanı varsa f sub-gδprlc sürekli fonksiyondur.

İspat:

ρ alttabanının altkümesi olmak üzere {A$\subset$Y: A, ρ ye ait kümelerin sonlu sayıdaki kesişimi} olsun.

Bu aile (Y,σ) uzayının tabanıdır. I sonlu küme olmak üzere

$$A=\bigcap\{F_i : F_i \in \rho,\ i\in I\}$$

için Teorem 3.16. den

$$f^{-1}(A)=\bigcap\{f^{-1}(F_i) : F_i \in \rho, i\in I\}$$

X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Öyleyse f fonksiyonu sub-gδpr-lc sürekli fonksiyondur.

Sonuç 4.16. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

f fonksiyonu sub-gδpr- lc sürekli fonksiyon ancak ve ancak (Y,σ) uzayında her $A\in\rho$ için $f^{-1}(A)$ X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alttabanı vardır.

Teorem 4.17. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

f fonksiyonu sub-GLC* sürekli fonksiyon ise f fonksiyonu sub-gδpr-lc sürekli fonksiyondur.

İspat:

Teorem 2.29. (i) den (Y,σ) uzayında ρ alttabanı vardır öyleki her $A\in\rho$ için $f^{-1}(A)\in GLC^*(X,\tau)$ dur. Teorem 3.8. dan $f^{-1}(A)$ X uzayında gδpr-yerel kapalı kümedir.

Sonuç 4.16 den f fonksiyonu sub-gδpr- lc sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.18. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

f fonksiyonu sub-LC sürekli fonksiyon ise f fonksiyonu sub-gδpr-lc sürekli fonksiyondur.

İspat:

Teorem 2.29. (ii) den f fonksiyonu sub-GLC* sürekli fonksiyondur. Teorem 4.15. dan f fonksiyonu sub-gδpr- lc sürekli fonksiyondur.

Teorem 4.19. (X,τ), (Y , σ), (X',τ') ve (Y',σ') topolojik uzaylar ve f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) ,g:$(X',\tau')\rightarrow(Y',\sigma')$ tanımlı fonksiyonlar olsun. gδpr-açık kümelerin çarpımlarıda gδpr-açık olsun.

f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) ve g:$(X',\tau')\rightarrow(Y',\sigma')$ fonksiyonları sub-gδpr-lc sürekli fonksiyonlar ise $f\times$g:(X$\times X'$, $\tau\times\tau'$)$\rightarrow$(Y $\times$ Y', $\sigma\times\sigma'$) fonksiyonu sub-gδpr-lc- sürekli fonksiyondur.

İspat:

f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) ve g:$(X',\tau')\rightarrow(Y',\sigma')$ fonksiyonları sub-gδpr-lc sürekli fonksiyonlar olsun.

f ve g fonksiyonları sub-gδpr-lc sürekli fonksiyonlar olduğundan her A$\in\beta$ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde (Y , σ) uzayı için β tabanı

ve

her B$\in\beta'$ için g^{-1}(B) X' uzayında gδpr-yerel kapalı küme olacak biçimde (Y',σ') uzayı için β' tabanı vardır.

Buradan

$$\beta''=\{A\times B: A\in\beta, B\in\beta'\}$$

(Y$\times Y''$, $\sigma\times\sigma''$) uzayını üretir.

Her A×B∈ β'' için

$$(f\times g)^{-1}(A\times B)= f^{-1}(A)\times g^{-1}(B)$$

Teorem 3.23. ten X× X' uzayında gδpr-yerel kapalı küme olur.

Buradan $f\times g$fonksiyonu sub-gδpr- lc sürekli fonksiyondur.

BÖLÜM 5

TOPOLOJİK UZAYLARDA

gδpr*- YEREL KAPALI

KÜMELER AİLESİ

Tanım 5.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A=B∩C olacak biçimde B gδpr-açık ve C δ-kapalı kümeleri varsa A kümesine gδpr*-yerel kapalı küme denir.

Teorem 5.2. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

Her δ-kapalı küme gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

$A \subset X$ δ-kapalı bir küme olsun. Bu durumda

$$A=A\cap X$$

ve X gδpr-açık olduğundan A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Uyarı 5.3. Bir topolojik uzayda gδpr* yerel kapalı kümeler δ- kapalı küme olmak zorunda değildir.

Örnek 5.4. X={a,b,c,d} τ={X,∅,{a},{c},{a,b},{a,c},{a,b,c},{a,c,d}} olmak üzere A={a,b,c} kümesini alalım.

A kümesi gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Ancak A kümesi δ- kapalı küme değildir.

Teorem 5.5. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

Her gδpr*-yerel kapalı küme gδpr yerel kapalıdır.

İspat:

$A \subset X$ olmak üzere A gδpr*-yerel kapalı küme olsun.

Buradan

$$A=B\cap C$$

olacak biçimde B gδpr-açık ve C δ-kapalı kümeleri vardır. Ayrıca C δ-kapalı olduğunda aynı zamanda kapalı kümedir.

Öyleyse A gδpr yerel kapalı kümedir.

Teorem 5.6 (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

Her gδpr-açık küme gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

$A \subset X$ kümesi gδpr açık küme olsun. Bu durumda

$$A=A\cap X$$

ve X δ-kapalı olduğundan A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Tanım 5.7. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Herbir A$\in$ σ için f^{-1}(A) X uzayında gδpr*-yerel kapalı oluyorsa f fonksiyonuna gδpr*-lc-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 5.8 (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

Her gδpr* -lc-sürekli fonksiyon aynı zamanda gδpr -lc-sürekli fonksiyondur.

İspat:

f gδpr* -lc- sürekli fonksiyon ise her $A\in\sigma$ için $f^{-1}(A)$ X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur. Teorem 5.5 den $f^{-1}(A)$ gδpr-yerel kapalı olur.

Yani her $A\in\sigma$ için $f^{-1}(A)$ X uzayında gδpr-yerel kapalı küme olur.

Öyleyse f gδpr -lc- sürekli fonksiyondur.

BÖLÜM 6

TOPOLOJİK UZAYLARDA

gδpr*- YEREL KAPALI KÜMELER

VE

gδpr*- lc-SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Teorem 6.1. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

A gδpr*-yerel kapalı kümedir gerek ve yeter koşul $A=B\cap \delta$-cl(A) olacak biçimde B, gδpr-açık kümesi vardır.

İspat:

($\Rightarrow$:) A gδpr*-yerel kapalı küme olsun. $A=B\cap C$ olacak biçimde B gδpr-açık kümesi ve C, δ-kapalı kümesi vardır.

Buradan $A\subset B$ ve $A\subset \delta$-cl(A) olduğundan $A\subset B\cap \delta$-cl(A) dır.

Tersine $A\subset C$ ve C δ-kapalı küme olduğundan

$$\delta\text{-cl}(A) \subset \delta\text{-cl}(C)=C$$

dir.

Öyleyse δ-cl(A)$\subset$Cdir. Buradan

$$A=B\cap C\supset B\cap \delta\text{-cl}(A)$$

dır.

Yani $A\supset B\cap \delta$-cl(A) dır.

Öyleyse A=B∩δ-cl(A) olduğu bulunur.

(⇐:) B gδpr-açık ve δ-cl(A) δ kapalı olduğundan A=B ∩δ-cl(A) gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Teorem 6.2. **(**X,τ) topolojik uzay ve A,B⊂X olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

A ve B kümeleri gδpr*-yerel kapalı kümeler ise A∩B kümesi gδpr*- yerel kapalı kümedir.

İspat:

A ve B gδpr*-yerel kapalı kümeler olduğundan Teorem 6.1. gereğince

$$A=C\cap\delta\text{-cl}(A)$$

olacak biçimde C, gδpr-açık kümesi ve

$$B=D\cap\delta\text{-cl}(B)$$

olacak biçimde D, gδpr-açık kümesi vardır.

C ∩D gδpr- açık ve

$$\delta\text{-cl}(A)\cap\delta\text{-cl}(B)$$

δ-kapalı olduğundan A ∩B gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Teorem 6.3. **(**X,τ) bir topolojik uzay ve A⊂X olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr*-yerel kapalı küme ise δ-cl(A) \A gδpr-kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ gδpr*-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr*-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.1. gereğince

$$A = B \cap \delta\text{-cl}(A)$$

olacak şekilde B gδpr-açık kümesi vardır.

$$\delta\text{-cl}(A) \setminus A = \delta\text{-cl}(A) \cap (X \setminus B)$$

olur.

δ-cl(A) δ-kapalı olduğundan gδpr-kapalı küme ve B gδpr-açık küme olduğundan X\B gδpr-kapalı kümedir.

Öyleyse δ-cl(A)\A gδpr-kapalı kümedir.

Teorem 6.4. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

δ-cl(A) \A gδpr-kapalı küme ise A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere δ-cl(A) \A gδpr-kapalı küme olsun.

$$B = X \setminus (\delta\text{-cl}(A) \setminus A)$$

olsun. δ-cl(A) \ A gδpr- kapalı olduğundan B kümesi gδpr-açık kümedir ve

$$A = B \cap \delta\text{-cl}(A)$$

dır.

Buradan Teorem 6.1. gereğince A gδpr-yerel kapalı kümedir.

Sonuç 6.5. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr*-yerel kapalı kümedir ancak ve ancak δ-cl(A) \A gδpr-kapalı kümedir.

Teorem 6.6. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr*-yerel kapalı küme ise $A \cup (X \setminus \delta\text{-cl}(A))$ gδpr-açıktır.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A \subset X$ gδpr*-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr*-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.3. gereğince
δ-cl(A) \A gδpr kapalı kümedir.
Ayrıca G= δ-cl(A) \A diyelim.
Bu durumda δ-cl(A) \A gδpr- kapalı olduğundan

$$X \setminus G = A \cup (X \setminus \delta\text{-cl}(A))$$

gδpr-açık kümedir.

Teorem 6.7. (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$A \cup (X \setminus \delta\text{-cl}(A))$ gδpr-açık ise A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

$$G = A \cup (X \setminus \delta\text{-cl}(A))$$

diyelim.

G gδpr-açık küme olduğundan X \G gδpr-kapalı kümedir ve

$$X \setminus G = \delta\text{-cl}(A) \setminus A$$

olduğundan δ - cl(A) \A gδpr-kapalıdır.

Buradan Teorem 5.6. gereğince A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Sonuç 6.8. **(**X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

A gδpr*-yerel kapalı kümedir gerek ve yeter şart $A \cup (X \setminus \delta\text{-cl}(A))$ gδpr-açıktır.

Teorem 6.9. **(**X,τ) topolojik uzay $A \subset X$, $Z \subset X$ ve $A \subset Z$ olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun. Z düzenli açık olsun.

Z, **(**X,τ) topolik uzayında g-açık ve A, **(**Z,τ|Z) topolojik uzayında gδpr*-yerel kapalı küme ise A, **(**X,τ) topojik uzayında gδpr*- yerel kapalı kümedir.

İspat:

A, **(**Z,τ|Z) topolojik uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.1. gereğince $A = G \cap \delta\text{-cl}_Z(A)$ olacak biçimde G gδpr-açığı vardır.

Ayrıca

$$\delta\text{-cl}_Z(A) = Z \cap \delta\text{-cl}(A)$$

idi.

G, **(**Z,τ|Z) topolojik uzayında gδpr-açık olduğundan G, **(**X,τ) topolojik uzayında gδpr-açıktır.

Buradan Z∩G gδpr-açıktır.

$$A=(Z\cap G)\cap \delta\text{-cl}(A),$$

(X,τ) topolojik uzayında gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Tanım 6.10. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

(X,τ) uzayının her δ-yoğun alt kümesi gδpr-açık ise (X,τ) uzayına gδpr*-submaximal uzay denir.

Teorem 6.11. (X,τ) bir topolojik uzay olsun.

(X,τ) uzayı gδpr-submaximal uzay ise X uzayındaki her küme gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

Kabul edelim ki $A\subset X$ ve

$$G=A\cup(X\setminus\delta\text{-cl}(A))$$

olsun.

$$X=\delta\text{-cl}(G)$$

olur.

Öyleyse G δ-yoğun kümedir. G δ-yoğun ve uzay gδpr*-submaximal olduğundan G gδpr-açıktır.

Öyleyse A gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Buradan X uzayındaki her küme gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Teorem 6.12. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

X uzayındaki her küme gδpr*-yerel kapalı kümedir ise (X,τ) uzayı gδpr*-submaximal uzaydır.

İspat:

A, (X,τ) uzayında δ-yoğun küme olsun. Yani δ-cl(A)=X olsun. Buradan

$$A=A\cup(X\backslash\delta\text{-cl}(A))$$

dir.

A, gδpr*- yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.6 gereğince A gδpr açık kümedir.

Öyleyse (X,τ) topolojik uzayı gδpr*-submaximal uzaydır.

Sonuç 6.13. (X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere gδpr-kapalı kümelerin sonlu arakesiti gδpr-kapalı olsun.

(X,τ) uzayı gδpr*-submaximal uzay gerek ve yeter koşul X uzayındaki her küme gδpr*-yerel kapalı kümedir.

Teorem 6.14. (X,τ) ve (Y,σ) iki topolojik uzay olsun. gδpr-açık kümelerin çarpımlarıda gδpr-açık olsun.

$A\subset X$ ve $B\subset X$ olmak üzere A, (X,τ) topolojik uzayında gδpr*- yerel kapalı küme ve B, (Y,σ) topolojik uzayında gδpr*- yerel kapalı küme ise $A\times B$ kümesi $(X\times Y,\tau\times\sigma)$ uzayında gδpr*-yerel kapalı kümedir.

İspat:

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $A\subset X$ gδpr*-yerel kapalı küme ve $B\subset Y$ gδpr*-yerel kapalı küme olsun.

A, gδpr*-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.1. gereğince

$$A=U\cap\delta\text{-cl}(A)$$

olacak biçimde (X,τ) uzayında U, gδpr-açık kümesi var ve B, gδpr*-yerel kapalı küme olduğundan Teorem 6.1. gereğince B=V∩δ-cl(B) olacak biçimde (Y,σ) uzayında V, gδpr-açık kümesi vardır.

$$A\times B = (U\cap \delta\text{-cl}(A))\times(V\cap \delta\text{-cl}(B))$$

$$=(U\times V)\cap(\delta\text{-cl}(A)\times \delta\text{-cl}(B))$$

$$= (U\times V)\cap(\delta\text{-cl}(A\times B))$$

dir.

U×V gδpr-açık küme olduğundan A×B gδpr*- yerel kapalı kümedir.

Tanım 6.15. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Y uzayındaki herbir G gδpr*-yerel kapalı kümesi için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı oluyorsa f fonksiyonuna gδpr*-lc- kararsız fonksiyon denir.

Teorem 6.16. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f gδpr*-lc- kararsız fonksiyon ise gδpr*-lc- sürekli fonksiyon fonksiyondur.

İspat:

Herbir G∈ σ için G gδpr*-yerel kapalı kümedir ve f gδpr*-lc- kararsız fonksiyon olduğundan f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Buradan her V∈ σ için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Öyleyse gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.17. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f sürekli fonksiyon ise gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

İspat:

Kabul edelimki f sürekli fonksiyon olsun. Buradan f sürekli fonksiyon olduğundan her G∈ σ için f^{-1}(G)∈ τ dur.

Buradan herbir G∈ σ için Uyarı 2.21 den f^{-1}(G) gδpr*-yerel kapalı olur.

Öyleyse f gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

Tanım 6.18. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

Her G∈β için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olacak biçimde (Y,σ) uzayının β tabanı varsa f fonksiyonuna sub-gδpr*-lc- sürekli fonksiyon denir.

Teorem 6.19. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olsun.

f fonksiyonu sub-gδpr*-lc- sürekli fonksiyon ise (Y,σ) uzayında her G∈ρ için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alttabanı vardır.

İspat:

Her G∈β için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olacak biçimde (Y,σ) uzayının β tabanı vardır. β tabanı aynı zamanda alttaban olduğundan her G∈ β alttabanı için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Teorem 6.20. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ)→(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

(Y,σ) uzayında her G∈ρ için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alttabanı varsa f sub-gδpr*- lc- sürekli fonksiyondur.

İspat:

ρ alt tabanını alalım. {A⊂Y: A, ρ ye ait kümelerin sonlu sayıdaki kesişimi} olmak üzere bu aile taban oluşturur. (Y,σ) uzayının tabanıdır. I sonlu küme olmak üzere

$$G=\bigcap\{S_i : S_i \in \rho,\ i\in I\}$$

olmak üzere Teorem 6.2 den

$$f^{-1}(G)=\bigcap\{f^{-1}(S_i) : S_i \in \rho,\ i\in I\}$$

X uzayında gδpr*-yerel kapalıdır.

Öyleyse f fonksiyonu sub-gδpr*-lc sürekli fonksiyondur.

Sonuç 6.21. (X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzaylar ve f :**(**X,τ)→(Y,σ) tanımlı bir fonksiyon olmak üzere gδpr-açık kümelerin sonlu arakesiti gδpr-açık olsun.

f fonksiyonu sub-gδpr*-lc sürekli fonksiyon ancak ve ancak (Y,σ) uzayında her G∈ρ için f^{-1}(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olacak biçimde bir ρ alt tabanı vardır.

Teorem 6.22. (X,τ), (Y,σ) ve (Z,ϑ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ), g :(Y,σ)$\rightarrow$(Z,ϑ) tanımlı fonksiyonlar olsun.

f ve g gδpr*-lc- kararsız fonksiyonların birleşimi gof gδpr*-lc-kararsız fonksiyondur.

İspat:

g gδpr*-lc- kararsız fonksiyon olduğundan Z uzayındaki her G gδpr*-yerel kapalı kümesi için g^{-1}(G) Y uzayında gδpr*-yerel kapalıdır.

Ayrıca f gδpr*-lc- kararsız fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}$(G)) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Buradan her Z uzayındaki her G gδpr*-yerel kapalı kümesi için

$$f^{-1}(g^{-1}(G))=(gof)^{-1}(G)$$

X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Öyleyse gof gδpr*-lc- kararsız fonksiyondur.

Teorem 6.23. (X,τ), (Y,σ) ve (Z,ϑ) topolojik uzaylar ve f :(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ), g :(Y,σ)$\rightarrow$(Z,ϑ) tanımlı fonksiyonlar olsun.

g sürekli ve f gδpr*-lc- sürekli fonksiyon ise gof gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

İspat:

g sürekli fonksiyon olduğundan her G$\in \vartheta$ için g^{-1}(G)$\in$σ dir.

Ayrıca f gδpr*-lc- sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}$(G)) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Buradan her G$\in \vartheta$ için $(gof)^{-1}$(G) X uzayında gδpr*-yerel kapalı olur.

Öyleyse gof gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

Teorem 6.24. (X,τ), (Y , σ), (X',τ') ve (Y',σ') topolojik uzaylar ve f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) , $h:(X',\tau')\rightarrow(Y',\sigma')$ tanımlı fonksiyonlar olsun. gδpr-açık kümelerin çarpımlarıda gδpr-açık olsun.

f:(X,τ)$\rightarrow$(Y,σ) ve $h:(X',\tau')\rightarrow(Y',\sigma')$ fonksiyonları sub-gδpr*-lc-sürekli fonksiyonlar ise $f\times h:(X\times X',\tau\times\tau')\rightarrow(Y\times Y',\sigma\times\sigma')$ fonksiyonu sub-gδpr*-lc- sürekli fonksiyondur.

İspat:

f ve g fonksiyonları sub-gδpr*- lc- sürekli fonksiyonlar olduğundan (Y, σ) uzayı için β tabanı ve (Y',σ') uzayı için β' tabanı vardır.

$$\beta''=\{U\times V: U\in\beta, V\in\beta'\}$$

$(X\times X',\tau\times\tau')$ uzayını üretir.

Her U×V$\in\beta''$ için

$$(f\times g)^{-1}(U\times V)=f^{-1}(U)\times g^{-1}(V)$$

X uzayında gδpr*-yerel kapalı küme olur.

Buradan $f\times$g fonksiyonu sub-gδpr*- lc- sürekli fonksiyondur.

KAYNAKLAR

Ahmad B. ve Noiri T., 1985. The Inverse Images of Hyperconnected Sets. *Mat. Vesnik*, 37 : 177-181.

N. Bourbaki, *General Topology*, Part I, Addison-Wesley, Reading, Mass,1966.

Balachandran K., Sundaram P. ve Maki H., 1996.Generalızed Locally Closed Sets and GLC-Continuous Functıons *Indıan J. Pure Appl. Math*., 27(3) : 235-244.

Blumberg H., 1922. New Properties of All Real Functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 24 : 113-128.

Cao J., Ganster M., Reilly I., 2002. On Generalized Closed Sets. *Proceedings of the Janos Bolyai Mathematical Society 8th International Topology Conference (Gyula,1998). Topology Appl.* 123 (1) : 37-46.

Ekici E., 2004. (δ-pre, s)-continuous Functions. *Bull. Malay. Math. Sci. Soc.*,27

(2) : 237-251.

Ekici E., 2005. On δ-preopen Sets. *Mathematica*, 47 (70), (2) : 157-164.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-I. *Math. Moravica*, 10 : 9-20.

Ekici E. ve Noiri T., 2006. On a Generalization of Normal, Almost Normal and Mildly Normal Spaces-II. *Filomat*, 20 (2) : 67-80.

El-Deeb S. N., Hasanein I. A., Mashhour A. S. ve Noiri T., 1983. On p-regular Spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 27 (75) : 311-315.

Gnanambal Y., 1997. On Generalized Preregular Closed Sets in Topological Spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 28 (3) : 351-360.

Levine N., 1970. Generalized Closed Sets in Topology. *Rend. Circ. Mat. Palermo*,19 (2): 89-96.

Maki H., Umehara J. ve Noiri T., 1996. Every Topological Space is pre-$T_{1/2}$. *Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math.*, 17 : 33-42.

Mashhour A. S., Abd El –Monsef M. E. ve El-Deeb S. N., 1982. On Precontinuous and Weak Precontinuous Mappings. *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, 53 : 47- 53.

Noiri T., 1998. Almost p-regular Spaces and Some Functions. *Acta Math. Hungar.*, 79 (3) : 207-216.

Palaniappan N. ve Rao K. C., 1993. Regular Generalized Closed Sets. *Kyungpook Math. J.*, 33 (2) : 211-219.

Raychaudhuri S. ve Mukherjee M. N., 1993. On δ-almost Continuity and δ-preopen Sets. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 21 (4) : 357-366.

Reilly I. L. ve Vamanamurthy M. K., 1985. On α-continuity in Topological Spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 45 : 27-32.

Rose D. A., 1984. Weak Continuity and Almost Continuity. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7 (2) : 311-318.

Stone M. H., 1937. Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology. *TAMS*, 41 : 375-381.

Velicko N. V., 1968. H-closed Topological Spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 78 : 103-118.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhammet Mustafa BAHŞI

Doğum Yeri : İzmir

Doğum Tarihi : 31/08/1988

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FALİYETLER

a) Yayınlar-SCI-Diğer

b) Bildiriler-Uluslar arası- Ulusal

c) Katıldığı Projeler

İŞ DENEYİMİ

Çalıştığı kurumlar ve Yıl

Çanakkale Uğur Dershanesi 2009-2010 ve 2010-2011 Öğretim Yılı

İLETİŞİM

E-posta Adresi : mustafa_18mart@hotmail.com