

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖZEL FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERE DAYALI BİRLEŞİK BİR TEORİSİ ÜZERİNE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mehmet ÖZAKAN**

Anabilim Dalı : Matematik Mühendisliği

Programı : Matematik Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖZEL FONKSİYONLARIN
TEKİLLİKLERE DAYALI BİRLEŞİK BİR TEORİSİ ÜZERİNE**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mehmet ÖZAKAN
(509071007)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Haziran 2010

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Faruk GÜNGÖR (DOĞUŞ)

**Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Emanullah HİZEL (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Nebi ÖNDER (MSGSU)**

HAZİRAN 2010

Aileme,

ÖNSÖZ

Lisans yıllarımda ilgili çekmeye başlayan özel fonksiyonlar teorisi ile tanışmamı ve bu alanda araştırma yapmamı destekleyen

Sayın Prof.Dr.Faruk Güngör'e başta yüksek lisans eğitimim boyunca almış olduğum derslerde, bana katmış olduğu bilgiler ve sonrasında özel foksiyonların tekilliklere dayalı birleşik bir teorisi üzerine gerçekleştirdiğim tez çalışmamda göstermiş olduğu yardımlarından dolayı teşekkür ediyorum.

Ayrıca değerlendirme komitemde bulunan Sayın Prof. Dr. Emanullah Hizel ve Yrd. Doç. Dr. Nebi Önder'e teşekkürlerimi iletmek istiyorum.

Son düzenlemeleri gerçekleştirmemde bana yardımları dokunan İstanbul Teknik Üniversitesi araştırma görevlisi Sayın Gökhan Güçlü'ye teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans eğitimimin özellikle son yılında çalışmalarımı finansal yönden destekleyen TUBİTAK'ada teşekkürlerimi iletmek istiyorum.

Haziran 2010

Mehmet Özakan

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÖZET.....	xi
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Özel Fonksiyonların Tarihi	1
2. FUCHS DENKLEMLERİ.....	5
2.1 Fuchs Denklemlerinin Sınıflandırması	5
2.1.1 Tekillikler ve Fuchs Denklemleri	6
2.1.1 Düzenli ve Fuchs Tekillikleri	6
2.2 Fuchs Denklemlerinin Tipleri	8
2.2.1 Fuchs Denkleminin Genel Hali ($n+1$)	8
2.2.1.1 Fuchs İnvaryantı	10
2.2.2 Üç Tekil Noktalı Fuchs Denklemi ($n = 2$)	11
2.2.2.1 Riemann-Papperitz Denklemi.....	11
2.2.2.2 Hipergeometrik Denklem	16
2.2.3 Heun Denklemi ($n = 3$)	31
2.3 Konflüent Denklemler.....	32
2.3.1 Konflüent Hipergeometrik Denklem	33
2.3.2 Konflüent Heun Denklemi.....	34
2.4 Otomorfizma Grupları.....	34
2.4.1 Hipergeometrik Denklemin Otomorfizma Grupları	34
2.4.2 Heun Denkleminin Otomorfizma Grupları.....	38
3. FİZİK VE MATEMATİKTE UYGULAMALAR	41
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ.....	53

KISALTMALAR

CP¹	: Riemann Küresi
hE	: Hipergeometrik Denklem
ChE	: Konflüent Hipergeometrik Denklem
BhE	: Bikonflüent Hipergeometrik Denklem
RChE	: İndirgenmiş Konflüent Hipergeometrik Denklem
RBhE	: İndirgenmiş Bikonflüent Hipergeometrik Denklem

ÖZEL FONKSİYONLARIN TEKİLLİKLERE DAYALI BİRLEŞİK BİR TEORİSİ ÜZERİNE

ÖZET

Yüzyıllar boyunca, sayısız medeniyetin gelişime paralel olarak özel fonksiyonlar üzerinde araştırmalar ve çalışmalar sürdürülmüştür. Trigonometri ve logaritma fonksiyonlarıyla başlayan bu gelişim süreci, gamma, beta, zeta fonksiyonlarıyla devam etmiştir. Fuchs denklemleriyle tanışmanın ardından teorik fizik ve uygulamalı matematikte birçok problemin çözümü özel fonksiyonlar modellenbildiği görülmüştür.

Özel fonksiyonların çözümleri, denklemlerinin tekilliklerin türüne ve konuma göre şekillenmektedir. Bu sebepten ötürü, tekillere dayalı yaklaşımları ve teorileri incelemek, sınıflandırmak gerekmektedir.

Birinci bölümde, özel fonksiyonların tarih içerisinde ortaya çıkışı, gelişimi ve sınıflandırmalarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tekillikler ve Fuchs denklemlerinin sınıflandırılmaları üzerine genel bilgiler verilerek giriş yapılmıştır. Genel bilgilerin akabinde $(n+1)$ tekil noktaya sahip Fuch denklemi ve Fuch invaryantının hesaplanması anlatılmıştır. Üç tekil noktaya sahip Fuch denklemi, Fuch denkleminin genel halinden çıkartılmış ve bağımlı ve bağımsız değişkene göre gerçekleştirilen dönüşümlerden bahsedilmiştir. Riemann-Papperitz denkleminde, hipergometrik denkleme geçilmiş ve hipergeometrik denklemin çözümleri ve çözümlerinin yakınsaklığı incelenmiştir. Dört tekil noktaya sahip Fuchs denklemi olan Heun denkleminin genel yapısı ve bazı özellikleri verilerek, Hipergeometrik denklemden farklılaştığı noktalar belirtilmiştir. Hipergeometrik ve Heun denklemleri incelendikten sonra, bu denklemlerin konflüent durumları incelenmiştir. Bölümün sonunda ise hipergeometrik ve Heun denklemin otomorfizma grupları verilmiştir. Hipergeometrik denklemi invaryant kılan dönüşümler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, hipergeometrik denklemin uygulamalarından örnekler verilmiştir.

UNIFIED THEORY BASED ON SINGULARITIES OF SPECIAL FUNCTIONS

SUMMARY

Over the centuries, countless civilizations parallel to the development of research and studies on special functions have been carried out. Starting with trigonometry and logarithm function, the improvement process has continued with gamma, beta, zeta functions.

The solutions of specific functions is formed by the location of the singularities and the type of the equation. For this reason, the approaches based on singularities is required to examine and classify.

In the first section, history, development and classification of special functions are mentioned.

In the second section, fuchsian theory and fuchsian equations with three and four singular points are discussed. At the beginning fuchsian equation with $(n+1)$ singular points is constructed and the fuchsian invariant are obtained. Fuchsian equations with three singularities are Riemann-Pappertiz and hypergeometric equation are discussed in detail. The mappings of dependent and independent variables are used in order to obtain the canonical forms of Riemann equation. Hypergeometric equation which is the canonical form of Riemann equation is the general topic of this study. The solutions of hypergeometric equations around the neighborhood of its singularities are taken and convergence of these solutions was discussed in detail. Then, Heun equation and confluent hypergeometric and Heun equation are introduced. At the end of this study, the automorphism groups of hypergeometric and Heun equations were discussed. Especially, the mapping which makes hypergeometric equation invariant is investigated.

1. GİRİŞ

1.1 Özel Fonksiyonların Tarihi

Teorik fizik ve uygulamalı matematikte karşılaşılan matematiksel fonksiyonları sınıflandırmanın birçok yolu vardır. 1940'ların sonunda ve 1950'lerin başlarında, Eugen Jahnke ve Frits Emde'nin 1933'te yayınladığı "formül ve grafikleriyle fonksiyonların listesine" göre, matematiksel fonksiyonlar Jahnke-Emde fonksiyonları ve Jahnke-Emde fonksiyonları olmayan fonksiyonlar olarak sınıflandırılırdı. Bu liste ve diyagramlar karmaşık sayıları içeren ve kübik denklemleri çözen yeni hesaplamalar da dahil edilerek devam etti. El çevirmeli masa üstü hesap makineleri nümerik hesaplamaların değerli bir gereci olduğu o günlerde logaritma, trigonometri ve hipergeometrik fonksiyonların listelerini ve kurallarını derlemek bu alanın ana uğraşıydı.

Standart olmayan bir diferansiyel denklemle ya da parametrik belirli bir integralle karşılaşıldığında ilk soru, çözümün Jahnke-Emde fonksiyonu olup olmadığıydı. Basit olmayan fonksiyonlarla da nümerik çalışmalar gerçekleştirilse ve grafikleri alınsa da bir Jahnke-Emde fonksiyonu olmayan fonksiyonla karşılaşıldığında daha zor nümerik çalışmalar ve yeni yaklaşım metotları bulmak gerekemekteydi. 1952'de "Formül ve grafikleriyle fonksiyonların listesi" adlı kitabın "Matematiksel fizikte özel fonksiyonlar" isimli yeni bir versiyonu yayımlandı. Bu kitap konflüent hipergeometrik fonksiyonlar, Mathieu Fonksiyonları ve Bessel Fonksiyonları üzerine detaylı sonuçlar içermekteydi. Fakat aynı dönemde kullanılmaya başlanan elektronik bilgisayarlar sayesinde Jahnke-Emde fonksiyonu olmayan fonksiyonlarının durum integrali veya pertürbasyon yaklaşımlarının, bu ikinci dereceden lineer adi diferansiyel denklemleri hipergeometrik denklemlere ya da onların özel veya dejenere durumlarına indirgeyemediği görüldü. Sonucunda da fiziksel problemlerin matematiksel tanımları her zaman sadeleştirilmelere ihtiyaç duyduğu anlaşıldı. Bu da bizim tekilliliklerle tanışmamıza yol açtı.

Fiziksel problemin önemi genellikle tekilliklerin bulunduğu yerde ve tekilliklerin karakterinde ortaya çıkmaktadır. Her zaman denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek mümkün değildir. Eğer denklemlerin genel çözümleri hesaplanamıyorsa, tekillikleri nümerik olarak ele almak gerekir. Bu konudaki yenilikler 1954'de Josef Mexiner ve Friedrich Wilhelm Schafke'nin yayınlanan kitabıyla geldi. Yakınsak serilerle ya da basit fonksiyonların belirli integralleri şeklinde ifade edilen fonksiyonların, analitik sonuçları üzerine nümerik yöntemler yayınlandı ve Mexiner ve Schafke'nin geliştirdiği nümerik sonuçların izin verdiği yaklaşım şemaları o zamanın elektronik hesaplama standartlarıyla uygun hale gelmişti. Sonrasında, Mathieu fonksiyonlarının anti-özellikleriyle küremsi dalga denklemleri, adi diferansiyel denklemlerin "Heun sınıfı" olarak isimlendirilen fonksiyonlar sınıfının çözümleri tarafından kapsandığı farkedildi. Heun sınıfı, özel fonksiyonların hipergeometrik sınıfının sadece bir adım daha karmaşığı olmasına rağmen, hipergeometrik sınıftan çok fazla farklılaştı. Karmaşık fiziksel durumları matematiksel olarak modellediğimizde, tekilliklerin konumu ve karakteri fiziksel durumun önemini yansıtır. Öyle ki parametreler bilgiyi taşıyan tekilliklerle direkt ilişkili değildir. Örnek olarak bir materyalin fiziksel özelliklerini verebiliriz.

Yeni fikirler ve gelişmeler Painleve'nin, hangi koşullar altında

$$\frac{d^2y}{dz^2} = F\left(\frac{dy}{dz}, y, z\right) \quad (1.1)$$

denkleminin çözümlerinin hareketli kritik noktalara sahip olmaz sorusunu gündeme getirdi. Burada kritik noktalar dal noktaları ve esas tekilliklerdir. Hareketli ise konumlarının seçilen başlangıç değerine bağlı olması anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu sadece diferansiyel denklemin özelliği değildir. Bu özelliği sağlayan diferansiyel denklemlere Painleve özelliğine sahip denir. Sadece hareketli tekillığe sahip diferansiyel denklemin çözümleri Painleve özelliğini taşırsa, bu tekillikler kutuplardadır. Hareketli kutup noktaları bize karmaşık z düzlemini (1.1) denklemini düzgün çözümler verecek şekilde kesmemize izin verir. Painleve (1.1) denkleminin Painleve özelliğini sağlayan 50 farklı tipi olduğunu gösterdi ve bu çözümlerin 44'ü bilinen fonksiyonlar (eliptik fonksiyonlar ve lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan fonksiyonlar) şeklinde ifade edilmekteydi. Fakat kalan 6 denklem Painleve denklemleri (transandantal) olarak bilinen, elementer fonksiyonlar ile çözümünü ifade edilemeyen, ikinci dereceden

lineer olmayan diferansiyel denklemlerdi.

Bu denklemlerden beşi Painleve ve öğrencileri tarafından, altıncı denklem olan

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2} \right) \quad (1.2)$$

denklemini ise Fuchs tarafından bulundu. (1.2) denklemini yeni transandantallar tanımlamak için kullanılan en önemli lineer olmayan diferansiyel denklem olarak bilinmektedir.

Lagrange denklemleri olarak da ifade edilen Painleve denklemleri, görelilik olmayan kuantum sistemlerinin klasik hareketlerinde başta olmak üzere istatistiksel mekanik, plazma fizik, doğrusal olmayan dalgalar, kuantum yörüngesi, kuantum alan kuramı, genel görelilik, doğrusal olmayan optik ve fiber optik gibi önemli fiziksel uygulamalarda ortaya çıkmıştır.

.

2. FUCHS DENKLEMLERİ

2.1 Fuchs Denkleminin Sınıflandırması

19. yüzyıl hipergeometrik, Legendre ve eliptik fonksiyonlar gibi özel fonksiyonlar üzerinde yeni bir sistematik çalışma ile tanıştı. Sayı teorisi, geometri gibi alanlar da ilişkili olan bu fonksiyonların karmaşık düzlemde tekillikleri civarındaki davranışlarını araştırmak, bu fonksiyonların özelliklerini anlayabilmek için önemli olduğu görüldü. Lineer denklemler için tüm çözümlerin yakınsak olduğu Fuchs durumu ve Fuchs olmama durumu olmak üzere iki durum ayırt edildi.

$$z \frac{du}{dz} + A(z)u = 0 \quad (2.1)$$

(2.1) ile tanımlanan lineer sistemler, orijin civarında holomorfik bir A ile Fuchs sınıfın bir prototipini ifade eder. Weierstrass'ın okulunun bu denklem sınıfının genişlemesi üzerinde yapılan çalışmalar ile 19. Yüzyılın sonlarına doğru “Fuchs-Frobenius Teorisi” geliştirildi. Fakat lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin tekillik tiplerinin sınıflandırılması henüz tamamlanmamıştı. Ayrıca ikinci dereceden skalar denklemlerin özel formları için yapılan Painleve-Gambier sınıflandırması, genel soyut sonuçlar bulabilmek adına hiçbir umut bırakmıyordu. 20. yüzyılda, özellikle problemler altında kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonuçlarına karşılık gelen gelişmeler yaşandı.

$$u_{tt} + \frac{\lambda}{t} u_t - \Delta u = 0 \quad (2.2)$$

Euler-Poisson-Darboux denklemi ve onun eliptik emsali potansiyel teoride, küresel ortalama yönteminde ve Einstein denklemlerinin özel indirgemelerinde ortaya çıktı. Köşeli bölgeler üzerinde tanımlanmış eliptik problemler ile çift karakteristikli problemler daha ileri bir genelleme yapmaya doğru götürdü. Bu gelişmelerin 1980’lerde iyice olgunlaştığı ve mevcut sonuçların kapsamının ardında, bazı problemlerin logaritma ve değişkenlerin kuvvetleriyle karışık

genişlemelere ihtiyaç duyduğu fark edildi. Fakat bu davranışın genel olmayacağı tahmin edildi. Lineer olmayan problemler neredeyse önemsenmedi.

“Fuchs” kelimesi “bütün düzgün kuvvet serisi çözümleri yakınsak olan denklemleri” ifade etmek için kullanıldı. Tabi ki, Fuchs adi diferansiyel denklemlerin çözümleri logaritma içerebilir, fakat logaritmik ifadeler, kuvvet serilerinin limitleri şeklinde yaklaşılabilceği Frobenius yöntemiyle bilinmekteydi. Diğer problemler Fuchs kısmi türevli diferansiyel denklemleriyle bağlantısız görülüyordu. Lineer olmayan dalga denklemlerinde ortaya çıkan problemler için, yine seksenlerde, Hormander, John ve ekibi asimptotik yaklaşımları hesapladılar. Matematğin dışında, Astrofizikte de merkezde tekilliğe sahip denklemler gibi benzer zorluklarla karşılaşıldı. Bu tekillikler civarında çözümlerin bir seri açılımı olmalıydı. Bu düşünce ile nümerik iterasyonlara başlandı. 1982’lerde, tamamen integrallenebilir kısmi türevli diferansiyel denklemler için düzgün seri açılımı çözümlerin de gerçek çözümleri temsil ettiğine dair teori ispatlandı. Peki, bu serilerin hemen hemen integrallenebilir problemlerle bir alakası var mıydı?

Fuchs indirgeme yöntemi bu soruların cevaplarını verdi. Tipik olarak, indirgenmiş Fuchs denklemleri için düzgün olmayan katsayılar ve logaritmik terimler istisnai bir durum değildir. Katsayıların ve non-lineerliklerin, denklemin analitik olması için bir gereklilik olmadığından, düzensiz tekilliklerle sahip bu denklemleri de Fuchs formuna indirgeyebiliriz [1].

Bu alanda devam eden çalışmalar ile Fuchs teorisi genişledi ve bugünkü halini aldı.

2.1.1 Tekillikler ve Fuchs Denklemleri

2.1.1.1 Düzenli ve Fuchs Tekillikleri

$$L_z y(z) = P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) denklemi katsayıları, dereceleri sırasıyla k_0, k_1, k_2 olan $P_0(z), P_1(z), P_2(z)$ polinomlarından oluşan, karmaşık düzlemde tanımlı ikinci mertebeden adi lineer homojen diferansiyel denklemdir.

(2.3) denklemin tekillikleri, $P_0(z)$ polinomunun sıfırlarıdır. $z = \infty$ noktasında

içeren karmaşık düzlemde (2.3) denkleminin iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözümlerin herhangi bir lineer kombinasyonu bize (2.3) denkleminin genel çözümünü verir.

(2.3) denklemini, katsayı polinomları sabit olduğu zaman, sadece kısıtlı bir kaç durumda sabit katsayı denkleme indirgeyip, genel çözümünü elementer fonksiyonlarla bulmak mümkündür. Fizikte ve matematikte karşımıza çıkan (2.3) denklemleri çoğu zaman bilinen elementer yöntemlerle analitik çözümü bulunamaz. Bu gibi durumlarda, kuvvet seri yöntemini uygulamak kaçınılmaz olur.

(2.3) denkleminin z_0 noktası komşuluğundaki çözümlerinin davranışı, $P(z) = P_1(z)/P_0(z)$ ve $Q(z) = P_2(z)/P_0(z)$ katsayı fonksiyonlarının davranışına bağlıdır.

Tanım 2. 1. 1 $P(z)$ ve $Q(z)$ fonksiyonları z_0 noktası komşuluğunda analitik ise, bu fonksiyonların z_0 civarında kuvvet seri açılımların olduğunu varsayılabilir.

(2.3) denkleminin z_0 civarında verilen başlangıç koşulları ($y(z_0) = y_0, y'(z_0) = y'_0$) altında çözümü var ise, z_0 noktalarına denklemin "sıradan noktaları" denir.

(2.3) denkleminin sıradan noktalar civarındaki tüm çözümleri "holomorfik" fonksiyonlardır.

Tanım 2. 1. 2 Eğer (2.3) diferansiyel denkleminde $P(z)$ ve $Q(z)$ katsayı fonksiyonlarından en az biri z_0 noktasında analitik değil ise, z_0 noktasına diferansiyel denklemin tekil noktası denir.

Bir denklemin kutupları, cebirsel ve logaritmik dallanma noktaları analitik olma özelliğini kaybettikleri, tekil noktalardır.

Örnek 2. 1. 3 Bessel denkleminin,

$$z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0 \quad (2.4)$$

$z = 0$ ve $z = \infty$ de olmak üzere iki adet tekilliği vardır.

Tanım 2. 1. 4 $\lim_{z \rightarrow z^*} f(z)(z - z^*)^\rho = 0$ yapan bir $\rho \in \mathbb{R}$ varsa, $f(z)$ fonksiyonuna z^* ($z^* \neq \infty$)'da sonlu dereceden bir tekilliğe sahip denir. $z^* = \infty$ için ise $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)z^{-\rho} = 0$ olması gerekmektedir.

Örnek 2. 1. 5 $z^3 \log(z)$, $z = 0$ da sonlu dereceden tekilliğe sahiptir.

Tanım 2. 1. 6 (2.3) denklemin lineer bağımsız çözümleri $z = z^*$ da sonlu dereceden tekilliğe sahip ise bu tekilliklere "düzenli tekillik", değil ise "düzensiz tekillik" denir.

Tanım 2. 1. 7 Karmaşık düzlemde, tekil noktalar integrasyon sabitine ve

problemin başlangıç koşullarına bağlı olarak değişmekte ise, bu noktalara "hareketli tekil noktalar" denir.

Tekil noktalar, integrasyon sabitine bağlı değilse, bu noktalara "sabit tekil noktalar" denir.

Tanım 2. 1. 8 $z = z^*$ da $P(z) = P_1(z)/P_0(z)$ en fazla 1. dereceden ve $Q(z) = P_2(z)/P_0(z)$ de en fazla 2. dereceden tekilliğe sahip ise, z^* noktası "Fuchs tekilliği" olarak isimlendirilir. Sonsuzdaki nokta içinse $z = z^{-1}$ için aynı durum incelenir.

Örnek 2. 1. 9 (2.4) Bessel denkleminin, $z = 0$ noktasındaki tekilliği Fuchs tekilliği iken, $z = \infty$ noktasındaki tekilliği değildir.

Teorem 2. 1. 10 (2.3) denkleminin Fuchs denklemi olaması için gerek ve yeter koşul tüm tekilliklerin düzenli olmasıdır.

Fuchs olmayan denklemlere, non-Fuchs denklemler denir.

Örnek 2. 1. 11 (2.4) tüm tekillikleri Fuchs tekilliği olmadığından, Bessel denklemi Fuchs denklemi değildir.

Örnek 2. 1. 12 Euler denkleminin,

$$z^2 y''(z) - (a + b - 1)zy'(z) + (ab)y(z) = 0 \quad (2.5)$$

$z = 0$ ve $z = \infty$ de olmak üzere toplam iki adet düzenli tekilliği vardır. Teorem 2. 1. 10 a göre bu tekillikler Fuchs tekillikleridir. Dolayısıyla (2.5) Euler denklemi bir Fuchs denklemdir.

Bir denklemin Fuchs olma özelliği izomorfik dönüşüm altında da korunur.

2.2 Fuchs Denklemlerinin Tipleri

Polinom katsayılı ikinci mertebeden lineer homojen denklemler sınıfı M_n de $n + 1$ düzenli tekil noktaya sahip bir Fuchs denklemi, "jenerik denklem" olarak adlandırılır.

2.2.1 Fuchs Denkleminin Genel Hali (n+1)

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0 \quad (2.6)$$

(2.6) denkleminin *Fuchs* tipinde olduğunu ve $n + 1$ ($n \geq 2$) adet farklı tekil noktası olduğunu varsayım. Bu tekillikleri $z = z_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ ve $z = \infty$ olarak alalım.

Bu durumda, $P(z)$ polinomunun $z = z_k$ noktaları haricinde, sonlu bir düzlemde başka bir tekilliği yoktur. O halde,

$$P(z) = \frac{p(z)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}$$

olarak tanımlanabilir. Aynı şekilde $z = z_k$ noktalarındaki tekilliklerin derecesi ≤ 2 olmak üzere,

$$Q(z) = \frac{q(z)}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2 \dots (z - z_n)^2}$$

olarak tanımlanabilir. $z = \infty$ noktasıda (2.6) denkleminin düzenli tekil noktası olduğu için $z = \infty$ noktasındaki durumunu incelemek için $z = \frac{1}{t}$ dönüşümü yaparsak,

$$y''(t) + \frac{1}{t} \left(2 - \frac{p(\frac{1}{t})}{t(\frac{1}{t} - z_1) \dots (\frac{1}{t} - z_n)} \right) y'(t) + \frac{1}{t^2} \left(\frac{q(\frac{1}{t})}{t^2(\frac{1}{t} - z_1)^2 \dots (\frac{1}{t} - z_n)^2} \right) y(t) = 0 \quad (2.7)$$

(2.7) denklemini elde ederiz. Bu denklemin $t = 0$ noktası düzenli tekil bir noktasıdır. O halde,

$$2 - \frac{p(\frac{1}{t})}{t(\frac{1}{t} - z_1) \dots (\frac{1}{t} - z_n)}$$

ve

$$\frac{q(\frac{1}{t})}{t^2(\frac{1}{t} - z_1)^2 \dots (\frac{1}{t} - z_n)^2}$$

fonksiyonlarının $t = 0$ noktasında analitik olması gerekmektedir. Bu da ancak $der(p) \leq n - 1$ ve $der(q) \leq 2n - 2$ olması durumunda sağlanır.

Teorem 2. 1. 13 Eğer (2.6) denklemi Fuchs tipinde, $z = z_k, k = 1, 2, 3, \dots, n$ ve $z = \infty$ olan $n + 1$ farklı tekilliğe sahip ise, (2.6) denklemi,

$$y''(z) + \frac{T_{n-1}(z)}{\psi(z)} y'(z) + \frac{T_{2n-2}(z)}{\psi(z)^2} y(z) = 0 \quad (2.8)$$

olarak yazılabilir. Burada T_j z 'ye göre en fazla j dereceden bir polinom ve $\psi(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)$ olarak tanımlanmıştır.

(2.8) denkleminde

$$\frac{T_{n-1}(z)}{\psi(z)} = P(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılabilir. Benzer şekilde,

$$\frac{T_{2n-2}(z)}{\psi(z)^2} = Q(z) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{(z - z_k)} \right)$$

olarak basit kesirlere ayrılabilir. Teorem 2. 2. 1'e göre T_{2n-2} 'nin derecesi en fazla $2n - 2$ olması gerektiğinden, payda eşitlediğimizde sağ taftaki ifaden $(\sum_{k=1}^m C_k)T_{2n-1}$ elde edileceğinden dolayı $\sum_{k=1}^n C_k = 0$ olmak zorundadır.

(2.8) denkleminde yola çıkarak, bulduğumuz ifadelerden ile (2.6) denklemi, $\sum_{k=1}^n C_k = 0$ olmak üzere

$$y''(z) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} y'(z) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{B_k}{(z - z_k)^2} + \frac{C_k}{(z - z_k)} \right) y(z) = 0 \quad (2.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem $n+1$ düzenli tekil noktaya sahip Fuchs denklemin genel halidir [2].

2.2.1.1 Fuchs İnvaryantı

(2.9) denkleminin $z = z_k$ tekil noktalarına karşılık gelen indis denklemin kökleri $\rho_1(z_k)$ ve $\rho_2(z_k)$ olmak üzere, $z = z_k$ noktasındaki indis denklemini,

$$m(m-1) + A_k m + B_k = 0$$

olarak yazılır. Denklemi düzenlersek,

$$m^2 + (A_k - 1)m + B_k = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökler toplamı ve kökler çarpımı özdeşliklerinden yararlanarak,

$$\rho_1(z_k) + \rho_2(z_k) = 1 - A_k \quad , \quad \rho_1(z_k)\rho_2(z_k) = B_k$$

bulunur. $z = \infty$ noktasındaki tekillik için de,

$$m^2 + (-1 + \sum_{k=1}^n A_k)m + \sum_{k=1}^n (B_k + C_k z_k) = 0 \quad (2.11)$$

indis denklemini elde edilir. (2.11) denkleminin kökler toplamı ve çarpımı özdeşliklerinden,

$$\rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) = -1 + \sum_{k=1}^n A_k \quad , \quad \rho_1(\infty)\rho_2(\infty) = \sum_{k=1}^n (B_k + C_k z_k)$$

bulunur. $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere z_k tekilliklerine karşılık gelen indis denklemlerinden bulduğumuz üstleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [\rho_1(z_k) + \rho_2(z_k)] + \rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) &= \sum_{k=1}^n (1 - A_k) + (-1 + \sum_{k=1}^n A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (1) - \sum_{k=1}^n (A_k) + \sum_{k=1}^n A_k - 1 = n - 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buda gösterir ki Fuchs denkleminin tekilliklerinin karakteristik üstleri,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^2 \rho_m(z_j) + \sum_{m=1}^2 \rho_m(\infty) = n - 1 \quad (2.12)$$

koşulunu korur. Bu koşula ikinci mertebeden Fuchs tipli diferansiyel denklem için "Fuchs invariantı" denir. n . mertebeden $(m+1)$ tekilliğe sahip Fuchs diferansiyel denklem için, Fuchs invariantı, $(m-1)\frac{n(n-1)}{2}$ olarak hesaplanır [3].

2.2.2 Üç Tekil Noktalı Fuchs Denklemi (n= 2)

Fuchs diferansiyel denkleminin genel formundan yola çıkarak, ikinci mertebeden bir Fuchs diferansiyel denklemin üç tekil noktaya sahip formunu incelersek, $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ olarak tanımlayabileceğimiz altı keyfi parametreye sahip olduğunu görürüz. Üç tekil noktasına karşılık altı üsttü vardır. $C_1 + C_2 = 0$ koşulu olduğundan $C_1 = -C_2$ olarak bulunur. Böylece keyfi parametre sayısı beşe indirgenmiş olur. Altı üsttü de Fuchss invariantı sayesinde beşe indirgenir. $m = 2$ olduğu için üsttelerin toplamı bire eşit olur.

$$A_1 = 1 - \rho_1(z_1) - \rho_2(z_1)$$

$$A_2 = 1 - \rho_1(z_2) - \rho_2(z_2)$$

$$B_1 = \rho_1(z_1)\rho_2(z_1)$$

$$B_2 = \rho_1(z_2)\rho_2(z_2)$$

$$B_1 + B_2 + C_1 z_1 + C_2 z_2 = \rho_1(\infty)\rho_2(\infty)$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

denklemlerini elde edilir. (2.9)'u bu denklemlerle tekrar düzenlersek,

$$\begin{aligned} y''(z) + & \left(\frac{1 - \rho_1(z_1) - \rho_2(z_1)}{z - z_1} + \frac{1 - \rho_1(z_2) - \rho_2(z_2)}{z - z_2} \right) y'(z) \\ & + \left(\frac{\rho_1(z_1)\rho_2(z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{\rho_1(z_2)\rho_2(z_2)}{(z - z_2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{\rho_1(\infty)\rho_2(\infty) - \rho_1(z_1)\rho_2(z_1) - \rho_1(z_2)\rho_2(z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} \right) y(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

(2.13) denklemini elde ederiz. (2.13) denklemine üç tekil noktaya sahip Fuchs denklemi denir. Bu bölümde bu denklem detaylı olarak incelenecektir.

2.2.2.1 Riemann-Papperitz Denklemi

(2.3) denklemin üç düzenli sonlu tekil noktaya sahip olduğunu ve sonsuzun sıradan bir nokta olduğunu varsayalım. z_1, z_2 ve z_3 olarak gösterilecek tekil noktalara sırasıyla a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 üstleri karşılık gelsin. O halde, (2.3) denklemi,

$$y''(z) + \frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}y'(z) + \frac{q(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}y(z) = 0 \quad (2.14)$$

(2.14) şeklinde yazabiliriz. Sonsuzdaki nokta sıradan nokta olduğundan, $x = 1/t$ dönüşümü ile,

$$y''(t) + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \frac{p(1/t)}{(\frac{1}{t}-z_1)(\frac{1}{t}-z_2)(\frac{1}{t}-z_3)}\right)y'(t) + \frac{1}{t^4} \frac{q(1/t)}{(\frac{1}{t}-z_1)^2(\frac{1}{t}-z_2)^2(\frac{1}{t}-z_3)^2}y(t) = 0$$

elde ettiğimiz denklemde, $\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \frac{p(1/t)}{(\frac{1}{t}-z_1)(\frac{1}{t}-z_2)(\frac{1}{t}-z_3)}\right)$ ve $\left(\frac{1}{t^4} \frac{q(1/t)}{(\frac{1}{t}-z_1)^2(\frac{1}{t}-z_2)^2(\frac{1}{t}-z_3)^2}\right)$ polinomlarının $t = 0$ da analitik olması gerekmektedir. Bu iki polinomu $z = 1/t$ dönüşümü ile tekrar düzenlersek,

$$2z - z^2 \frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

ve

$$z^4 \frac{q(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2}$$

elde ederiz. Sonsuzun sıradan bir nokta olabilmesi için,

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

ifadesinin $2/z$ 'ye eşit olması gerekmektedir.

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \frac{A}{(z-z_1)} + \frac{B}{(z-z_2)} + \frac{C}{(z-z_3)}$$

olarak yazarsak, $A + B + C = 2$ eşitliğini buluruz. Benzer şekilde,

$$\frac{q(z)}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2(z-z_3)^2} = \frac{D}{(z-z_1)^2} + \frac{E}{(z-z_2)^2} + \frac{F}{(z-z_3)^2} + u_1(z)$$

ifadesinin de sonsuzda analitik olması için $u_1(z) = 0$ olması gerekir. Bulduğumuz koşullar çerçevesinde, (2.14) diferansiyel denklemi,

$$y''(z) + \left(\frac{A}{(z-z_1)} + \frac{B}{(z-z_2)} + \frac{C}{(z-z_3)}\right)y'(z) + \left(\frac{D}{(z-z_1)^2} + \frac{E}{(z-z_2)^2} + \frac{F}{(z-z_3)^2}\right)y(z) = 0 \quad (2.15)$$

(2.15) denklemi şeklinde ifade edebiliriz. Üstler farkının tam sayı olmadığını varsayarsak, (2.15) denkleminin z_1 noktasındaki çözümünü Frobenus seri çözümü ile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_1)^{n+m}$ biçiminde arayabiliriz.

$$m(m-1) + mA + \frac{D}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = 0$$

indis denklemin kökleri, a_1 ve a_2 dir. O halde,

$$a_1 + a_2 = 1 - A$$

ve

$$a_1 a_2 = \frac{D}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$$

denklikleri kökler toplamı ve kökler çarpımından elde edilir. Benzer şekilde z_2 ve z_3 noktalarındaki indis denklemlerinden de ;

$$B = 1 - b_1 - b_2$$

$$E = (z_2 - z_1)(z_2 - z_3)b_1 b_2$$

$$C = 1 - c_1 - c_2$$

$$F = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2)c_1 c_2$$

$A + B + C = 2$ olduğundan, üstlerinde toplamı

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 1 - A + 1 - B + 1 - C = 3 - (A + B + C) = 1$$

olarak bulunur.

Teorem 2. 1. 14 Tekil noktaları z_1, z_2 ve z_3 olan ve bu noktalara sırasıyla karşılık gelen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 üstlerine sahip,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1-a_1-a_2}{z-z_1} + \frac{1-b_1-b_2}{z-z_2} + \frac{1-c_1-c_2}{z-z_3} \right) \frac{dy}{dz} \\ + \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} \left(\frac{(z_1-z_2)(z_1-z_3)a_1 a_2}{z-z_1} \right. \\ \left. + \frac{(z_2-z_1)(z_2-z_3)b_1 b_2}{z-z_2} + \frac{(z_3-z_1)(z_3-z_2)c_1 c_2}{z-z_3} \right) y = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ikinci mertebeden bir diferansiyel denkleme Riemann-Papperitz denklemi denir.

(2.16) denklemin üstleri $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 1$ koşulunu korur.

(2.16) denklemin çözümünü "Riemann P-Sembolu" ile,

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}; z \quad (2.17)$$

(2.17) şeklinde gösterilir.

(2.16) denkleminin z_1, z_2 ve z_3 tekil noktaların konumlarını koruyarak, bu tekilliklere karşılık gelen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 üstlerin değerlerini, bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz dönüşüm ile değiştirebiliriz. Bu dönüşüme "f-homotopik dönüşüm" denir.

Teorem 2. 1. 15 Tekil noktaları z_1, z_2 ve z_3 ve bu noktalara karşılık gelen üstler sırasıyla, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 ise, (2.16) denklemin çözümü $w(z)$, (2.17) Riemann P-Şeması ile gösterilebilir. Bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz,

$$w(z) = \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^k w_1(z) \quad (2.18)$$

f-Homotopik dönüşümü,

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}; z = \frac{(z - z_1)^k}{(z - z_2)^k} \mathbf{P} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ a_1 - k & b_1 + k & c_1 \\ a_2 - k & b_2 + k & c_2 \end{pmatrix}; z \quad (2.19)$$

denklemin üstlerine (2.19) gibi etki ederken, tekil noktaların konumunu korur.

Teorem 2. 1. 14'un bir ispatı, (2.18) dönüşümü gerçekleştirip, $w_1(z)$ değişkenine göre birinci ve ikinci türevleri hesaplanıp, (2.16) denkleminde yerine yazılarak, (2.19) ifadesinin sağ tarafı elde edilerek gerçekleştirilebilir.

Başka bir yaklaşım ise, tekillikler civarındaki Frobenius seri çözümünden yararlanmaktır. $z = z_1$ tekilliği civarındaki a_1 üstüne göre Frobenius seri çözümü,

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1}$$

olarak yazılır.

$$w_1(z) = \frac{(z - z_2)^k}{(z - z_1)^k} w(z) = \frac{(z - z_2)^k}{(z - z_1)^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1}$$

dönüşümü ile

$$w_1(z) = (z - z_2)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1-k} \quad (2.20)$$

elde ederiz. $(z - z_2)^k$ fonksiyonu $z = z_1$ noktasında analitik olduğu için, z_1 noktasında seri açılımı vardır. Öyleyse,

$$(z - z_2)^k = (z_1 - z_2)^k + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_1)^n \quad (2.21)$$

olarak yazılabilir.

Elde edilen (2.21) seri açılımını, (2.20) ifadesinde yerine yazar ve serilerde Cauchy çarpımı özelliğini uygulırsanız,

$$\begin{aligned} w_1(z) &= [(z_1 - z_2)^k + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_1)^n] \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1-k} \right) \\ &= (z_1 - z_2)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1-k} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} (z - z_1)^{n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^{n+a_1-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^{n+a_1-k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_1)^{n+a_1-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + b_n) (z - z_1)^{n+a_1-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_1)^{n+a_1-k} \end{aligned} \quad (2.22)$$

elde edilir. $z = z_1$ noktasında a_1 üstüne göre elde ettiğimiz Frobenius seri çözümünde, a_1 üstünün $a_1 - k$ olarak değiştiğini görebiliriz. Benzer şekilde $z = z_2$ noktası civarında b_1 ve b_2 üstlerine göre yazacağımız Frobenius seri çözümlerinde de benzer bir değişim gözlemleyebiliriz. O halde bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz f-homotopik dönüşüm (2.19) ifadesindeki gibi denklemin üstlerine etki ederken, tekil noktaların konumu korur.

Diğer yandan, (2.16) denkleminin üstleri a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 'nin değerlerini koruyarak z_1, z_2 ve z_3 tekil noktaları, bağımsız değişkene göre gerçekleştireceğimiz lineer bir dönüşüm ile herhangi bir z'_1, z'_2 ve z'_3 noktalara kaydırabiliriz.

Teorem 2. 1. 16 $AD - BC \neq 0$ olmak üzere,

$$z = \frac{At + B}{Ct + D} = \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z'_3 - z'_2)(t - z'_1)}{(z_1 - z_2)(z'_1 - z'_3)(t - z'_2) + (z_1 - z_3)(z'_2 - z'_1)(t - z'_3)} + z_1 = M(t) \quad (2.23)$$

olarak tanımlanan lineer kesirli dönüşüm ile, (2.17) Riemann P-Sembolu,

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} z'_1 & z'_2 & z'_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} ; t \quad (2.24)$$

(2.24) haline dönüşür. Bu dönüşüm esnasında denklemin üstleri korunur.

(2.23) dönüşümü "Möbius dönüşümü" olarak da isimlendirilir. Bu dönüşüm genişletilmiş karmaşık düzlemde(sonsuzdaki noktayı da içeren karmaşık düzlem) tanımlanmıştır. Riemann küresi, genişletilmiş karmaşık düzlem olarak düşünülebilir. Her Möbius dönüşümü, Riemann küresinden kendisine bir birebir konformal dönüşümdür. Zaten Riemann küresinden kendisine olan her dönüşüm, Möbius dönüşümü olmak zorundadır. Bağımsız değişkene göre yapılan lineer kesirli dönüşüm ile, bu denklemin z_1, z_2 ve z_3 tekil noktalarını her zaman z_1, z_2, ∞ noktalarına kaydırmak mümkündür. Tekillikleri z_1, z_2, ∞ olan diferansiyel denkleme ait Riemann P-Şeması,

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc|c} z_1 & z_2 & \infty & \\ a_1 & b_1 & c_1 & ;z \\ a_2 & b_2 & c_2 & \end{array} \right) \quad (2.25)$$

ve bu şemaya ait diferansiyel denklem,

$$y''(z) + \left(\frac{1-a_1-a_2}{(z-z_1)} + \frac{1-b_1-b_2}{(z-z_2)} \right) y'(z) + \left(\frac{a_1 a_2}{(z-z_1)^2} + \frac{b_1 b_2}{(z-z_2)^2} + \frac{c_1 c_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2}{(z-z_1)(z-z_2)} \right) y(z) = 0 \quad (2.26)$$

formundadır. Bu denklem formu "Riemann denklemi" olarak bilinir. Riemann denklemi de bağımsız değişkene göre gerçekleştirilen,

$$t = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}$$

lineer kesirli dönüşüm (Möbius dönüşümü) ile tekillikleri 0, 1 ve ∞ olan

$$(z(1-z))y''(z) + (c - (a+b+1))y'(z) - aby(z) = 0 \quad (2.27)$$

(2.106) denklemine dönüştürülebilir. (2.106) denklemi "hipergeometrik denklem" olarak adlandırılan bir Fuchs denklemidir.

2.2.2.2 Hipergeometrik Denklem

$$L_z(a, b; c)y(z) = (z(1-z))y''(z) + (c - (a+b+1))y'(z) - aby(z) = 0 \quad (2.28)$$

(2.28) denklemi üç adet tekillığe sahip Fuchs denklemidir. Fuchs denklemin bu formu "hipergeometrik denklem" olarak bilinir. İkinci mertebeden lineer

adi diferansiyel denklemlerin hipergometrik sınıfı Riemann denklemi tarafından oluşturulmuştur. Bu sınıf kendi standart formları olan 5 tip denklem içerir.

- Hipergometrik denklem (hE)
- Konflüent hipergeometrik denklem (ChE)
- Bikonflüent hipergeometrik denklem (BhE)
- İndirgenmiş konflüent hipergeometrik denklem (RChE)
- İndirgenmiş bikonflüent hipergeometrik denklem (RBhE)

Yukarıdaki bu denklemlerden sadece hE ve ChE bağımsızdır. Diğer tüm denklemler, ChE'nin bağımlı değişkene göre dönüşümleri ve parametre özeleştirilmeleriyle elde edilebilir.

Konflüent hipergeometrik denklemin değişik biçimleri literatürde, "Whittaker denklemi" ya da "Slater denklemi" olarak da bilinir. Bikonflüent hipergeometrik denklem ise "Parabolik Silindir denklemi", "Hermite denklemi" ve "Hamonik salınıcı denklemi" olarak bilinir. RChE'nin özel bir adı olmamasına rağmen, özel dönüşümlerle "Bessel denklemine" dönüşebilir. RBhE ise "Airy denklemi" olarak bilinir. İlk üç denklemin polinom çözümleri mevcuttur. Bu çözümler "Jacobi, Laguerre ve Hermite" klasik dik polinomların sonsuz kümelerini oluşturur. "Legendre, Gegenbauer ve Chebyshev" polinomları Jacobi polinomlarının özelleştirilmesiyle elde edilir.

Frobenius seri yöntemiyle elde edilen hE, ChE ve RChE 'nin özel çözümleri, katsayılar için iki terimli yineleme ilişkisi kabul eder. RBhE hariç, bu denklemlerin çözümleri üç terimli (ikinci mertebeden) fark denklemleridir. Bu denklemler klasik dik polinomları oluşturmak için yineleme ilişkisi oluştururlar. İntegral dönüşümleriyle, çekirdekleri elementer fonksiyon olan ve çözümleri hipergeometrik sınıfa ait olan bu denklemlerin çözümleri elementer fonksiyonlarca gösterilebilir [4].

Bir noktası sonsuzda olmak üzere sadece üç adet düzenli tekil noktası olan **(2.3)** biçimindeki lineer bir denklemin, bağımlı değişkene göre yapılan f-homotopik dönüşüm ve bağımsız değişkene göre yapılan Möbius dönüşümleriyle, Riemann denklemi kanonik doğal forma dönüştürülebilir. Kanonik doğal form,

hipergeometrik denklem ya da Gauss denklemi olarak da adlandırılır.

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ a_1 & a_2 & c_1 \\ b_1 & b_2 & c_2 \end{array} ; z \right) \quad (2.29)$$

Riemann şeması ile gösterilen

$$y''(z) + \left(\frac{1-a_1-a_2}{z} + \frac{1-b_1-b_2}{z-1} \right) y'(z) + \left(\frac{a_1 a_2}{z^2} + \frac{b_1 b_2}{(z-1)^2} - \frac{c_1 c_2 - a_1 a_2 - b_1 b_2}{z(z-1)} \right) y(z) = 0 \quad (2.30)$$

Riemann denkleminin $z = 0$ ve $z = 1$ tekilliklerine karşılık gelen üstlerden en az biri, bağımlı değişken dönüşümleriyle her zaman sıfır yapılabilir. Örneğin

$z = 0$ için

$$w(z) = z^{a_1} y(z)$$

$z = 1$ için

$$w(z) = (1-z)^{b_1} y(z)$$

dönüşümleri ile $a_1 = b_1 = 0$ yapar. Bu durumda,

$$(z(1-z))y''(z) + (1-a_2-(c_1+c_2+1))y'(z) - c_1 c_2 y(z) = 0 \quad (2.31)$$

Riemann denklemi, (2.31) denkleminde gösterilen Gauss hipergeometrik denklemine dönüşür. Burada $c_1 = a$, $a_2 = 1 - c$ tanımlarsak, Riemann özdeliğinden de $b_2 = c - a - b$ elde ederiz. Bu sadeleştirmeler altında Riemann denkleminin standart biçimi olan (2.28) denklemini elde ederiz. (2.28) denklemi Riemann şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} ; z \right). \quad (2.32)$$

(2.28) denkleminin eş olan diferansiyel operatörü

$$(L_z(a, b; c))^* = L_z(1-a, b-1; 2-c) \quad (2.33)$$

ile gösterilirse, bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz

$$y = Gw, \quad G^{-1}LG = N \quad \Longleftrightarrow \quad y = z^{-c/2}(1-z)^{-(c-a-b-1)/2}w \quad (2.34)$$

f-homotopik dönüşümü ile (2.28) denklemini normal forma indirgeyebiliriz.

Genel anlamda (2.26) denlemini normal forma indirgemek için $1 - a_1 - a_2 = 0$ ve $1 - b_1 - b_2 = 0$ yapan dönüşümler bulmamız yeterlidir. (2.28) denkleminde $a_1 = 0$ ve $a_2 = 1 - c$ olduğuna göre $1 - 0 - 1 + c = 0$ olması için c katsayısını yok edecek bir dönüşüm bulmamız gerekmektedir ki bu dönüşüm $z^{c/2}y$ ile sağlanır. Çünkü $z^{c/2}y$ dönüşümü $z = 0$ tekilliğine ait üslere $(-c/2) + -(c/2)$ kadar etki edecektir. Benzer şekilde $z = 1$ tekilliğine karşılık gelen üslere de $(1 - z)^{(c-a-b-1)/2}y$ dönüşümü uygulayarak $b_1 + b_2$ toplamını bir yapabiliriz [5]. (2.34) dönüşü ile (2.28) denkleminin ait Riemann P-şeması

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ c/2 & (c-a-b-1)/2 & a-c/2-(c-a-b-1)/2 \\ (2-c)/2 & c-a-b+(c-a-b-1)/2 & b-c/2-(c-a-b-1)/2 \end{array} ; z \right) \quad (2.35)$$

haline dönüştür. Bu Riemann şemasına karşılık gelen diferansiyel denklemin w' teriminin katsayısı,

$$\left(\frac{1-c/2-(2-c)/2}{z} + \frac{1-(c-a-b-1)/2-(c-a-b+(c-a-b-1)/2)}{z-1} \right) = 0$$

olduğu tekillikleri 0, 1 ve ∞ olan Riemann denklemin genel formundan görülür.

Diğer terimleri de hesaplandığında,

$$\begin{aligned} N_z(a, b; c)w(z) &:= w''(z) + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1-(1-c)^2}{z^2} + \frac{1-(c-a-b)^2}{(z-1)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ab+c(c-a-b-1)}{2z(z-1)} \right] w(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

denklemini elde edilir. (2.36) denklemini (2.28) denkleminin "normal biçimi" olarak adlandırılır. Normal biçim, ikinci dereceden diferansiyel denklemin y' teriminin yok edilmiş halidir.

$$w = Hv, \quad H^{-1}NH = M \quad \Longleftrightarrow \quad w = z^{-1/2}(1-z)^{1/2}v$$

dönüşümü ile de kendine eş olan (2.37) biçimine dönüşür.

$$\begin{aligned} M_z(a, b; c)v(z) &:= (z(z-1))'v(z)' \\ &\quad - \left[\frac{z(z-1)}{4} \left(\frac{(1-c)^2}{z^2} + \frac{(c-a-b)^2}{(z-1)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2ab+c(c-a-b-1)}{2z(z-1)} \right] v(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

(2.28) denkleminin standart biçimi, tekillikleri 0, 1 ve ∞ olan hipergeometrik denklemdir.

Şimdi hipergeometrik denklemin bu noktalar civarındaki çözümlerini seri yöntemiyle inceleyelim.

(2.28) denkleminde,

$$P_0(z) = z(1-z), \quad P_1(z) = c - (1+a+b)z, \quad P_2(z) = -ab$$

olarak tanımlanmıştır. Bu durumda

$$P_0(0) = 0, \quad P_0(1) = 0.$$

olur. $z = 0$ ve $z = 1$ tekil noktalardır. $z = 0$ noktasının düzenli olup olmadığını incelersek,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow t} \frac{(z-t)P_1(z)}{P_0(z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-0)(c - (1+a+b)z)}{z(1-z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z(c - (1+a+b)z)}{z(1-z)} = c \\ \lim_{z \rightarrow t} \frac{(z-t)^2 P_2(z)}{P_0(z)} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z-0)^2 (-ab)}{z(1-z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 (-ab)}{z(1-z)} = 0 \end{aligned}$$

iki limitinde var olduğunu görürüz. O halde $z = 0$ düzenli tekil bir noktadır. Düzenli tekil noktası orijinde olan ikinci mertebeden bir deferansiyel denklemin genel çözümünü ;

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m} \tag{2.38}$$

ya da

$$y = \ln z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}$$

olarak tanımlanır. Burada $z > 0$ kabul ediyoruz. (2.38) denkleminde $a_0 = 0$ olursa, z 'nin pozitif tamsayı kuvvetlerini z^m terimi ile birleştiremeyeceğimizden her zaman $a_0 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu kuvvet seri çözümlerine "Frobenius seri çözümü" denir. Orijin düzenli tekil nokta olduğu için bu noktada Frobenius çözümünü arayabiliriz.

(2.38) denkleminde y' ve y'' yi hesaplayıp,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m) z^{n+m-1} \tag{2.39}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+m)(n+m-1) z^{n+m-2}. \tag{2.40}$$

(2.28) denkleminde yerine yazarsak,

$$z \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m-2} - z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m-2} \\ + c \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m-1} - (1+a+b)z \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m-1} - ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m} = 0$$

elde ederiz. Bu da,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m} \\ + c \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m-1} - (1+a+b) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m} - ab \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m} = 0$$

olur. denklemi sadeleştirmek için, tüm üstleri en küçük üst olan $n + m - 1$ 'e

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+m-1)(n+m-2)z^{n+m-1} \\ + c \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m-1} - (1+a+b) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+m-1)z^{n+m-1} \\ - ab \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^{n+m-1} = 0$$

eşitlememiz gerekmektedir. Buradan ilk terimleri ayırıp, toplamı sıfırdan başlatırsak,

$$a_0(m(m-1) + cm)z^{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+m)(n+m-1)z^{n+m-1} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+m-1)(n+m-2)z^{n+m-1} \\ + c \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+m)z^{n+m-1} - (1+a+b) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(n+m-1)z^{n+m-1} \\ - ab \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^{n+m-1} = 0 \quad (2.41)$$

elde ederiz. z 'nin tüm kuvvetlerinin, $1, z, z^2 \dots$ lineer bağımsız olması gerektiğinden, z^k 'ların tüm katsayılarının tüm k 'lar için sıfır olması gerekir. İlk terimden,

$$a_0(m(m-1) + cm) = 0 \quad (2.42)$$

denklemini eleriz. Bu denkleme "indis denklemi" denir. $a_0 \neq 0$ olduğundan,

$$m(m-1+c) = 0.$$

olur. Buradan,

$$m_1 = 0, m_2 = 1 - c \quad (2.43)$$

olarak $z = 0$ a karşılık gelen üstler bulunmuş olur. Diğer terimlerden de,

$$\begin{aligned} & ((n+m)(n+m-1) + c(n+m))a_n \\ & + (-(n+m-1)(n+m-2) - (1+a+b)(n+m-1) - ab)a_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

elde edilir. Bu da,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+m-1)(n+m-2) + (1+a+b)(n+m-1) + ab}{(n+m)(n+m-1) + c(n+m)} a_{n-1} \\ &= \frac{(n+m-1)(n+m+a+b-1) + ab}{(n+m)(n+m+c-1)} a_{n-1} \end{aligned}$$

Fakat,

$$\begin{aligned} & (n+m-1)(n+m+a+b-1) + ab \\ &= (n+m-1)(n+m+a-1) + (n+m-1)b + ab \\ &= (n+m-1)(n+m+a-1) + b(n+m+a-1) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$a_n = \frac{(n+m+a-1)(n+m+b-1)}{(n+m)(n+m+c-1)} a_{n-1}, n > 1. \quad (2.45)$$

yineleme bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntıda, a_n 'i a_{n-1} yerine a_0 ile ifade ederek sadeleştirirsek,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(m+a)(m+b)}{(m+1)(m+c)} a_0 \\ a_2 &= \frac{(m+a+1)(m+b+1)}{(m+2)(m+c+1)} a_1 = \frac{(m+a+1)(m+a)(m+b)(m+b+1)}{(m+2)(m+1)(m+c)(m+c+1)} a_0 \\ &= \frac{(m+a)_2(m+b)_2}{(m+1)_2(m+c)_2} a_0 \\ a_3 &= \frac{(m+a+2)(m+b+2)}{(m+3)(m+c+2)} a_2 = \frac{(m+a)_2(m+a+2)(m+b)_2(m+b+2)}{(m+1)_2(m+3)(m+c)_2(m+c+2)} a_0 \\ &= \frac{(m+a)_3(m+b)_3}{(m+1)_3(m+c)_3} a_0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Yukarıdaki ifadede,

$$(u)_r = \begin{cases} 1 & r=0 \\ u(u+1)(u+2)\dots(u+r-1) & r=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

olarak bilinen Pochhammer sembolüdür. a_n 'e kadar tüm terimleri hesaplırsak,

$$a_n = \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} a_0, n > 0 \quad (2.46)$$

a_n 'i a_0 cinsinden bulmuş oluruz. Bulduğumuz bu değeri yerine yazarsak, çözümü

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^{n+m}. \quad (2.47)$$

olarak elde ederiz. Ayrıca,

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n$$

,

$$(a)_r = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

ve

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$$

olmak üzere $z=0$ tekilliğine karşılık gelen çözümünü $|1-c|$ 'nin tüm özel durumları için ayrı ayrı incelememiz gerekir [6].

1) $|1-c|$ (ya da c) tamsayı olmadığına da :

$$y(z) = c_1 {}_2F_1(a, b, c; z) + c_2 z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z) \quad (2.48)$$

olarak elde edilir. $|1-c|$ üstler farkı sıfır veya pozitif bir tamsayı ise, (3.20) karşılık gelen ikinci çözüm lineer bağımlı olur ve bu durumda logaritmik terimler devreye girer.

2) $|1-c| = 0$ olduğunda çözüm :

$c = 1$ olduğundan,

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n^2} z^{n+m}. \quad (2.49)$$

olur. Buradan,

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(1)_n} z^n = a_0 {}_2F_1(a, b; 1; z) \quad (2.50)$$

$$y_2 = \left. \frac{\partial y}{\partial m} \right|_{m=0} \quad (2.51)$$

burada M_n

$$M_n = \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n^2}. \quad (2.52)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu türevi hesaplamak için, her iki tarafının logaritmasını alırsak,

$$\begin{aligned}\ln(M_n) &= \ln\left(\frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n^2}\right) \\ &= \ln(m+a)_n + \ln(m+b)_n - 2\ln(m+1)_n\end{aligned}\quad (2.53)$$

elde ederiz. Fakat,

$$\begin{aligned}\ln(m+a)_n &= \ln((m+a)(m+a+1)\cdots(m+a+n-1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln(m+a+k).\end{aligned}\quad (2.54)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\ln(M_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln(m+a+k) + \sum_{k=0}^{n-1} \ln(m+b+k) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \ln(m+1+k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(m+a+k) + \ln(m+b+k) - 2\ln(m+1+k))\end{aligned}\quad (2.55)$$

bulunur. Denklemin iki tarafında “ m ” ye göre diferansiyelini alırsak,

$$\frac{1}{M_n} \frac{\partial M_n}{\partial m} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{2}{m+1+k} \right). \quad (2.56)$$

elde ederiz. Buradan da,

$$\frac{\partial M_n}{\partial m} = \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{2}{m+1+k} \right). \quad (2.57)$$

olarak bulunur.

$$y = a_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n^2} z^n = a_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n. \quad (2.58)$$

olduğundan, $c = 1$ için denklemin çözümü

$$\begin{aligned}y(z) &= C_2 F_1(a, b; 1; z) \\ &+ D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n^2} \left(\ln z + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} - \frac{2}{1+k} \right) \right) z^n\end{aligned}\quad (2.59)$$

olur.

3) $c \neq 1$ olan negatif tamsayı ($c \leq 0$) olduğunda çözüm :

Yineleme denkleminden,

$$a_n = \frac{(n+m+a-1)(n+m+b-1)}{(n+m)(n+m+c-1)} a_{n-1}, \quad (2.60)$$

elde edilir. En küçük kök olan $m = 0$ için, $a_{1-m} \rightarrow \infty$ olur. Bu yüzden, çözümü sonsuz yapan m_i kökleri için $a_0 = b_0(m - m_i)$ dönüşümü gerçekleştiririz. Eğer $a_0 = b_0 m$ alırsak, çözümü

$$y_b = b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^n \quad (2.61)$$

olarak buluruz. Sonra $y_1 = y_b|_m = 0$ olur. Görüldüğü üzere,

$$\frac{m(m+a)_{1-c}(m+b)_{1-c}}{(m+1)_{1-c}(m+c)_{1-c}} z^{1-c} \quad (2.62)$$

teriminden önceki tüm terimler 0 olur çünkü “ m ” terimi 0 a gider. Bunu açık olarak görmek için Pochhammer sembolünü

$$(m+c)_{1-c} = (m+c)(m+c+1) \cdots m \quad (2.63)$$

açabiliriz.

Bundan dolayı, artık çözümümüz aşağıdaki biçimi alır.

$$\begin{aligned} y_1 &= b_0 \left(\frac{(a)_{1-c}(b)_{1-c}}{(1)_{1-c}(c)_{-c}} z^{1-c} + \frac{(a)_{2-c}(b)_{2-c}}{(1)_{2-c}(c)_{-c}(1)} z^{2-c} + \frac{(a)_{3-c}(b)_{3-c}}{(1)_{3-c}(c)_{-c}(1)(2)} z^{3-c} + \cdots \right) \\ &= \frac{b_0}{(c)_{-c}} \sum_{n=1-c}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(1)_{n+c-1}} z^n. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Diğer taraftan ikinci çözüm,

$$y_2 = \frac{\partial y_b}{\partial m} \Big|_{m=1-c} \quad (2.65)$$

olarak bulunur.

$$M_n = \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n}. \quad (2.66)$$

olarak tanımlanan M_n değerinin türevini hesaplamak için, bir önceki durumda yararlandığımız logaritmik türev metodunu tekrar kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial m} &= \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{m} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

elde ederiz,

$$y_b = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^{n+m} = b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n \quad (2.68)$$

olduğundan,

$$\frac{\partial y}{\partial m} = b_0 z^m \ln(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^n + b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \left\{ \frac{1}{m} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right\} z^n$$

olur.

$$\frac{\partial y}{\partial m} = b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \left(\ln z + \frac{1}{m} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right) z^n. \quad (2.69)$$

$m = 1 - c$ de y_2 yi buluruz. Çözümüm, $y = E' y_1 + F' y_2$ biçiminde olduğundan.

$E' b_0 = E$ ve $F' b_0 = F$ olarak tanımlarsak, bu kez çözüm

$$y = \frac{E}{(c)_{-c}} \sum_{n=1-c}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(1)_{n+c-1}} z^n + F z^{1-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-c)(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(2-c)_n(1)_n} \left(\ln z + \frac{1}{1-c} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k+1-c} + \frac{1}{b+k+1-c} - \frac{1}{2+k-c} - \frac{1}{1+k} \right) \right) z^n \quad (2.70)$$

olarak bulunur.

4) $c > 1$ olan pozitif tamsayı olduğunda çözüm :

Yineleme denkleminde

$$a_n = \frac{(n+m+a-1)(n+m+b-1)}{(n+m)(n+m+c-1)} a_{n-1} \quad (2.71)$$

biliyoruz ki $m = 1 - c$ olduğunda, $a_{m-1} \rightarrow \infty$ olur. Burada çözümü sonsuz yapan m_i kökleri için $a_0 = b_0(m - m_i)$ dönüşümü yapabiliriz. $a_0 = b_0(m + c - 1)$ dönüşümü ile çözüm,

$$y_b = b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^n \quad (2.72)$$

biçimi alır. $y_1 = y_b|_{m \rightarrow 1-m}$ alırsak,

$$\frac{(m+c-1)(m+a)_{c-1}(m+b)_{c-1}}{(m+1)_{c-1}(m+c)_{c-1}} z^{c-1} \quad (2.73)$$

teriminden önceki tüm terimler “ $m+c-1$ ” terimi sıfır olduğu için sıfır olur. Bunu net olarak görmek için Pochhammer sembolünü açabiliriz.

$$(m+1)_{c-1} = (m+1)(m+2)\cdots(m+c-1). \quad (2.74)$$

Bundan dolayı, çözüm

$$\begin{aligned} y_1 &= b_0 z^{1-c} \\ &\left(\frac{(a+1-c)_{c-1}(b+1-c)_{c-1}}{(2-c)_{c-2}(1)_{c-1}} z^{c-1} + \frac{(a+1-c)_c(b+1-c)_c}{(2-c)_{c-2}(1)(1)_c} z^c + \cdots \right) \\ &= \frac{b_0}{(2-c)_{c-2}} z^{1-c} \sum_{n=c-1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n(b+1-c)_n}{(1)_n(1)_{n+1-c}} z^n \end{aligned} \quad (2.75)$$

şeklini alır. Şimdi ikinci çözüm olan y_2 'yi

$$y_2 = \left. \frac{\partial y_b}{\partial m} \right|_{m=0} \quad (2.76)$$

bulmak için,

$$M_n = \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \quad (2.77)$$

ifadesinin türevini hesaplamamız gerekir. Logaritmik türev yardımıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_n}{\partial m} &= \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \left(\frac{1}{m+c-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.78)$$

elde ederiz.

$$y_b = b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^{n+m} = b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^n. \quad (2.79)$$

dekleminde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial m} &= b_0 z^m \ln(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} z^n + \\ &+ b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \left(\frac{1}{m+c-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right) z^n \\ &= b_0 z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+c-1)(m+a)_n(m+b)_n}{(m+1)_n(m+c)_n} \left(\ln z + \frac{1}{m+c-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+a+k} + \frac{1}{m+b+k} - \frac{1}{m+1+k} - \frac{1}{m+c+k} \right) \right) z^n \end{aligned} \quad (2.80)$$

denklemleri elde edilir. $m = 0$ için de y_2 hesaplanır. Çözüm, $y = G'y_1 + H'y_2$ biçimindedir. $G'b_0 = E$ ve $H'b_0 = F$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
y = & \frac{G}{(2-c)_{c-2}} z^{1-c} \sum_{n=c-1}^{\infty} \frac{(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{(1)_n (1)_{n+1-c}} z^n \\
& + H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-c)(a+1-c)_n (b+1-c)_n}{(2-c)_n (1)_n} \left(\ln z + \frac{1}{c-1} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{c+k} \right) \right) z^n
\end{aligned} \tag{2.81}$$

olarak bulunur.

$z = 1$ tekilliğine karşılık gelen çözümü :

1) $|c-a-b|$ tamsayı olmadığında ;

$$y(z) = c_1 {}_2F_1(a, b, a+b-c; 1-z) + c_2 (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, 1-c-b-c; 1-z) \tag{2.82}$$

olarak elde edilir. $|c-a-b|$ üstler farkı sıfır veya pozitif bir tamsayı ise, (2.82) karşılık gelen ikinci çözüm lineer bağımlı olur ve bu durumda logaritmik terimler devreye girer.

2) $|c-a-b| = 0$ olduğunda ;

$$\begin{aligned}
y = & C \cdot {}_2F_1(a, b; 1; 1-z) \\
& + D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n^2} \left(\ln(1-z) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} - \frac{2}{1+k} \right) \right) (1-z)^n
\end{aligned} \tag{2.83}$$

3) $|c-a-b| > 0$ olan bir tamsayı olduğunda ;

$$\begin{aligned}
y = & \frac{E}{(a+b-c+1)_{c-a-b-1}} \sum_{n=1-c}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n (1)_{n+a+b-c}} (1-z)^n + F (1-z)^{c-a-b} \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)(c-b)_n (c-a)_n}{(1+c-a-b)_n (1)_n} \left(\ln(1-z) + \frac{1}{c-a-b} \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{k+c-b} + \frac{1}{k+c-a} - \frac{1}{1+k+c-a-b} - \frac{1}{1+k} \right) \right) (1-z)^n
\end{aligned} \tag{2.84}$$

4) $|c - a - b| < 0$ olan bir tamsayı olduğunda ;

$$\begin{aligned}
y = & \frac{G}{(1+c-a-b)_{a+b-c-1}} (1-z)^{c-a-b} \sum_{n=a+b-c}^{\infty} \frac{(c-b)_n (c-a)_n}{(1)_n (1)_{n+c-a-b}} (1-z)^n + \\
& + H \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)(c-b)_n (c-a)_n}{(1+c-a-b)_n (1)_n} \left(\ln(1-z) + \frac{1}{a+b-c} + \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{b+k} - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{a+b-c+1+k} \right) \right) (1-z)^n
\end{aligned} \tag{2.85}$$

olarak bulunur [7].

$z = \infty$ tekilliğine karşılık gelen çözüm :

1) $|a - b|$ tam sayı olmadığında,

$$y(z) = c_1 z^{-a} {}_2F_1(a, a-c+1, a-b+1; \frac{1}{z}) + c_2 z^{-b} {}_2F_1(b, b-c+1, b-a+1; \frac{1}{z}) \tag{2.86}$$

olarak elde edilir. $|a - b|$ üstler farkı sıfır veya pozitif bir tamsayı ise, (2.86) karşılık gelen ikinci çözüm lineer bağımlı olur ve bu durumda logaritmik terimler devreye girer.

2) $|a - b| = 0$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
y = & C z_2^{-a} F_1(a, a+1-c; 1; z^{-1}) + D z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{(a)_n (a+1-c)_n}{\Gamma((1)_n)^2} \right) (\ln z^{-1}) + \right. \\
& \left. + D z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{(a)_n (a+1-c)_n}{\Gamma((1)_n)^2} \right) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k} + \frac{1}{a+1-c+k} - \frac{2}{1+k} \right) z^{-n} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.87}$$

3) $|a - b| > 0$ olan bir tamsayı olduğunda,

$$\begin{aligned}
y = & \frac{E}{(b+1-a)_{a-b-1}} \sum_{n=a-b}^{\infty} \frac{(b)_n (b+1-c)_n}{(1)_n (1)_{n+b-a}} z^{-n} \\
& + F z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-b)(a)_n (a+1-c)_n}{(1)_n (a+1-b)_n} \left(\ln z^{-1} + \frac{1}{a-b} \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a+1+k-c} - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{a+1+k-b} \right) \right) z^{-n}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

4) $|a - b| < 0$ olan bir tamsayı olduğunda,

$$\begin{aligned}
y = & \frac{G}{(a+1-b)_{b-a-1}} \sum_{n=b-a}^{\infty} \frac{(a)_n(a+1-c)_n}{(1)_n(1)_{n+a-b}} z^{-n} \\
& + Hz^{-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b-a)(b)_n(b+1-c)_n}{(1)_n(b+1-a)_n} \left(\ln z^{-1} + \frac{1}{b-a} \right. \\
& \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{b+k} + \frac{1}{b+1+k-c} - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{b+1+k-a} \right) \right) z^{-n}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

olarak bulunur [7].

Hipergeometrik denklemin çözümleri, hipergeometrik seriler yardımıyla ifade edilebildiğini, yukarıdaki çözümleri incelediğimizde görmekteyiz. Peki

$${}_2F_1(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} z^n \tag{2.90}$$

ile temsil edilen hipergeometrik seriler hangi koşullar altında yakınsaktır?

Hipergeometrik serilerin yakınsaklığını oran kriterini uygulayarak görebiliriz.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(n+1)!(c)_{n+1}} \right) \left(\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} \right)^{-1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} \right| |z| = |z|
\end{aligned} \tag{2.91}$$

(2.91) ifadesinden görüldüğü üzere $|z| < 1$ için yakınsaktır.

$|z| = 1$ için yakınsaklığını $z = 1$ ve $z = -1$ için ayrı ayrı incelememiz gerekmektedir.

$z = 1$ Gauss kriterini uygulayarak, hangi koşullar altında yakınsak olduğunu görebiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} = \frac{(1+\frac{a}{n})(1+\frac{b}{n})}{(1+\frac{1}{n})} (1+\frac{c}{n}) \\
&= \frac{1+\frac{a+b}{n}+O(\frac{1}{n^2})}{1+\frac{c+1}{n}+O(\frac{1}{n^2})} \\
&= \left(1+\frac{a+b}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \right) \left(1-\frac{c+1}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \right) \\
&= \left(1-\frac{1+c-a-b}{n}+O(\frac{1}{n^2}) \right)
\end{aligned} \tag{2.92}$$

olduğundan $c - a - b > 0$ olduğunda yakınsaktır. $z = 1$ için bir başka ispatı da "Stirling Formülünü" kullanarak gösterebiliriz [3].

$z = -1$ için ise Leibnitz kriterini uygulamız gerekir, çünkü $z = -1$ için elde edeceğimiz seri bir alterne seridir. Bu durumda, Leibnitz kriterine göre $c - a - b + 1 > 0$ olduğu zaman yakınsak olur.

Sonuç olarak, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ hipergeometrik serisinin yakınsaklığı $|z| < 1$ olduğunda oran kriteri, $z = 1$ olduğunda Gauss kriteri ve $z = -1$ olduğunda ise Leibnitz kriteri uygulanarak görülebilir. $|z| > 1$ olduğunda hipergeometrik seri her zaman ıraksaktır [6].

Ayrıca c sıfır veya negatif bir tamsayı değilse, ${}_2F_1(a, b, c; z)$ her zaman analitik bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonlar, hipergeometrik fonksiyonlar olarak da adlandırılır.

2.2.3 Heun Denklemini (n= 3)

$$\begin{aligned} L_z(a, b, c, d; t)y(z) = & \lambda y(z) + (z(1-z)(z-t))y''(z) + (c(z-1)(z-t) + dz(z-t) \\ & + (c - (a+b+1-c-d)z(z-1)))y'(z) + (abz - \lambda)y(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.93)$$

(2.93) denklemi dört adet tekilliğe sahip Fuchs denklemidir. Fuchs denkleminin bu formu "Heun denklemi" olarak bilinir ve bu denklem tarafından M_3 lineer ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sınıfı oluşturulur.

Heun denkleminin genel formu 12 karmaşık parametre ile karakterize edilir. Bu parametrelerden 4'ü tekilliklerin yerini belirtir. 7 tanesi karakteristik üstlerdir. Kalan 1 tanesi ise lokal olmayan yardımcı bir parametredir. Möbius dönüşümü ile tekilliklerin 3 tanesi 0, 1 ve ∞ 'a sabitlenebilir. Ayrıca bu tekilliklere karşılık gelen 3 karakteristik üste de 0 değeri atılabilir. Dolayısıyla Heun denkleminin parametre sayısı 12 den 6'ya indirgenmesi mümkündür. Konfülent denklemde ise bu sayı 5'e indirgenebilir [?].

(2.93) Heun denkleminin Riemann şeması aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & t & \infty \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 1-c & 1-d & c+d-a-b & b \end{array} ; z \right) \quad (2.94)$$

(2.93) denklemin lokal çözümlerini bu dört tekilliğin civarında kurabiliriz. Denklemin standart çözümü,

$$c \neq 0, 1, 2, \dots, |z| < \min(|t|, 1)$$

koşulları altında geçerlidir.

$$y_1(z) = y_1(a, b, c, d; t; \lambda; z = 0, z), \quad y_1(0) = 1$$

Bu çözüm "Heun fonksiyonu" dur. Bu fonksiyon, sıfırdaki iki Frobenius çözümünden biridir.

$$y_1(z) = \sum_0^{\infty} g_k z^k \quad (2.95)$$

g_k katsayısı, (2.95) in (2.93) denkleminde yerine koyulmasıyla elde edilen üç terimli yineleme bağıntısından bulunur

$$\begin{aligned} & t(k+1)(k+c)g_{k+1} \\ & - [k((k-1+c)(l+t) + dt + a + b + 1 - c - d) + \lambda]g_k \\ & + (k-1+\alpha)(k-1+b)g_{k-1} = 0 \\ & g_0 = 1. \end{aligned}$$

Heun denkleminin diğer lineer bağımsız çözümü ise

$$\begin{aligned} & y_2(a, b, c, d; t; \lambda; z = 0, z) \\ & = z^{1-c} y_1(a+1-c, b+1-c, 2-c, d, ; t, \lambda'; z = 0, z) \\ & \lambda' = \lambda + (a+b+1-c)(1-c) \end{aligned} \quad (2.96)$$

şeklindedir.

(2.93) denklemini, tekilliklerinin daha simetrik konumlarda olduğu

$$\begin{aligned} L_z(a, b; c, d; t)y(z) &= \lambda y(z) + (z^2 - 1)(z - t)y''(z) + (c(z - 1)(z - t) \\ &+ dz(z - t)(z + t) + ((a + b + 1 - c - d)(z^2 - 1))y'(z)) \\ &+ (abz - \lambda)y(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

biçiminde de yazabiliriz. Bu denklemde,

- (1) Boyutsuz lokal parametreler a, b, c ve d Frobenius çözümündeki tekilliklere karşılık gelen karakteristik üstleri belirler.
- (2) Ölçeklendirme parametresi t , bir tekilliğin konumu belirler.
- (3) Yardımcı parametre λ , çoğunlukla spektral bir parametre olarak sunulur.

$c = d = c + d - a - b = 1/2$ koşulu altında (2.93) denkleminin $z = 0$, $z = 1$ ve $z = t$ olan üç elementer tekilliği "Lamé denklemleri" olarak bilinir.

2.3 Konflüent Denklemler

Konflüent denklemler, denklemlerin düzenli sonlu bir tekil noktası ile $z = \infty$ düzenli tekil noktasının sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla ortaya çıkar. Bu birleşme sonucunda denklemlerin parametre sayıları 1 azalırken, sonsuzdaki tekilliğin derecesi 1 artar [6].

2.3.1 Konflüent Hipergeometrik Denklem

Konflüent hipergeometrik denklem, (2.28) hipergeometrik denkleminde $z \rightarrow \frac{z}{b}$, $b \rightarrow \infty$ iken, iki düzenli tekilliğinin $z = 1$ ve $z = \infty$ sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla ortaya çıkar.

$$L_z(a, c; 1)y(z) := zy''(z) + (c - z)y'(z) - ay(z) \quad (2.98)$$

konflüent denklemi, Riemann P-Sembolu ile

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{cc} 0 & \infty \\ 0 & a \\ 1 - c & a - c \\ & 0 \\ & 1 \end{array} ; z \right) \quad (2.99)$$

olarak gösterilir. (2.98) denkleminde eş olan diferansiyel operatörü (2.100) ile tanımlanırsa,

$$(L_z(a, c; 1))^* = L_z(2 - c, 1 - a; -1) \quad (2.100)$$

bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz

$$y = z^{-c/2}(e)^{z/2}w$$

f-homotopik dönüşümü ile (2.98) denklemi (2.101) normal biçimine dönüştürülebilir.

$$N_z(a; c)w(y) := w''(z) + \left[-\frac{1}{4} - \frac{a - c/2}{z} + \frac{1 - (1 - c)^2}{4z^2}\right]w(z) = 0 \quad (2.101)$$

(2.101) denklemi aynı zamanda "Whittaker denklemi" olarak da bilinir.

(2.98) konflüent hipergeometrik denkleminin $c \neq 0, 1, 2, \dots$ koşulları altında genel

çözümü

$$y(z) = c_1 {}_1F_1(a, c; z) + c_2 z^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; z) \quad (2.102)$$

olarak bulunur. $|1 - c|$ üstler farkı sıfır veya pozitif bir tamsayı değil ise, ikinci çözüm lineer bağımlı olur ve bu durumda logaritmik terimler devreye girer [6].

2.3.2 Konflüent Heun Denklemi

Konflüent Heun denklemi, (2.93) Heun denkleminde iki düzenli tekilliğinin $z = t$ ve $z = \infty$ sonsuzda düzensiz bir tekilliğe yol açmasıyla ortaya çıkar.

$$L_z(a; c, d; t;)y(z) - \lambda y(z) = z(1 - z)y''(z) - [-tz(z - 1) + dz + c(z - 1)]y'(z) + (-ta z - \lambda)y(z) = 0 \quad (2.103)$$

denklemi konflüent Heun denklemidir. Bu denkleme karşılık gelen Riemann şeması

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & 1 - d & c + d - a \end{array} ; z \right) \quad (2.104)$$

olarak yazılabilir. (2.103) - (2.104) denklemlerindeki λ yardımcı parametredir. a, c ve d parametreleri lokal parametrelerdir. Ölçeklendirme parametresi olan t , Heun denkleminin aksine, konflüent Heun denkleminde tekilliğin yerini değil, dönme noktalarının yerini belirtir [4].

2.4 Otomorfizma Grupları

Otomorfizma, matematiksel bir nesnenin kendisinden kendisine olan izomorfizmadır. Bu kendisinden kendisine olan dönüşümler, nesnenin tüm yapısını koruyarak gerçekleşir. Tüm otomorfizmaların kümesi grup oluşturur, ve bu gruba otomorfizma grubu denir. Otomorfizma, aynı zamanda endomorfizmadır ve izomorfizmadır.

2.4.1 Hipergeometrik Denklemin Otomorfizmaları

Bağımsız değişkene göre gerçekleştirilen herhangi bir tekil M Möbius dönüşümünü, CP^1 da herhangi bir üç noktayı, herhangi bir üç noktaya götürür. Ve bu dönüşüm sırasında, Riemann P-fonksiyonu teorisine göre karakteristik üstler korunur. Birbirinden farklı $A, B, C, D \in CP^1$ noktaları için tanımlanan,

$$(A, B, C, D) := \frac{(C-A)(D-B)}{(D-A)(C-B)} \in CP^1 \setminus (0, 1, \infty) \quad (2.105)$$

çapraz oran, Möbius dönüşümleri altında invariant kalır. A, B, C, D 'nin permutasyonları $CP^1 \setminus (0, 1, \infty)$ üzerinde bir S_4 simetri grubu oluşturur. Yukarıda tanımlanan çapraz oranda görüldüğü üzere, çapraz oran ifadesi A, B ve C, D ikililerin birbirleriyle değişimlerinden de etkilenmez. Dolayısıyla $\frac{4!}{2!2!} = 3! = 6$ adet çapraz oran bulmamız mümkündür. Bu da gösteriyor ki hipergeometrik denklem için, tekillikleri herhangi bir (z_1, z_2, z_3) noktasına öteleyen $3!$ Möbiüs dönüşümü permütasyonu vardır. Yani herhangi üç noktadan oluşan gruba, bu üç noktanın permütasyon grubuna götüren altı lineer kesirli dönüşüm mevcuttur.

O halde, tekillikleri $z = 0, 1, \infty$ yapan altı Möbius dönüşümü bulunabileceği gibi $0, 1, \infty$ noktalar kümesini de, kendisine götüren altı adet lineer kesirli dönüşüm mevcuttur. Bu dönüşümler, hipergeometrik denklemi invariant kılan projektif dönüşümler olarak ifade edilir.

Fakat eğer, tekilliklerde dönüşüm lineer değilse ve üstlerin değişimini korumuyorsa, f-homotopik dönüşüm uygulanır. Bu durumda, hipergometrik yapısı, bağımlı değişkene göre yapılan f-homotopik dönüşümlerle korunur.

Örneğin $M(\infty) \neq \infty$, gerçekleştirilecek dönüşüm hipergeometrik denklemin genel bir hali olmayacaktır, çünkü $M(\infty)$ daki karakteristik üstlerin ikisi de sıfırdan farklı olacaktır. O halde, f-homotopik dönüşümün $y(z) = [z - M(\infty)]^{-a}y(z)$ veya $y(z) = [z - M(\infty)]^{-b}y(z)$ permutasyonları da takip edilmelidir [8].

Tanım 2. 4. 1 $Aut(h)$ olarak tanımlanan (2.28) hipergometrik denkleminin otomorfizma grubu, bağımsız değişkene göre gerçekleştirilen Möbius dönüşümü ve bağımlı değişkene göre gerçekleştirilen lineer f-homotopik dönüşümlerinden, (2.28) hipergeometrik denklemini parametre dönüşümüne karşı değişmez kılan, değişken değişimlerinin grubuna denir.

Riemann küresinin bir otomorfizma grubu olan "Möbius grubu", tüm Möbius dönüşümlerin birleşim işlemi altında oluşturduğu bir gruptur. Bu grubun alt

grupları karmaşık düzlem ve hiperbolik düzlem gibi diğer basit bağlantılı Riemann yüzeylerinde de otomorfizma grubu oluşturur. Her Riemann yüzeyinin temel grubu, Fuchs grubu, Klein grubu gibi Möbius grubun ayrık bir alt grubudur. Bu alt gruplar içinde, Modüler grup Möbius grubunun önemli bir ayrık alt grubudur ve özellikle fraktallar, modüler biçimler ve eliptik eğriler gibi çeşitli teorilerin merkezindedir [?].

$$(z(1-z))y''(z) + (c - (a+b+1))y'(z) - aby(z) = 0 \quad (2.106)$$

hipergeometrik denklemi

$$R(a, b, c) := \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} ; z \right) \quad (2.107)$$

bağımlı ve bağımsız değişkenlere göre gerçekleştirilecek uygun dönüşümlerle, $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ ve $M \in \text{Aut}(\mathbb{C} - 0, 1)$ olmak üzere

$$u(z) \rightarrow z^\mu (1-z)^\nu u(M(z)), \quad z \rightarrow M(z) \quad (2.108)$$

başka bir hipergeometrik denkleme dönüştürülebilir.

$$H := \text{Aut}(\mathbb{C} - 0, 1) = z \rightarrow z, \quad 1-z, \quad 1/z, \quad 1/(1-z), \quad z/(z-1), \quad (z-1)/z \quad (2.109)$$

olarak tanımlanan otomorfizması $0, 1, \infty$ kümesi üzerinde tam bir permütasyon grubu oluşturur ve her $M \in H$ için tekil olmayan bir

$$\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_\infty)$$

vektörü vardır ki $\mu_0 + \mu_1 + \mu_\infty = 0$ koşulu korunsun [3].

Öyleki,

$$R(M, \mu) = \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} M(0) & M(1) & M(\infty) \\ 0 + \mu_{M(0)} & 0 + \mu_{M(1)} & a + \mu_{M(\infty)} \\ 1-c + \mu_{M(0)} & c-a-b + \mu_{M(1)} & b + \mu_{M(\infty)} \end{array} ; z \right) \quad (2.110)$$

$R(a_1, b_1, c_1)$ formundadır.

Örneğin, $M(z)$, $z \rightarrow 1/z$ olarak seçilirse, keyfi $\mu = (-a, 0, a)$ vektörü için,

$$\begin{aligned} R(M, \mu) &= \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} M(0) = \infty & M(1) = 1 & M(\infty) = 0 \\ 0+a & 0+0 & a-a \\ 1-c+a & c-a-b & b-a \end{array} ; z \right) \\ &= \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ b-a & c-a-b & 1-c+a \end{array} ; z \right) \\ &= R(a, a-c+1, a+1-b) \end{aligned} \quad (2.111)$$

bulunur. Permütasyon sınıfının diğer elemanları için de,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1-c & b & c-a-b \end{pmatrix} ; z = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & a & 0 \\ c-a-b & b & 1-c \end{pmatrix} ; 1-z \\
& = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{pmatrix} ; \frac{z}{1-z} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ a & 0 & a \\ b & 1-c & c-a-b \end{pmatrix} ; \frac{1}{z} \\
& = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & 0 & a \\ c-a-b & b & 1-c \end{pmatrix} ; \frac{z-1}{z}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Görüldüğü üzere, **(2.109)** dönüşümleri ile hipergeometrik denklemin yapısı bozulmaz. Dönüşümler neticesinde elde edilen denklem yine bir hipergeometrik denklem olur. Bu yolla 24 adet (M, μ) ikilisi buluruz. Bu yirmidört ikili 24 Riemann şemasına karşılık gelir ve her birinin çözümü

$$y^{\mu_0}(1-y)^{\mu_1}f(M^{-1}(y))$$

formundadır. Burada, f **(2.106)** hipergeometrik denkleminin çözümüdür. Bu çözüme karşılık gelen $F(a, b, c, M(z))$ seri açılımı da,

$$M(z)^{\mu_0}(1-M(z))^{\mu_1}F(a, b, c, M(z))$$

hipergeometrik denklemin bir çözümünün başka bir ifade ediliş biçimidir. Bu sayede yirmidört adet çözümü de,

$$z^{\mu}(1-z)^{\nu}F(a, b, c, M(z)) \tag{2.112}$$

formunda elde etmiş oluruz. Bu çözümler "Kummer çözümleri" olarak adlandırılır [9].

(2.106) hipergeometrik denkleminin;

- F-homotopik $(Z_2)^2$ grup otomorfizması
- $(0, 1, \infty)$ den $(0, 1, \infty)$ üzerine olan bir eşyazımlı (S_3) grup otomorfizması
- $(Z_2)^2 \times (S_3)$ e izomorfik Kummer grubunun, mertebesi $2^2 \times 3! = 24$ olan tam bir izomorfizma grubu

vardır. $z = 0$ da mertebesi 4 olan altgruplara sahip her bir otomorfizma ${}_2F_1(a, b, c; z)$ ile denk olarak ifade edilebilir. Bunlar,

1. ${}_2F_1(a, b, c; z)$ 'ın kendisi
2. $(1 - z)^{c-a-b} {}_2F_1(c - a, c - b, c; z)$
3. $(1 - z)^{-a} {}_2F_1(a, c - b, c; z/(z - 1))$
4. $(1 - z)^{-b} {}_2F_1(c - a, b, c; z/(z - 1))$

olarak belirtilmiştir. Hipergeometrik denklemin 3 tekil noktasına karşılık gelen 6 lokal çözüm için yukarıdaki gibi 6 ayrı küme bulunur. $z = 0$ özelinde, bu kümelerden bir tanesi yukarıdaki, diğeri ise karakteristik denkleminin $1 - c$ üstüne karşılık karşılık gelen

$${}_2F_1(a, b, c; z) = (z)^{1-c} {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c; z)$$

kümesi elde edilir [8].

Kummer'in 24 çözümü, bu 4 denklik sınıfı ile 6 ya ayrılır. Bu çözümlerin tamamı Yudell L. Luke'nin "The Special Functions and Their Approximations" isimli kitabında yer verilmiştir [10].

2.4.2 Heun Denklemin Otomorfizmaları

Tanım 2. 4. 1 $\text{Aut}(H)$ olarak tanımlanan **(2.93)** Heun denkleminin otomorfizma grubu, **(2.93)** Heun denklemini parametre dönüşümüne karşın değişmez kılan, değişken değişimlerinin grubuna denir.

Heun denklemin otomorfizma grupları, Hipergometrik denkleme göre biraz daha karışıktır. Çünkü herhangi bir $t' \in CP^1 \setminus (0, 1, \infty)$ için $z = 0, 1, \infty$, d tekil noktalarını $z = 0, 1, \infty$, t' üzerine götüren 4! adet M Möbius dönüşümü söz konusudur. Bu 4! dönüşümün 3! tanesi $z = \infty$ ile sabitlenir. t' in tüm değerleri lineer kesirli dönüşümlerle elde edilebilir. Fakat eğer M, tekilliklerde dönüşüm lineer değilse, bu durum da, f-homotopik dönüşümün $y(z) = [z - M(\infty)]^{-a} y(z)$ veya $y(z) = [z - M(\infty)]^{-b} y(z)$ permutasyonları da takip edilmelidir [8].

(2.93) Heun denkleminin;

- F-homotopik $(Z_2)^3$ grup otomorfizması

- $(0, 1, t, \infty)$ den $(0, 1, t', \infty)$ üzerine olan bir eşyazımlı (S_4) grup otomorfizması
- $(Z_2)^3 \times (S_4)$ e izomorfik Heun grubunun, mertebesi $2^3 \times 4! = 192$ olan tam bir izomorfizma grubu

vardır. $z = 0$ da mertebesi 24 olan altgruplara sahip her bir otomorfizma $y_1(a, b; c, d; t; \lambda; z)$ ile denk olarak ifade edilebilir. Bunlar,

1. $y_1(a, b; c, d, t, \lambda; z)$ 'ın kendisi
2. $y_1(1/t, b/t; a, b, c; a + b - c - d + 1; z/t)$
3. ve 22 adet diğerleri

olarak belirtilmiştir. Heun'un 192 çözümü, bu 24 denklik sınıfı ile 8 e ayrılır. Bu çözümlerin tamamı Robert Mayer tarafından "The 192 solutions of the Heun Equation" isimli makalesinde yer vermiştir [9].

.

3. FİZİK VE MATEMATİKTE UYGULAMALAR

Örnek 3.1 Farklı potansiyeller için Schrödinger denklemi olarak bilinen

$$\Psi''(z) + \left(\frac{V_0}{\cosh^2 z} - E \right) \Psi(z) = 0, \quad V_0 > 0, \quad E > 0 \quad (3.1)$$

denklemini, bağımlı ve bağımsız değişkene göre uygulayacağınız dönüşümlerle hipergeometrik denkleme çevriniz.

(3.1) denkleminde $t = \tanh z$ dönüşümü gerçekleştirek,

$$\begin{aligned} \tanh^2 z &= 1 - \frac{1}{\cosh^2 z} = t^2 \\ \cosh^2 z &= \frac{1}{1-t^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerden de faydalanarak,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dz} &= 1 - \tanh^2 z = 1 - t^2 \\ \frac{d\Psi}{dz} &= \frac{d\Psi}{dt} \frac{dt}{dz} = (1-t^2) \frac{d\Psi}{dt} \\ \frac{d^2\Psi}{dz^2} &= (1-t^2) \frac{d}{dt} \left((1-t^2) \frac{d\Psi}{dt} \right) = -2t(1-t^2) \frac{d\Psi}{dt} + (1-t^2)^2 \frac{d^2\Psi}{dt^2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu değerleri (3.1) denkleminde yerine yazarsak,

$$(1-t^2)^2 \Psi''(t) - 2t(1-t^2) \Psi'(t) + (V_0(1-t^2) - E) \Psi(t) = 0 \quad (3.3)$$

(3.4) denklemini elde ederiz. (3.4) denklemi,

$$\Psi''(t) + \frac{-2t}{(1-t)(1+t)} \Psi'(t) + \left(\frac{V_0(1-t^2) - E}{(1-t)^2(1+t)^2} \right) \Psi(t) = 0 \quad (3.4)$$

tekillikleri $-1, 1$ ve ∞ olan Riemann denklemidir. Bu denklem de,

$$\frac{-2t}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{(1-t)} + \frac{B}{(1+t)} = \frac{A(1+t) + B(1-t)}{(1-t^2)}$$

terimi düzenlenirse

$$A(1+t) + B(1-t) = -2t \quad \Rightarrow \quad A = -1, \quad B = 1$$

bulunur.

$$\frac{V_0(1-t^2)-E}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{D}{(1-t)^2} + \frac{F}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1-t)(1+t)}$$

terimi düzenlenirse

$$\begin{aligned} V_0(1-t)(1+t) - E &= D(1+t)^2 + F(1-t)^2 + C(1-t)(1+t) \\ V_0 - V_0t^2 - E &= C - Ct^2 + D + 2tD + Dt^2 + F - 2tF + Ft^2 \\ V_0 - V_0t^2 - E &= (D+F-C)t^2 + 2(D-F)t + F + D + C \\ \Rightarrow \quad C &= \frac{-E}{2} + V_0, \quad D = \frac{-E}{4}, \quad F = \frac{-E}{4} \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. A, B, C, D, E, F , ifadelerini (3.4) denkleminde yerine yazarsak,

$$\Psi''(t) + \left(\frac{-1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\Psi'(t) + \left(\frac{\frac{-E}{4}}{(1-t)^2} + \frac{\frac{-E}{4}}{(1+t)^2} + \frac{\frac{-E}{2} + V_0}{(1-t)(1+t)}\right)\Psi(t) = 0 \quad (3.6)$$

(3.6) denklemini elde ederiz. Bu denkleme ait Riemann-P Şemasını a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 değerlerini

$$\begin{aligned} 1 - a_1 - a_2 &= -1, \quad a_1 a_2 = \frac{-E}{4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 + \frac{\sqrt{4+E}}{2}, \quad a_2 = 1 - \frac{\sqrt{4+E}}{2} \\ 1 - b_1 - b_2 &= 1, \quad b_1 b_2 = \frac{-E}{4} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{\sqrt{E}}{2}, \quad b_2 = -\frac{\sqrt{E}}{2} \\ c_1 + c_2 &= -1, \quad c_1 c_2 = V_0 - E \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{-1 - \sqrt{4(E-V_0)+1}}{2} \\ c_2 &= \frac{-1 + \sqrt{4(E-V_0)+1}}{2} \end{aligned}$$

hesaplayarak

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & \infty \\ \frac{2+\sqrt{4+E}}{2} & \frac{\sqrt{E}}{2} & \frac{-1-\sqrt{4(E-V_0)+1}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{4+E}}{2} & -\frac{\sqrt{E}}{2} & \frac{-1+\sqrt{4(E-V_0)+1}}{2} \end{array} ; t \right) \quad (3.7)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.8) P-Şemasından da açıkça görüldüğü üzere, $\tilde{t} = \frac{t+1}{2}$ lineer dönüşümü ile teklikleri 0,1 ve ∞ noktalarına kaydırabiliriz. $\tilde{t} = 0$ ve $\tilde{t} = 1$ tekliklerine karşılık gelen üstleri sıfır yapacak bir dönüşüm ile, denklemi hipergeometrik denkleme dönüştürmüş oluruz. a_1 ve $b_1 = 0$ yapacak dönüşüm,

$$\tilde{\Psi} = (\tilde{t}-1)^{\frac{\sqrt{E}}{2}} (\tilde{t})^{\frac{2+\sqrt{4+E}}{2}} \Psi(\tilde{t})$$

f-homotopik dönüşümdür. Bu dönüşüm ile,

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{4(E-V_0)+1}+\sqrt{4+E}+\sqrt{E}}{2} \\ -\sqrt{4+E} & -\sqrt{E} & \frac{1+\sqrt{4(E-V_0)+1}+\sqrt{4+E}+\sqrt{E}}{2} \end{array} ; \tilde{t} \right) \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} c &= 1 + \sqrt{4+E}, \quad a = \frac{1 - \sqrt{4(E-V_0)+1} + \sqrt{4+E} + \sqrt{E}}{2} \\ b &= \frac{1 + \sqrt{4(E-V_0)+1} + \sqrt{4+E} + \sqrt{E}}{2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\tilde{t}(1-\tilde{t})\Psi''(\tilde{t}) + (1 + \sqrt{4+E} - (2 + \sqrt{4+E} + \sqrt{E})\tilde{t})\Psi'(\tilde{t}) \\ &- \left(\left(\frac{1 - \sqrt{4(E-V_0)+1} + \sqrt{4+E} + \sqrt{E}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1 + \sqrt{4(E-V_0)+1} + \sqrt{4+E} + \sqrt{E}}{2} \right) \right) \Psi(\tilde{t}) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

denklemini yazılabilir. (3.10) denklemini (3.1) Schrödinger denkleminin karşılık gelen hipergeometrik denklemdir. (3.10) denklemin tekillikleri civarındaki çözümlerini hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla yazabiliriz.

Örnek 3.2 Periyodik potansiyel için Schrödinger denkleminin özel bir hali olarak bilinen Pöschl-Teller,

$$y''(z) + \left(k^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2 z}\right)y(z) = 0, \quad (k, \lambda = \text{sabit}) \quad (3.11)$$

denklemini, bağımlı ve bağımsız değişkene göre uygulayacağınız dönüşümlerle hipergeometrik denkleme çevrin ve tekillikleri civarındaki polinomu çözümlerini yazınız.

(3.11) denkleminde $\xi = \sin^2 z$ dönüşümü gerçekleştirek,

$$\begin{aligned} \cos z &= \sqrt{1-\xi} \\ \frac{d\xi}{dz} &= 2 \sin z \cdot \cos z \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \frac{d}{d\xi} \left(2\sqrt{\xi(1-\xi)} \frac{dy}{d\xi} \right) = 4\xi(1-\xi) \frac{d^2y}{d\xi^2} + 2(1-2\xi) \frac{dy}{d\xi} \end{aligned}$$

olarak hesaplarız. Bu değerleri (3.11) denkleminde yerine yazarsak,

$$4\xi(1-\xi)y''(\xi) + 2(1-2\xi)y'(\xi) + (k^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{(1-\xi)})y(\xi) = 0 \quad (3.12)$$

(3.13) denklemini elde ederiz. (3.13) denklemi,

$$y''(\xi) + \frac{\frac{1}{2}-\xi}{\xi(1-\xi)}y'(\xi) + \frac{\frac{1}{4}(k^2(1-\xi) - \lambda(\lambda-1))\xi}{\xi^2(1-\xi)^2}y(\xi) = 0 \quad (3.13)$$

tekillikleri 0, 1 ve ∞ olan Riemann denklemidir. Bu denkleminde,

$$\frac{\frac{1}{2}-\xi}{\xi(1-\xi)} = \frac{A}{\xi} + \frac{B}{(1-\xi)} = \frac{A(1-\xi) + B\xi}{\xi(1-\xi)}$$

terimi düzenlenirse

$$A(1-\xi) + B\xi = \xi - 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = 1/2, \quad B = 1/2$$

bulunur.

$$\frac{\frac{1}{4}(k^2(1-\xi) - \lambda(\lambda-1))\xi}{\xi^2(1-\xi)^2} = \frac{D}{\xi^2} + \frac{F}{(1-\xi)^2} + \frac{C}{\xi(1-\xi)}$$

terimi düzenlenirse

$$D(1-\xi)^2 + F\xi^2 + C\xi(\xi-1) = \frac{1}{4}(k^2 - \lambda(\lambda-1))\xi - \frac{k^2\xi^2}{4}$$

$$\Rightarrow D = 0, \quad C = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{4}, \quad F = -\frac{\lambda(\lambda-1)}{4}$$

bulunur. A, B, C, D, E, F , ifadelerini (3.13) denkleminde yerine yazarsak,

$$y''(\xi) + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\frac{1}{2}}{(\xi-1)}\right)y'(\xi) + \left(\frac{0}{\xi^2} + \frac{-\frac{\lambda(\lambda-1)}{4}}{(\xi-1)^2} + \frac{-\frac{1}{4}k^2 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{4}}{\xi(\xi-1)}\right)y(\xi) = 0 \quad (3.14)$$

(3.14) denklemini elde ederiz. Bu denkleme ait Riemann-P Şemasını

a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 değerlerini

$$1 - a_1 - a_2 = 1/2, \quad a_1 a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1/2$$

$$1 - b_1 - b_2 = 1/2, \quad b_1 b_2 = -\frac{\lambda(\lambda-1)}{4} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{\lambda}{2}, \quad b_2 = \frac{1-\lambda}{2}$$

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 c_2 = -\frac{1}{4}k^2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{k}{2}, \quad c_2 = -\frac{k}{2}$$

hesaplayarak

$$\mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1-\lambda}{2} & -\frac{k}{2} \end{array} ; \xi \right) \quad (3.15)$$

şeklinde yazabiliriz. **(3.15)** P-Şemasındanda açıkça görüldüğü üzere, $b_1 = \frac{\lambda}{2}$ üstünü sıfır yapacak bir dönüşüm ile, denklemi hipergeometrik denkleme dönüştürmüş oluruz. $b_1 = 0$ yapacak dönüşüm,

$$\tilde{y} = (\xi - 1)^{\frac{\lambda}{2}} y(\xi)$$

f-homotopik dönüşümdür. Bu dönüşüm ile,

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{k+\lambda}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{-k+\lambda}{2} \end{pmatrix}; \xi \quad (3.16)$$

elde edilir. Burada,

$$c = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{k+\lambda}{2}, \quad b = \frac{-k+\lambda}{2} \quad (3.17)$$

olmak üzere,

$$\xi(1-\xi)y''(\xi) + \left(\frac{1}{2} - \lambda\xi\right)y'(\xi) - \frac{\lambda^2 - k^2}{4}y(\xi) = 0 \quad (3.18)$$

denklemi yazılabilir. **(3.18)** denklemi **(3.11)** Pöschl-Teller denklemine karşılık gelen hipergeometrik denklemdir. **(3.18)** denklemin tekillikleri civarındaki çözümlerini hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla yazabiliriz.

$\xi = 0$ a karşılık gelen çözümü, $|1-c| = \frac{1}{2}$ olduğundan ikinci çözüm logaritmik terim içermez ve

$$y(z) = c_{12}F_1\left(\frac{k+\lambda}{2}, \frac{-k+\lambda}{2}, \frac{1}{2}; \xi\right) + c_2 z^{1-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\lambda+k+1), \frac{1}{2}(\lambda-k+1), \frac{3}{2}; \xi\right) \quad (3.19)$$

(3.20) olarak bulunur. Yapmış olduğumuz değişken dönüşümünü geri uygularsak,

$$y(z) = \cos^\lambda z \left(c_{12}F_1\left(\frac{k+\lambda}{2}, \frac{-k+\lambda}{2}, \frac{1}{2}; \sin^2 z\right) + c_2 \sin z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}(\lambda+k+1), \frac{1}{2}(\lambda-k+1), \frac{3}{2}; \sin^2 z\right) \right) \quad (3.20)$$

çözümü elde ederiz. Bu çözüm,

$$|\sin^2 z| = |1 - \cos^2 z| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \cos z < \sqrt{2}$$

aralığında yakınsaktır. $\xi = 1$ a karşılık gelen çözümü, $\xi = 0$ noktasındaki çözümü $\tilde{\xi} = \xi - 1$ dönüşümü ile 1 noktasına öteleyerek buluruz. $|c - a - b| = \frac{1}{2} - \lambda$ olmak üzere $\frac{1}{2} - \lambda$ sıfır veya pozitif bir tamsayı olmadığında ikinci çözüm logaritmik terim içermez ve

$$y(z) = \cos^\lambda z \left(c_{12} F_1 \left(\frac{k+\lambda}{2}, \frac{-k+\lambda}{2}, \lambda + \frac{1}{2}; \cos^2 z \right) + c_2 (\cos z)^{1/2-\lambda} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}(-\lambda + k + 1), \frac{1}{2}(\lambda - k + 1), \frac{3}{2} - \lambda; \cos^2 z \right) \right) \quad (3.21)$$

çözümü elde ederiz. Bu çözüm,

$$|\cos^2 z| = |1 - \sin^2 z| < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin z < \sqrt{2}$$

aralığında yakınsaktır. $\xi = \infty$ a karşılık gelen çözümü, $|a - b| = k$ olmak üzere k sıfır veya pozitif bir tamsayı olmadığında ikinci çözüm logaritmik terim içermez ve

$$y(z) = \cos^\lambda z \left(c_1 (\sin^2 z)^{\frac{-(k+\lambda)}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{k+\lambda}{2}, \frac{k+\lambda+1}{2}, k+1; \frac{1}{\sin^2 z} \right) + c_2 \sin z^{\frac{k-\lambda}{2}} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}(-\lambda + k), \frac{1}{2}(\lambda - k - 1), -k+1; \frac{1}{\sin^2 z} \right) \right) \quad (3.22)$$

çözümü elde ederiz. Bu çözüm,

$$\left| \frac{1}{\sin^2 z} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 z > 1$$

olduğundan yakınsak değildir.

Örnek 3.3 Lineer ısı denklemi olarak bilinen

$$u_t - u_{zz} = 0 \quad (3.23)$$

denkleminin çözümlerin konflüent hipergeometrik denklem şeklinde ifade edilebileceğini gösteriniz ve hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden çözümünü bulunuz.

Isı denklemini,

$$u = t^a f(\Psi), \quad \Psi = \frac{z^2}{4t} \quad (3.24)$$

dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} u_t &= at^{a-1}f(\Psi) - t^a f'(\Psi) \frac{z^2}{4} t^{-2}, \quad f'(\Psi) = f_\Psi \\ u_z &= t^a f'(\Psi) \frac{2z}{4t} \\ u_{zz} &= \frac{2t^a}{4t} f'(\Psi) + \frac{2z}{4t} t^a f''(\Psi) \frac{2z}{4t} \end{aligned} \quad (3.25)$$

türevlerini elde ederiz. Bulduğumuz bu değerleri ısı denkleminde yerine yazarsak,

$$\frac{1}{4} z^2 t^{a-2} f''(\Psi) + \frac{t^{a-1}}{2} f'(\Psi) - t^{a-2} f'(\Psi) \frac{z^2}{4} - at^{a-1} f(\Psi) = 0 \quad (3.26)$$

elde ederiz. $t^{a-1} \neq 0$ olduğundan, denklemi t^{a-1} ile sadeleştirirsek,

$$\frac{1}{4} z^2 f''(\Psi) + \left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4t}\right) f'(\Psi) - af(\Psi) = 0 \quad (3.27)$$

halini alır. Bu da ,

$$\Psi f'' + \left(\frac{1}{2} - \Psi\right) f' - af = 0 \quad (3.28)$$

olarak düzenlenebilir. (3.28) konflüent hipergeometrik denklemdir. Dolayısıyla çözümleri de hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilebilir.

(3.28) denkleminde c değeri sıfır veya pozitif tam sayı değilse, ikinci çözüm logaritmik terim içermez. $c = 1/2$ olduğundan denklemin çözümü

$$f(\Psi) = c_{11} F_1(a, c; \Psi) + c_2 \Psi^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; \Psi) \quad (3.29)$$

genel formundadır. Bulduğumuz denkleme, bu formu uygularsak

$$f(\Psi) = c_{11} F_1(a, 1/2; \Psi) + c_2 \Psi^{1/2} {}_1F_1(a + 1/2, 3/2; \Psi) \quad (3.30)$$

elde ederiz. (3.30) lineer ısı denkleminin hipergeometrik fonksiyonlar bazında elde edilen çözümüdür.

Örnek 3.4 Parabolik silindir denklemi olarak bilinen

$$\Psi''(z) + (1 - 2p - z^2)\Psi = 0 \quad (3.31)$$

denklemini özel bir hipergeometrik denklem tipi olan Hermite denklemine dönüştürülebileceğini gösteriniz. (3.31) denkleminin çözümlerini hipergeometrik

fonksiyonlar cinsinden elde ediniz.

Parabolik silindir denklemini,

$$\Psi = e^{-z^2/2}y \quad (3.32)$$

dönüşümü uygularsak,

$$\begin{aligned} \Psi' &= -ze^{-z^2/2}y + e^{-z^2/2}y' \\ \Psi'' &= -e^{-z^2/2}y + z^2e^{-z^2/2}y - 2ze^{-z^2/2}y' + e^{-z^2/2}y'' \end{aligned} \quad (3.33)$$

türevlerini elde ederiz. Bulduğumuz bu değerleri parabolik silindir denkleminde yerine yazarsak,

$$e^{-z^2/2}(y'' - 2zy' + (z^2 - 1)y) + (1 + 2p - z^2)e^{-z^2/2}y = 0 \quad (3.34)$$

elde ederiz. $e^{-z^2/2} \neq 0$ olduğundan, denklemi $e^{-z^2/2}$ ile sadeleştirirsek,

$$(y'' - 2zy' + (z^2 - 1)y) + (1 + 2p - z^2)y = 0 \quad (3.35)$$

halini alır. Bu da ,

$$y'' - 2zy' + 2py = 0 \quad (3.36)$$

olarak düzenlenebilir. (3.36) özel bir hipergeometrik denklem formu olan Hermite denklemdir. Bu denklemi de

$$t = z^2 \quad (3.37)$$

dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 1/2z \\ \frac{dy}{dz} &= 2\sqrt{t}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dz^2} &= 2\sqrt{t}\frac{d}{dt}\left(2\sqrt{t}\frac{dy}{dt}\right) = 4\sqrt{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}y' + \sqrt{t}y''\right) = 2y' + 4ty'' \end{aligned} \quad (3.38)$$

türevlerini elde ederiz. Bulduğumuz bu değerleri (3.36) Hermite denkleminde yerine yazarsak,

$$ty'' - \left(\frac{1}{2} - t\right)y' + \frac{p}{2}y = 0 \quad (3.39)$$

olarak düzenlenebilir. (3.39) denklemi konflüent hipergeometrik denklemdir. Dolayısıyla çözümleri de hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden elde edilebilir.

(3.28) denkleminde c değeri sıfır veya pozitif tam sayı değilse, ikinci çözüm logaritmik terim içermez. $c = 1/2$ olduğundan denklemin çözümü

$$y = c_{11}F_1(a, c; t) + c_2t^{1-c}{}_1F_1(a - c + 1, 2 - c; t) \quad (3.40)$$

genel formundadır. Bulduğumuz denkleme, bu formu uygularsak

$$y = c_{11}F_1\left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}; t\right) + c_2t^{1/2}{}_1F_1\left(\frac{-p+1}{2}, \frac{3}{2}; t\right) \quad (3.41)$$

elde ederiz. (3.41) parabolik silindir denkleminin hipergeometrik fonksiyonlar bazında elde edilen çözümüdür.

Örnek 3.5 Üç tekil noktaya sahip Fuchs denklemi

$$z(z-4)^2y'' + 3(z-4)(z-6)y' + zy = 0 \quad (3.42)$$

denklemini bağımlı ve bağımsız değişkene göre gerçekleştireceğiniz dönüşümlerle hipergeometrik denkleme indirgeyiniz.

(3.42) denklemini

$$y'' + \frac{3(z-6)}{z(z-4)}y' + \frac{1}{(z-4)^2}y = 0 \quad (3.43)$$

olarak yazabiliriz. Riemann P-Sembolü ile ifade etmek için, Fuchs denkleminin genel formundan faydalanırsak,

$$\begin{aligned} \frac{A}{z} + \frac{B}{z-4} &= \frac{(A+B)z - 4A}{z(z-4)} = \frac{3z-18}{z(z-4)} \\ A+B &= 3, \quad -4A = 18 \Rightarrow A = -\frac{9}{4}, \quad B = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} 1 - a_1 - a_2 &= \frac{9}{4} \Rightarrow a_1 + a_2 = -\frac{3}{4}, \quad a_1a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = 0 \\ 1 - b_1 - b_2 &= \frac{-3}{4} \Rightarrow b_1 + b_2 = \frac{7}{4}, \quad b_1b_2 = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{7}{4}, \quad b_2 = 0 \\ c_1 + c_2 &= 1 - \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 2 \Rightarrow c_1c_2 - 1 = 0, \Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 1 \end{aligned}$$

0,4 ve ∞ tekilliklerine karşılık gelen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 ve c_2 üstlerini hesaplamış oluruz. Böylece, denkleme ait Riemann P-Şeması

$$y = \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & \infty \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} ; z \right) \quad (3.44)$$

olarak yazılır. Bağımsız değişkene göre gerçekleştireceğimiz lineer kesirli dönüşüm (Möbius dönüşümü) ile denklemin tekilliklerini her zaman $0, 1, \infty$ noktalarına kaydırmamız mümkündür. O halde,

$$t = \frac{z}{4}$$

dönüşümü ile,

$$y = \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 2 & 1 \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} ; \frac{z}{4} \right) \quad (3.45)$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere, lineer kesirli dönüşüm sonrasında denklemin sadece tekilliklerinin konumu değişir. Tekilliklere karşılık gelen üstler değişmez. Elde ettiğimiz yeni denklemi hipergeometrik denkleme çevirmek için, $z = \infty$ haricindeki tekilliklere, $z = 0$ ve $z = 1$ 'e karşılık gelen üstlerin herbirinin en az bir tane üstünü 0 yapmamız gerekir. O da, her zaman bağımlı değişkene göre gerçekleştireceğimiz f-homotopik dönüşüm ile gerçekleştirilebilir. $z = 0$ noktasındaki tekilliğe karşılık gelen üstlerin biri sıfır olduğu için, $z = 1$ tekilliğine ait üstlerden birini sıfır yapacak bir dönüşüm kurgulamamız yeterlidir. O halde,

$$t' = (t - 1)^2 = \left(\frac{z}{4} - 1\right)^2$$

dönüşümü ile,

$$y = \mathbf{P} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 3 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{1}{3} & 3 \end{array} ; \frac{z}{4} \right) \quad (3.46)$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere f-homotopik dönüşüm tekilliklerin konumlarını değiştirmezken, tekilliklere ait üstlere etki etmiştir. (3.46) Riemann P-Şemasına ait denklem, hipergeometrik denklemdir.

KAYNAKLAR

- [1] **Birkhauser**, 2007. Fuchsian Reduction - Applications To Geometry, Cosmology And Mathematical Physics.
- [2] **Hall, L.M.**, 1995. Special Functions, Leon M. Hall.
- [3] **Iwaski, K.**, 1990. From Gauss to Painleve.
- [4] **Slavyanov S.Ju., L.W.**, 2000. Special functions. A unified theory based on singularities, Oxford.
- [5] **Andrews G.E., Askey R., R.R.**, 1999. Special functions, CUP.
- [6] **Güngör, F.**, 2007. Diferansiyel Denklemler, Argem A.Ş. Yayınları.
- [7] **Sneddon, I.N.**, 1956. Special Functions Of Mathematical Physics And Chemistry, Interscience Publishers.
- [8] **Mayer, R.S.**, 2010. On Reducing the Heun Equation to the Hypergeometric Equation, *American Mathematical Society*, **00**, 3–9.
- [9] **Mayer, R.S.**, 1997. The 192 solutions of the Heun Equation, *American Mathematical Society*, **00**, 14–28.
- [10] **Luke, Y.L.** The Special Functions and Their Approximations, volume 1.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Özakan 1984 yılında Bandırma-Balıkesir’de doğmuştur. Ortaokul ve lise eğitimini Bandırma Anadolu Lisesinde tamamladıktan sonra ÖSYM tarafından 2002 yılında tam burslu olarak Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar bölümüne yerleştirilmiştir.

Lisans eğitimini bölüm, fakülte ve üniversite 1.si olarak tamamlayarak, Beykent Üniversitesi Matematik-Bilgisayar bölümünden 2007 yılında mezun olmuştur.

2007 yılı içerisinde başvurduğu İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına kabul edilmiş ve halen burada eğitimini sürdürmektedir.