

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÜÇ BOYUTLU ÇERÇEVELERİN DİNAMİK ANALİZİ

İnşaat Mühendisi Caner İNCE

**FBE İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Mekanik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)

İSTANBUL, 2011

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xii
ÖNSÖZ.....	xiii
ÖZET.....	xiv
ABSTRACT.....	xvi
1. GİRİŞ ve ÇALIŞMANIN AMACI	1
2. DEPREMLER ve DEPREM KAYITLARI.....	2
2.1 Atalet Kuvveti	3
2.2 Depremiñ Şiddeti.....	3
2.3 Mağnitüd	3
2.4 Depremiñ Mühendislik Yapıları Üzerindeki Etkileri	3
2.5 Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımında Genel İlkeler	4
3. HAREKET DENKLEMLERİ	6
3.1 Uzay Çerçeveler İçin Hareket Denklemleri	6
3.1.1 Uzay Çerçeveler	6
3.1.2 Üç Boyutlu Çerçeve Elemanı Uç Yerdeğıştirmeleri ve Uç Kuvvetleri.....	6
3.1.3 Sistem Sabitleri.....	7
3.1.4 Koordinat Tanımları ve Koordinat Dönüşümleri	12
3.1.5 Eleman Eksen Takımında Rijitlik Matrisi	15
3.1.6 Sistem Kod Matrisi (KM), Nod Matrisi (NM) ve Eleman Matrisi (EM) Elde Edilişı.....	18
4. HAREKET DENKLEMLERİNİN ZAMAN TANIM ALANINDA ÇÖZÜMÜ...22	
4.1 Girişimli Hareket Denklemlerinin Zaman Tanım Alanında Çözümü	22
4.2 Modal Analiz.....	22
4.3 Açılım Teoremi: Yerdeğıştirmelerin Modal Açılımı	22
4.3.1 Asal Modların Ortogonalılığı ve Zaman Tanım Alanında Modal Analiz	24
4.3.2 Serbest Titreşimlerin Zaman Tanım Alanında İncelenmesinde Modal Analiz	32
5. SPEKTRAL HESAP İLE ÇÖZÜM.....	38

5.1	Deprem Yüğü Etkisi	38
5.2	Deprem Davranış Spektrumlarının Elde Edilişı	39
5.3	Boyutlama (Tasarım) Spektrumu	53
5.4	Spektral Hesap	61
6.	SAYISAL HESAPLAMALAR	62
6.1	Hareket Denklemlerine Toplu Bir Bakış	62
6.2	Deprem Yüğü Altında Düzlem Çerçeve Analizi	64
6.3	Türkiye Kuvvetli Yer Hareketi Kayıtları (1999 Düzce Depremi)	64
7.	DEĞERLENDİRME ve SONUÇ	94
	KAYNAKLAR	96
	EKLER	98
Ek1	Temel Bağıntılar	99
Ek2	Enerji Bağıntıları	110
Ek3	Lagrange Denklemleri	114
Ek4	Sistem Matrislerinin Oluşturulması	117
Ek5	Hareket Denklemlerinin Zaman Tanım Alanında Çözümü	118
Ek 6	Basit Harmonik Salınım	120
Ek7	Zorlanmış Titreşim	123
Ek8	Cevabın Modal Vektörler Cinsinden Ayrıklaştırılması	125
Ek9	Vektor Uzayları	130
Ek10	Lineer Dönüşüm	132
Ek 11	Duhamel İntegrali	135
Ek12	Yapı Dinamiği İçin Temel Bilgiler	138
Ek13	Periyodik Zorlamalar Altında Titreşimler	162
	ÖZGEÇMİŞ	176

SİMGE LİSTESİ

σ	Normal gerilme
G	Kayma modülü
E	Elastisite modülü
E_D	Viskoz sönümde sönümlenen enerji
η	Malzeme iç sönüm katsayısı
U_i	Kirişin potansiyel enerjisi
I	Atalet momenti
A	Eleman kesit alanı
ρ	Eleman birim hacim kütlesi
T	Kinetik enerji
U	Kinetik enerji
R	Sönüm fonksiyonu
R_d	Dinamik büyütme çarpanı
ω	Zorlama frekansı
ω_n	Doğal frekans
c_{cr}	Kritik sönüm
ξ	Sönüm oranı
ξ_{eq}	Eşdeğer viskoz oranı
$[K]$	Rijitlik matrisi
$[C]$	Sönüm matrisi
$[M]$	Kütle matrisi
$\{U\}$	Yerdeğiştirme vektörü
$\{P\}$	Yük vektörü
$[M]_{n \times n}$	Sistem kütle katrisi
$[D]_{n \times n}$	Sistem sönüm matrisi
$[K]_{n \times n}$	Düzlem çerçevenin rijitlik matrisi
$[S]_{n \times n}$	Sistem rijitlik matrisi
$\{P\}_{n \times 1}$	Sistem yük vektörü
$\{\ddot{U}\}_{n \times 1}$	Düğüm noktası ivme vektörü
$\{\dot{U}\}_{n \times 1}$	Düğüm noktası hız vektörü
$\{U\}_{n \times 1}$	Düğüm noktası yerdeğiştirme vektörü

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1	Üç boyutlu çerçeve elemanı pozitif uç serbestlikleri 7
Şekil 3.2	Üç boyutlu çerçeve elemanı pozitif uç kuvvetleri 7
Şekil 3.3	a) Ötelenme serbestlikleri, b) Ötelenme serbestliklerine karşı gelen uç kuvvetler, c) dönme serbestlikleri, d) Dönme serbestliklerine karşı gelen uç momentler. 8
Şekil 3.4	Üç boyutlu bir çerçeve elemanı için yerel koordinatlarda rijitlik matrisi 9
Şekil 3.5	Üç boyutlu bir çerçeve elemanı için yerel koordinatlarda sönüm matrisi 10
Şekil 3.6	Üç boyutlu bir çerçeve elemanı için yerel koordinatlarda kütle matrisi 11
Şekil 3.7	Üç boyutlu bir yapı sistemi elemanlarının ve düğüm noktalarının numaralandırılması 12
Şekil 3.8	Üç boyutlu çerçeve elemanlarından oluşmuş uzay çerçeve sistemi 12
Şekil 3.9	Uzay çerçeve için uç serbestlikleri kodlaması 13
Şekil 3.10	Koordinat tanımları ve koordinat dönüşümleri 13
Şekil 3.11	Eleman kesitinin asal eksen takımının sistem eksen takımına göre konumlanması 14
Şekil 4.1	Çok serbestlik dereceli yay sistem model 27
Şekil 4.2	Çok serbestlik dereceli sistem modeli 32
Şekil 5.1	Dinamik zorlama altında yapı idealleştirilmesi 39
Şekil 5.2	Dinamik zorlama durumunda sistem davranış parametreleri 39
Şekil 5.3	Tek serbestlik dereceli sistem modeli 40
Şekil 5.4	Tek serbestlik dereceli sistemin deprem davranış modeli 40
Şekil 5.5	Kocaeli depremi Bolu istasyonu kaydı maksimum yer ivmesi değeri 42
Şekil 5.6	Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapılar 42
Şekil 5.7	0.2 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı 43
Şekil 5.8	0.5 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı 44
Şekil 5.9	0.7 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı 45
Şekil 5.10	1999 Kocaeli depremi bolu istasyonu kaydından seismosignal programı vasıtasıyla elde edilmiş olan yerdeğiştirme spektrumu 47
Şekil 5.11	Kocaeli depremi Bolu istasyonu kaydının seismosignal programı vasıtasıyla elde edilmiş sözde ivme davranış spektrumu 50
Şekil 5.12	Normalize edilmiş sözde ivme davranış spektrumu (1999-Kocaeli depremi-Bolu istasyonu yer kaydı) 52
Şekil 5.13	Doğrusal elastik davranış varsayımı 52
Şekil 5.14	1987 Whittier ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış kayıtlara ait spektrumlar görülmektedir 54
Şekil 5.15	Los Angeles Obregon Park istasyonunda, 1987 Whittier, 1991 Sierra ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış 8 farklı kayıt için çizilen spektrumlar, ortalama spektrum ve ortalama + 1 standart sapmaya karşılık gelen spektrum 55
Şekil 5.16	1998 Türk deprem yönetmeliğinde önerilen (elastik) spektrum katsayısı eğrisi 56
Şekil 5.17	Yerel zemin sınıfına bağlı spektrum katsayıları 58

Şekil 5.18	Yerel zemin sınıfı 1 için ivme spektrumları	58
Şekil 6.1	Deprem yükü altında düzlem çerçeve.....	64
Şekil 6.2	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivmesi text. dosyasının seismosignal programında okutulması.....	66
Şekil 6.3	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivme	
	değerlerinden yer hız ve yerin yerdeğiştirme değerlerinin elde edilişi.....	67
Şekil 6.4	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivme-hız- yerdeğiştirmesi.....	67
Şekil 6.5	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydı parametreleri	68
Şekil 6.6	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının spektral ivme eğrisi (SeismoSignal)	68
Şekil 6.7	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının spektral yerdeğiştirme eğrisi (SeismoSignal)	69
Şekil 6.8	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin yerdeğiştirme-zaman durumu (SeismoSignal).....	69
Şekil 6.9	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin hız-zaman durumu (SeismoSignal).....	70
Şekil 6.10	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin ivme-zaman durumu (SeismoSignal).....	70
Şekil 6.11	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme grafiği.....	71
Şekil 6.12	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yerdeğiştirme grafiği.....	71
Şekil 6.13	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni hız grafiği	71
Şekil 6.14	Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen yerdeğiştirme-zaman grafiği.....	78
Şekil 6.15	Üç Boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen hız-zaman grafiği.....	78
Şekil 6.16	Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen ivme-zaman grafiği.....	79
Şekil 6.17	Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca SAP2000'den elde edilen yerdeğiştirme-zaman değişiminin SAP2000'den görüntüsü	79
Şekil 6.18	Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm yerdeğiştirmesi değişimi sonuçlarının karşılaştırılması.....	80
Şekil 6.19	Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm hız değişimi sonuçlarının karşılaştırılması	80
Şekil 6.20	Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm ivme değişimi sonuçlarının karşılaştırılması.....	81
Şekil 6.21	SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal modal hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	81
Şekil 6.22	SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	82

Şekil 6.23	SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün spektrum hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	82
Şekil 6.24	SAP2000'den elde edilen 2' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal modal hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	84
Şekil 6.25	SAP2000'den elde edilen 2' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	84
Şekil 6.26	SAP2000'den elde edilen 2' nolu düğümün spektrum hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi.....	85
Şekil 6.27	Planda düzgün geometrili, döşemeli, 3m yüksekliğindeki yapı analizi.....	88
Şekil 6.28	Planda düzgün geometrili, döşemeli, 15m yüksekliğindeki yapı analizi.....	88
Şekil 6.29	Planda düzgün geometrili, döşemeli, 30m yüksekliğindeki yapı analizi.....	89
Şekil 6.30	Planda düzgün geometrili, döşemeli, 45m yüksekliğindeki yapı analizi.....	89
Şekil 6.31	Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 3m yüksekliğindeki yapı analizi.....	91
Şekil 6.32	Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 15m yüksekliğindeki yapı analizi.....	91
Şekil 6.33	Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 30m yüksekliğindeki yapı analizi.....	92
Şekil 6.34	Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 45m yüksekliğindeki yapı analizi.....	92
Şekil Ek1.1	a) Keyfi yayılı yük altında basit kiriş b) Eğilmiş kiriş elemanı c) Kesme kuvveti ve eğilme momenti için pozitif işaret kabulü.....	99
Şekil Ek1.2	(a) ve (b) de özdeş uç yerdeğiştirmeye sahip, fakat tamamen farklı yerdeğiştirme karakteristikleri gösteren kiriş elemanı verilmiştir. c) Birleşme noktasındaki fiziksel olarak kabul edilemez süreksizlik durumu.	101
Şekil Ek1.3	Eğilme elemanı pozitif uç yerdeğiştirmeler.....	101
Şekil Ek1.4	Eğilme elemanı pozitif uç kuvvetleri.....	102
Şekil Ek1.5	Eksenel yük elemanı	104
Şekil Ek1.6	Eksenel yük elemanı için pozitif uç yerdeğiştirmeleri ve uç kuvvetleri.....	105
Şekil Ek1.7	Hooke cismini temsil eden yay modeli.....	107
Şekil Ek1.8	Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu.....	107
Şekil Ek1.9	Kelvin-Voigt Cismi.....	108
Şekil Ek6.1	a) Ağırlığı tutulmuş uzamasız yayın orijinal uzunluğu L dir, b) $k\delta = W$. Statik denge konumu, c) Kendi ağırlığı altında dengede iken cisim keyfi x değeri kadar çekildiğinde çizilen serbest cisim diyagramı	120
Şekil Ek6.2	Sonlu eleman olarak yay.....	121
Şekil Ek7.1	Dinamik zorlama altında sonlu eleman olarak yay.....	123
Şekil Ek8.1	Üç boyutlu vektörün dikedörtgen bileşenleri cinsinden gösterimi.....	125
Şekil Ek8.2	Üç boyutlu vektörün standart ortonormal birim vektörler cinsinden ayrıklaştırılması.....	126
Şekil Ek8.3	n Boyutlu yerdeğiştirme vektörünün ortonormal modal vektörler cinsinden ayrıklaştırılması	128
Şekil Ek11.1	İki değışik itki ve onların etkisiyle oluşan kütle yerdeğiştirmeleri.....	135
Şekil Ek11.2	Herhangi bir kuvvet eğrisinin küçük parçalara ayrılması	136
Şekil Ek12.1	a) Tek serbestlik dereceli sistem yay modeli b) Sisteme etkiyen yük c) sistemin serbest cisim diyagramı	138
Şekil Ek12.2	Elastik yay kuvveti ile yerdeğiştirme arasındaki ilişki a) Doğrusal kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisi b) Doğrusal olmayan kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisi	139
Şekil Ek12.3	a) Çerçeve sistemine etkiyen sönüm kuvveti ve viskoz sönümleyici b) Serbest cisim diyagramı c) Sönüm kuvveti ile yerdeğiştirmenin hızı arasındaki ilişki	140

Şekil Ek12.4	a) Çerçeve sistemine etkiyen yay kuvveti b) Serbest cisim diyagramı c) Elastik olmayan davranış d) Elastik davranış	141
Şekil Ek12.5	a) ü İvmesi ile hareket eden M kütleli cisim, b) m kütleli cisim üzerindeki kuvvetler.....	142
Şekil Ek12.6	Sistem üzerindeki tepki kuvvetleri.....	143
Şekil Ek12.7	a) Dış yük altında idealize edilmiş tek serbestlik dereceli sistem b) Newton'un hareket kanununu temsil eden büyüklükler, c) D'Alembert's prensibi	144
Şekil Ek12.8	Frekans oranı- yük iletimi ilişkisi	147
Şekil Ek12.9	Tek serbestlik dereceli sistem	148
Şekil Ek12.10	Giriş ve sönüm enerjisi	151
Şekil Ek12.11	Bir çevrimde sönümlenen enerji	152
Şekil Ek12.12	Elastik yay kuvveti-yerdeğiştirme ilişkisi ve depolanan enerji	152
Şekil Ek12.13	Direnim kuvvetleri ile yerdeğiştirme arasındaki ilişki.....	153
Şekil Ek12.14	Yapıdaki gerçek sönüm enerjisi.....	155
Şekil Ek12.15	Viskoz sönümde ve hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji.....	157
Şekil Ek12.16	Hız bağımsız sönümlü tek serbestlik dereceli sistem	158
Şekil Ek12.17	Hız bağımsız sönüm ile eşdeğer viskoz sönümün karşılaştırılması.....	160
Şekil Ek13.1	F genlikli ve T periyodlu bir fonksiyon	164
Şekil Ek13.2	Şekil Ek13.1 deki fonksiyon için, Fourier açılımının yalnız (a) ilk, (b) ilk iki, (c) ilk üç, (d) ilk dört terimi kullanılarak elde edilen yakınsaklık	165
Şekil Ek13.3	Gibbs olgusu	165
Şekil Ek13.4	Kısa süreli etkiyen üçgensel yük.....	168
Şekil Ek13.5	Kuvvetin etkidiği süre içinde kütleli geçici, zorlanmış, ve toplam yerdeğiştirmeleri (mm cinsinden).....	169
Şekil Ek13.6	Kütleli yerdeğiştirmesinin zamanla değişimi. (mm cinsinden)	170
Şekil Ek13.7	Darbe ve kütleli etkiyen yük	171
Şekil Ek13.8	Hareketsiz duran bir kütlede (a) ani hız değişimi, (b) ani hız değişiminden sonra görülecek yer değişimi, (c) yer değişiminin integrali.	171
Şekil Ek13.9	Birim itki tepkisi	173

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1	Kod matrisi (KM) 18
Çizelge 3.2	Nod matrisi (NM) 18
Çizelge 3.3	Eleman matrisi (EM)..... 18
Çizelge 5.1	Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapıların deprem yüklemesi altında davranışı 46
Çizelge 5.2	Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapıların deprem yüklemesi altında davranışı 51
Çizelge 5.3	Etkin yer ivmesi katsayısı 56
Çizelge 5.4	Spektrum karakteristik periyotları 57
Çizelge 5.5	Bina önem katsayısı (I) 59
Çizelge 6.1	1999 Düzce depremi Bolu istasyonu kayıtlarına göre yerin farklı doğrultulardaki ivme değerleri 65
Çizelge 6.2	Üç boyutlu çerçeve için MATLAB ile SAP2000 programının bulduğu özdeğerlerin kıyaslanması 76
Çizelge 6.3	İki boyutlu çerçeve için MATLAB ile SAP2000 programının bulduğu özdeğerlerin kıyaslanması 76
Çizelge 6.4	Çeşitli modal sönüm değerlerine karşılık iç sönüm değerleri 77
Çizelge 6.5	Üç boyutlu çerçevenin deprem hesap yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması 83
Çizelge 6.6	İki boyutlu çerçevenin deprem hesap yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması 85
Çizelge 6.7	Uzay çerçeve statik çözüm düğüm kuvvetleri sonuçlarının kıyaslaması 86
Çizelge 6.8	Uzay çerçeve statik çözüm düğüm momentleri sonuçların kıyaslaması 87
Çizelge 6.9	Planda düzenli farklı yapı yüksekliğine sahip kolon-kiriş-döşeme taşıyıcı elemanlı yapı analiz durumları 90
Çizelge 6.10	Planda düzensiz farklı yapı yüksekliğine sahip kolon-kiriş-döşeme taşıyıcı elemanlı yapı analiz durumları 93
Çizelge Ek13.1	Şekil Ek13.4.deki kuvvetin Fourier serisindeki bileşenleri için hesaplanan yerdeğiştirme genlikleri ile faz açıları 168

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi kapsamında iki boyutlu ve üç boyutlu çerçevelerin belirli deprem yükü altında davranışı incelenmiştir. Temel yapı dinamiği bilgileri ve hesap yöntemi verilmiş olup sistem analizleri için MATLAB yazılım programı kullanılarak analiz programı yazılmıştır.

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, benden, hiçbir konuda yardımını esirgemeyen değerli hocam, tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Turgut Kocatürk' e, hayatım boyunca bana daima destek olmuş olan aileme, çalışmamın hazırlanmasında bana yardımcı olan İnş. Yük. Müh. Korhan Deniz Dalgıç' a, bilgisayar programının yazılmasında yardımını esirgemeyen Bilgisayar. Müh. Abbas Memiş' e, görüş alışverişinde bulunduğum Yıldız Teknik Üniversitesi hocalarından Yrd. Doç. Dr. Mesut Şimşek' e, Yrd. Doç. Dr. Nuri Özhendekçi' ye, Dr. Nihat İlhan'a ve İnş. Yük. Müh. Muzaffer Börekçi' ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu çerçevelerin kaydedilmiş yer hareketleri altında dinamik incelemesi yapılacaktır. Bu çalışmada öncelikle iki çözüm yönteminin verdiği sonuçlar araştırılacaktır.

1) Hareket denklemlerinin, sistemin zaman tanım alanında, Newmark yöntemi kullanılarak çözümü.

2) Mod koordinatlarına dönüşümle hareketlerin incelenmesi. Mod koordinatlarına dönüşümle hareketlerin incelenmesinde iki yol takip edilecektir.

2.1. Mod koordinatları dönüşümü ile hareket denklemleri takımı girişimsiz hale getirilir. Girişimsiz durumda birbirinden bağımsız tek serbestlik dereceli modeller gibi hareket eden, sistemin serbestlik sayısı kadar olan N adet mod denklemi ayrı ayrı çözülür. Çözümler yükün basitlik veya karmaşıklık durumuna göre kapalı veya zaman tanım alanında sayısal olarak elde edilir. Elde edilen çözümler daha sonra herhangi bir incelenen t anı için birleştirilip göz önüne alınan andaki cevaplar elde edilir. Hareketlerin mod koordinatlarına dönüşümle hesaplanmasına **mod analizi** denir.

Bilindiği gibi, mod analizi için öncelikle serbest titreşim frekans denklemi kurulur, doğal frekanslar ve bu frekanslara karşı gelen doğal mod şekilleri hesaplanır. Daha sonra mod koordinatlarına dönüşüm yapılır. Modların dikliği özelliği kullanılarak girişimli olan N serbestlik dereceli hareket denklemleri takımı N adet birbirinden bağımsız denkleme dönüştürülür. Bu denklemlerin sonucu elde edilen çözümler birleştirilerek herhangi bir an için cevaplar elde edilir. Eğer yapının doğrusal davranacağı varsayılırsa, fiziksel serbestliklerde oluşacak herhangi bir zamandaki hareket veya bu zaman aralığındaki hareketlerin maksimumu, değişik mod hareketlerinin zamanla değişimi toplanarak, yani süperpozisyon ile saptanabilir. Ancak, mod hareketlerindeki genliklerin büyümesi halinde yapılar geometrik doğrusal davranışlarını sürdüremeyecekleri için toplama hesaplarındaki yanılma payı hızla artarak işlemin değerini düşürür. İşin içine doğrusal olmayan malzeme davranışı da girerse, gerçek davranışların, doğrusallık koşuluna bağlı olarak saptanan mod şekillerini nasıl değiştireceği ya da sönüm modellerinin geçerliliği gibi belirsizlikler ortaya çıkar. Bütün bu sebeplerden dolayı değişik modlardaki kütle yerdeğiştirmelerini büyük bir güvenilirlikle elde edip sonra da bunları anlamlı şekilde toplayarak hareketin genliğini saptamak çok zordur. Biraz da bu nedenle hassas olarak cevabın zamanla değişimini aramaktansa cevapların üst sınırını belirlemek yeterli doğrulukta sonuç verebilir.

2.2. Herhangi bir i sayılı serbestlik yönünde meydana gelebilecek en büyük cevap j sayılı modlarda ($j=1, N$) elde edilecek en büyük cevapların i yönündeki katkılarının toplamı ile elde edilebilir. Bu toplam Mutlak Değerlerin Toplamı, Karelerin Toplamının Karekökü, Karesel Tam Birleştirme yöntemlerinden biri kullanılarak gerçekleştirilebilir. Mutlak değerlerin toplamı yöntemindeki yaklaşım ancak tüm modlardaki en büyük hareketlerin aynı anda ve aynı cebirsel işaretle (+ veya -) ortaya çıkması halinde gerçek cevabı verir. Halbuki genelde bu yaklaşımın gerçekleşmesi imkansız olup bu yöntemin sonuçları aşırı fazla olur ve bu nedenle bu yol uygulamalarda pek tercih edilmez. Dolayısıyla olasılık kuramı kullanılarak geliştirilmiş olan karelerin toplamının karekökü, karesel tam birleştirme yöntemlerinden biri tercih edilir. Her bir mod için zaman tanım alanında çözümle genlik bulma işlemi zor olduğundan her bir mod hareketinin genliği spektrum eğrilerinden elde edilip daha sonra bunların birleştirilmesi ile yapıda oluşabilecek kritik cevaplar elde edilir. Böylesi bir işlem tarzına **spektrum analizi** denir. Bu yöntem çoğu zaman hareket denklemleri için kapalı ya da sayısal çözümler üretmekten daha kolay biçimde yeterince sağlıklı sonuçlar verir. Üstelik deprem veya rüzgar gibi dış etkiler yüzünden oluşacak zorlamaların ayrıntıları önceden

bilinmese de bunların spektrum özellikleri hakkında geçmiş deneyimlerden elde edilmiş veriler olabilir. Bu gibi durumlarda kritik cevaplar spektrum analizi ile hesaplanabilir. Bilindiği gibi dinamik zorlamaların farklı açısal frekanslara sahip TSD yapı modellerinde neden olacağı hareket genliklerinin gösterildiği grafiğe **davranış spektrumu** denir.

Çalışmada;

1. Hareket denklemleri takımının, verilmiş olan bir yer hareketi için zaman tanım alanında çözümü,
2. Mod koordinatları kullanılarak girişimsiz hale getirilen modlara ait tek serbestlik dereceli denklemlerin söz konusu yer hareketi için zaman tanım alanındaki çözümü ve daha sonra birleştirilmeleri,
3. ilgili yer hareketi için oluşturulan spektrum eğrisi kullanılarak girişimsiz haldeki TSD mod denklemlerinin genlik cevaplarının elde edilmesi ve bunların olasılık kuramı kullanılarak geliştirilmiş olan birleştirme yöntemlerinden biri ile birleştirilmesi sonucu cevaplar elde edilecektir.

Daha sonra yukarıda üç farklı yolla elde edilen cevaplar karşılaştırılacak ve elde edilen sonuçlar yorumlanacaktır. Tüm bu işlemler tarafımızdan geliştirmiş olan bilgisayar programları ile yapılmıştır. SAP2000 paket programından elde edilen sonuçlar MATLAB da geliştirilen analiz programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Uzay çerçeve, düzlem çerçeve, zaman tanım alanında analiz, Newmark yöntemi, spektral hesap, mod analizi, düğüm yerdeğiştirmeleri, eleman uç kuvvetleri.

ABSTRACT

It is known that the structural systems should be modelled as three dimensional. In certain cases the number of unknowns of the problem enforces it to be modelled as equivalent two dimensional models. But sometimes it may not be possible to model the structure satisfactorily in two dimensions. In this work three dimensional modelling of frames are used and both time history analysis and spectral analysis techniques have been employed in order to obtain exact solutions of the frames via our own MATLAB program.

In this work, displacements at the nodes of three dimensional frames and member end forces are calculated with the help of the developed computer programme which is based on the energy method related with finite element method. Our results are compared with the results of popular package programme SAP2000 (Structural Analysis Programming) and it is observed that the results are in close agreement. The developed computer programme can solve three dimensional and two dimensional frames.

Keywords: Three dimensional frame (space frame), two dimensional frame (plane frame), time history analysis, Newmark method, spectral analysis, joint displacements, member end forces.

1. GİRİŞ ve ÇALIŞMANIN AMACI

Yapı sistemlerinin hesabında, temelde iki farklı yaklaşım vardır. Birinci yaklaşım da, denge denklemleri, kinematik ve bünve bağıntılarının belirlediği diferansiyel denklem veya denklem takımı, uygun sınır koşullarını sağlamak üzere çözüm yapılır. Bu yaklaşım basit problemlerin çözümünde etkin bir yoldur. Ancak; çubuk sistemler veya karmaşık geometrili yapılar söz konusu olduğunda, problemin çözümü zorlaşacaktır. Bu durumda, olaya, enerji gibi skaler bir büyüklük açısından yaklaşmak çözümü basitleştirir.

Mekanikte; denge denklemleri, uygunluk koşulları ve bünve bağıntıları kullanılarak kuvvet etkisindeki bir elemanın veya sistemin diferansiyel denklemleri sınır koşullarını sağlayacak şekilde çözülür. Diğer bir yaklaşımda diferansiyel denklemlerle uğraşmadan yapıya ait uygun bir enerji fonksiyonunu minimum yaparak çözüme ulaşmaktır. Bu yöntem, bir yandan elemana ait diferansiyel denklemlerin ve sınır koşullarının elde edilmesinde çok yararlı olurken diğer yandan da doğrudan çözümlere ulaşmakta kolaylık sağlar (Aköz, 2005).

Bu tez çalışması kapsamında önce düzlem çerçeve elemanın eleman matrislerinin çıkarılışı ardından da üç boyutlu bir elemanın matrislerinin benzer mantıkla çıkarılışı verilecektir.

Gerek düzlem çerçeve gerekse üç boyutlu çerçeve için, sistem rijitlik, kütle ve sönüm matrisleri enerji yöntemleri ile oluşturulmuştur. Böylesi bir yaklaşımda eleman enerjileri, elemanların birleşim noktalarındaki düğümlerin (nodların) yerdeğıştirmeleri cinsinden yazılmıştır.

Yapıların dinamik davranışının incelenmesinde çeşitli analitik ve sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Eğer yapı sistemi tek serbestlik dereceli bir sistem ise veya çeşitli kabullerle basitleştirilen, çok serbestlik dereceli bir sistem ise el ile çözümü mümkün kılan analitik yöntemler kullanılmaktadır. Ancak, yapı sistemlerinin serbestlik derecelerinin artması gibi durumlarda; sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi sayısal yöntemlerin kullanılması zorunlu hale gelmektedir. Bilgisayar teknolojisindeki hızlı ilerleme çok karmaşık problemlerin sayısal yöntemlerle kısa sürelerde çözümünü olanaklı hale getirmiştir. Yapısal sistemlerin çözümlenmesi konusunda, Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY), kullanılan en etkili yöntemlerden birisidir. Yapısal sistemlerin çözümlenmesi konusunda bu yöntemi kullanan SAP2000 ve ANSYS gibi birçok yazılım programı geliştirilmiştir. Çalışmada kullanılan, sonlu eleman yazılımlarının dayandığı ilkelere bu tezde değinilmektedir.

2. DEPREMLER ve DEPREM KAYITLARI

Çoğu bölgede yapıları dinamik harekete zorlayan en önemli yük etkisi, hiç kuşkusuz depremlerde oluşan yer sarsıntılarıdır. Ancak depremler ve etkilerini sağlıklı bir şekilde mühendislik kalıplarına indirgeyip genelleştirebilmek oldukça zor bir iştir. Elle tutulur, anlamlı bir sonuca varabilmek için mühendisin çok önemli varsayımlar yapması gerekir. Onun için de depremlerde karşılaşılabilecek durumlar her yönden iyi değerlendirilmelidir (Yerlici ve Luş, 2007).

Yerkabuğu içerisinde faylar boyunca biriken enerjinin, kayaçların direncini aşmasıyla aniden boşalarak karmaşık elastik dalgalar şeklinde yayılması sonucu yeryüzünün titreşmesi olayına **deprem** denir. Yerkürenin üst kesiminde oluşan gerilmelerin esas kökeni yer içindeki ısı ve basınçtır. Yer kürenin derin kısımlarına doğru ısı ve basıncın artması sonucu, astenosfer içerisinde oluşan konveksiyonel akımlar (ısı akımları) yerkürenin dış kısmını oluşturan katı ve kırılğan özellikli litosfer parçalarının (levhalar) hareket etmelerine neden olurlar. Bu rejimde levha adı verilen söz konusu parçalar ya birbirlerinden uzaklaşırlar ya da ortak sınırları boyunca zıt yönlerde kayarlar veya birbirleri ile çarpışırlar. Bu karmaşık durum levha tektoniği kavramı ile açıklanmaktadır.

Plaka (levha) tektoniği olarak bilinen bilim dalı, yer kabuğunun birkaç parçadan oluştuğunu, bu plakaların birbirine göre hareket ettiklerini kabul etmekte ve birçok tektonik olayı bu esasa göre açıklamaktadır. Yer kabuğunda artan gerilmeler zayıf olan çizgiler üzerinde veya belirli zayıf bölgelerde yerkabuğunun taşıma gücünü aşarak, ani bir kayma oluşur. Böylece uzun zamanda toplanan şekil değiştirme enerjisi, kayma hareketi ile yer kabuğunun taşıyabileceği seviyeye ani olarak iner. Yer kabuğunda meydana gelen kaymanın, bir dalga hareketi olarak yayılması sonucu oluşan yüzey titreşimleri, deprem olarak algılanır (Polat, 1994).

Deprem sırasında meydana gelen yer hareketi, yerkabuğunda meydana gelmiş gerilme yığılmalarının veya deformasyon enerjisi birikimlerinin jeolojik fay hatlarında meydana gelen ani kaymalarla serbest kalmaları sonucu ortaya çıkan sismik dalgalar tarafından oluşturulur. Yerkabuğunun ve burada depolanmış deformasyon enerjisi boşalmalarının harmonik olması, deprem hareketinin de oldukça karmaşık olmasına sebep olmaktadır.

Depreme dayanıklı yapı tasarımının önemli iki adımından biri yapının taşıyıcı sisteminin iyi düzenlenmesi ve inşaatta kullanılan malzemenin yeterli kalitede olmasıdır. Diğer ise, bu yapıda depremin oluşturacağı kesit zorlarını yeterli yaklaşıklıkla belirleyerek, bunları yapının

karşılmasını sağlamaktır. Deprem etkisi, yapıları alışılmış yüklerin üzerinde zorlayarak, yapının tasarımında ve uygulamasında yapılmış hataları ortaya çıkarır.

2.1 Atalet Kuvveti

Depremde yapılara etkileyen yükler yapının ağırlığı ile orantılı bir atalet yüküdür. Atalet yükü cisimlerin harekete karşı direnci olarak ortaya çıkan bir yüküdür. Sabit bir hızda hareket eden bir aracın fren yapması ile araca hareket yönüne karşı yönde bir kuvvet etkimektedir. Bu sırada araçta bulunanlar ise üzerlerinde aracın hareket yönünde, uygulanan kuvvete karşı yönde, bir kuvvet hissederler. Araçtaki yolcularda oluşan bu kuvvet bir atalet kuvvetidir. Yapılarda da depremde yer yüzeyinde olan hareketin yönüne karşı yönde atalet kuvvetleri oluşur. Atalet yükü zamana bağlı ve hızlı değişen bir yüküdür.

2.2 Depremi Şiddeti

Depremi insanlar, yapılar ve arazideki etkilere göre nesnel olarak yapılmış sınıflandırmadır. I-XII arasında değişir. Şiddet depremin merkezinden uzaklığa bağlı olarak değişen değerleri olan bir kavramdır. Bir depremin hissedildiği her noktadaki şiddeti değişik olabilir. (Bayülke, 2001).

2.3 Mağnitüd

Mağnitüd ise deprem etkilerinin mesafeye göre normalleştirilmiş olarak verildiği mesafeden bağımsız bir kavramdır. Bir depremin Richter ölçeğine göre mağnitüdünün hesaplanması için bir sismograf kaydının bulunması gerekir. Mağnitüd o depremin sismograf kaydının zaman süresinden ya da kaydın en büyük genliğinden hesaplanır. Bu nedenle de depremin aletsel büyüklüğü olarak da tanımlanır. Mağnitüd depremde ortaya çıkan enerjinin bir ölçüsüdür. Depremde ortaya çıkan enerji bir patlamanın enerjisi olarak tanımlanırsa mağnitüd bu patlayıcının kaç ton dinamite eşit olduğunun bir ölçüsüdür. (Bayülke, 2001).

2.4 Depremi Mühendislik Yapıları Üzerindeki Etkileri

Her bir deprem, her bir yapıyı değişik şiddet ve biçimlerde etkiler. Depremi yapı üzerindeki etkisini belirleyen etmenler, çeşitli doğa ve yapı koşullarına bağlı olarak farklı biçimde gelişirler. Bunların karakterini belirleyen koşulların en önemlileri: Depremi merkezdeki büyüklüğü, değişik deprem dalgalarını yapıya ulaştıracak yolların uzunluğu ve jeolojik karakteri, yapı zeminin cinsi, yapıyı mimari düzgünlüğü, birleşim noktalarının dayanıklılığı,

yapı malzemelerinin kalitesi, yapının sünekliği ve yapıyı titreten dalga periyotlarının yapının önemli doğal periyotlarına yakınlığıdır. (Yerlici ve Luş, 2007)

2.5 Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımında Genel İlkeler

Depremler, yapıya, zamana bağlı olarak değişen yüklerin etkimesine neden olurlar. Buna karşılık olarak da, yapıda zamana bağlı olarak değişen iç kuvvetler oluşur. Depreme dayanıklı yapı tasarımında amaç, sözü edilen bu iç kuvvetlerin etkisinde ortaya çıkması olası hasarın sınırlandırılmasıdır. Bu durumda, cevaplanması gereken iki temel soru vardır.

1. Yapıda ortaya çıkması olası hasarın kabul edilebilir sınırı nedir?
2. Bu kabul edilebilir hasar, hangi deprem veya depremlerin etkisinde ortaya çıkacaktır?

Bu iki soruya verilecek cevap depreme dayanıklı yapı tasarımının da temel ilkesini ortaya koyacaktır. Bu temel ilke, 1998’de yürürlüğe giren Afet Bölgelerinde Yapılacak Yapılar Hakkında Yönetmelik (ABYYHY98)’de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir;

“Hafif şiddetteki depremlerde binalardaki yapısal ve yapısal olmayan sistem elemanlarının her hangi bir hasar görmemesi, orta şiddetteki depremlerde yapısal ve yapısal olmayan elemanlardaki hasarın onarılabilir düzeyde olması, şiddetli depremlerde ise can kaybını önlemek amacı ile binaların kısmen veya tamamen göçmesinin önlenmesi”

Yukarıda sözü edilen şiddetli deprem, 50 yılda aşılma olasılığı %10 olan tasarım depremidir. Yani, konut ve işyeri gibi binaların tasarımında kullanılacak olan depremdir. Halkın yoğun olarak bulunduğu sinema, tiyatro, okul, spor tesisleri gibi binalar ile depremden hemen sonra kullanılması gereken binalarda (hastaneler, itfaiye, sağlık ocakları, ulaşım istasyonları, enerji tesisleri gibi) ise bina önem katsayısı kullanılmak suretiyle, söz konusu tasarım depremi büyütülerek kullanılır.

Özet olarak, eğer bir bina, ABYYHY98’de verilmiş koşullara uyularak tasarlanmış ve inşa edilmiş ise ve depremler etkisinde yukarıda açıklanan depreme dayanıklı yapı tasarımının temel ilkesine uygun bir performans gösteriyorsa, tasarım amacına ulaşmış demektir.

Depreme dayanıklı bir yapının, yeterli dayanım (kapasite), yeterli rijitlik ve yeterli sünekliğe sahip olması gerekir. Esasen, depreme dayanıklı yapı tasarımıyla yapılan da, yapıya bu özelliklerin kazandırılmasıdır.

Sonlu Elemanlar yöntemindeki gelişmeler yapı mühendisliğindeki karmaşık problemlerin çözümünü büyük oranda kolaylaştırmış ve daha gerçeğe yakın sonuçlar elde edilebilmesini sağlamıştır. Sonlu Elemanlar Yönteminde genel yaklaşım bir bütünün sonlu elemanlara bölerek, elde edilen sonlu elemanları ayrı ayrı incelenip bu elemanların süperpozisyonu (birleştirilmesiyle) genel sistemin tarif edilmesi üzerine kuruludur.

Sürekli fiziki sistemlerin davranışı kısmi diferansiyel denklem formunda ifade edilebilmektedir. Bilgisayar teknolojisinin de ilerlemesi sayesinde, bu denklemlerin çözümü konusunda en çok kullanılan yöntem Sonlu Elemanlar Yöntemi'dir.

Sonlu Eleman Yöntemi ile sürekli sistemleri matematiksel olarak modellemek mümkün olmaktadır. Yöntemde sürekli bir sistem, kendi içinde sonlu sayıda bileşen veya elemanlardan ve bu elemanları birleştiren düğüm noktalarından oluşan ayrık bir sistem olarak modellenmektedir. Sonlu Elemanlar Yönteminde bu ayrıklaştırma işlemi kısmi diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesidir.

Sistemin maruz kaldığı etkiler altındaki davranışı elde edilmektedir. Yani sonlu elemanlar yönteminde, sürekli fiziksel bir sistemin matematiksel modeli elemanlar ve düğümler üzerinden eşlenik ayrık bir sistem olarak tanımlanmaktadır.

Sonlu Elemanlar Yönteminin, klasik çözüm yöntemlerinden en üstün tarafı her türlü yapı tipinin bu yöntemle modellenip çözümlenebilmesidir. Diğer bir üstün tarafı ise yöntemde doğru sekil fonksiyonlarının seçiminden sonra formülasyonun matris formunda yazılabilesidir. Bu sayede formülasyon ve matrisler belli bir sırayla yazıl arak yapı sistemleri çözülebilmektedir. Bu işlem sırası Rijitlik Matrisi Yöntemi olarak adlandırılmaktadır. Yöntemin matris formunda yazılabilmesi onu programlamaya da elverişli kılmaktadır.

3. HAREKET DENKLEMLERİ

3.1 Uzay Çerçeveler İçin Hareket Denklemleri

3.1.1 Uzay Çerçeveler

Yapılar gerçekte üç boyutludur. Ancak hesap kolaylığı açısından, iki boyutlu olarak modellenip, dış kuvvetler altındaki davranışı incelenebilir.

İki boyutlu modellemelerde elde edilen sonuçlar düzgün geometrili yapılar için, mühendislik amaçları çerçevesinde yeterli sonuçlar verir. Ancak, özel yapıların statik ve dinamik kuvvetler altında gerçeğe en yakın davranışları üç boyutlu modellemeler altında elde edilir. Tez çalışmasında önce iki boyutlu ve sonra üç boyutlu bir yapı elemanının geometrik tanımı yapılmış sonra çubuk eksenlerinde rijitlik matrisi, kütle matrisi ve sönüm matrisleri elde edilmiştir. Çubuk eksenlerinde (yerel-lokal koordinatlar) elde edilen matrisler kullanılarak sistem eksenlerinde (global koordinatlara) dönüştürülmüştür.

Bilgisayar programlaması tekniği açısından hesaplama sırası ve sistematığı için ele alınan iki ve üç boyutlu yapı sistemlerine ait (NM) nod matrisi, (EM) eleman matrisi, (k) yerel koordinatlarda eleman rijitlik matrisi, (K) global koordinatlarda eleman rijitlik matrisi, (m) yerel koordinatlarda eleman rijitlik matrisi, (M) global koordinatlar eleman kütle matrisleri oluşturulmuştur.

3.1.2 Üç Boyutlu Çerçeve Elemanı Uç Yerdeğiştirmeleri ve Uç Kuvvetleri

Üç boyutlu çerçeve elemanları başlangıç ucu i ve bitiş ucu j olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir. Her üç ekseninde de (x, y ve z) üç ötelenme ve yine aynı üç eksen etrafında üç dönme serbestliğine sahip olup her bir uçta altı serbestliğe sahiptir. Üç boyutlu çerçeve elemanları, iki düzlemde eğilme özelliği gösteren, aksenal yük taşıma özelliği olan ve burulma etkilerine maruz kalabilen eleman özelliklerini bünyesinde barındıran elmandır.

Şekil 3.1' de Üç boyutlu çerçeve elemanı ve bu elemanın pozitif serbestlik dereceleri gösterilmiştir. Şekil 3.2' de bu serbestlik derecelerine karşı gelen pozitif uç kuvvetleri gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Üç boyutlu çerçeve elemanı pozitif uç serbestlikleri



Şekil 3.2 Üç boyutlu çerçeve elemanı pozitif uç kuvvetleri

Burada temel prensip düzlem çerçeve elemanında olduğu gibi sürekli alan değişkeninin düğüm noktalarında hesap edilen sonlu sayıdaki değerler cinsinden ifade edilmesidir. Yani elemanın herhangi bir noktasının yerdeğiştirmesi uç noktalarındaki yerdeğiştirmeler cinsinden ifade edilir.

3.1.3 Sistem Sabitleri

Eleman malzemesinin elastisite modülü, $E = 2482112.8 \text{ N/cm}^2$

Eleman uzunlukları, $L = 500 \text{ cm}$

Eleman malzemesinin kayma modülü, $G = 1034213.7 \text{ N/cm}^2$

Eleman kesit genişliği, $b = 20 \text{ cm}$

Eleman kesit yüksekliği, $h = 20 \text{ cm}$

Eleman kesit alanı, $A = (b \cdot h) \text{ cm}^2$

Kesit polar atalet momenti, $J = 0.140833331 \cdot b \cdot (h^3) \text{ cm}^4$, (Kocatürk, 2008)

Kesit burulma rijitliği, GJ

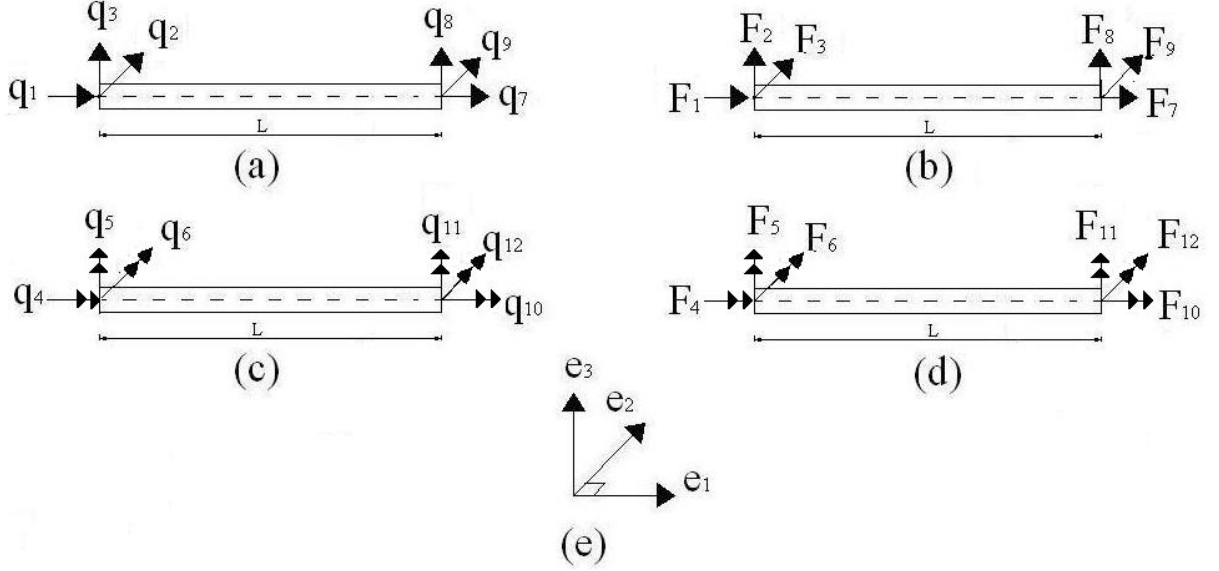
Kesit z eksenine etrafındaki atalet momenti, $I_z = (b \cdot (h^3))/12 \text{ cm}^4$

Kesit y eksenini etrafındaki atalet momenti, $I_y = ((b^3)*h)/12 \text{ cm}^4$

Sistemdeki çubuk sayısı = 8

Yapı malzemesi birim hacminin kütlesi, $R_o = (2.548.10^{-5} \text{ Nsn}^2/\text{cm}/\text{cm}^3)$

Yapı elamanı birim uzunluğu kütlesi, $m_- = (R_o*A) \text{ Nsn}^2/\text{cm}/\text{cm}$



Şekil 3.3 a) Ötelenme serbestlikleri, b) Ötelenme serbestliklerine karşı gelen uç kuvvetler, c) dönme serbestlikleri, d) Dönme serbestliklerine karşı gelen uç momentler

Düzlem çerçeve elemanı için yazılan (Ek2) enerji ifadeleri benzer şekilde üç boyutlu çerçeve elemanı için de düzlem çerçeve elemanına ilave olarak burulma ve diğer düzlemdeki eğilme etkileri dikkate alınarak uygulandığında, eleman rijitlik ifadesi, sönüm ifadeleri ve kütle matrisi ifadeleri aşağıdaki gibi oluşur.

$$\begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \\ F7 \\ F8 \\ F9 \\ F10 \\ F11 \\ F12 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \\ q6 \\ q7 \\ q8 \\ q9 \\ q10 \\ q11 \\ q12 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Şekil 3.4 Üç boyutlu bir çerçeve elamanı için yerel koordinatlarda rijitlik matrisi

$$\begin{Bmatrix} \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_1} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_2} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_3} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_4} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_5} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_6} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_7} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_8} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_9} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_{10}} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_{11}} \\ \frac{\mathcal{R}}{\partial q'_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{F1} \\ \text{F2} \\ \text{F3} \\ \text{F4} \\ \text{F5} \\ \text{F6} \\ \text{F7} \\ \text{F8} \\ \text{F9} \\ \text{F10} \\ \text{F11} \\ \text{F12} \end{Bmatrix} = \eta \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{JG}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \\ q^5 \\ q^6 \\ q^7 \\ q^8 \\ q^9 \\ q^{10} \\ q^{11} \\ q^{12} \end{Bmatrix}$$

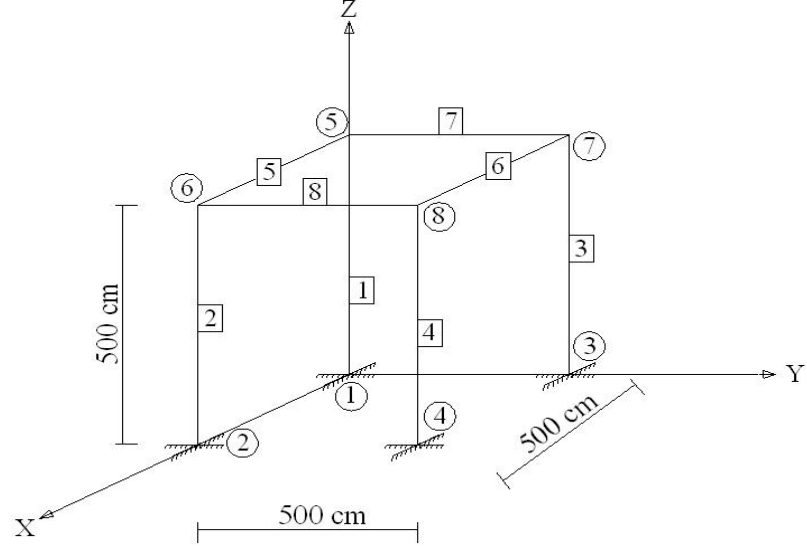
Şekil 3.5 Üç boyutlu bir çerçeve elamanı için yerel koordinatlarda sönüm matrisi

$$\begin{Bmatrix} F1 \\ F2 \\ F3 \\ F4 \\ F5 \\ F6 \\ F7 \\ F8 \\ F9 \\ F10 \\ F11 \\ F12 \end{Bmatrix} = m \cdot L / 420 \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\ 0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 140J/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70J/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70J/A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140J/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q1'' \\ q2'' \\ q3'' \\ q4'' \\ q5'' \\ q6'' \\ q7'' \\ q8'' \\ q9'' \\ q10'' \\ q11'' \\ q12'' \end{Bmatrix}$$

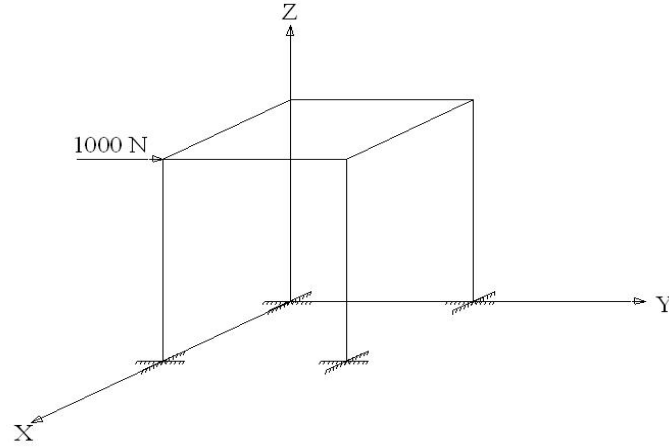
Şekil 3.6 Üç boyutlu bir çerçeve elemanı için yerel koordinatlarda kütle matrisi

3.1.4 Koordinat Tanımları ve Koordinat Dönüşümleri

Üç boyutlu yapı değişik doğrultulardaki yapı elemanlarının düğüm noktalarında birbirleriyle birleştirilmesinden oluşur. Düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme (dönme, ötelenme) ve kuvvet (moment) vektörleri X-Y-Z genel (global) dikdörtgen takımında tanımlanır.

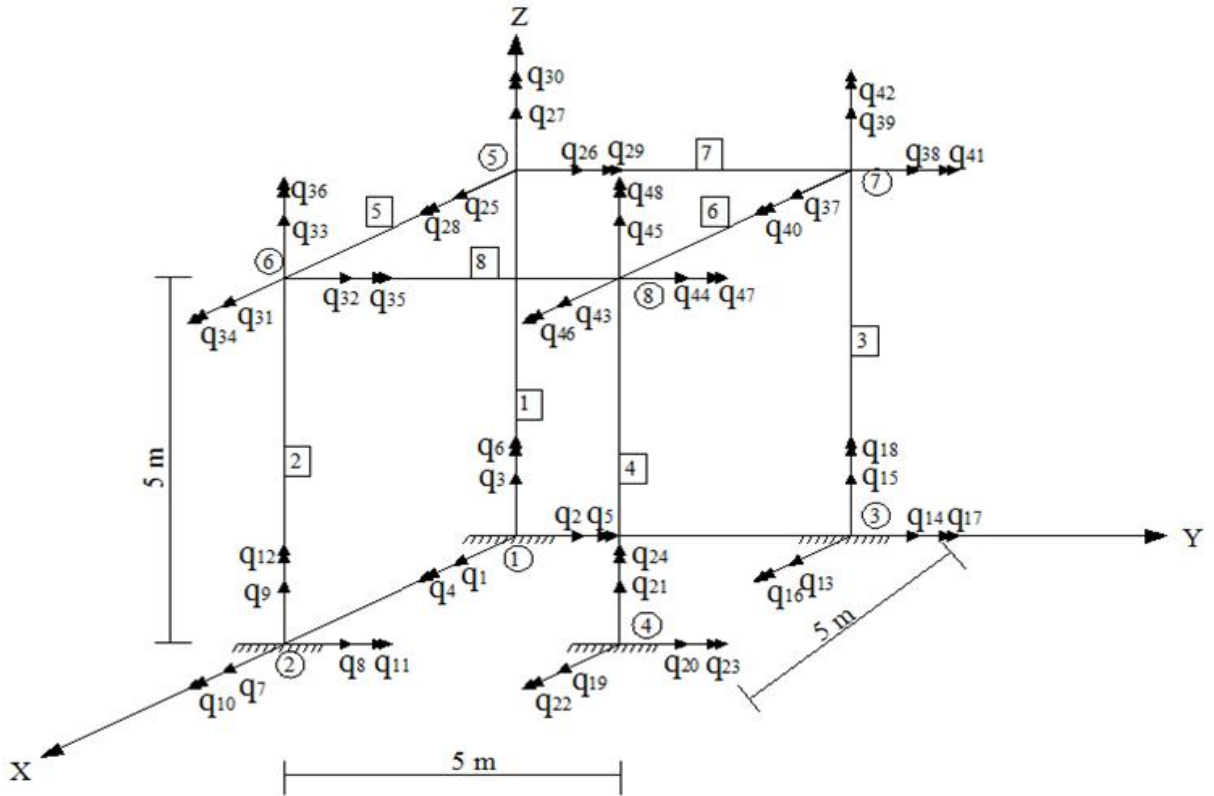


Şekil 3.7 Üç boyutlu bir yapı sistemi elemanlarının ve düğüm noktalarının numaralandırılması

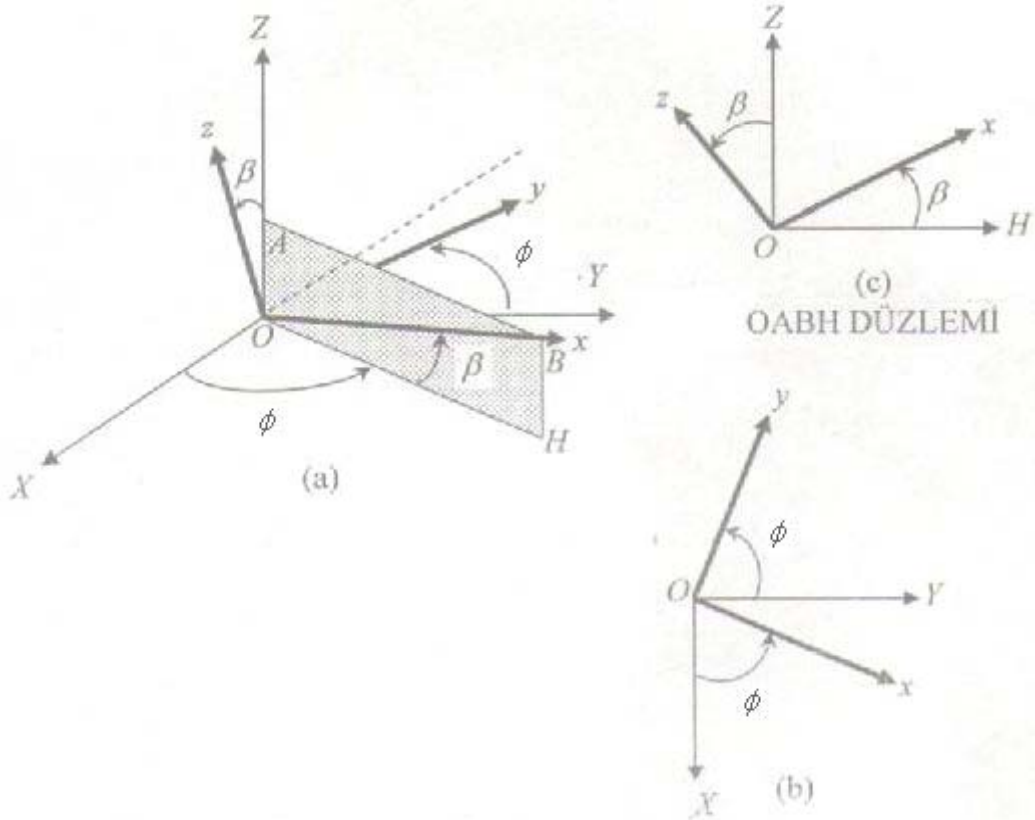


Şekil 3.8 Üç boyutlu çerçeve elemanlarından oluşmuş uzay çerçeve sistemi

Üç boyutlu çerçeve için uç serbestliklerin numaralandırılması Şekil 3.9’ da gösterilmiştir.



Şekil 3.9 Uzay çerçeve için uç serbestlikleri kodlaması



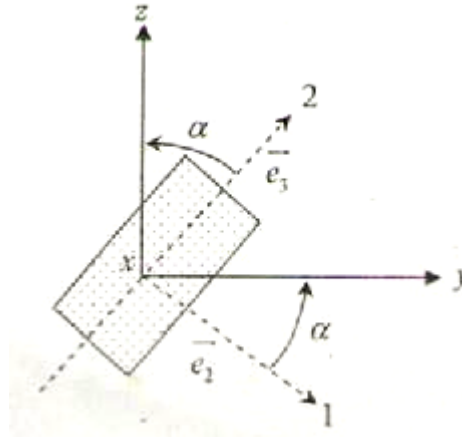
Şekil 3.10 Koordinat tanımları ve koordinat dönüşümleri

Bir OB çubuğunun bir OHBA düşey düzlemi içinde olduğu kabul edilebilir. Bu çubuğun eksenini ile çakışan eksen x eksenini olarak tanımlansın. Çubuğun doğrultusu OHBA düşey düzleminin XOZ düzlemi ile yaptığı ϕ açısı ve çubuğun ekseninin XOY yatay düzlemi ile yaptığı β açısı ile tanımlanır. Çubuğun içinde bulunduğu OHBA düşey düzlemi içinde kalmak üzere x eksenine dik olan eksen z eksenini olarak alınsın, Şekil 3.10c. xz Düzlemine dik ve bu eksenlerle sağ üçlü sistem oluşturacak şekilde yönelmiş eksen de y olsun, Şekil 3.10b. y ekseninin XOY yatay düzlemi içinde kaldığına dikkat etmek gerekir, Şekil 3.10b.

Koordinat takımlarının birim vektörleri $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ ve $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ile gösterilsin. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birim vektörleri ϕ, β açıları da kullanılarak $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ birim vektörleri cinsinden izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos \beta \cos \phi \vec{I} + \cos \beta \sin \phi \vec{J} + \sin \beta \vec{K} \\ \vec{j} &= -\sin \phi \vec{I} + \cos \phi \vec{J} \\ \vec{k} &= -\cos \phi \sin \beta \vec{I} - \sin \phi \sin \beta \vec{J} + \cos \beta \vec{K}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Şimdi Şekil 3.11 deki çubuk kesitine karşıdan bakılsın ve çubuk kesitinin asal eksenlerinin y ve z eksenleri ile çakışmadığı kabul edilsin.



Şekil 3.11 Eleman kesitinin asal eksen takımının sistem eksen takımına göre konumlanması

Çubuk kesitinin 1-2 asal eksenlerinin y, z ile yaptığı açı α ile gösterilsin. Bu eksen takımının birim vektörleri $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \vec{i} \\
\vec{e}_2 &= \cos \alpha \vec{j} - \sin \alpha \vec{k} \\
\vec{e}_3 &= \sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) değerleri (3.2) de yerine konursa,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= \cos \beta \cos \gamma \vec{I} + \cos \beta \sin \gamma \vec{J} + \sin \beta \vec{K} \\
\vec{e}_2 &= (-\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha) \vec{I} + (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha) \vec{J} - \sin \alpha \cos \beta \vec{K} \\
\vec{e}_3 &= (-\sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha) \vec{I} + (\sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta) \vec{J} + \cos \alpha \cos \beta \vec{K}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

dönüşümleri bulunur. (3.3) bağıntısı matris formunda yazılırsa izleyen ifade elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ -\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

$\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$ vektörleri $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vektörleri cinsinden yazılmak istenirse iki ayrı yol izlenebilir. Birincisi, Şekil 3.10 ve Şekil 3.11 kullanılarak geometrik izdüşüm ile diğeri ise (3.4) ortogonal matrisinin tersi alınarak. Bilindiği gibi ortogonal matrislerin tersi matrisin transpozudur. Yani

$$\begin{Bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha & -\sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

bağıntısı elde edilir.

3.1.5 Eleman Eksen Takımında Rijitlik Matrisi

Çubuk elemanların iki ucuna ait yerdeğiştirme (dönme) ve uç kuvvet (uç moment) vektörleri aşağıda gösterilmiştir. Çubuğun yerel koordinat takımı yukarıda açıklandığı gibi $\vec{e}_1$ çubuk eksenini doğrultusunda birim vektör, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri ise Şekil 3.11’ de gösterilen (1–2) kesit asal eksenlerine ait birim vektörlerdir.

Eleman rijitlik matrisi Şekil 3.1’ de gösterilen yerdeğiştirme bileşenleri ile Şekil 3.2’ de gösterilen kuvvetler arasında, çubuğun (L, A, I_x, I_y, I_o) geometrik ve (E, G) fiziksel özellikleri cinsinden ilişki kurmaktadır.

Genel (Global) koordinatlardaki elemana ait rijitlik matrisini elde etmek için, aşağıda verilen $[T]$ dönüşüm matrisi (3.6) kullanılır.

$$\begin{pmatrix}
 T_{11} & T_{21} & T_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{21} & T_{31} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0
 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \cos \gamma \cos \beta & T_{21} &= -\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta \\
 T_{12} &= \sin \gamma \cos \beta & T_{22} &= \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta \\
 T_{13} &= \sin \beta & T_{23} &= -\sin \alpha \cos \beta \\
 T_{31} &= -\sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha & & \\
 T_{32} &= \cos \gamma \sin \alpha - \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha & & \\
 T_{33} &= \cos \beta \cos \alpha & &
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$[\delta] = [T][U] \quad (3.8)$$

Burada $[T]$, elemanın eleman eksen takımındaki yerdeğiştirmeleri ile söz konusu elemanın genel eksen takımındaki yerdeğiştirmeleri arasında ilişki kuran dönüşüm matrisi olarak

tariflenir. Aynı bağıntı eleman uç kuvvetleri ile elemanın genel koordinat sistemindeki düğüm noktası kuvvetleri arasında da mevcuttur; dolayısıyla çubuk uç kuvvetleri ile düğüm noktası kuvvetleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde verilir:

$$[p] = [T][P] \quad (3.9)$$

Eleman bireysel eksen takımında çubuk uç kuvvetleri ile uç yerdeğiştirmeleri arasındaki bağıntı izleyen şekilde verilmişti:

$$[p] = [k][\delta] \quad (3.10)$$

Genel eksen takımındaki yerdeğiştirmeler biliniirse (3.9) ifadesi izleyen şekilde yazılır:

$$[p] = [k][T][U] \quad (3.11)$$

(3.11) ifadesinde (3. 9) denklemi kullanılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$[T][P] = [k][T][U] \quad (3.12)$$

(3.12) eşitliğinin her iki tarafı $[T]^{-1}$ ile çarpılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$[T]^{-1}[T][P] = [T]^{-1}[k][T][U] \quad (3.13)$$

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (3.14)$$

(3.14) ifadesi kullanılırsa, genel koordinatlarda dış yük – yerdeğiştirme bağıntısı izleyen şekilde yazılır:

$$[P] = [T]^T[k][T][U] \quad (3.15)$$

Eleman rijitlik matrisinin genel koordinatlardaki ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$[K] = [T]^T[k][T] \quad (3.16)$$

3.1.6 Sistem Kod Matrisi (KM), Nod Matrisi (NM) ve Eleman Matrisi (EM) Elde Edilişi

Düğüm noktaları (nodes), başlangıç noktasından başlayarak önce x yönünde, sonra y yönünde sonra da z yönünde artarak numaralandırılır, Şekil 3.9 yapı elemanlarının numaralandırılması (kolon ve kirişlerin) düğüm noktalarında olduğu gibi kolonlardan başlayarak x, y, z doğrultularında sıra ile artırılarak numaralandırılır, Şekil 3.9 düğüm noktalarının koordinatları ve bu noktalara gelen tekil dış yükler NM de gösterilir.

Çizelge 3.1 Kod matrisi (KM)

Nodes	q_x	q_y	q_z	q_k	q_l	q_m
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36
7	37	38	39	40	41	42
8	43	44	45	46	47	48

Çizelge 3.2 Nod matrisi (NM)

Nodes	X	Y	Z	Px	Py	Pz	Mx	My	Mz
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	L	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	L	0	0	0	0	0	0	0
4	L	L	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	L	1000	0	0	0	0	0
6	L	0	L	0	0	0	0	0	0
7	0	L	L	0	0	0	0	0	0
8	L	L	L	0	0	0	0	0	0

Çizelge 3.3 Eleman matrisi (EM)

Eleman	Sol Uç	Sağ Uç	KODLAR											
1	1	5	1	2	3	4	5	6	25	26	27	28	29	30
2	2	6	7	8	9	10	11	12	31	32	33	34	35	36
3	3	7	13	14	15	16	17	18	37	38	39	40	41	42
4	4	8	19	20	21	22	23	24	43	44	45	46	47	48
5	5	6	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
6	7	8	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
7	5	7	25	26	27	28	29	30	37	38	39	40	41	42
8	6	8	31	32	33	34	35	36	43	44	45	46	47	48

Her bir elemanın yerel koordinatlardaki rijitlik matrisi dönüşüm (transformasyon) matrisi ile global koordinatlarda tanımlandıktan sonra bu global koordinatlardaki eleman rijitlik matrisleri EM de tanımlı kodlar vasıtasıyla sistem matrisinin (SM) içine yerleştirilir.

Eleman boyları, elemanın uç düğüm noktalarının numaraları ve koordinatları kullanılarak hesaplanır;

$$L_i = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} \quad (3.17)$$

Yine elemanların X-Y düzlemindeki izdüşüm boyları;

$$LD_i = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \quad (3.18)$$

β ve γ açıları ise;

$$\cos \beta = \frac{LD_i}{L_i}, \quad \cos \gamma = \frac{(X_j - X_i)}{LD_i} \quad (3.19)$$

Eğer elemanın LD izdüşüm boyu sıfırsa (kolonlarda olduğu gibi) bu takdirde $\gamma = 0$ kabul edilir.

Yine tanımlı yerel koordinatlarla global koordinatları uyuşan elemanların (kiriş elemanlarının) yerel koordinatlardaki matrisleri ile global koordinatlardaki matrisleri aynı olacaktır.

Böylelikle bir elemana ait 12x12 lik sayılar topluluğu olan elemanlara ait rijitlik matrisi genel koordinatlarda elde edilmiş olur.

$$[K] \{q\} = \{F\} \quad (3.20)$$

Yukarıdaki doğrusal denklem takımı çözülerek düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme değerleri elde edilmiş olur. Söz konusu işleme ait MATLAB kodlaması aşağıda verilmiştir:

n1_x = 0; n1_y = 0; n1_z = 0;

n2_x = L; n2_y = 0; n2_z = 0;

n3_x = 0; n3_y = L; n3_z = 0;

n4_x = L; n4_y = L; n4_z = 0;

n5_x = 0; n5_y = 0; n5_z = L;

n6_x = L; n6_y = 0; n6_z = L;

n7_x = 0; n7_y = L; n7_z = L;

$$n8_x = L; n8_y = L; n8_z = L;$$

l = Eleman Boyu

LD = Eleman izdüşüm boyu

IZ = Elemann plandaki izdüşüm boyu

$$l(1) = \sqrt{((n1_x - n5_x)^2) + ((n1_y - n5_y)^2) + ((n1_z - n5_z)^2)};$$

$$l(2) = \sqrt{((n2_x - n6_x)^2) + ((n2_y - n6_y)^2) + ((n2_z - n6_z)^2)};$$

$$l(3) = \sqrt{((n3_x - n7_x)^2) + ((n3_y - n7_y)^2) + ((n3_z - n7_z)^2)};$$

$$l(4) = \sqrt{((n4_x - n8_x)^2) + ((n4_y - n8_y)^2) + ((n4_z - n8_z)^2)};$$

$$l(5) = \sqrt{((n5_x - n6_x)^2) + ((n5_y - n6_y)^2) + ((n5_z - n6_z)^2)};$$

$$l(6) = \sqrt{((n7_x - n8_x)^2) + ((n7_y - n8_y)^2) + ((n7_z - n8_z)^2)};$$

$$l(7) = \sqrt{((n5_x - n7_x)^2) + ((n5_y - n7_y)^2) + ((n5_z - n7_z)^2)};$$

$$l(8) = \sqrt{((n6_x - n8_x)^2) + ((n6_y - n8_y)^2) + ((n6_z - n8_z)^2)};$$

$$LD(1) = \sqrt{((n1_x - n5_x)^2) + ((n1_y - n5_y)^2)};$$

$$LD(2) = \sqrt{((n2_x - n6_x)^2) + ((n2_y - n6_y)^2)};$$

$$LD(3) = \sqrt{((n3_x - n7_x)^2) + ((n3_y - n7_y)^2)};$$

$$LD(4) = \sqrt{((n4_x - n8_x)^2) + ((n4_y - n8_y)^2)};$$

$$LD(5) = \sqrt{((n5_x - n6_x)^2) + ((n5_y - n6_y)^2)};$$

$$LD(6) = \sqrt{((n7_x - n8_x)^2) + ((n7_y - n8_y)^2)};$$

$$LD(7) = \sqrt{((n5_x - n7_x)^2) + ((n5_y - n7_y)^2)};$$

$$LD(8) = \sqrt{((n6_x - n8_x)^2) + ((n6_y - n8_y)^2)};$$

$$IZ(1) = n5_x - n1_x;$$

$$IZ(2) = n6_x - n2_x;$$

$$IZ(3) = n7_x - n3_x;$$

$$IZ(4) = n8_x - n4_x;$$

$$IZ(5) = n6_x - n5_x;$$

$$IZ(6) = n8_x - n7_x;$$

$$IZ(7) = n7_x - n5_x;$$

$$IZ(8) = n8_x - n6_x;$$

Kütle matrisinin ve sönüm matrisinin genel eksen takımına dönüştürülmesinde yukarıda açıklanan işlemler sırası ile uygulanır.

$$[M] = [T]^T [m] [T] \quad (3.21)$$

$$[C] = [T]^T [c] [T] \quad (3.22)$$

Bir çubuk elemanı için potansiyel enerji, kinetik enerji ve sönüm fonksiyonu ifadeleri eklerde verilen yol izlenerek elde edildikten sonra, yine eklerde verilen Lagrange denklemleri kullanılarak eleman için hareket denklemleri elde edilir. Daha sonra eleman hareket denklemlerindeki kütle, sönüm ve rijitlik matrislerinin yukarıda detayları açıklanan, bilinen uyumlu birleştirme işlemlerinden sonra izleyen girişimli hareket denklemleri takımı elde edilir:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (3.23)$$

4. HAREKET DENKLEMLERİNİN ZAMAN TANIM ALANINDA ÇÖZÜMÜ

4.1 Girişimli Hareket Denklemlerinin Zaman Tanım Alanında Çözümü

Yukarıda (3.23) ifadesiyle verilen girişimli hareket denklemleri takımı eklerde verilen Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle çözülebilir.

4.2 Modal Analiz

Yukarıda (3.23) ifadesiyle verilen denklem takımı yerdeğiştirmelerin modal açılımı ve asal modların ortogonalliği kullanılarak ayrıklaştırılabilir ve her bir denklem zaman tanım alanında ayrı ayrı çözüldükten sonra aynı zamana karşı gelen cevaplar toplanarak çözüm elde edilebilir. Bu işlemin ayrıntıları izleyen alt bölümlerde anlatılacaktır.

4.3 Açılım Teoremi: Yerdeğiştirmelerin Modal Açılımı

Herhangi bir N adet bağımsız vektörler seti N inci mertebeden diğer bir vektörün temsili için bir baz olarak kullanılabilir. Burada doğal modlar böylesi bir baz olarak kullanılacaktır. Böylece, herhangi bir yerdeğiştirme vektörü u için modal açılım izleyen formdadır:

$$u = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r = \Phi q \quad (4.1)$$

Burada q_r modal koordinatlar veya normal koordinatlar adı verilen skaler çarpanlardır ve $q = \langle q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n \rangle^T$. ϕ_r lar bilindiğinde, verilen bir u için, eşitlik (4.1) in her iki tarafını $\phi_n^T m$ ile çarparak q_r yi hesaplamak mümkündür:

$$\phi_n^T m u = \sum_{r=1}^N (\phi_n^T m \phi_r) q_r$$

Ortogonallik ilişkisi yüzünden yukarıdaki toplamda $r = n$ terimi dışındaki terimler yok olur. Böylece;

$$\phi_n^T m u = (\phi_n^T m \phi_n) q_n$$

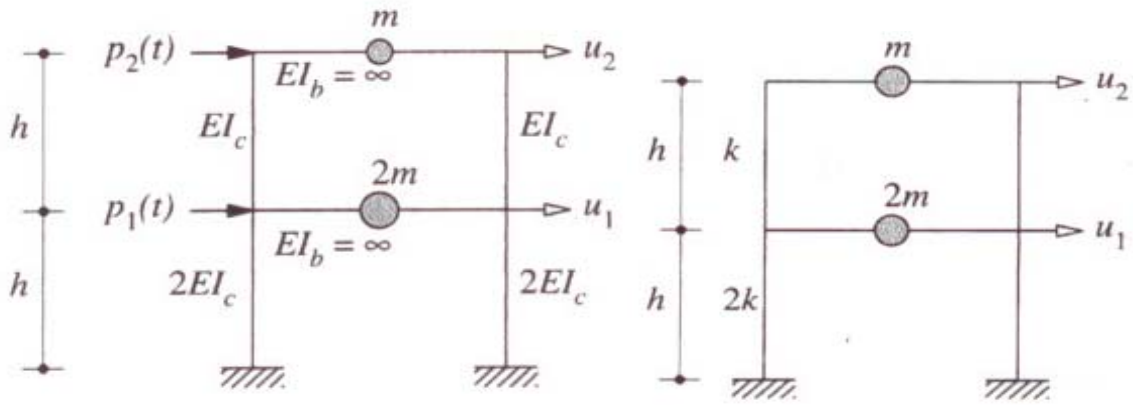
Bu eşitliğim her iki tarafındaki matris çarpımları skalerdirler. Böylece;

$$q_n = \frac{\phi_n^T m u}{(\phi_n^T m \phi_n)} = \frac{\phi_n^T m u}{M_n} \quad (4.2)$$

Yerdeğiştirme vektörü u nun (4.1) ile verilen modal açılımı zorlanmış titreşim cevabında ve ÇSD sistemlerin deprem cevabında çok önemli rol oynar.

Problem:

Aşağıda verilen iki katlı kayma çerçevesi için yerdeğiştirme vektörü $u = \langle 1 \ 1 \rangle^T$ nun modal açılımı belirleyiniz. Birinci ve ikinci mod vektörlerinin önceden, bilinen yolla elde edilmiş olduğu ve değerlerinin $\phi_1 = \langle \frac{1}{2} \ 1 \rangle^T$ ve $\phi_2 = \langle -1 \ 1 \rangle^T$ olduğu kabul edilsin.



$$k = \frac{24EI_c}{h^3}$$

$$k = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{24EI_c}{h^3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

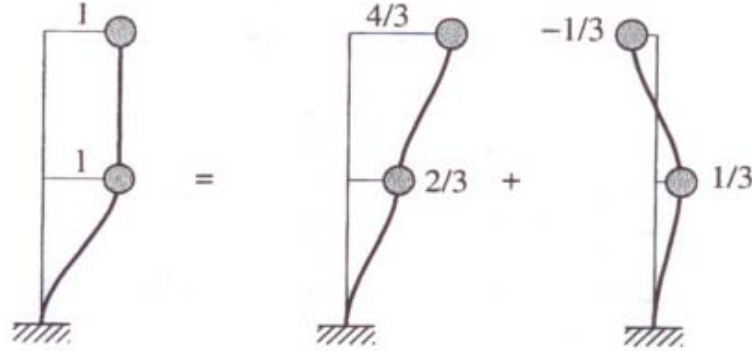
Cözüm:

Yerdeğiştirme u , bilinen yolla elde edilmiş olan $\phi_1 = \langle \frac{1}{2} \ 1 \rangle^T$ ve $\phi_2 = \langle -1 \ 1 \rangle^T$ ile birlikte (4.2)'de yerlerine konursa izleyen değerler elde edilir.

$$q_1 = \frac{\left\langle \frac{1}{2} \ 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\left\langle \frac{1}{2} \ 1 \right\rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{2m}{3m/2} = \frac{4}{3}$$

$$q_2 = \frac{\langle -1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\langle -1 \ 1 \rangle \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{-m}{3m} = -\frac{1}{3}$$

Bu q_n değerlerinin (4.1)'de yerlerine konması arzulanan modal açılımı verir ki bu açılım aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



$$u = (4/3)\phi_1 + (-1/3)\phi_2$$

4.3.1 Asal Modların Ortogonalliği ve Zaman Tanım Alanında Modal Analiz

Çok serbestlik dereceli sistemlerin asal titreşim modları ortogonalite olarak bilinen temel bir matematik özelliği paylaşırlar. Çok serbestlik dereceli bir sistemin serbest titreşim cevabı izleyen şekilde verilir:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}$$

Çözüm formunu $q_i(t) = A_i \sin(\omega t + \Phi)$ olarak, özel bir frekans ω_i (4.3)'de yerine konursa

$$-\omega_i^2 [M]\{A^{(i)}\} + [K]\{A^{(i)}\} = \{0\} \quad (4.3)$$

ifadesini verir. Diğer bir ω_j frekansı için

$$-\omega_j^2 [M]\{A^{(j)}\} + [K]\{A^{(j)}\} = \{0\} \quad (4.4)$$

(4.3) eşitliğini $\{A^{(j)}\}^T$ ve (4.4) eşitliğini $\{A^{(i)}\}^T$ ile çarparsak

$$-\omega_i^2 \{A^{(j)}\}^T [M]\{A^{(i)}\} + \{A^{(j)}\}^T [K]\{A^{(i)}\} = \{0\} \quad (4.5)$$

$$-\omega_j^2 \{A^{(i)}\}^T [M]\{A^{(j)}\} + \{A^{(i)}\}^T [K]\{A^{(j)}\} = \{0\} \quad (4.6)$$

(4.5)'nin (4.6)'ten çıkartılması sonucu

$$\{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} (\omega_i^2 - \omega_j^2) = \{0\} \quad i \neq j \quad (4.7)$$

(4.7) eşitliğine ulaşmada matris cebrinden bilinen $[A]^T [B] [C] = [C]^T [B] [A]$ gerçeğini kullandık. $[A]$, $[B]$ ve $[C]$ üçlü çarpımı tanımlanan herhangi üç matristir. (4.7) deki iki dairesel frekans ayrık olarak izleyen sonuca ulaşılır:

$$\{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = 0 \quad i \neq j \quad (4.8)$$

(4.8) eşitliği asal titreşim modlarının **ortogonallığının** matematik ifadesidir. Ortogonallık özelliği çok serbestlik dereceli sistemlerin hareket eşitliklerinin girişimsizliğini sağlamak için çok güçlü bir matematiksel tekniktir.

P serbestlik dereceli bir sistem için, kolonları her bir doğal titreşim modu için genlik vektörleri olan $P \times P$ boyutlu modal matris tanımlansın

$$[A] = [\{A^{(1)}\} \quad \{A^{(2)}\} \quad \{A^{(3)}\} \dots \{A^{(P)}\}] \quad (4.9)$$

$$\{A^{(j)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = 0 \quad (4.10)$$

olduğundan,

$$[S] = [A]^T [M] [A]$$

şeklinde tanımlanan matris diyagonal matristir. Matrisin sıfırdan farklı terimleri;

$$S_{ii} = \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} \quad i = 1, P \quad (4.11)$$

Her bir modal genlik vektörü sadece bir sabit çarpan dahilinde bilindiğinden (Daha önceki örneklerde $A_1^{(i)} = 1$ değeri keyfi olarak seçilmişti), modal genlik vektörleri (4.11) ile tanımlanan diyagonal terimleri herhangi istenen sayısal değeri alacak şekilde değerlendirilebilir. Özel olarak; eğer bu değer birim olarak seçilirse, yani

$$S_{ii} = \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} = 1 \quad i = 1, P \quad (4.12)$$

bu durumda modal genlik vektörlerinin **ortonormal** olduğu söylenir ve üçlü matris çarpımı

$$[S] = [A]^T [M] [A] = [I] \quad (4.13)$$

olur. Burada $[I]$, $P \times P$ boyutlu birim matristir. (4.12) ile modal genlik vektörlerinin normalize edilmesi aşağıda gösterildiği gibi açıktır. Özel bir modal genlik ile temsil edilmiş

olsun ki orada birinci terim keyfi olarak birim değer atanmıştır. Bu durumda modal matrisin karşı gelen terimi

$$\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P m_{jk} A_j^{(i)} A_k^{(i)} = S_{ii} = \text{sabit} \quad (4.14)$$

$$\{A^{(i)}\} = A_1^{(i)} \begin{Bmatrix} 1 \\ B_2^{(i)} \\ B_3^{(i)} \\ \vdots \\ B_P^{(i)} \end{Bmatrix} \quad i = 1, P \quad (4.15)$$

Eğer modal genlikler izleyen şekilde yeniden tanımlanırsa;

$$A_j^{(i)} = \frac{A_j^{(i)}}{\sqrt{S_{ii}}} = \frac{A_j^{(i)}}{\sqrt{\sum_{j=1}^P \sum_{k=1}^P m_{jk} A_j^{(i)} A_k^{(i)}}} \quad i = 1, P \quad (4.16)$$

(4.13) ile tanımlanan eşitlik gerçekten birim matristir. Daha sonra anlaşılacağı üzere izleyen değişken dönüşümü yapılmıştır:

$$\{q\} = [A]\{p\} \quad (4.17)$$

Burada $\{p\}$ genelleştirilmiş yerdeğiştirmelerin kolon matrisidir. $[A]$ normalize edilmiş modal matristir. Bu durumda,

$$[M][A]\{\ddot{p}\} + [K][A]\{p\} = \{F\} \quad (4.18)$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (4.19)$$

(4.18)'ün $[A]^T$ ile çarpımından

$$[A]^T [M][A]\{\ddot{p}\} + [A]^T [K][A]\{p\} = [A]^T \{F\} \quad (4.20)$$

Ortogonalite prensibi kullanılarak,

$$[I]\{\ddot{p}\} + [A]^T [K][A]\{p\} = [A]^T \{F\} \quad (4.21)$$

olur. Şimdi $[A]^T [K][A]$ ile temsil edilen rijitlik etkileri araştırılmalıdır. $[K]$ matrisi simetrik olmak kaydıyla üçlü $[A]^T [K][A]$ da simetriktir. Asal modların ortogonalitesi prensibi

izlenerek, $[A]^T[K][A]$ üçlü çarpımının diyagonal matris olduğu kolayca gösterilebilir. (4.2) eşitliğinin $\{A^{(i)}\}^T$ ile çarpılmasıyla diyagonal terimlerin değerleri bulunur:

$$-\omega_i^2 \{A^{(i)}\}^T [M] \{A^{(i)}\} + \{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} = \{0\}, \quad i = 1, P \quad (4.22)$$

Eğer modal genlik vektörleri daha önce tanımlandığı gibi normalize edilirse

$$\{A^{(i)}\}^T [K] \{A^{(i)}\} = \omega_i^2, \quad i = 1, P \quad (4.23)$$

olur. Bu yüzden $[A]^T[K][A]$ çarpımı, diyagonal terimleri asal titreşim modlarının doğal dairesel frekanslarının kareleri olan diyagonal matris üretir. Yani,

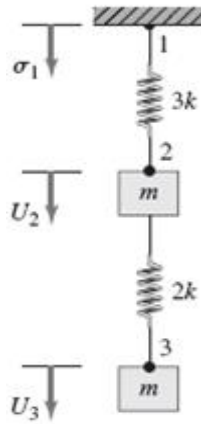
$$[A]^T [K] [A] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \omega_P^2 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Sonuçta (4.21) eşitliği

$$[I] \{\ddot{p}\} + [\omega^2] \{p\} = [A]^T \{F\} \quad (4.25)$$

olur. Burada $[\omega^2]$ (4.24) ile belirlenen diyagonal matrisi temsil eder.

Problem: Aşağıda verilen problemde, 2 ve 3 düğümlerinde sırasıyla F_1 ve F_2 dinamik yüklerinin uygulanması durumundaki cevapları, modal analizle belirleyiniz.



Şekil 4.1 Çok serbestlik dereceli yay sistem model

Cözüm:

Daha önce elde edildiği gibi sistem rijitlik matrisi

$$[K] = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 \\ -3k & 5k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ve sistem kütle matrisi

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

olur. Girişimli olan hareket denklemleri ise,

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ mg \\ mg \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

olarak elde edilir. R_1 , “1” düğümündeki dinamik reaksiyon kuvvetidir. Kısıtlılık şartının uygulanmasından sonra

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

elde edilir. Doğal frekansların ve bunlara karşı gelen öz vektörlerin elde edilmesi için

$$\begin{aligned} U_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \Phi) \\ U_3(t) &= A_3 \sin(\omega t + \Phi) \end{aligned} \quad (4.30)$$

çözümleri kabul edilir. Burada A_2 ve A_3 , “2” ve “3” düğümlerinin titreşim genlikleridir. ω , bilinmeyen, harmonik kabul edilen hareketin dairesel frekansı, Φ ise böylesi bir hareketin faz açısıdır.

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

veya

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Yukarıdaki (4.32) eşitliğinin aşık ar olmayan çözümü için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır:

$$\begin{vmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

Yukarıdaki (4.33) ifadesinden izleyen karakteristik eşitlik veya fiziksel sistemin frekans eşitliği elde edilir:

$$(5k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 m) - 4k^2 = 0 \quad (4.34)$$

(4.34) eşitliğinin kökleri öz değ erleri, yani doğal frekansları verir:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 6 \frac{k}{m} \quad (4.35)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{6 \frac{k}{m}} \quad (4.36)$$

Doğ al frekaslar aşağıdaki (4.37) denkleminde yerlerine konursa,

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Birinci doğ al frekansa karşı gelen öz vektör (birinci mod şekli)

$$\omega_1^2 \rightarrow A_3 = 2A_2;$$

İkinci doğ al frekansa karşı gelen öz vektör (ikinci mod şekli)

$$\omega_2^2 \rightarrow A_3 = -0,5A_2$$

olarak elde edilir. Bunlar izleyen şekilde sütun matris formunda yazılmışlardır:

$$\{A^{(1)}\} = A_2^{(1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \end{Bmatrix}, \quad \{A^{(2)}\} = A_2^{(2)} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Modal genlik vektörlerinin ortonormal hale getirilmesi için diyagonal $[S]$ matrisinin elemanları bulunsun:

$$S_{11} = \{A^{(1)}\}^T [M] \{A^{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5m$$

Öyleyse birinci genlik vektörü, her bir terim $\sqrt{S_{11}} = 2,2361\sqrt{m}$ 'e bölününce, izleyen normalleştirilmiş formda elde edilir:

$$\{A^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,4472 \\ 0,8944 \end{Bmatrix}$$

Benzer şekilde,

$$S_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \end{bmatrix} = 1,25m$$

olup ikinci genlik vektörü normalleştirilmiş formda

$$\{A^{(2)}\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,8944 \\ -0,4472 \end{Bmatrix}$$

olur. Bu durumda normalize edilmiş modal matris

$$[A] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Şimdi (4.13) eşitliğini tahkik edelim. Yani (4.13) ile verilen üçlü çarpımın sonucunun gerçekten birim matris olup olmadığına bakalım:

$$[S] = [A]^T [M] [A] = [I]$$

$$[A]^T [M] [A] = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rijitlik matrisi ile ilgili üçlü çarpım izleyen şekildedir:

$$[A]^T [K] [A] = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5,99964 \end{bmatrix}$$

Bu durumda hareket eşitlikleri sistemi izleyen şekilde girişimsiz hale getirilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5,99964 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = [A]^T \cdot \{F\} \text{ olur.}$$

$$[A]^T \cdot \{F\} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,4472F_1 + 0,8944F_2 \\ 0,8944F_1 - 0,4472F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,4472F_1 + 0,8944F_2 \\ 0,8944F_1 - 0,4472F_2 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemde p_1 ve p_2 girişimsiz hale getirilmiştir. Bu denklemler keyfi şekilde verilmiş dinamik yük durumları için, başlangıç koşulları verilmek şartıyla, herhangi bir t anı için sayısal olarak çözülebilir. (4.25)' den ve ayrıca yukarıdaki son denklemin incelenmesinden, bu denklemin aşağıdaki gibi yazılabileceği görülür:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 0,4472F_1 + 0,8944F_2 \\ 0,8944F_1 - 0,4472F_2 \end{Bmatrix}$$

Bu sistemin, düşey bir $F = F_0 \sin \omega_F t$ kuvvetinin “2” düğümüne uygulanması durumundaki kararlı hal cevabı izleyen şekilde belirlenir. Bu durumda yukarıdaki denklem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_1 \\ \ddot{p}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,8944 \\ -0,4472 \end{Bmatrix} \frac{F_0 \sin(\omega_F t)}{\sqrt{m}}$$

halini alır. Bu durumda genelleştirilmiş koordinatlar için girişimsiz hale getirilmiş hareket denklemleri

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = \frac{0,8944F_0 \cdot \sin(\omega_F t)}{\sqrt{m}}$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = \frac{-0,4472F_0 \cdot \sin(\omega_F t)}{\sqrt{m}}$$

olur. Bunların çözümleri

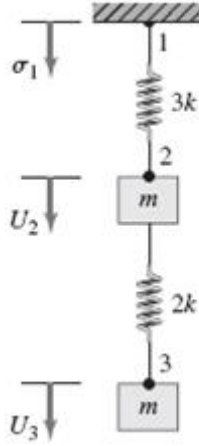
$$p_1(t) = \frac{0,8944F_0 \cdot \sin(\omega_F t)}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)\sqrt{m}}$$

$$p_2(t) = \frac{-0,4472F_0 \cdot \sin(\omega_F t)}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)\sqrt{m}}$$

verir. Bu durumda gerçek yerdeğiştirmeler olan $x(t) = q(t)$ yerdeğiştirmeleri (4.17) eşitliğinin uygulanmasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\{X\} = \{q\} = [A]\{p\} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0,4472 & 0,8944 \\ 0,8944 & -0,4472 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{0,8944}{(\omega_1^2 - \omega_F^2)} \\ -\frac{0,4472}{(\omega_2^2 - \omega_F^2)} \end{Bmatrix} \frac{F_0 \cdot \sin(\omega_F t)}{\sqrt{m}}$$

4.3.2 Serbest Titreşimlerin Zaman Tanım Alanında İncelenmesinde Modal Analiz



Şekil 4.2 Çok serbestlik dereceli sistem modeli

İki yay elemanı ile tutturulmuş iki kütle var. Genel düğüm noktası sistemde 1, 2, 3 tür. Sistem yer çekimi kuvveti altındadır. Denge konumundan itibaren sistemi çekip bırakıyoruz. Serbest cisim diyagramlarını çizip Newton'un 2. Hareket Kanunu uygulanarak yönetici eşitlikler elde edilebilir. Bununla birlikte, burada sonlu eleman yaklaşımı kullanılacaktır. Bilinen sistem matrisini elde etme yoluyla,

$$[K] = \begin{bmatrix} 3k & -3k & 0 \\ -3k & 5k & -2k \\ 0 & -2k & 2k \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

olarak elde edilir. Bu aşamada kütle veya eylemsizlik matrisi bulunacaktır. Kütleler eleman düğümlerinde tekil olarak bulunduklarından kütle matrisi,

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

olarak tanımlanır. Böylece hareket eşitlikleri

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ mg \\ mg \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Burada R_1 , “1” düğümündeki dinamik reaksiyon kuvvetidir. (sürekli değişir)

$U_1 = 0$ kısıtlılık koşulu uygulanırsa (4.40) eşitliği,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ mg \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

olur. Bu eşitlik, ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel eşitlikleri sistemi olup U_2 ve U_3 gibi iki adet bilinmeyen sistem yerdeğiştirmeleri mevcuttur. Zorlayan fonksiyon ile gösterilen yer çekimi kuvvetleri statik denge koşulunu temsil ettiğinden bunlar ihmal edilir ve eşitlikler sistemi,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

olarak yazılır. Pratik bir konu olarak sonlu eleman paket programlarının çoğu analiz problemlerinde yapısal ağırlığı kapsamazlar. Bunun yerine yapısal ağırlığın işlemlere sokulması yazılımın kullanıcısı tarafından seçilmesi gereken bir opsiyondur.

Yapısal ağırlık etkilerinin dahil edilip edilmemesi sistemin geometrisi ve yüklemelerin özellikleri üzerine temellendirilmiş olan bir yargılama sonucu analizci tarafından belirlenir. (4.42) eşitliği ile verilen ikinci mertebeden, lineer, adi, homojen diferansiyel eşitlikler sistemi iki serbestlik dereceli sistemin titreşim cevabını temsil eder. Serbest salınım yapan bir sistem için çözümler izleyen harmonik hareketler olarak araştırılır.

$$\begin{aligned} U_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \Phi) \\ U_3(t) &= A_3 \sin(\omega t + \Phi) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Burada A_2 ve A_3 , “2” ve “3” düğümlerinin titreşim genlikleridir. ω , bilinmeyen olup hareketin kabul edilen harmonik dairesel frekansıdır. Φ ise böylesi bir hareketin faz açısıdır. Kabul edilen çözümlerin zamana göre 2. türevini alarak ve (4.42) eşitliğinde yerine koyarak,

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

veya

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \Phi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

olur. (4.45) eşitliği, iki adet homojen cebrik eşitlikler sistemi olup titreşim genlikleri olan A_2 ve A_3 için çözümlidir. Lineer analizden homojen eşitlikler sisteminin aşikâr olmayan çözümleri için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerektiği bilinmektedir. Bu yüzden aşikâr olmayan çözümler için,

$$\begin{vmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad (4.46)$$

olmalıdır.

$$(5k - \omega^2 m)(2k - \omega^2 m) - 4k^2 = 0 \quad (4.47)$$

(4.47) eşitliği fiziksel sistemin karakteristik denklemi veya frekans denklemi olarak bilinir. k ve m bilinen pozitif sabitler olarak (4.47) eşitliği bilinmeyen ω^2 nin karesel bir eşitliği olarak ele alınır ve izleyen iki adet kök elde edilir:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 6\frac{k}{m} \quad (4.48)$$

veya

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{ve} \quad \omega_2 = \sqrt{6\frac{k}{m}} \quad (4.49)$$

Negatif frekans fiziksel anlama sahip olmadığından ve (4.43) çözümünde negatif değerlerin yerine konması sadece bir faz farkı ortaya çıkardığından pozitif köke karşılık gelen hareketin aynısını temsil eder.

Şekil 4.1' de görülen iki serbestlik dereceli sistemin iki adet doğal dairesel frekansının olduğu bulunmuştur. Köklerden sayısal olarak küçüğünün ω_1 olarak gösterilmesi ve temel frekans olarak adlandırılması bir gelenektir. Bu aşamada kabul edilen çözümdeki A_2 ve A_3 genliklerinin belirlenmesi gerekir.

$$\begin{bmatrix} 5k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

(4.50) eşitliği homojen eşitlikler seti olduğundan genliklerin mutlak değerlerini bulmak mümkün değildir. Bununla birlikte izleyen şekilde genlikler arasında sayısal ilişkiler elde edilebilir.

Eğer $\omega = \omega_1^2 = \frac{k}{m}$ her bir cebrik eşitlikte yerine konulursa $A_3 = 2A_2$ elde edilir. Bu durumda birinci veya temel titreşim modu için genlik oranı $\frac{A_3}{A_2} = 2$ olur.

Yani eğer sistem temel frekansı ω_1 ile salınım yaparsa m_2 nin salınımının genliği m_1 in salınımının genliğinin iki katıdır. Mutlak değerler hareketin başlangıç koşullarına bağlıdır. Bu durumda temel mod için yerdeğiştirme eşitlikleri,

$$\begin{aligned} U_2^{(1)}(t) &= A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) \\ U_3^{(1)}(t) &= A_3^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) = 2A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Her ikisi de aynı yönde hareket ediyor. 1. mod olabilmesi için iki kütleyi de (4.51) sağlanacak şekilde çekip aynı anda bırakmak gerekir. Bu aşamada 2. doğal frekansı her bir eşitlikte yerine koyarsak, 2. moddaki genlik oranı;

$A_3/A_2 = -0,5$ olarak buluruz. Öyleyse, ikincil doğal titreşim modunda kütleler ters yönlerde hareket ederler.

İkincil frekansa karşılık gelen yerdeğiştirmeler

$$\begin{aligned} U_2^{(2)}(t) &= A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \\ U_3^{(2)}(t) &= A_3^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) = -0,5 A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Sonuç olarak genel durumda iki serbestlik dereceli bir sistemin serbest titreşim cevabı izleyen şekilde verilir.

$$\begin{aligned} U_2(t) &= A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \\ U_3(t) &= A_3^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + A_3^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \\ &= 2 A_2^{(1)} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) - 0,5 A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Bu aşamada problemde dört adet bilinmeyen bulunmaktadır: $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$, Φ_1 , Φ_2 . Başlangıç yerdeğiştirmeleri ve hızlarına göre bu bilinmeyenler elde edilirler. İki serbestlik dereceli bir sistemin serbest titreşim analizi bir öz değer problemidir. Hesaplanan doğal frekanslar problemin öz değerleridir, genlik oranları problemin öz vektörlerini verir.

(4.53) eşitliği doğal titreşim modları cinsinden sistemin cevabını temsil eder. Böylesi bir çözüm, modal süperpozisyon ya da modal analiz olarak isimlendirilir. Problemin tam çözümü matris notasyonu kullanılarak izleyen şekilde verilir:

$$\begin{Bmatrix} U_2(t) \\ U_3(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_2^{(1)} \\ 2 A_2^{(1)} \end{Bmatrix} \sin(\omega_1 t + \Phi_1) + \begin{Bmatrix} A_2^{(2)} \\ -0,5 A_2^{(2)} \end{Bmatrix} \sin(\omega_2 t + \Phi_2) \quad (4.54)$$

Bu denklem sistemin genel hareketini üretmek için modların etkileşim halinde olduğunu gösterir.

Problem:

Şekil 4.2' de verilen sistem göz önüne alınsın. $k = 40 \text{ lb/in}$, $W = mg = 20 \text{ lb}$.

- Sistemin doğal frekanslarını belirleyiniz.
- Eğer başlangıç koşulları $U_2(t=0) = 1 \text{ in.}$, $U_3(t=0) = 0,5 \text{ in.}$, $\dot{U}_2(t=0) = \dot{U}_3(t=0) = 0$ ise sistemin serbest titreşim cevaplarını bulunuz.

Bu başlangıç koşulları sistemin denge konumu baz alınarak verilmiştir. Öyleyse hesaplanan yerdeğiştirme fonksiyonları yer çekimi etkisini kapsamayacaktır.

Cözüm:

(4.54) eşitliği vasıtasıyla doğal frekanslar

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40}{20/g}} = \sqrt{\frac{40 \cdot (386,4)}{20}} = 27,8 \text{ rad / sn}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 40}{20/g}} = \sqrt{12 \cdot (386,4)} = 68,1 \text{ rad / sn}$$

Serbest titreşim cevabı genel durumda (4.58) ile verilir:

$$U_2(t) = A_2^{(1)} \sin(27,8t + \Phi_1) + A_2^{(2)} \sin(68,1t + \Phi_2)$$

$$U_3(t) = 2A_2^{(1)} \sin(27,8t + \Phi_1) - 0,5A_2^{(2)} \sin(68,1t + \Phi_2)$$

Genlikler ve faz açıları başlangıç koşullarının uygulanması ile elde edilir ki bunlar, aşağıda verilmiştir.

$$(I) \quad U_2(t=0) = 1 = A_2^{(1)} \sin \Phi_1 + A_2^{(2)} \sin \Phi_2$$

$$(II) \quad U_3(t=0) = 0,5 = 2A_2^{(1)} \sin \Phi_1 - 0,5A_2^{(2)} \sin \Phi_2$$

$$(III) \quad \dot{U}_2(t=0) = 0 = 27,8A_2^{(1)} \cos \Phi_1 + 68,1A_2^{(2)} \cos \Phi_2$$

$$(IV) \quad \dot{U}_3(t=0) = 0 = 2 \cdot 27,8A_2^{(1)} \cos \Phi_1 - 0,5 \cdot 68,1A_2^{(2)} \cos \Phi_2$$

Trigonometrik fonksiyonların varlığı yüzünden eşitliklerin çözümü aşıkardır. Bu durumda izleyen dönüşümler yapılarak başlangıç yerdeğiştirme eşitlikleri izleyen şekilde elde edilir:

$$P = A_2^{(1)} \sin \Phi_1$$

$$Q = A_2^{(2)} \sin \Phi_2$$

$$(I): P + Q = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad P = A_2^{(1)} \sin \Phi_1 = 0.4$$

$$(II): 2P - 0,5Q = 0,5 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad Q = A_2^{(2)} \sin \Phi_2 = 0.6$$

Benzer olarak;

$$R = A_2^{(1)} \cos \Phi_1$$

$$S = A_2^{(2)} \cos \Phi_2$$

olsun. Bu durumda başlangıç hız eşitlikleri;

$$(III) : 27,8R + 68,1S = 0$$

R ve S cinsinden homojen sistem çözümü için

$$(IV): 2 \cdot 27,8R - 0,5 \cdot 68,1S = 0$$

Katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Ancak açıkça görülür ki sıfır değildir.

Aşık olmayan çözümler sadece katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması durumunda ortaya çıkar. Burada ise doğrudan hesaplamayla tahkik edilebileceği gibi determinant sıfır değildir. Dolayısıyla aşık olmayan çözüm yoktur. Bu yüzden;

$$R = S = 0 \text{ olmalıdır.}$$

Fiziksel gerçeklerden bilinmektedir ki genlikler sıfır olamaz. Öyleyse;

$$\cos\Phi_1 = \cos\Phi_2 = 0 \text{ olmalıdır. Buradan;}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ sonucuna varılır. Dolayısıyla, faz açılarının sinüs fonksiyonu birim değere}$$

sahiptir. Bu yüzden;

$$A_2^{(1)} = 0,4, A_2^{(2)} = 0,6 \text{ elde edilir.}$$

$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$ olduğuna dikkat ederek genlikleri genel çözüm formunda yerine koyarsak, her bir kütle için serbest titreşim cevabı,

$$U_2(t) = 0,4 \cos 27,8t + 0,6 \cos 68,1t$$

$$U_3(t) = 0,8 \cos 27,8t - 0,3 \cos 68,1t$$

olur.

Her bir kütlenin yerdeğiştirme cevabının sistemin doğal frekanslarına karşılık gelen hareketlerin birleşimi olduğu görülür. Böylesi bir olay titreşen yapısal sistemlerin karakteristiğidir. Tüm doğal titreşim modları yapının genel hareketine katkıda bulunmalıdır. Bu modal analizdir.

5. SPEKTRAL HESAP İLE ÇÖZÜM

5.1 Deprem Yüğü Etkisi

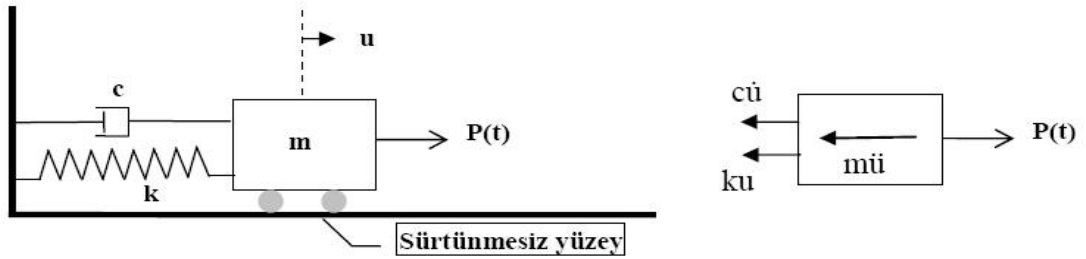
Deprem yükleri atalet kuvvetleri olduğı için binaya yayılı olarak etkir. Ancak, binalarda kütleler daha çok döşeme seviyelerinde bulunduğı için, deprem yüklerinin bu seviyelerde döşemeye yayılı olarak etkidiğı kabul edilir. Döşemeler düzlemleri içinde sonsuz rijit oldukları için hesap modellerinde rijit diyafram olarak kabul edilmiştir. Böyle bir durumda döşemenin düzlemi içinde iki doğrultuda öteleme (u_x, u_y) yaptığı ve düzlemine dik doğrultu etrafında da dönme (θ) yaptığı kabul edilmiştir. Dönme hareketi nedeniyle katlarda kütle merkezi ile rijitlik merkezinin üst üste düşmemesinin etkisi de hesaba katılmış olur. Döşemenin içinde bir nokta için bu değerlerin bilinmesiyle, diğör bütün noktaların yerdeğıştirmeleri hesap edilebilir. Rijit döşeme kabulü yapılmazsa, her düğüm noktasının genel durumda altı serbestlik derecesi vardır. Görüldüğü gibi rijit diyafram kabulü serbestlik derecesi sayısını önemli derecede azaltmaktadır. Ayrıca, döşeme yatay yükler altında rijit cisim hareketi yaptığı için, kat kütlesi veya deprem yükü, döşeme kütle merkezinde tanımlanmıştır. Öteleme kütlesi tanımlanması yanında, düşey eksen etrafındaki dönme ataletinin belirlenmesi için, kütleli dönme ataleti de tanımlanmıştır.

Gerek deprem yükleri gerekse kat kütlelerinin hesabında, genellikle sabit ve hareketli yüklerin döşeme üzerine düzgün olarak yayıldığı kabul edilir ve döşemenin geometrik merkezinde yük etkitilir veya kütle toplanır. Ancak, sabit ve özellikle hareketli yükün düzgün yayılmaması bu kabulü zedeler. Yönetmelik bu şekilde muhtemel bir durumu göz önüne almak amacıyla, kütle merkezinin depreme dik doğrultuda, döşemenin bu iki dik doğrultudaki boyutunun %5 i kadar iki tarafa kaydırılarak (kaydırılmış kütle merkezi elde edilerek kütle dağılımının düzgün olmaması etkisi) boyutlamada elverişsiz çözümlemenin dikkate alınmasını sağlar.

5.2 Deprem Davranış Spektrumlarının Elde Edilişi

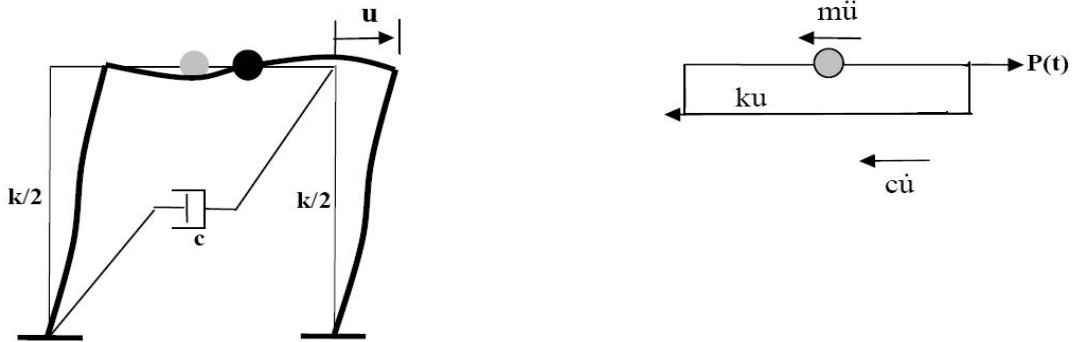
Bu bölümde, tasarıma esas alınacak deprem yükünün nasıl hesaplanacağı özetlenecektir. Bu bağlamda, spektrum kavramına da değinilecektir. Yapı dinamiğinden bilindiği gibi, Şekil 5.1’ de verilmiş, zamana bağlı olarak değişen $P(t)$ yükü etkisindeki bir sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P(t) \quad (5.1)$$



Şekil 5.1 Dinamik zorlama altında yapı idealleştirilmesi

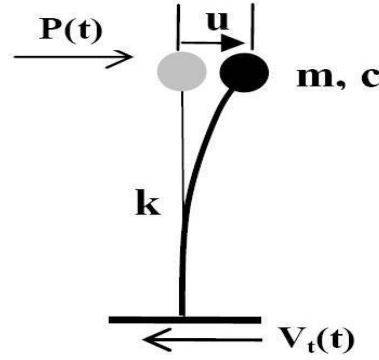
Denklem (5.1)’ de m yapının kütlesini, c sönüm katsayısını, k ise yapının rijitliğini temsil eder. Şekil 5.1’ de gösterilen kuvvetler, Şekil 5.2’ deki, kat döşemesi rijit diyafram tanımına uyan tek serbestlik dereceli yapısal sistem üzerinde de gösterilebilir.



Şekil 5.2 Dinamik zorlama durumunda sistem davranış parametreleri

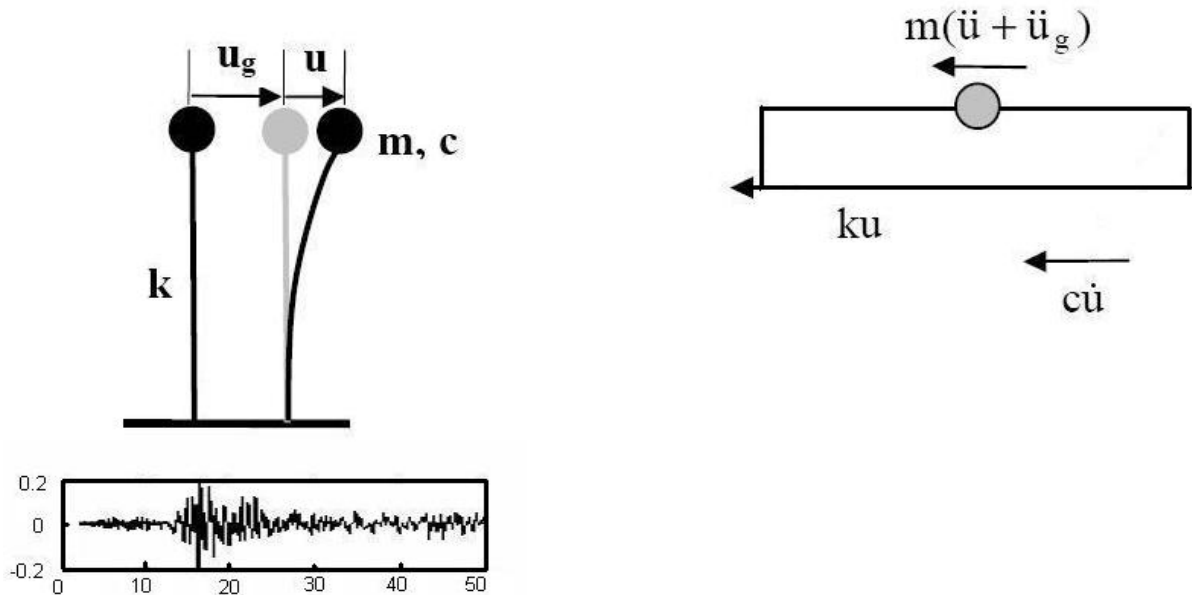
Şekil 5.2’ den de görüleceği gibi, yapıya etkiyen $P(t)$ kuvvetine, bu kuvvete zıt yönde üç

farklı kuvvet karşı koymaktadır. Bu kuvvetlerden, $m\ddot{u}(t)$ eylemsizlik kuvveti olarak bilinir ve ivmeyle orantılıdır. $c\dot{u}(t)$, sönüm kuvveti olarak adlandırılır ve hız ile orantılıdır. $ku(t)$ ise yapının yerdeğiştirmesiyle orantılıdır ve yapıda oluşan iç kuvvetleri temsil eder. Bu aşamada Şekil 5.2' deki tek serbestlik dereceli yapısal sistem Şekil 5.3' deki gibi gösterilebilir.



Şekil 5.3 Tek serberstlik dereceli sistem modeli

Şekil 5.3' de verilen sistemde, kütle tepe noktasında toplanmıştır. Yapının rijitliği ise bir konsol çubukla ifade edilmiştir, bu çubuğun kütlesi m kütlesinin yanında çok küçüktür ve ihmal edilebilir. Şimdi; sistemin, zamana bağlı olarak değişen $P(t)$ kuvveti yerine, yer hareketi etkisi altında olduğunu düşünelim.



Şekil 5.4 Tek serbestlik dereceli sistemin deprem davranış modeli

Şekil 5.4' den görüldüğü gibi, yer hareketi etkisi altında oluşacak toplam yerdeğiştirme,

sistemin görelî yerdeğiştirmesiyle, yerin yerdeğiştirmesinin toplamına eşit olacaktır. Bu durumda, oluşacak eylemsizlik kuvveti de, kütleyle toplam ivmenin çarpımına eşit olacaktır. Bu durumda hareket denklemi, (5.1) denklemindekine benzer biçimde, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$m(\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad (5.2)$$

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (5.3)$$

(5.3) denklemi, tek serbestlik dereceli sistemin, yer hareketi etkisinde sönümlü zorlanmış titreşimine ait hareket denklemidir. Eylemsizlik kuvveti toplam ivme cinsinden yazılırken, sönüm kuvveti ve yapıya geçen kuvvet, bağıl hız ve bağıl yerdeğiştirme ile orantılı olduklarından, bağıl hız ve yerdeğiştirmeye bağıl olarak ifade edilirler. Bu kuvvetler, Şekil 5.4' de, Şekil 5.2 dekine benzer biçimde gösterilmiştir. (5.3) denkleminin her iki tarafı m ye bölünürse, (5.4) ve (5.5)' deki dönüşümleri yapmak koşuluyla (5.6) denklemi elde edilir.

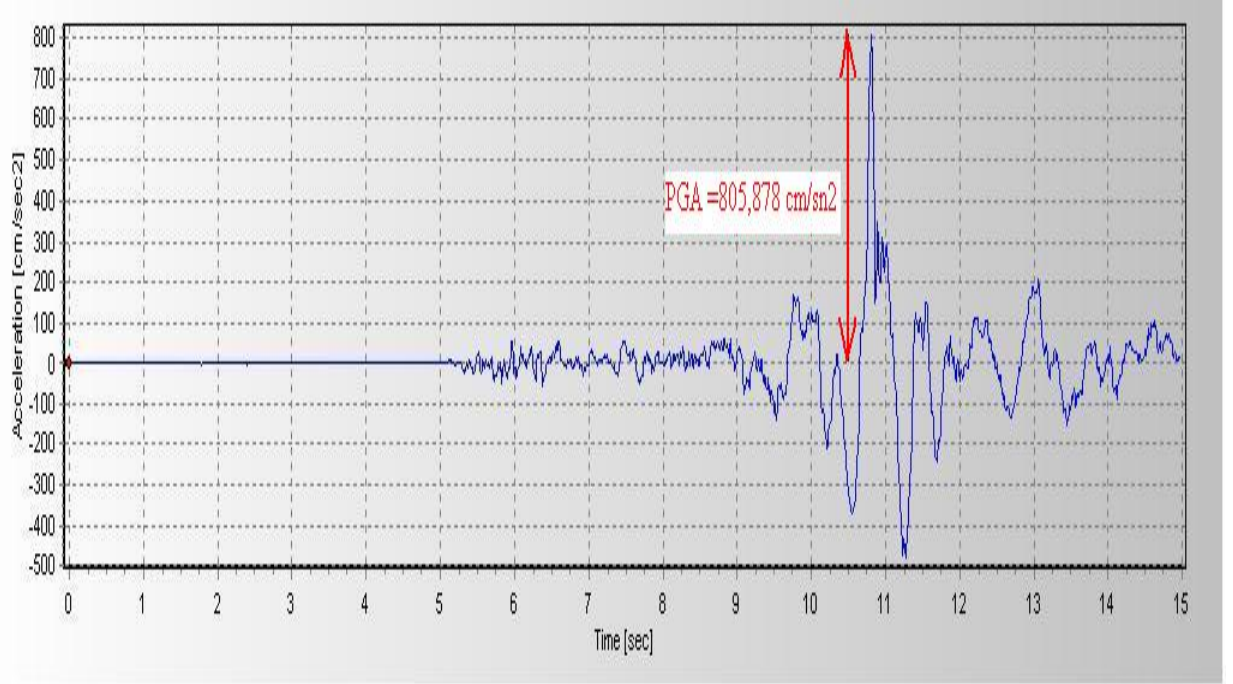
$$c = 2m\omega\xi \quad (5.4)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (5.5)$$

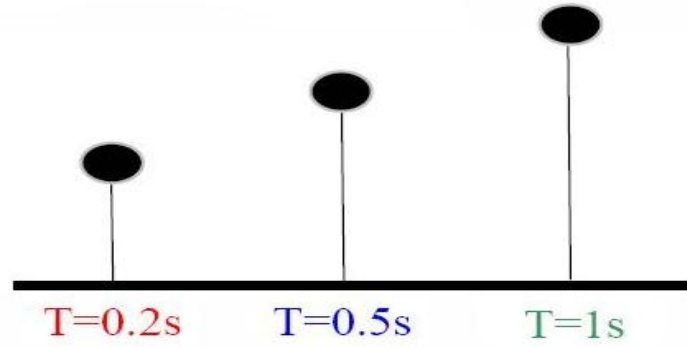
$$\ddot{u}(t) + 2m\omega\xi\dot{u}(t) + \omega^2u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (5.6)$$

(5. 6) denklemlerinde görölen ω , açısal frekansı ifade eder, yapının doğıal titreşim periyodu T ile arasında $T = \frac{2\pi}{\omega}$ bağıntısı vardır. ξ sönüm oranı olarak adlandırılır, betonarme yapılar için genelde %5 olduğı varsayılır. (5.6) denklemi her hangi bir sayısal çözümleme yöntemiyle çözülrse, zamana bağıl olarak değışen yer ivmesi $\ddot{u}_g(t)$ altında oluşacak yerdeğiştirme $u(t)$, sabit bir sönüm oranı ξ için zamana bağıl olarak bulunabilir (time history analysis). Buna bağıl olarak da, taban kesme kuvveti ($V_t(t)$) ve iç kuvvetler gibi diğıer tasarım parametreleri de zamana bağıl olarak belirlenebilir. Aynı çözümlmeler, doğıal titreşim periyodu (T) farklı tek serbestlik dereceli sistemler için de yapılabilir. Şekil 5.5' de, 1999 Kocaeli depremi sırasında kaydedilmiş Bolu kaydı gösterilmiştir. Yatay eksen saniye (s) cinsinden zamanı, düşey eksen ise yer ivmesini göstermektedir. Şekil 5.5' de işaretlendiğı gibi, maksimum yer ivmesi 10,08. sn de (peak ground acceleration-PGA) 805.878 cm/sn² dir. Sönüm oranı %5 olmak kaydıyla, periyotları farklı 3 ayrı sistemin, söz konusu yer hareketi altında yerdeğiştirme değıerleri zamana bağıl olarak gösterilmiştir. Farklı periyotlar için hesap yapılmasının nedeni, periyodun yapının kütlesi ve rijitliğıne bağıl bir parametre olmasıdır

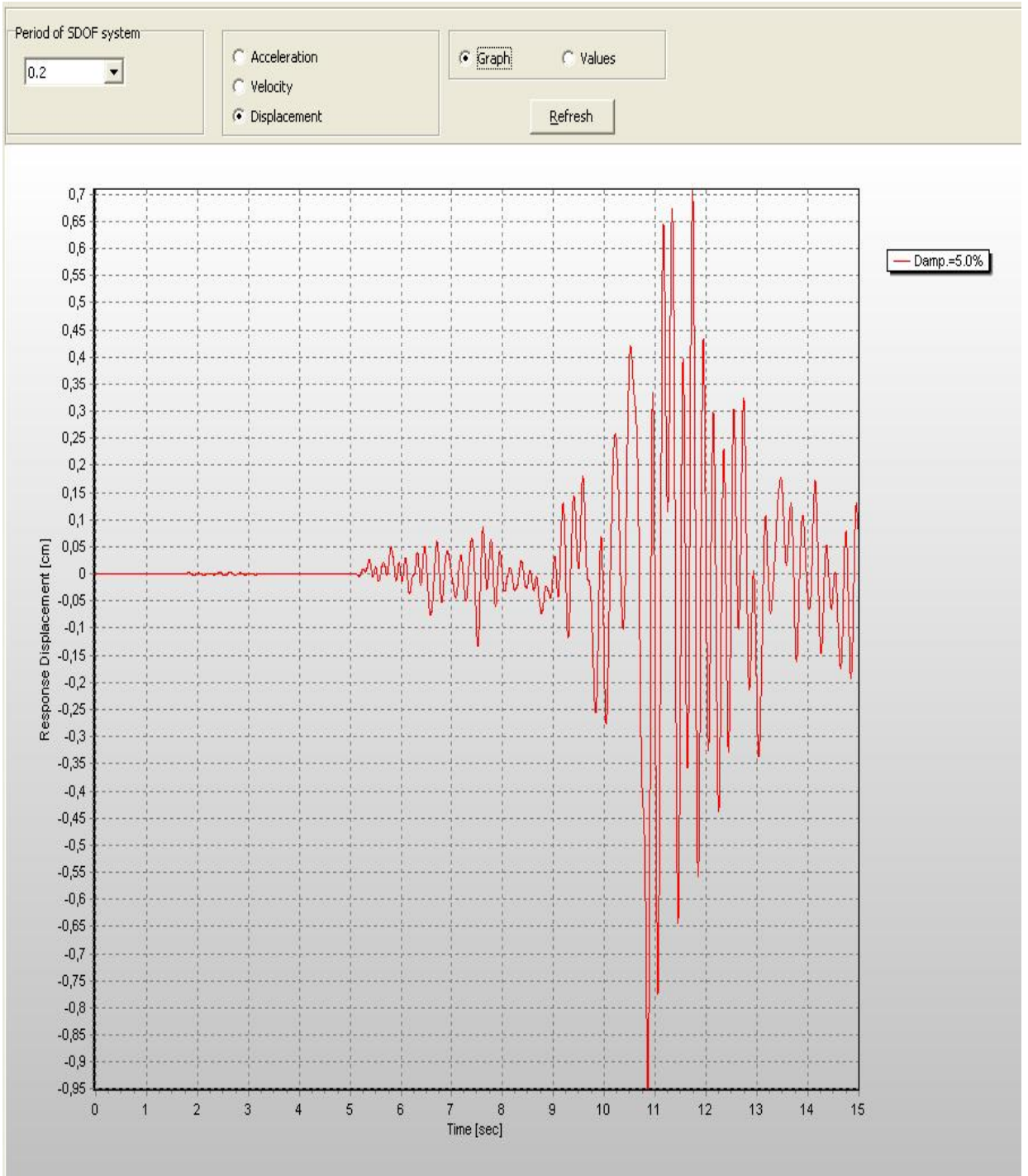
(bkz. Denklem (5.5)). Farklı periyotlara sahip tek serbestlik dereceli sistemleri göz önüne almak, rijitlikleri ve kütleleri farklı tek serbestlik dereceli sistemler için hesap yapmayı sağlar.



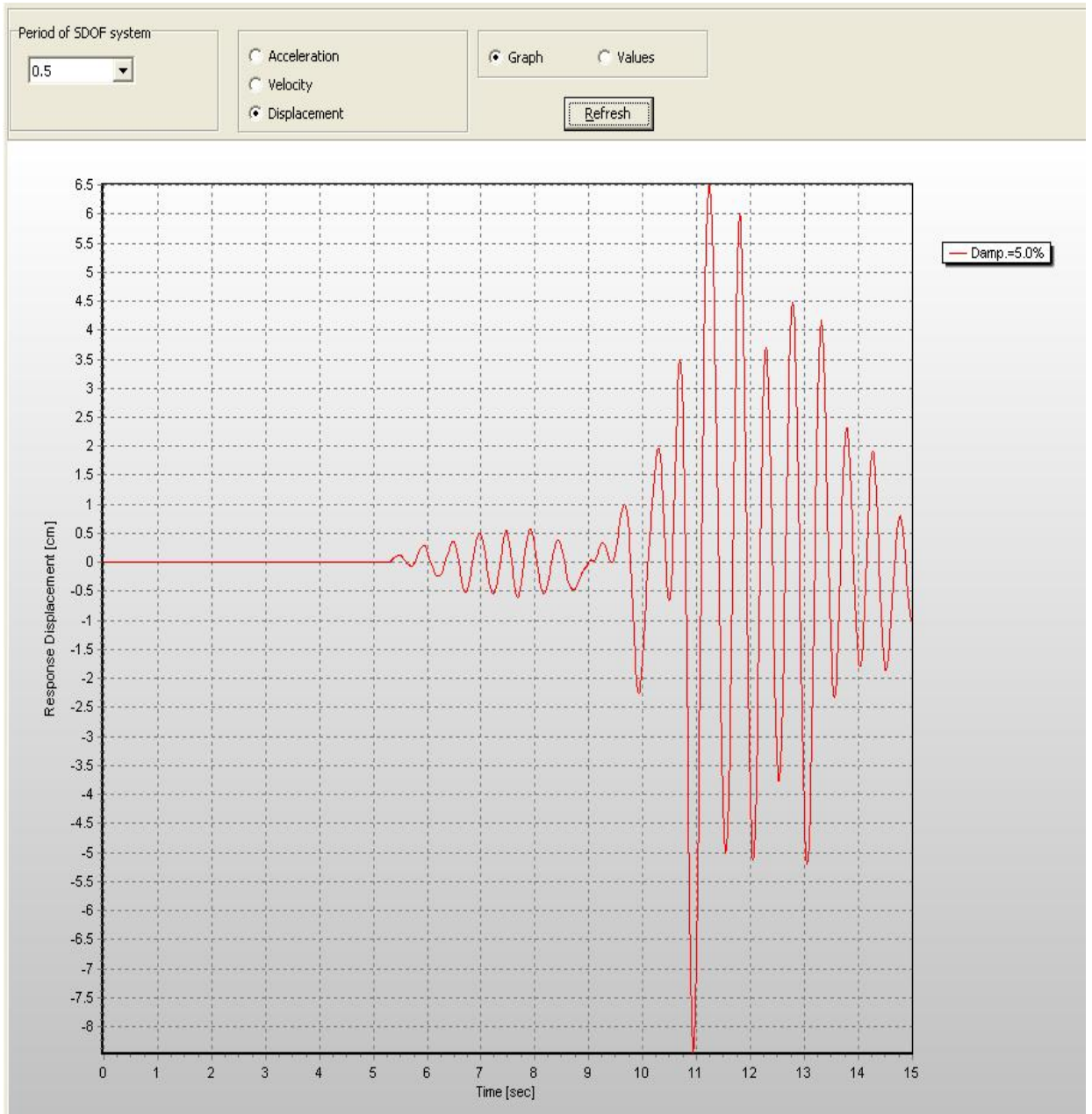
Şekil 5.5 Kocaeli depremi Bolu istasyonu kaydı maksimum yer ivmesi değeri



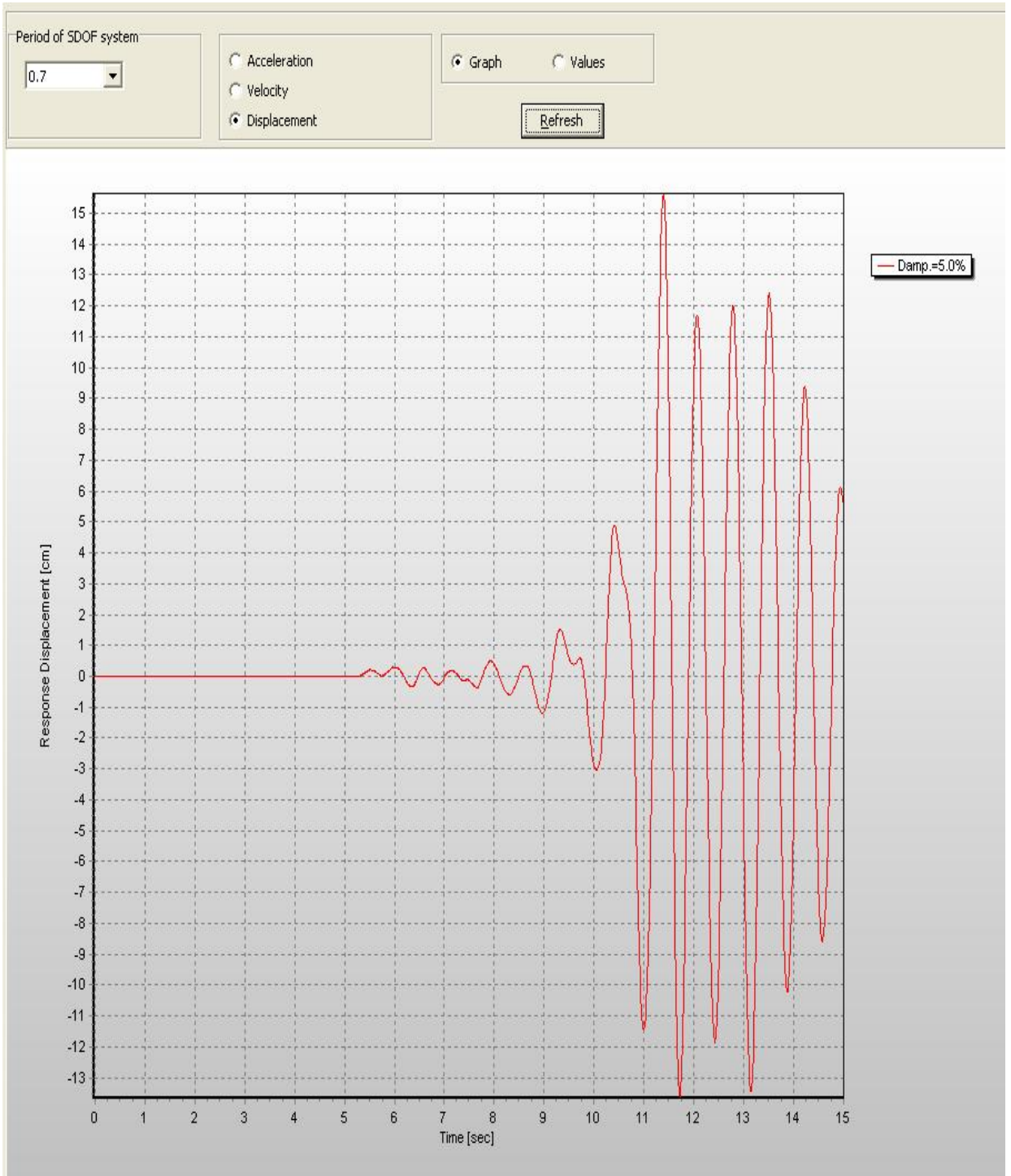
Şekil 5.6 Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapılar



Şekil 5.7 0.2 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı



Şekil 5.8 0.5 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı



Şekil 5.9 0.7 sn Periyotlu tek serbestlik dereceli yapının deprem yükü altında davranışı

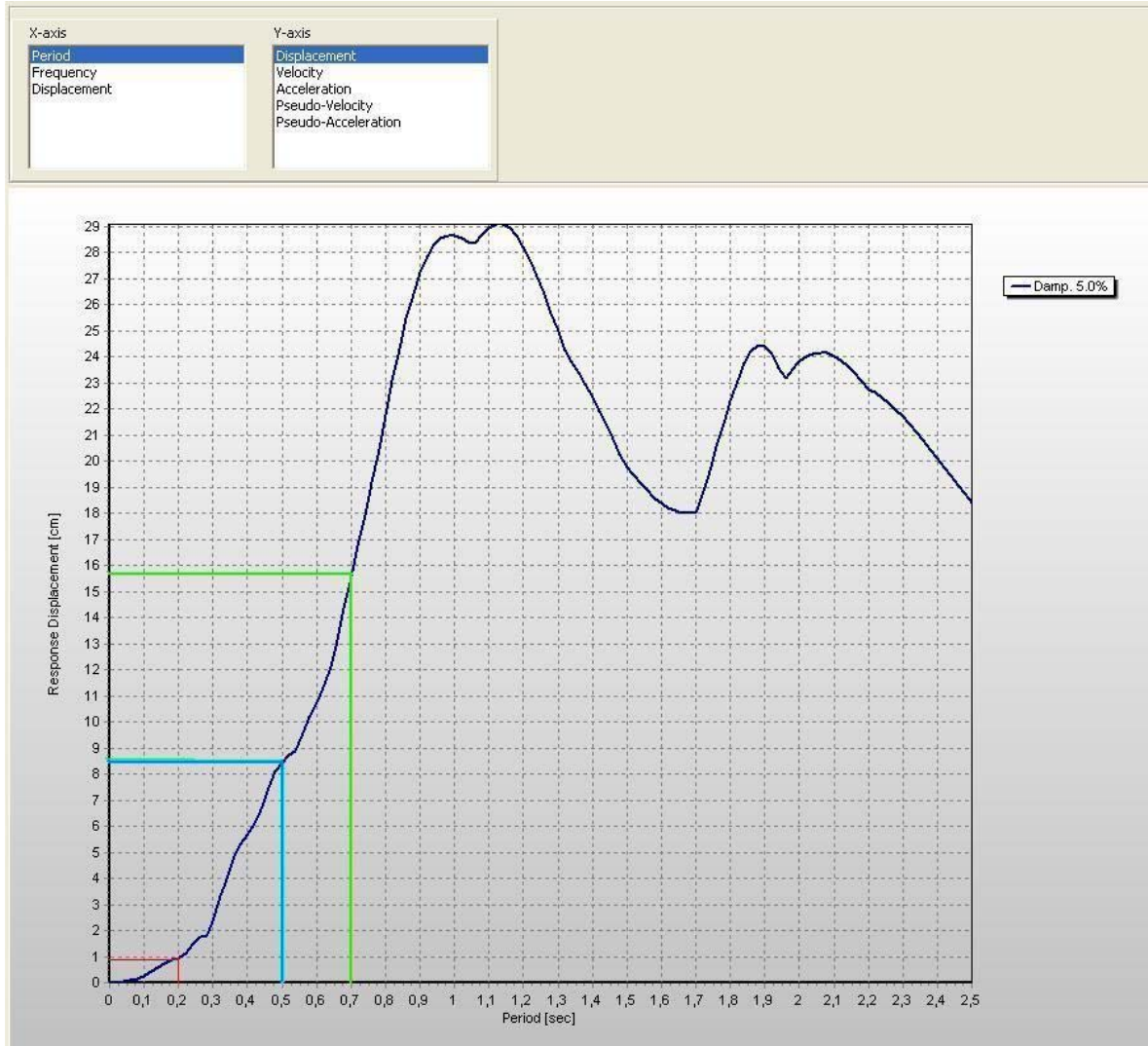
Çizelge 5.1 Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapıların deprem yüklemesi altında davranışı

No	Yapı Peryodu T(sn)	Sönüm %	Maksimum Deplasman SD (cm)	Maksimum Deplasman Zamanı (sn)
1	0,2	5	-0,949	10,850
2	0,5	5	-8,446	10,940
3	0,7	5	15,587	11,390

Ele alınan deprem kaydının max yer ivmesi $805,878 \text{ cm/sn}^2$ olan değeri 10,08. sn de oluşmuştur.

Yapı tasarımında, çoğu zaman, yapıya etkiyen yüklerin zamana bağlı olarak değişimi tasarımcıyı ilgilendirmez. Tasarıma esas olan, yapıya etkiyen yüklerin alabileceği en büyük değerdir. Dolayısıyla tasarım açısından, Şekil 5 lerde verilmiş olan yerdeğiştirme-zaman değişiminden çok, bu zaman aralığında yerdeğiştirmenin aldığı en büyük değer önemlidir. Her bir sistem için bu yerdeğiştirme Çizelge 5.1' de gösterilmiştir.

Bu kez (5.6) denklemi, sabit bir sönüm oranı için, yukarıda tarif edildiği gibi periyotları farklı (örneğin $0,01 < T < 2,5$ s arasında 0,01s lik artımlarla) birçok tek serbestlik dereceli sistem için çözülür, elde edilen en büyük yerdeğiştirmeler, yatay eksen de yapı periyodunu, düşey eksen de en büyük yerdeğiştirmeyi gösteren bir grafiğe işaretlenirse, Şekil 5.10' da gösterilen yerdeğiştirme spektrumu elde edilir.



Şekil 5.10 1999 Kocaeli depremi Bolu istasyonu kaydından seismosignal programı vasıtasıyla elde edilmiş olan yerdeğiştirme spektrumu

Yukarıdaki paragrafta açıklandığı gibi, yerdeğiştirme spektrumları, belirli bir yer hareketi etkisinde, sabit bir sönüm oranı için, periyotları farklı tek serbestlik dereceli sistemlerin yapacağı en büyük yerdeğiştirme değerlerini gösterirler. Bu spektrumdan, periyoda bağlı olarak okunacak yerdeğiştirmeye de spektral yerdeğiştirme (spectral displacement - SD) adı verilir. Yerdeğiştirme en büyük değerini aldığı anda, yapıda oluşan iç kuvvetleri veren bağıntı (5.7) denklemiyle bulunabilir.

$$F = k(u_{\max}) = k(SD) \quad (5.7)$$

F kuvvetinin, yapıya statik olarak etkidiği varsayılp, statikten bilinen yöntemlerle iç kuvvetler hesaplanabilir. Bu durumda bulunacak iç kuvvetler, yer hareketi etkisinde oluşan en büyük iç

kuvvetler olarak kabul edilip, tasarımda kullanılabilirler. (5.7) denklemi, (5.5) denklemi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F = m\omega^2(SD) \quad (5.8)$$

(5.8) denklemi, yerdeğiştirmenin en büyük değerine ulaştığı anda yapıya geçen kuvvetin, eylemsizlik kuvveti cinsinden ifadesidir. Bir cisme etkiyen yük, Newton kanunu gereği, cismin kütlesiyle ivmesinin çarpımına eşittir. Bu durumda, (5.8) denkleminde $\omega^2(SD)$ terimleri ivmeyi ifade ederler. Dolayısıyla, spektral yerdeğiştirmesi belirli bir sistem için ivme değeri, sistemin spektral yerdeğiştirmesi ile açısal frekansının karesinin çarpımıyla bulunabilir.

Bu ivme değeri, (5.6) denkleminin çözümüyle de elde edilebilir. Toplam ivme (yapının ivmesiyle yer ivmesinin toplamı), (5.6) denkleminin çözümüyle aşağıdaki gibi bulunur.

$$\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t) = -2m\omega\xi\dot{u}(t) - \omega^2 u(t) \quad (5.9)$$

Yerdeğiştirmenin en büyük değerine ulaştığı an $t = t_i$ olarak kabul edilirse, bu denklem, yerdeğiştirmenin en büyük değerine ulaştığı t_i anı için, yani spektral yerdeğiştirme için (5.42) denklemindeki gibi yazılabilir.

$$\ddot{u}(t_i) + \ddot{u}_g(t_i) = -2m\omega\xi\dot{u}(t_i) - \omega^2 u_{\max}(t) = -2m\omega\xi\dot{u}(t_i) - \omega^2 SD \quad (5.10)$$

Yerdeğiştirme en büyük değerine ulaştığı an, hız $\dot{u}(t_i)$ sıfıra eşit olacağından $-2m\omega\xi\dot{u}(t_i)$ terimi de sıfır olacaktır. Bu durumda (5.10) denklemi aşağıdaki halini alır.

$$\ddot{u}(t_i) + \ddot{u}_g(t_i) = -\omega^2 SD \quad (5.11)$$

Görüldüğü gibi (5.11) denklemiyle bulunan ivme, sistemin spektral yerdeğiştirmesi ve açısal frekansının çarpımıyla bulunan ivmenin mutlak değerce aynısıdır. Ancak bu durum, sadece, yerdeğiştirmenin en büyük değerine ulaştığı an geçerlidir. Aksi halde hız sıfırdan farklı olacağından her iki şekilde bulunacak ivme değerleri farklı olacaktır. $\omega^2 SD$ ile $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ sönümsüz sistemler için her zaman eşittir, sönümsüz bir sistemde $\xi = 0$ olacağından $-2m\omega\xi\dot{u}(t_i)$ her zaman sıfırdır. Ayrıca, bu şekilde bulunan ivme $\omega^2 SD$ toplam ivmenin $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ en büyük değeri değildir. Yerdeğiştirmenin en büyük değerini aldığı an oluşan ivmedir. Toplam ivme, en büyük değerine yer hareketi süresince başka bir “t” anında ulaşır.

Ancak, yapıya statik olarak etki ettirilecek kuvvetin hesabı için, (5.7) ve (5.8) denklemlerinden de görüleceği gibi toplam ivmenin en büyük değeri değil, en büyük yerdeğiştirmeye karşılık gelen ivme değeri gereklidir. Çünkü yapıya geçen kuvvet göreceli yerdeğiştirmeyle orantılıdır. Bu aşamada, spektrum tanımını hatırlamakta fayda vardır. Yerdeğiştirme spektrumunda açıklandığı gibi, spektrumlar, belirli bir yer hareketi etkisinde, sabit bir sönüm oranı için, periyotları farklı tek serbestlik dereceli sistemlerin o yer hareketine vereceği tepkinin (response) (yerdeğiştirme, hız, ivme) en büyük değerini gösterirler. Yerdeğiştirme spektrumuyla, periyotları farklı tek serbestlik dereceli sistemlerin, o yer hareketi altında yapacakları en büyük yerdeğiştirmelerin gösterildiğinden yukarıda söz edilmişti. Bu tanımdan hareketle, ivme spektrumuyla da, periyodu farklı tek serbestlik dereceli sistemlerin, o yer hareketi altında, maruz kalacakları toplam ivmenin $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ en büyük değerlerinin gösterileceği düşünülebilir.

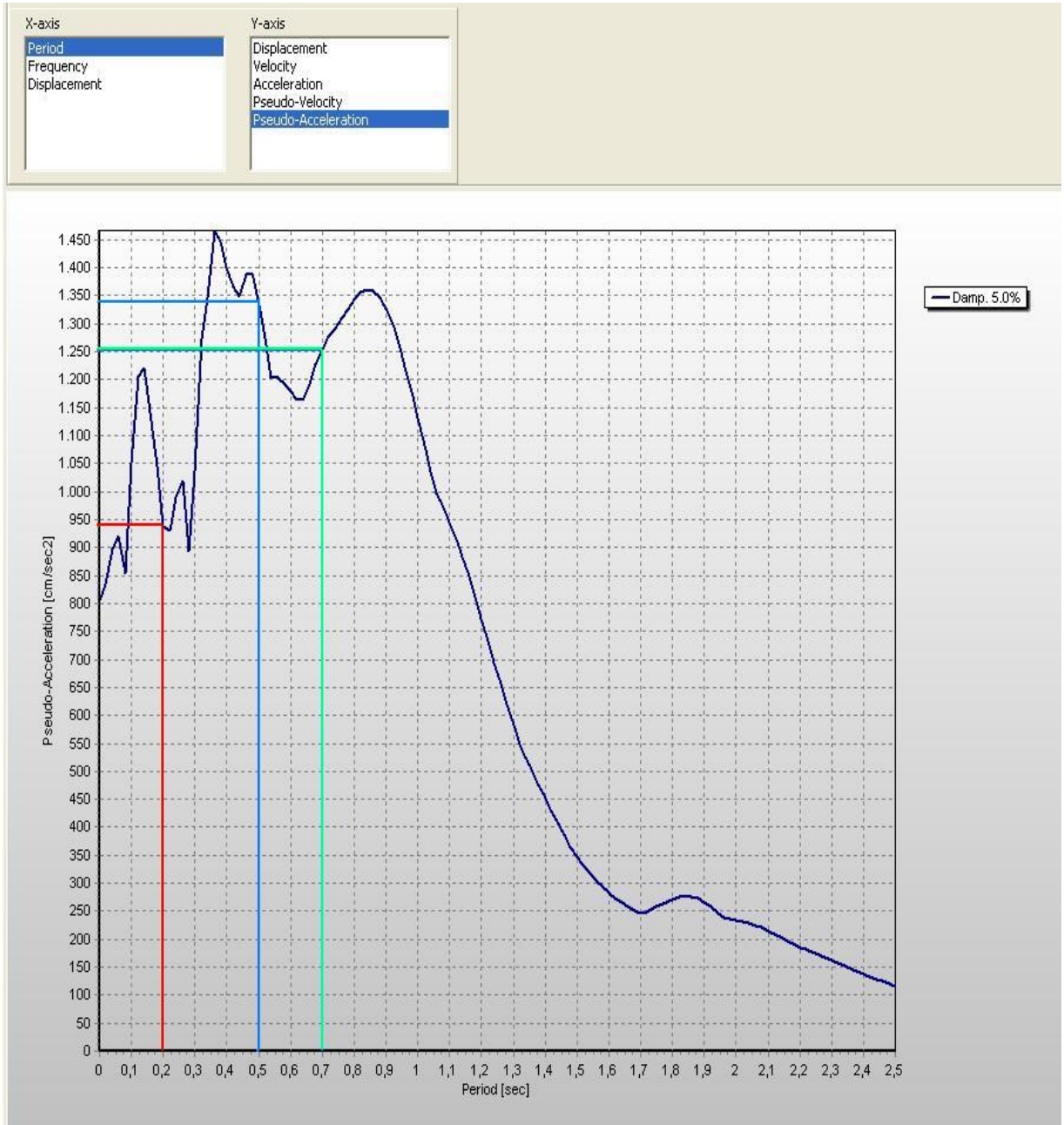
Ancak, yapıda oluşan iç kuvvetlerin, eylemsizlik kuvveti cinsinden hesabında kullanılacak spektrum, toplam ivme $\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$ yerine, yerdeğiştirmenin en büyük değerini aldığı andaki ivmeyi $\omega^2 SD$ gösterir.

İç kuvvetlerin eylemsizlik kuvveti cinsinden hesabında (denklem (5.8)), toplam ivmenin en büyük değeri yerine kullanılan bu ivmeye $\omega^2 SD$ sözde ivme veya yalancı ivme (pseudo acceleration), periyotları farklı tek serbestlik dereceli sistemlerin sözde ivme değerlerini gösteren spektruma da sözde ivme davranış spektrumu (pseudo acceleration spectra) adı verilir. Yerdeğiştirme spektrumu elde edildikten sonra, her bir periyot değeri için $\omega^2 SD$ değeri hesaplanarak sözde ivme davranış spektrumu elde edilir. Bu spektrumdan, belirli bir periyot için okunacak ivme değeri de sözde spektral ivme (pseudo spectral acceleration — PSA) olarak adlandırılır. Sözde spektral ivmeyle spektral yerdeğiştirme arasındaki ilişki (5.12) denkleminde verilmiştir.

$$PSA = \omega^2 SD \quad (5.12)$$

Şekil 5.11' de, Bolu kaydı için elde edilen sözde ivme davranış spektrumu gösterilmiştir. Şekil 5.7-5.9' da verilmiş olan sistemlerin sözde spektral ivmeleri de davranış spektrumu üzerinde işaretlenmiştir. Örneğin, periyodu 0,5 sn olan tek serbestlik dereceli sistem için, (5.12) denklemi kullanılarak,

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{0.5} \right)^2 = 157,75 \frac{1}{sn^2} \Rightarrow PSA = 157,75 * 8,446 = 1332,365 \frac{cm}{sn^2} \quad (5.13)$$

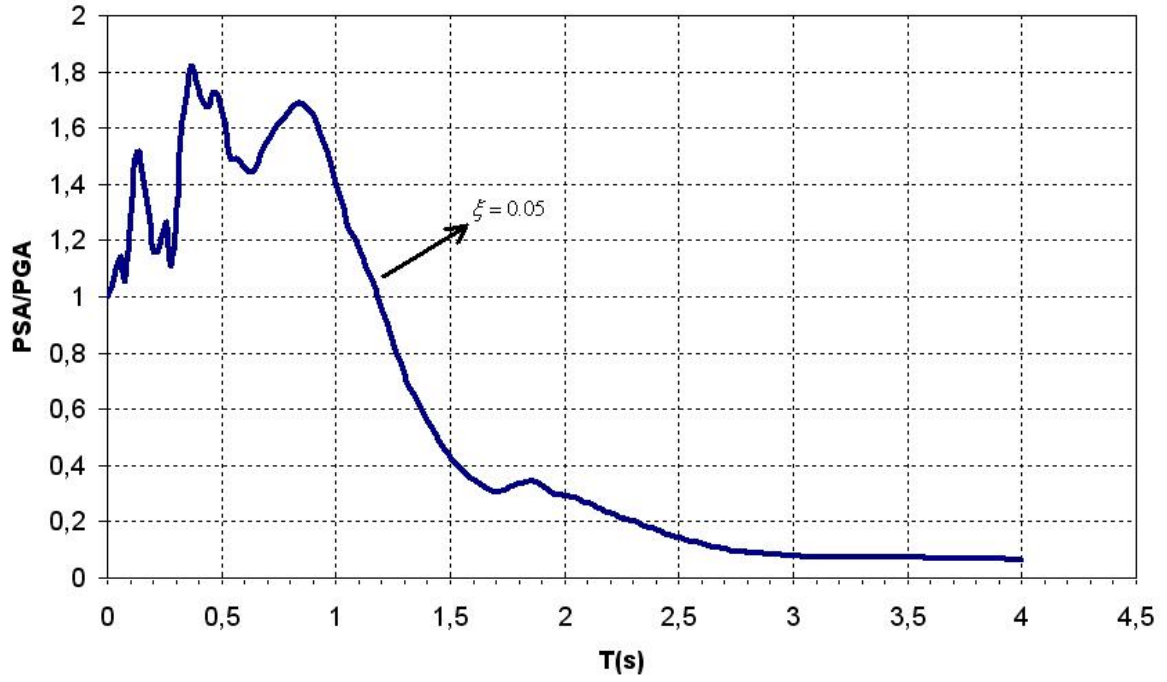


Şekil 5.11 Kocaeli depremi Bolu istasyonu kaydının seismosignal programı vasıtasıyla elde edilmiş sözde ivme davranış spektrumu

Çizelge 5.2 Tek serbestlik dereceli farklı periyotlu yapıların deprem yüklemesi altında davranışı

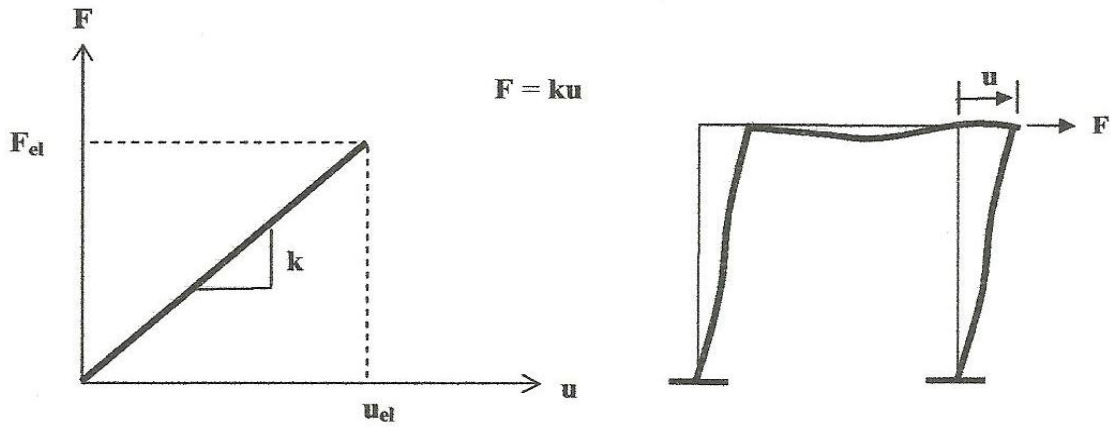
No	Yapı Periyodu T(sn)	Sönüm %	Spektral Deplasman SD (cm)	Maksimum Spektral Deplasman Zamanı (sn)	Sözde Spektral İvme $\omega^2 SD$ (cm/sn ²)	Sözde Spektral İvme Zamanı (sn)
1	0,20	5	-0,949	10,850	-935,676	10,805
2	0,50	5	-8,446	10,940	-1332,387	10,930
3	0,70	5	15,587	11,390	1254,544	11,380
4	0,90	5	27,234	11,510	-1333,430	11,500
5	1,10	5	-28,962	11,190	950,684	11,170
6	1,50	5	19,774	12,030	-348,488	12,010
7	1,80	5	-23,250	16,860	284,358	16,830
8	2,10	5	-30,099	17,340	270,962	17,310
9	2,70	5	15,470	19,340	101,323	20,620
10	3,00	5	21,913	19,390	108,334	20,790
11	3,50	5	22,608	19,770	-73,282	19,690

Şekil 5.11’ de görüldüğü gibi, yatay eksen yerdeğiştirme spektrumunda olduğu gibi tek serbestlik dereceli sistemlere ait periyotları, düşey eksen ise bu defa sözde spektral ivmeleri göstermektedir. Burada unutulmaması gereken nokta, Şekil 5.11’ de verilen sözde ivme davranış spektrumunun sadece bir depremin, belirli bir bölgeden alınmış kaydı için çizildiğidir. Dolayısıyla, sadece o yer kaydı için geçerlidir. **Farklı yer hareketleri için çizilmiş davranış spektrumlarını birbiriyle karşılaştırabilmek için, sözde ivme değerleri geçerli oldukları yer hareketine ait maksimum yer ivmesiyle (peak ground acceleration-PGA) normalize edilir ve normalize edilmiş sözde ivme davranış spektrumları çizilir.** Şekil 5.12’ de, Şekil 5.11’ de verilen sözde ivme davranış spektrumunun normalize edilmiş hali gösterilmiştir. Bolu kaydının en büyük yer ivmesi (PGA) değeri olan 805,878 cm/sn² lik ivmesi 10,08. sn de meydana gelmişti. Periyodu 0.5 sn olan tek serbestlik dereceli sistem için sözde ivme değeri 1332,39 cm/sn² olarak bulunmuştu. Bu durumda, söz konusu sistem için normalize ivme $\frac{PSA}{PGA} = \frac{1332,39}{805,878} = 1,653$ olacaktır.



Şekil 5.12 Normalize edilmiş sözde ivme davranış spektrumu (1999-Kocaeli depremi-Bolu istasyonu yer kaydı)

Buraya kadar yapılan açıklamalar yapı davranışının doğrusal elastik olduğu varsayımına dayanmaktadır. Şekil 5.13' de bu varsayım şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.13 Doğrusal elastik davranış varsayımı

Şekil 5.14' de görüleceği üzere, doğrusal elastik davranış durumunda, yapıya etkiyen kuvvet ile yapının yerdeğiştirmesi birbiriyle orantılıdır. Benzer biçimde, doğrusal elastik davranış

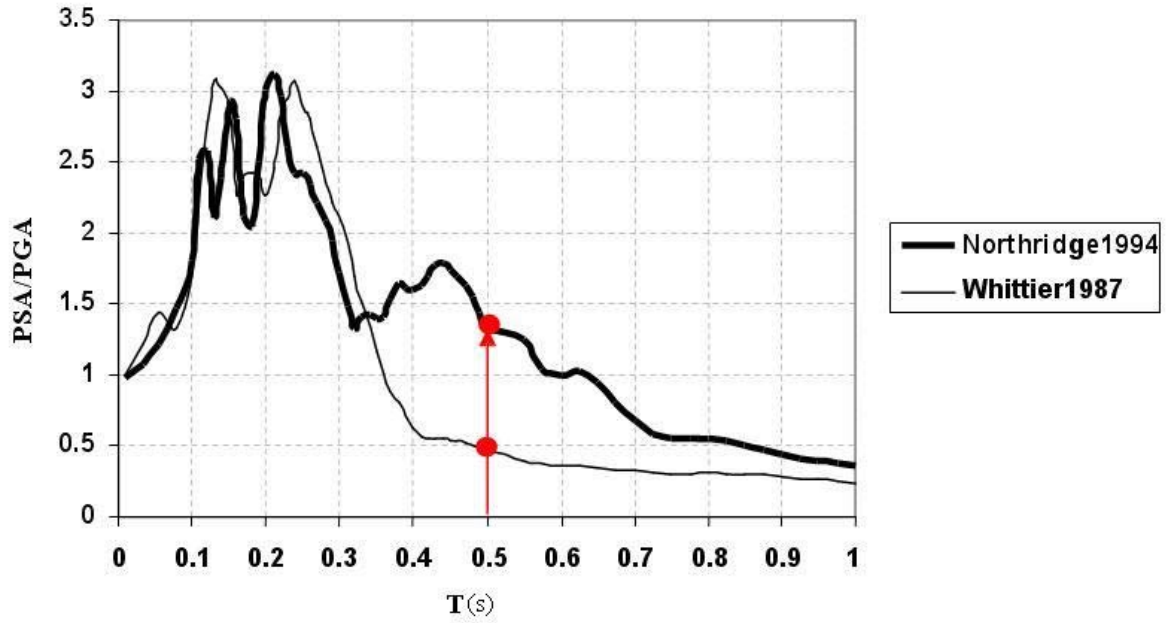
kabulü ile çizilecek spektrumlar vasıtasıyla elde edilecek deprem kuvveti de elastik deprem yükü olacaktır. Sonuç olarak elastik deprem kuvveti, sözde spektral ivme kullanılarak, eylemsizlik kuvveti cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F_{el} = m (PSA) \quad (5.14)$$

5.3 Boyutlama (Tasarım) Spektrumu

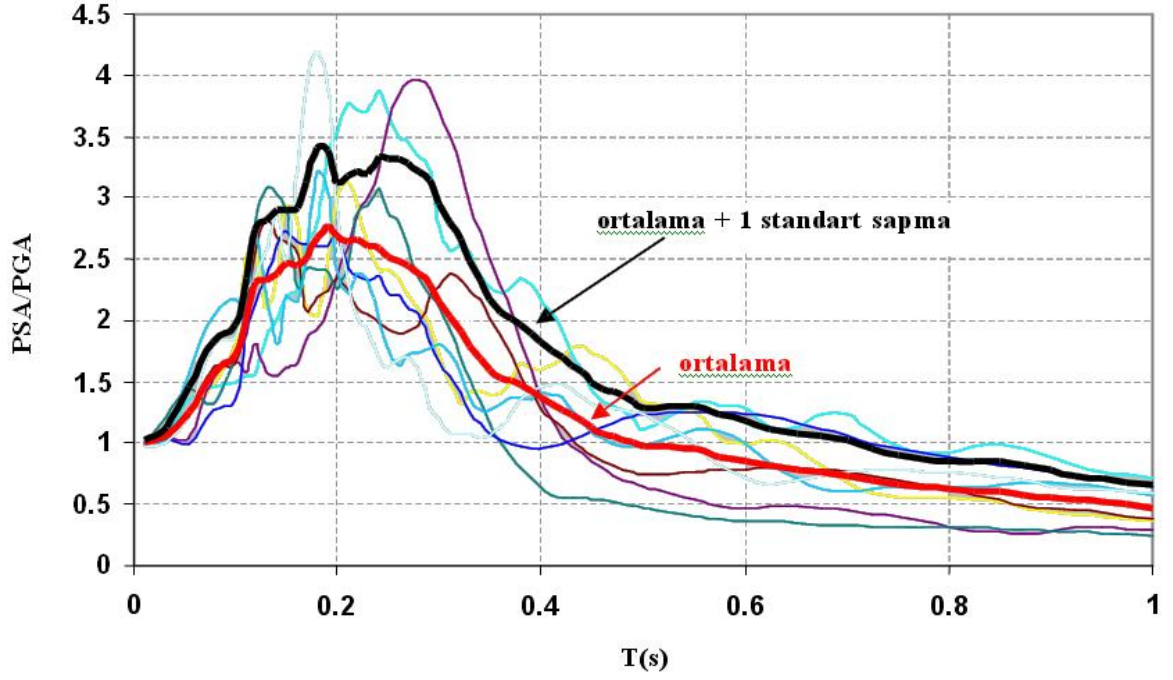
Spektrumların, belirli bir yer hareketi etkisinde, sabit sönüm oranı için, tek serbestlik dereceli sistemlerin, o yer hareketine verdiği tepkinin (ivme, hız, yerdeğiştirme) en büyük değerini gösterdiğinden daha önce söz edilmişti.

Tasarım spektrumları ise yeni yapıların tasarımında kullanılacak deprem yükünü belirlemekte kullanılır. Başka bir deyişle, tasarım spektrumu, kaydedilmiş bir deprem için değil, gelecekte ortaya çıkması olası depremler için belirlenir. Doğaldır ki, bir bölgede, gelecekte ortaya çıkması olası depremlere ilişkin bir tasarım spektrumu hazırlamak için, aynı bölgede geçmişte ortaya çıkmış depremlerden yararlanılır. Eğer, o bölgede, geçmişte yeteri kadar kayıt elde edilememişse, bu durumda benzer özelliklere sahip (deprem odağının kayıt yerinden olan uzaklığı, fay mekanizması, sismik dalgaların yayıldığı zemin cinsi ve yerel zemin koşulları gibi) başka bir bölgede elde edilmiş kayıtlardan yararlanılır. Şekil 12 ve 11' de görüldüğü gibi, tek bir yer hareketi için çizilmiş ivme spektrumu kırıklı bir yapıya sahiptir. Aynı bölgede, farklı zamanlarda kaydedilmiş yer hareketleri için çizilecek spektrumlar da benzer şekilde kırıklı olacaktır. Şekil 5.14' de, Los Angeles Obregon Park istasyonunda, 1987 Whittier ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış kayıtlara ait spektrumlar görülmektedir.



Şekil 5.14 1987 Whittier ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış kayıtlara ait spektrumlar görülmektedir.

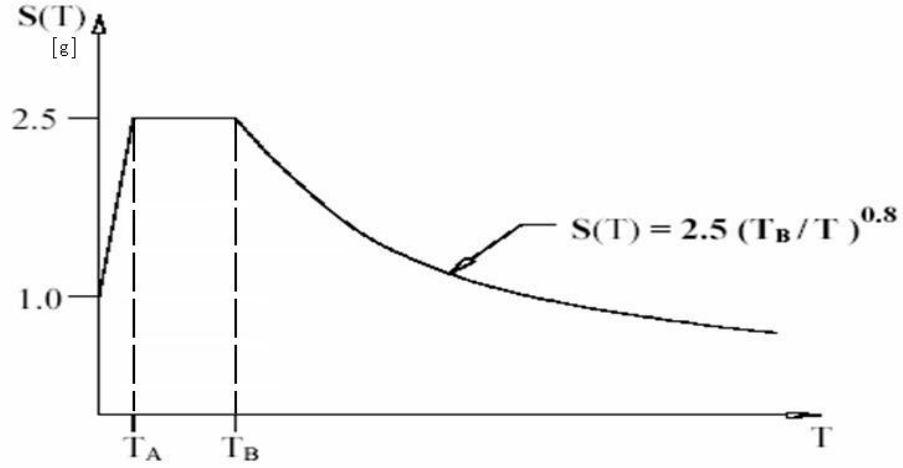
Görüldüğü gibi spektrumlar genel karakteristikleri itibarıyla birbirinden farklı ve oldukça kırıklıdır. Bu farklılıklar nedeniyle, örneğin, periyodu 0.5s olan tek serbestlik dereceli sistem için birbirinden çok farklı değerler almaktadırlar. Ayrıca, maksimum değerlerine de farklı periyotlarda ulaşmaktadırlar. Bu durumda, aynı bölgede kaydedilmiş olmalarına rağmen, bu depremlerin hiç biri tek başlarına, gelecekte gerçekleşmesi olası depremleri temsil etmezler. Zaten gelecekte gerçekleşmesi olası depremler için böylesine kırıklı bir spektrum tahmin etmek olanaklı değildir. Ancak, bu bölge için bir tasarım spektrumu elde etmekte kullanılabilirler. Tasarım spektrumları, genelde, o bölgede kaydedilmiş çok sayıda deprem için çizilmiş spektrumların istatistik yöntemlerle değerlendirilmesi sonucu elde edilirler. Kimi zaman, her dönem değeri için, farklı spektrumlarda elde edilen değerlerin ortalaması kullanılır. Bazı durumlarda ise ortalama yerine, ortalamaya standart sapmanın eklenmesiyle (ortalama+1standart sapma) elde edilen spektrum tasarım spektrumu olarak kabul edilir. Bazen de, eldeki bütün spektrumları içine alan zarf spektrumu tasarım spektrumu olarak kullanılabilir. Şekil 5.15’ de, sözü edilen istasyonda, 1987 Whittier, 1991 Sierra ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış 8 farklı kayıt için çizilen spektrumlar, ortalama spektrum ve ortalama+1standart sapmaya karşılık gelen spektrum gösterilmiştir.



Şekil 5.15 Los Angeles Obregan Park istasyonunda, 1987 Whittier, 1991 Sierra ve 1994 Northridge depremlerinde alınmış 8 farklı kayıt için çizilen spektrumlar, ortalama spektrum ve ortalama + 1 standart sapmaya karşılık gelen spektrum

İstatistik değerlendirmenin sonucunda, Şekil 5.15’ de de görüldüğü gibi daha düzgün ve yumuşak spektrumlar elde edilir. Göz önüne alınan yer hareketi sayısı arttıkça, istatistik değerlendirmeye elde edilen eğrilerin kırıklığı azalır. Bu nedenle, yönetmeliklerde verilen spektrumlar, tek bir yer hareketi için çizilmiş spektrumlara göre çok daha düzgündür. ABYYHY98’de elastik deprem yükünü hesaplamakta kullanılacak, normalize edilmiş elastik tasarım spektrumu, yerel zemin sınıflarına bağlı olarak verilmiştir. Bu spektrum genel haliyle Şekil 5.16’ da gösterilmiştir. Şekil 5.16’ da verilmiş olan spektrumun yatay ekseninde yapı periyodu, düşey ekseninde ise $S(T)$ ile gösterilen yapı periyoduna bağlı spektrum katsayısı verilmiştir. Spektrum katsayısı terimi, Şekil 5.15’ de verilen normalize edilmiş spektrumda gösterilmiş olan (PSA/PGA) parametresine karşılık gelir.

Elastik deprem yükünün hesabı için spektrum katsayısının verilmiş olması yeterli değildir. Sözde spektral ivmenin belirlenebilmesi için maksimum yer ivmesi (PGA) değerine ihtiyaç vardır. Maksimum yer ivmesi, ABYYHY98’de etkin yer ivmesi katsayısına (A_o) bağlı olarak verilmiştir. Çizelge 5.3’ de, deprem bölgesine bağlı olarak kullanılması gereken etkin yer ivmesi katsayıları verilmiştir.



Şekil 5.16 1998 Türk deprem yönetmeliğinde önerilen (elastik) spektrum katsayısı eğrisi

Çizelge 5.3 Etkin yer ivmesi katsayısı

Deprem Bölgesi	A_0
1	0.40
2	0.30
3	0.20
4	0.10

Maksimum yer ivmesi ile etkin yer ivmesi katsayısı arasında aşağıdaki ilişki vardır:

$$PGA = A_0 g$$

Böylece, elastik deprem kuvvetini hesaplamak için gerekli olan ve spektrum katsayısı ile etkin yer ivmesi katsayısının ve yer çekimi ivmesinin çarpılması ile bulunacak olan sözde spektral ivme değeri tanımlanmış olmaktadır.

$$PSA = \left(\frac{PSA}{PGA} \right) PGA \rightarrow A_0 g \text{ [Yönetmelikte deprem bölgesine bağlı olarak verilir]}$$

$$\downarrow$$

$$S(T) \text{ [Yönetmelikte yerel zemin sınıfına bağlı olarak verilir]}$$

$$PSA = S(T) A_0 g$$

Şekil 5.16' da verilmiş olan spektrumun yatay ekseninde görülen T_A ve T_B periyotları, spektrum karakteristik periyotları olarak adlandırılırlar. Bu periyotlar, ABYYHY98'de yerel zemin sınıfına bağlı olarak verilmiştir.

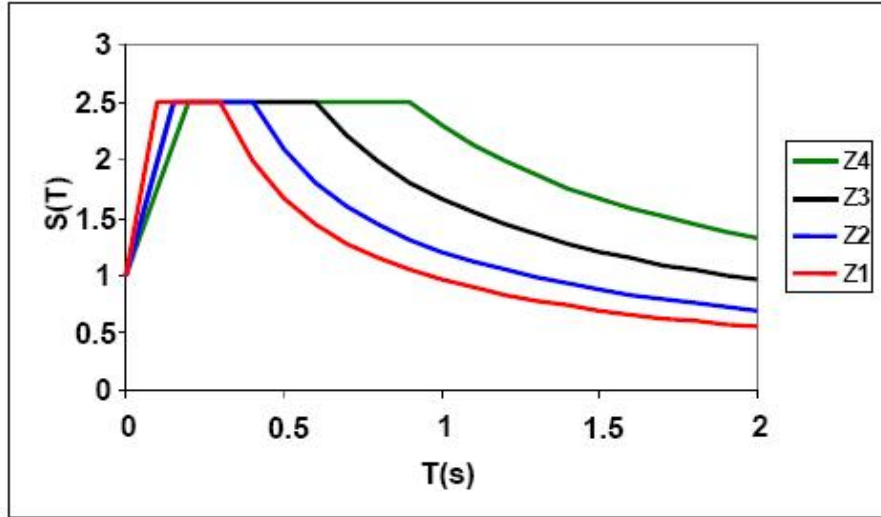
Çizelge 5.4 Spektrum karakteristik periyotları

Yerel Zemin Sınıfı	T_A (saniye)	T_B (saniye)
Z1	0.10	0.30
Z2	0.15	0.40
Z3	0.15	0.60
Z4	0.20	0.90

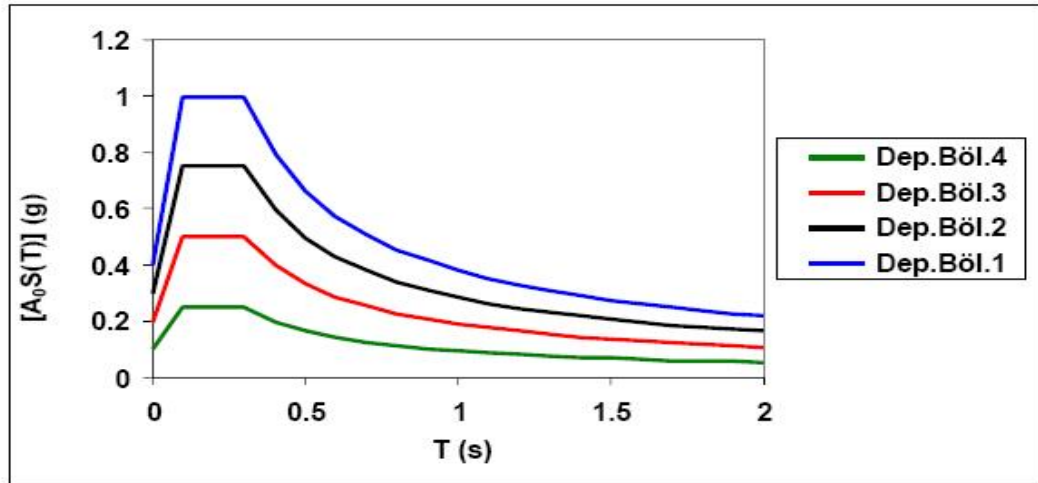
Böylece, her bir yerel zemin sınıfı ve deprem bölgesi için, elastik deprem yükünü hesaplamakta kullanılacak olan sözde ivme spektrumu tanımlanmış olmaktadır. Şekil 5.17’ de her bir yerel zemin sınıfı için spektrum katsayıları gösterilmiştir. Şekil 5.18’ de ise yerel zemin sınıfı 1 için, 1., 2., 3. ve 4. derece deprem bölgelerinde kullanılacak olan sözde ivme spektrumu gösterilmiştir.

Bir yapının tasarımına esas alınacak elastik deprem yükü, eğer tasarımda kullanılmak üzere hazırlanmış bir sözde ivme spektrumu varsa, (5.14) denklemiyle bulunabilir. 1. derece deprem bölgesinde, ağırlığı 2000 kN, periyodu 0.5sn. olan bir yapının tasarımında kullanılacak elastik deprem yükünü, zemin sınıfı 4 için hesaplayalım. Yapı 1. derece deprem bölgesinde yer aldığı için etkin yer ivmesi katsayısı (A_0) 0.40, başka bir deyişle, en büyük yer ivmesi (PGA) 0.40g olacaktır. (5.14) denklemi, sözde spektral ivme yerine, maksimum yer ivmesine göre normalize edilmiş ivme cinsinden yeniden yazılacak olursa (5.15) denklemi elde edilir.

$$F_{el} = m \left(\frac{PSA}{PGA} \right) PGA \text{ eder.} \quad (5.15)$$



Şekil 5.17 Yerel zemin sınıfına bağlı spektrum katsayıları



Şekil 5.18 Yerel zemin sınıfı 1 için ivme spektrumları

(5.15) denklemi eldeki veriler yerine konulduğunda aşağıdaki halini alır. $\frac{PSA}{PGA}$ oranı başka bir anlam ifade ettiğinden, bu oranda PGA yerine 0.40g yazılmamıştır.

$$F_{el} = m \left(\frac{PSA}{PGA} \right) 0.40g \quad (5.16)$$

$$F_{el} = W \left(\frac{PSA}{PGA} \right) 0.40 \quad (5.17)$$

Etkin yer ivmesi katsayısının (A_o) 1. derece deprem bölgesi için 0.40 olduğu daha önce belirtilmişti. Bu durumda (5.17) denklemi (5.18a) deki gibi yazılabilir.

$$F_{el} = W \left(\frac{PSA}{PGA} \right) A_0 \quad (5.18a)$$

Bu aşamada, elastik deprem kuvvetinin hesabı için $\frac{PSA}{PGA}$ oranının belirlenmesi gereklidir. Bu oran, yönetmelikte spektrum katsayısı ($S(T)$) olarak tanımlandığı daha önce belirtilmişti.

Ayrıca, bu oranın, sözde ivme spektrumu değerinin maksimum yer ivmesiyle normalize edilmesi sonucu elde edilebileceği de açıklanmıştı (Şekil 5.12). Bu durumda (5.18a) denklemi (5.18b) denklemindeki halini alır.

$$F_{el} = WS(T)A_0 \quad (5.18b)$$

ABYYHY98, yapıların tasarımında kullanılacak olan elastik deprem yükünün (5.18b) denklemiyle hesaplanmasını öngörmektedir. Bununla beraber, bu elastik deprem yükü, konut, işyeri ve oteller gibi yapıların tasarımında kullanılacak deprem yüküdür. Kamu binaları, okullar, yurtlar, askeri kışlalar, hastaneler, enerji üretim, dağıtım tesisleri, depremde hemen sonra kullanılması gereken yapılar ve halkın kısa süreli de olsa yoğun olarak bulunduğu tiyatro, sinema, spor salonları gibi yapılar için kullanılacak deprem yükü, (5.18b) denklemiyle bulunan deprem yükünün birden büyük bir katsayıyla çarpılması sonucu arttırılır. Bu katsayıya bina önem katsayısı (I) denir.

Çizelge 5.5 Bina önem katsayısı (I)

<i>Binanın Kullanım Amacı veya Türü</i>	<i>Bina Önem Katsayısı (I)</i>
<u>1. Deprem sonrası kullanımı gereken binalar ve tehlikeli madde içeren binalar</u> a) Deprem sonrasında hemen kullanılması gerekli binalar (Hastaneler,dispanserler, sağlık ocakları, itfaiye bina ve tesisleri, PTT ve diğer haberleşme tesisleri, ulaşım istasyonları ve terminalleri, enerji üretim ve dağıtım tesisleri; vilayet, kaymakamlık ve belediye yönetim binaları, ilk yardım ve afet planlama istasyonları) b) Toksik, patlayıcı, parlayıcı, vb özellikleri olan maddelerin bulunduğu veya depolandığı binalar	1.5
<u>2. İnsanların uzun süreli ve yoğun olarak bulunduğu ve değerli esvanın saklandığı binalar</u> a) Okullar, diğer eğitim bina ve tesisleri, yurt ve yatakhaneler, askeri kışlalar, cezaevleri, vb. b) Müzeler	1.4
<u>3. İnsanların kısa süreli ve yoğun olarak bulunduğu binalar</u> Spor tesisleri, sinema, tiyatro ve konser salonları, vb.	1.2
<u>4. Diğer binalar</u> Yukarıdaki tanımlara girmeyen diğer binalar (Konutlar, işyerleri, oteller, bina türü endüstri yapıları, vb)	1.0

Bu durumda, (5.18b) denklemi (5.19) denklemindeki halini alır.

$$F_{el} = WS(T)A_0I \quad (5.19)$$

Bina önem katsayısı ABYYHY98'de, Çizelge 5.5' de gösterildiği gibi verilmiştir. Yerel zemin sınıfı 4 ve deprem yükünü hesapladığımız binanın periyodu 0.5sn olduğu için, spektrum katsayısı ($S(T)$) 2,5 olacaktır (Şekil 5.17). Bina kullanım amacının da konut olduğunu varsayarsak, bina önem katsayısı 1 olacaktır. Bu durumda (5.19) denklemi kullanılarak elastik deprem yükü bulunabilir.

$F_{el} = (2000)(2.5)(0.40)(1) = 2000kN$. Eğer bina konut yerine okul olsaydı bina önem katsayısı 1,4 olacağından tasarımda kullanılacak elastik deprem yükü de $2800kN$ olacaktı. (5.19) denkleminde görüldüğü gibi, elastik deprem yükü, bina ağırlığıyla üç tane katsayının çarpımından oluşmaktadır. Bu katsayıların çarpımına, Spektral ivme katsıyı ($A(T)$) adı verilir.

$$A(T) = S(T)A_0I$$

5.4 Spektral Hesap

SAP serisi programlar ile taşıyıcı sistem doğal titreşim özellikleri (frekans, peryot, açısal frekans, mod vektörleri, modal katılım oranları) hesaplanabileceği gibi, spektral hesap (modal maksimumların birleştirilmesi ile hesap), zaman artımı yöntemi ile hesap (time history analysis), kararlı harmonik yük altında hesap yaptırılabilir. Özel değerlerin hesabında Eigen analiz veya Ritz analizi yaptırma imkanı vardır. Bunun için, dikkate alınması istenen mod sayısının tanımlanması gerekir.

Ülkemizde, yapının belirli bir yer hareketinde modal mukabelelerinin bulunarak bunların belirli bir şekilde süperpoze edilmesi yoluyla yapılan hesapların hepsine dinamik hesap veya Modal Süperpozisyon Yöntemi denilmektedir. Modal mukabelelerin eş zamanlı toplanması suretiyle yapılan hesap Zaman Artımı Yöntemi, modal mukabelelerin maksimumlarının (spektral değerlerinin) belirli bir yöntemle birleştirilmesi suretiyle yapılan hesap ise Spektral Hesap adını alır.

Bu durumda deprem spektrumları devreye girer. Deprem spektrumları, deprem etkisine maruz BSD sistemin davranışının (hız, ivme, yerdeğiştirme) serbest titreşim periyoduna bağlı olarak gösterildiği eğrilerdir.

6. SAYISAL HESAPLAMALAR

6.1 Hareket Denklemlerine Toplu Bir Bakış

Sonlu elemanlar yöntemiyle ayrıklaştırılan sistemlerdeki sonlu sayıda ortaya çıkan bilinmeyenler (n) için aynı sayıda denklem yazılır ve elde edilen lineer denklem takımı bilinmeyenler için çözülür. Genel anlamda hareket denklemleri sistemi izleyen şekildedir:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{P\} \quad (6.1)$$

$[M]_{n \times n}$: Sistem Kütle Matrisi

$[C]_{n \times n}$: Düzlem Çerçevenin Sönüm Matrisi

$[D]_{n \times n}$: Sistem Sönüm Matrisi

$[K]_{n \times n}$: Düzlem Çerçevenin Rijitlik Matrisi

$[S]_{n \times n}$: Sistem Rijitlik Matrisi

$\{P\}_{n \times 1}$: Sistem Yük Vektörü

$\{\ddot{U}\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası İvme Vektörü

$\{\dot{U}\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası Hız Vektörü

$\{U\}_{n \times 1}$: Düğüm Noktası Yer Değiştirme (Bilinmeyenler) Vektörü

Burada sistem rijitlik matrisi çerçeve elemanların rijitliklerinin uygun şekilde toplanmasından oluşmaktadır. Sistem sönüm matrisi ise çerçeve elemanların sönüm matrislerinin uygun şekilde toplamından elde edilir.

Sönümsüz serbest titreşim analizi için, denklem (6.1)' de dış kuvvet ve iç sönüm sıfır alındığında izleyen matris formunda ifade edilebilen lineer homojen eşitlikler seti elde edilir:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [S]\{U\} = 0 \quad (6.2)$$

$$[[S] - \omega_n^2 [M]] \{\phi\} = 0 \quad (6.3)$$

Yapı dinamiğinden bilindiği üzere, denklem (6.3)' den **herhangi bir n inci moda ait özvektör, yani $\{\phi_n\}$ hesaplanarak herhangi bir moda ait modal rijitlik, modal kütle, modal sönüm matrisleri** izleyen şekilde elde edilir:

$$K_n = \{\phi_n^T\} [K] \{\phi_n\} \quad (6.4)$$

$$M_n = \{\phi_n^T\} [M] \{\phi_n\} \quad (6.5)$$

$$C_n = \{\phi_n^T\} [C] \{\phi_n\} = \{\phi_n^T\} [K \eta] \{\phi_n\} \quad (6.7)$$

$$P_n = \phi_n^T P(t) \quad (6.8)$$

(6.4) ve (6.8) denklemlerinin kullanımıyla hareket denklemleri ayrıklaştırılabilir. Burada denklem sistemi bir bütün olarak çözülüp, ayrıklaştırma yoluna gidilmeyecektir. Bununla beraber, modal analizde kullanılan modal sönüm oranının sayısal değerine karşı gelen sönüm katsayısının bulunması da burada arzu edilmektedir. Bu amaçla ayrıklaştırma yoluna gidildiğinde, sistemin indirgenmiş serbestlik derecesinin sayısı kadar birbirinden bağımsız denklem elde edilir. (6.4), (6.5), (6.7) ve (6.8) denklemlerinin kullanımıyla herhangi bir n inci mod için sistem hareket denklemi ayrıklaştırılır ve her bir doğal frekans için tek serbestlik dereceli hale getirilir. Bu hareket denklemi izleyen şekilde verilir:

$$M_n \ddot{q}_n + D_n \dot{q}_n + S_n q_n = P_n \quad (6.9)$$

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = P_n / M_n \quad (6.10)$$

$$S_n = K_n + (C_e)_n \quad (6.11)$$

Burada q_n **genelleştirilmiş yerdeğiştirmedir** ve ξ_n **modal sönüm oranı** olup herhangi bir n inci moda karşılık gelen modal sönüm oranı izleyen şekilde elde edilir:

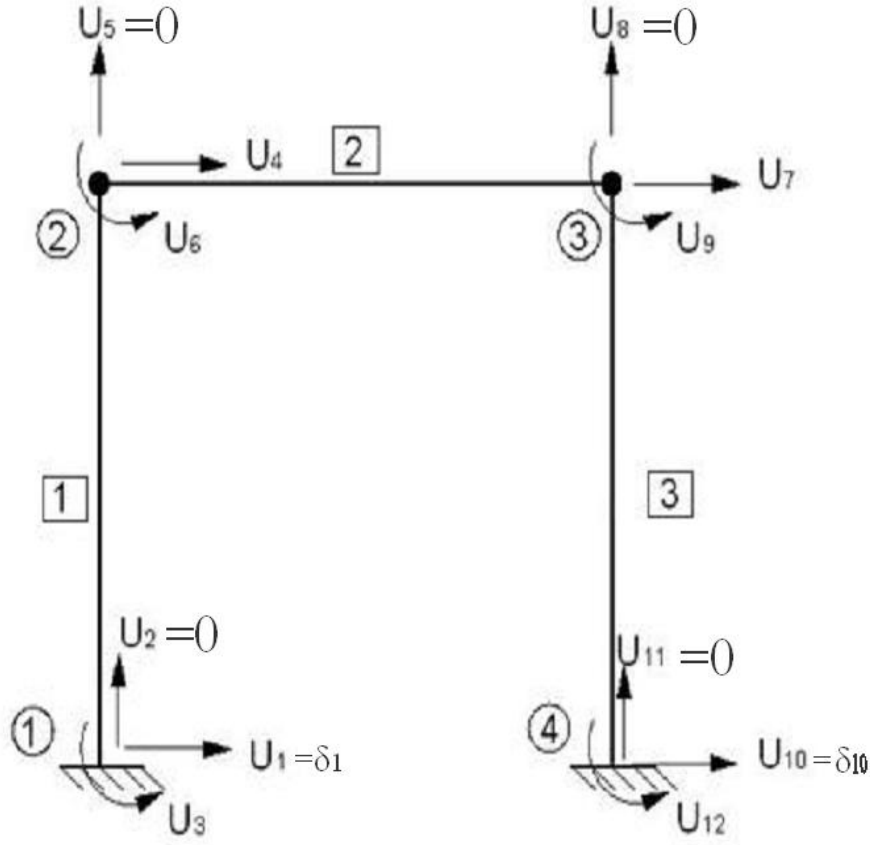
$$\xi_n = \frac{C_n}{2M_n(\omega_n)_n} \quad (6.12a)$$

Tek serbestlik dereceli bir sistem için **sönüm oranı ile sönüm katsayısı** arasındaki ilişki (Ek12.8) ile verilmiş olup modal analizde de her bir doğal frekans için elde edilen denklem tek serbestlik dereceli olduğundan bu ifade modal analizle işlem yapıldığında (6.12a) ile verilen ifadeye dönüşür. Bu durumda (6.12a) ile verilen modal sönüm oranı ile (Ek1.39) ile verilen **sönüm katsayısı η** arasındaki ilişki izleyen şekildedir:

$$\xi_n = \frac{\eta K_n}{2M_n(\omega_n)_n} \quad (6.12b)$$

6.2 Deprem Yüğü Altında Düzlem Çerçeve Analizi

Birinci problemde ele alınan bu sistem, bu problemde aşağıda verilen çeşitli malzeme sönüm katsayıları için Düzce depremi doğu-batı bileşeni etkisinde incelensin.



Şekil 6.1 Deprem yükü altında düzlem çerçeve

6.3 Türkiye Kuvvetli Yer Hareketi Kayıtları (1999 Düzce Depremi)

(Strong Ground Motion Records Of Türkiye)

Yer (PLACE): Bolu Bay. ve Isk. Müdürlüğü

Kayıt Tipi (RECORDER TYPE): GSR18 (GeoSys)

Kayıt Seri Numarası (RECORDER SERIAL NO): 682

Koordinatlar (COORDINATES): 40.747N - 31.610E

Depremi Tetiklenme Tarihi (TRIGGER DATE): 12.11.1999 16:57:22 (GMT)

Kaydın Tutulduğu Doğrultular (DIRECTIONS): +L NORTH +T EAST +V UP

Kayıt Sayısı (NO. OF DATA): 5590

Kayıt Aralığı (SAMPLE INTERVAL): 0.01 sn

Maksimum Kayıt Değerleri (MAX. VALUES(mG)): (L) 739.512, (T) 805.878, (V) 200.13,
(L=Kuzey-Güney, T=Doğu-Batı, V= Düşey Bileşen)

Deprem Tarihi (EQ DATE): 12.11.1999 16:57:20 (GMT)

Deprem Dış Merkez Koordinatları (EQ EPICENTER COORD.): 40.74N - 31.21E

Deprem Şiddeti (EQ MAGNITUDE): 7.2 Mw

Deprem Meydana Geldiği Derinlik (EQ DEPTH(km)): 25.0

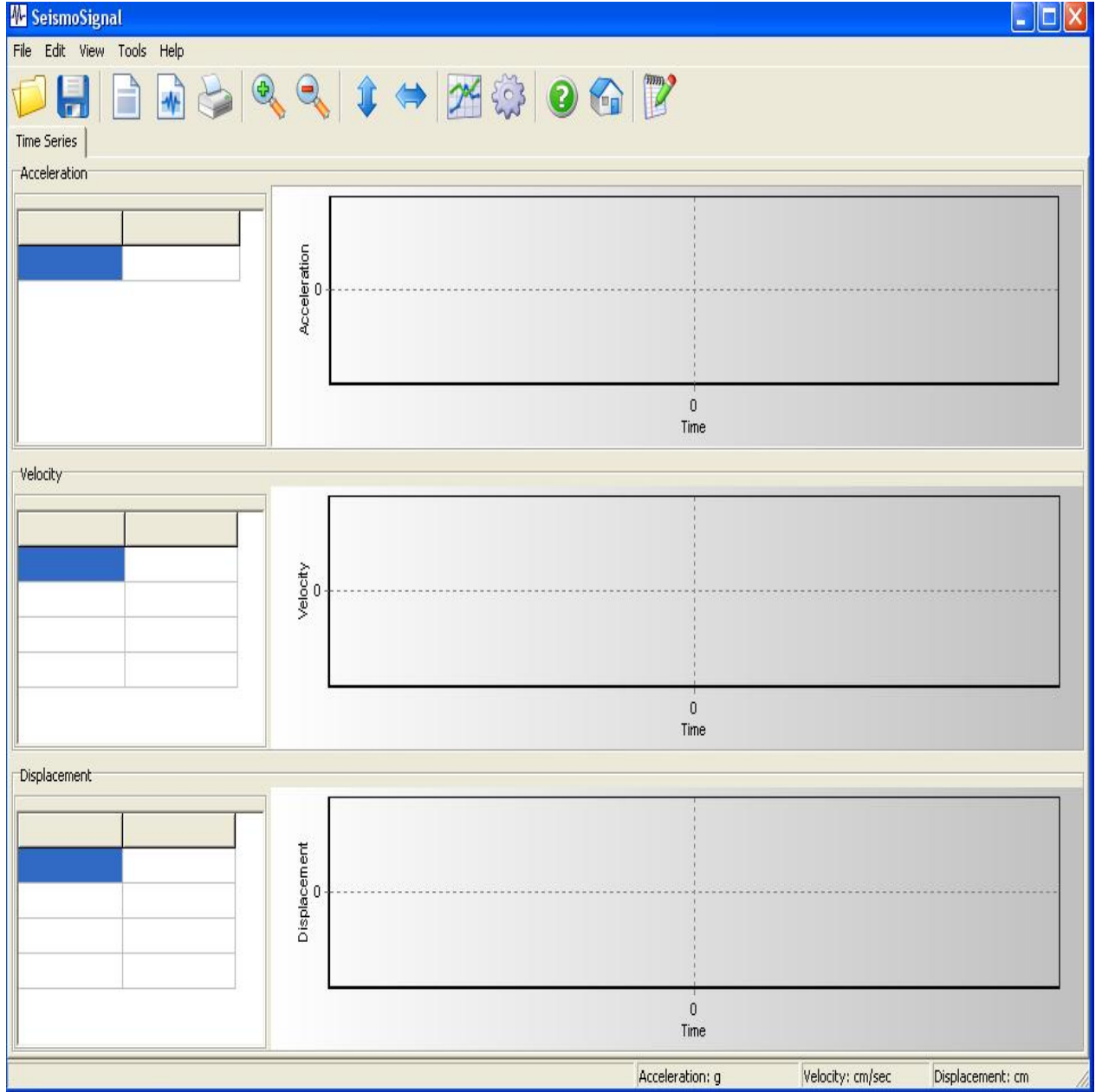
Deprem Araştırma Bölümü Afet İşleri Genel Müdürlüğü (Copyright EARTHQUAKE
RESEARCH DEPARTMENT GENERAL DIRECTORATE OF DISASTER AFFAIRS)

Çizelge 6.1 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu kayıtlarına göre yerin farklı doğrultulardaki ivme değerleri

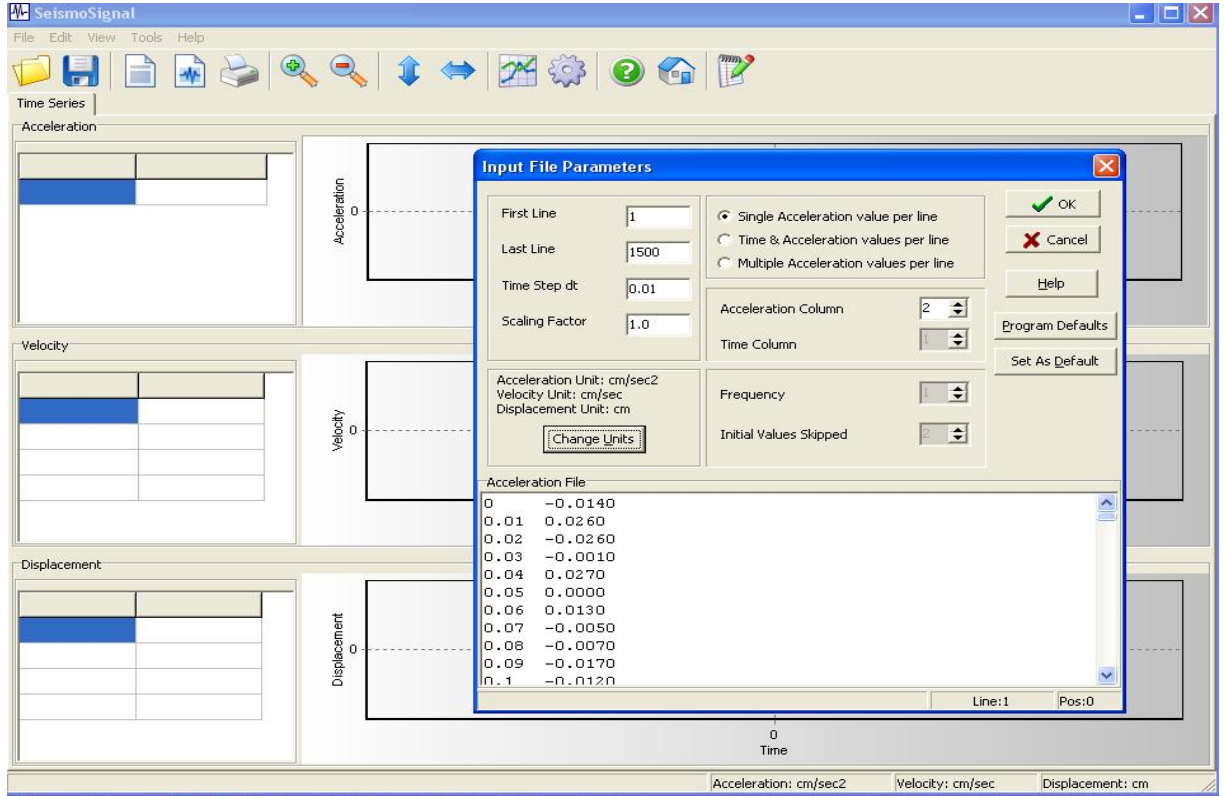
L (K-G)	T (D-B)	V (DÜŞ)
-.001000	-.014000	.064000
-.004000	.026000	-.021000
.039000	-.026000	.044000
-.005000	-.001000	-.021000
.033000	.027000	.009000
-.057000	.000000	-.006000
.040000	.013000	.036000
.012000	-.005000	-.011000
-	-	-
-	-	-
-	-	-

Analizde dikkate alınan deprem merkez üssü Düzce olan, 12.11.1999 tarihinde ve 16:57:22 saatinde meydana gelen depremdir. Deprem yer hareketi ivme verileri Bolu Bay. ve İsk. Müdürlüğü istasyonundan alınmıştır. Dikkate alınan deprem 55.90 sn sürmüş ve kayıtlar 0,01 sn aralıklarla alınmıştır. Dikkate alınan deprem doğrultusunda maks. İvme grafikten de görüleceği üzere 805.878 cm/sn² olarak ölçülmüştür.

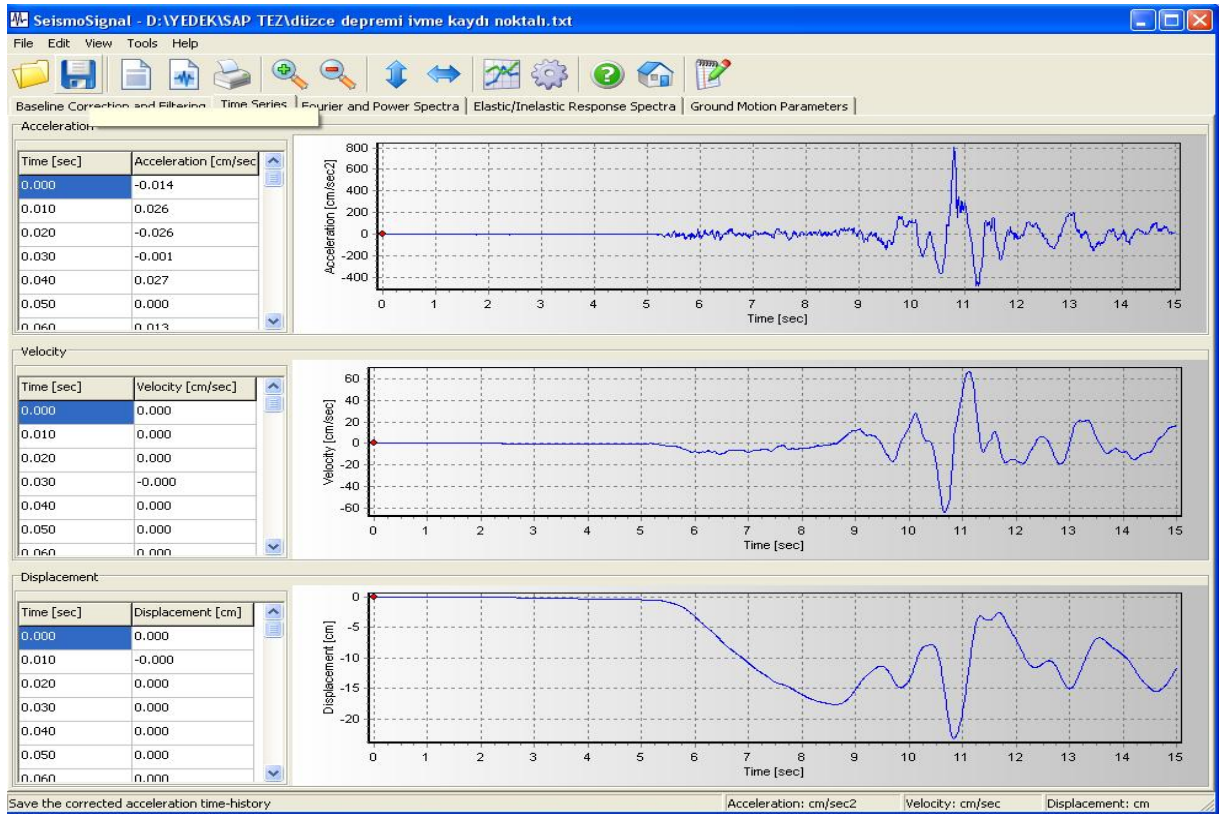
Zaman tanım alanı hesap yönteminde kullanılmak üzere söz konusu depremin ivme kaydından SeismoSignal programı vasıtasıyla depremin (yerin) hız, yerdeğiştirmesi grafikleri ve spektral hesapta kullanılmak üzere ivme spektrumu türetilmiştir.



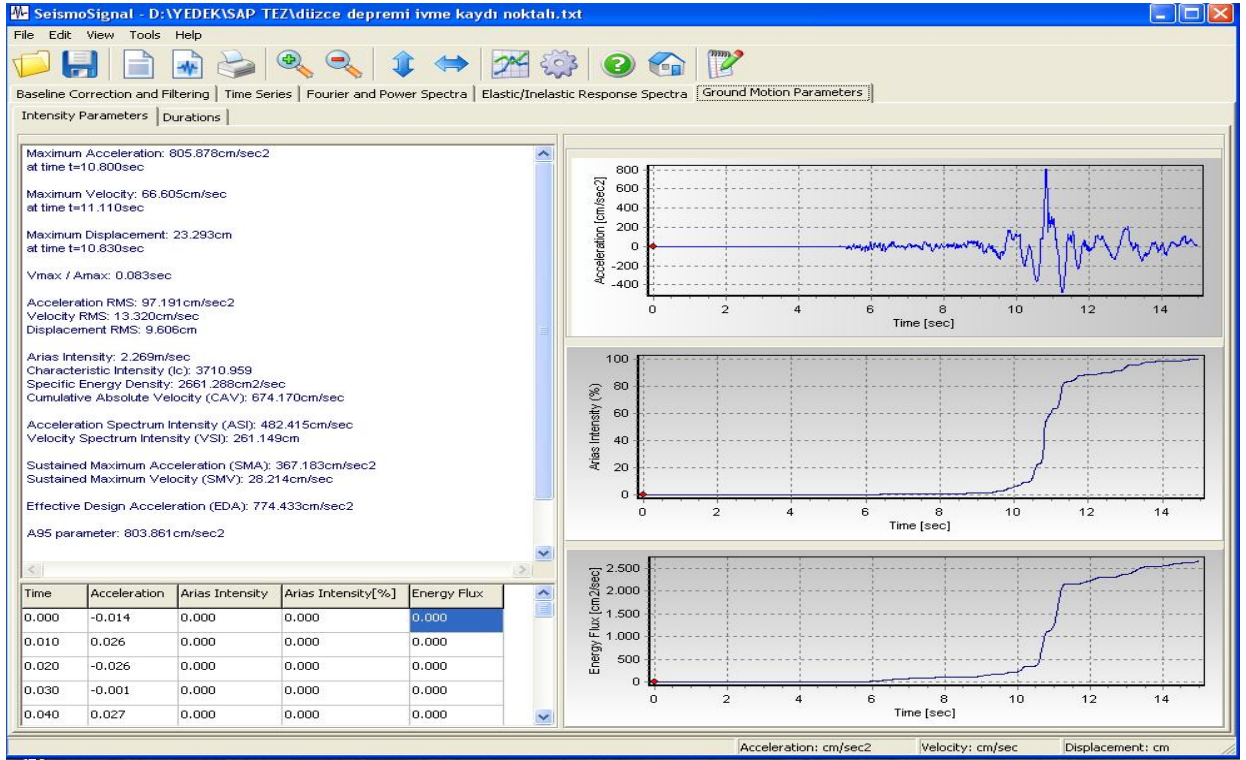
Şekil 6.2 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivmesi text. dosyasının SeismoSignal programında okutulması



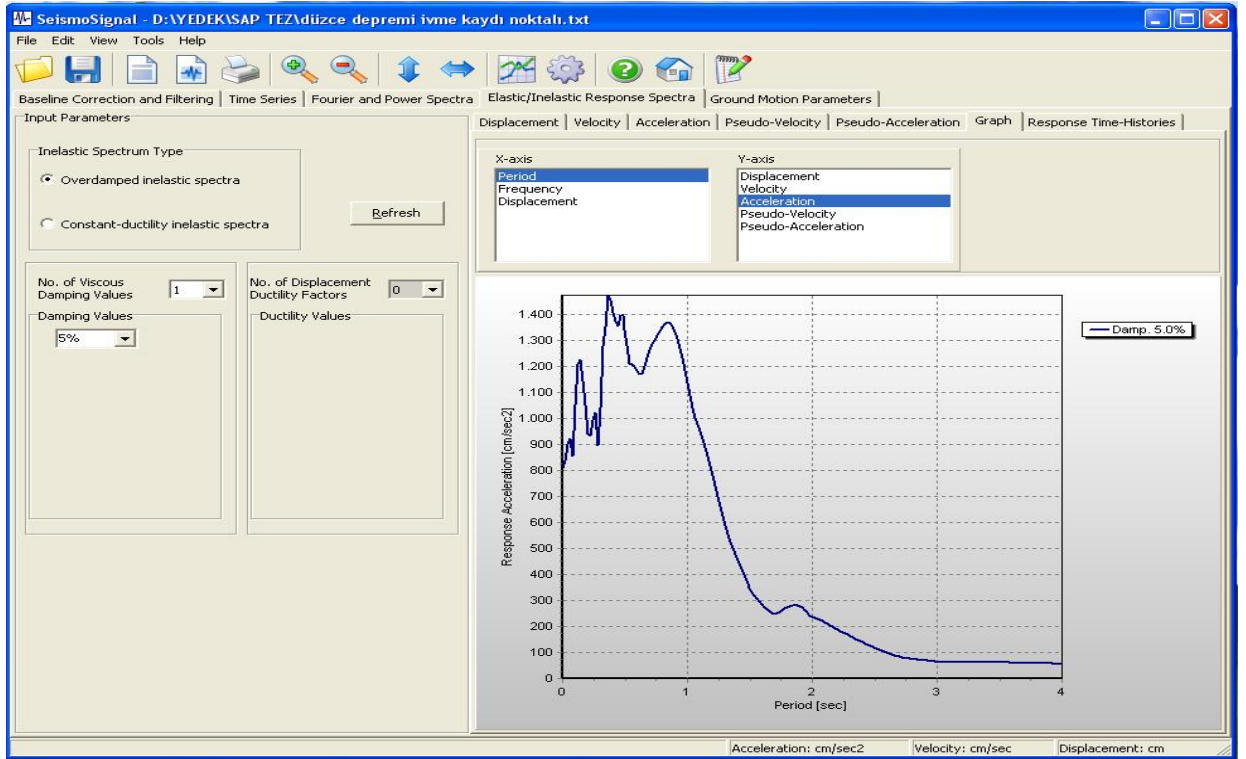
Şekil 6.3 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivme değerlerinden yer hız ve yerin yerdeğiştirme değerlerinin elde edilmesi



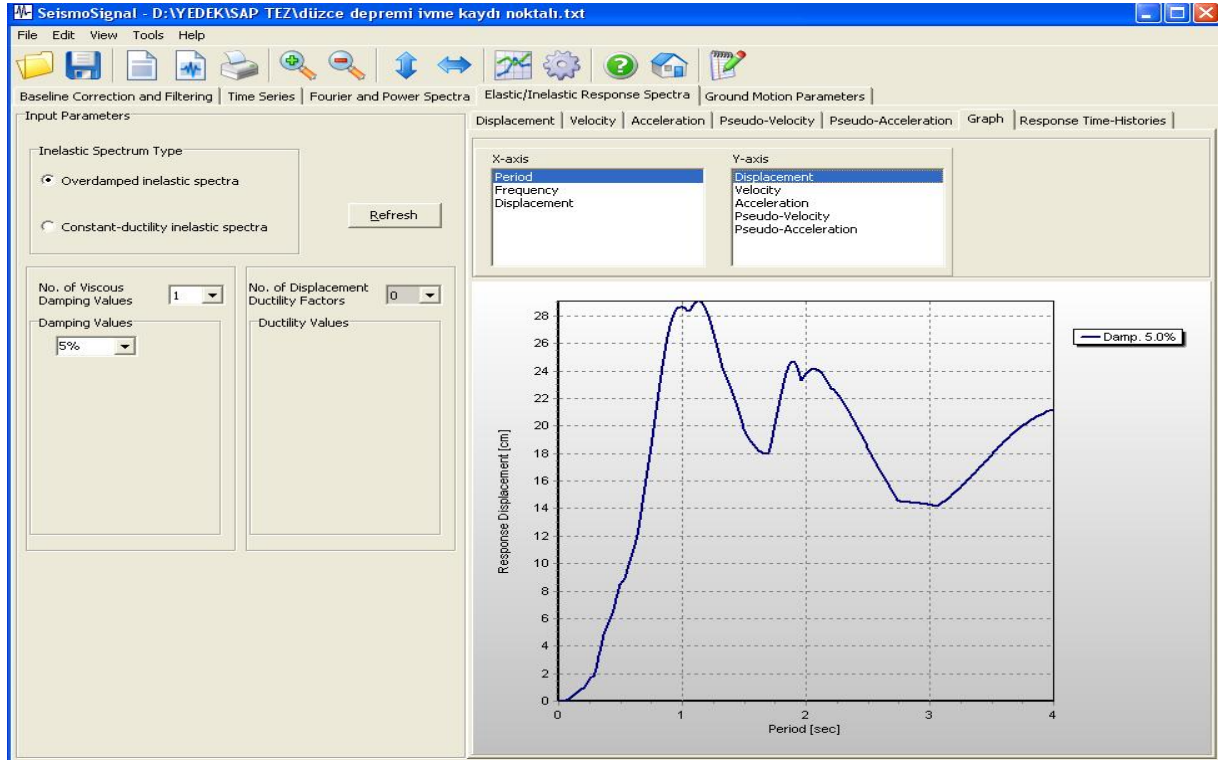
Şekil 6.4 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yer ivme-hız-yerdeğiştirme



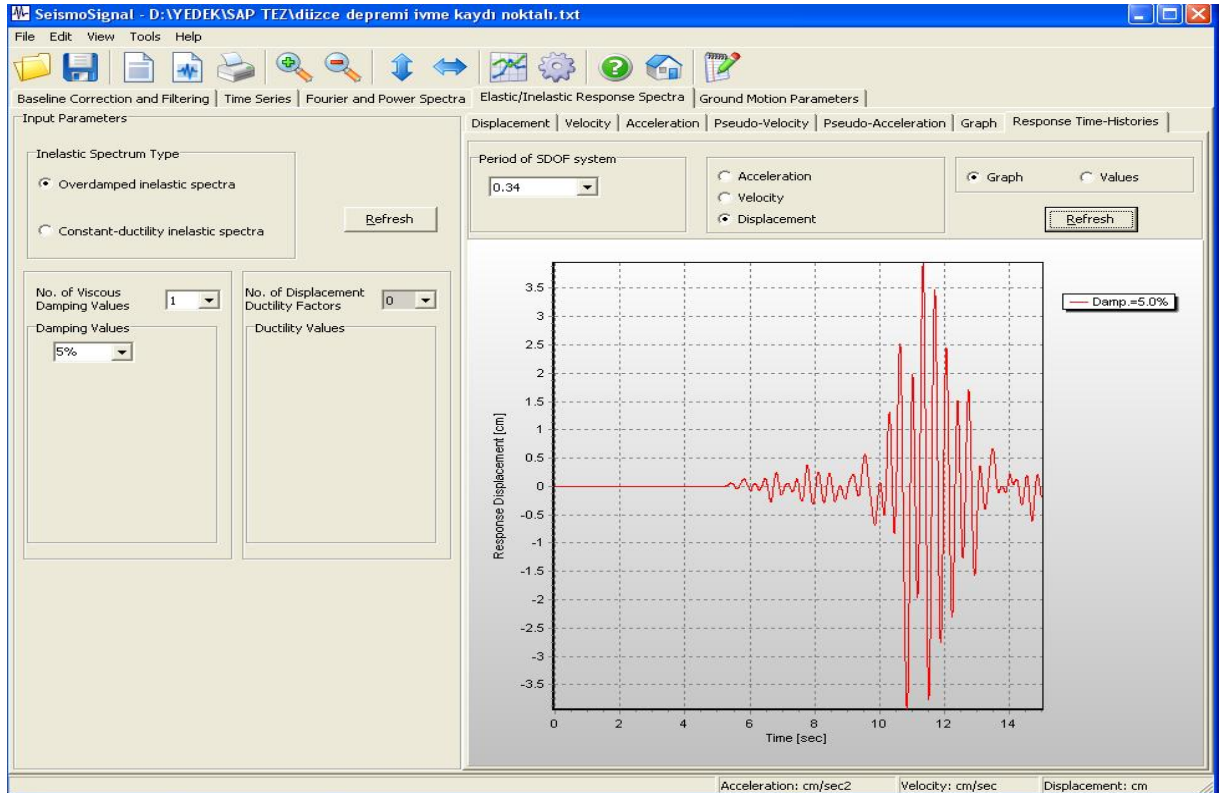
Şekil 6.5 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydı parametreleri



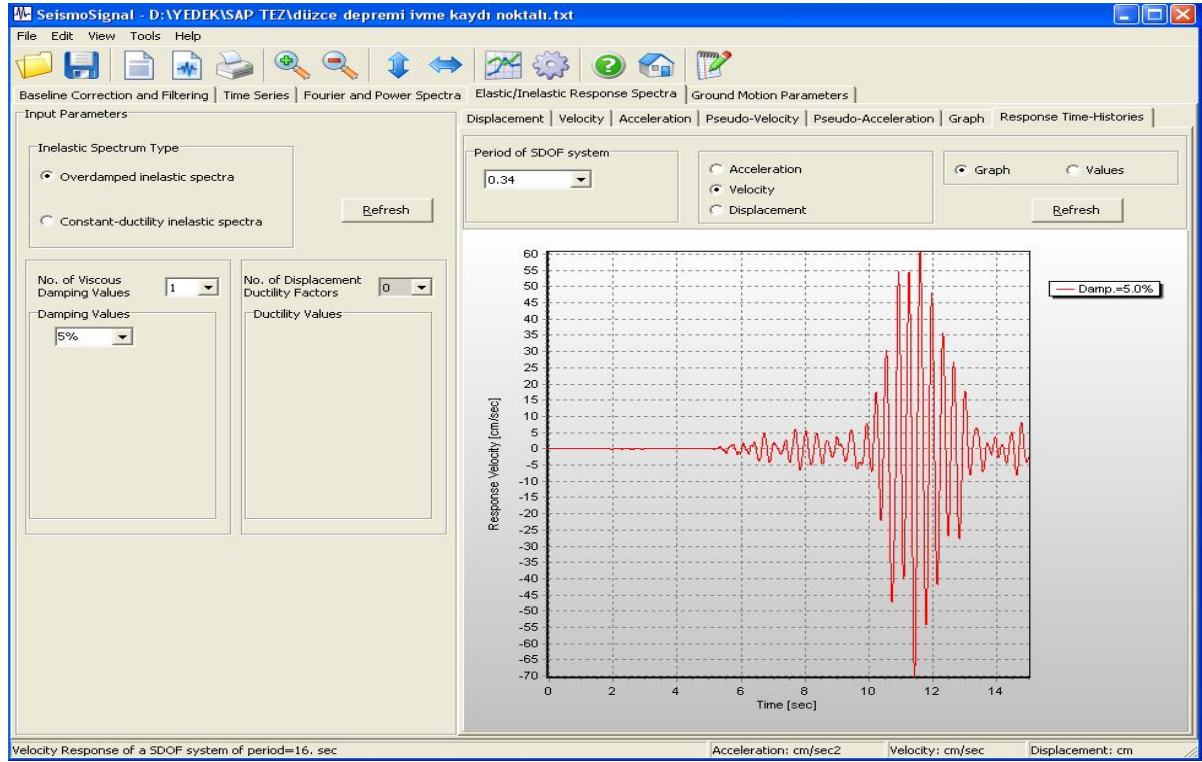
Şekil 6.6 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının spektral ivme eğrisi (SeismoSignal)



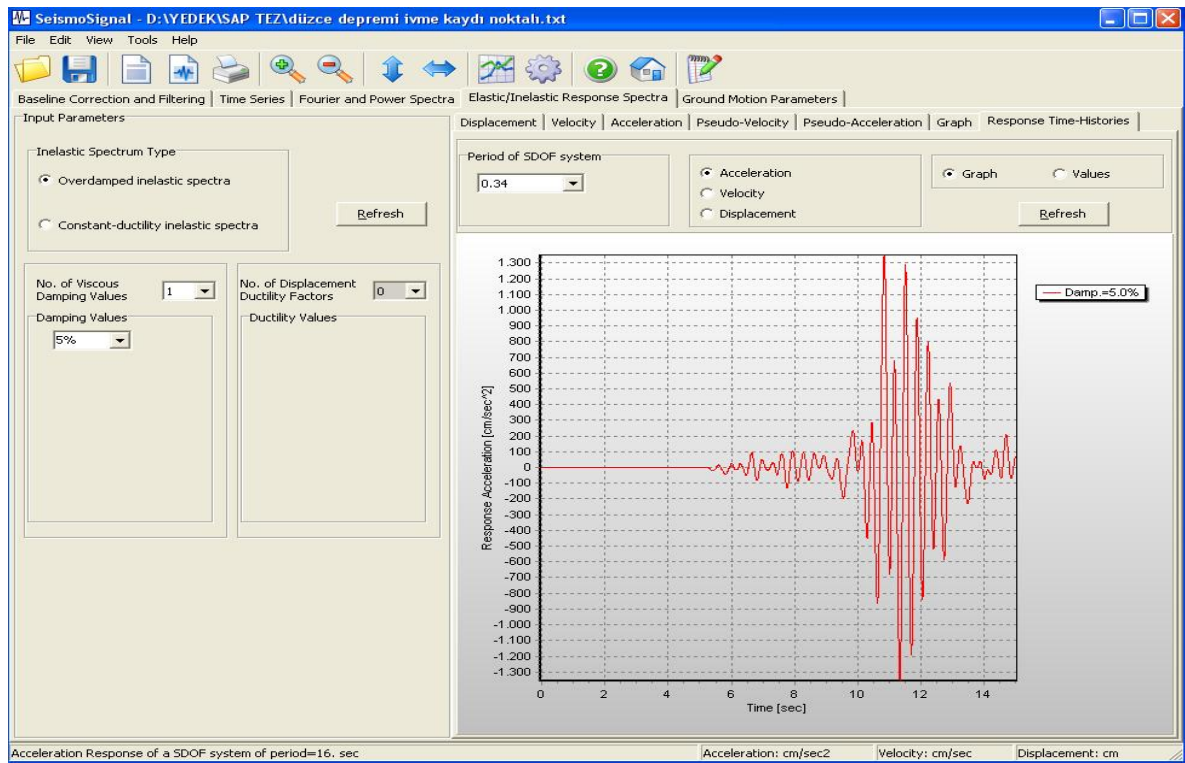
Şekil 6.7 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının spektral yerdeğiştirme eğrisi (SeismoSignal)



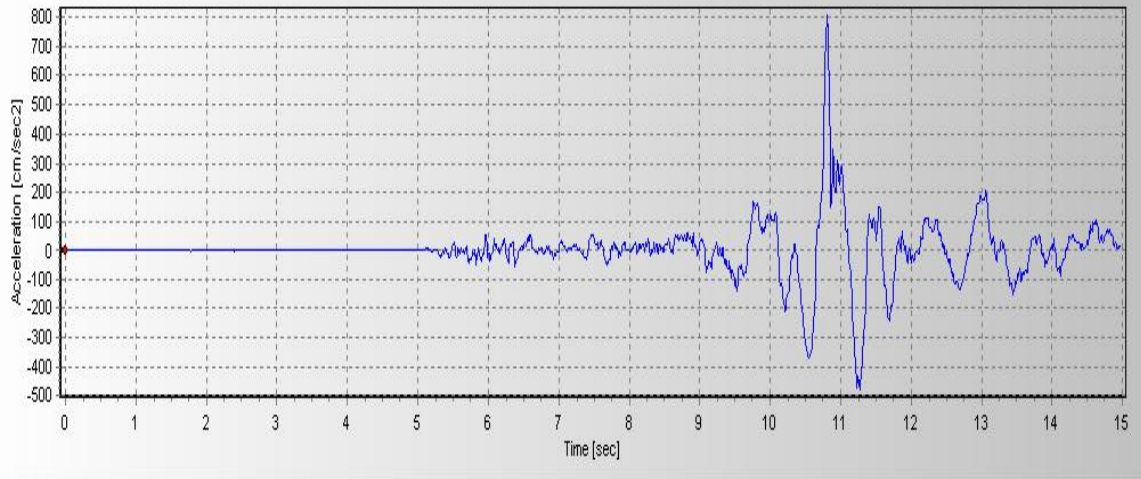
Şekil 6.8 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin yerdeğiştirme-zaman durumu (SeismoSignal)



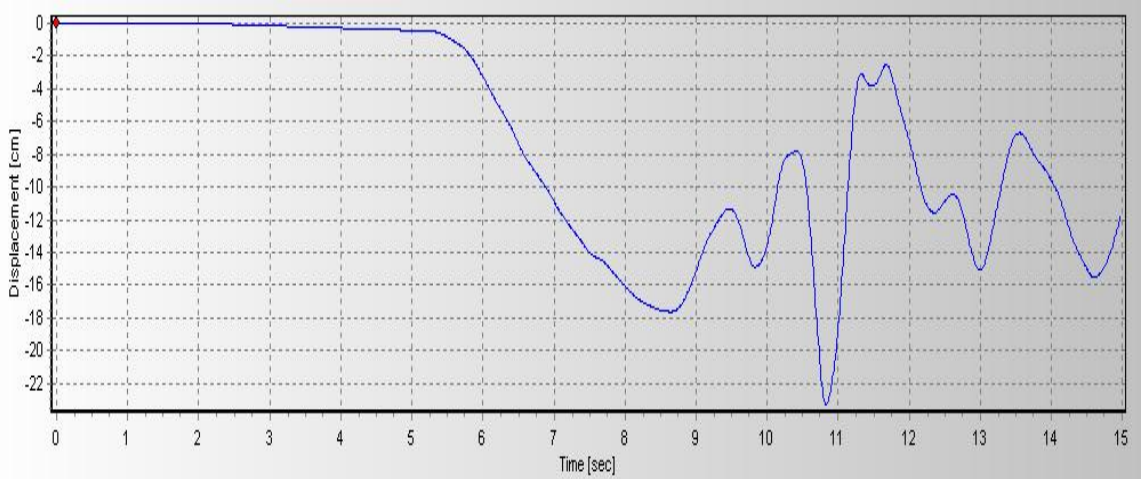
Şekil 6.9 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin hız-zaman durumu (SeismoSignal)



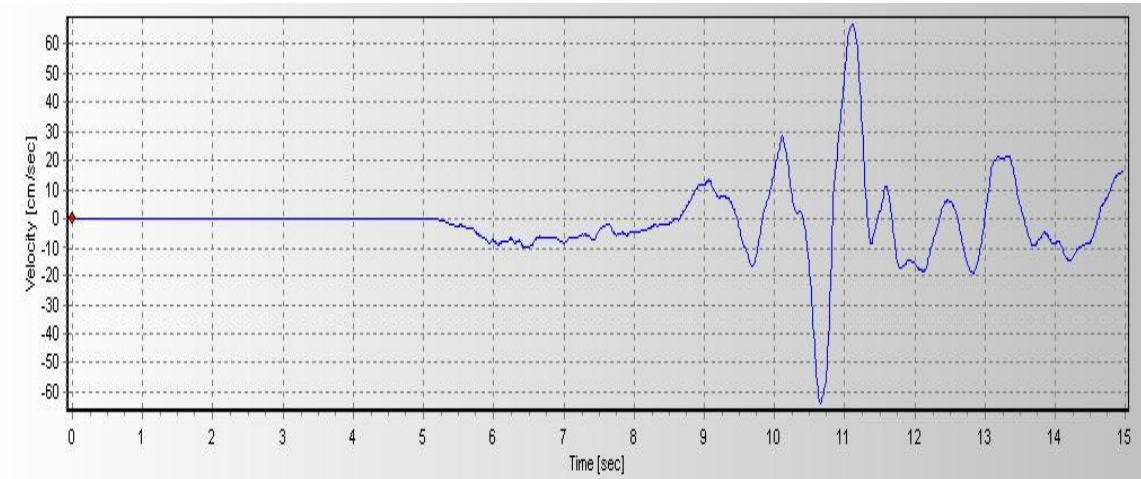
Şekil 6.10 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme kaydının 0.34 sn periyotlu tek serbestlik dereceli sisteme uygulandığında sistemin ivme-zaman durumu (SeismoSignal)



Şekil 6.11 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni ivme grafiği



Şekil 6.12 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni yerdeğiştirme grafiği



Şekil 6.13 1999 Düzce depremi Bolu istasyonu Doğu-batı bileşeni hız grafiği

Öncelikle mesnet hareketi durumunda sistem eşitliklerinin çözümü için bir yaklaşım verilecektir.

Kaydı (deprem anında yerin, yani mesnetin yerdeğiştirme miktarı, yerin hızı ve yerin ivmesi) deprem süresince (çalışmada 15 sn) belli aralıklarla (çalışmada 0.01 sn) tutulan yerin (mesnetin) yerdeğiştirmesi herhangi bir an için δ_i ve δ_j (depremin etkiye doğrultusunda mesnet yerdeğiştirme miktarı) dir. O an için δ_i ve δ_j değerleri birbirine eşittir. Deprem anında depremin düşey etkisi ihmal edildiğinden mesnetin yer hareketine vereceği düşey cevapları sıfırdır. $U_2 = 0$, $U_5 = 0$, $U_8 = 0$ ve $U_{11} = 0$

Sistem matrisleri (rijitlik, sönüm ve kütle matrisleri) ilk önce mesnetlerin de tutulu olmadığı düşüncesiyle (daha sonra indirgenme düşünülerek) oluşturulmuştur. Mesnetlerinde serbestliğe sahip olduğu düşünülerek oluşturulan sistem matrisleri 12x12 boyutunda matris olurlar.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{110} & k_{111} & k_{112} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{210} & k_{211} & k_{212} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} & k_{310} & k_{311} & k_{312} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} & k_{410} & k_{411} & k_{412} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} & k_{510} & k_{511} & k_{512} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} & k_{610} & k_{611} & k_{612} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} & k_{710} & k_{711} & k_{712} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} & k_{810} & k_{811} & k_{812} \\ k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99} & k_{910} & k_{911} & k_{912} \\ k_{101} & k_{102} & k_{103} & k_{104} & k_{105} & k_{106} & k_{107} & k_{108} & k_{109} & k_{1010} & k_{1011} & k_{1012} \\ k_{111} & k_{112} & k_{113} & k_{114} & k_{115} & k_{116} & k_{117} & k_{118} & k_{119} & k_{1110} & k_{1111} & k_{1112} \\ k_{121} & k_{122} & k_{123} & k_{124} & k_{125} & k_{126} & k_{127} & k_{128} & k_{129} & k_{1210} & k_{1211} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ \delta_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

$U_2 = 0$, $U_5 = 0$, $U_8 = 0$ ve $U_{11} = 0$ olduğundan eşitlik aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{13} & k_{14} & k_{16} & k_{17} & k_{19} & k_{110} & k_{112} \\ k_{31} & k_{33} & k_{34} & k_{36} & k_{37} & k_{39} & k_{310} & k_{312} \\ k_{41} & k_{43} & k_{44} & k_{46} & k_{47} & k_{49} & k_{410} & k_{412} \\ k_{61} & k_{63} & k_{64} & k_{66} & k_{67} & k_{69} & k_{610} & k_{612} \\ k_{71} & k_{73} & k_{74} & k_{76} & k_{77} & k_{79} & k_{710} & k_{712} \\ k_{91} & k_{93} & k_{94} & k_{86} & k_{97} & k_{99} & k_{910} & k_{912} \\ k_{101} & k_{103} & k_{104} & k_{106} & k_{107} & k_{109} & k_{1010} & k_{1012} \\ k_{121} & k_{123} & k_{124} & k_{126} & k_{127} & k_{129} & k_{1210} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ \delta_{10} \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

Genel bir prosedür göstermek için son matris eşitliği izleyen şekilde yazılır. Sistem rijitlik matrisinde δ_{10} ' a karşılık gelen satır 2. satıra çıktığında F_{10} da 2. satıra çıkar, daha sonra δ_{10} da 2. satıra çıktığında δ_{10} la eşleşen 7. satır 2. satıra yerleşir.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{110} & k_{13} & k_{14} & k_{16} & k_{17} & k_{19} & k_{112} \\ k_{101} & k_{1010} & k_{103} & k_{104} & k_{106} & k_{107} & k_{109} & k_{1012} \\ k_{31} & k_{310} & k_{33} & k_{34} & k_{36} & k_{37} & k_{39} & k_{312} \\ k_{41} & k_{410} & k_{43} & k_{44} & k_{46} & k_{47} & k_{49} & k_{412} \\ k_{61} & k_{610} & k_{63} & k_{64} & k_{66} & k_{67} & k_{69} & k_{612} \\ k_{71} & k_{710} & k_{73} & k_{74} & k_{76} & k_{77} & k_{79} & k_{712} \\ k_{91} & k_{910} & k_{93} & k_{94} & k_{86} & k_{97} & k_{99} & k_{912} \\ k_{121} & k_{1210} & k_{123} & k_{124} & k_{126} & k_{127} & k_{129} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_{10} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{10} \\ F_3 \\ F_4 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_9 \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Yukarıdaki (6.15) eşitliğinde F_3, F_4, F_6, F_7, F_9 ve F_{12} kuvvetleri sıfırdır. Bu doğrultuda eşitlik tekrar düzenlenirse;

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{110} & k_{13} & k_{14} & k_{16} & k_{17} & k_{19} & k_{112} \\ k_{101} & k_{1010} & k_{103} & k_{104} & k_{106} & k_{107} & k_{109} & k_{1012} \\ k_{31} & k_{310} & k_{33} & k_{34} & k_{36} & k_{37} & k_{39} & k_{312} \\ k_{41} & k_{410} & k_{43} & k_{44} & k_{46} & k_{47} & k_{49} & k_{412} \\ k_{61} & k_{610} & k_{63} & k_{64} & k_{66} & k_{67} & k_{69} & k_{612} \\ k_{71} & k_{710} & k_{73} & k_{74} & k_{76} & k_{77} & k_{79} & k_{712} \\ k_{91} & k_{910} & k_{93} & k_{94} & k_{86} & k_{97} & k_{99} & k_{912} \\ k_{121} & k_{1210} & k_{123} & k_{124} & k_{126} & k_{127} & k_{129} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_{10} \\ U_3 \\ U_4 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

elde edilir.

Eşitliğin çözümü için matris bölümlendirmesi yapılırsa izleyen büyüklükler elde edilir:

$$[K_{\delta\delta}] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{110} \\ k_{101} & k_{1010} \end{bmatrix}, \quad [K_{\delta U}] = \begin{bmatrix} k_{13} & k_{14} & k_{16} & k_{17} & k_{19} & k_{112} \\ k_{103} & k_{104} & k_{106} & k_{107} & k_{109} & k_{1012} \end{bmatrix}$$

$$[K_{U\delta}] = \begin{bmatrix} k_{31} & k_{310} \\ k_{41} & k_{410} \\ k_{61} & k_{610} \\ k_{71} & k_{710} \\ k_{91} & k_{910} \\ k_{121} & k_{1210} \end{bmatrix}, \quad [K_{UU}] = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} & k_{36} & k_{37} & k_{39} & k_{312} \\ k_{43} & k_{44} & k_{46} & k_{47} & k_{49} & k_{412} \\ k_{63} & k_{64} & k_{66} & k_{67} & k_{69} & k_{612} \\ k_{73} & k_{74} & k_{76} & k_{77} & k_{79} & k_{712} \\ k_{93} & k_{94} & k_{96} & k_{97} & k_{99} & k_{912} \\ k_{123} & k_{124} & k_{126} & k_{127} & k_{129} & k_{1212} \end{bmatrix}$$

$$[\delta] = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix}, \quad [U] = \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{12} \end{Bmatrix}, \quad [F_\delta] = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{10} \end{Bmatrix}, \quad [F_U] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Yukarıdaki matris bölümlendirmesi ışığında;

$$\begin{bmatrix} [K_{\delta\delta}] & [K_{\delta U}] \\ [K_{U\delta}] & [K_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\delta] \\ [U] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F_\delta] \\ [F_U] \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Kısımlara ayrılmış matris eşitlerinin ikinci satırından;

$$\begin{bmatrix} [K_{\delta\delta}] & [K_{\delta U}] \\ [K_{U\delta}] & [K_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\delta] \\ [U] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F_\delta] \\ [F_U] \end{Bmatrix}$$

$$[K_{U\delta}] * [\delta] + [K_{UU}] * [U] = [F_U] \quad (6.19)$$

$$[K_{UU}] * [U] = [K_{U\delta}] * [\delta]$$

$$[U] = [K_{UU}]^{-1} * ([F_U] - ([K_{U\delta}] * [\delta]))$$

$$\begin{bmatrix} [K_{\delta\delta}] & [K_{\delta U}] \\ [K_{U\delta}] & [K_{UU}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [\delta] \\ [U] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F_\delta] \\ [F_U] \end{Bmatrix}$$

$$[K_{U\delta}] * [\delta] + [K_{UU}] * [U] = [F_U] \quad (6.20)$$

$$[K_{UU}] * [U] = [K_{U\delta}] * [\delta]$$

$$[U] = [K_{UU}]^{-1} * ([F_U] - ([K_{U\delta}] * [\delta]))$$

$$\begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} & k_{36} & k_{37} & k_{39} & k_{312} \\ k_{43} & k_{44} & k_{46} & k_{47} & k_{49} & k_{412} \\ k_{63} & k_{64} & k_{66} & k_{67} & k_{69} & k_{612} \\ k_{73} & k_{74} & k_{76} & k_{77} & k_{79} & k_{712} \\ k_{93} & k_{94} & k_{86} & k_{97} & k_{99} & k_{912} \\ k_{123} & k_{124} & k_{126} & k_{127} & k_{129} & k_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \\ U_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{31} & k_{310} \\ k_{41} & k_{410} \\ k_{61} & k_{610} \\ k_{71} & k_{710} \\ k_{91} & k_{910} \\ k_{121} & k_{1210} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix} \quad (6.21)$$

(6.21) Eşitliğinde bilinmeyenler sistem düğüm noktalarına ait yerdeğiştirme vektörüdür. Denklemin sağ tarafı sistem mesnet ötelenmesi sebebiyle sistemde oluşan elastik yay kuvvetlerine karşılık gelmektedir. Depremi her anı içi o ona karşılık gelen mesnet yerdeğiştirmeleri δ_1 , δ_{10} eşitlikte yerlerine konup deprem kayıt adımı kadar (depremin başlangıcından bitimine kadar) eşitlik sistemi elde edilir.

Depremden dolayı sisteme etkiyen elastik yay kuvvetleri haricinde sistemi zorlayan atalet (eylemsizlik) ve sönüm kuvvetlerinin elde edilmesinde yukarıda belirtilen prosedürün aynısı uygulanır. Tüm bu işlemler neticesinde depremin herhangi bir anı için sisteme etkiyen elastik yay kuvvetleri, atalet kuvvetleri ve sönüm kuvvetleri elde edilmiş olur.

Özdeğerler olan ω_n^2 değerleri denklem (6.3) ile verilen eşitlikler sisteminin determinantının sıfır olmasından bulunur. Sistemin doğal frekansları ve periyotları izleyen tabloda verilir:

Çizelge 6.2 Üç boyutlu çerçeve için MATLAB ile SAP2000 programının bulduğu özdeğerlerin kıyaslanması

Periyotlar ve Frekanslar								
ÇERÇEVE	ANALİZ	MOD	Period (sn)		Açısal Frekanslar (rad/sn)		Fekansların Karesi (rad ² /sn ²)	
			SAP2000	MATLAB	SAP2000	MATLAB	SAP2000	MATLAB
3D	MODAL	Mod 1	0,3476	0,3456	18,0740	18,1715	326,6700	330,2024
	MODAL	Mod 2	0,3476	0,3456	18,0740	18,1715	326,6700	330,2024
	MODAL	Mod 3	0,2753	0,2723	22,8200	23,0661	520,7300	532,0436
	MODAL	Mod 4	0,1586	0,1572	39,6190	39,9408	1569,7000	1595,2661

Sistemin birinci doğal frekansı $\omega_{n1} = 18.1807 \text{ rd/sn}$ olup bu moda karşı gelen mod şekli izleyen şekilde verilir;

$$\{\phi_1\}' = \{-0,16 \quad 0,11 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad -0,16 \quad 0,11 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad -0,16 \quad 0,11 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00 \quad 0,00\}$$

Çizelge 6.3 İki boyutlu çerçeve için MATLAB ile SAP2000 programının bulduğu özdeğerlerin kıyaslanması

Periyotlar ve Frekanslar								
ÇERÇEVE	ANALİZ	MOD	Period (sn)		Açısal Frekanslar (rad/sn)		Fekansların Karesi (rad ² /sn ²)	
			SAP2000	MATLAB	SAP2000	MATLAB	SAP2000	MATLAB
2D	MODAL	Mod 1	0,2728	0,2716	23,0360	23,1210	530,6700	534,5822

Sistemin birinci doğal frekansı $\omega_{n1} = 23,121 \text{ rd/sn}$ olup bu moda karşı gelen mod şekli izleyen şekilde verilir:

$$\{\phi_1\}' = \{0,34 \quad 0,00 \quad -0,00 \quad 0,34 \quad -0,00 \quad -0,00\}$$

(6.4) ve (6.5) ifadeleri kullanılarak birinci moda karşılık gelen K_1 modal rijitliği ve M_1 modal kütlesi, izleyen şekilde hesaplanır:

$$K_1 = \{\phi_1^T\} [K] \{\phi_1\}$$

$$C_1 = \{\phi_1^T\} [K \eta] \{\phi_1\}$$

$$M_1 = \{\phi_1^T\} [M] \{\phi_1\}$$

Çerçeve elemanların oluşturduğu sistemin modal rijitlik, modal sönüm ve modal kütlesi izleyen şekilde verilir:

$$K_1 = \{\phi_1^T\} [K] \{\phi_1\} = 330,5374$$

$$C_1 = \{\phi_1^T\} [K \eta] \{\phi_1\} = 330,5374 \eta$$

$$M_1 = \{\phi_1^T\} [M] \{\phi_1\} = 1,0$$

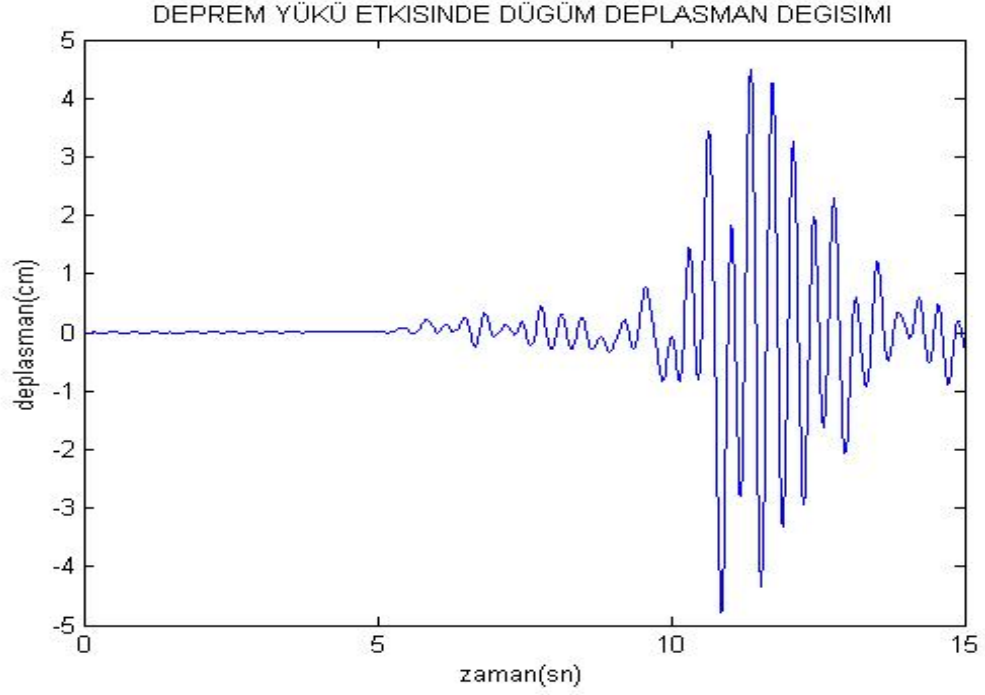
$\xi = 0.05$ değeri için η değeri (6.12b) bağıntısı kullanılarak izleyen şekilde hesaplanır:

$$0,05 = \frac{330,5374 \times \eta}{2 \times 1,0 \times 18,1807} \rightarrow \eta = 0,005508$$

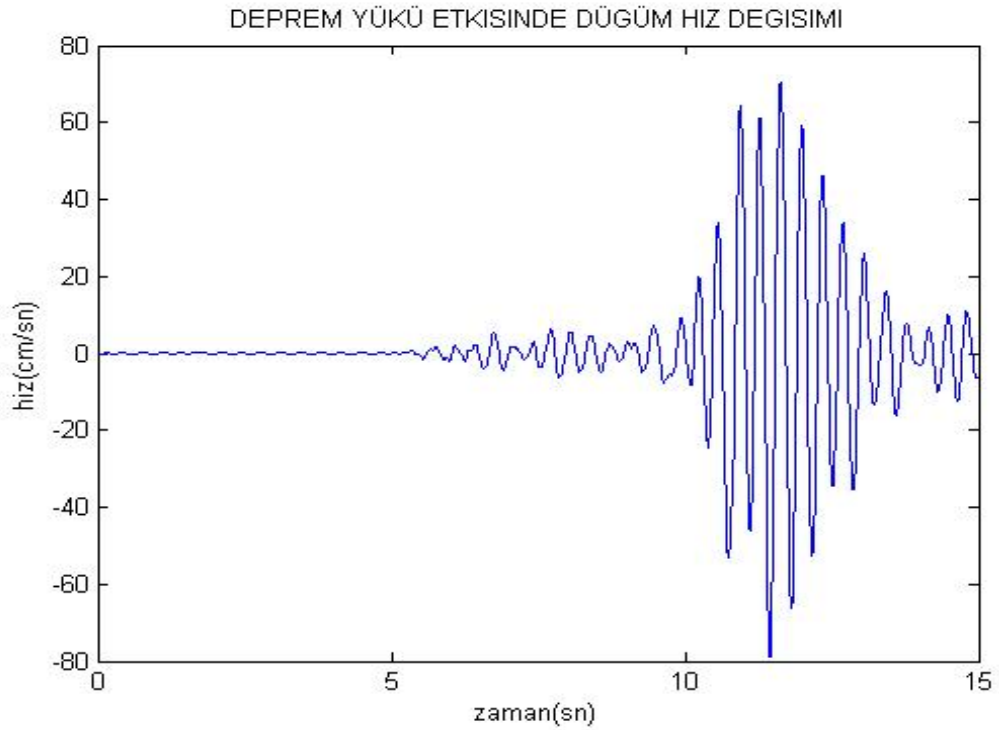
Benzer işlemler diğer modal sönüm değerleri için yapılırsa izleyen değerler bulunur:

Çizelge 6.4 Çeşitli modal sönüm değerlerine karşılık iç sönüm değerleri

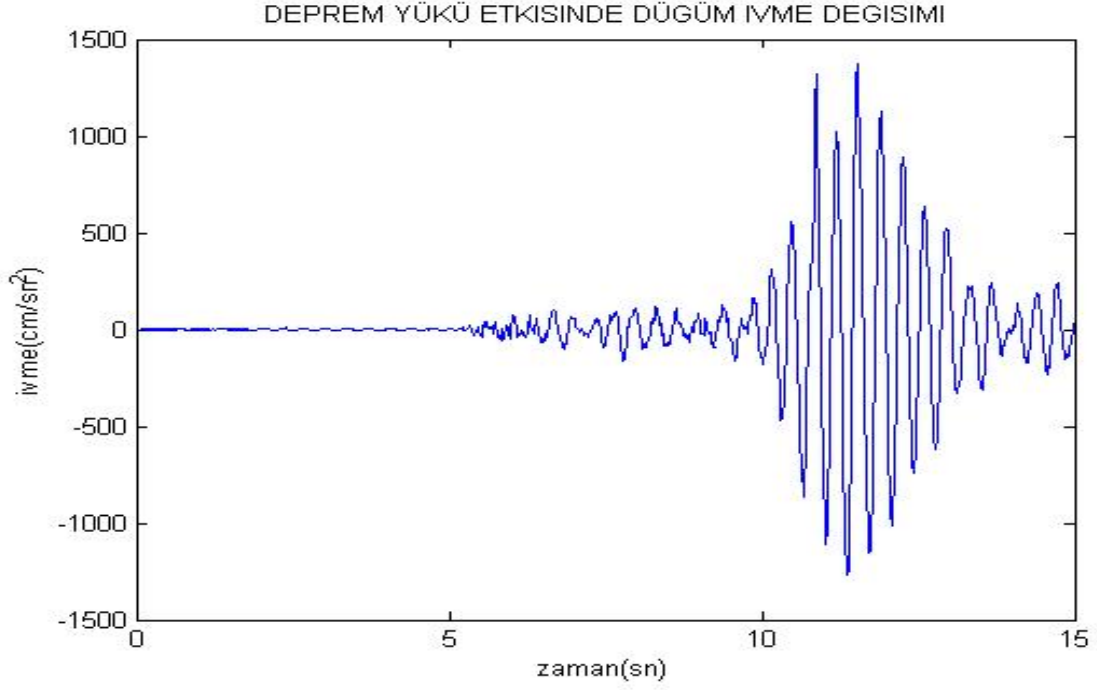
Modal sönüm değerleri ξ	Malzeme sönüm katsayısı η
0.00	0.000000
0.05	0.005508
0.10	0.011000
0.15	0.001650
0.20	0.022000



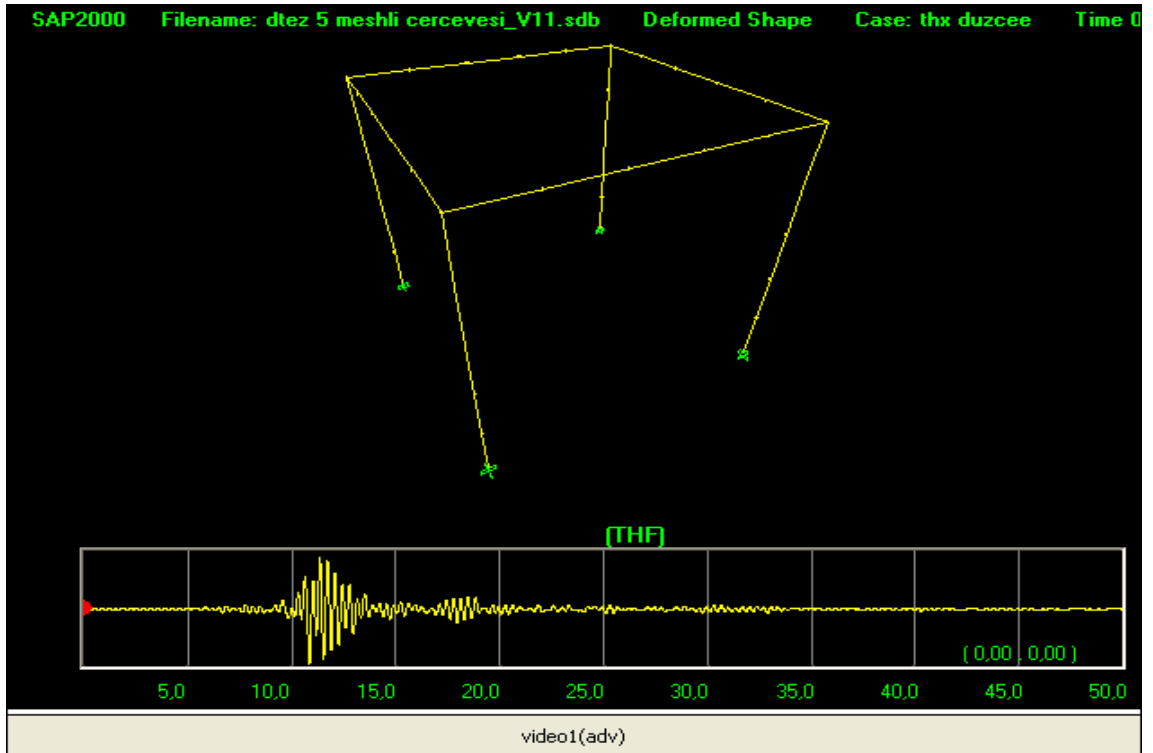
Şekil 6.14 Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen yerdeğiştirme-zaman grafiği



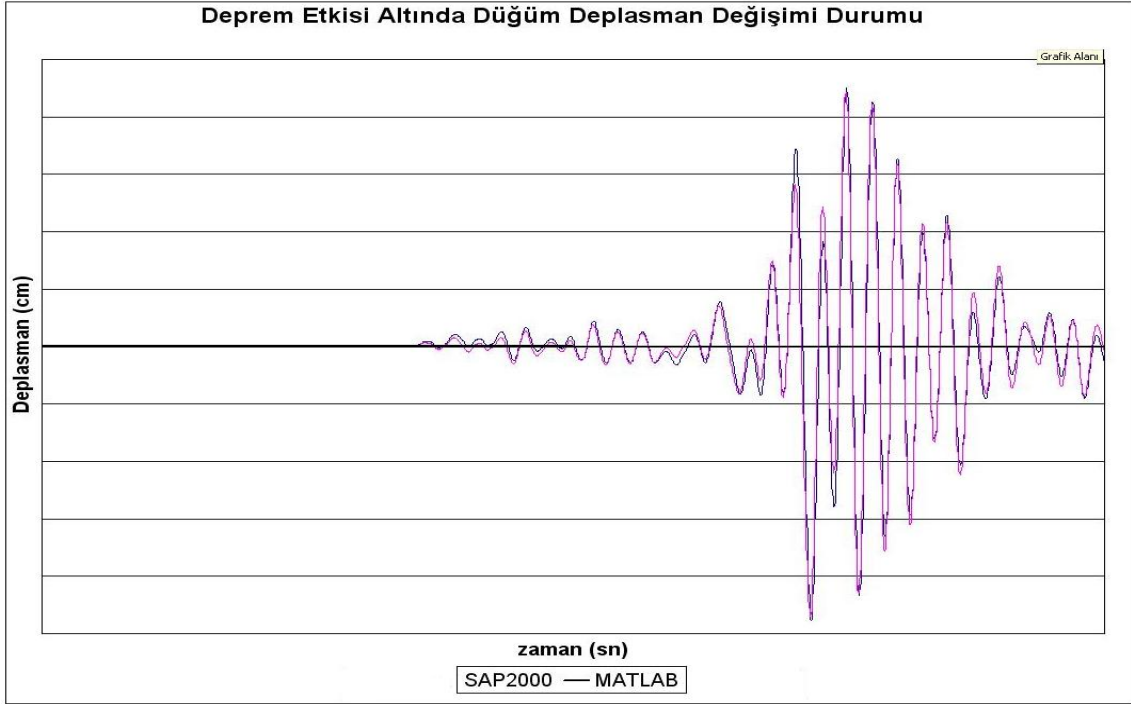
Şekil 6.15 Üç Boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen hız-zaman grafiği



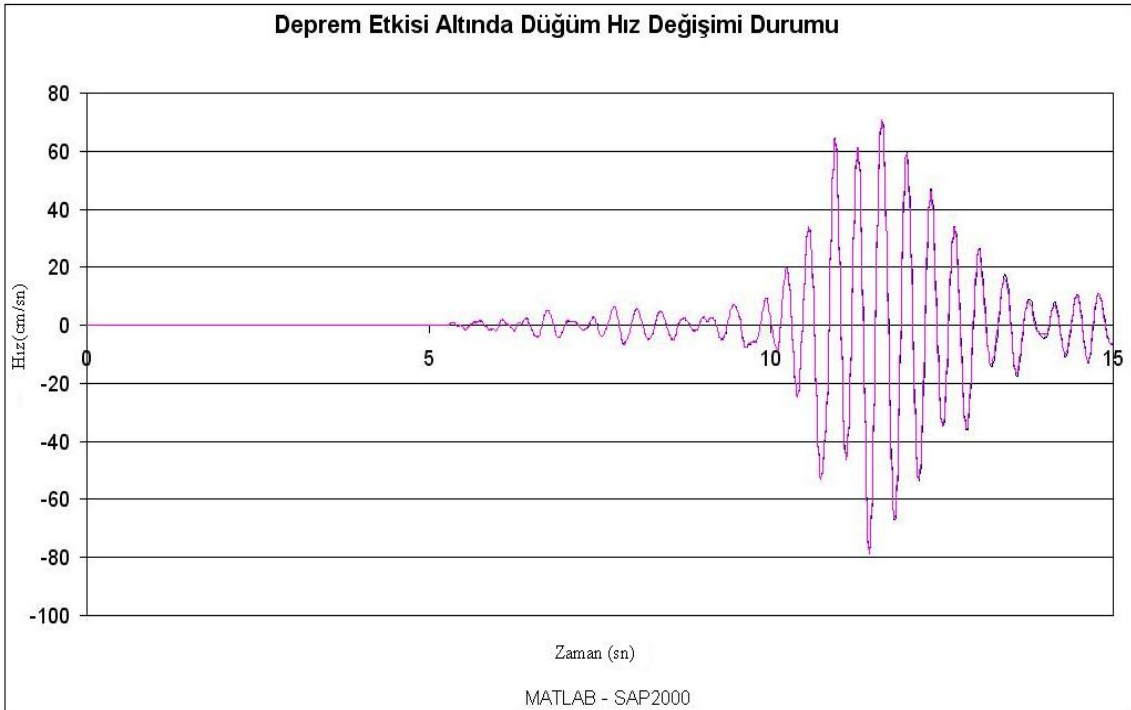
Şekil 6.16 Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca MATLAB'den elde edilen ivme-zaman grafiği



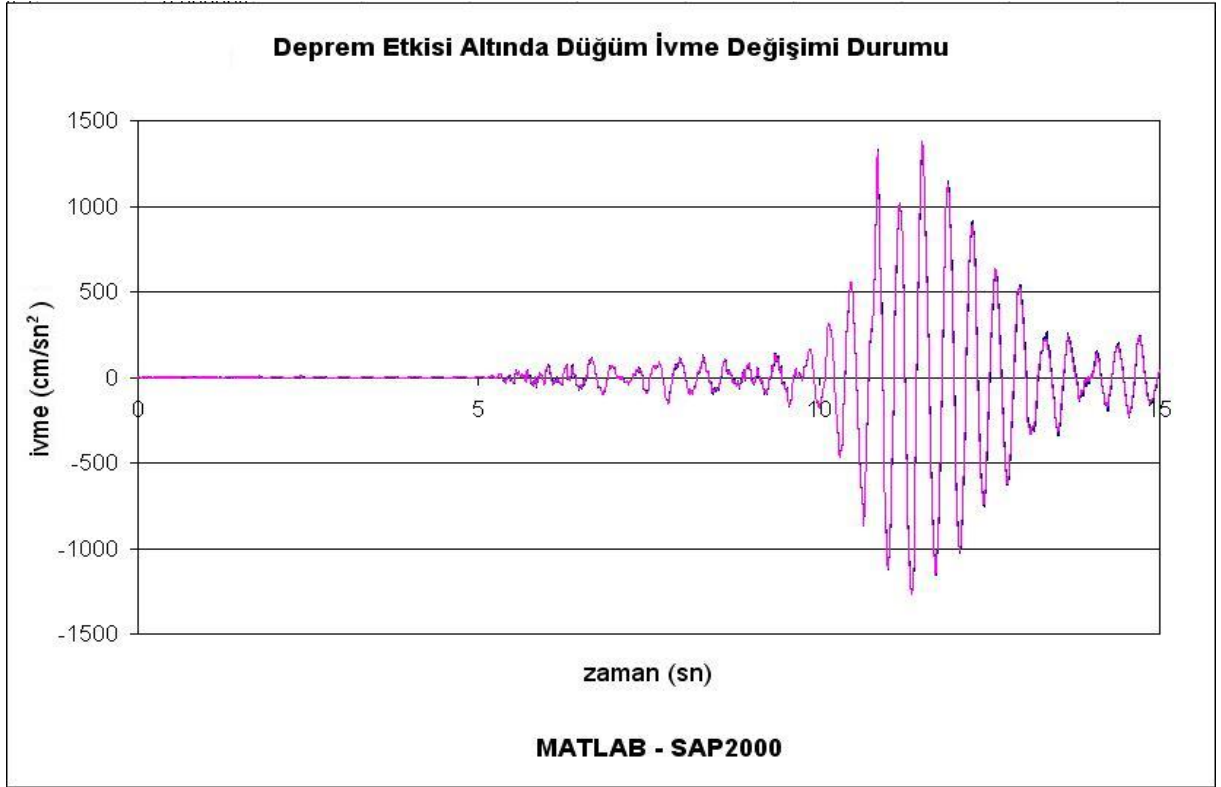
Şekil 6.17 Üç boyutlu çerçevenin 5' nolu düğümünün deprem süresi boyunca SAP2000'den elde edilen yerdeğiştirme-zaman değişiminin SAP2000'den görüntüsü



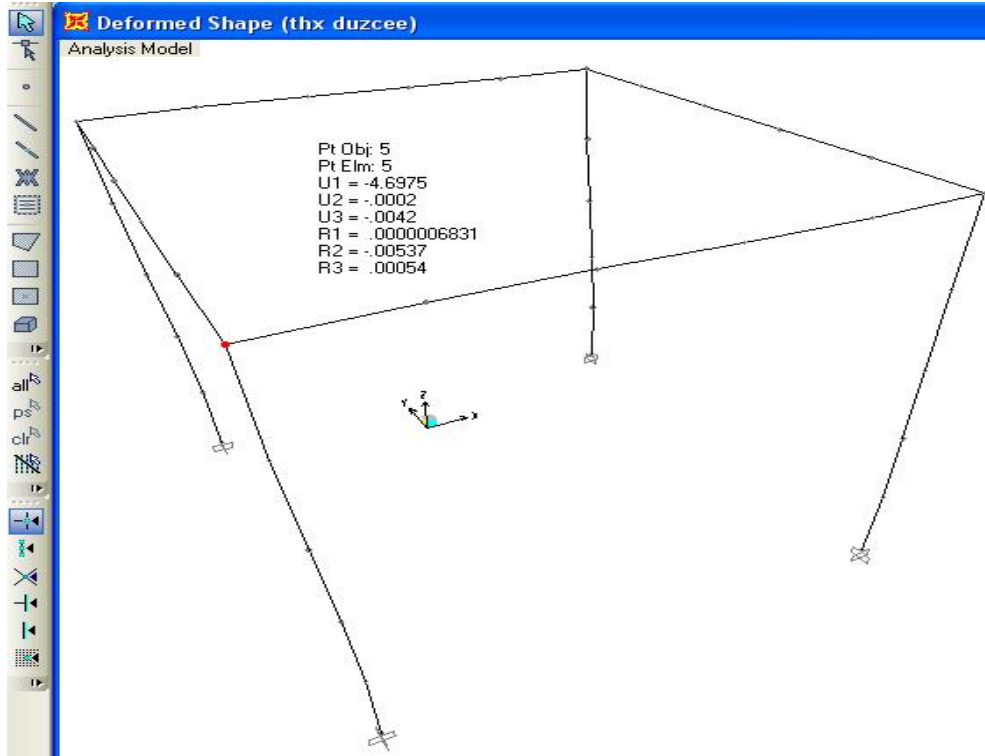
Şekil 6.18 Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm yerdeğiştirmesi değişimi sonuçlarının karşılaştırılması



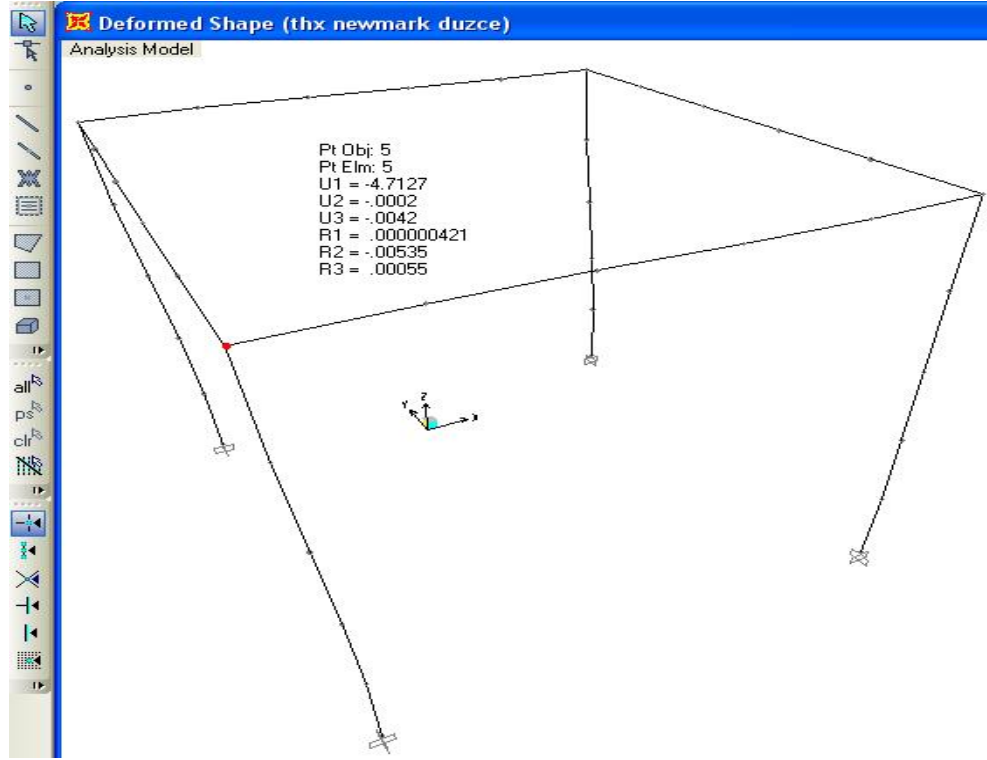
Şekil 6.19 Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm hız değişimi sonuçlarının karşılaştırılması



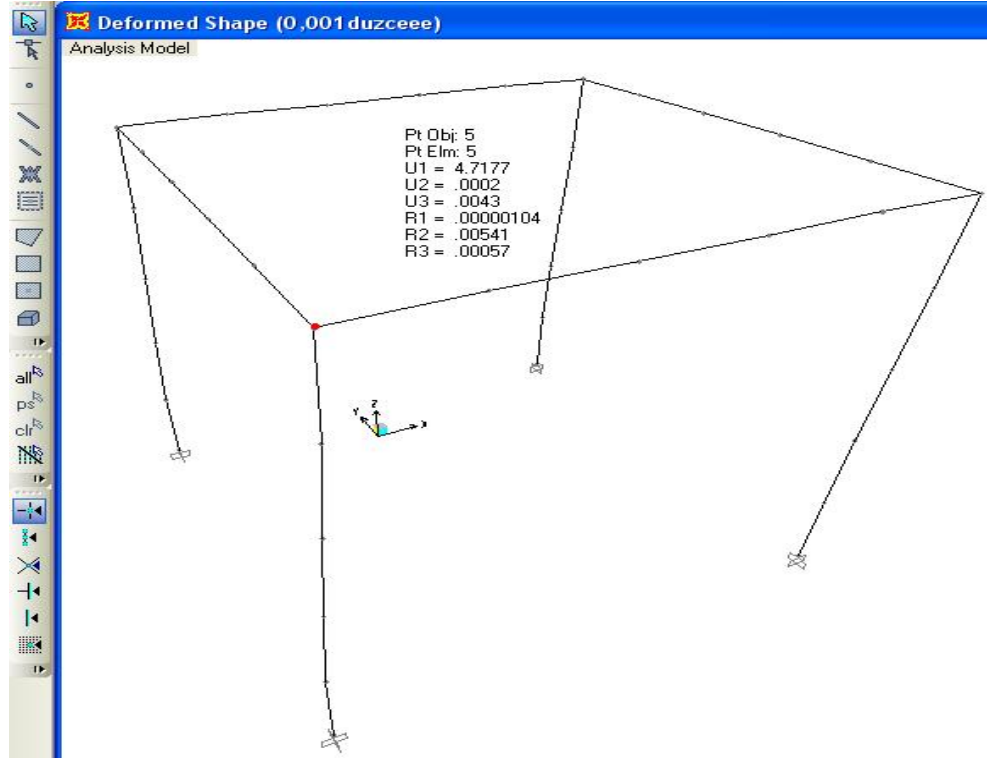
Şekil 6.20 Üç boyutlu çerçeve için SAP2000 ve MATLAB programları ile yapılan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile elde edilen düğüm ivme değişimi sonuçlarının karşılaştırılması



Şekil 6.21 SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal modal hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi



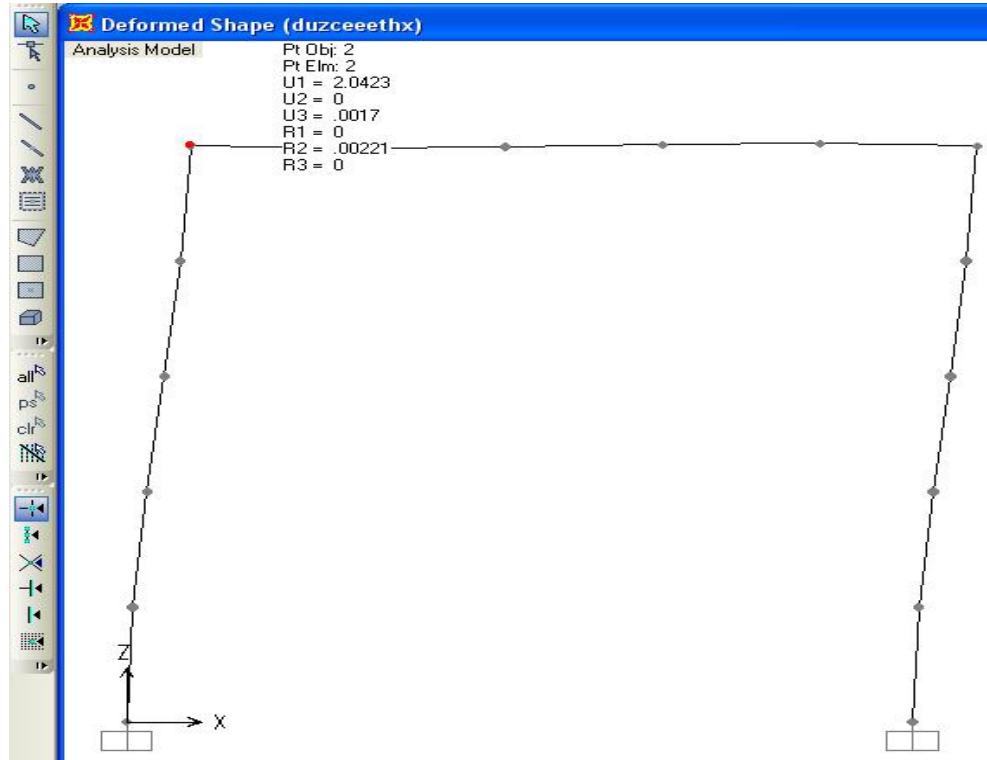
Şekil 6.22 SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi



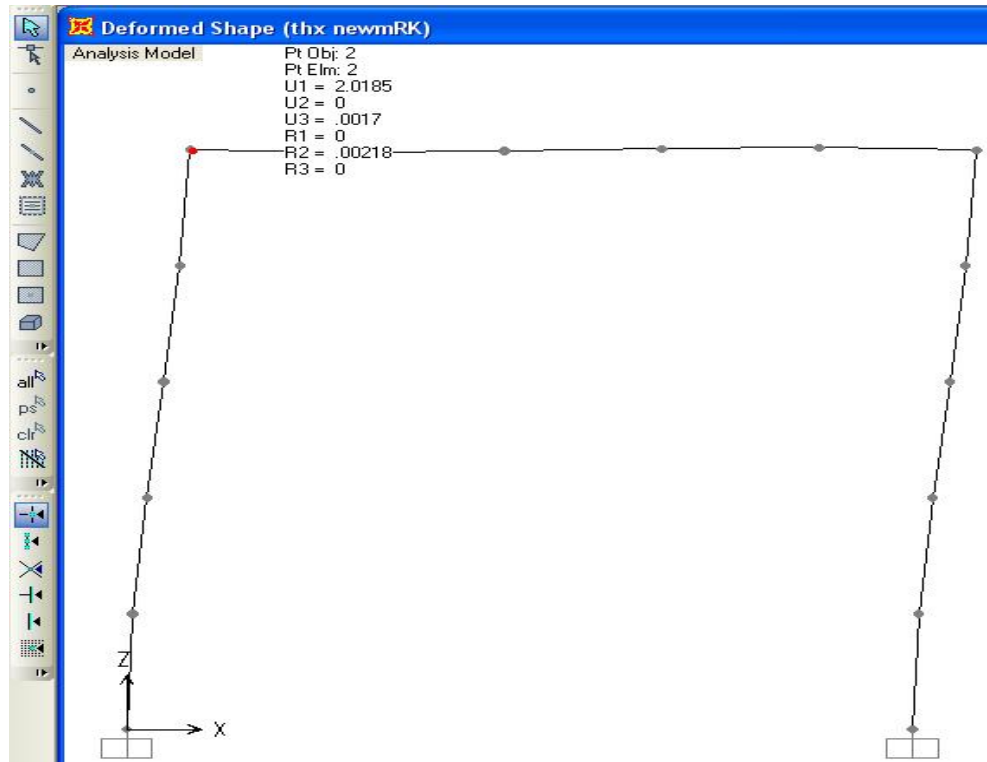
Şekil 6.23 SAP2000'den elde edilen 5' nolu düğümün spektrum hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi

Çizelge 6.5 Üç boyutlu çerçevenin deprem hesap yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması

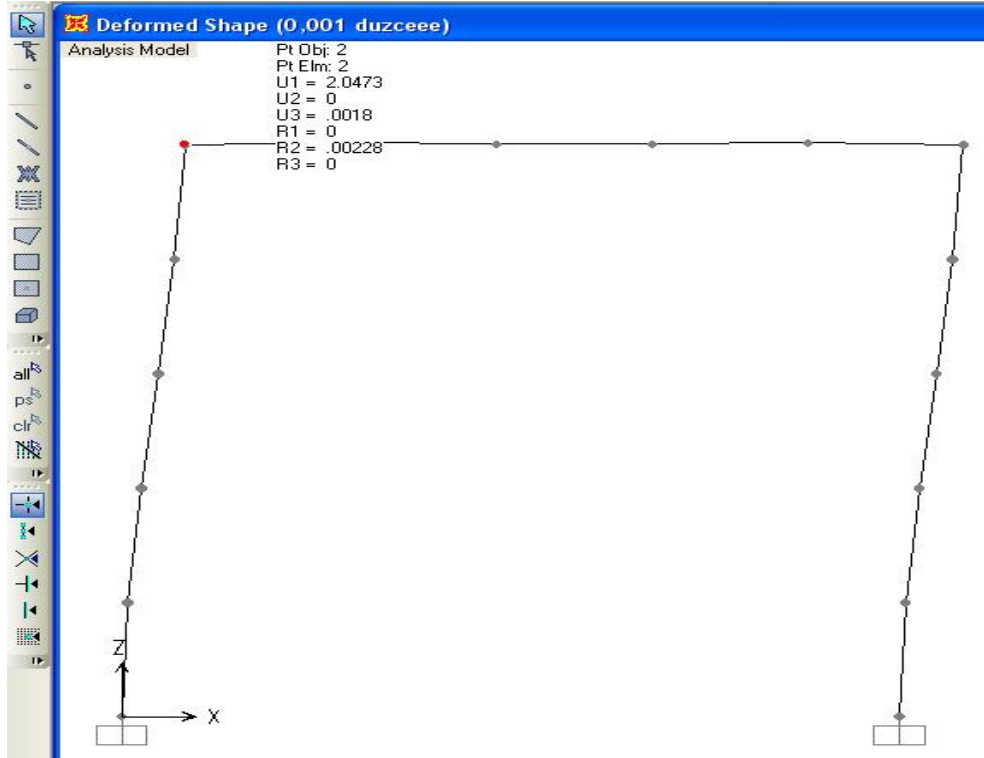
DÜĞÜM NO	DEPREM HESAP YÖNTEMİ	ÇERÇEVE	PROGRAM	MAKS. SONUÇLAR (cm)	MAKS. SONUÇ ADIMI	MİN. SONUÇLAR (cm)	MİN. SONUÇ ADIMI
5	ZAMAN TANIM ALANINDA DOĞRUSAL DOĞRUDAN HESAP	3D	SAP2000	4,4302	1136	-4,7127	1086
			MATLAB	4,4989	1136	-4,7690	1086
5	ZAMAN TANIM ALANINDA DOĞRUSAL MODAL HESAP	3D	SAP2000	4,4440	1136	-4,6975	1086
			MATLAB	4,4989	1136	-4,7690	1086
5	SPEKTRAL HESAP	3D	SAP2000	4,7170	—	-4,7170	—
			MATLAB	4,2850	—	-4,2850	—



Şekil 6.24 SAP2000'den elde edilen 2' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal modal hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi



Şekil 6.25 SAP2000'den elde edilen 2' nolu düğümün zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi



Şekil 6.26 SAP2000’den elde edilen 2’ nolu düğümün spektral hesap durumunda yaptığı maksimum yerdeğiştirmesi

Çizelge 6.6 İki boyutlu çerçevenin deprem hesap yöntemi sonuçlarının karşılaştırılması

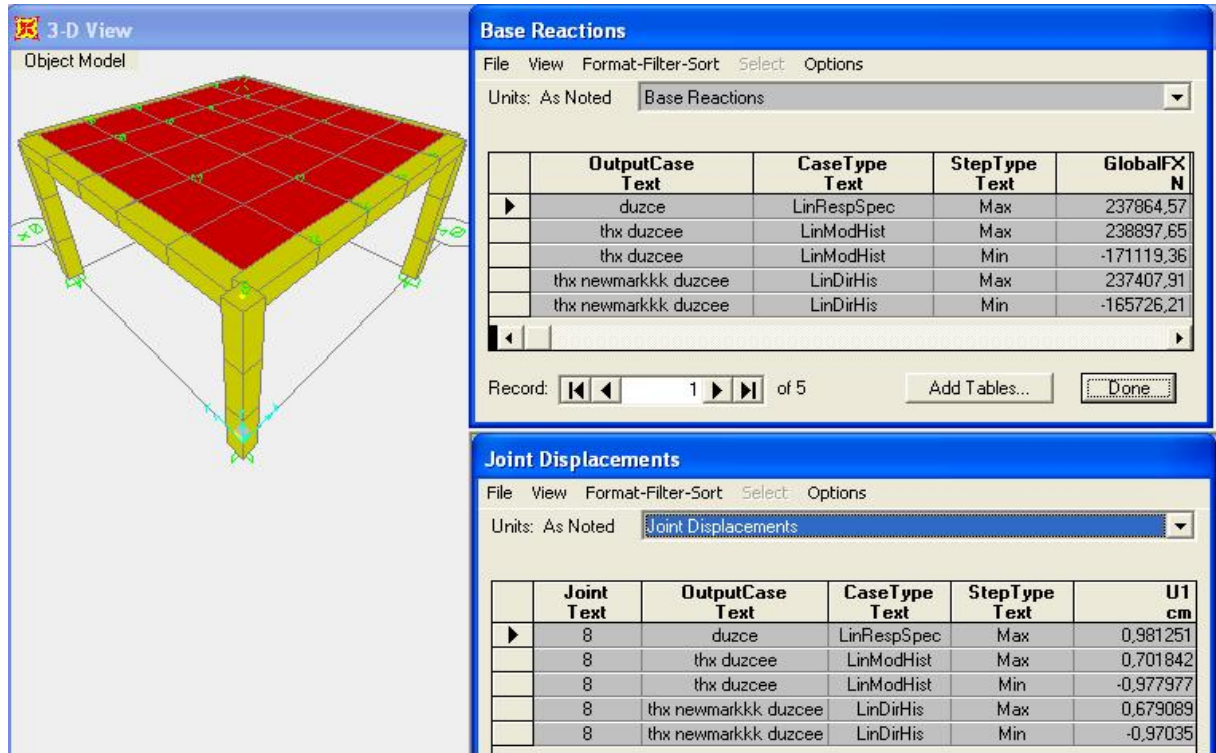
DÜĞÜM NO	DEPREM HESAP YÖNTEMİ	ÇERÇEVE	PROGRAM	MAKS. SONUÇLAR (cm)	MAKS. SONUÇ ADIMI	MİN. SONUÇLAR (cm)	MİN. SONUÇ ADIMI
2	ZAMAN TANIM ALANINDA DOĞRUSAL DOĞRUDAN HESAP	2D	SAP2000	2,0185	1128	-1,4964	1088
			MATLAB	2,2300	1057	-1,7000	1088
2	ZAMAN TANIM ALANINDA DOĞRUSAL MODAL HESAP	2D	SAP2000	2,0423	1128	-1,5452	1088
			MATLAB	2,2300	1057	-1,7000	1088
2	SPEKTRAL HESAP	2D	SAP2000	2,0473	—	-2,0473	—
			MATLAB	1,8129	—	-1,8129	—

Çizelge 6.7 Uzay çerçeve statik çözüm düğüm kuvvetleri sonuçlarının kıyaslaması

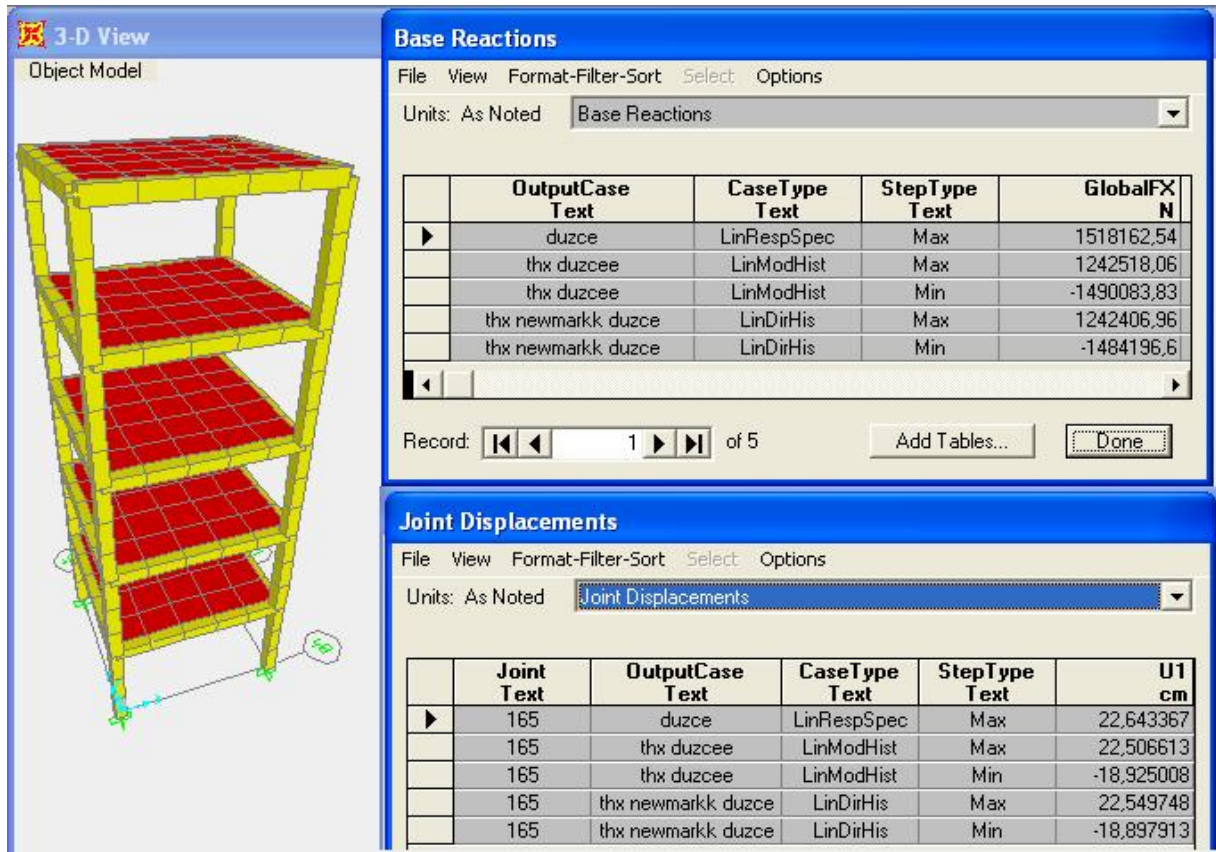
ELEMEN NO	DÜĞÜM NO	ÇÖZÜM YÖNTEMİ	DÜĞÜM KUVVETLERİ								
			F1 (N)			F2 (N)			F3 (N)		
			MATLAB	SAP2000	FARK (N)	MATLAB	SAP2000	FARK (N)	MATLAB	SAP2000	FARK (N)
1	1	LinSt.	-392,51	-392,51	0,00	75,03	75,03	0,00	-262,10	-262,10	0,00
1	5	LinSt.	392,51	392,51	0,00	-75,03	-75,03	0,00	262,10	262,10	0,00
2	2	LinSt.	-392,07	-392,07	0,00	-75,03	-75,03	0,00	262,10	262,10	0,00
2	6	LinSt.	392,07	392,07	0,00	75,03	75,03	0,00	-262,10	-262,10	0,00
3	3	LinSt.	-107,69	-107,69	0,00	75,03	75,03	0,00	-166,28	-166,28	0,00
3	7	LinSt.	107,69	107,69	0,00	-75,03	-75,03	0,00	166,28	166,28	0,00
4	4	LinSt.	-107,73	-107,73	0,00	-75,03	-75,03	0,00	166,28	166,28	0,00
4	8	LinSt.	107,73	107,73	0,00	75,03	75,03	0,00	-166,28	-166,28	0,00
5	5	LinSt.	499,66	499,66	0,00	75,03	75,03	0,00	-315,68	-315,68	0,00
5	6	LinSt.	-499,66	-499,66	0,00	-75,03	-75,03	0,00	315,68	315,68	0,00
6	7	LinSt.	0,14	0,14	0,00	75,03	75,03	0,00	-112,70	-112,70	0,00
6	8	LinSt.	-0,14	-0,14	0,00	-75,03	-75,03	0,00	112,70	112,70	0,00
7	5	LinSt.	107,84	107,84	0,00	0,00	0,00	0,00	53,58	53,58	0,00
7	7	LinSt.	-107,84	-107,84	0,00	0,00	0,00	0,00	-53,58	-53,58	0,00
8	6	LinSt.	107,59	107,59	0,00	0,00	0,00	0,00	-53,58	-53,58	0,00
8	8	LinSt.	-107,59	-107,59	0,00	0,00	0,00	0,00	53,58	53,58	0,00

Çizelge 6.8 Uzak çerçeve statik çözüm düğüm momentleri sonuçların kıyaslaması

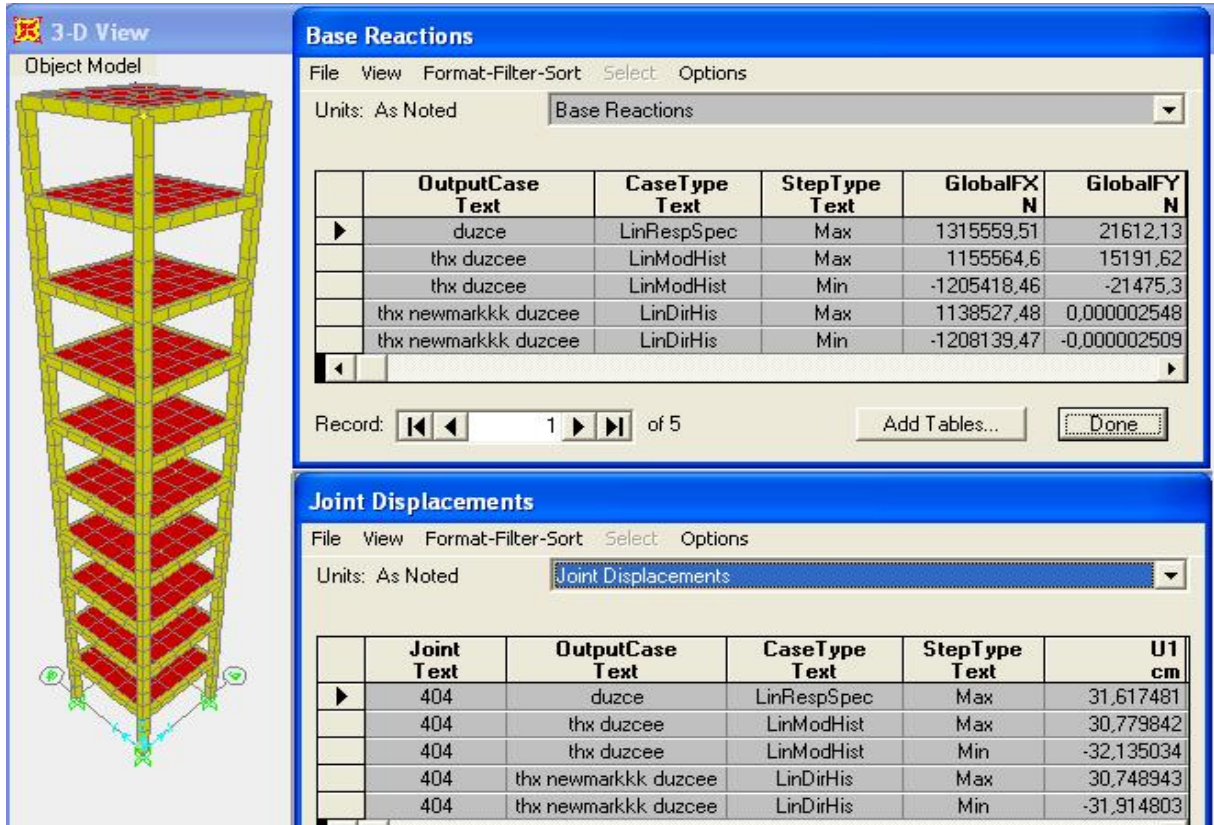
ELEMAN NO	DÜĞÜM NO	ÇÖZÜM YÖNTEMİ	DÜĞÜM MOMENTLERİ								
			M1 (N-cm)			M2 (N-cm)			M3 (N-cm)		
			MATLAB	SAP2000	FARK (N-cm)	MATLAB	SAP2000	FARK (N-cm)	MATLAB	SAP2000	FARK (N-cm)
1	1	LinSt.	-20982,82	-20982,72	-0,10	-111330,02	-111329,93	-0,09	-8179,39	-8179,54	0,15
1	5	LinSt.	-16530,48	-16530,42	-0,06	-84923,49	-84923,44	-0,05	8179,39	8179,54	-0,15
2	2	LinSt.	20982,82	20982,72	0,10	-111190,45	-111190,35	-0,10	-8163,23	-8163,38	0,15
2	6	LinSt.	16530,48	16530,42	0,06	-84844,20	-84844,16	-0,04	8163,23	8163,38	-0,15
3	3	LinSt.	-20982,82	-20982,72	-0,10	-31642,72	-31642,81	0,09	-8179,39	-8179,54	0,15
3	7	LinSt.	-16530,48	-16530,42	-0,06	-22203,73	-22203,78	0,05	8179,39	8179,54	-0,15
4	4	LinSt.	20982,82	20982,72	0,10	-31649,01	-31649,11	0,10	-8163,23	-8163,38	0,15
4	8	LinSt.	16530,48	16530,42	0,06	-22216,38	-22216,42	0,04	8163,23	8163,38	-0,15
5	5	LinSt.	3135,12	3135,17	-0,05	78949,64	78949,49	0,15	18779,61	18779,52	0,09
5	6	LinSt.	-3135,12	-3135,17	0,05	78889,35	78889,20	0,15	18733,70	18733,61	0,09
6	7	LinSt.	3135,12	3135,17	-0,05	28177,58	28177,73	-0,15	18779,61	18779,52	0,09
6	8	LinSt.	-3135,12	-3135,17	0,05	28171,23	28171,38	-0,15	18733,70	18733,61	0,09
7	5	LinSt.	13395,36	13395,25	0,11	5973,85	5973,96	-0,11	-26959,00	-26959,07	0,07
7	7	LinSt.	13395,36	13395,25	0,11	-5973,85	-5973,96	0,11	-26959,00	-26959,07	0,07
8	6	LinSt.	-13395,36	-13395,25	-0,11	5954,86	5954,96	-0,10	-26896,92	-26896,99	0,07
8	8	LinSt.	-13395,36	-13395,25	-0,11	-5954,86	-5954,96	0,10	-26896,92	-26896,99	0,07



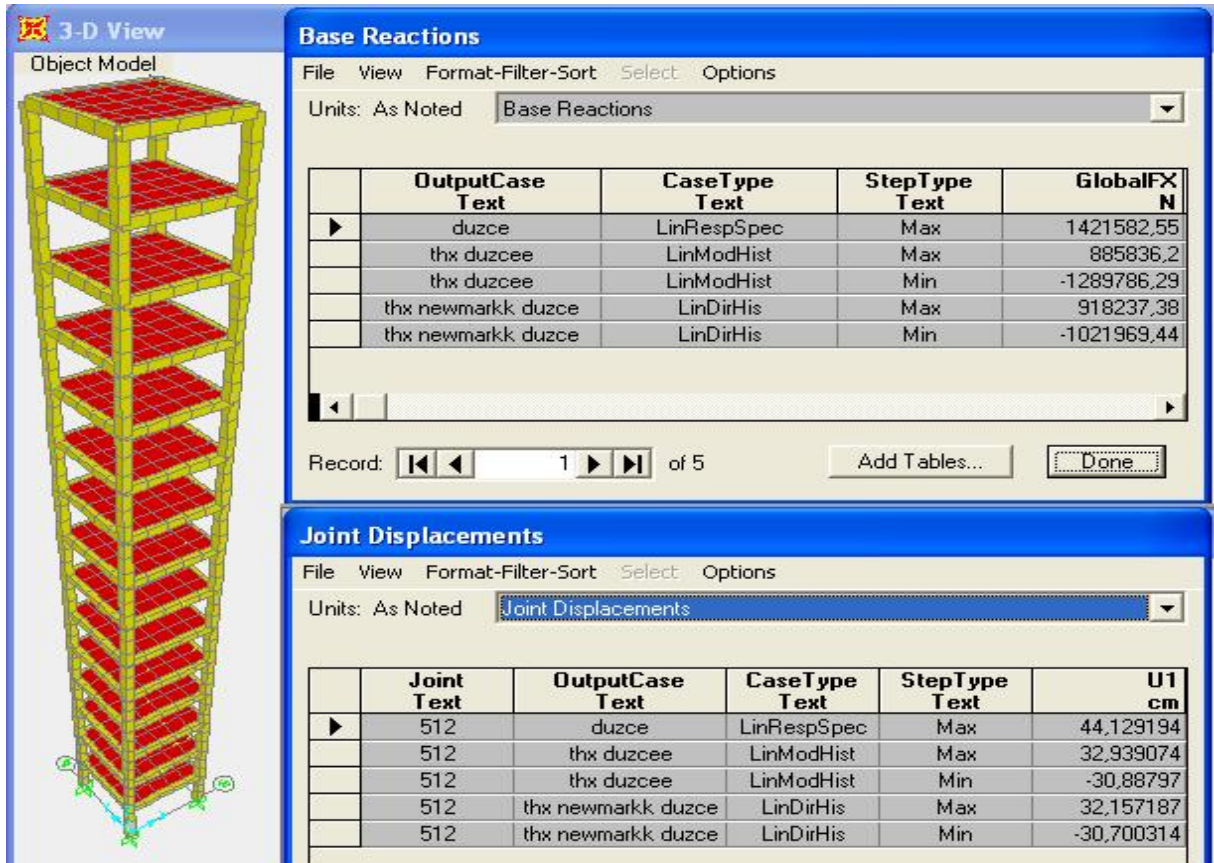
Şekil 6.27 Planda düzgün geometrili, döşemeli, 3m yüksekliğindeki yapı analizi



Şekil 6.28 Planda düzgün geometrili, döşemeli, 15m yüksekliğindeki yapı analizi



Şekil 6.29 Planda düzgün geometrilili, döşemeli, 30m yüksekliğindeki yapı analizi

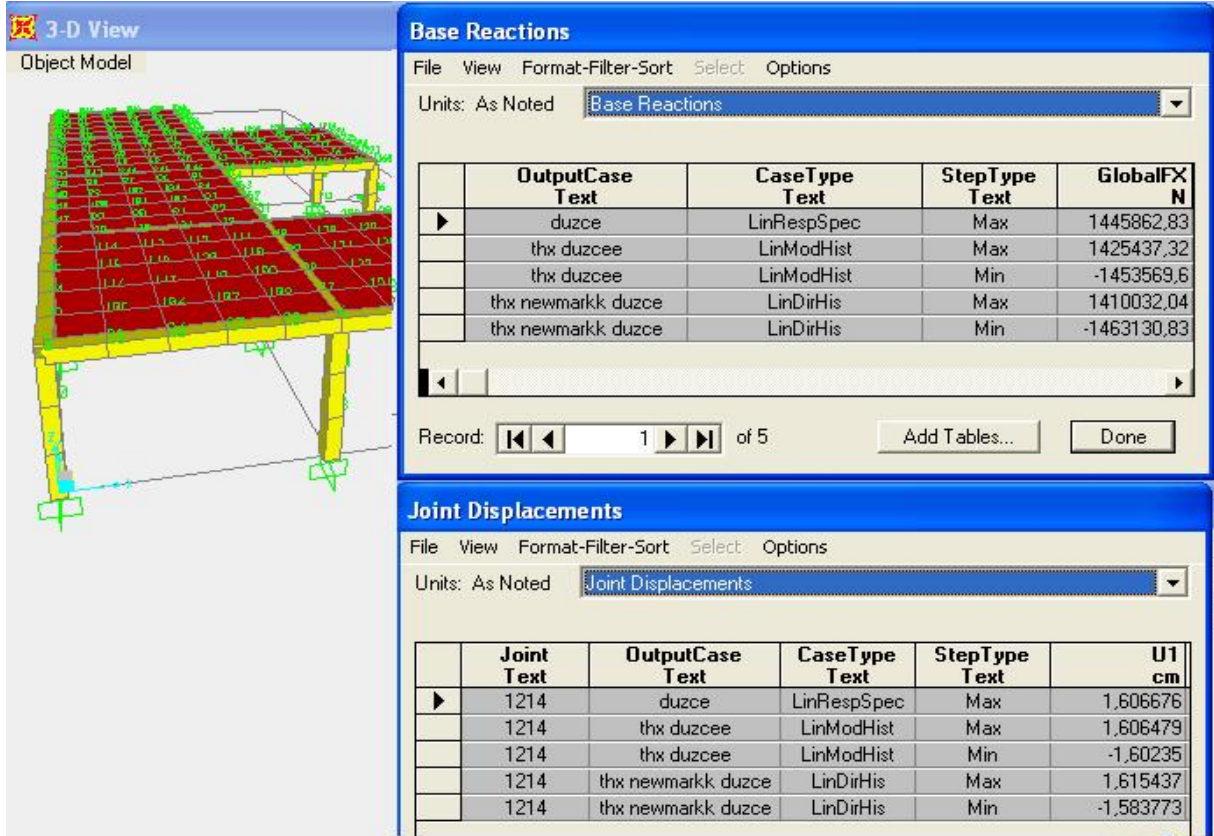


Şekil 6.30 Planda düzgün geometrilili, döşemeli, 45m yüksekliğindeki yapı analizi

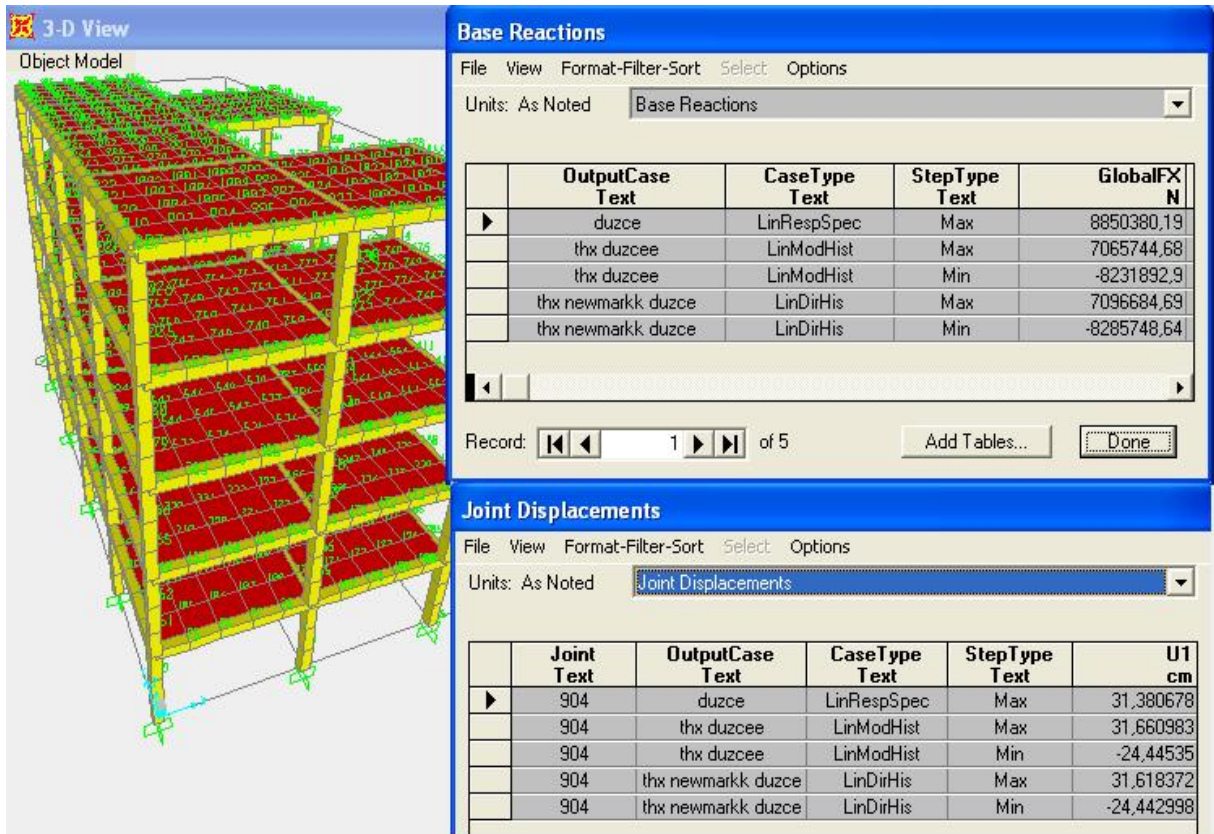
Çizelge 6.9 Planda düzenli farklı yapı yüksekliğine sahip kolon-kiriş-döşeme taşıyıcı elemanlı yapı analiz durumları

Tepe Düğüm Noktası	Analiz Yöntemi	Max/ Min	Yerdeğiştirme (cm)	Yüzde Fark (%)	Deprem Doğrultusunda Taban Kesme Kuvveti (ton)	Yüzde Fark (%)	Kolon Ebatları (cm)
Planda Düzenli 3m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
8	Spektral Hesap	Max	0,981	0,33	23,79	-0,43	30x30
8	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	0,702		23,89		30x30
8	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-0,978		-17,11		30x30
8	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	0,679		23,74		30x30
8	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-0,970		-16,57		30x30
Planda Düzenli 15m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
165	Spektral Hesap	Max	22,643	0,42	151,82	1,88	35x35
165	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	22,507		124,25		35x35
165	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-18,925		-149,01		35x35
165	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	22,550		124,24		35x35
165	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-18,898		-148,42		35x35
Planda Düzenli 30m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
404	Spektral Hesap	Max	31,617	-1,61	131,56	8,89	40x40
404	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	30,780		115,56		40x40
404	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-32,135		-120,54		40x40
404	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	30,749		113,85		40x40
404	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-31,915		-120,81		40x40
Planda Düzenli 45m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
512	Spektral Hesap	Max	44,129	33,97	142,16	10,22	45x45
512	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	32,939		88,58		45x45
512	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-30,888		-128,98		45x45
512	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	32,157		91,82		45x45
512	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-30,700		-102,20		45x45

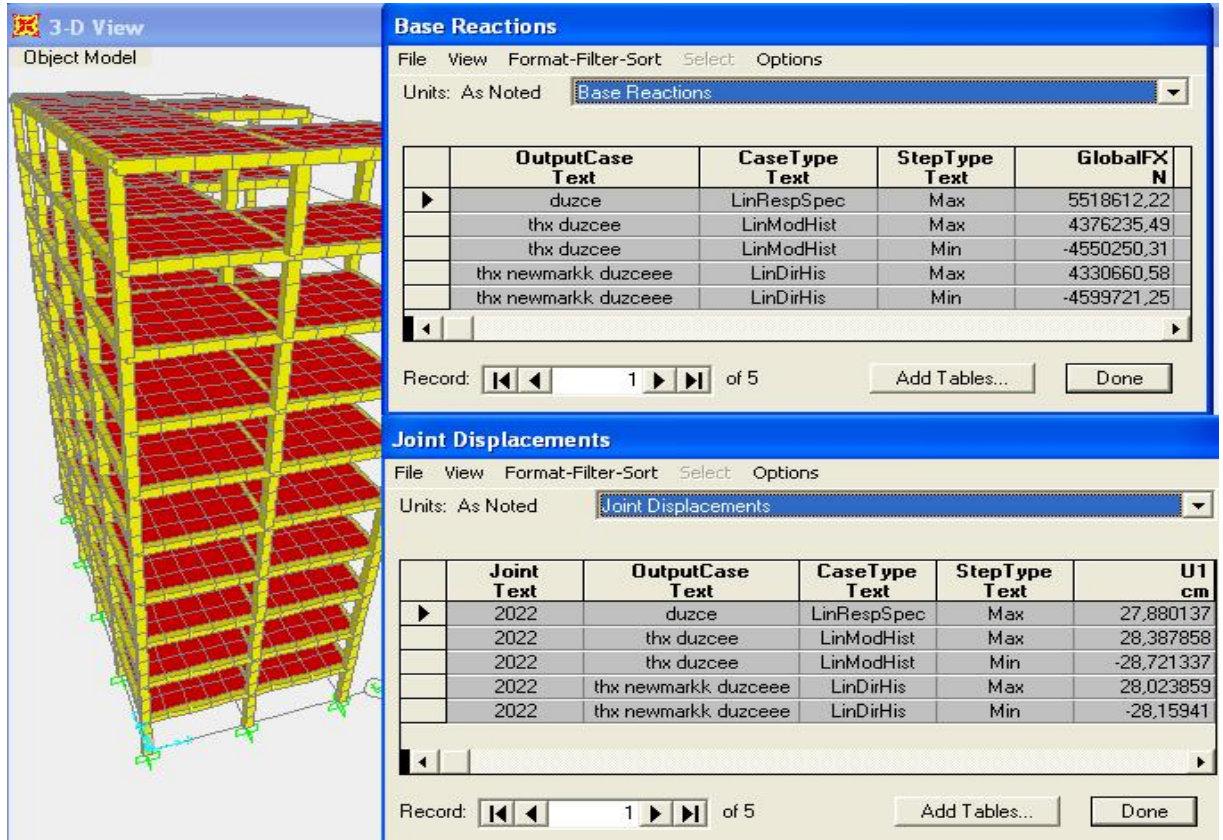
$$\text{Yüzde Fark(\%)} = ((\text{SpektralHesap} - |\text{Zam.Tan.Alan.Doğ.Doğ.Hes.}|) / |\text{Zam.Tan.Alan.Doğ.Doğ.Hes.}|) * 100$$



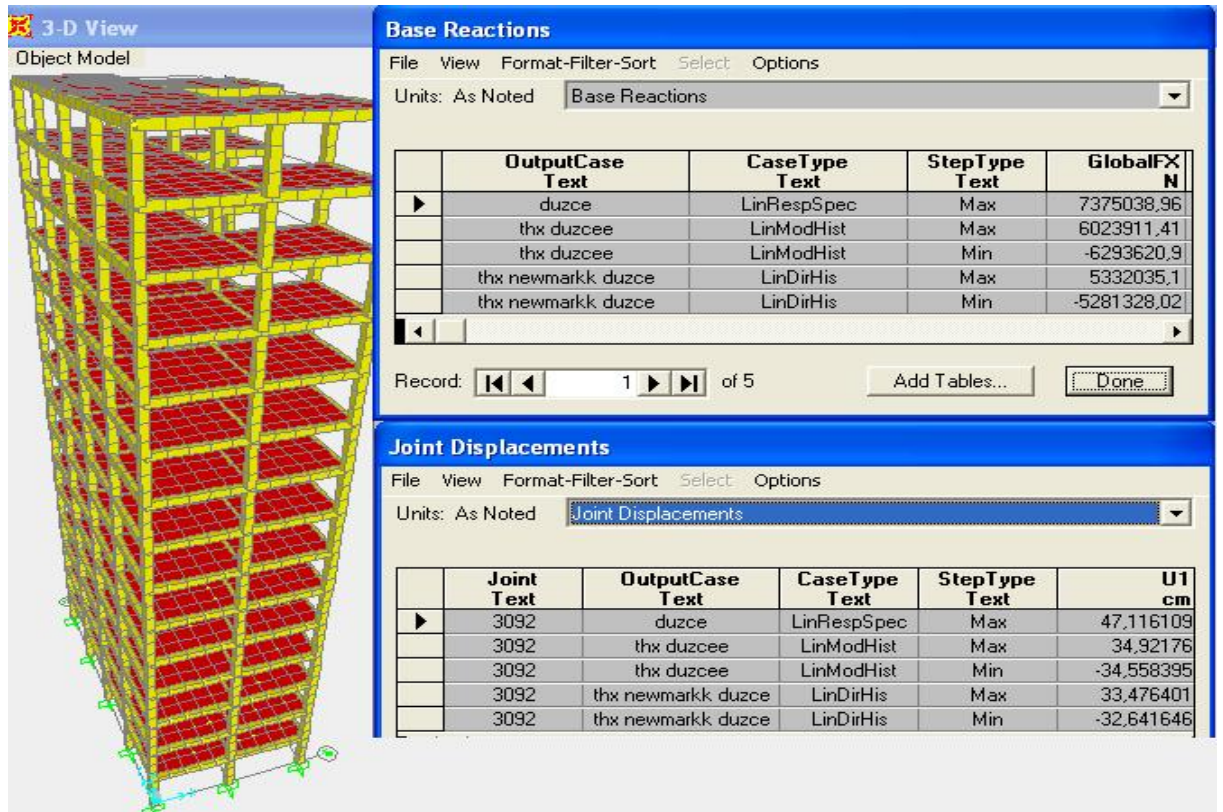
Şekil 6.31 Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 3m yüksekliğindeki yapı analizi



Şekil 6.32 Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 15m yüksekliğindeki yapı analizi



Şekil 6.33 Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 30m yüksekliğindeki yapı analizi



Şekil 6.34 Planda düzensiz geometrili, döşemeli, 45m yüksekliğindeki yapı analizi

Çizelge 6.10 Planda düzensiz farklı yapı yüksekliğine sahip kolon-kiriş-döşeme taşıyıcı elemanlı yapı analiz durumları

Tepe Düğüm Noktası	Analiz Yöntemi	Max/ Min	Yerdeğiştirme (cm)	Yüzde Fark (%)	Deprem Doğrultusunda Taban Kesme Kuvveti (ton)	Yüzde Fark (%)	Kolon Ebatları (cm)
Planda Düzensiz 3m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
1214	Spektral Hesap	Max	1,607	-0,54	144,586	-1,18	30x30
1214	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	1,606		142,544		30x30
1214	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-1,602		-145,357		30x30
1214	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	1,615		141,003		30x30
1214	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-1,584		-146,313		30x30
Planda Düzensiz 15m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
904	Spektral Hesap	Max	31,381	-0,89	885,038	6,81	35x35
904	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	31,661		706,574		35x35
904	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-24,445		-823,189		35x35
904	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	31,618		709,668		35x35
904	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-24,443		-828,575		35x35
Planda Düzensiz 30m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
2022	Spektral Hesap	Max	27,880	-2,93	551,861	19,98	40x40
2022	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	28,388		437,624		40x40
2022	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-28,721		-455,025		40x40
2022	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	28,024		433,066		40x40
2022	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-28,159		-459,972		40x40
Planda Düzensiz 45m Yükseklikli Kolon-Kiriş-Döşeme Elemanlı Yapı Analiz Sonuçları							
3092	Spektral Hesap	Max	47,116	34,92	737,504	17,18	45x45
3092	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Max	34,922		602,391		45x45
3092	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Doğrudan Hesap	Min	-34,558		-629,362		45x45
3092	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Max	33,476		533,204		45x45
3092	Zam.Tan. Alan. Doğrusal Modal Hesap	Min	-32,642		-528,133		45x45

$$\text{Yüzde Fark (\%)} = ((\text{SpektralHesap} - |\text{Zam.Tan.Alan.Doğ.Doğ.Hes.}|) / |\text{Zam.Tan.Alan.Doğ.Doğ.Hes.}|) * 100$$

7. DEĞERLENDİRME ve SONUÇ

Bu çalışmada, düzlem çerçevelerin ve uzay çerçevelerin Euler-Bernoulli (MATLAB) ve Timoshenko (SAP2000) kiriş teorileri çerçevesinde enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak belirli bir deprem yükü altında davranışı incelenmiştir. Bu amaçla MATLAB programlama dili kullanılarak bir bilgisayar programı hazırlanmış ve elde edilen sonuçlar SAP2000 bilgisayar programı ile karşılaştırılmıştır.

SAP2000 programı ile planda düzgün ve düzensiz geometrili denebilecek kolon kiriş ve döşeme sisteminden oluşan, farklı kat yüksekliklerine sahip yapıların üç farklı deprem analiz yöntemi ile çözümlemesi yapılarak tepe düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve deprem doğrultusunda oluşan yapı taban kesme kuvveti değerleri irdelenmiştir.

Çalışmada dikkate alınan depremin maksimum ivmesi olan $805,878 \text{ cm/sn}^2$ lik değeri 10,08. sn de oluşmasına rağmen gerek uzay çerçevede gerekse düzlem çerçeve çözümlemesinde yerdeğiştirmeler daha geç zamanda oluşmuştur. Burdan hareketle de sistemde oluşan maksimum kuvvetlerin ivmenin maksimum olduğu anda değil de göreceli yerdeğiştirmelerin maksimum olduğu anda oluşmakta olduğu anlaşılmaktadır. Bu durumun yapı dinamiğinde sözde ivme kavramının ortaya atılmasına neden olduğu bilinmektedir.

Aynı modal sönüm oranlı, farklı periyotlu tek serbestlikli yapıların belirli bir deprem yükü altındaki maksimum spektral yerdeğiştirmelerinin oluşma zamanları yapı periyodu arttıkça yer ivmesinin maksimum olduğu zamana göre daha sonraki geç zamanlara denk gelmektedir. Aynı şekilde sistemlerin, maksimum spektral ivme ve sözde spektral ivme değerleri yapı periyodu arttıkça daha geç zamanlarda oluşmaktadır.

Plan geometrisi düzgün denebilecek, taşıyıcı sistemi kolon-kiriş-döşeme elemanlarından oluşan, bina yüksekliği (çalışmada 30m ye kadar) az olan yapılar için zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap, zaman tanım alanında doğrusal modal hesap, spektrum analiz sonuçları birbirine çok yakın, bina yüksekliği daha fazla olan yapılar (çalışmada 45m) için ise zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap ile zaman tanım alanında doğrusal modal hesap neredeyse aynı olurken spektrum analizi sonuçları biraz daha büyük değerler almaktadır.

Plan geometrisi düzensiz denebilecek, taşıyıcı sistemi kolon-kiriş-döşeme elemanlarından oluşan, bina yüksekliği (çalışmada 30m ye kadar) az olan yapılar için zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap, zaman tanım alanında doğrusal modal hesap ve spektrum analizi analiz sonuçları birbirine yine çok yakın, bina yüksekliği daha fazla olan yapılar (çalışmada

45m) için ise zaman tanım alanında doğrusal doğrudan hesap ile zaman tanım alanında doğrusal modal hesap sonuçları neredeyse aynı olurken spektrum analiz sonuçları daha büyük değerler almaktadır.

İrdelenen örneklerde 15 katlı yapılara gelen taban kesme kuvvetleri açısından; spektrum analiz sonuçları zaman tanım alanı sonuçlarına göre daha güvenli tarafta kalmakla birlikte, yapı etkin periyotları büyük ivmelere karşılık gelen değerlerde orta kat yüksekliğine sahip (çalışmada 15m) yapılar için daha yüksek katlı yapılara göre daha büyük taban kesme kuvvetlerine ulaşmıştır.

Böylesi durumlar, yüksek yapıların ekonomik olarak boyutlandırılabilmesi için zaman tanım alanında hesap yapmanın doğru olacağını ifade eder.

Tek katlı düzlem çerçeve ve tek katlı uzay çerçeve örnekleri hem MATLAB programlama dili kullanılarak hazırlanan analiz programı ile hem de SAP2000 programı ile çözülmüş olup elde edilen sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmüştür. Bazı sonuçların az da olsa farklı olma nedeni burada çerçeve elemanlarının modellenmesinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmasına karşın SAP2000 programında Timoshenko kiriş teorisinin kullanılması, yani serbestliğin daha fazla olması olabilir.

KAYNAKLAR

- Aköz, Y., (2005), Enerji Yöntemleri ve Yapı Sistemleri, İ.T.Ü, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- Aström, J. ve Wittenmark, B., (1999), Computer-Controlled Systems Theory and Design, Third edition, Tsinghua University Press, Prentice Hall.
- Beards C.F., (1996), Structural Vibration, University Of London.
- Clough, R.W. ve Penzien, J., (2004), Dynamics Of Structures, University of California, Berkeley, McGraw-Hill International Editions.
- Chopra, A.R., (1993), Dynamics Of Structures, University of California, Berkeley. McGraw-Hill International Editions.
- Celep, Z. ve Kumbasar, N., (1996) Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş, İTÜ, İstanbul.
- Computer and Structures Inc., (2005), Analysis Reference Manual for SAP2000, ETABS, Berkeley, California.
- Hahn, B. ve T. Valentine D., (2007), Essential MATLAB for Engineers and Scientists, Third edition, Published by Elsevier Ltd.
- Hutton, D., (2004), Fundamentals Of Finite Element Analysis ,Washington State University, McGraw-Hill International Editions.
- İnan, M., (1996), Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ, İstanbul.
- Kocatürk, T., (2008), Yapı Mekaniğinde Özel Problemler Ders Notları, YTÜ, İstanbul.
- Kocatürk, T., (2004), “Determination of steady-state response of viscoelastically supported cantilever beam under sinusoidal base excitation”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1145-1156.
- Kocatürk, T., Demir, C., İlhan, N. ve Şimşek, M., (2005), “Determination of steady-state response of viscoelastically point-supported beam under forced vibration”, 12-16 Eylül 2005, Hatay, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, 591-600.
- Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 108-122.
- Kocatürk, T. ve Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Elastically Supported Timoshenko Beams”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 79-93.
- Kasımzade, A.A., (2004), Yapı Dinamiği Temelleri ve Deprem Mühendisliğinde Uygulamaları, Birsen Yayınevi, İstanbul.
- L. Meirovitch, Fundamentals of Vibrations, McGraw-Hill Book Company, New York, (Second Printing, 2003), International Edition, McGraw-Hill International Editions, Singapore, 2001.
- Omurtag, M. H., (2006), “Yapısal Çözümlemede Sonlu Eleman Yöntemi”, İMO Kurs Notları, İstanbul.
- Polat, Z., İnşaat Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi Ders Notları.
- Pecker, A., (2007), International Centre For Mechanical Science Courses and Lectures-No.494, Advanced Earthquake Engineering Analysis.
- Şimşek, M., (2005), “Free Vibration Analysis of Beams Subjected to Axial Load Under Various Boundary Conditions”, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 1-10.

Tuncer, Ö., (2007), Viskoelastik Ara Bağlı Düzlem Çerçevelerin Zorlanmış Titreşimleri, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Yang, B., (2005), Stress, Strain, and Structural Dynamics, University of Southern California.

Wilson, E.L., (2002), Three Dimensional Axial Static and Dynamic Analysis Of Structures, University of California, Berkeley. Computer and Structures inc.

EKLER

Ek1	Temel Bağıntılar
Ek2	Enerji Bağıntıları
Ek3	Lagrange Denklemleri
Ek4	Sistem Matrislerinin Oluşturulması
Ek5	Hareket Denklemlerinin Zaman Tanım Alanında Çözümü
Ek 6	Basit Harmonik Salınım
Ek7	Zorlanmış Titreşim
Ek8	Cevabın Modal Vektörler Cinsinden Ayrıklaştırılması
Ek9	Vektör Uzayları
Ek10	Lineer Dönüşüm
Ek 11	Duhamel İntegrali
Ek12	Yapı Dinamiği İçin Temel Bilgiler
Ek13	Periyodik Zorlamalar Altında Titreşimler

Ek1 Temel Bağıntılar

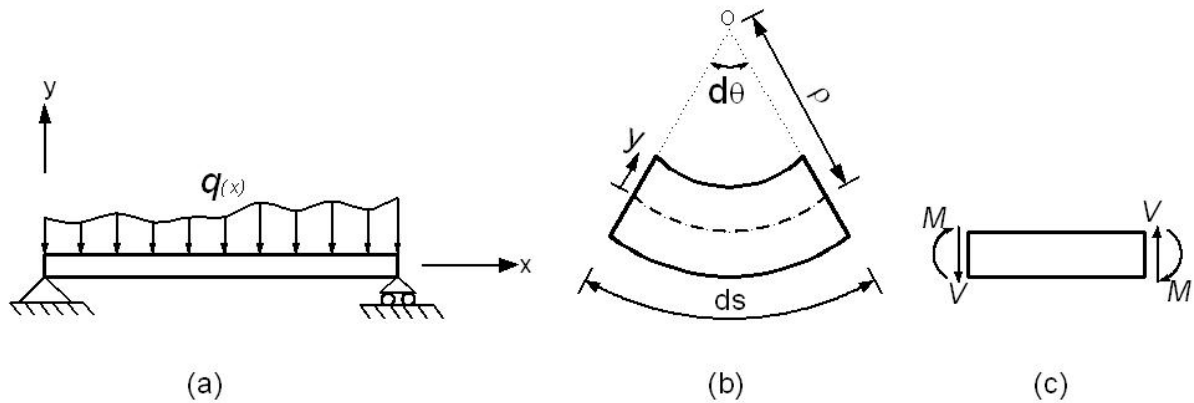
Sistem çözümünde enerji tabanlı sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Dolayısıyla bu yöntemin temelini oluşturan enerji ifadelerinin hesaplanmasında ele alınan elemanın bir davranış modeli olmalıdır. Bu çalışma için Euler – Bernouilli kiriş teorisi kullanılmıştır. Bu varsayım “**eğilme öncesinde çubuk eksenine dik olan düzlem kesitler, eğilme sonrasında da çubuk eksenine (elastik eğriye) dik ve düzlem kalırlar**” şeklinde olup kiriş yüksekliğinin kiriş boyuna oranı küçük olduğu durumlar için iyi sonuç vermektedir.

Ek1.2 Sonlu Eleman Olarak Eğilme Elemanı

Ek1.2.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağıntıları

Çalışmanın temelini oluşturan belli başlı kabuller ve kısıtlılıklar aşağıdaki ilavelerle beraber **Euler - Bernouilli** temel kiriş teorisinin aynısıdır.

1. Eleman boyu L dir ve her bir uçta bir tane olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir.
2. Eleman düğüm noktalarına sadece düğüm noktalarında bağlıdır.
3. Yüklemeler sadece düğüm noktalarında yapılmıştır.



Şekil Ek1.1 a) Keyfi yayılı yük altında basit kiriş b) Eğilmiş kiriş elemanı c) Kesme kuvveti ve eğilme momenti için pozitif işaret kabulü

Şekil Ek1.1 a)’daki gibi eğilme öncesinde dx uzunluğunda olan diferansiyel bir kiriş elemanı göz önüne alınsın. Şekil Ek1.1 b)’den görüldüğü üzere üst yüzey uzunluğunun azaldığı, alt yüzey uzunluğunun ise arttığı görülür. Bu yüzden eğilme esnasında şekil değişimine

uğramayan bir tabaka vardır. Bu tabakanın eğrilik merkezi olan o noktasından ρ mesafede yerleştirilmiş olduğu kabul edilerek ve bu yüzeyi $y = 0$ da alarak herhangi bir y mesafesi için eğilmeden sonraki uzunluk;

$$ds = (\rho - y)d\theta \quad (\text{Ek1.1})$$

olarak ifade edilir. Bu durumda eğilme şekildeğiştirilmesi;

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{d\theta} = -\frac{y}{\rho} \quad (\text{Ek1.2})$$

elde edilir. Euler – Bernolli kirişi için gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (\text{Ek1.3})$$

Matematikten bilindiği üzere düzlem bir eğrinin eğrilik yarıçapı izleyen şekilde ifade edilir:

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (\text{Ek1.4})$$

Burada $v = v(x)$ tarafsız eksenin yer değiştirmiş eğrisini gösterir. Yerdeğiştirmelerin küçük olduğu kabulü ile eğrilik yarıçapı;

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}} \quad (\text{Ek1.5})$$

alınarak (Ek1.2) eşitliğinde yerine konursa, eğilme nedeniyle boyuna eksen doğrultusundaki normal şekil değiştirme;

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{Ek1.6})$$

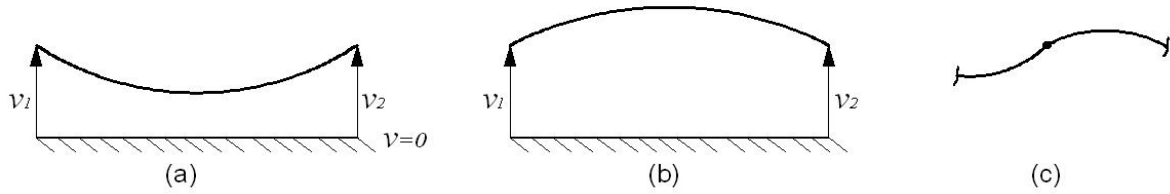
olur. Bu durumda karşı gelen normal gerilme ise izleyen şekilde ifade edilir:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -E y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (\text{Ek1.7})$$

Ek1.2.2 Eleman Uç Yerdeğiştirmeleri ve Şekil Değiştirme Fonksiyonu

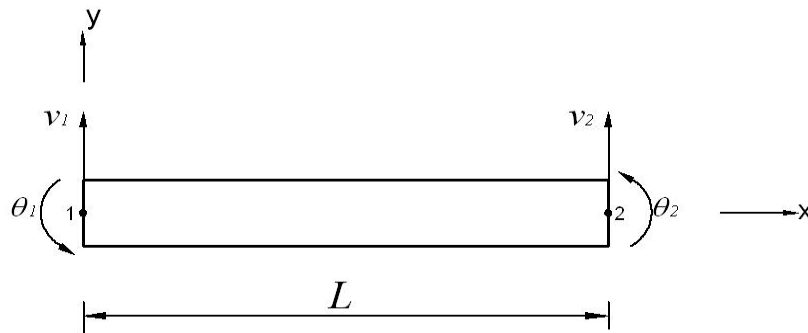
Sonlu eleman formülasyonunun temel varsayımı, sürekli değişen alan değişkeninin sonlu elemanın düğüm noktalarında hesap edilen sonlu sayıdaki ayrık değerler cinsinden ifade

edilmesidir. İlgilenilen alan değişkeninin Şekil Ek1.2' de ifade edildiği gibi giriş boyunca yerdeğiştirmesi, sadece uç noktalarının yerdeğiştirmeleri ile yeter derecede tanımlanamaz. Yani çubuk uç yerdeğiştirmelerini bilmemiz, çubuk üzerindeki herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme değerini bilmemiz için yeterli değildir. Bunun için çubuk sınır koşullarını sağlayan yerdeğiştirme denklemine ihtiyaç vardır. Şekil Ek1.2' de gösterildiği gibi (a) nın ve (b) nin yer değiştirmiş şekli farklıyken uç yerdeğiştirmeleri özdeş olabilir. Bu yüzden eğilme elemanı formülasyonu uç noktalarının çökme yerdeğiştirmeleri yanında dönme yerdeğiştirmelerini de dikkate almalıdır. Eğilme elemanı uç dönmelerinin dikkate alınması, elemanlar arasındaki düğüm noktası birleşimlerinde dönme uyumluluğunu sağlar. Böylece Şekil Ek1.2 (c)' de gösterilen fiziksel olarak kabul edilemez olan süreksizlik durumu da önlenir. Sonlu elemanın iç bölgesinde, aynı zamanda sınırlarında da, sürekli alan değişkeni interpolasyon fonksiyonu ile tanımlanır.

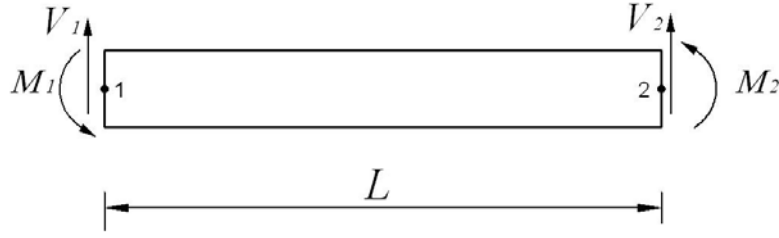


Şekil Ek1.2 (a) ve (b)' de özdeş uç yerdeğiştirmeye sahip, fakat tamamen farklı yerdeğiştirme karakteristikleri gösteren giriş elemanı verilmiştir. c) Birleşme noktasındaki fiziksel olarak kabul edilemez süreksizlik durumu.

Şekil Ek1.3' de eğilme elemanının pozitif uç yerdeğiştirmeleri, Şekil Ek1.4' de ise pozitif uç kuvvetleri gösterilmiştir. Eğilme elemanı için her bir uçta iki bilinmeyen olmak üzere toplam dört sonlu sayıda bilinmeyen vardır.



Şekil Ek1.3 Eğilme elemanı pozitif uç yerdeğiştirmeler



Şekil Ek1.4 Eğilme elemanı pozitif uç kuvvetleri

Yerdeğiştirme fonksiyonu eleman uçlarındaki ayırık değerler cinsinden ifade edilirse, bu fonksiyon

$$v(x) = f(v_1, v_2, \theta_1, \theta_2, x) \quad (\text{Ek1.8})$$

olup izleyen sınır koşullarına sahiptir.

$$v(x = x_1) = v_1$$

$$v(x = x_2) = v_2$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_1} = \theta_1$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=x_2} = \theta_2 \quad (\text{Ek1.9})$$

Bağımsız değişkene göre problemin bir boyutlu olması ve dört sınır koşulu göz önüne alınarak **yerdeğiştirme fonksiyonu** dört sabit katsayılı üçüncü dereceden bir polinom seçilir:

$$v(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (\text{Ek1.10})$$

Yerdeğiştirmeyi tanımlamak için kübik fonksiyon seçimi keyfi değildir. Sürekli alan değişkeninin tanımlanması için **interpolasyon fonksiyonlarının** gerekliliği açıkça görülmektedir. Dört sınır koşulunun tanımlanmasıyla, kabul edilen yerdeğiştirme fonksiyonu dörtten fazla sabitle belirlenemez. Ayrıca problemin kabulünde, yükün eleman uçlarındaki düğüm noktalarına uygulanması sebebi ile iki nokta arasındaki moment değişimi lineerdir. Bu durum, yük ile eğrilik arasındaki izleyen bağıntıda seçilen üçüncü dereceden deneme fonksiyonu yerine konularak da gözlenebilir.

$$M_{(x)} = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{Ek1.11})$$

Elastik eğrinin ikinci türevinin eğilme rijitliği ile çarpımının moment denklemi olduğunu hatırlanırsa, yerdeğiştirme fonksiyonunun ikinci türevinin lineer olması gereklidir.

Şekil değiştirme fonksiyonuna sınır koşulları uygulandığında;

$$v(x=0) = v_1 = a_0$$

$$v(x=L) = v_2 = a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1 = a_1$$

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2 = a_1 + 2a_2 L + 3a_3 L^2 \quad (\text{Ek1.12})$$

eşitlikleri çözüldüğünde, **katsayılar sınır yerdeğiştirme büyüklükleri cinsinden** izleyen şekilde bulunur:

$$a_0 = v_1$$

$$a_1 = \theta_1$$

$$a_2 = \frac{3}{L^2}(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{Ek1.13})$$

$$a_3 = \frac{2}{L^3}(v_2 - v_1) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2)$$

Elde edilen (Ek1.13) eşitliklerinin (Ek1.8) denkleminde yerine konmasıyla, yerdeğiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) v_1 + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \theta_1 + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) v_2 + \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) \theta_2 \quad (\text{Ek1.14})$$

Bu ifade izleyen formda yazılabilir:

$$v(x) = N_1(x) v_1 + N_2(x) \theta_1 + N_3(x) v_2 + N_4(x) \theta_2 \quad (\text{Ek1.14a})$$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (\text{Ek1.15})$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (\text{Ek1.16})$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (\text{Ek1.17})$$

$$N_4(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \quad (\text{Ek1.18})$$

Yukarıdaki (Ek1.14a) ifadesi matris gösterimiyle izleyen şekilde yazılabilir:

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (\text{Ek1.19})$$

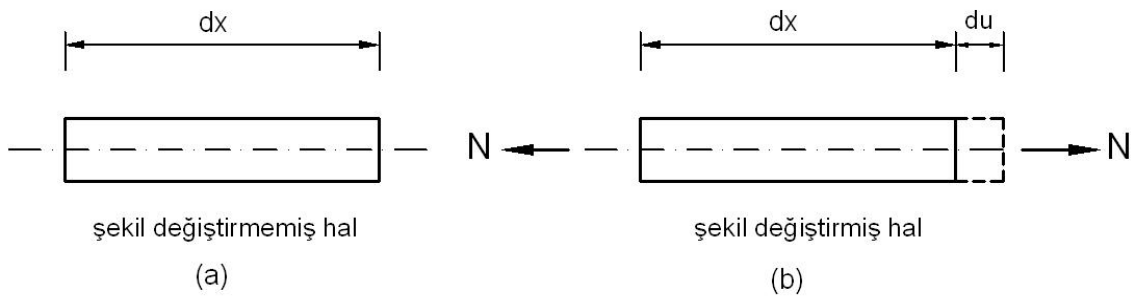
Burada, N_1, N_2, N_3, N_4, x değişkenine bağlı interpolasyon fonksiyonları olup düğüm noktasındaki yerdeğiştirme değerleri cinsinden yerdeğiştirme dağılımını (alanını) tarifler. $\{\delta\}$, düğüm noktası yerdeğiştirme vektörüdür.

Ek 1.3 Sonlu Eleman Olarak Eksenel Yük Elemanı

Ek1.3.1 Temel Varsayımlar ve Bünye Bağlılıkları

Çalışmanın temelini oluşturan kabuller ve kısıtlık koşulları aşağıda verilmiştir.

1. Eleman geometrik olarak doğrusaldır.
2. Malzeme Hooke kanununa uyar.
3. Yüklemeler sadece düğüm noktalarında yapılmıştır.
4. Eleman sadece eksenel yük taşımaktadır.



Şekil Ek1.5 Eksenel yük elemanı

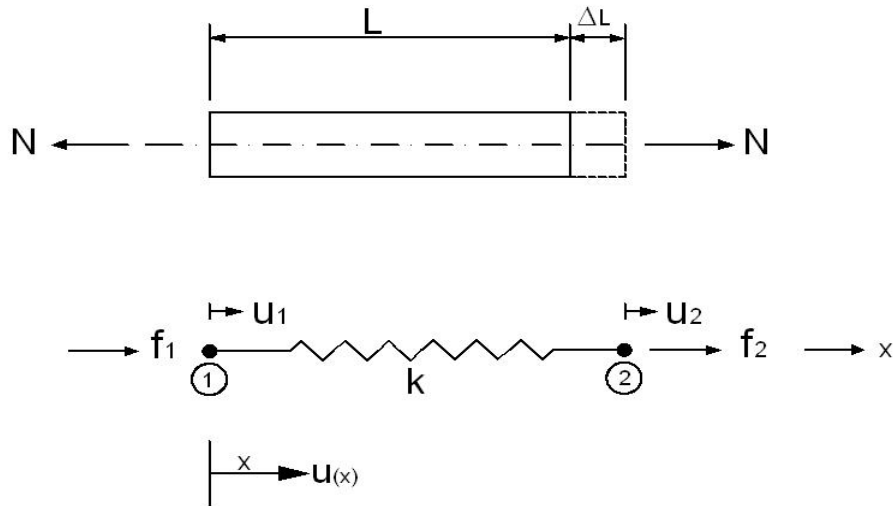
Şekil Ek1.5 (a)' da dx boyundaki sonsuz küçük eleman göz önüne alınsın ve elemanın kesit eksenini doğrultusunda N normal kuvveti uygulansın, bu yüklemeden sonra elemanın şekil değiştirmiş hali Şekil Ek1.5 (b)' de gösterilmiştir. Elemanın boyuna birim şekil değiştirmesi izleyen şekilde ifade edilir:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (\text{Ek1.20})$$

Gerilme-şekil değiştirme bağıntısı izleyen şekilde tanımlanır:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{du}{dx} \quad (\text{Ek1.21})$$

Ek1.3.2 Eleman Uç Yerdeğiştirmeleri ve Şekil Değiştirme Fonksiyonu



Şekil Ek1.6 Eksenel yük elemanı için pozitif uç yerdeğiştirmeleri ve uç kuvvetleri

Eksenel yük elemanı, lineer yay elemanı olarak düşünölsün. **Lineer yay sadece eksenel yük iletmeye kapasiteli olan bir mekanik araçtır.** Şekil Ek1.6' da eksenel yük elemanı ve matematik modeli verilmiştir. Burada yayın uçları düğüm noktalarıdır ve düğüm noktaları yerdeğiştirmeleri u_1 ve u_2 ile gösterilmiş olup şekilde pozitif yönleriyle verilmiştir. Yayın birim boy yerdeğiştirmesi;

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (\text{Ek1.22})$$

olup çubuk üzerindeki kuvvet;

$$N = k \Delta l \quad (\text{Ek1.23})$$

ile ifade edilmektedir. Bu durumda yatay dengeden

$$f_1 = -f_2 \quad (\text{Ek1.24})$$

olur. Şekil Ek1.6' da eksenel yük elemanının pozitif uç yerdeğiştirmeleri ve uç kuvvetleri gösterilmiştir. Eksenel yük elemanı için her bir uçta bir bilinmeyen olmak üzere iki adet bilinmeyen vardır. İnterpolasyon fonksiyonu da iki sabit sayılı polinom olarak seçilecektir. Yerdeğiştirme fonksiyonu $u(x)$;

$$u(x) = f(u_1, u_2, x) \quad (\text{Ek1.25})$$

olup izleyen sınır koşullarına sahiptir:

$$u(x = x_1) = u_1$$

$$u(x = x_2) = u_2 \quad (\text{Ek1.26})$$

Sağlanacak iki koşul olduğundan, yerdeğiştirme fonksiyonu için en basit form olarak iki sabit katsayılı birinci dereceden bir polinom seçilir:

$$u(x) = a_0 + a_1 x \quad (\text{Ek1.27})$$

Sınır şartları uygulanırsa elde edilen

$$u(x = 0) = u_1 = a_0$$

$$u(x = L) = u_2 = a_0 + a_1 L \quad (\text{Ek1.28})$$

eşitlikleri çözüldüğünde katsayılar izleyen şekilde bulunur:

$$a_0 = u_1$$

$$a_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (\text{Ek1.29})$$

Elde edilen (Ek1.29) eşitliklerinin, (Ek1.27) denkleminde yerine konmasıyla yerdeğiştirme fonksiyonu izleyen şekilde ifade edilir:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 \quad (\text{Ek1.30})$$

Yukarıda verilen (Ek1.30) ifadesi izleyen formda yazılabilir:

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 \quad (\text{Ek1.31})$$

$$N_1(x) = (1 - \frac{x}{L}) \quad (\text{Ek1.32})$$

$$N_2(x) = (\frac{x}{L}) \quad (\text{Ek1.33})$$

(Ek1.31) ifadesi matris gösterimiyle izleyen şekilde yazılır:

$$u(x) = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} \quad (\text{Ek1.34})$$

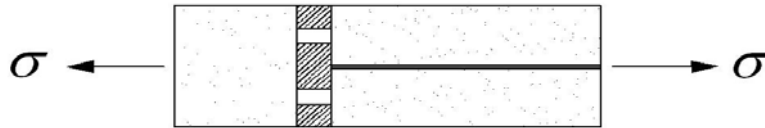
Burada N_1 ve N_2 , x değişkenine bağlı interpolasyon fonksiyonları olup düğüm noktasındaki yerdeğiştirme değerleri cinsinden yerdeğiştirme dağılımını tarifler. $\{\delta\}$ düğüm noktası yerdeğiştirme vektörüdür.

Ek1.3.3 Viskoelastik Malzeme Modeli

Bütün ideal katı cisim tiplerinde zamanın etkisi göz önünde bulundurulmamıştır. **Cisimlerin zamanla ilgili visko-elastik özelliklerini de ele alabilmek için bunlara sıvıya benzer bazı özellikler katmak gerekir. Aşağıda tarif edilecek ideal cisim tipi sıvılarla elastik cisimlerin esas özelliklerinin birleştirilmesi ile elde edilir.**



Şekil Ek1.7 Hooke cismini temsil eden yay modeli



Şekil Ek1.8 Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu

Newton sıvısını karakterize eden yağ kutusu (dashpot) içinde bulunan delikli pistonun hareket edebilmesi için yağın pistondaki deliklerden diğer tarafa geçmesi gerekmektedir ve bu da zaman gerektirmektedir. Piston yağın geçme hızı ile orantılı hareket eder ve pistona gelen direnç hız

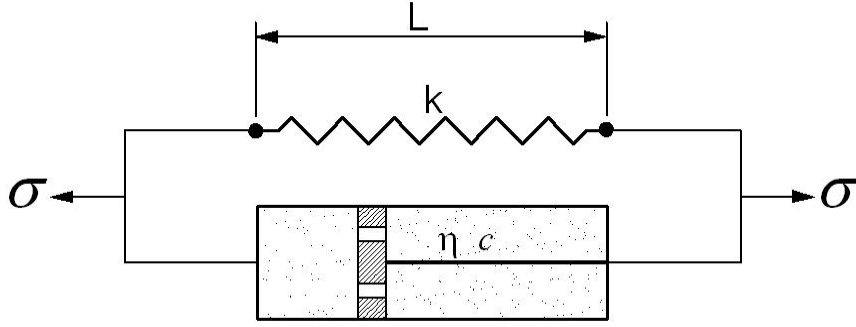
ile orantılıdır. Hooke cisminde zamanın tesiri yoktur. Newton sıvısında ise elastik bir özellik yoktur. Hooke cismi için bünye denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (\text{Ek1.35})$$

Newton sıvısının bünye denklemi aşağıda ifade edilmiştir:

$$\frac{\sigma}{c} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{Ek1.36})$$

Burada c cisme bağlı bir sabit olup viskoz sönüm sabiti adını alır. Şimdi bu iki basit cisim modeli paralel olarak bağlansın. Şekil Ek1.9' da gösterilen, paralel bağlama sonucu oluşan yeni cisim modeli Kelvin ya da Kelvin-Voigt cismi adını alır.



Şekil Ek1.9 Kelvin-Voigt Cismi

Kelvin–Voigt cisminin bünye denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E \varepsilon + c \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (\text{Ek1.37})$$

$$\sigma = E \varepsilon + c \dot{\varepsilon} \quad (\text{Ek1.38})$$

Burada c katsayısı elastisite modülü cinsinden ifade edilir ve birimi Nsn/m² dir.

$$c = E \cdot \eta \quad (\text{Ek1.39})$$

η rijitlikle sönüm arasındaki oranı belirleyen bir sönüm katsayısıdır. Bu durumda gerilme ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$\sigma = E \varepsilon + E \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{Ek1.40})$$

$$\sigma_v = E \eta \dot{\varepsilon} \quad (\text{Ek1.41})$$

Enerji yaklaşımıyla hareket denklemlerinin elde edilmesinde sönüm kuvvetini verecek şekilde tanımlanan sönüm fonksiyonu izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_v \dot{\epsilon}_x^2 dv \quad (\text{Ek1.42})$$

Ek2 Enerji Bağıntıları

Bir cisimde dış etkilerin oluşturduğu iç kuvvetlerin, şekil değiştirme esnasında yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi veya iç kuvvetlerin işi denir. İç kuvvetlere – gerilmelere göre hesaplanan, şekil değiştirme enerjisi, elastik cismin yalnız deforme olmuş durumunu tarif eden büyüklüklere bağlı olup çok defa elastik potansiyel enerji ya da iç potansiyel enerji adını alır.

Ek2.1 Potansiyel Enerji

Ek2.1.1 Eğilme Elemanı için Potansiyel Enerji

Klasik mekanikten de bilindiği üzere şekil değiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \varepsilon dV \quad (\text{Ek2.1})$$

şeklindedir. Eğilme elemanı için potansiyel enerji (Ek1.3) ve (Ek1.6) ifadelerinin (Ek1.1) ifadesinde yerine konmasıyla izleyen şekilde olur:

$$U = \frac{E}{2} \int_v y^2 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dV \quad (\text{Ek2.2})$$

$$I = \int y^2 dA \quad (\text{Ek2.3})$$

yukarıdaki (Ek2.3) ifadesinin alan üzerinde entegre edilmesi sonucu atalet kuvvetinin elde edildiği hatırlanırsa eğilme elemanı için potansiyel enerji izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.4})$$

Ek2.1.2 Eksenel Yük Elemanı için Potansiyel Enerji

Eksenel yük elemanı için, (Ek1.20) ve (Ek1.21) ifadelerinin (Ek2.1) ifadesinde yerine konulması ile iç potansiyel enerji izleyen şekilde ifade edilir.

$$U = \frac{E}{2} \int_v \varepsilon_x^2 dV \quad (\text{Ek2.5})$$

$$A = \int dA \quad (\text{Ek2.6})$$

Yukarıdaki (Ek2.6) ifadesinin kullanılmasıyla (Ek2.5) eşitliği izleyen şekilde verilir:

$$U = \frac{E}{2} \int_v \varepsilon_x^2 dV = \frac{EA}{2} \int_0^l \varepsilon_x^2 dx \quad (\text{Ek2.7})$$

Eksenel yük elemanı için ε_x in

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (\text{Ek2.8})$$

olduğu hatırlanırsa iç potansiyel enerji izleyen şekilde ifade edilir:

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.9})$$

Ek2.2 Kinetik Enerji

Ek2.2.1 Eğilme Elemanı için Kinetik Enerji

Eğilme elemanı için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dV \quad (\text{Ek2.10})$$

(Ek2.10) denklemi izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx dy dz \quad (\text{Ek2.11})$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa kinetik enerji denklemi

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.12})$$

olarak elde edilir.

Ek2.2.2 Eksenel Yük Elemanı için Kinetik Enerji

Eksenel yük elemanı için kinetik enerji ifadesi izleyen şekilde verilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_v \rho \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dV \quad (\text{Ek2.13})$$

(Ek2.13) denklemi izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx dy dz \quad (\text{Ek2.14})$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa kinetik enerji denklemi

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.15})$$

olarak elde edilir.

Ek2.3 Sönüm Fonksiyonu

Ek2.3.1 Eğilme Elemanı için Sönüm Fonksiyonu

Eğilme elemanı için şekil değiştirme ifadesinin zamana göre türevi izleyen şekilde verilir:

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \frac{d\varepsilon(x, t)}{dt} = -y \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = -y \frac{d^2 \dot{v}(x, t)}{dx^2} \quad (\text{Ek2.16})$$

Eğilme elemanı için sönüm fonksiyonu; (Ek2.16) denkleminin (Ek1.42) ifadesinde tanımlanan sönüm fonksiyonu denkleminde yerine yazılmasıyla izleyen şekilde elde edilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_V y^2 \left(\frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right)^2 dV \quad (\text{Ek2.17})$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa eğilme elemanı için sönüm fonksiyonu

$$R = \frac{EI\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \dot{v}}{dx^2} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.18})$$

olarak elde edilir.

Ek2.3.2 Eksenel Yük Elemanı için Sönüm Fonksiyonu

Eksenel yük elemanı için şekil değiştirme ifadesinin zamana göre türevi izleyen şekilde verilir:

$$\dot{\varepsilon}(x, t) = \frac{d\varepsilon(x, t)}{dt} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{d\dot{u}(x, t)}{dx} \quad (\text{Ek2.19})$$

Eksenel yük elemanı sönüm fonksiyonu (Ek2.19) denkleminin (Ek1.42) denkleminde yerine yazılmasıyla izleyen şekilde verilir:

$$R = \frac{E\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d\dot{u}}{dx} \right)^2 dV \quad (\text{Ek2.20})$$

Alan üzerinde integrasyon işlemi yapılırsa eksenel yük elemanı için sönüm fonksiyonu

$$R = \frac{EA\eta}{2} \int_0^l \left(\frac{d\dot{u}}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{Ek2.21})$$

olarak elde edilir.

Ek3 Lagrange Denklemleri

Kinetik ve potansiyel enerjilerin farkı Lagrange fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$L = T - (U + V) \quad (\text{Ek3.1})$$

Genellikle sistemin durumunu n sayıda $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ genelleştirilmiş koordinat belirler.

Sistemin kinetik enerjisi, genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş koordinatların hızı ile ifade edilir:

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n) \quad (\text{Ek3.2})$$

Sistemin potansiyel enerji ise genelleştirilmiş koordinatlarla ifade edilir:

$$U = U(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (\text{Ek3.3})$$

Dış kuvvetlerin potansiyeli genelleştirilmiş yerdeğiştirmelere lineer bağlıdır:

$$V = V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \quad (\text{Ek3.4})$$

Konservatif olmayan kuvvetlerin virtüel işi δW_{nc} , genelleştirilmiş koordinatlar olan q_i cinsinden ve Q_i ler genelleştirilmiş sönüm kuvvetleri olmak üzere, izleyen şekilde ifade edilir:

$$\delta W_{nc} = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (\text{Ek3.5})$$

Langrange denklemleri izleyen şekilde tariflenir:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_{D_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{Ek3.6})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{D_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{Ek3.7})$$

Sönüm kuvveti Q_{D_i} , sönüm fonksiyonu R nin $\dot{q}_i$ ye türevleri alınarak bulunur ve izleyen şekilde tariflenir:

$$Q_{D_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{Ek3.8})$$

Genelleştirilmiş dış kuvvetler izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = -Q_{F_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{Ek3.9})$$

Bu durumda Lagrange denklemleri izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_{F_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{Ek3.10})$$

(Ek3.10) denklemindeki Q_{F_i} genelleştirilmiş dış yükleri temsil eder.

Ek3.1 Uzay Çerçeve Elemanı için Lagrange Denklemleri

Ele alınan problemde zaman faktörü de olduğu için düğüm noktası yerdeğiştirmeleri ve eleman uç kuvvetleri zamanın da fonksiyonudur. Bu durumda bir çerçeve elemanının yerdeğiştirme vektörü ve dış kuvvet vektörü izleyen şekilde verilir:

$$\{\delta\}_{(e)} = \left[u_1^{(e)}(t) \ v_1^{(e)}(t) \ \theta_1^{(e)}(t) \ u_2^{(e)}(t) \ v_2^{(e)}(t) \ \theta_2^{(e)}(t) \right]^T \quad (\text{Ek3.11})$$

$$\{P\}_{(e)} = \left[N_1(t) \ V_1(t) \ M_1(t) \ N_2(t) \ V_2(t) \ M_2(t) \right]^T = \left[P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6 \right]^T \quad (\text{Ek3.12})$$

Çerçeve elemanının serbestlikleri, yani uç yerdeğiştirmeleri genelleştirilmiş koordinatlardır. Çerçeve elemanının uç kuvvetleri ise genelleştirilmiş kuvvetlerdir ve çerçeve elemanı için potansiyel enerji, kinetik enerji, uç kuvvetlerin potansiyeli ve sönüm fonksiyonu eğilme elemanı ile eksenel yük elemanının ilgili enerji ifadelerinin toplamından oluşur.

Düzlem çerçeve elemanı için fonksiyonel izleyen şekilde yazılır:

$$L^{(e)} = T^{(e)} - \left(U^{(e)} + V^{(e)} \right) \quad (\text{Ek3.13})$$

Problemde kullanılacak Lagrange denklemleri ve genelleştirilmiş yerdeğiştirmeler için yapılan tanımlar aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_k} = Q_{D_k}, \quad k = 1, 12 \quad \delta_1 = u_1, \delta_2 = v_1, \delta_3 = \theta_1, \delta_4 = u_1, \delta_5 = v_2, \delta_6 = \theta_2 \quad (\text{Ek3.14})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}_k} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, 12 \quad \delta_1 = u_1, \delta_2 = v_1, \delta_3 = \theta_1, \delta_4 = u_1, \delta_5 = v_2, \delta_6 = \theta_2 \quad (\text{Ek3.15})$$

Yukarıdaki ifadenin (Ek3.1) denkleminin kullanımıyla daha açık olarak yazılması izleyen eşitliği verir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \delta_k} + \frac{\partial U}{\partial \delta_k} + \frac{\partial V}{\partial \delta_k} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}_k} \quad k = 1, 12 \quad (\text{Ek3.16})$$

Kinetik enerji genelleştirilmiş koordinatların zamana göre türevlerine bağlı olduğundan

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_k} = 0 \quad (\text{Ek3.17})$$

olur ve bu durumda hareket denklemi izleyen şekilde yazılır:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_k} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{\delta}_k} + \frac{\partial U}{\partial \delta_k} = Q_{P_k} \quad k = 1, 12 \quad (\text{Ek3.18})$$

Bu ifade matris formatında izleyen şekilde yazılabilir:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ek3.19})$$

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} = \{P\} \quad (\text{Ek3.20})$$

$$\{F_I\} + \{F_D\} + \{F_S\} = \{P\} \quad (\text{Ek3.21})$$

Burada;

F_I : çerçeve elemanının efektif kuvvetlerini,

F_D : çerçeve elemanının sönüm kuvvetlerini,

F_S : çerçeve elemanının yay kuvvetlerini,

P : çerçeve elemanının düğüm noktası kuvvetlerini gösterir.

Ek4 Sistem Matrislerinin Oluşturulması

Ek4.1 Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

Çerçeve sisteminin rijitlik matrisi genel koordinat sistemindeki yerdeşiştirmeler üzerine kurulur. Sistem rijitlik matrisinin elde edilişi, çerçeve sistemini oluşturan elemanların genel eksen takımındaki rijitlik matrisleri toplanarak gerçekteştirilir. Bunun için öncelikle sistemi oluşturan elemanlar numaralandırılır. Daha sonra düğüm noktaları ve düğüm noktalarının serbestlikleri numaralandırılır. Düğüm noktalarının serbestliklerinin numaralandırılması düğüm noktası numarasına bağlı olarak yapılır. Her bir düğüm noktasının altı serbestliği vardır.

Ek4.1.1 Sistem Kütle Matrisinin Oluşturulması

Sistem kütle matrisinin oluşturulmasında da tıpkı rijitlik matrisinde açıklanan işlemler sırası ile uygulanır.

Ek4.1.2 Sistem Sönüm Matrisinin Oluşturulması

Sistem sönüm matrisi, çerçeve elemanlarının sönüm matrisi ve dönme elamanın sönüm matrisinin toplamından oluşmaktadır. Bölüm Ek2’ de belirtildiği gibi sönüm matrisi rijitlik matrisinin η katı olmaktadır. Dolayısıyla sistem sönüm matrisi, düzlem çerçeveyi oluşturan elemanların rijitlik matrisinin η katı ile dönme elamanın rijitlik matrisinin η_e katının toplamından oluşmaktadır.

¹Ek5 Hareket Denklemlerinin Zaman Tanım Alanında Çözümü

Hareket denklemleri sistemi zaman tanım alanında Newmark'ın ortalama ivme yöntemiyle çözülmüştür. Ortalama ivme yönteminde kullanılan parametreler aşağıda verilmiştir (Bathe, 1996).

$$a_0 = \frac{1}{g \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\chi}{g \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{g \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2g} - 1; \quad a_4 = \frac{\chi}{g} - 1 \quad (\text{Ek5.1})$$

$$a_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\chi}{g} - 2 \right); \quad a_6 = \Delta t (1 - \chi); \quad a_7 = \chi \Delta t \quad (\text{Ek5.2})$$

Burada $g = 0.5$, $\chi = 0.25$. Ortalama ivme yöntemi kullanılarak doğrusal diferansiyel denklem sistemi izleyen şekilde doğrusal bir cebrik denklem sistemine indirgenir:

$$[\hat{K}] \{q\}_{i+1} = \{\hat{F}\}_{i,i+1} \quad (\text{Ek5.3})$$

Burada $i+1$ alt indisi $t = t_{i+1}$ zamanını göstermektedir. $[\hat{K}]$ etkili rijitlik matrisi, $\{\hat{F}\}_{i,i+1}$ etkili yük vektörüdür. $[\hat{K}]$ ve $\{\hat{F}\}_{i,i+1}$ izleyen şekilde verilmektedir:

$$[\hat{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C] \quad (\text{Ek5.4})$$

$$\{\hat{F}\}_{i,i+1} = \{F\}_{i+1} + [M](a_0 \{q\}_i + a_2 \{\dot{q}\}_i + a_3 \{\ddot{q}\}_i) + [C](a_1 \{q\}_i + a_4 \{\dot{q}\}_i + a_5 \{\ddot{q}\}_i) \quad (\text{Ek5.5})$$

(Ek5.3) ile verilmiş olan denklem sistemi doğrusal bir cebrik denklem sistemi olup, $t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yerdeğiştirme vektörü $\{q\}_{i+1}$ izleyen şekilde bulunur:

$$\{q\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i,i+1} \quad (\text{Ek5.6})$$

$t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yerdeğiştirme vektörü bulunduğunda, aynı andaki genelleştirilmiş ivme

$\{\ddot{q}\}_{i+1}$ ve hız vektörü $\{\dot{q}\}_{i+1}$ ise izleyen şekilde elde edilir:

$$\{\ddot{q}\}_{i+1} = a_0 (\{q\}_{i+1} - \{q\}_i) - a_2 \{\dot{q}\}_i - a_3 \{\ddot{q}\}_i \quad (\text{Ek5.7})$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + a_6 \{\ddot{q}\}_i + a_7 \{\ddot{q}\}_{i+1} \quad (\text{Ek5.8})$$

$(i+1)$. zaman adımında elde edilen yerdeğiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki zaman adımının başlangıç değerleri olarak alınarak, aynı işlemler $(i+2)$. zaman adımı için

¹ Ek 4 Şimşek (2008) den alınmıştır.

tekrarlanır. Hareket denklemlerinin çözümünü daha iyi kavrayabilmek için, her aşamada yapılan hesaplamalar için izleyen işlem sırası verilmiştir.

Ek5.1 Hareket Denklemlerinin Çözümü İçin İşlem Sırası

Ek5.1.1 Başlangıç Hesaplamaları (A)

A.1 $[K]$, $[C]$ ve $[M]$ matrisleri hesaplanır.

A.2 Δt zaman adımı seçilir

A.3 Newmark'ın ortalama ivme yöntemi için gerekli parametreler hesaplanır.

A.4 Etkili rijitlik matrisi $[\hat{K}]$ izleyen şekilde hesaplanır.

$$[\hat{K}] = [K] + a_0 [M] + a_1 [C] \quad (\text{Ek5.9})$$

A.5 Başlangıç koşulları belirlenir. Söz konusu kiriş, hareketli harmonik yük üzerine gelmeden önce sükûnette olduğu için başlangıç ivmesi ve hızı sıfırdır. Ancak, dışmerkez basınç kuvveti sebebiyle, kiriş başlangıçta bir yerdeğiştirmeye (eğriliğe) sahiptir. Statik çözümleme yapılarak, başlangıç yerdeğiştirmesi elde edilir ve programa tanıtılır. Başlangıç koşulları izleyen şekildedir:

$$\{q\} \neq 0, \{\dot{q}\} = 0, \{\ddot{q}\} = 0 \quad (\text{Ek5.10})$$

Ek5.1.2 Her Bir $t = t_{i+1}$ Zaman Adımı İçin Hesaplamalar (B)

B.1 Yük vektörü $\{F\}$ ve etkili yük vektörü $\{\hat{F}\}$ izleyen şekilde hesaplanır.

$$\{\hat{F}\}_{i,i+1} = \{F\}_{i+1} + [M](a_0 \{q\}_i + a_2 \{\dot{q}\}_i + a_3 \{\ddot{q}\}_i) + [C](a_1 \{q\}_i + a_4 \{\dot{q}\}_i + a_5 \{\ddot{q}\}_i) \quad (\text{Ek5.11})$$

B.2 $t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş yerdeğiştirme vektörü $\{q\}_{i+1}$ aşağıda gösterildiği gibi hesaplanır.

$$\{q\}_{i+1} = [\hat{K}]^{-1} \cdot \{\hat{F}\}_{i,i+1} \quad (\text{Ek5.12})$$

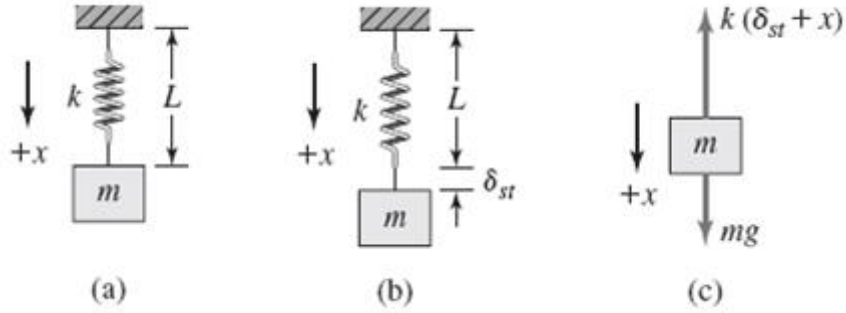
B.3 $t = t_{i+1}$ anındaki genelleştirilmiş ivme ve hızlar izleyen şekilde hesaplanır.

$$\{\ddot{q}\}_{i+1} = a_0 (\{q\}_{i+1} - \{q\}_i) - a_2 \{\dot{q}\}_i - a_3 \{\ddot{q}\}_i \quad (\text{Ek5.13})$$

$$\{\dot{q}\}_{i+1} = \{\dot{q}\}_i + a_6 \{\ddot{q}\}_i + a_7 \{\ddot{q}\}_{i+1} \quad (\text{Ek5.14})$$

C. $(i+1)$. zaman adımında elde edilen genelleştirilmiş yerdeğiştirme, hız ve ivme değerleri bir sonraki adımın başlangıç değerleri olarak alınarak aynı işlemler tekrarlanır.

²Ek 6 Basit Harmonik Salınım



Şekil Ek6.1 a) Ağırlığı tutulmuş uzamasız yayın orijinal uzunluğu L dir, b) $k\delta_{st} = W$. Statik denge konumu, c) Kendi ağırlığı altında dengede iken cisim keyfi x değeri kadar çekildiğinde çizilen serbest cisim diyagramı

(b) için $\sum F_x = 0$ denge durumunda

$$mg - k\delta_{st} = 0$$

$$mg = k\delta_{st} \quad (\text{Ek6.1})$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{Ek6.2})$$

İkinci mertebeden lineer sabit katsayılı homojen adi diferansiyel denklem elde ettik.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \omega: \text{açısal (doğal) frekans} \quad (\text{Ek6.3})$$

$$\text{Genel çözüm : } x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (\text{Ek6.4})$$

A, B $\rightarrow$ integrasyon sabitleri (Başlangıç koşullarından bulunur)

(Ek6.4) eşitliği kütlenin yerdeğiştirmesinin zamanın periyodik bir fonksiyonu olduğunu gösterir. Temel trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa, (Ek6.4) eşitliği,

$$x(t) = C \sin(\omega t + \Phi) \quad (\text{Ek6.5})$$

ile gösterilebilir.

Φ : faz farkı yada faz açısıdır.

C: amplitud, yerdeğiştirmenin şiddeti.

Kütle ω açısal frekansı ve C genliği ile titreşir.

Faz açısı Φ , sıfır zamanındaki pozisyonun bir göstergesidir. Çünkü,

² Ek 5 Hutton (2004) den çevrilmiştir.

$x(0) = C \sin \Phi'$ dır.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rad/sn} \quad (\text{Ek6.6})$$

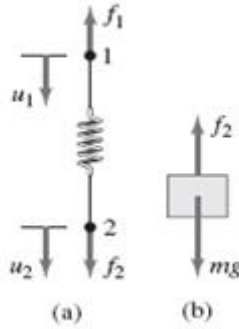
Basit harmonik hareketi sonlu eleman kapsamında göz önüne alacağız. Yayın rijitlik matrisi,

$$[k^{(e)}] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek6.7})$$

ve eleman için denge eşitlikleri,

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ek6.8})$$

dir. Bununla birlikte yay elemanı statik denge durumunda değildir. Böyle ise düğüm noktası kuvvetlerini detaylı olarak incelemek gerekir.



Şekil Ek6.2 Sonlu eleman olarak yay

$$\sum F_x = ma_x = m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = mg - f_2 \quad (\text{Ek6.9})$$

Buradan “2” düğümündeki kuvvet,

$$f_2 = mg - m \frac{d^2 u_2}{dt^2} \quad (\text{Ek6.10})$$

olur.

f_2 yi (4.22) denkleminde yerine yazarsak,

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ mg - m\ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ek6.11})$$

(Ek6.11) eşitliği ayrıca izleyen şekilde de ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ mg \end{Bmatrix} \rightarrow [m]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{f\} \quad (\text{Ek6.12})$$

Burada $[m]$, $[k]$ tek serbestlik dereceli sistem için sırasıyla kütle ve rijitlik matrisleridir. $\{\ddot{u}\}$ ve $\{u\}$ ise sırasıyla düğüm noktası ivme ve yerdeğiştirme vektörleridir.

$$\{\ddot{u}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{Ek6.13})$$

Şekil 4.1' deki basit harmonik hareket için $u_1 = 0$ kısıtlılığı vardır. Bu durumda (Ek6.12)'ün

$$1. \text{ eşitliği } -ku_2 = f_1, \quad (\text{Ek6.14})$$

$$2. \text{ eşitliği } m\ddot{u}_2 + ku_2 = mg \text{ olur.}$$

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{Ek6.15})$$

$$m\ddot{u}_2 + ku_2 = mg \quad (\text{Ek6.16})$$

(Ek6.14) için çözümü yapalım. Homojen çözüm için;

$$u_{2h}(t) = C \sin(\omega t + \Phi) \quad (\text{Ek6.17})$$

Burada ω , C , Φ daha önce tanımlandıkları gibidir.

Özel çözüm zamanın tüm değerleri için (Ek6.14) eşitliğini tam olarak sağlamalıdır. Sağ taraf sabit olduğundan özel çözüm de sabit olmalıdır.

$$u_{2p}(t) = \frac{mg}{k} = \delta_{st} \quad (\text{Ek6.18})$$

(4.32) eşitliği statik denge çözümünü verir.

(4.28)'nin özel çözümü (4.15)'deki statik denge çözümünü verdi.

$$u_2(t) = u_{2h}(t) + u_{2p}(t)$$

$$u_2(t) = \delta_{st} + C \sin(\omega t + \Phi) \quad (\text{Ek6.19})$$

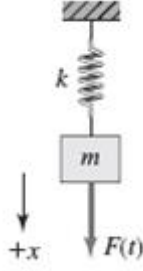
(Ek6.19) eşitliği denge konumu etrafındaki sinüsoidal salınımı temsil eder ve (Ek6.5) da verilen çözümle aynıdır.

“2” düğümünün yerdeğiştirmesi verilirse “1” düğümündeki reaksiyon kuvveti kısıtlılık eşitliğinden bulunur.

$$f_1 = -ku_2(t) = -k(\delta_{st} + C \sin(\omega t + \Phi))$$

C genliği ve Φ faz açısı başlangıç koşullarının uygulanması ile verilir.

³Ek7 Zorlanmış Titreşim



Şekil Ek7.1 Dinamik zorlama altında sonlu eleman olarak yay

Sistem eşitliklerinin sonlu eleman formu (Ek6.12) eşitliğinden doğrudan yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ mg + F(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{Ek7.1})$$

Kısıtlılık eşitliğini uygularsak, “2” düğüm noktasının hareketi için diferansiyel eşitlik,

$$m\ddot{u}_2 + ku_2 = mg + F(t) \quad (\text{Ek7.2})$$

(Ek7.2) nin çözümü homojen çözüm ile iki özel çözümün toplamı olarak ifade edilir. Çünkü, sağ tarafta sıfırdan farklı iki terim bulunmaktadır. Homojen çözüm ve mg terimi için özel çözüm elde edildiğinden, bu aşamada dış kuvvet için özel çözüm araştırılacaktır. Dış kuvvet için özel çözüm

$$m\ddot{u}_2 + ku_2 = F(t) \quad (\text{Ek7.3})$$

denklemini tüm zaman değerleri için sağlamalıdır. (Ek7.3) eşitliği, her iki taraf kütleye (m) bölünerek izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$\ddot{u}_2 + \frac{k}{m}u_2 = \frac{F(t)}{m} \quad (\text{Ek7.4})$$

Yapı dinamiğinde, özel önemi olan bir durum zorlayıcı kuvvetin zamanla sinüsoidal değişim gösterdiği durumdur. Çünkü böylesi kuvvetlerle çok sık karşılaşılır. Bu yüzden;

$$F(t) = F_0 \sin \omega_F t \quad (\text{Ek7.5})$$

F_0 : Kuvvetin şiddeti (max değeri)

ω_F : Zorlayıcı fonksiyonun dairesel frekansıdır (zorlama frekansı)

Bu durumda (Ek7.4) eşitliği

³ Ek 6 Hutton (2004) den çevrilmiştir.

$$\ddot{u}_2 + \omega^2 u_2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega_F t \quad (\text{Ek7.6})$$

Zamanın tüm değerlerinde (Ek7.4) eşitliğinin sağlanması için sol taraftaki terimler sağ taraftaki terimde olan sinüs terimine özdeş bir sinüs fonksiyonu ihtiva etmelidir.

Sinüs fonksiyonunun zamana göre 2. türevi diğer bir sinüs fonksiyonu olduğundan çözüm

$$u_2(t) = U \cdot \sin \omega_F t$$

şeklinde kabul edilir. Burada, U: Belirlenecek olan bir sabittir.

u_2 'nin bu değeri (Ek7.6)'da yerine konursa,

$$-U\omega_F^2 \sin \omega_F t + U\omega^2 \sin \omega_F t = \frac{F_0}{m} \sin \omega_F t \quad (\text{Ek7.7})$$

elde edilir. Buradan,

$$U = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_F^2)} \quad (\text{Ek7.8})$$

elde edilir. Basit harmonik salınımın sünüsoidal değişen kuvvete cevabını temsil eden çözüm,

$$u_2(t) = \frac{F_0 / m}{(\omega^2 - \omega_F^2)} \sin \omega_F t \quad (\text{Ek7.9})$$

olur. (Ek7.9) ile temsil edilen hareket zorlanmış cevap olarak isimlendirilir ve iki önemli karakteristik ortaya koyar.

1. Zorlanmış cevabın frekansı, zorlama fonksiyonunun frekansı ile aynıdır.
2. Eğer zorlama fonksiyonunun dairesel frekansı, sistemin doğal frekansına çok yakınsa (Ek7.9) eşitliğinin paydası çok küçük olur. Bu durum, çok önemli bir sonuçtur. Çünkü böylesi bir durumda hareketin genliği çok büyük olur.

$\omega_F = \omega$ durumunda (Ek7.9) eşitliği sonsuz genlik gösterir. Bu durum rezonans olarak bilinir ve bu nedenle sistemin doğal dairesel frekansı rezonans frekansı olarak da isimlendirilir.

⁴Ek8 Cevabın Modal Vektörler Cinsinden Ayırıklaştırılması

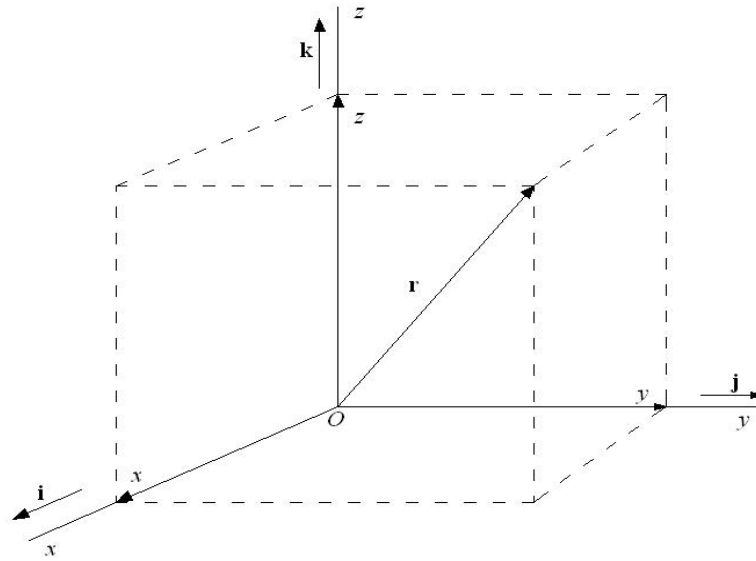
Modal koordinatlar olarak bilinen bazı zaman bağımlı fonksiyonlar ile modal vektörlerin çarpımının süperpozisyonu olarak cevabın ifade edilmesine imkan verdiği için çok serbestlik dereceli korunumlu sistemlerde modal vektörlerin ortogonal olması hayati öneme sahiptir.

Bu fikri tanıtmak için üç boyutlu $\mathbf{r}$ vektörü dikdörtgen bileşenleri olan x, y, z ile izleyen şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (\text{Ek8.1})$$

Burada $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$, x, y, z doğrultuları ile çakışan birim vektörlerdir. Şekil Ek8.1 $\mathbf{r}$ vektörlerinin x, y, z bileşenleri (Ek8.1) eşitliğinden skaler çarpım kullanılarak izleyen şekilde elde edilir.

$$x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \quad y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}, \quad z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{Ek8.2})$$



Şekil Ek8.1 Üç boyutlu vektörün dikdörtgen bileşenleri cinsinden gösterimi

$\mathbf{r}$ nin dikdörtgen bileşenler cinsinden ayırıklaştırılması x, y ve z eksenlerinin ortogonal olması gerçeği üzerine temellendirilmiştir. Gerçekte birim vektörler ortonormaldir ve izleyen bağıntıları sağlarlar.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{Ek8.3})$$

⁴ Ek 8 Meirowitch (2001) den çevrilmiştir.

Benzer işlemler bizim amacımızla daha uyumlu bir gösterim tarzı kullanılarak ifade edilebilir. Bu amaçla üç boyutlu bir vektörü $\mathbf{x}$ ile gösterelim ve birim vektörler olan i, j, k lara eşdeğer sütun matrisleri tanıtalım.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek8.4})$$

Öyleyse (Ek8.15.1) eşitliğinin eşdeğeri;

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad (\text{Ek8.5})$$

olur.

Burada x_i ler birim vektörler olan $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ ile çakışan ortogonal eksenler boyunca olan bileşenlerdir.

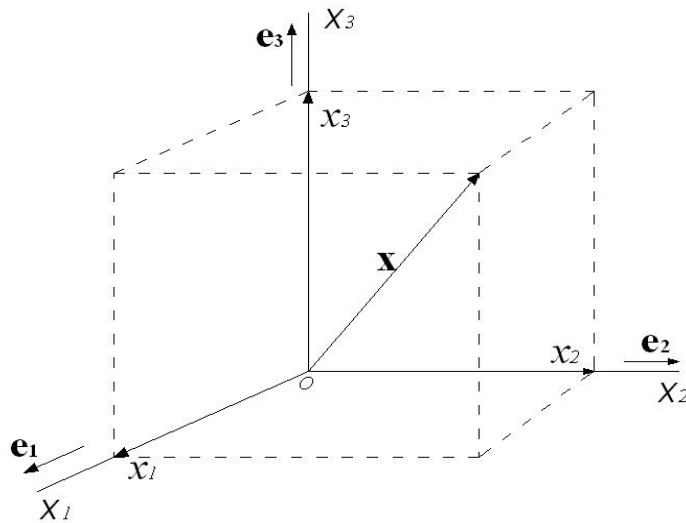
Birim vektörler olan $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ ler ortonormaldir ve izleyen bağıntıları sağlarlar

$$\mathbf{e}_s^T \mathbf{e}_r = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2, 3 \quad (\text{Ek8.6})$$

Gözlenebilir ki (Ek8.6) eşitliği (Ek8.3) eşitliğinin eşdeğeridir ve (Ek8.6) eşitliği (Ek8.3) eşitliğinden çok daha özlü bir formdadır. (Ek8.5) ve (Ek8.6) eşitlikleri kullanılarak $\mathbf{x}$ in bileşenleri izleyen formda ifade edilebilir.

$$x_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{x}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{Ek8.7})$$

Şekil Ek8.2 $\mathbf{x}$ ' in ayrıklaştırılmasını gösterir ve Şekil Ek8.1' i temsil eder.



Şekil Ek8.2 Üç boyutlu vektörün standart ortonormal birim vektörler cinsinden ayrıklaştırılması

Yeni gösterimin avantajı onun n boyutlu duruma kolaylıkla genişletmeye müsaade etmesidir. Böylece yukarıdaki aynı düşünce çizgisiyle bir n boyutlu vektör $\mathbf{x}$ izleyen şekilde ayrıklaştırılabilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad (\text{Ek8.8})$$

Burada;

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek8.9})$$

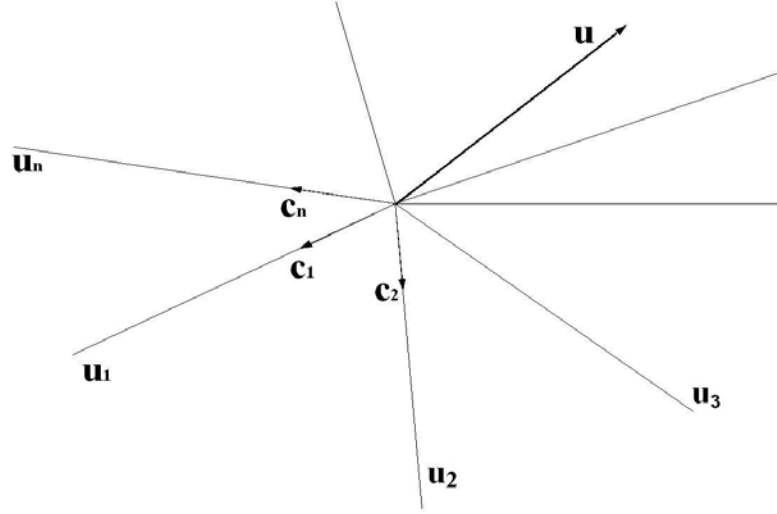
dir. **Bunlar standart birim vektörler olarak bilinen n adet ortonormal vektörler takımını teşkil ederler.**

Yukarıdaki geliştirmeler doğası gereği geometriktir. Öyleyse onların titreşimlerle ne ilişkisi olduğu sorusu ortaya çıkar. Şüphesiz ki üç boyutlu bir vektörün dikdörtgen bileşenler cinsinden ayrıklaştırılması mekanikte yaygın olarak kullanılmaktadır. Fakat bu kullanım esas olarak bir yerdeğiştirme vektörü veya kuvvet vektörünün üç bileşeninin eş zamanlı olarak ele alınmasının bir aracı olarak kullanılır. n serbestlik dereceli sistemlerin titreşiminde yerdeğiştirme vektörü $\mathbf{u}$, n adet bileşene sahiptir. **Fakat $\mathbf{u}$ nun birim vektörleri olan $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektörleri boyunca bileşenlere ayrılmasının pratik bir değeri yoktur.** Bununla birlikte $\mathbf{u}$ nun farklı bir ortogonal vektörler takımı boyunca bileşenlere ayrılması çok önemli değere sahiptir. Bu bakımdan hatırlanmalıdır ki modal vektörler olan $\mathbf{u}_r$ ($r = 1, 2, \dots, n$) ler ortogonaldır ve bunlar n adet ortonormal vektörler takımı teşkil edecek şekilde normalize edilebilirler. Bu yüzden birim modal vektörler olan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ ler ile tanımlanmış n boyutlu bir vektör uzayı tasavvur edebiliriz ve yerdeğiştirme vektörü $\mathbf{u}$ 'yu bu eksenler boyunca izleyen şekilde ayrıklaştırabiliriz.

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \sum_{r=1}^n c_r \mathbf{u}_r \quad (\text{Ek8.10})$$

Şekil Ek8.1 üç boyutlu bir vektörün, dik bileşenlere ayrılması, Şekil Ek8.2 ise üç boyutlu vektörün standart ortonormal birim vektörlere ayrılmasını göstermektedir. Şekil Ek8.3 n boyutlu yerdeğiştirme vektörünün ortonormal modal vektörler cinsinden ayrıklaştırılmasını

göstermektedir. Burada c_r ($r = 1, 2, \dots, n$) ler bulunması istenen bileşenlerdir. Ayırıklaştırma Şekil Ek8.3' de gösterilmiştir. **Fakat alışa gelmiş anlamda modal vektörler ortonormal değildirler.** Bununla birlikte bunlar kütle matrisi M ve rijitlik matrisi K ile münasebetli olarak ortonormal olup,



Şekil Ek8.3 n boyutlu yerdeğiştirme vektörünün ortonormal modal vektörler cinsinden ayırıklaştırılması

$$u_r^T M u_s = \delta_{rs} \quad u_r^T K u_s = \omega_r^2 \delta_{rs} \quad r, s = 1, 2, \dots, n$$

ifadesini sağlarlar. Bu bakış açısından eşitlik (Ek8.10)' u $u_s^T M$ ile önden çarparak ve ortonormallik koşullarını kullanarak, yani $u_r^T M u_s = \delta_{rs}$ yi kullanarak c_r ($r = 1, 2, \dots, n$) katsayıları izleyen şekilde belirlenebilir:

$$c_r = u_r^T M u, \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ek8.11})$$

Benzer olarak (Ek8.10) eşitliği önden $u_s^T M$ ile çarpılarak ve ortonormallik koşulları olan $u_r^T K u_s = \omega_r^2 \delta_{rs}$, $r, s = 1, 2, \dots, n$ ifadeleri kullanılarak izleyen ilişki elde edilir:

$$\omega_r^2 c_r = u_r^T K u, \quad r, s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{Ek8.12})$$

(Ek8.10)-(Ek8.12) eşitlikleri çok serbestlik dereceli korunumlu sistemlerin titreşiminin cevaplarını tarifleyen eşzamanlı adi diferansiyel eşitlikler sisteminin birbirinden bağımsız eşitlikler takımına dönüştürülebilmesi için modal analiz çerçevesini sağlamış olur. (Ek8.10) ve (Ek8.12) eşitlikleri açılım teoremi olarak adlandırılır.

Açılım teoremi (Ek8.10) ve (Ek8.12) eşitlikleri, izleyen matris formunda gösterilebilir:

$$u = U c \quad (\text{Ek8.13})$$

Burada U modal matristir, c ise n boyutlu katsayılar vektörü olup izleyen şekilde tariflenir:

$$c = U^T M u, \quad \Omega c = U^T K u \quad (\text{Ek8.14})$$

Burada Ω doğal frekansların karelerinin diyagonal matrisidir. Doğal frekanslar ve doğal modlar sisteme ait karakteristikleri temsil eder. Yani bunlar kütle matrisi M ve rijitlik matrisi K vasıtasıyla tamamen belirlidirler. Bunlar her zaman ω_r, u_r ($r = 1, 2, \dots, n$) çiftleri olarak beraberce görünürler ve bu çiftlerin her biri diğerlerinden bağımsız olarak harekete geçirilebilir.

Örneğin, eğer ω_r frekanslı bir harmonik kuvvet ile sistem tahrik edilirse bu durumda sistem aynı frekans olan ω_r ile titreşecektir ve yerdeğiştirme konfigürasyonu doğal mod olan u_r yi andıracaktır. Şüphesiz ki bu durumda sistem rezonansa girer ki bu durumda hareket küçük hareket kabulü ihlal edilene kadar sınırsız olarak artacaktır ve çözüm geçerli olmaktan çıkacaktır. Diğer yandan eğer sisteme u_r yi andıran doğal modda bir başlangıç tahriği verilirse bu durumda eğer $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0$ ilişkisi sadece aşıkâr durum için sağlanabiliyorsa, yani tüm $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları özdeş olarak sıfır olmak zorundaysa, bu durumda $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin lineer olarak bağımsız olduğu söylenir. Eğer $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılarından en azından biri sıfırdan farklıysa, $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu söylenir. Yani bir vektör kalan vektörlerin lineer bir birleşimidir. Takip eden hareket ω_r doğal frekanslı bir harmonik salınım hareketini temsil edecektir ve yerdeğiştirme konfigürasyonu u_r yi andırmaya devam edecektir. Bununla birlikte, genel olarak keyfi tahrikler için hareket tahriğe bağlı zaman bağımlı genlikli doğal modların doğrusal birleşimini temsil eder. Genellikle modal koordinatlar olarak isimlendirilen bu genliklerin belirlenmesi modal analiz vasıtasıyla gerçekleştirilir ki titreşimlerde yaygın olarak kullanılır.

Ek9 Vektör Uzayları

Ek9.1 ⁵ Lineer Bağımlılık

Çok serbestlik dereceli sistemlerin cevabı uygun şekilde vektör uzayında temsil edilebildiği için titreşimlerde vektör uzayları çok yararlıdır. R üzerinde bir vektör uzayı göz önüne alınsın ve $u_1, u_2, \dots, u_n$ ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ V de n vektör ve R de n adet skaler olsunlar. Bu durumda verilen u vektörü izleyen şekilde,

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \quad (\text{Ek9.1})$$

$c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılı $u_1, u_2, \dots, u_n$ lerin lineer bir birleşimi olarak isimlendirilir. $c_1, c_2, \dots, c_n$ lerin R üzerinde değişimine müsaade edilerek elde edilen $u_1, u_2, \dots, u_n$ lerin lineer birleşimlerinin toplamı bir vektör uzayıdır. $u_1, u_2, \dots, u_n$ lerin lineer birleşimlerinin uzayının $u_1, u_2, \dots, u_n$ ile kapsandığı söylenir. Eğer

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0 \quad (\text{Ek9.2})$$

ilişkisi sadece aşıkâr durum için sağlanabilirse, yani $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları özdeş olarak sıfır olmak zorundaysa, bu durumda $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin lineer olarak bağımsız olduğu söylenir. Eğer $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayılarından en azından biri sıfırdan farklı ise, $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu söylenir. Yani bir vektör kalan vektörlerin lineer birleşimidir.

⁶Ek9.2 Tabanlar ve Vektör Uzayların Boyutu

Bir R üzerindeki bir vektör uzayının, eğer V yi kapsayan $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörlerinin sonlu sayıda bir takımı mevcut ise, V deki her bir vektörün $u_1, u_2, \dots, u_n$ in lineer birleşimi olması ile birlikte sonlu boyutlu olduğu söylenir. Örneğin $V^{(n)}(R)$ uzayı sonlu boyutludur çünkü o uzay n adet vektör takımı ile kapsanabilir. Burada n sonlu bir tamsayıdır.

V, R üzerinde bir vektör uzayı olsun. V yi kapsayan $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektör takımı V için üretici (generetic) sistem olarak isimlendirilir. Eğer $u_1, u_2, \dots, u_n$ vektörleri lineer bağımsız iseler ve V yi kapsıyorlarsa üretici (generetic) sistem için V nin tabanı isimlendirmesi

⁵ Ek 8 Meirowitch (2001) den çevrilmiştir.

⁶ Ek 9 Meirowitch (2001) den çevrilmiştir

yapılır. Şayet V , sonlu boyutlu bir vektör ise V için herhangi iki taban aynı sayıda vektör içerir.

Eğer V , R üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise V için her tabanda vektör sayısı ile V nin boyutu tanımlanır. Bu tamsayı $\dim V$ ile gösterilir. $V^{(n)}(R)$ için olan taban n lineer bağımsız vektörü içerdiğinden genellikle $V^{(n)}(R)$ vektör uzayı n boyuta sahiptir.

u , $V^{(n)}(R)$ de $u_1, u_2, \dots, u_n$ bileşenlerine sahip rasgele n boyutlu bir vektör olduğunda n boyutlu vektör takımı olarak aşağıdaki gibi üretilir.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ek9.3})$$

Sonra u vektörü, $e_i (i = 1, 2, 3)$ vektörleri cinsinden takip eden ifadedeki gibi yazılabilir:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n = \sum_{i=1}^n u_i e_i \quad (\text{Ek9.4})$$

Böylece $V^{(n)}(R)$, vektör takımı olan $e_i (i = 1, 2, 3)$ tarafından kapsanır. Açıkça e_i takımı $V^{(n)}(R)$ için üretici (generitic) sistemdir ve $V^{(n)}(R)$ için standart taban olarak tarif edilir.

⁷Ek10 Lineer Dönüşüm

Ek10.1 Lineer Dönüşüm Kavramı

$V^{(n)}(R)$ de aşağıda yazıldığı gibi bir x vektörü ele alalım.

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (\text{Ek10.1})$$

Burada x_i ler R ye ait skalerler ve e_i ler de standart birim vektörlerdir. ($i = 1, 2, 3$)

Skaler olan x_i ler $e_1, e_2, \dots, e_n$ tabanlarına göre x vektörünün koordinatları olarak ifade edilir.

(Ek10.1) denklemi (Ek10.2) denklemiyle tamamen benzerdir.

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k \quad (\text{Ek10.2})$$

(Ek10.2) denklemindeki x vektörü x_1, x_2, x_3 bileşenli 3 boyutlu vektör olup i, j, k da dikdörtgen eksenler boyunca birim vektörlerdir. Şimdi de $n \times n$ boyutlu A matrisini ele alalım.

$$x' = A x \quad (\text{Ek10.3})$$

(Ek10.3) denklemindeki sonuç x' vektörü de yine $V^{(n)}(R)$ dedir. (Ek10.3) denlemi x vektörünü x' ile eşleştiren, $V^{(n)}(R)$ vektör uzayı üzerinde lineer dönüşümü ifade eden denklem olarak düşünülebilir.

(Ek10.1) denklemi x vektörünü standart tabanlar cinsinden ifade etmektedir. Birçok uygulamada x vektörünün $V^{(n)}(R)$ için rasgele tabanlar olan $p_1, p_2, \dots, p_n$ cinsinden ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$x = y_1 p_1 + y_2 p_2 + \dots + y_n p_n = \sum_{i=1}^n y_i p_i = P y \quad (\text{Ek10.4})$$

Burada,

$$P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_n] \quad (\text{Ek10.5})$$

⁷ Ek 10 Meirowitch (2001) den çevrilmiştir

$n \times n$ boyutlu baz vektörleri matrisidir ve

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad (\text{Ek10.6})$$

y vektörü $p_1, p_2, \dots, p_n$ tabanlarına göre x vektörünün koordinatları olan y_i bileşenlerinin n boyutlu vektörüdür. Taban tanımına göre $p_1, p_2, \dots, p_n$ vektörleri lineer olarak bağımsız olduklarından P matrisi tekil değildir. Benzer olarak $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ ler de $p_1, p_2, \dots, p_n$ tabanlarına göre x' vektörünün koordinatlarıdır.

$$x' = P y' \quad (\text{Ek10.7})$$

Burada,

$$y' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y'_n \end{bmatrix} \quad (\text{Ek10.8})$$

olur.

(Ek10.4) ve (Ek10.7) denklemleri (Ek9.1) denkleminde yazıldıklarında,

$$P y' = A P y \quad (\text{Ek10.9})$$

denklemini elde edilir. Böylelikle (Ek10.9) denklemini her iki taraftan P' ile önden çarpılırsa,

$$y' = B y \quad (\text{Ek10.10})$$

eşitliği elde edilir. Burada;

$$B = P' A P \quad (\text{Ek10.11})$$

dir.

P^{-1} in P nin tekil olmaması halinde var olabileceği hatırlanmalıdır. B matrisi ile A matrisi aynı lineer dönüşümü ifade etmekte iseler de farklı koordinat sistemlerindedirler. (Ek10.11) denklem tipiyle ilişkili olarak bu iki matris benzerdir ve sadece (Ek10.11) ile olan ilişkisi *benzerlik dönüşümü* olarak bilinir.

Burada $n \times n$ boyutlu A matrisi için özdeğer problemi belirlenir.

$$A x = \lambda x \quad (\text{Ek10.12})$$

Bu ifade x in aşıkâr olmayan çözümüne müsaade eden λ gibi bir parametrenin değerini belirleme problemi olarak bilinir. Buradaki önem (Ek10.12) denklemini farklı koordinatlarda ifade edebilmektedir. Sonuç olarak (Ek10.12) denkleminde (Ek10.4) dönüşümünü yapmak için P^{-1} ile önden çarpmak ve (Ek10.12) denklemi ile verilen B formunda özdeğer problemini yazmak gerekir.

$$B y = \lambda y \quad (\text{Ek10.13})$$

Bu noktada (Ek10.12) denklemi hatırlanarak B ile ilişkili karakteristik determinanı (Ek10.14) denklemindeki gibi yazmak mümkündür.

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} P) \quad (\text{Ek10.14})$$

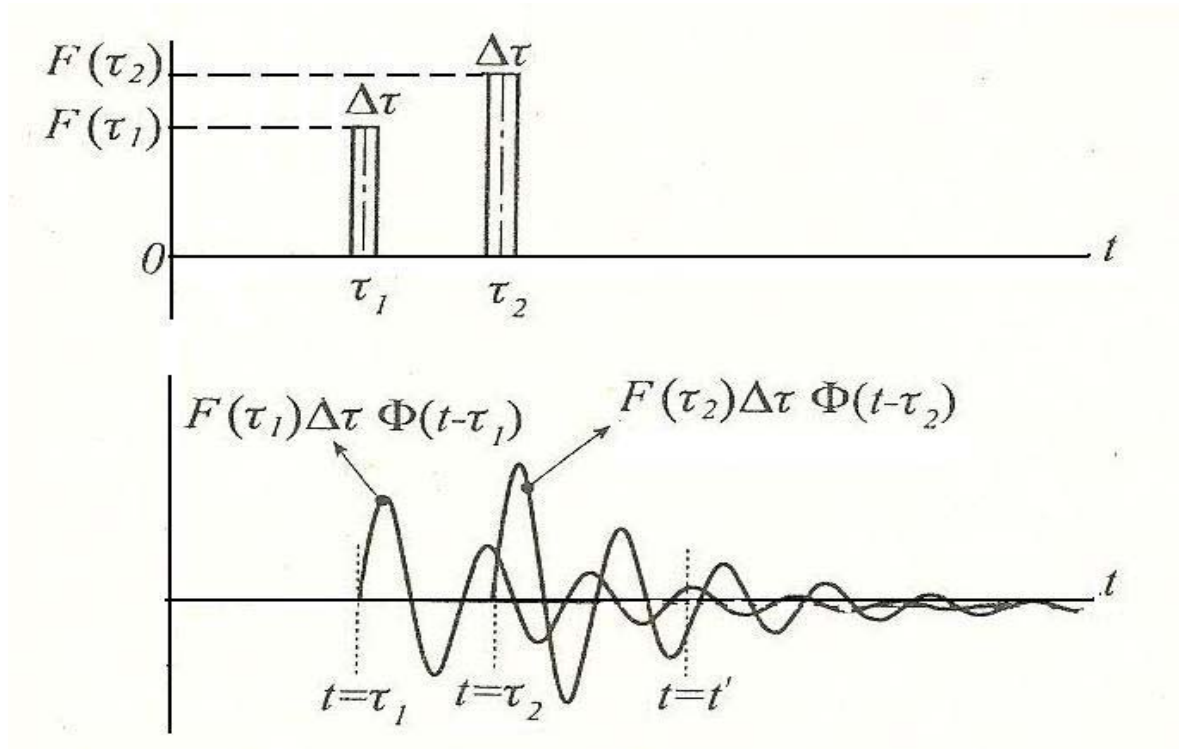
⁸Ek 11 Duhamel İntegrali

Herhangi bir yükleme etkisinde oluşacak yerdeğiştirmeleri hesaplayabilmek için, yükü, birbirini art arda izleyen bir dizi itki gibi düşünüp, süperpozisyon ilkesini kullanarak sonuca gidilebilir.

Şekil Ek11.1' de $t = \tau_1$ ve $t = \tau_2$ anlarında ve $\Delta\tau$ kadar kısa bir süre boyunca etkiyen iki kuvvet görölmektedir. Bu kuvvetlerin büyüklükleri $F(\tau_1)$ ve $F(\tau_2)$ ise, itkileri $F(\tau_i)\Delta\tau$ kadar olur. Sistemin doğrusal olması halinde süperpozisyon ilkesi geçerlidir. Dolayısıyla ilk anda hareketsiz duran bir sistemde bu kuvvetlerin etkisiyle görölecek kütle yerdeğiştirmeleri, her kuvvet için ayrı ayrı bulunup toplanabilir ve herhangi bir $t = t' \geq \tau_2$ anı için,

$$q(t') = F(\tau_1)\Delta\tau \Phi(t' - \tau_1) + F(\tau_2)\Delta\tau \Phi(t' - \tau_2) \quad (\text{Ek11.1})$$

bağıntısı elde edilir.



Şekil Ek11.1 İki değişik itki ve onların etkisiyle oluşan kütle yerdeğiştirmeleri

Öte yandan herhangi bir kuvvet eğrisinin, yaklaşık olarak, Şekil Ek11.2' de görölen biçimde birbirini takip eden dikdörtgenlerden oluştuğu düşünölebilir. Her bir dörtgenin genişliğinin

⁸ Ek 11 Yerlici ve Luş (2007) tan alınmıştır.

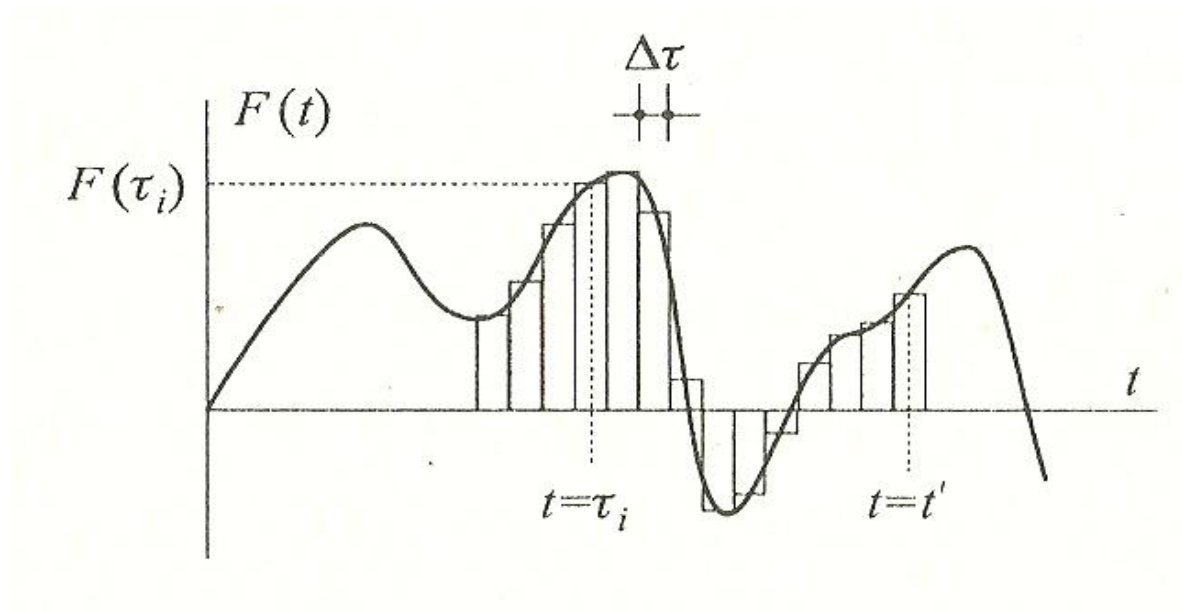
küçük bir $\Delta\tau$ zamanı olduğu varsayıp $t = t'$ anına kadar toplam n tane dörtgen kullanılırsa, bu kuvvet altında $t = t'$ anında görülecek yerdeğiştirmeler,

$$q(t') \approx \sum_{i=1}^n F(\tau_i) \Delta\tau \Phi(t - \tau_i) \quad (\text{Ek11.2})$$

olarak bulunur. Bu yaklaşık hesap, $\Delta\tau$ aralığı küçüldükçe ve kullanılan dörtgenlerin sayısı arttıkça giderek daha başarılı olur. Dolayısıyla bu artış bir limit süreci olarak düşünülürse, $\Delta\tau$ aralığı $d\tau$ diferansiyeline, toplam eylemi de integrale dönüşür ve kütlenin herhangi bir t anındaki yerdeğiştirmesi,

$$q(t) = \int_0^t F(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau$$

integraliyle hesaplanabilir. Bu çok önemli çözüme titreşim konusunda **Duhamel İntegrali** denir.



Şekil Ek11.2 Herhangi bir kuvvet eğrisinin küçük parçalara ayrılması

Bu denklem, kuvvetin etkimeye başladığı $t = 0$ anında sistemin hareketsiz durduğu varsayımıyla türetildiğinden, aksi durumda ne olacağı akla gelebilir. Ancak daha önce itki konusunda bahsedildiği gibi, sıfırdan farklı başlangıç koşullarının etkisi bu çözüme sonradan eklenebilir. Bu durumda daha genel bir ifade olarak,

$$q(t) = e^{-\xi\omega t} \left(q(0) \cos(\varpi t) + \frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\varpi} \sin(\varpi t) \right) + \int_0^t F(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau \quad (\text{Ek11.3})$$

denlemi elde edilir.

Yerdeğiştirmeleri hesaplamak için Duhamel integralini kullanmak, diferansiyel denklemi çözmenin yanı sıra diğeri bir yoldur. Genellikle doğrudan hareket denklemini çözmek, integrali hesaplamaktan daha kolay olabilir. Ancak Duhamel integrali yaklaşımı, yerdeğiştirmenin herhangi bir kuvvet için hesaplanabilmesine olanak sağladığı için önemlidir. Gene de diferansiyel denklemin özel çözümünün bulunabilmesi ya da Duhamel integralinden kapalı çözüm elde edilebilmesi için, zorlamanın yeterince basit bir matematiksel ifadeye sahip olması gerekir. Her iki yaklaşımda da karmaşık kuvvetler için çoğı kez kapalı çözüme ulaşmak mümkün olmaz. Bu durumlarda hareket denklemi ya da Duhamel integralinin sayısal olarak çözölmesi gerekir.

Duhamel integrali ile mesnet hareketlerinin oluşturacağı görelı yerdeğiştirmeler de hesaplanabilir. Böyle bir durum için integraldeki kuvvet terimi, $F(\tau) = -m \ddot{y}_s(\tau)$ olarak düşünölürse görelı yerdeğiştirmeler için,

$$u(t) = -m \int_0^t \ddot{y}_s(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau \quad (\text{Ek11.4})$$

haline gelir. Birim itki tepkisi açıkça yazılıp (Ek11.3) denklemi de kullanıldıktan sonra gerekli sadeleştirmeler yapılrırsa, bu ifade,

$$u(t) = \frac{1}{\varpi} \int_0^t \ddot{y}_s(\tau) \sin(\varpi(t - \tau)) e^{-\xi\varpi(t-\tau)} d\tau \quad (\text{Ek11.5})$$

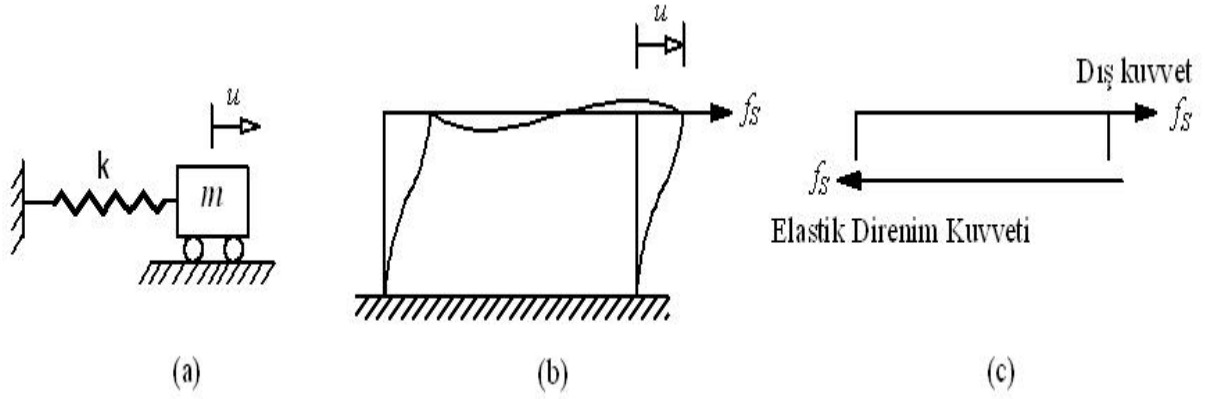
olarak da yazılabilir. Burada $\ddot{y}_s$, daha önce de tanımlandığı gibi mesnet hareketine karşı gelen mesnet ivmesidir.

⁹Ek12 Yapı Dinamiği İçin Temel Bilgiler

Ek12.1 Sistem Tepki Kuvvetleri ve Sistem Modeli

Ek12.2 Elastik Yay Kuvveti

Sistemin serbestliği doğrultusunda yerdeğiştirme etkisine karşı direnen iç kuvvet dış kuvvete eşit ve ters yönlüdür. Sistemin Şekil Ek12.1’ de verilen yay modeli ele alınırsa yerdeğiştirme sonucunda yayda oluşan kuvvet, sistemin yerdeğiştirme etkisine gösterdiği direnimdir. Bu kuvvet – yerdeğiştirme ilişkisi, yerdeğiştirmenin küçük değerleri için doğrusaldır. Fakat bu ilişki büyük yerdeğiştirme değerleri için doğrusal olmaktan çıkar. Her iki durum için kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisi Şekil Ek12.2’ de verilmiştir.



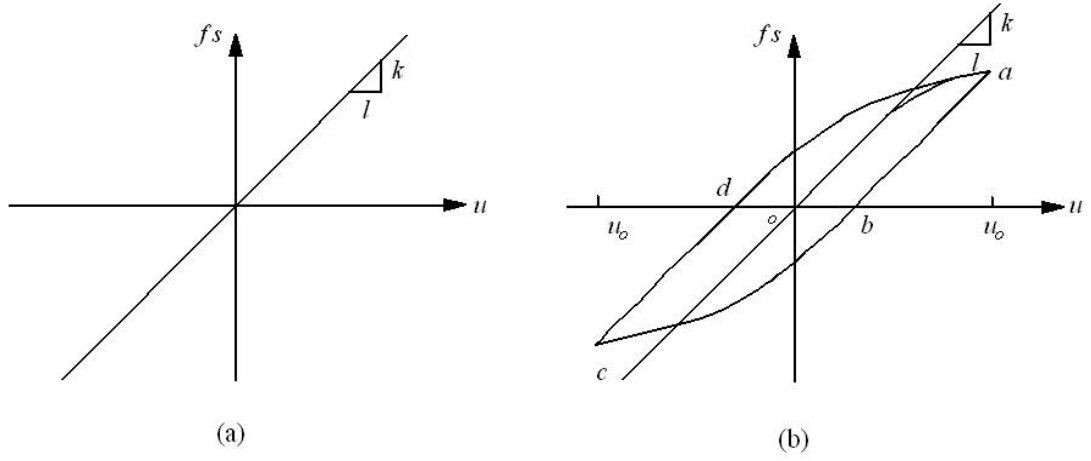
Şekil Ek12.1 a) Tek serbestlik dereceli sistem yay modeli b) Sisteme etkiyen yük c) sistemin serbest cisim diyagramı

Şekil Ek12.2’ de gösterildiği gibi elastik yay kuvveti ile yerdeğiştirme arasında izleyen bağıntı vardır:

$$f_s = k u \quad (\text{Ek12.1})$$

Burada k sistemin rijitliğini temsil edip birimi kuvvet / uzunluk şeklindedir.

⁹ Ek 12 Chopra (1995) dan alınmıştır.



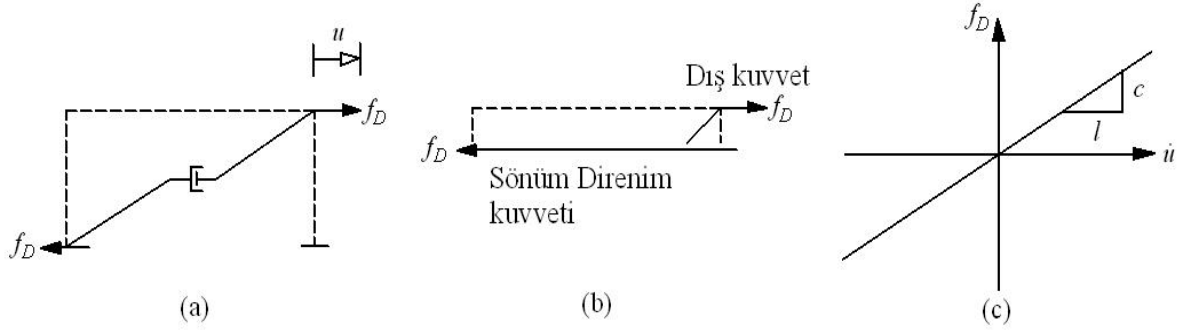
Şekil Ek12.2 Elastik yay kuvveti ile yerdeğiştirme arasındaki ilişki a) Doğrusal kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisi b) Doğrusal olmayan kuvvet-yerdeğiştirme ilişkisi

Ek12.3 Sönüm Kuvveti

Serbest titreşim genliğinin zamanla yok olması işlemi sönüm olarak isimlendirilir. Titreşim hareketi yapan sistemin enerjisi çeşitli mekanizmalar tarafından sönümlenir ve aynı zamanda birden fazla mekanizma aynı anda bulunabilir. Basit laboratuvar modelleri gibi temiz (clean) sistemlerde sönümlenen enerjinin çoğunluğu tahminen malzemenin tekrarlı elastik şekil değiştirmesinin ve bir katı şekil değiştirdiğinde ortaya çıkan içsel sürtünmenin termal etkisinde ortaya çıkar.

Bununla birlikte gerçek yapılarda enerji sönümüne diğer birçok mekanizma katkıda bulunur. Titreşen bir binada bunlar çelik birleşimlerindeki sürtünmeyi, betondaki mikro çatlakların açılmasını ve kapanmasını, yapının bölme duvarları gibi yapısal olmayan elemanları ile kendisi arasındaki sürtünmeyi kapsar. Gerçek bir yapıda bu enerjiyi sönümleyen mekanizmaların matematiksel olarak tariflenmesi veya belirtilmesi imkânsız görülmektedir.

Sonuç olarak, gerçek yapılardaki sönüm genellikle yüksek oranda idealleştirilmiş tarzda ifade edilir. Birçok amaçlar için tek serbestlik dereceli yapıdaki gerçek sönüm lineer viskoz sönümleyici ile tatmin edici olarak idealize edilebilir. Lineer viskoz sönümleyici yaklaşımında sönüm katsayısı öyle seçilmiştir ki onun sönümlendiği titreşim enerjisi gerçek yapıda mevcut olan tüm sönüm mekanizmalarının birleşik etkisine eşdeğerdir. Bu idealleştirme eşdeğer viskoz sönüm olarak isimlendirilir.



Şekil Ek12.3 a) Çerçeve sistemine etkiyen sönüm kuvveti ve viskoz sönümleyici b) Serbest cisim diyagramı c) Sönüm kuvveti ile yerdeğiştirmenin hızı arasındaki ilişki

Şekil Ek12.3, u yerdeğiştirmesi doğrultusunda f_D kuvvetine maruz lineer viskoz sönümleyiciyi gösterir. Sönümleyicilerdeki iç kuvvet, dış kuvvet f_D kuvvetine eşit fakat ters yöndedir. Burada viskoz sönümleyicinin serbest cisim diyagramı çerçeveden soyutlanıp ayrı olarak çizildiğinden sönüm sebebiyle ortaya çıkan f_D kuvveti sağ tarafta dış kuvvet olarak kabul edilmiştir.

Şekil Ek12.3c)' de gösterildiği gibi sönüm kuvveti f_D ile yerdeğiştirme hızı $\dot{u}$ arasında izleyen ilişki vardır.

$$f_D = c \dot{u} \quad (\text{Ek12.2})$$

Burada c viskoz sönüm katsayısıdır ve birimi *kuvvet zaman/uzunluk* şeklindedir.

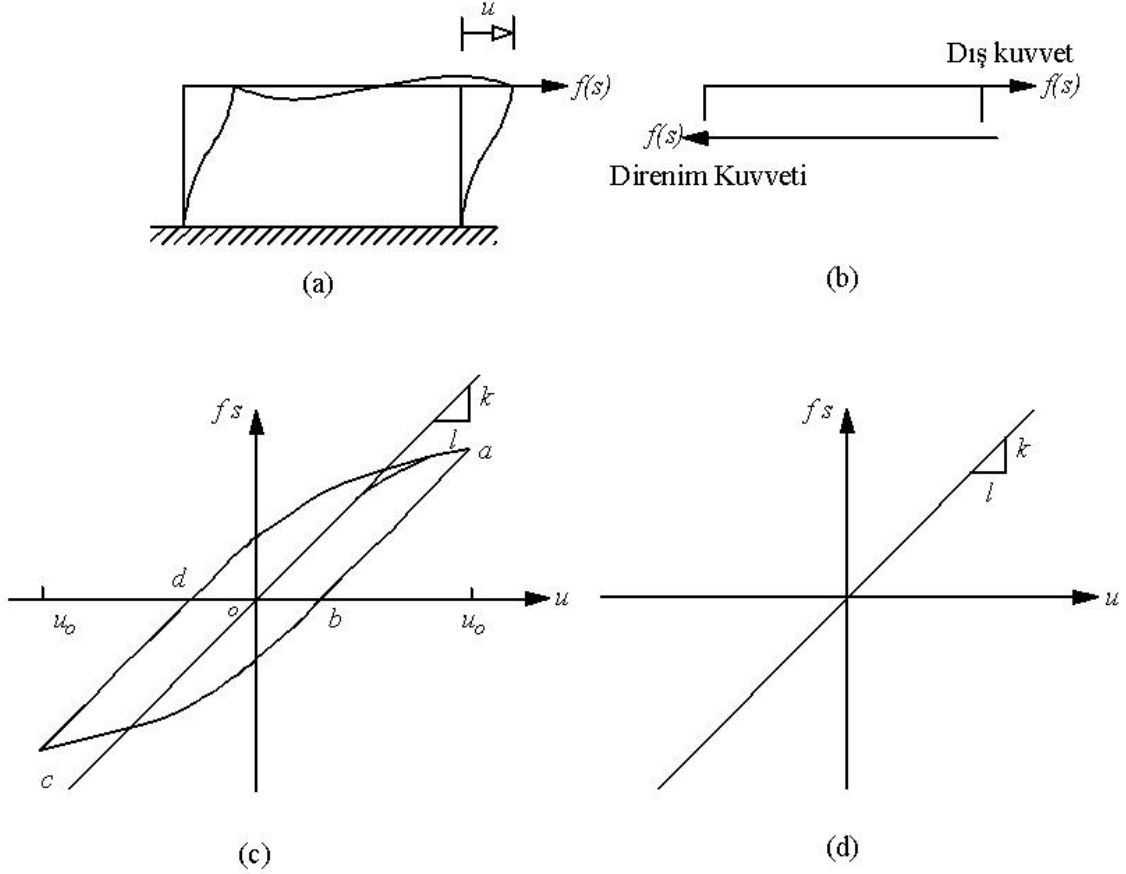
Yapının rijitliğinin tersine sönüm katsayısı yapının boyutlarından ve yapısal elemanların boyutlarından hesaplanamaz. Bu şaşırtıcı olmamalıdır. Çünkü gerçek yapıların titreşim enerjisini sönümleyen tüm mekanizmaları belirlemek makul düzeyde kolay değildir. Bu nedenle gerçek yapılar üzerindeki titreşim testleri sönüm katsayısını hesaplamak için veri sağlarlar. Bunlar serbest titreşim deneylerinden elde edilen veriler olabilir; serbest titreşimde hareketin ölçülen yok olma hızı sönüm katsayısını hesaplamada bir taban ortaya koyacaktır. Aynı zamanda zorlanmış titreşim deneylerinden de sönüm özelliği belirlenebilir.

Tüm yapının lineer elastik limiti dahilindeki şekil değiştirme genliklerindeki enerji sönümünü modellemek için eşdeğer viskoz sönümleyici kabulü yapılacaktır.

Şekil değiştirmelerin bu aralığı üzerinde deneylerden elde edilen sönüm katsayısı c şekil değiştirme genliği ile değişebilir. Sönüm özelliğinin bu nonlineerliği dinamik analizde açıkça göz önüne alınmaz. Bu umulan şekil değiştirme genliği için uygun bir sönüm katsayısı değeri

seçimi ile dolaylı olarak dikkate alınır. Bu şekil değiştirme genliği genellikle yapının lineer elastik limiti ile alakalı şekil değiştirme olarak ele alınır.

Daha büyük şekil değiştirmelerde elastik olamayan davranış yüzünden ilave enerji sönümlenir. Çevrimsel kuvvetler ve şekil değiştirmeler altında bu davranış bir *yük-şekil değiştirme* hysteresis döngüsünü ifade eder. Bu durumu ifade eden yük şekil değiştirme eğrisi Şekil Ek12.3c)' de gösterilmiştir.



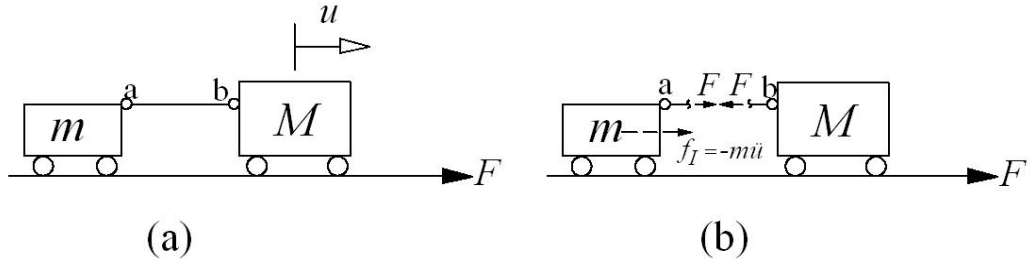
Şekil Ek12.4 a) Çerçeve sistemine etkiyen yay kuvveti b) Serbest cisim diyagramı c) Elastik olmayan davranış d) Elastik davranış

Şekil değiştirme limitleri $\pm u_0$ arasındaki bir deformasyon çevrimi esnasında sönümlenen sönüm enerjisi Şekil Ek12.4c)' de verilen abcd hysteresis döngüsü dahilindeki alan ile verilir. Bu enerji sönümü genellikle viskoz sönümleyici ile modellenmez. Özellikle eğer tahrik deprem zemin hareketi ise bu böyledir. Bunun yerine elastik olmayan davranış vasıtası ile sönümlenen enerjiyi hesaba katmak için en çok yaygın ve doğru bir yaklaşım; direnimsel kuvveti ve şekil değiştirme arasındaki elastik olmayan ilişkiyi bilmektir.

Böylesi bir yük–şekil değiştirme ilişkisi küçük Şekil değiştirme hızlarında yapılar veya yapısal bileşenler üzerindeki deneylerden elde edilir. Böylece hız bağımlı etkilerden ortaya çıkan enerji sönümü dışarıda bırakılmış olur. Genel yaklaşım, lineer elastik sınır dahilindeki daha küçük deformasyonlar için daha önce tanımlanan viskoz sönümleyicinin aynısı ile Şekil değiştirmelerin elastik olmayan aralığındaki bu sönüm modellenir.

Ek12.4 Kütle (Atalet) Kuvveti

Şekil Ek12.5a)’ da pozitif x yönünde $\ddot{u}$ ivmesi ile hareket eden M kütleli cisim rijit ab bağı ile m kütesine bağlanmıştış. Şekil Ek12.5b)’ de m kütleli cismin tepkisini incelemek için kütleleri bağlayan ab rijit bağı kesilmiştir.



Şekil Ek12.5 a) $\ddot{u}$ İvmesi ile hareket eden M kütleli cisim, b) m kütleli cisim üzerindeki kuvvetler

Kütleleri bağlayan ab rijit bağı kesildiğinde m kütesine etkiyen kuvvetlerin dengesi izleyen Şekilde yazılır:

$$F + f_I = 0 \quad (\text{Ek12.3})$$

m kütesine etkiyen kuvvet

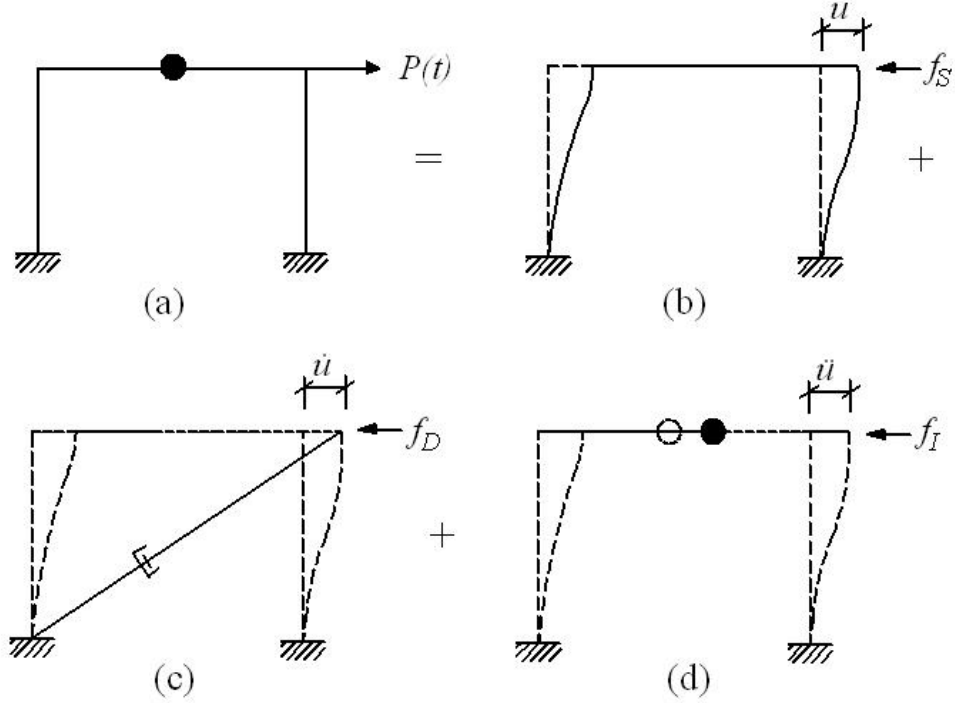
$$F = -f_I = -(-m\ddot{u}) = m\ddot{u} \quad (\text{Ek12.4})$$

olarak bulunur.

Ek12.5 Sistem Modeli

Şekil Ek12.6’ dan görüldüğü üzere sistemi oluşturan her bir bileşen (kütle, rijitlik, sönüm ve dış kuvvet) sadece kendi özelliğini ifade etmekte, hiçbir Şekilde diğerini ifade etmemektedir. Dolayısıyla k yay bileşenini sadece sistemin elastik dengeleyici kuvvetini ve enerji

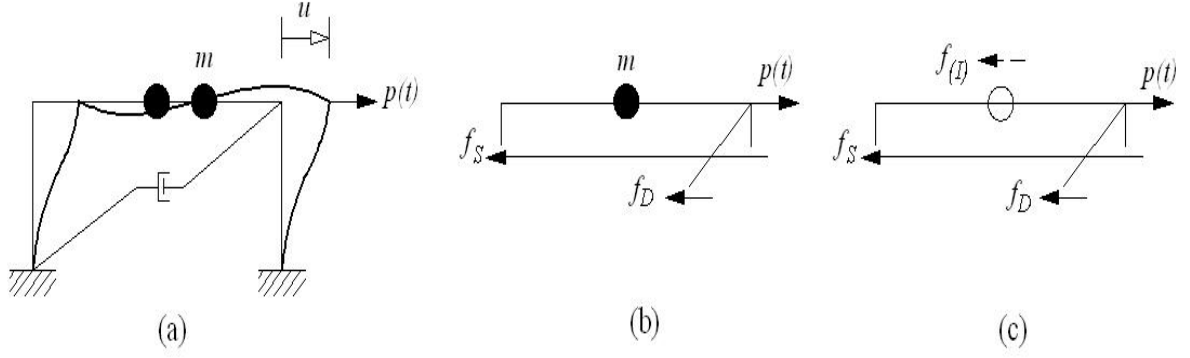
depolamasını ifade eder. c sönüm bileşeni sadece sistemdeki sürtünme karakteristiğini ve enerji çıkışını ifade eder. m kütle bileşeni sadece sistemin kütle ve atalet karakteristiğini ifade eder. $P(t)$ dış kuvveti zamanın fonksiyonu olup sadece sisteme giren enerjiyi ifade eder.



Şekil Ek12.6 Sistem üzerindeki tepki kuvvetleri

Ek12.6 Viskoz Sönümlü Serbest Titreşim

Göz önüne alınan bir anda bir kütleye etkiyen kuvvetler Şekil Ek12.7' de gösterilmiştir. Bunlar dış $P(t)$ kuvveti, elastik (veya elastik olmayan) direnme kuvveti f_S ve sönüm direnme kuvveti f_D kuvvetleridir. Dış kuvvet $P(t)$, yerdeğiştirme $u(t)$, hız $\dot{u}(t)$ ve ivme $\ddot{u}(t)$ pozitif x eksenine doğrultusunda pozitif alınmışlardır.



Şekil Ek12.7 a) Dış yük altında idealize edilmiş tek serbestlik dereceli sistem b) Newton'un hareket kanununu temsil eden büyüklükler, c) D'Alembert's prensibi

Elastik kuvvet ve sönüm kuvveti şekil değiştirme ve hıza direnç gösteren iç kuvvetler olduklarından hareketin tersi yönünde gösterilmişlerdir. Bu durumda Newton'un ikinci hareket kanunundan izleyen hareket denklemleri elde edilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) \quad (\text{Ek12.5})$$

Bu denklem elastik olmayan sistemlere de kolayca genişletilebilir. Bu durumda izleyen hareket denklemi bulunur:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + fs(u, \dot{u}) = P(t) \quad (\text{Ek12.6})$$

Denklem (Ek12.5)' de $P(t) = 0$ alınırsa bu durumda tek serbestlik dereceli sönümlü serbest titreşim hareket denklemi elde edilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (\text{Ek12.7})$$

Bu denklemin çözümü için yerdeğiştirme izleyen formda alınır:

$$u = e^{\lambda t} \quad (\text{Ek12.8})$$

Bu durumda hız ve ivme izleyen şekilde elde edilir:

$$\dot{u} = \lambda e^{\lambda t} \quad (\text{Ek12.9})$$

$$\ddot{u} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (\text{Ek12.9})$$

(Ek12.8), (Ek12.9), (Ek12.9) eşitlikleri (Ek12.7) denkleminde yerine yazılırsa izleyen eşitlik elde edilir:

$$m \lambda^2 e^{\lambda t} + c \lambda e^{\lambda t} + k e^{\lambda t} = 0 \quad (\text{Ek12.11})$$

Bu durumda (Ek12.7) diferansiyel eşitliğinin karakteristik denklemi izleyen formda elde edilir:

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0 \quad (\text{Ek12.12})$$

Bu denklemin kökleri izleyen şekilde bulunur:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (\text{Ek12.13})$$

Böylelikle yerdeğiştirme ifadesi u izleyen şekilde elde edilir:

$$u = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{Ek12.14})$$

Eşitlik (Ek12.13)' deki karekök içinde bulunan ifadeyi sıfır yapan c değeri kritik sönüm sabiti olarak tanımlanır ve izleyen şekilde verilir:

$$c^2 - 4mk = 0 \quad (\text{Ek12.15})$$

$$c_{cr} = 2\sqrt{mk} \quad (\text{Ek12.16})$$

Sistemin doğal açısal frekansı $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ olup bu ifade göz önüne alınırsa (Ek12.16) eşitliği izleyen şekilde verilir:

$$c_{cr} = 2m\omega_n = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega_n} \quad (\text{Ek12.17})$$

Sistemin sönümü olan c değerinin, kritik sönüm olan c_{cr} değerine bölümü sönüm oranı olarak tanımlanır ve izleyen şekilde verilir:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (\text{Ek12.18})$$

Sönüm rijitlikle orantılı olarak alındığında, herhangi bir ω_n doğal frekansı için, (Ek12.18) ile verilen sönüm oranı ξ ile (6.12a) da verilen sönüm katsayısı η arasında izleyen ilişki bulunur:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{\eta k}{2m\omega_n} = \frac{\eta \omega_n}{2}; \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m} \quad (\text{Ek12.19})$$

Sönüm oranı bilinirse viskoz sönüm katsayısı;

$$c = 2\xi m\omega_n \quad (\text{Ek12.20})$$

şeklinde olur ve (Ek12.7) ile verilen hareket denklemi izleyen şekilde yazılabilir:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad (\text{Ek12.21})$$

Sönüm sabiti c serbest titreşimin veya zorlanmış harmonik titreşimin bir turunda (çevriminde) sönümlenen enerjinin bir ölçüsüdür. Bununla birlikte, sönüm oranı-sönümün boyutsuz bir ölçüsü- sistemin bir özelliği olup ayrıca kütle ve rijitliğe de bağlıdır. Eğer $c = c_{cr}$ veya $\xi = 1$ ise sistem denge konumuna titreşim yapmaksızın döner. Eğer $c > c_{cr}$ ise veya $\xi > 1$ ise sistem denge konumuna yine titreşim yapmaksızın döner; fakat $c = c_{cr}$ durumundakinden daha uzun bir zamanda döner. $c < c_{cr}$ Olması durumunda kritik altı sönüm olur ki bundan sonra bu durum ile ilgilenilecektir. Çünkü binalar, köprüler, barajlar, nükleer güç yapıları, kıyı yapıları ve diğerleri kritik altı sönüm sınıfına girerler ve tipik olarak sönüm oranları 0,1 den daha küçüktür. Kritik üstü sönüm durumları, otomatik kapılar gibi geri dönme mekanizmalarında kullanılır. Kararlı hal değerlerini ölçmek için kullanılan cihazlar, ölü ağırlık ölçüm skalası (tartısı) gibi, genellikle kritik sönümlüdür. Otomobil darbe sönümleyici sistemlerinde bile sönüm genellikle kritik sönümün yarısından daha azdır.

$$\xi < 0.05$$

Kritik altı sönümlü sistemlerde, frekansın

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{Ek12.22})$$

olduğu bilinmektedir.

Ek12.7 Yük İletimi ve Titreşim Sönümü

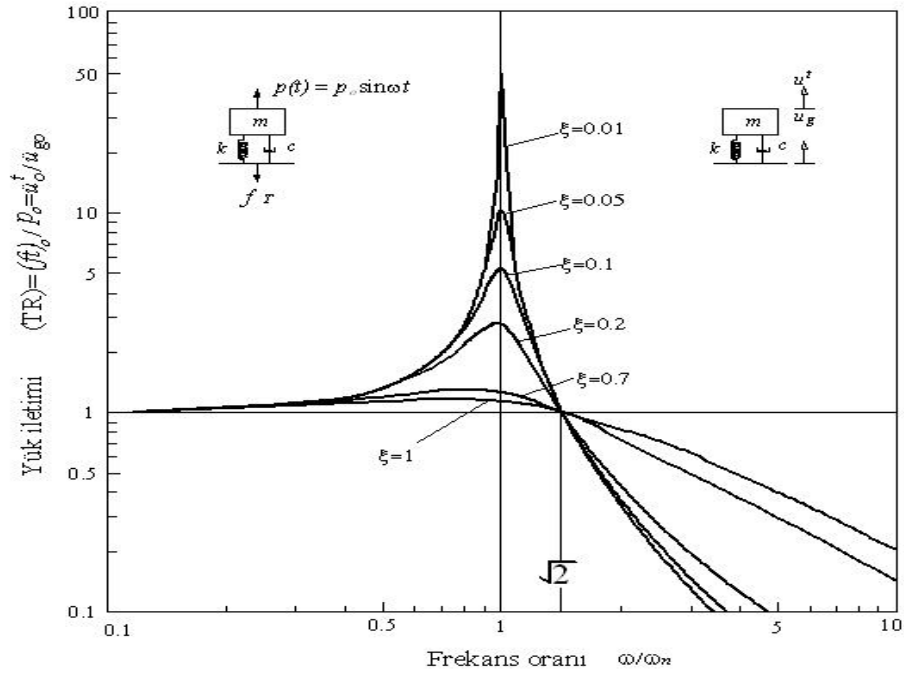
Şekil Ek12.8' in içinde bulunan küçük şekilde verilen harmonik bir yük etkisindeki kütle-yay-sönümleyici sistemi göz önüne alınsın. Temele iletilen yük

$$f_T = f_s + f_D = k u(t) + c \dot{u}(t) \quad (\text{Ek12.23})$$

şeklindedir. Oluşabilecek maksimum temele iletilen yükün, dış yükün maksimum değerine oranı yük iletimi olarak adlandırılıp izleyen şekilde elde edilir:

$$TR = \frac{(f_T)_0}{P_0} = \left\{ \frac{1 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\xi(\omega/\omega_n)]^2} \right\}^{1/2} \quad (\text{Ek12.24})$$

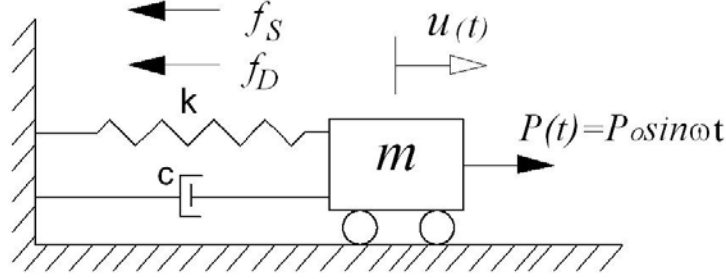
Şekil Ek12.8' de frekans oranı ω/ω_n e bağlı olarak yük iletimi çeşitli sönüm oranları için çizilmiştir.



Şekil Ek12.8 Frekans oranı- yük iletimi ilişkisi

Büyük ω/ω_n değerleri için eğrilere vurgu yapmak daha iyi algılanmalarını sağlamak için logaritmik ölçülendirme seçilmiştir. Bilindiği gibi tüm tahrik fonksiyonlarında sönüm, hareketin genliğini azaltırken, yük iletimini sadece $\omega/\omega_n < \sqrt{2}$ olduğunda azaltır. İletilen kuvvetin uygulanan kuvvetten küçük olması için, mesnet sisteminin rijitliği ve bu yüzden de doğal frekans, $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ olsun diye yeterince küçük olmalıdır. Mesnet sisteminde sönüm istenmez çünkü bu frekans aralığında sönüm iletilen kuvveti artırır. Bu durum iletilen kuvveti indirmek için yumuşak bir yay ile kabul edilebilir statik yerdeğiştirme arasında bir denge kurulması gerektiğini ifade eder.

Ek12.8 Viskoz Sönümlü Sistemin Kararlı Hal Titreşimi ve Sönümlenen Enerji



Şekil Ek12.9 Tek serbestlik dereceli sistem

Şekil Ek12.9’ da verilen $P(t) = P_0 \sin \omega t$ dış kuvveti etkisindeki tek serbestlik dereceli bir sistemin kararlı hal hareketi göz önüne alınsın. Sistemin hareket denklemi izleyen şekilde verilir:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (\text{Ek12.25})$$

$P(t)$ dış kuvveti altındaki sistem için kararlı hal yerdeğiştirme fonksiyonu $u(t)$ ve yerdeğiştirme hızı $\dot{u}(t)$ izleyen şekildedir:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.26})$$

$$\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.27})$$

Yerdeğiştirme genliği u_0 , hızın genliği ise ωu_0 , ϕ ise faz açısıdır. Yerdeğiştirme genliği u_0 ve faz açısı ϕ izleyen şekilde verilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2}} = \frac{(u_{st})_o}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2}} \quad (\text{Ek12.28})$$

$$R_d = \frac{u_o}{(u_{st})_o} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2}} \quad (\text{Ek12.29})$$

Buradaki R_d büyüklüğü dinamik büyütme çarpanı adını alır.

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi(\omega / \omega_n)}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \quad (\text{Ek12.30})$$

Zorlama frekansının ve sistem frekansının eşit olması ($\omega = \omega_n$) durumunda u_0 izleyen şekilde olur:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} = \frac{u_{st}}{2\xi} \quad (\text{Ek12.31})$$

Sistem üzerindeki direnım kuvvetleri izleyen şekilde ifade edilir:

$$f_R = f_S + f_D = k u + c \dot{u} \quad (\text{Ek12.32})$$

$$f_S = k u = k u_0 (\sin \omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.33})$$

$$f_D = c \dot{u} = c \omega u_0 (\cos \omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.34})$$

Harmonik titreşimde viskoz sönüm nedeniyle bir turda (çevrimde) sönümlenen enerji, izleyen şekilde verilir:

$$\begin{aligned} E_D &= \int f_D du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u}) \dot{u} dt = \int_0^{2\pi/\omega} c \dot{u}^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]^2 dt = \pi c \omega u_0^2 = 2\pi \xi \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \end{aligned} \quad (\text{Ek12.35})$$

Sönümlenen enerji yerdeğiştirme genliğinin karesi ile orantılıdır. Sönümlenen enerji tahrik frekansıyla lineer olarak arttığından, herhangi bir verilen sönüm değeri ve genlik için sönüm enerjisi sabit bir değeri değildir.

Kararlı hal titreşiminde, uygulanan kuvvet sebebiyle sisteme giren enerji viskoz sönümde sönümlenir. $P(t)$ dış kuvvetinin her bir turda (çevrimde) sisteme verdiği enerji izleyen şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} E_I &= \int P(t) du = \int_0^{2\pi/\omega} P(t) \dot{u} dt \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} [P_0 \sin \omega t][\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = \pi P_0 u_0 \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{Ek12.36})$$

(Ek12.30) ifadesinde verilen faz açısı ϕ (Ek12.36) eşitliğinde yerine yazılırsa, (Ek12.36) eşitliği izleyen şekilde elde edilir:

$$E_I = 2\pi \xi \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \quad (\text{Ek12.37})$$

(Ek12.35) ve (Ek12.37) eşitlikleri $E_I = E_D$ olduğunu gösterir.

Sistemdeki potansiyel ve kinetik enerjiler düşünülürse; harmonik titreşimin her bir turunda potansiyel enerjideki (yayın şekil değiştirme enerjisindeki) ve kinetik enerjideki değişimler sıfırdır. Bu durum izleyen şekilde doğrulanabilir.

$$\begin{aligned} E_S &= \int f_S du = \int_0^{2\pi/\omega} (k u) \dot{u} dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} k [u_0 \sin(\omega t - \phi)] [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ek12.38})$$

$$\begin{aligned} E_K &= \int f_I du = \int_0^{2\pi/\omega} (m \ddot{u}) \dot{u} dt = \\ &= \int_0^{2\pi/\omega} m [-\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)] [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)] dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{Ek12.39})$$

Önceki enerji kavramları $\omega = \omega_n$ frekanslı harmonik kuvvet nedeniyle oluşan yerdeğiştirme genliğinin kararlı hale ulaşılmaya kadar büyümesini açıklamaya yardım eder. $\omega = \omega_n$, $\phi = 90^\circ$ için (Ek12.36) eşitliği izleyen hale gelir:

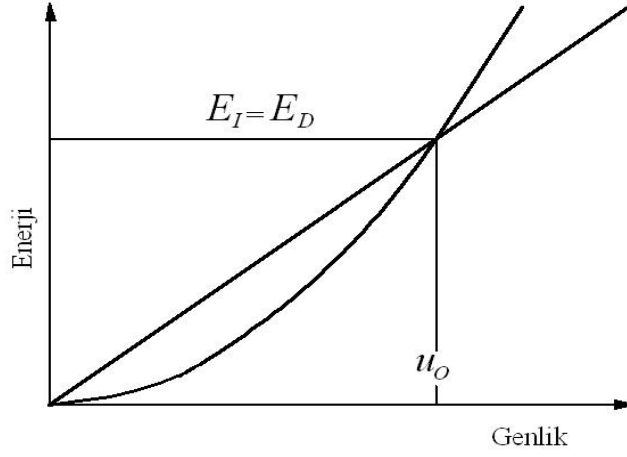
$$E_I = \pi P_0 u_0 \quad (\text{Ek12.40})$$

Dış kuvvetin sisteme verdiği giriş enerjisi yerdeğiştirme genliği ile lineer olarak değişir, Şekil Ek12.10. Bundan farklı olarak, sönüm enerjisi ise yerdeğiştirme genliği ile karesel olarak değişir. Şekil Ek12.10' da gösterildiği gibi, kararlı hale varılmadan önce, her bir turdaki giriş enerjisi bu turdaki sönüm enerjisinden büyüktür ki bu durum gelecek turda (çevrimdeki) yerdeğiştirme genliğinin daha büyük olmasına neden olur. Büyüyen yerdeğiştirme genliği ile sönümlenen enerji giriş enerjisinden daha hızlı artar. Sonunda, giriş ve sönüm enerjileri kararlı hal yerdeğiştirme genliği olan u_0 da aynı olacaktır. Kararlı hal titreşiminin genliği, sönüm ne kadar küçük olursa olsun sınırlı olacaktır. Bu enerji dengesi, $\omega = \omega_n$ frekansındaki bir harmonik kuvvet yüzünden ortaya çıkan u_0 ın bulunmasında bir alternatif yol sağlar. (Ek12.35)-(Ek12.40) ifadelerinin eşitlenmesi ile izleyen ifade elde edilir:

$$\pi P_0 u_0 = \pi c \omega_n u_0^2 \quad (\text{Ek12.41})$$

Buradan u_0 izleyen şekilde elde edilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{c \omega_n} \quad (\text{Ek12.42})$$



Şekil Ek12.10 Giriş ve sönüm enerjisi

Şimdi viskoz sönümdeki enerjinin grafik yorumu sunulacaktır. Bu amaçla sönüm kuvveti f_D ile yerdeğiştirme u arasındaki ilişki ile ilgili bir eşitlik türetilecektir.

$$f_D = c \dot{u} = c \omega u_0 (\cos \omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.43})$$

$$= c \omega \sqrt{u_0^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t - \phi)}$$

$$= c \omega \sqrt{u_0^2 - [u(t)]^2}$$

Bu eşitlik

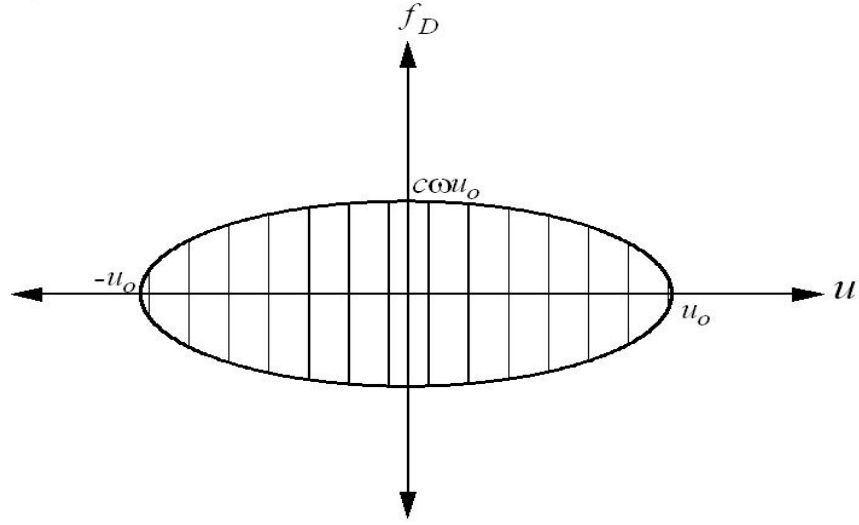
$$\left(\frac{u}{u_0} \right)^2 + \left(\frac{f_D}{c \omega u_0} \right)^2 = 1 \quad (\text{Ek12.44})$$

şeklinde ifade edilebilir ki bu ifade Şekil Ek12.11' de gösterilen elipsin denklemidir. Gözlenebilir ki $f_D - u$ eğrisi tek değerli bir fonksiyon olmayıp bir hysteresis olarak bilinir. Elips tarafından çevrelenen alan;

$$\pi u_0 (c \omega u_0) = \pi c \omega u_0^2 \quad (\text{Ek12.45})$$

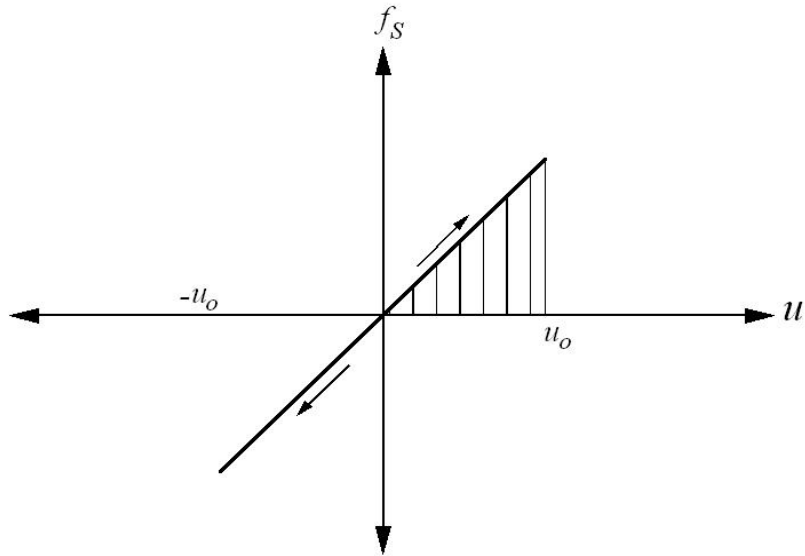
şeklindedir ve bu (Ek12.35) eşitliği ile aynıdır. Sönüm nedeniyle sönümlenen enerji yine elips tarafından kapsanan alandır. Çünkü tek değerli elastik kuvvet , $f_s = k u$ tarafından kapsanan alan sıfırdır.

(Ek12.44) bağıntısının grafiksel gösterimi Şekil Ek12.11' de verilmiştir.



Şekil Ek12.11 Bir çevrimde sönmölenen enerji

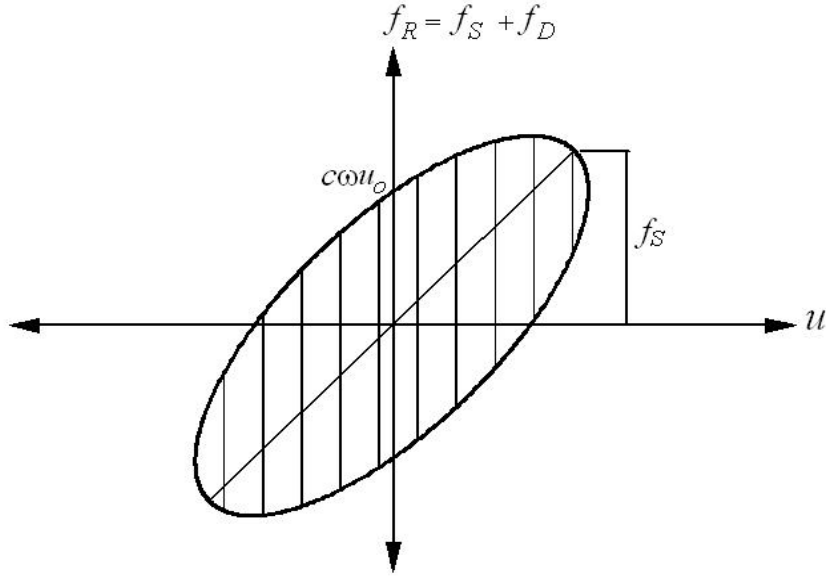
(Ek12.33) ifadesinde verilen elastik direnir kuvveti ile yerdeğıştirme arasındaki bağıntısının grafiksel gösterimi Şekil Ek12.12' de verildiğı gibidir.



Şekil Ek12.12 Elastik yay kuvveti-yerdeğıştirme ilişkisi ve depolanan enerji

Eşitlik (Ek12.34)' de verilen toplam direnir kuvvetin ($f_R = f_S + f_D$) u ya karşı çizimi Şekil Ek12.12' de verilmiştir.

$$f_S + f_D = k u(t) + c \dot{u}(t) = k u + c \omega \sqrt{u_0^2 - u^2} \quad (\text{Ek12.46})$$



Şekil Ek12.13 Direnim kuvvetleri ile yerdeğiştirme arasındaki ilişki

Viskoz sönüm ile ilgili hysteresis kapalı eğrisi (loop) dinamik hysteresisin sonucudur. Çünkü hysteresis eğrisi yüklerin dinamik doğası ile ilgilidir. Kapalı eğri (loop) alanı tahrik frekansı ile orantılıdır; bu, eğer çevrimsel yük yeterince yavaş uygulanırsa ($\omega = 0$), yük-yerdeğiştirme eğrisinin tek değerli olduğunu ifade eder. Dinamik hysteresisin ayırt edici bir karakteristiği, plastik şekil değiştirmelerde hysteresis eğrisinin sivri köşeleri olmasına karşın, dinamik hysteresis durumunda hysteresis eğrileri eliptik şekilde olma eğilimindedir. Sonraki durumda, statik çevrimsel yükler altında bile hysteresis eğrileri oluşur; bu yüzden bu olay yük-şekil değiştirme eğrisi şekil değiştirme hızından etkilenmediği için, statik hysteresis olarak bilinir.

Ek bir bilgi olarak sönümün iki ölçümünden söz edilecektir: Özel sönüm kapasitesi ve özel sönüm çarpanı. Sönüm kapasitesi; sönüm enerjisinin, şekil değiştirme enerjisine oranıdır ve titreşim süresinde enerjinin kaybolmasının karakteristik değeri olarak tariflenebilir ve izleyen şekilde verilir:

$$\psi_c = \frac{E_D}{E_{S_0}} = \frac{\pi u_0 c \omega u_0}{1/2 k u_0^2} = 2\pi \eta \omega \quad (\text{Ek12.47})$$

Özel sönüm çarpanı ise özel sönüm kapasitesinin 2π ye bölünmüş halidir, ayrıca kayıp faktörü olarak ta bilinip izleyen şekilde tanımlanır:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \frac{E_D}{E_{S_0}} = \eta \omega \quad (\text{Ek12.48})$$

Eğer enerji basit bir harmonik hareket çevrimi esnasında üniform bir hızda kaldırılabilirse (böylesi bir mekanizma gerçekçi değildir) ζ her bir radyan için enerji kaybının şekil değiştirme enerjisine (E_{S_0}) bölümü olarak yorumlanabilir. Sönümün bu iki ölçüsü; hafif sönümde çok yararlı olduklarından, yapısal titreşimde sık kullanılmazlar. Bu iki ölçü malzemenin sönüm kapasitelerini karşılaştırmada faydalıdır.

Ek12.9 Eşdeğer Viskoz Sönüm

Daha önce kısım Ek12.6' da tanıtıldığı gibi gerçek yapılardaki sönüm genellikle eşdeğer viskoz sönüm olarak temsil edilir. Yönetici diferansiyel eşitlik lineer olduğu ve böylece analitik çözümün elde edilmesi kolay olduğundan, bu yaklaşım sönümün en basit formudur. Viskoz sönüm kabulü ile verilen ödümlerden, lineer hareket eşitliği kullanımının avantajı daha ağır basar. Bu kısımda gerçek yapıda mevcut sönüm mekanizmasının bileşik etkisine bir anlamda eşdeğer olacak şekilde bir sönüm katsayısı belirlenecektir.

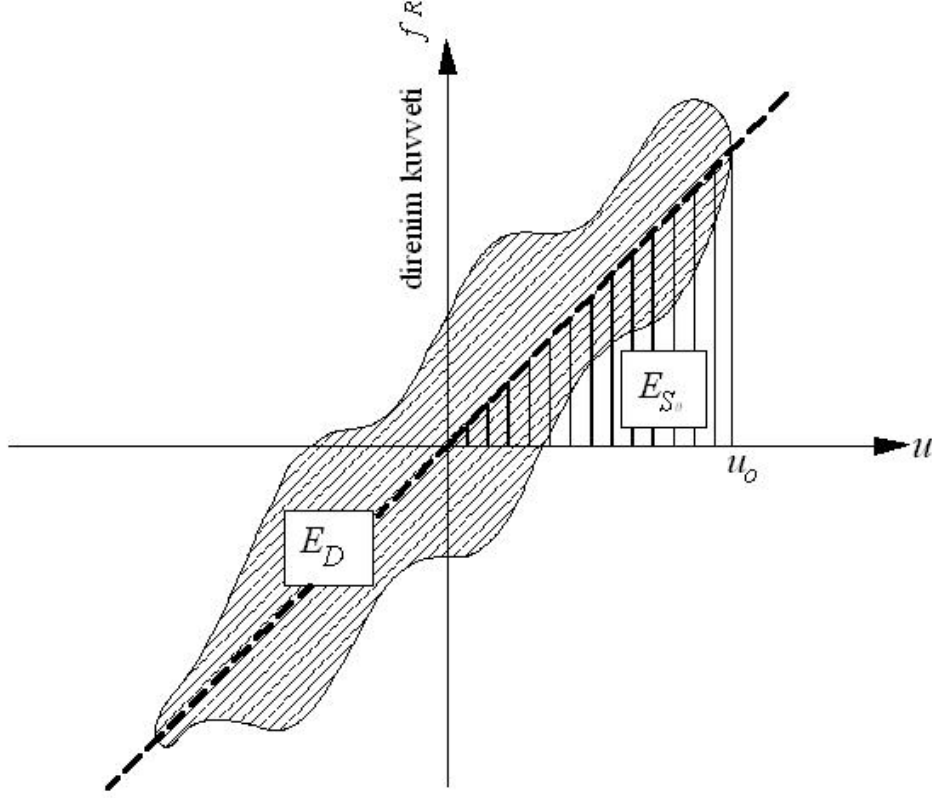
Eşdeğer viskoz sönümün en basit tanımı; sistemin doğal frekansı olan ω_n e eşit bir zorlama frekansına (ω) sahip harmonik bir kuvvetle tahrik edilen bir sistemin ölçülen cevabı üzerine temellendirilmiştir. Eşdeğer sönüm oranı ξ_{eq} eşitlik (Ek12.31)' den u_0 ve $(u_{st})_0$ in ölçülen değerlerinin kullanımı ile hesaplanır. Bu, deneylerdeki tüm enerji sönümleyici mekanizmaları hesaba kattığı için eşdeğer sönümdür.

Eşdeğer viskoz sönümün belirlenmesi için en yaygın metot, gerçek yapının bir titreşim turunda (çevriminde) sönümlenen enerjinin, eşdeğer viskoz sönüm durumunda sönümlenen enerjiye eşitlenmesidir. Gerçek bir yapı için, u_0 yerdeğiştirme genlikli çevrimsel yükleme altındaki deneyden elde edilen yük-yerdeğiştirme ilişkisi belirlenir; keyfi bir şeklin böylesi bir ilişkisi şematik olarak Şekil Ek12.14' de gösterilmiştir. Gerçek yapıda sönümlenen enerji hysteresis döngüsü ile çevrili E_D alanı ile verilir. Yapıdaki gerçek sönüm enerjisinin (Ek12.35) eşitliğinde verilen viskoz sönümde sönümlenen enerji denkleminde eşitlenmesi ile yapıdaki gerçek sönüm viskoz sönüm cinsinden tariflenir. Buradan eşdeğer viskoz sönüm oranı bulunur ve izleyen şekilde verilir:

$$E_D = \pi c \omega u_0^2 = 2 \pi \xi_{eq} \frac{\omega}{\omega_n} k u_0^2 \quad (\text{Ek12.49})$$

$$E_D = 4\pi \xi_{eq} \frac{\omega}{\omega_n} E_{S_0} \quad (\text{Ek12.50})$$

$$\xi_{eq} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\omega / \omega_n} \frac{E_D}{E_{S_0}} \quad (\text{Ek12.51})$$



Şekil Ek12.14 Yapıdaki gerçek sönüm enerjisi

Burada $E_{S_0} = k \frac{u_0^2}{2}$ şekil değiştirme enerjisi olup deneyle elde edilmiş olan k rijitliğinin kullanımıyla hesaplanır. Şekil Ek12.14' deki yük-şekil değiştirme eğrisinin verildiği deney $\omega = \omega_n$ için yapılmalıdır; bu durumda sistem sönüme karşı en çok hassastır. Bu durumda (Ek12.51) eşitliliği izleyen şekli alır:

$$\xi_{eq} = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_{S_0}} \quad (\text{Ek12.52})$$

$\omega = \omega_n$ testinden belirlenen sönüm oranı ξ_{eq} diğer tahrik frekanslarında doğru olmayacaktır, fakat bu tatmin edici bir yaklaşım olacaktır.

Yaygın olarak kabul edilmektedir ki bu prosedür çok serbestlik dereceli sistemlerdeki sönümü modellemeye de genişletilebilir. Sistemin her bir doğal titreşim modunda viskoz sönümde sönümlenen enerji ile gerçekte sönümlenen enerji birbirlerine eşitlenerek sistemin her bir doğal modu için bir eşdeğer sönüm oranı tayin edilir.

Burada eşdeğer viskoz sönüm kavramı tüm yapı üzerinde lineer elastik limit dâhilinde kalan genliklerde titreşen sistemlerle sınırlandırılmıştır. Bazı araştırma çalışmalarında inelastik şekil değiştirmelerde sönümlenen enerji de eşdeğer viskoz sönüm olarak modellenmiştir. Bununla birlikte kuvvetli depremler esnasında ortaya çıkması beklenen büyük elastik olmayan şekil değiştirmeler için bu idealleştirme genellikle tatmin edici değildir.

Ek12.10 Sönümü Viskoz Olmayan Sistemler

Ek12.10.1 Hız Bağımsız Sönüm

Yapısal metaller üzerindeki deneyler göstermektedir ki malzemenin bir çevrimsel şekil değiştirmesinde içsel olarak sönümlenen enerji esasında çevrimsel frekanstan bağımsızdır. Benzer olarak yapılar üzerindeki zorlanmış titreşim testleri göstermektedir ki eşdeğer viskoz sönüm oranı kabaca tüm doğal modlar ve frekanslar için aynı alınabilir. Böylece bu tip sönüm hız bağımsız lineer sönüm olarak adlandırılır. İç sönümün bu mekanizması için kullanılan diğer terimler yapısal sönüm, katı sönüm ve hysteretic sönümdür. Bu terimlerin kullanılması tercih edilmemektedir. Çünkü ilk ikisinin özel bir anlamı yoktur, üçüncüsü ise birkaç anlama gelebilen kafa karıştırıcı bir ifadedir. Çünkü enerji sönümleyen tüm malzemeler ya da yapısal sistemler için hysteresis bir karakteristiktir. Hız bağımsız sönüm plastik şekil değiştirme, yerel plastik şekil değiştirme, kristal plastisitesi ve görünen elastik limit dâhilindeki gerilmelerin aralığında plastik akış yüzünden statik hysteresis ile beraberdir. Mikroskobik ölçekte, kristaller dahilindeki gerilme dağılışı ve bu kristallerin sınır kesişimlerindeki gerilme konsantrasyonu, ortalama (makroskobik) gerilmenin elastik gerilme limitinin oldukça aşağısında olması durumunda bile yerel plastik şekil değiştirmeye sebep olacak büyüklükte yerel gerilmeler üretir. Sönüm mekanizması makroskobik plastik şekil değiştirmelerdeki enerji sönümünü kapsamaz. Böylesi enerji sönümü yük f_s ve şekil değiştirme u arasındaki nonlineer bir ilişki ile ele alınır. ω frekansındaki harmonik hareket esnasında ortaya çıkan hız bağımsız lineer sönümü temsil etmek için kullanılabilecek en basit metot sönüm kuvvetinin hızla orantılı, frekansla ters orantılı olduğunu kabul etmektir.

$$f_D = \frac{\eta k}{\omega} \dot{u} \quad (\text{Ek12.53})$$

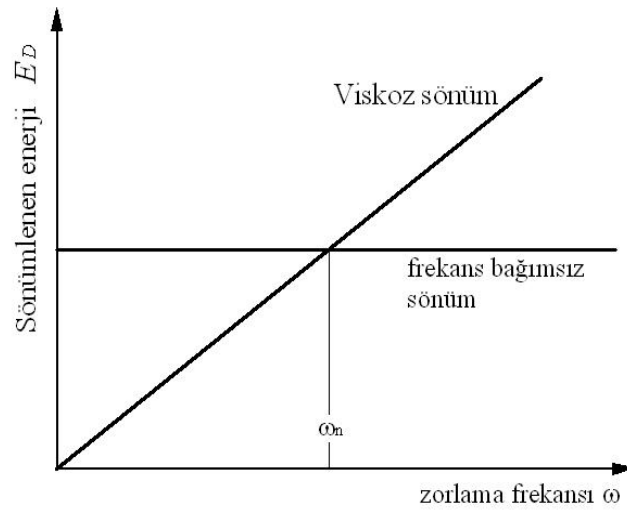
Bu durumda hız bağımsız sönümde c izleyen şekli alır:

$$c = \frac{\eta k}{\omega} \quad (\text{Ek12.54})$$

Burada k sistemin rijitliği η malzeme sönüm katsayısıdır. Dolayısıyla ω frekansındaki titreşimin bir çevrimindeki sönümlenen enerji ω dan bağımsızdır ve Şekil Ek12.15' de gösterilmiştir.

$$E_D = \pi \eta k u_0^2 \quad (\text{Ek12.55})$$

Bunun tersine viskoz sönümde sönümlenen enerji Şekil Ek12.15' de gösterildiği gibi kuvvetin frekansı ile lineer olarak artar.



Şekil Ek12.15 Viskoz sönümde ve hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji

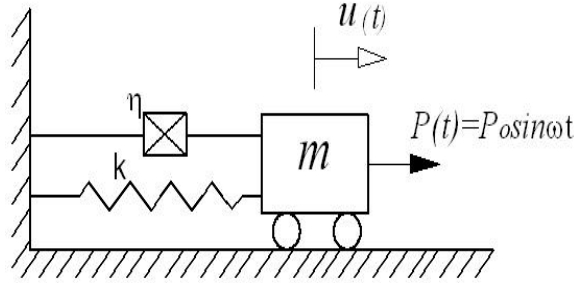
Hız bağımsız sönüm, eğer tahrik harmonik ise ve sistemin sadece kararlı hal cevabı ile ilgileniliyorsa, kolaylıkla tariflenebilir. Bu sönüm mekanizmasını zaman bölgesine dönüştürmekte zorluklar ortaya çıkar. Bu nedenle bu sönüm, analizin frekans bölgesinde yapılması durumunda çok faydalıdır.

Ek12.11 Harmonik Kuvvet Altında Kararlı Hal Cevabı

Hız bağımsız lineer sönümlü tek serbestlik dereceli bir sistemin harmonik hareketini veren yönetici eşitlik (Ek12.25)' de sönüm teriminin (Ek12.53) ile değiştirilmesi ile elde edilen ifadedir.

$$m\ddot{u} + \frac{\eta k}{\omega}\dot{u} + ku = p(t) \quad (\text{Ek12.56})$$

Bu eşitliğin matematiksel çözümü keyfi bir $P(t)$ için oldukça komplekstir. Burada sinüsoidal zorlama fonksiyonu yüzünden ortaya çıkan kararlı hal durumu göz önüne alınacaktır.



Şekil Ek12.16 Hız bağımsız sönümlü tek serbestlik dereceli sistem

Bu zorlama kuvveti izleyen şekildedir:

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (\text{Ek12.57})$$

Bu zorlama kuvveti altındaki yerdeğiştirme fonksiyonu $u(t)$ nin kararlı hal hareketi izleyen şekilde ortaya çıkar:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \phi) \quad (\text{Ek12.58})$$

Genlik u_0 ve faz açısı ϕ izleyen şekilde verilir:

$$u_0 = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + \eta^2}} = \frac{u_{st}}{\sqrt{[1 - (\omega / \omega_n)^2]^2 + \eta^2}} \quad (\text{Ek12.59})$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\eta}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \quad (\text{Ek12.60})$$

Bu sonuçlar, (Ek12.28) ve (Ek12.30) eşitliklerindeki viskoz sönüm oranının (Ek12.53) eşitliği ile verilen hız bağımsız sönümle ilişkili sönüm kuvvetini yansıtacak şekilde değiştirilmesi ile elde edilir. Yani açıkça ifade etmek gerekirse, ξ büyüklüğü

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{\eta k / \omega}{2 m \omega_n} = \frac{\eta}{2 (\omega / \omega_n)} \quad (\text{Ek12.61})$$

ile değiştirilir. Dolayısıyla bu durumda viskoz sönümde sönümlenen enerji ile hız bağımsız sönümde sönümlenen enerji ve sönüm kuvvetleri aynı olacaktır. Sistemin doğal frekansı ile zorlama frekansının eşit ($\omega = \omega_n$) olması durumunda (Ek12.61) eşitliği izleyen şekilde ifade edilir:

$$\eta = 2 \xi \quad (\text{Ek12.62})$$

Şekil Ek12.17' de hız bağımsız sönüm için düz çizgilerle tariflenen dinamik büyütme faktörü

$$R_d = \left(\frac{u_0}{u_{st}} \right) \text{ ve } \phi \text{ faz açısının, } \frac{\omega}{\omega_n} \text{ frekans oranının değişimine karşı çizimleri sönüm katsayısı}$$

$\eta = 0$, $\eta = 0.2$ ve $\eta = 0.4$ için verilmiştir. Şekil Ek12.17 deki kesikli çizgiler eşdeğer viskoz

sönüm için dinamik büyütme faktörü ve faz açısının, $\frac{\omega}{\omega_n}$ oranının değişimine karşı

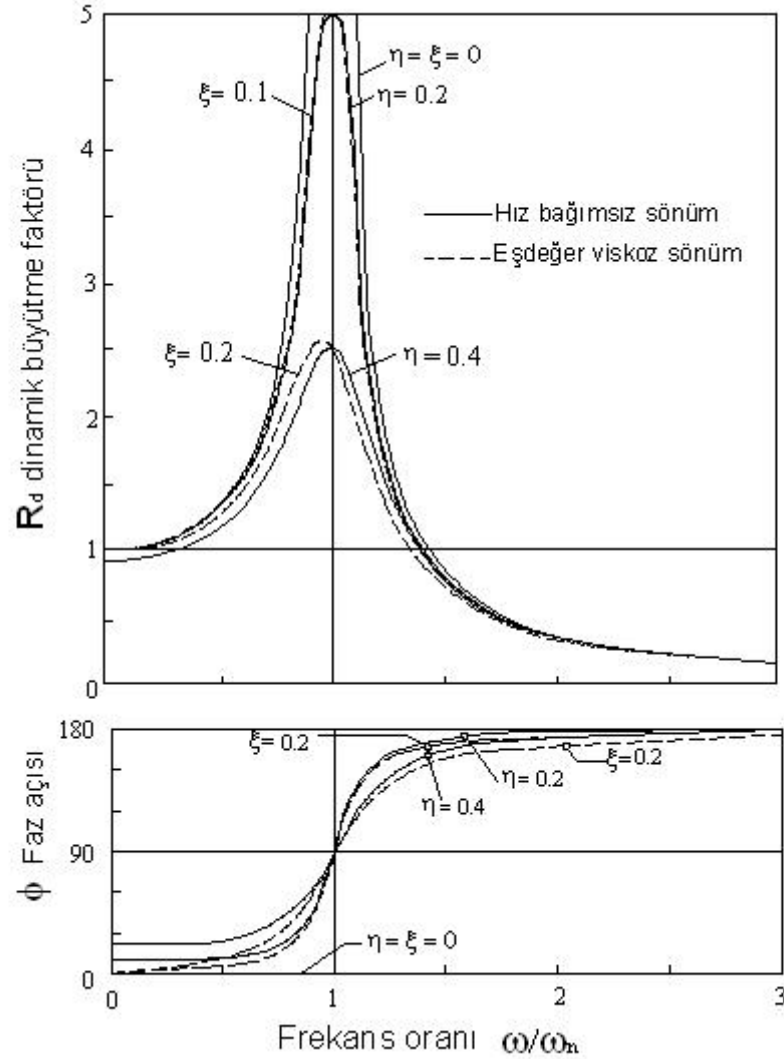
çizimlerini, $\xi = 0$, $\xi = 0.1$ ve $\xi = 0.2$ değerleri için temsil etmektedir. Hız bağımsız sönüm için eşdeğer viskoz sönüm katsayısı kısım Ek12.12' de tariflenecektir. Bu sonuçların Şekil Ek12.17' de viskoz sönüm için elde edilenlerle karşılaştırılması sonucunda iki farklılık ortaya çıkar.

1. Hız bağımsız sönüm durumunda maksimum genlik $\omega = \omega_n$ de ortaya çıkar $\omega < \omega_n$ de değil
2. $\omega = 0$ için faz açısı $\phi = \tan^{-1} \eta$ olup viskoz sönümde bu sıfırdır.

Bu ifade etmektedir ki hız bağımsız sönümlü hareket zorlama fonksiyonu ile hiçbir zaman aynı fazda olmaz.

Hız bağımsız sönümlü zorlanmış titreşim ve viskoz sönümlü zorlanmış titreşimdeki bu farklılıklar önemli değildir. Fakat bunlar fiziksel verilerin uyuşturulmasında

(eşleştirilmesinde) bazı zorlukların kaynağıdır. Çoğu sönümlü titreşimde sönüm viskoz değildir ve onun gerçek karakteristiğini bilmeden öyle olduğunu kabul etmek bir hata kabulüdür. Bir sonraki kısımda gerçek sönüm hız bağımsız olduğunda bu hatanın küçük olduğu gösterilecektir.



Şekil Ek12.17 Hız bağımsız sönüm ile eşdeğer viskoz sönümün karşılaştırılması

Ek12.12 Eşdeğer Viskoz Sönüm Kullanımı ile Çözüm

Bu kısımda hız bağımsız sönümlü bir sistemin kararlı hal harmonik cevabı için bir yaklaşık çözüm, bu sönüm mekanizması bir eşdeğer viskoz sönüm ile modellenerek elde edilecektir. Hız bağımsız sönümde sönümlenen enerjiyi, viskoz sönümde sönümlenen enerji ile ifade

etmek için $\omega = \omega_n$ durumunda enerji eşitlikleri (Ek12.55) ve (Ek12.35) nin eşitlenmesi ile eşdeğer viskoz sönüm kat sayısı izleyen şekilde bulunur.

$$\pi \eta k u_0^2 = 2\pi \xi_{eq} k u_0^2 \quad (\text{Ek12.63})$$

$$\xi_{eq} = \frac{\eta}{2} \quad (\text{Ek12.64})$$

Bu ξ_{eq} değeri, (Ek12.26), (Ek12.28) ve (Ek12.30)' deki ξ yerine konulursa sistem cevabı elde edilir. Sonuç genlik u_0 ve faz açısı ϕ Şekil Ek12.17' deki kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Bu yaklaşık çözüm kesine $\omega = \omega_n$ de uyar. Çünkü bu ξ_{eq} i seçmede kullanılan kriterdir.

Geniş bir tahrik frekans aralığı üzerinde yaklaşık çözümün birçok mühendislik uygulamaları için kâfi ölçüde doğru olduğu görülür. Böylece (Ek12.56) eşitliği (Bu eşitliğin çözümü keyfî bir kuvvet $P(t)$ için zordur: Çünkü değişik ω frekanslarının çok sayıda harmonik bileşenlerini içerir.) daha basit bir eşitlik olan (Ek12.25) eşitliği ile değiştirilebilir.

¹⁰Ek13 Periyodik Zorlamalar Altında Titreşimler

Ek13.1 Fourier Serisi

Harmonik zorlamalar etkisinde hareketin hesaplanabilmesi ve süperpozisyon ilkesi, herhangi bir periyodik zorlama altında da titreşimlerin hesaplanabilmesine olanak sağlar. Bu yaklaşımının dayandığı temel, periyodik bir fonksiyonun ne kadar karmaşık olursa olsun, birçok (gerekirse sonsuz) sayıda harmonik fonksiyonun bileşimi olarak ifade edilebilmesidir. Bu seri açılımına göre, T periyodlu bir $F(t)$ fonksiyonu,

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\Omega_i t) + b_i \sin(\Omega_i t) \quad (\text{Ek13.1})$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada F_0 , $F(t)$ fonksiyonunun bir periyodluk zaman dilimindeki değerlerinin ortalaması olup,

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (\text{Ek13.2})$$

denkleminde hesaplanabilir.

Açılımda kullanılan frekanslar, fonksiyonun periyoduna bağlıdır. Temel frekans olarak adlandırılan Ω_1

$$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{Ek13.3})$$

olarak tanımlanır ve açılımda kullanılacak en küçük frekansı temsil eder. Açılımın T periyodlu bir fonksiyonu temsil edebilmesi için, kullanılacak diğer frekansların, bu temel frekansın tam sayı bir katı olması gerekir. Dolayısıyla kullanılacak frekanslar genel olarak, $i=1, 2, 3, \dots$ değerleri için,

$$\Omega_1 = i \frac{2\pi}{T} \quad (\text{Ek13.4})$$

bağıntısıyla belirlenir.

¹⁰ Ek 13 Yerlici ve Luş (2007) tan alınmıştır.

Fourier açılımını mümkün kılan, bu frekanslara sahip harmonik terimlerin, bir periyodluk zaman dilimi içinde birbirilerine dik olmalarıdır. Bir başka deyişle açılımdaki harmonik fonksiyonlar, iki farklı frekans Ω_i ve Ω_j için,

$$\int_0^T \cos(\Omega_i t) \cos(\Omega_j t) dt = 0 \quad (\text{Ek13.14a})$$

$$\int_0^T \sin(\Omega_i t) \sin(\Omega_j t) dt = 0 \quad (\text{Ek13.14b})$$

ve herhangi iki frekans için de,

$$\int_0^T \cos(\Omega_i t) \sin(\Omega_j t) dt = 0 \quad (\text{Ek13.15})$$

bağıntısını sağlarlar. Frekansların aynı olduğu durumda ise,

$$\int_0^T \cos^2(\Omega_i t) dt = \int_0^T \sin^2(\Omega_i t) dt = \frac{T}{2} \quad (\text{Ek13.16})$$

olur.

Diklik koşulları olarak adlandırılan bu sonuçlar sayesinde, Fourier açılımında bulunan harmonik fonksiyonların genlikleri olan a_i ve b_i değerleri hesaplanabilir. Örneğin, herhangi bir a_j değerini hesaplamak için, (Ek13.1) denkleminin her iki yanı $\cos(\Omega_j t)$ ile çarpılıp, elde edilen ifadenin $0 - T$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_0^T \cos^2(\Omega_j t) dt = \int_0^T \sin^2(\Omega_j t) dt = 0 \quad (\text{Ek13.17})$$

olacağından,

$$\begin{aligned} \int_0^T F(t) \cos(\Omega_j t) dt &= + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \{a_i \cos(\Omega_i t) + b_i \sin(\Omega_i t)\} \cos(\Omega_j t) dt \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_0^T \cos(\Omega_i t) \cos(\Omega_j t) dt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^T \sin(\Omega_i t) \cos(\Omega_j t) dt = a_j \frac{T}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Yani aranan a_j değeri, $a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(\Omega_j t) dt$ denklemiyle hesaplanabilir.

Benzer bir işlem, sinüs terimlerinin genliklerini bulmak için de yapılabilir. Dolayısıyla

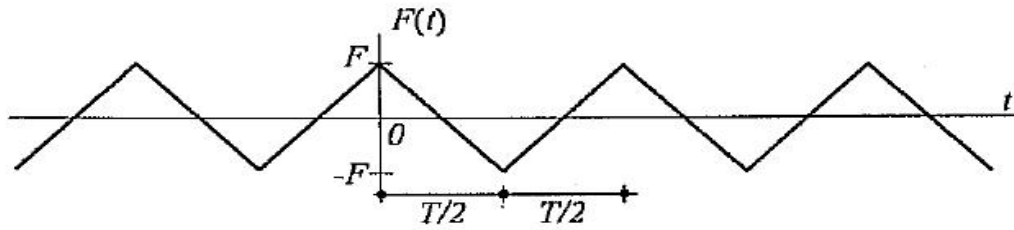
harmonik terimlerin genliklerini bulmakta kullanılacak genel denklemler, $i=1, 2, 3, \dots$ değerleri için, aşağıdaki gibidir:

$$a_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(\Omega_i t) dt \quad (\text{Ek13.18a})$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(\Omega_i t) dt \quad (\text{Ek13.18b})$$

Örnek

Şekil Ek13.1’ de, genliği F , periyodu da T olan bir fonksiyon görülmektedir.



Şekil Ek13.1 F genlikli ve T periyodlu bir fonksiyon

Bu fonksiyon $0 \leq t \leq T$ aralığında

$$F(t) = \begin{cases} \frac{4F}{T} \left(\frac{T}{4} - t \right), & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \text{ için} \\ \frac{4F}{T} t - 3F, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \text{ için} \end{cases}$$

Denklemleriyle tanımlandığından, Fourier açılımındaki katsayılar,

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt = \frac{4F}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{4} - t \right) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \left(\frac{4F}{T} t - 3F \right) dt = 0$$

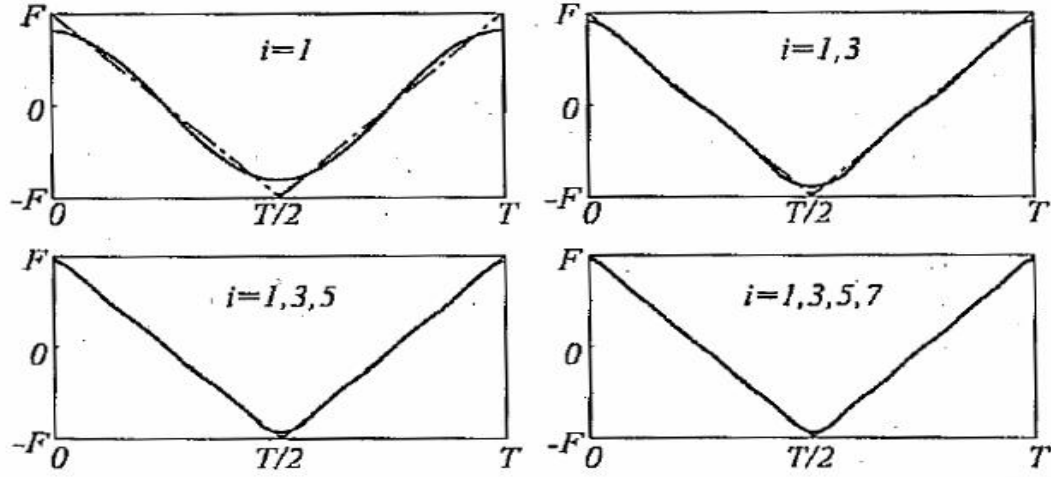
$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(\Omega_i t) dt = \begin{cases} 0, & i \text{ çift sayı ise} \\ \frac{8F}{i^2 \pi^2} & i \text{ tek sayı ise} \end{cases}$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(\Omega_i t) dt = 0$$

olarak bulunur. Dolayısıyla Şekil Ek13.1’ deki fonksiyon,

$$F(t) = \frac{8F}{\pi^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{6\pi}{T}t\right) + \frac{1}{25} \cos\left(\frac{10\pi}{T}t\right) + \dots \right]$$

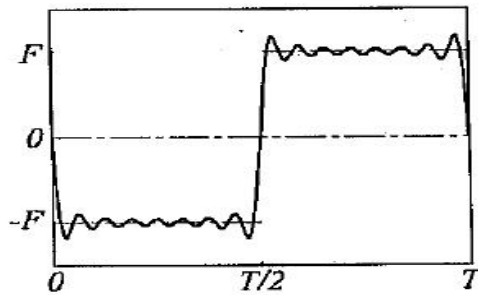
Şeklinde temsil edilebilir. Bu denklemden anlaşılacağı gibi, yüksek frekansların katkıları giderek düşmekte ve sayısal olarak Fourier açılımına katkıları, istenen hassasiyete göre belli bir noktadan sonra ihmal edilebilir hale gelmektedir. Bu örnekte incelenen fonksiyon, temel frekanslı kosinüs eğrisine büyük benzerlik gösterdiği için, çok fazla terime gerek duymadan yeterli hassasiyet elde edilebilir. İlk dört terime kadar elde edilen yakınsaklık, Şekil Ek13.3' de veilen grafiklerde görülmektedir.



Şekil Ek13.2 Şekil Ek13.1'deki fonksiyon için, Fourier açılımının yalnız (a) ilk, (b) ilk iki, (c) ilk üç, (d) ilk dört terimi kullanılarak elde edilen yakınsaklık

Ek13.2 Gibbs Olgusu

Fourier serisi ile temsil edilen fonksiyon veya türevlerinde süreksizlik olması durumunda, süreksizlik bölgesinde sorun yaşanır. Örneğin Şekil Ek13.3' de görülen durumda ve benzeri durumlarda Fourier açılımı, süreksizlik noktası yakınlarında belirgin dalgalanmalar gösterir ve bu noktada, noktanın her iki yanındaki değerlerin ortalamasına eşit olur. Açılımda kullanılan terimlerin sayısını arttırmak, dalgalanmayı süreksizlik noktasının çok yakınlarına hapsedmekle birlikte, tam olarak geçiremez. Bu davranışa **Gibbs olgusu** denir ve sayıca çok süreksizlik noktası olan fonksiyonlarda sonuçların hassasiyetini etkiler.



Şekil Ek13.3 Gibbs olgusu

Ek13.3 Hareketin Hesaplanması

Periyodik yüklemeler Fourier açılımı ile temsil edildikten sonra, bu etkiler altında oluşacak kütle yerdeğiştirmeleri süperpozisyon kullanılarak hesaplanır. Bu durumda, hem sinüs, hem de kosinüs terimleri ile çalışmak yerine, serideki terimleri bunlardan yalnız biri cinsinden ifade etmek kolaylık sağlayabilir. Fourier açılımına Ω_i frekansının katkısı olan,

$$a_i \cos(\Omega_i t) + b_i \sin(\Omega_i t)$$

terimi, daha önce de görüldüğü gibi (Ek13.2.3) denklemi yardımıyla,

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b, \text{ (Yerlici, Luş, 2007. syf:34)} \quad (\text{Ek13.2.3})$$

$$F_i \cos(\Omega_i t - \phi_{F_i})$$

şeklinde yazılırsa, burdaki genlik ve faz açısını,

$$F_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \text{ ve } \tan \phi_{F_i} = b_i / a_i$$

denklemleriyle hesaplamak ve Fourier açılımını,

$$F(t) = F_0 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \cos(\Omega_i t - \phi_{F_i}) \quad (\text{Ek13.19})$$

biçiminde kurgulamak mümkündür.

Yüklemeyi birçok harmonik bileşen cinsinden ifade ettikten sonra kararlı titreşimler sırasında görülecek yerdeğiştirmeler, önceki bölümde bahsedildiği gibi,

$$q(t) = Q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \cos(\Omega_i t - \phi_{F_i} - \phi_i) \quad (\text{Ek13.20})$$

denklemleri kullanılarak hesaplanabilir. Bu ifadedeki Q_i genlikleri ve ϕ_i açılarının hesabı, yüklemenin niteliğine bağlı olarak değişir. Örneğin, dış kuvvet etkisinde oluşacak hareketin hesabında (Ek13.21), mesnet hareketi etkisinde oluşacak göreceli yerdeğiştirmelerin hesabında ise (Ek13.22) denklemleri kullanılır. Yüklemelerin açılımındaki F_0 terimi ise, zaman içinde sabit kalan bir etkidir. Dolayısıyla, geçici titreşimler ihmal edilirse, Q_0 yerdeğiştirmesi statik hesapla bulunabilir.

$$Q = +\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\zeta\alpha)^2}} \quad (\text{Ek13.21a})$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{B_2 / Q}{B_1 / Q} = \frac{2\zeta\alpha}{1-\alpha^2} \quad (\text{Ek13.21b})$$

$$U = +\sqrt{B_1^2 + B_2^2} = Y_s \frac{\alpha^2}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + (2\zeta\alpha)^2}} = Y_s \alpha^2 D(\alpha) \quad (\text{Ek13.22a})$$

$$\tan \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{B_2 / Q}{B_1 / Q} = \frac{2\zeta\alpha}{1-\alpha^2} \quad (\text{Ek13.22b})$$

Ek13.4 Geçici Titreşimlerin Etkileri

Doğada karşılaşılan etkilerin tam anlamıyla periyodik olmaları, yani kendilerini sürekli tekrarlamaları, aslında çok olası değildir. Kendini bir ölçüde tekrarlayan yüklemeler, sisteme yalnızca sınırlı bir süre etkiseler de, eğer etkiye süreleri sistem periyodundan yeterince fazla ise, bunlar periyodikmiş gibi modellenip oluşturacakları tepkiler hesaplanabilir. Daha önce de bahsedildiği gibi bu tip durumlarda hesabı kolaylaştıran, sistemde oluşacak geçici titreşimlerin kısa sürede söneceği ve esas olarak etkisi hissedilecek tepkilerin kararlı titreşimler sırasında oluşacağı varsayımdır. Dolayısıyla bu yaklaşımın geçerliliği, yükün etkiye süresine olduğu kadar, sistemin periyoduna ve sistemdeki sönüm oranının büyüklüğüne de bağlıdır.

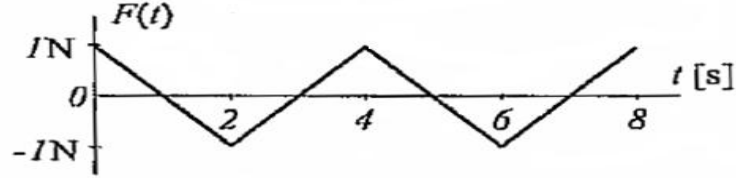
Bazı durumlarda, yalnızca kararlı titreşimleri göz önüne almak yeterli olmayabilir. Geçici titreşimleri de hesaba katmak üzere, serbest titreşimler için (Ek13.23) denkleminde verilen çözümü kullanmak gerekir ve yerdeğiştirme,

$$q(t) = q_g(t) + q_z(t) = e^{-\zeta\omega t} (C_1 \cos \hat{\omega}t + C_2 \sin \hat{\omega}t) + Q_0 + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \cos(\Omega_i t - \phi_{F_i} - \phi_i) \quad (\text{Ek13.23})$$

olur. Buradaki C_1 ve C_2 katsayıları, kütlenin ilk andaki yerdeğiştirme ve hızına bağlı olarak hesaplanabilir.

Örnek

Kütlesi 6 kg, yay sabiti 120 N/m ve sönüm oranı $\zeta = 0,05$ olan TSD bir sisteme, Şekil Ek 13,4' de görüldüğü gibi kendini tekrarlayan bir yük etkirse, oluşacak kütle yerdeğiştirmeleri yukarıda bahsedilen yaklaşımla hesaplanabilir.



Şekil Ek13.4 Kısa süreli etkiyen üçgensel yük

Şekil Ek 13,4' deki yükleme Fourier serisi ile ifade edilirse, Şekil Ek13.3' de görüldüğü gibi serinin ilk dört terimini kullanarak oldukça yeterli bir sonuca varılabilir. Ancak bu durumda yükleme sadece 8 saniye süreceğinden, sistemdeki geçici titreşimleri ihmal etmek pek doğru olmaz. Üstelik yükün etkisi sona erdikten sonraki hareketi de izlemek istenebilir. Dolayısıyla hareket denklemleri, kuvvet periyodunun 4 saniye olduğu göz önünde bulundurularak

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i} \cos\left(\frac{i\pi}{2}t\right) \quad (0 \leq t \leq 8 \text{ için})$$

ve

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = 0 \quad (t > 8 \text{ için})$$

şeklinde kurulabilir.

Çizelge Ek13.1 Şekil Ek13.4 deki kuvvetin Fourier serisindeki bileşenleri için hesaplanan yerdeğiştirme genlikleri ile faz açıları

F_i [N]	Ω_i [rad/s]	α_i	$D(\alpha_i)$	Q_i [mm]	ϕ_i [rad]
$8/\pi^2$	$\pi/2$	0,351	1,14	7,7	0,04
$8/(9\pi^2)$	$3\pi/2$	1,054	6,555	4,92	2,379
$8/(25\pi^2)$	$5\pi/2$	1,756	0,478	0,13	3,058
$8/(49\pi^2)$	$7\pi/2$	2,459	0,198	0,03	3,093

Bu durumda çözüm, $0 \leq t \leq 8$ aralığında,

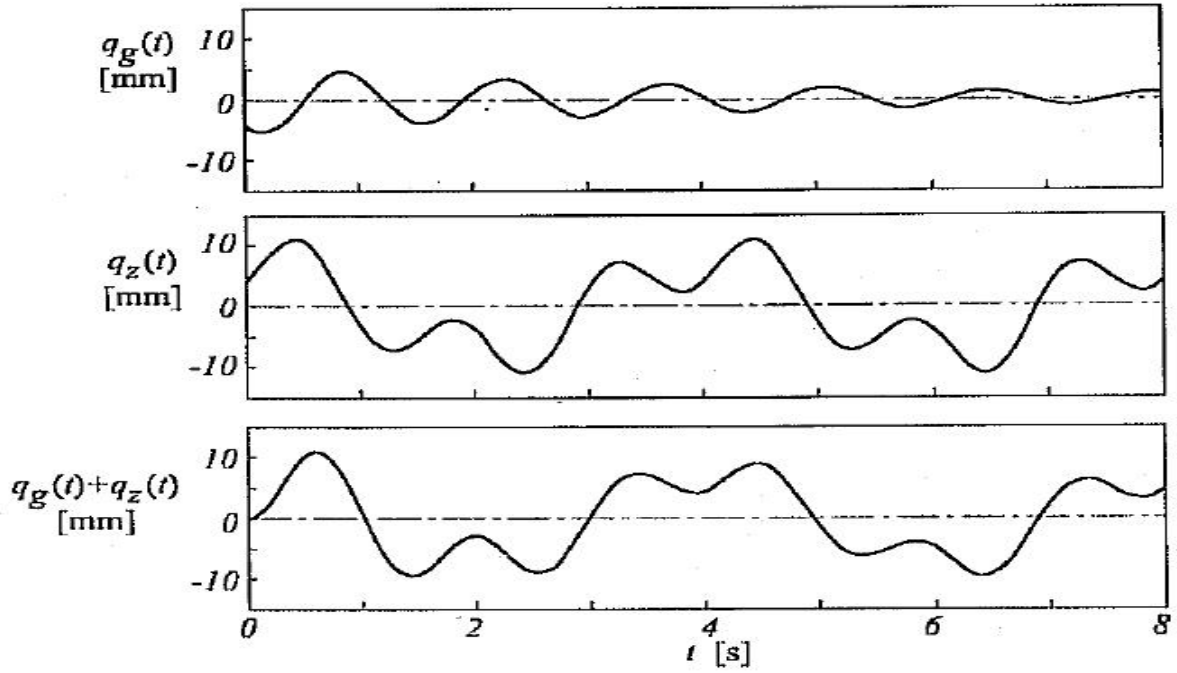
$$q(t) = q_g(t) + q_z(+) = e^{\zeta\omega t} (C_1 \cos \hat{\omega}t + C_2 \sin \hat{\omega}t) + \sum_{i=1}^4 Q_i \cos(\Omega_i t - \phi_i)$$

olur. Dış kuvvet altında oluşacak zorlanmış titreşimlerin genlikleri ve faz açıları, sistemin doğal frekansı $\omega = \sqrt{120/6} = 4,472 \text{ rad/s}$ için (Ek13.21) denklemdeki ifadeler yardımıyla hesaplanırsa, Çizelge Ek13.1' deki değerler elde edilir.

Hesaplanan bu değerler ile sistemde zorlanmış titreşimlerden dolayı görülecek yerdeğiştirmeler, mm cinsinden,

$$q_z(+) = 7,70 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 0,040t\right) + 4,92 \cos\left(\frac{3\pi}{2}t - 2,379\right) \\ + 0,13 \cos\left(\frac{5\pi}{2}t - 3,058\right) + 0,03 \cos\left(\frac{\pi}{2}t - 3,093\right)$$

bulunur. Burada görüldüğü gibi sistemdeki yüksek frekanslı titreşimlerin yerdeğiştirmeye katkısı, neredeyse ihmal edilebilecek kadar küçüktür. Benzer durumlarla genelde küçük frekansa (yüksek periyoda) sahip büyük yapılarda sıkça karşılaşıldığından, uygulamada fazla hassasiyet gerektirmeyen hesaplarda yüksek frekanslı yüklerin etkileri ihmal edilebilir.



Şekil Ek13.5 Kuvvetin etkidiği süre içinde kütlein geçici, zorlanmış ve toplam yerdeğiştirmeleri (mm cinsinden)

Eğer $t = 0$ anında kütle denge konumunda hareketsiz duruyorsa, başlangıç koşullarından,

$$q(0) = 0 = q_g(0) + q_z(0) = C_1 + 3,98$$

$$\dot{q}(0) = 0 = \dot{q}_g(0) + \dot{q}_z(0) = -0,224C_1 + 4,472C_2 + 16,595$$

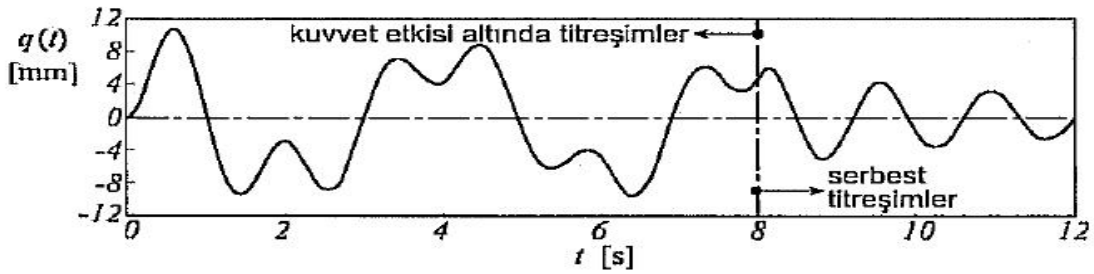
denklemleri bulunur. Buradan da çözüm için aranan katsayılar,

$$C_1 = -3,98 \text{ mm} \text{ ve } C_2 = -3,91 \text{ mm}$$

olarak hesaplanır. Dolayısıyla kütlenin, $0 \leq t \leq 8 \text{ s}$ aralığında yapacağı yerdeğiştirmeler, mm cinsinden,

$$q(t) = e^{-0,224t} (-3,98 \cos(4,467t) - 3,91 \sin(4,467t) + 7,70 \cos(\frac{\pi}{2}t - 0,040) + 4,92 \cos(\frac{3\pi}{2}t - 2,379) + 0,13 \cos(\frac{5\pi}{2}t - 3,058) + 0,03 \cos(\frac{\pi}{2}t - 3,093))$$

denklemleri tanımlanır. Şekil Ek13.5' de kuvvetin etkidiği süre içinde oluşan kütle yerdeğiştirmeleri görülmektedir.



Şekil Ek13.6 Kütlenin yerdeğiştirmesinin zamanla değişimi. (mm cinsinden)

Kuvvet etkisinin kalktığı $t = 8 \text{ s}$ anından sonra da kütle serbest titreşimini sürdüreceğinden, $t \geq 8 \text{ s}$ için yerdeğiştirme,

$$q(t) = e^{-\xi\omega(t-8)} (C_3 \cos(\varpi(t-8)) + C_4 \sin(\varpi(t-8)))$$

biçiminde olur. Buradaki C_3 ve C_4 sabitleri de $t = 8 \text{ s}$ anındaki yerdeğiştirme ve hız değerleri kullanılarak bulunur. Bu değerler kuvvet etkisi altında elde edilen çözümden hesaplanırsa, aranan katsayılar,

$$q(8) = 4,84 \text{ mm} = C_3$$

$$\dot{q}(8) = 14,7 \text{ mm/s} = -0,224C_3 + 4,476C_4$$

olarak bulunur. Böylece $t \geq 8 \text{ s}$ için kütle yerdeğiştirmeleri, mm cinsinden,

$$q(t) = e^{-0,224(t-8)} (4,84 \cos(4,467(t-8)) + 3,55 \sin(4,467(t-8)))$$

denklemleri tanımlanır. Şekil Ek13.6' da kütlenin, hem kuvvet etkisi altında hem de daha sonraki yer değıştirmeleri görülmektedir.

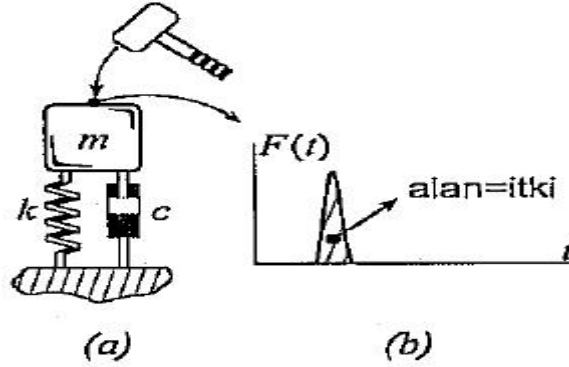
Ek13.5 Genel Yüklemler Etkisinden Titreşimler

Ek13.5.1 İtki

Kuvvetin zamana göre integraline itki denir. Noktasal bir kütle için hareket yasasından yola çıkılırsa, ilk an t_i ve son an t_s için itki ve kütle momentumu arasında,

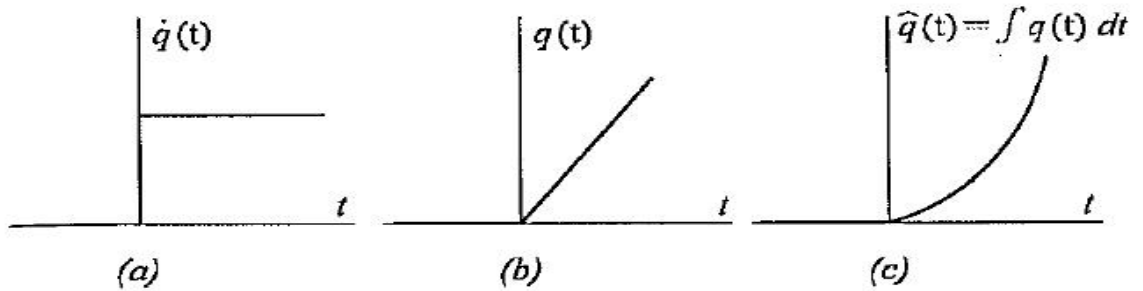
$$\int_{t_i}^{t_s} F(t) dt = \int_{t_i}^{t_s} m\dot{q}(t) dt = m\dot{q}(t) \Big|_{t_i}^{t_s} = m\dot{q}(t_s) - m\dot{q}(t_i) \quad (\text{Ek13.24})$$

ilişkisi vardır; yani kuvvetin itkisi, etkidiği kütle momentumundaki değişime eşittir. Bu denklemden anlaşılacağı gibi, itkinin birimi Ns dir.



Şekil Ek13.7 Darbe ve kütleye etkiyen yük

.Kuvvet kütleye yalnız çok kısa bir süre etkirse, bu tip yükleme darbe denir. Örneğin TSD bir sistemdeki kütle, Şekil Ek13.7a)'daki gibi bir çekiçe vurup, bu sırada kütleye etki eden kuvvet ölçülürse, Şekil Ek13.7b)'de görülen kuvvet-zaman eğrisi elde edilir. Kuvvetin etki süresinin çok kısa olduğu durumlarda, darbenin kütle hareketi üzerindeki etkisini, bir başka deyişle itkiyi, kütle hızında yaratacağı değişikliklerle modellemek mümkündür.



Şekil Ek13.8 Hareketsiz duran bir kütlede (a) ani hız değişimi, (b) ani hız değişiminden sonra görülecek yer değişimi, (c) yer değişiminin integrali

Örneğin Şekil Ek13.7' deki TSD sistemi için (Ek13.24) denklemi, kütleye etkiyen tüm kuvvetler göz önüne alındığında,

$$\int_{t_i}^{t_s} \{F(t) - c\dot{q}(t) - kq(t)\} dt = m\dot{q}(t_s) - m\dot{q}(t_i) \quad (\text{Ek13.25})$$

olur. Dış kuvvetin etki süresinin çok kısa olduğu, örneğin kuvvetin $t = 0$ anından, çok kısa bir süre sonraki $t = 0^+$ anına kadar etkidiği bir durumda, (Ek13.25) denklemindeki integral,

$$I - c[q(0^+) - q(0)] - k[\hat{q}(0^+) - \hat{q}(0)] = m[\dot{q}(0^+) - \dot{q}(0)]$$

Halini alır. Burada I , dış kuvvetin itkisi, $\hat{q}$ ise yerdeğiştirme integralini göstermektedir. Şekil Ek13.8' de, $t = 0$ anı ve daha öncesinde hareketsiz duran bir kütlede, ani hız değişiminin kısa bir süre içinde neden olacağı değişimler görülmektedir. Kuvvetin itkisi hızda ani bir değişime yol açsa bile, hızın integrali olan yerdeğiştirme $q(t)$ de ve yerdeğiştirme integrali olan $\hat{q}(t)$ de ani ve büyük değişimlere neden olmaz. Dolayısıyla $q(0^+) \approx q(0) = 0$ ve $\hat{q}(0^+) \approx \hat{q}(0) = 0$ olacağından, ilk anda hareketsiz duran TSD sistemde itkinin etkisi,

$$m[\dot{q}(0^+) - \dot{q}(0)] = I \rightarrow \dot{q}(0^+) = \frac{I}{m} \quad (\text{Ek13.26})$$

ifadesiyle bulunabilir. Yani, hareketsiz duran kütle, darbenin etkisiyle hız kazanır ve sonra da bu ilk hız altında titreşim yapar.

Birim İtki, büyüklüğü $I = 1$ olan ve anlık etkidiği varsayılan itkiye denir. Hareketsiz TSD bir sisteme $t = 0$ anında etkiyen birim itki sonrasında görülecek yerdeğiştirmeler, serbest titreşimi tanımlayan,

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = 0 \quad t \geq 0^+$$

denkleminin,

$$q(0^+) = 0 \text{ ve } \dot{q}(0^+) = \frac{1}{m}$$

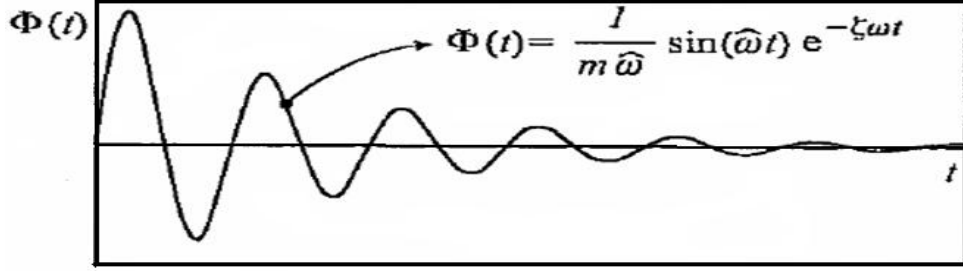
başlangıç koşulları için çözülmesiyle bulunabilir. Bu başlangıç koşulları, hafif sönümlü bir sistem için $q_g(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 \cos \varpi t + C_2 \sin \varpi t)$ denkleminde verilen serbest titreşim çözümünde yerine konursa $t \geq 0^+$ için kütle yerdeğiştirmeleri,

$$q(t) = \Phi(t) = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) e^{-\xi\omega t} \quad (\text{Ek13.27})$$

ifadesiyle tanımlanır. Şekil Ek13.9' da görülen bu özel yerdeğiştirme fonksiyonu $\Phi(t)$ 'ye, *birim itki tepkisi* denir. Öte yandan $t=0$ için $\Phi(0)=0$ olduğundan ve zaten $0^+ - 0 \approx 0$ kabul edildiğinden, (Ek13.27) denklemindeki ifade $t \geq 0$ için geçerli sayılır ve $t=0$ ile $t=0^+$ arasında fark gözetilmez. Eğer sistemde sönüm mekanizması yoksa, birim itki etkisiyle oluşacak yerdeğiştirmeler, hareket denklemini $c=0$ için çözerek bulunabileceği gibi, aynı zamanda (Ek13.27) denklemini $\xi=0$ olacak biçimde değiştirip, $t \geq 0$ için,

$$\Phi(t) = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t)$$

şeklinde de elde edilebilir.



Şekil Ek13.9 Birim itki tepkisi

Birim itki tepkisi bilinen bir sistemde, I büyüklüğündeki herhangi bir itkiyle oluşacak tepkiler kolayca hesaplanabilir. Sistem doğrusalsa, böyle bir itki etkisinde oluşacak yerdeğiştirmeler, $t \geq 0$ için,

$$Q(t) = I\Phi(t)$$

Bağıntısıyla bulunur. Öte yandan eğer, I itkisi, $t=0$ anı yerine $t=\tau$ anında etkirse, o zaman $t \geq \tau$ için yerdeğiştirmeler, (Ek13.27) denklemindeki ifade zamanda τ kadar kaydırılıp,

$$q(t) = I\Phi(t - \tau) = \frac{I}{m\omega} \sin(\omega(t - \tau)) e^{-\xi\omega(t - \tau)}$$

şeklinde ifade edilir.

Ek13.5.2 Hareket Halindeki Bir Sisteme Etki Eden İtke

Kendi halinde serbest titreşim yapan TSD bir sisteme uygulanan bir itkinin neden olacağı hareket süperpozisyon ilkesiyle hesaplanabilir. Örneğin $t=0$ anındaki yerdeğiştirme $q(0)$ hızı da $\dot{q}(0)$ olan bir sisteme, o anda I büyüklüğünde bir itki etkirse, $t=0^+$ anındaki yerdeğiştirme ve hız,

$$q(0^+) = q(0) \text{ ve } \dot{q}(0^+) = \frac{I}{m} + \dot{q}(0)$$

olur. Bu koşullar (Ek13.28) denkleminde verilen serbest titreşim çözümünde kullanılırsa, buradaki katsayılar,

$$q_g(t) = e^{-\xi\omega t} (C_1 \cos \varpi t + C_2 \sin \varpi t) \quad (\text{Ek13.28})$$

$$C_1 = q(0) \text{ ve } C_2 = \frac{\dot{q}(0) + q(0)\omega\xi}{\varpi} + \frac{I}{m\varpi} \quad (\text{Ek13.29})$$

olarak bulur. Böylece çözüm de, $t=0$ ve $t=0^+$ arasında bir fark gözetmeden, $t \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} q(t) &= e^{-\xi\omega t} \left[q(0) \cos(\varpi t) + \left[\frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\varpi} + \frac{I}{m\varpi} \right] \sin(\varpi t) \right] \\ &= e^{-\xi\omega t} \left[q(0) \cos(\varpi t) + \left[\frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\varpi} + \sin(\varpi t) \right] + \frac{I}{m\varpi} \sin(\varpi t) e^{-\xi\omega t} \right] \\ &= e^{-\xi\omega t} \left[q(0) \cos(\varpi t) + \left[\frac{\dot{q}(0) + \xi\omega q(0)}{\varpi} + \sin(\varpi t) \right] + I\Phi(t) \right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Görüldüğü gibi çözümün ilk kısmı $t=0$ anındaki başlangıç koşullarından, ikinci kısmı da itkinin etkisiyle meydana gelen yerdeğiştirmelerden oluşur. Aynı şekilde herhangi bir $t=\tau$ anında etkiyen bir itki söz konusuysa, önceden serbest titreşim yapmakta olan TSD sistemde görülecek yerdeğiştirmeler, $t \geq \tau$ için,

$$q(t) = e^{-\xi\omega t} \left[q(\tau) \cos(\varpi(t-\tau)) + \left[\frac{\dot{q}(\tau) + \xi\omega q(\tau)}{\varpi} + \sin(\varpi(t-\tau)) \right] + I\Phi(t-\tau) \right] \quad (\text{Ek13.30})$$

denkleminde bulunabilir.

Ek13.6 Mesnet Hareketleri

TSD bir sistemde mesnet hareketleri etkisiyle oluşacak görelî yerdeğiştirmeler için hareket denklemi,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k u(t) = m \ddot{y}_s(t)$$

biçimindedir. Bu denklemdeki yük terimine bakıldığında, $F(t)$ kuvvetinin yerini $m \ddot{y}_s(t)$ teriminin aldığı görülür. Bu durumda,

$$I = \int_{t_i}^{t_s} -m \ddot{y}_s(t) dt$$

olcağından, hareketsiz duran bir sistemde $t = \tau$ anında etki eden çok kısa süreli birim büyüklükteki mesnet ivmesinin yaratacağı etkinin, sisteme $t = \tau$ anında etkiyen ve itkisi $I = -m$ kadar olan bir darbenin etkisi gibi olacağı anlaşılır. Dolayısıyla kütle hareketi, $t \geq \tau^+$ için $u(\tau^+) = 0$ ve $\dot{u}(\tau^+) = -1$ başlangıç koşulları altında serbest titreşim biçiminde olur ve $t \geq \tau$ için görelî yerdeğiştirmeler,

$$u(t) = -\frac{1}{\varpi} \sin(\varpi(t - \tau)) e^{-\xi \varpi(t - \tau)} = -m \Phi(t - \tau) \quad (\text{Ek13.31})$$

denklemleriyle hesaplanır.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi 29.01.1984

Doğum Yeri Kurucaşile / BARTIN

Lise 1998-2002 Bartın Köksal Toptan Yabancı Dil Ağırlıklı Süper Lisesi

Lisans 2002-2007 Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü

Yüksek Lisans 2008-2011 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik Programı

Çalıştığı Kurumlar

2007-2008 Garanti Koza & Alsim Alarko Ortak Girişimi (4. Levent Metro Projesi)

2009-2010 Biskon Yapı A.Ş. (Sapphire Projesi)

2010-2011 TAISEI Inc. (Marmaray Projesi)