

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Hüseyin GÜLER

YANLI TAHMİN EDİCİLER VE EKONOMETRİDE UYGULAMALARI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YANLI TAHMİN EDİCİLER VE
EKONOMETRİDE UYGULAMALARI**

Hüseyin GÜLER

DOKTORA TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 13/12/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Prof.Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
DANIŞMAN

.....
Prof.Dr. H. Altan ÇABUK
ÜYE

.....
Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
ÜYE

.....
Prof.Dr. Fikri AKDENİZ
ÜYE

.....
Prof.Dr. Aşır GENÇ
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Bu Çalışma Ç. Ü. Araştırma Projeleri Birimi Tarafından Desteklenmiştir.
Proje No: FEF2008D20

Bu Çalışma TÜBİTAK 1002 Hızlı Destek Projesi Kapsamında Desteklenmiştir.
Proje No: 107M624

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere
tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

**YANLI TAHMİN EDİCİLER VE
EKONOMETRİDE UYGULAMALARI**

Hüseyin GÜLER

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

Danışman: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Yıl: 2011, Sayfa: 105

Jüri: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Prof. Dr. H. Altan ÇABUK
Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Prof. Dr. Aşır GENÇ

Çoklu doğrusal regresyon modelinde incelenen açıklayıcı değişkenler birbirleriyle ilişkili olabilir. Bu ilişkinin derecesinin artmasının klasik tahmin ediciler üzerinde istenmeyen etkileri vardır. Çoklu iç ilişki olarak adlandırılan bu problemin çözümü için yanlı tahmin edicilere başvurulabilir. Bu çalışmada çoklu iç ilişki ile Ekonometride karşılaşılan bazı diğer problemlerin birlikte ele alınması amaçlanmıştır. Otokorelasyonlu veya değişen varyanslı hata terimleri ile kısıtlı ya da ön bilgiye sahip bir model için çoklu iç ilişkinin etkileri araştırılmıştır. Bunun yanı sıra kısıtların gözlemlere bağlı olduğu durum da göz önüne alınmıştır. Bu durumlarda kullanılabilecek alternatif yanlı tahmin ediciler incelenmiş ve klasik tahmin yöntemleri ile karşılaştırmaları yapılmıştır. Karşılaştırmalar Monte Carlo simülasyonlarla desteklenmiştir. Yöntemlerin gerçek veriler üzerinde nasıl uygulanabileceği de incelenmiş ve tahmin ediciler bu veriler aracılığıyla da karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çoklu iç ilişki, Yanlı tahmin ediciler, Ridge regresyon, Ekonometri, Monte Carlo simülasyon.

ABSTRACT

PhD THESIS

BIASED ESTIMATORS AND THEIR APPLICATIONS IN ECONOMETRICS

Hüseyin GÜLER

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF STATISTICS**

Supervisor: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Year: 2011, Pages: 105

Jury: Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR
Prof. Dr. H. Altan ÇABUK
Prof. Dr. Sadullah SAKALLIOĞLU
Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Prof. Dr. Aşır GENÇ

Explanatory variables in a multiple linear regression model may be related with each other. The increasing degree of this relationship has undesired effects on classical estimators. This problem is called as multicollinearity and biased estimators can be used to overcome the problem. In this study, it's aimed to investigate the multicollinearity and Econometric problems, as they arise together. Effects of multicollinearity for a model with heteroskedastic error terms or restricted parameters are investigated. Observation-varying restrictions are also considered in the study. Alternative biased estimators for these models are examined and their comparisons with traditional estimators are given. Comparisons are supported with Monte Carlo simulations. Application of these estimators on real data sets is investigated and estimators are compared on these data sets.

Key Words: Multicollinearity, Biased estimators, Ridge regression, Econometrics, Monte Carlo simulation.

TEŞEKKÜR

İstatistik bilimi ile ilgili temel bilgileri ve bilimsel düşünme becerisini bana kazandıran Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim. Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca edindiğim bilgiler olmadan bu noktaya gelemezdim. Ayrıca İstatistik Yüksek Lisans tez danışmanım Doç. Dr. Mustafa Yavuz ATA'ya bana kattığı her şey için sonsuz teşekkür ederim.

İş hayatımın başlangıç noktası ve Yüksek Lisanstaki ikinci durağım olan Gazi Üniversitesi Ekonometri Bölümü öğretim üyeleri ve çalışma arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım. Bu bağlamda Ekonometri Yüksek Lisans tez danışmanım Prof. Dr. Aydın ÜNSAL'a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca kendilerinden ders aldığım ve bildiklerini bizlerle paylaşmayı esirgemeyen Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerinin tamamına teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte bana yol gösteren ve destekleyen danışmanım Prof. Dr. Selahattin KAÇIRANLAR'a teşekkür ederim. Kendisinin bilimsel ve manevi desteği olmadan bu çalışma ortaya çıkamazdı.

Bizlere güzel bir çalışma ortamı sunan ve her zaman babacan tavırlarıyla destekleyen Çukurova Üniversitesi Ekonometri Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hasan Altan ÇABUK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim hayatım boyunca bana destek olan annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim.

Hiçbir bilimsel çalışma yakınımızdakilerin desteği ve fedakârlığı olmadan tamamlanamaz. Bana akademik hayatımda sürekli destek olan eşim Yrd. Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER'e ve biricik kızımız Elif Naz GÜLER'e kalpten teşekkürlerimi sunarım. İyi ki varsınız, hep yanımda olun.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	X
1. GİRİŞ	1
2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI	3
2.1. Giriş	3
2.2. Mixed ve Ridge Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması.....	8
2.3. Yanlılık Parametresinin Seçimi	12
2.4. Ekonometrik Bir Uygulama	14
2.4.1. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmini	16
2.4.2. Mixed Tahmini.....	17
2.4.3. Ridge Tahmini.....	18
2.5. Monte Carlo Deneyi	22
2.5.1. Veri Üretim Süreci ve Performans Kriteri	22
2.5.2. Simülasyon Sonuçları	25
2.6. Sonuçlar.....	36
3. MODIFIED VE KISITLI RIDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİLER ÜZERİNE BİR İNCELEME.....	37
3.1. Giriş	37
3.2. Modified Ridge Regresyon Tahmin Edici.....	40
3.3. Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edici	43
3.4. Modified ve Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması	48
3.5. Monte Carlo Deneyi	50
3.5.1. Ön Bilgi ve Kısıtların Doğru Olduğu Durum	52

3.5.2. Ön Bilgi ve Kısıtların Doğru Olmadığı Durum	56
3.6. Uygulama	63
3.7. Sonuçlar	67
4. GÖZLEMLERE BAĞLI KISITLI RIDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİ ..	69
4.1. Giriş	69
4.2. Tahmin Ediciler	71
4.2.1. Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler ve Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması	75
4.2.1.1. Değişmezlik Varsayımının Sağlandığı Durum	75
4.2.1.2. Değişmezlik Varsayımının Sağlanmadığı Durum	79
4.3. Monte Carlo Deneyi	82
4.4. Talep Denklemi Tahmini	91
4.5. Sonuçlar	98
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	99
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	105

Çizelge 2.1. Şampuan verisi için ridge tahminleri	19
Çizelge 2.2. Farklı hata terimleri için simülasyon verisinin koşul sayıları.....	24
Çizelge 2.3. $n = 20, p = 4$ ve beyaz gürültü hataları için hko tahminleri	26
Çizelge 2.4. $n = 60, p = 10$ ve beyaz gürültü hataları için hko tahminleri	27
Çizelge 2.5. $n = 20, p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,3$) için hko tahminleri	28
Çizelge 2.6. $n = 60, p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,3$) için hko tahminleri	29
Çizelge 2.7. $n = 20, p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,5$) için hko tahminleri	30
Çizelge 2.8. $n = 60, p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,5$) için hko tahminleri	31
Çizelge 2.9. $n = 20, p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,7$) için hko tahminleri	32
Çizelge 2.10. $n = 60, p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,7$) için hko tahminleri	33
Çizelge 3.1. Hipotetik üretim verisi	38
Çizelge 3.2. $n = 20, p = 4, m = 1$ ve $\kappa = 1$ için hko tahminleri	53
Çizelge 3.3. $n = 20, p = 4, m = 2$ ve $\kappa = 1$ için hko tahminleri	53
Çizelge 3.4. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\kappa = 1$ için hko tahminleri.....	54
Çizelge 3.5. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\kappa = 1$ için hko tahminleri.....	54
Çizelge 3.6. $n = 20, p = 4, m = 1$ ve $\kappa = 1,05$ için hko tahminleri.....	57
Çizelge 3.7. $n = 20, p = 4, m = 2$ ve $\kappa = 1,05$ için hko tahminleri.....	57
Çizelge 3.8. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\kappa = 1,05$ için hko tahminleri.....	58
Çizelge 3.9. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\kappa = 1,05$ için hko tahminleri.....	58
Çizelge 3.10. $n = 20, p = 4, m = 1$ ve $\kappa = 1,10$ için hko tahminleri.....	59
Çizelge 3.11. $n = 20, p = 4, m = 2$ ve $\kappa = 1,10$ için hko tahminleri.....	59
Çizelge 3.12. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\kappa = 1,10$ için hko tahminleri.....	60
Çizelge 3.13. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\kappa = 1,10$ için hko tahminleri.....	60
Çizelge 3.14. Gruber (1998) verisi için parametre ve hko tahminleri	66
Çizelge 4.1. $\rho = 0$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri	86
Çizelge 4.2. $\rho = 0,2$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri	86
Çizelge 4.3. $\rho = 0,8$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri	87
Çizelge 4.4. $\rho = 0$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri.....	87

Çizelge 4.5. $\rho = 0,2$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri.....	88
Çizelge 4.6. $\rho = 0,8$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri.....	88
Çizelge 4.7. Alston ve Chalfant (1991) verisi için parametre tahminleri	96

ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Şampuan verisi için hko tahminleri	19
Şekil 3.1. Gruber (1998) verisi için k 'ye göre hko tahminleri.....	65
Şekil 4.1. Sığır eti talep esnekliği	94
Şekil 4.2. Sığır eti talebinin kuzu eti fiyatına göre çapraz talep esnekliği	96

SİMGELER VE KISALTMALAR

Regresyon modeli için kullanılan simge ve kısaltmalar:

n	: Gözlem sayısı
p	: Parametre sayısı
y	: Bağımlı değişken vektörü
X	: Açıklayıcı değişkenler matrisi
β	: Parametre vektörü
ε	: Hata terimleri vektörü
R	: Doğrusal kısıt katsayıları matrisi
r	: Doğrusal kısıt sağ taraf sabitleri
GBKRM	: Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Regresyon Modeli

Matrisler için kullanılan simge ve kısaltmalar:

$\mathbf{0}_{a \times b}$	: $a \times b$ tipinde sıfırlardan oluşan matris
$\mathbf{I}_a$	: $a \times a$ tipinde birim matris
$\mathbf{j}_a$	: $a \times 1$ tipinde birlerden oluşan vektör
$\text{diag}(\cdot)$	: Köşegen matris
$\otimes$	: Kronocker çarpanı
$\mathbf{A}^+$	: A matrisinin genelleştirilmiş inversi
$\mathfrak{R}(\mathbf{A})$	: A matrisinin kolon uzayı
KS	: Koşul sayısı
pd	: Pozitif tanımlı
psd	: Pozitif yarı tanımlı
nnd	: Negatif olmayan tanımlı

Tahmin ediciler için kullanılan kısaltmalar:

EKK	: En Küçük Kareler
KEKK	: Kısıtlı En Küçük Kareler
GEKK	: Genelleştirilmiş En Küçük Kareler
GKEKK	: Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler

RR : Ridge Regresyon
KRR : Kısıtlı Ridge Regresyon
MRR : Modified Ridge Regresyon
GBKRR : Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Ridge Regresyon

Tahmin ediciler için kullanılan simgeler:

$\hat{\beta}$: En küçük kareler tahmin edici
 $\hat{\beta}_r$: Kısıtlı en küçük kareler tahmin edici
 $\hat{b}$: Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edici
 $\hat{\beta}(k)$: Ridge regresyon tahmin edici
 $\hat{\beta}_r(k)$: Kısıtlı ridge regresyon tahmin edici
 $\hat{b}(k)$: Genel doğrusal regresyon modeli için ridge tahmin edici
 $\hat{b}_M$: Mixed tahmin edici
 $\hat{\beta}(k, b)$: Modified ridge regresyon tahmin edici

Tahmin edicilerin istatistiksel özellikleri için kullanılan simge ve kısaltmalar:

BLUE : En iyi doğrusal yansız tahmin edici (Best Linear Unbiased Estimator)
hko : Hata kareleri ortalaması
khko : Karekök hata kareleri ortalaması
 $E(.)$: Beklenen değer operatörü
 $Cov(.)$: Kovaryans operatörü
 $Bias(.)$: Tahmin edicinin yanı
 $MSE(.)$: Hata kareleri ortalaması matrisi
 $mse(.)$: Skaler hata kareleri ortalaması
 $rmse(.)$: Hata kareler ortalamasının karekökü

1. GİRİŞ

Uygulamalı çalışmalarda sıklıkla kullanılan çoklu doğrusal regresyon modeli

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{y}$ bağımlı değişken vektörü; $\mathbf{X}$ tam sütun ranklı açıklayıcı değişkenler matrisi; $\boldsymbol{\beta}$ bilinmeyen parametreler vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ hata terimleri vektörüdür. Çoklu doğrusal regresyonda temel amaç n tane gözlemi kullanarak $\boldsymbol{\beta}$ 'nin elemanlarını tahmin etmektir. Bu sayede açıklayıcı değişkenlerin bağımlı değişkeni etkileyip etkilemediği, etkiliyorlarsa bu etkinin yönü ve kuvveti belirlenebilir. Ayrıca bağımlı değişkenin çeşitli değerlerini öngörmek de mümkün olur.

Parametreleri tahmin etmek üzere hata terimleri için $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ ve $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ varsayımları yapılır. Bu varsayımlar hata terimlerinin sıfır ortalamalı, sabit varyanslı ve birbirleriyle ilişkisiz olduğu anlamına gelmektedir. İlgili varsayımlar altında türetilen en küçük kareler (EKK) tahmin edici, parametrelerin doğrusal en iyi yansız tahmin edicisidir.

$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ varsayımı sabit terim içeren modellerde her zaman sağlanırken $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ varsayımı daha kırılgandır. Gözlemlerin birbirleriyle ilişkili olduğu zaman serisi verilerinde hata terimleri de bu ilişkiden etkilenirler. Kesit verilerinde hata terimleri ilişkisiz olmakla birlikte varyansları sabit olmayabilir. Her iki durumda da EKK tahmin ediciyi kullanmak uygun olmaz. Bunun yerine genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) tahmin edici kullanılabilir.

EKK tahmin ediciyi etkileyen bir diğer neden ise açıklayıcı değişkenler arasındaki doğrusal ilişkidir. Açıklayıcı değişkenler arasında deterministik doğrusal ilişki olması durumunda $\mathbf{X}$ matrisi tam sütun ranklı olmaz ve EKK tahminleri hesaplanamaz. Ancak uygulamada açıklayıcı değişkenler arasındaki doğrusal ilişki genellikle stokastik yapıdadır. Model varsayımları arasında yer almayan bu durum çoklu iç ilişki olarak adlandırılır. Çoklu iç ilişki $\mathbf{X}$ matrisinin tam sütun ranklı olmasını engellemese de EKK tahmin edici üzerinde istenmeyen etkilere yol açar. Tahminlerin standart hataları büyür ve bunun sonucunda gerçekte anlamlı olan parametrelerin bir kısmı yapılan hipotez testlerinde anlamsız görülebilir. Modelin

tümü anlamlı ve belirleme katsayısı yüksek olmasına rağmen parametrelerin çoğu tek tek anlamsız görülebilir.

Çoklu iç ilişkinin EKK tahmin edici üzerindeki olumsuz etkilerini ortadan kaldırmak için çeşitli alternatif tahmin ediciler önerilmiştir. Bunlar arasında ilk akla gelen Hoerl ve Kennard (1970) tarafından tanımlanan ridge regresyon (RR) tahmin edicidir. RR tahmin edicide çoklu iç ilişkiden olumsuz etkilenen $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif bir k sabiti eklenir. Bu sayede tahmin edicinin varyansı küçültülmekle birlikte yanlı bir tahmin edici elde edilmiş olur. Ancak uygun bir k değeri seçildiğinde RR tahmin edici hata kareleri ortalaması (hko) anlamında EKK tahmin ediciden daha iyi sonuçlar verir.

Uygulamalı çalışmalarda kullanılan bir diğer yöntem ise kısıtlı tahmin edicilerdir. İncelenen verinin doğası gereği parametrelerin bazı kısıtları sağlaması gerekir. Model parametreleri üzerine bir takım kısıtlar konulduğunda bu kısıtları dikkate alan kısıtlı en küçük kareler (KEKK) tahmin ediciye başvurulabilir.

Ekonometride sıklıkla karşılaşılan otokorelasyon ve değişen varyans problemlerine aynı zamanda çoklu iç ilişkili bir modelde de rastlanabilir. EKK yöntemine dayanan GEKK tahmin edici çoklu iç ilişkiden olumsuz yönde etkilenir. Benzer şekilde kısıtlı bir modelde açıklayıcı değişkenler arasında çoklu iç ilişki bulunabilir ve burada KEKK tahmin edicinin iyi sonuçlar vermeyeceği söylenebilir.

Bu çalışmada üç ana probleme değinilmiştir: İlk problemde otokorelasyon veya değişen varyansın çoklu iç ilişki ile bir arada yer aldığı durum incelenmiştir. Bu modelde kullanılması önerilen alternatif yanlı ve yansız tahmin ediciler birbirleriyle karşılaştırılmıştır. İkinci problemde ise parametrelere ait ön bilgi ve kısıtların varlığında kullanılabilecek alternatif tahmin ediciler incelenmiştir. İncelenen son problemde kısıtların gözlemlere bağlı olarak değiştiği regresyon modeli üzerinde durulmuştur. Bu model için ridge regresyona dayanan yeni bir tahmin edici tanımlanmış ve mevcut tahmin edici ile karşılaştırması yapılmıştır.

İncelenen tüm bu problemlerde tahmin ediciler hem teorik yünden hem de simülasyonlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu karşılaştırmalar gerçek veriler üzerinde yapılan uygulamalarla da desteklenmiştir. Bu sayede Ekonometride karşılaşılan çeşitli problemlerle çoklu iç ilişkinin birlikte ele alınması amaçlanmıştır.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Otokorelasyonlu veya değişen varyanslı bir modelde, açıklayıcı değişkenler arasında çoklu iç ilişki bulunması durumunda genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edici bazı istenmeyen özelliklere sahip olmaktadır. Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicinin bu eksikliklerini kapatmak için kullanılabilecek mixed veya ridge regresyon (RR) tahmin edici gibi alternatif tahmin yöntemleri mevcuttur. Bu bölümde doğrusal regresyon modelinde çoklu iç ilişki ile otokorelasyon veya değişen varyans problemlerinin birlikte yer aldığı durum ele alınacaktır. Bu model için mixed tahmin edici ile RR tahmin edici, varyans-kovaryans ve ortalama hata kareler matrisleri açısından karşılaştırılacaktır. Tahmin edicilerin gerçek bir veri seti üzerindeki karşılaştırması da ele alınacaktır. Yapılan çalışmalar otokorelasyonlu modeli dikkate alan simülasyonlarla desteklenecektir. Bu sayede tahmin edicilerin performansının model parametrelerinden nasıl etkilendiği de araştırılmış olacaktır.

2.1. Giriş

$\mathbf{y}$: $n \times 1$ tipinde bağımlı değişken vektörü; $\mathbf{X}$: $n \times p$ tipinde tam sütun ranklı açıklayıcı değişkenler matrisi; $\boldsymbol{\beta}$: $p \times 1$ tipinde bilinmeyen parametreler vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon}$: $n \times 1$ tipinde hata terimleri vektörü olmak üzere, çoklu doğrusal regresyon modeli

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.1)$$

şeklinde verilebilir. Burada hata terimlerinin ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi için sırasıyla $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$ ile $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ varsayımları yapılmaktadır. En Küçük Kareler (EKK) varsayımları olarak adlandırılan bu varsayımlar; hata terimlerinin sıfır ortalamalı, sabit varyanslı ve birbirleriyle ilişkisiz olduğu anlamına gelmektedir. Bu varsayımlar altında hata kareler toplamını minimum yapan tahmin edici EKK tahmin edici olarak adlandırılır ve (2.2) eşitliğindeki gibi tanımlanır:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (2.2)$$

Çoklu doğrusal regresyon modelinin uygulamalarında tama yakın çoklu iç ilişki ile karşılaşılabilir. Bu durumda $\mathbf{X}$ matrisinin sütunları (değişkenler)

arasında doğrusal bir ilişki olacak ve $X'X$ matrisi kötü koşullu olacaktır. Veride çoklu iç ilişki olması durumunda $X'X$ matrisinin bir veya birkaç özdeğeri küçük olacak ve EKK yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri bazı istenmeyen özelliklere sahip olacaktır. Bu özelliklerden ilki EKK tahminlerinin varyanslarının şişmesidir. Bir diğer istenmeyen özellik ise parametre tahminlerinin işaret ve büyüklük açısından örnekten örneğe çok farklı çıkmasıdır. $\hat{\beta}$ ile gösterilen EKK tahmin edici β için hala en iyi doğrusal yansız tahmin edici (best linear unbiased estimator, BLUE) olmakla birlikte, yukarıda sıralanan dezavantajlardan dolayı bu özellik önemini yitirmektedir. EKK tahmin edicinin bu dezavantajlarını ortadan kaldırmak için literatürde alternatif tahmin yöntemleri önerilmektedir. Bu yöntemler arasında doğrusal kısıtların uygulanması, stokastik doğrusal kısıtların uygulanması ve yanlış tahmin edicilerin kullanılması yer almaktadır (Judge ve ark., 1988).

Kısıtlı En Küçük Kareler (KEKK) tahmin yönteminde doğrusal regresyon modelinin parametrelerine bazı doğrusal kısıtlar konulmakta ve bu kısıtlar altında hata kareler toplamının minimum yapılması amaçlanmaktadır. m doğrusal kısıt sayısı; R sabitlerden oluşan $m \times p$ tipinde tam satır ranklı matris ($m < p$) ve r yine sabitlerden oluşan $m \times 1$ tipinde vektör olmak üzere, parametrelere konulan doğrusal kısıtlar

$$R\beta = r \quad (2.3)$$

şeklinde verilebilir. (2.3)'de verilen kısıtlar altında hata kareler toplamını minimum yapan tahmin edici KEKK olarak adlandırılır ve (2.4)'deki gibi tanımlanır:

$$\hat{\beta}_r = \hat{\beta} - (X'X)^{-1}R'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r) \quad (2.4)$$

Kısıtlar doğruyken (2.4)'de verilen KEKK tahmin edici β için yansız olup, EKK tahmin ediciden daha düşük varyanslara sahiptir. Kısıtlar doğru olmadığına varyanslar daha düşük olmaya devam ederken, tahmin edici yansızlık özelliğini kaybetmektedir ve EKK'den daha yüksek riske sahip olabilmektedir.

Önsel bilgiyi kesin doğrusal kısıtlardan daha az sınırlayıcı şekilde kullanan başka yöntemler de mevcuttur. Bu yöntemlerden birisi, $R\beta = r$ şeklindeki kesin doğrusal kısıtlara bir hata terimi ekleyerek kısıtları gevşetmektir. Bu yaklaşımla elde edilen tahmin edici mixed tahmin edici olarak adlandırılır. Kısıtların stokastik olduğu bu tahmin ediciyle EKK'den daha düşük varyanslar elde edilmekte ve çoklu iç ilişki

durumunda avantaj sağlanmaktadır. Çoklu iç ilişki durumunda mixed tahmin edicinin nasıl uygulanabileceği Belsley ve ark.'nda (2004) tartışılmaktadır.

Çoklu iç ilişkinin çözümünde ek bilgi kullanmak iyi bir yaklaşım olmakla birlikte, uygulamada bu ek bilgiye her zaman ulaşmak mümkün olmamaktadır. Bu engeli aşmak için farklı yöntemler önerilmektedir. Bunlardan birisi de Hoerl ve Kennard (1970) tarafından tanımlanan RR tahmin edicinin kullanılmasıdır. k pozitif bir sabit olmak üzere ridge tahmin edici

$$\hat{\beta}(k) = (X'X + kI_p)^{-1}X'y \quad (2.5)$$

eşitliği ile tanımlanır. Ridge tahmin edici yanlı olmakla birlikte EKK tahmin ediciden daha düşük varyanslara sahiptir. Ancak yanlı bir tahmin edicinin performansını incelerken varyansları kullanmak doğru olmaz. Bunun yerine hata kareler ortalaması matrisi (HKO) veya skaler hata kareler ortalaması (hko) kriterleri kullanılmalıdır. Varyanstaki kazancın yanın karesinden daha büyük olması durumunda HKO veya hko'nda kazanç elde etmek mümkün olacaktır. Hoerl ve Kennard (1970) hko anlamında daima EKK'den daha iyi olan bir ridge tahmin edicinin var olduğunu göstermiştir.

Smith ve Campbell (1980) RR yönteminin ön bilgiyi kısmen kullandığını belirterek, çoklu iç ilişki problemini çözmek için bu tahmin edici yerine mixed tahmin edicinin kullanılmasını önermiştir. Parametrelerle ilgili bir takım kesin ön bilgiler bulunduğu mixed tahmin yönteminin kullanılması gerektiği çok açıktır. Ancak genellikle ön bilgiyi kullanarak bir önsel dağılım belirlemek mümkün olmaz. Bu durumda RR tahmin edici ilgili bilgiyi yaklaşık olarak kullanmaya olanak tanıyabilmektedir (Montgomery ve ark., 2001).

İşletme, İktisat ve Mühendislik alanlarında karşılaşılan verilerde hata terimlerinin ilişkisiz ve sabit varyanslı oldukları varsayımı genellikle geçerli olmaz. Hata terimlerinde karşılaşılan otokorelasyon veya değişen varyans problemlerinin EKK tahmin edici üzerinde bazı etkileri vardır. Bu durumda EKK tahmin edici etkinliğini kaybeder ve varyans-kovaryans matrisinin tahmin edicisi de yanlı olur. Bunun sonucunda oluşturulacak güven aralıkları ve yapılacak hipotez testleri geçerliliğini kaybeder (Griffiths ve ark., 1993). Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmak için alternatif tahmin yöntemlerine başvurulabilir. Hata terimlerinin varyans-

kovaryans yapısı hakkında yeterli bilgi olması durumunda ağırlıklı veya genelleştirilmiş en küçük kareler (GEKK) yöntemi kullanılabilir. GEKK tahmin edici yansız olmanın yanında, EKK'den daha düşük varyansa da sahiptir.

$V: n \times n$ tipinde elemanları bilinen pozitif tanımlı (pd) bir matris ($V > 0$) olmak üzere

$$y = X\beta + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad Cov(\varepsilon) = \sigma^2 V = \Sigma_1 \quad (2.6)$$

şeklindeki genel doğrusal regresyon modeli ele alınsın. V matrisi pd olduğundan $K'K = KK = V$ olacak biçimde $n \times n$ tipinde singüler olmayan simetrik bir K matrisi vardır. $y_* = K^{-1}y$, $X_* = K^{-1}X$ ve $\varepsilon_* = K^{-1}\varepsilon$ olmak üzere, (2.6) eşitliğindeki regresyon modelinin her iki tarafı soldan K^{-1} ile çarpılırsa

$$y_* = X_*\beta + \varepsilon_*, \quad E(\varepsilon_*) = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad Cov(\varepsilon_*) = \sigma^2 I_n \quad (2.7)$$

şeklindeki dönüştürülmüş model elde edilir (Montgomery ve ark., 2001; Trenkler, 1984). (2.7)'deki hata terimleri ε_* EKK varsayımlarını sağladığından, bu modelin parametrelerini tahmin etmek için EKK tahmin edicisi kullanılırsa

$$\hat{b} = (X_*'X_*)^{-1}X_*'y_* = (X'V^{-1}X)^{-1}X'V^{-1}y \quad (2.8)$$

eşitliğiyle verilen Aitken veya GEKK tahmin edicisi elde edilmiş olur. Bu tahmin edici β için BLUE'dır (Aitken, 1935; Toutenburg, 1982).

(2.6) modelinde herhangi bir ek bilgiye sahip değilken β 'nin en uygun doğrusal yansız tahmin edicisi GEKK'dir. Öte yandan ek bilgi olması durumunda GEKK'e alternatif olarak Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) tarafından önerilen mixed tahmin edici kullanılabilir. Bu tahmin edicide eldeki ön veya ek bilgi, önsel dağılım olarak kullanılmak yerine doğrudan veriye eklenmektedir. (2.6) modeli için β 'nin elemanları üzerine konulabilecek

$$r = R\beta + \phi \quad (2.9)$$

şeklinde $m < p$ tane ön kısıt olduğu varsayılınsın. Burada $R: m \times p$ tipinde, rankı m olan bilinen bir matris; $r: m \times 1$ tipinde bir vektör ve $\phi: m \times 1$ tipinde rassal bir vektör olup; ε 'dan bağımsız, sıfır ortalamalı ve $\sigma^2 W = \Sigma_2$ varyans-kovaryans matrislidir. Burada $W > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) tarafından önerilen mixed tahmin yönteminde (2.9)'da verilen kısıt

altında (2.6) modelinin parametrelerini tahmin etmek için $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{X}$ gözlemlerine (2.9)'daki bilgi eklenerek

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

eşitliği elde edilir. Varsayım gereği

$$Cov \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}$$

yazılabileceğinden, $\boldsymbol{\Sigma}_1$ ve $\boldsymbol{\Sigma}_2$ biliniyorsa (2.10)'a GEKK uygulanırsa

$$\hat{\mathbf{b}}_M = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

$$= \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}'(\mathbf{W} + \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}')^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\mathbf{b}}) \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanan mixed tahmin edici elde edilir. Burada $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ 'dir (Rao ve Toutenburg, 1995). Toutenburg (1982) tarafından geliştirilmiş kısıtlı en küçük kareler tahmin edici olarak adlandırılan mixed tahmin edici yansız olup, GEKK tahmin ediciden varyans-kovaryans matrisi anlamında daha iyidir. Mixed ve ridge tahmin ediciler nümerik olarak denk olabilmekle birlikte aralarında bazı farklılıklar vardır. Ridge regresyonda $\mathbf{r}$ 'nin elemanları bilinen sabitler olup yanlılığa yol açarken, mixed tahmin edicide $\mathbf{r}$ bir tesadüfi değişkendir (Montgomery ve ark., 2001).

(2.6)'da verilen genel doğrusal regresyon modeli bilinmeyen parametreleri tahmin etmenin yanında bağımlı değişkenin gelecekteki değerlerini öngörmek için de kullanılabilir. Theil (1971) ve Goldberger (1962) mixed tahmin ediciyi bu amaçla kullanmışlardır (Judge ve ark., 1985). Bayhan ve Bayhan (1998) ise otokorelasyon ve çoklu iç ilişki problemini birlikte ele alarak, Theil ve Goldberger (1961) ve Theil (1963) tarafından önerilen mixed tahmin ediciyi bu modele uygulamışlardır.

Hata terimlerinin heteroskedastik olması durumunda GEKK tahmin edicinin kullanılabileceği belirtilmiştir. Öte yandan çoklu iç ilişki durumunda GEKK tahmin edicinin de toplam varyansı büyüyeceğinden, bu tahmin edici ile elde edilen tahminler güvenilir olmaz. Bu durumda $\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ matrisi kötü koşullu olabileceğinden GEKK tahmin edici de çoklu iç ilişkiden etkilenir. Bunu göz önüne alan Trenkler (1984), hata terimlerinin ilişkili olduğu (2.6) regresyon modeli için ridge tahmin edicinin kullanılmasını önermiştir. Trenkler (1984), otokorelasyon ve çoklu iç ilişki

problemlerinin etkisini gidermek amacıyla (2.7)'de verilen dönüştürülmüş model için ridge tahmin ediciyi (2.13)'deki gibi tanımlamıştır:

$$\hat{\mathbf{b}}(k) = (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_* = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \quad (2.13)$$

Trenkler (1984) ayrıca homoskedastisite varsayımının sağlanmadığı durumda $\hat{\mathbf{b}}(k)$ ile GEKK tahmin edicisi $\hat{\mathbf{b}}$ 'yi HKO anlamında karşılaştırmıştır (ayrıca bkz. Gosling ve ark., 1982; Lee ve Trivedi, 1982).

Bölüm 2.2'de (2.6) modeli için $\hat{\mathbf{b}}_M$ ve $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'nin karşılaştırması yapılacaktır. Bölüm 2.3'de yanlılık parametresi k 'nin nasıl seçileceği üzerinde durulacaktır. Bölüm 2.4'de elde edilen bulgular nümerik bir örnek üzerinde gösterilecek ve son olarak Bölüm 2.5'de tahmin ediciler bir Monte Carlo deneyi ile karşılaştırılacaktır.

2.2. Mixed ve Ridge Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Rao ve Toutenburg (1995) tarafından mixed tahmin edicinin ($\hat{\mathbf{b}}_M$) özellikleri incelenmiş ve bu tahmin edici ile GEKK tahmin edici ($\hat{\mathbf{b}}$) karşılaştırılmıştır. Genel doğrusal regresyon modeli için Trenkler (1984) tarafından tanımlanan ridge tahmin edici ($\hat{\mathbf{b}}(k)$) ile $\hat{\mathbf{b}}$ 'nin karşılaştırması ilgili çalışmada yapılmıştır. Bayhan ve Bayhan (1998) ise özel olarak $\hat{\mathbf{b}}$ ile $\hat{\mathbf{b}}_M$ 'yi nümerik bir örnekte varyans-kovaryans matrisleri bakımından karşılaştırmıştır. Öte yandan literatürde genel doğrusal regresyon modeli için $\hat{\mathbf{b}}_M$ ile $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'yi karşılaştıran bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada $\hat{\mathbf{b}}_M$ ile $\hat{\mathbf{b}}(k)$ tahmin edicileri HKO cinsinden karşılaştırılacaktır. Karşılaştırmalarda $\mathbf{A}$ matrisi pd veya pozitif yarı tanımlı (psd) ise $\mathbf{A}$ matrisine negatif olmayan tanımlı (nnd) matrisi adı verilecek ve $\mathbf{A} \geq 0$ şeklinde gösterilecektir.

$\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ olmak üzere, (2.8) ve (2.11)'de tanımlanan $\hat{\mathbf{b}}$ ve $\hat{\mathbf{b}}_M$ tahmin edicilerin varyans-kovaryans matrislerinin sırasıyla

$$\mathbf{V}_1 = \text{Cov}(\hat{\mathbf{b}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2\mathbf{S}^{-1}, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_2 = \text{Cov}(\hat{\mathbf{b}}_M) &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= Cov(\hat{\mathbf{b}}) - Cov(\hat{\mathbf{b}}_M) \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' (\mathbf{W} + \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}')^{-1} \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

yazılabileceğinden, $\hat{\mathbf{b}}_M$ 'nin varyans-kovaryans matrisi açısından $\hat{\mathbf{b}}$ 'ya denk ya da daha iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca etkinlikteki bu kazanç, $E(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmamasından bağımsızdır (Rao ve Toutenburg, 1995).

$\mathbf{S}_k = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p = \mathbf{S} + k\mathbf{I}_p$ olmak üzere, (2.13)'teki $\hat{\mathbf{b}}(k)$ tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ve yanlılığının sırasıyla,

$$\begin{aligned} V_3 &= Cov(\hat{\mathbf{b}}(k)) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \\ &= \sigma^2 (\mathbf{S} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{S} + k\mathbf{I}_p)^{-1} = \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ve

$$Bias(\hat{\mathbf{b}}(k)) = -k \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (2.18)$$

olduğu gösterilebilir. (2.17) ve (2.18) kullanıldığında HKO

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\mathbf{b}}(k)) &= Cov(\hat{\mathbf{b}}(k)) + Bias(\hat{\mathbf{b}}(k)) Bias'(\hat{\mathbf{b}}(k)) \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} + k^2 \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilebilir. Trenkler (1984) $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'nin HKO anlamında $\hat{\mathbf{b}}$ 'dan daha iyi olması için gerek ve yeter koşulun

$$\boldsymbol{\beta}' \left[\frac{2}{k} \mathbf{I}_p + (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \right]^{-1} \boldsymbol{\beta} < \sigma^2 \quad (2.20)$$

olduğunu göstermiştir (ayrıca bkz. Gosling ve ark., 1982; Lee ve Trivedi, 1982).

$\hat{\mathbf{b}}_M$ ile $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'yi varyans-kovaryans ve HKO cinsinden karşılaştırmak için aşağıdaki tanım ve lemmalar (Dhrymes, 1974; Rao ve Toutenburg, 1995; Toutenburg, 1982) kullanılacaktır:

Tanım 2.1. $\mathbf{A}: n \times n$ ve $\mathbf{B}: n \times n$ tipinde herhangi iki matris olmak üzere,

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}| = 0$$

denkleminin kökleri $\lambda_i = \lambda_i^{\mathbf{B}}(\mathbf{A})$ şeklinde gösterilir ve $\mathbf{A}$ 'nın $\mathbf{B}$ metriğindeki özdeğerleri olarak adlandırılır.

Lemma 2.1. $A > 0$ (ya da $A \geq 0$) ve $B > 0$ iki matris olsun. $B - A > 0$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lambda_i^B(A) < 1$ olmasıdır.

Lemma 2.2. $A > 0$ ve $B > 0$ iki matris olmak üzere, $B - A > 0$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $A^{-1} - B^{-1} > 0$ olmasıdır.

Lemma 2.3. $A: n \times n$ tipinde pd bir matris ve $P: n \times m$ tipinde $rank(P) = m \leq n$ olan bir matris ise $P'AP > 0$ 'dır.

Lemma 2.4. $A: n \times m$ tipinde $rank(A) = m \leq n$ olan bir matris, $B: m \times m$ tipinde simetrik bir matris olmak üzere, $ABA' \geq 0$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $B \geq 0$ olmasıdır.

Lemma 2.5 (Farebrother, 1976). $A > 0$ bir matris, c sıfırdan farklı bir vektör ve θ pozitif bir skaler olmak üzere, $\theta A - cc' > 0$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $c'A^{-1}c < \theta$ olmasıdır.

Yukarıda verilen tanım ve lemmalar kullanılarak $\hat{b}_M$ ile $\hat{b}(k)$ 'nin varyans-kovaryans matrisleri karşılaştırılabilir. (2.15) ve (2.17)'den

$$\begin{aligned} V_2 - V_3 &= Cov(\hat{b}_M) - Cov(\hat{b}(k)) \\ &= \sigma^2[(S + R'W^{-1}R)^{-1} - S_k^{-1}SS_k^{-1}] = \sigma^2\Delta \end{aligned} \quad (2.21)$$

yazılabilir. $V_2 - V_3$ farkının pd olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Delta > 0$ olmasıdır. Lemma 2.3 gereği S matrisi pd ve Lemma 2.4 gereği $R'W^{-1}R$ matrisi psd olduğundan $S + R'W^{-1}R > 0$ olacaktır. Benzer şekilde $S_k^{-1}SS_k^{-1}$ matrisi de pd'dir. Bu durumda Lemma 2.2 kullanıldığında

$\Delta > 0 \Leftrightarrow [S_k S^{-1} S_k - (S + R'W^{-1}R)] > 0 \Leftrightarrow [2kI_p + k^2 S^{-1} - R'W^{-1}R] > 0$ yazılabilir. $G = 2kI_p + k^2 S^{-1}$ ve $H = R'W^{-1}R$ matrislerini tanımlayalım. G matrisi tüm $k > 0$ için pd ve H matrisi psd olduğundan, Lemma 2.1 gereği $G - H > 0$ yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lambda_i^G(H) < 1$ veya $\lambda_{maks}(G^{-1}H) < 1$ olmasıdır. Bu durumda Teorem 2.1 verilebilir.

Teorem 2.1. $G = 2kI_p + k^2S^{-1}$ ve $H = R'W^{-1}R$ olmak üzere, $\hat{b}(k)$ 'nin örnekleme varyansının $\hat{b}_M$ 'ninkinden küçük olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_i^G(H) < 1$ veya $\lambda_{maks}(G^{-1}H) < 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Etkinlikteki bu kazancın da $E(r) = R\beta$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmamasından bağımsız olduğu görülmektedir. Bu durumda yanlış olan ridge tahmin edicinin, yanlış olan mixed tahmin ediciden daha küçük örnekleme varyansına sahip olabileceği görülmektedir.

Mixed tahmin edici yanlış olmasına rağmen, ridge tahmin edici yanlış olduğundan, $\hat{b}_M$ ile $\hat{b}(k)$ 'nin HKO açısından karşılaştırılması gerekmektedir. $\hat{b}_M$ yanlış olduğundan $MSE(\hat{b}_M) = Cov(\hat{b}_M)$ yazılabilir. Bu durumda (2.15), (2.19) ve (2.21) eşitlikleri kullanıldığında

$$MSE(\hat{b}_M) - MSE(\hat{b}(k)) = \sigma^2\Delta - k^2S_k^{-1}\beta\beta'S_k^{-1} \quad (2.22)$$

yazılabilir. Burada $\delta = S_k^{-1}\beta$ alındığında (2.22) numaralı eşitlik

$$MSE(\hat{b}_M) - MSE(\hat{b}(k)) = \sigma^2\Delta - k^2\delta\delta' \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. Teorem 2.1 gereği Δ 'nın pd olabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\lambda_i^G(H) < 1$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda Lemma 2.4 kullanılarak Teorem 2.2 verilebilir.

Teorem 2.2. $\lambda_i^G(H) < 1$ olmak üzere $MSE(\hat{b}_M) - MSE(\hat{b}(k)) > 0$ için gerek ve yeter koşul

$$\beta'[2kI_p + k^2S^{-1} - S_kS^{-1}R'(W + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}S_k]^{-1}\beta < \frac{\sigma^2}{k^2} \quad (2.24)$$

olmasıdır.

İspat. $T = S_kS^{-1}R'(W + RS^{-1}R')^{-1}RS^{-1}S_k$ olmak üzere, (2.21)'deki Δ terimi

$$\Delta = S_k^{-1}[S_k(S + R'W^{-1}R)^{-1}S_k - S]S_k^{-1} = S_k^{-1}(G - T)S_k^{-1} \quad (2.25)$$

şeklinde düzenlenebilir. Lemma 2.4 gereği (2.23)'deki $\sigma^2 \mathbf{\Delta} - k^2 \mathbf{\delta} \mathbf{\delta}'$ ifadesinin pd olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{\delta}' \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{\delta} < \frac{\sigma^2}{k^2}$ olmasıdır. (2.25) ifadesi bu eşitsizlikte yerine yazıldığında ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2'deki (2.24) eşitsizliği (2.26)'daki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{\beta}' \left[\frac{2}{k} \mathbf{I}_p + \mathbf{S}^{-1} - \frac{1}{k^2} \mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}' (\mathbf{W} + \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}')^{-1} \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k \right]^{-1} \mathbf{\beta} < \sigma^2 \quad (2.26)$$

Araştırmacının elinde herhangi bir kısıt yer almıyorsa $\mathbf{R}$ matrisinin $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ şeklinde alınması gerekir. O halde (2.26)'daki gerek ve yeter koşul; $MSE(\hat{\mathbf{b}}) - MSE(\hat{\mathbf{b}}(k))$ farkının nnd olması için gerek ve yeter koşul olan (2.20) eşitsizliğine indirgenecektir. Dolayısıyla parametrelerle ilgili herhangi bir ön bilgi olmaması durumunda mixed ve GEKK tahmin edicileri denk olacak ve (2.20) eşitsizliği sağlandığında ridge tahmin edici hko anlamında bu tahmin edicilerden daha iyi olacaktır.

2.3. Yanlılık Parametresinin Seçimi

Parametrelerin tahmininde $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'nin kullanılması tercih edildiğinde, yanlılık parametresi k 'nin uygun bir şekilde seçilmesi gerekmektedir. k parametresini tahmin etmek için çeşitli tahmin ediciler kullanılabilir. Bu çalışmada dört farklı k tahmini incelenmiştir.

k 'yi tahmin etmek için $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3$ farkı incelenirken karşılaşılan

$$2k\mathbf{I}_p + k^2\mathbf{S}^{-1} - \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R} \quad (2.27)$$

matrisi ele alınabilir. $2k\mathbf{I}_p - \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}$ pd olduğunda (2.27) ifadesi de pd olacaktır. $\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}$ simetrik bir matris olduğundan bu matrisi spektral formda yazmak mümkün olacaktır. $\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}$ 'nin özdeğerlerinin yer aldığı köşegen matris $\mathbf{\Psi} = \text{diag}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, standartlaştırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal matris $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \dots, \gamma_{(p)})$ olmak üzere $\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Gamma}'$ yazılabilir. Bu durumda

$$2k\mathbf{I}_p - \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{\Gamma}(2k\mathbf{I}_p - \mathbf{\Psi})\mathbf{\Gamma}' > 0$$

için gerek ve yeter koşul

$$2k\mathbf{I}_p - \mathbf{\Psi} > 0$$

olmasıdır. $2k\mathbf{I}_p - \Psi > 0$ ise $2k\mathbf{I}_p - \Psi$ matrisinin tüm özdeğerleri için $2k - \xi_i > 0$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Bu durumda $k > \frac{\xi_{maks}}{2}$ yazılabilir. Bu eşitsizlik yardımıyla Teorem 2.3 verilebilir:

Teorem 2.3. $\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}$ 'nin özdeğerleri $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ olmak üzere; $k > \frac{\xi_{maks}}{2}$ ise $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 > 0$ olur.

Teorem 2.3 gereğince $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin $\hat{\mathbf{b}}_M$ 'ninkinden daha küçük olmasını garanti eden bir k değerinin daima var olduğu söylenebilir. Teoremdeki eşitsizliği sağlayan bir k değeri seçildiğinde, ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi açısından mixed tahmin ediciden daha iyi olması sağlanabilir.

Bir diğer alternatif olarak Hoerl ve ark. (1975) tarafından klasik ridge tahmin edici için önerilen k seçme yöntemi $\hat{\mathbf{b}}(k)$ için genelleştirilebilir. Klasik ridge tahmin edici için $k_{HKB} = p\sigma^2/\beta'\beta$ alındığında hko'nun minimum değerini aldığı bilinmektedir. Bu k değeri bilinmeyen parametreleri içerdiğinden, ilgili parametreler yerine EKK tahminleri yazıldığında $\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}^2/\hat{\beta}'\hat{\beta}$ tahminine ulaşılır. Öte yandan bu yöntem (2.6)'daki genel doğrusal regresyon modeli için $\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}^2/\hat{\mathbf{b}}'\hat{\mathbf{b}}$ şeklinde genelleştirilebilir. Burada $\hat{\mathbf{b}}$ parametrelerin GEKK tahmini, $\hat{\sigma}^2$ ise GEKK rezidülerinden elde edilen hata varyansı tahminidir.

k seçmek için önerilen bir diğer yöntem ise Hoerl ve Kennard'ın (1970) verdiği $k_{HK} = \sigma^2/maks(\alpha_i^2)$ eşitliğidir. Bu eşitlikle elde edilen ridge tahmin edici hko anlamında EKK'den daha iyidir. İlgili eşitlikte bilinmeyen parametreler yerine tahminleri yazıldığında k 'nin tahmini olarak $\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2/\hat{\alpha}_{maks}^2$ eşitliğine ulaşılır. Burada $\hat{\alpha}$ kanonik model parametrelerinin EKK tahminidir. $\mathbf{S} = \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}$ matrisinin özdeğerlerinden oluşan matris $\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden oluşan ortogonal matris $\mathbf{D}$ olmak üzere, $\mathbf{D}'\mathbf{S}\mathbf{D} = \mathbf{\Lambda}$ eşitliği kullanılarak (2.7)'deki model kanonik formda yazılabilir. Kanonik model için GEKK tahmin edicisi $\hat{\alpha} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$ olup, bu tahmine göre elde edilen k tahmini

$\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2 / \hat{\alpha}_{maks}^2$ şeklindedir. Burada $\hat{\alpha}$ kanonik model parametrelerinin GEKK tahmini, $\hat{\sigma}^2$ ise daha önce olduğu gibi GEKK rezidülerinden elde edilen hata varyansı tahminidir. Buradan elde edilen k tahmini kullanılarak kanonik model için ridge tahmin edici $\hat{\alpha}(k) = (\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{D}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$ şeklindedir. Bu tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi $Cov(\hat{\alpha}(k)) = \sigma^2(\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda} + k\mathbf{I}_p)^{-1}$ olur. Kanonik modelden elde edilen tahminler kullanıldığında, orijinal model parametreleri için RR tahminlerinin $\hat{\mathbf{b}}(k) = \mathbf{D}\hat{\alpha}(k)$ ve $Cov(\hat{\mathbf{b}}(k)) = \mathbf{D}Cov(\hat{\alpha}(k))\mathbf{D}'$ olduğu gösterilebilir.

k değerini belirlemek için son bir alternatif olarak hko tahminini minimum yapan k değerinin seçilmesi yoluna gidilmiştir. $\hat{\mathbf{b}}(k)$ 'nin (2.19)'daki HKO tahmini olarak (2.28)'deki matris verilebilir:

$$\widehat{MSE}(\hat{\mathbf{b}}(k)) = \widehat{Cov}(\hat{\mathbf{b}}(k)) + \widehat{Bias}(\hat{\mathbf{b}}(k))\widehat{Bias}'(\hat{\mathbf{b}}(k)) \quad (2.28)$$

Burada $\widehat{Cov}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ (2.17)'deki varyans-kovaryans matrisinin tahmini, $\widehat{Bias}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ ise ridge tahmin edicinin yan tahmini olup $\widehat{Bias}(\hat{\mathbf{b}}(k)) = \hat{\mathbf{b}}(k) - \hat{\mathbf{b}}$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda (2.28) eşitliğinin izi alındığında hko tahmini $\widehat{mse}(\hat{\mathbf{b}}(k)) = iz(\widehat{MSE}(\hat{\mathbf{b}}(k)))$ şeklinde elde edilmiş olur. hko tahminini minimum yapan k değeri ağ araması tekniği ile bulunabilir. $k > 0$ olduğundan k için pozitif bir aralık seçilir ve bu aralıkta k değeri arttırılarak her seferinde $\widehat{mse}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ hesaplanır. hko tahminlerini minimum yapan k değeri $\hat{k}_{mse}$ olarak alınabilir.

2.4. Ekonometrik Bir Uygulama

Bu bölümde tahmin edicilerin daha önce tartışılan teorik özellikleri gerçek bir veri seti üzerinde incelenecektir. Daha önce Bayhan ve Bayhan (1998) tarafından kullanılan bu veri seti, 75 hafta için haftalık şampuan satışları ile şampuan ve sabun fiyatlarından oluşmaktadır. Burada y şampuan satışlarını (şişe), x_1 şampuan fiyatını (TL) ve x_2 sabun fiyatını (TL) göstermektedir. İlgili çalışmada bu verilere ilişkin iki

örnek dönemi seçilmiştir. İlk dönem 60 gözleme dayanan geçmiş verilerden, ikinci dönem ise 15 gözleme dayanan güncel verilerden oluşmaktadır. Bayhan ve Bayhan'ın (1998) amacı çoklu iç ilişkili ve otokorelasyonlu bu veri setinde, 15 gözlemlilik güncel veriyi kullanarak şampuan için talep denklemi tahmin etmek; bu tahminleri kullanarak mixed, GEKK ve ridge tahmin edicileri varyans-kovaryans matrisleri cinsinden karşılaştırmaktır. İlgili çalışmada hataların varyans-kovaryans matrisini tahmin etmek için geçmiş verilerden faydalanılmıştır. Ayrıca geçmiş verilerden iki gözlem seçilerek mixed tahmin edicide ek bilgi olarak kullanılmıştır.

Bu çalışmada aynı veri seti kullanılarak $\hat{b}$, $\hat{b}_M$ ve $\hat{b}(k)$ tahmin edicileri karşılaştırılmıştır. Bayhan ve Bayhan (1998) GEKK, mixed ve ridge tahmin edicilerin varyans-kovaryans matrislerini karşılaştırmışlardır. Ancak bu karşılaştırmada ridge tahminlerini standartlaştırılmış veriden hesaplarlarken, mixed ve GEKK tahminlerini orijinal veriden elde etmişlerdir. Verinin standartlaştırılması katsayı tahminlerinin varyans-kovaryans yapısını etkileyeceğinden Bayhan ve Bayhan'ın (1998) yaptıkları karşılaştırmalar geçerli değildir.

Standartlaştırılmış değişkenler için regresyon modeli (2.29)'daki gibidir:

$$y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t, \quad E(\varepsilon_t) = 0, \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+j}) = \sigma^2 \rho_j, \quad \begin{cases} t = 1, 2, \dots, 15 \\ j = 0, 1, \dots, 14 \end{cases} \quad (2.29)$$

Burada y^* , x_i^* ($i = 1, 2$) orijinal değişkenler olmak üzere, bağımlı ve açıklayıcı değişkenler $y_t = (y_t^* - \bar{y}^*)/s_{y^*}$ ve $x_{it} = (x_{it}^* - \bar{x}_i^*)/s_{x_i^*}$ ($i = 1, 2$) şeklinde standartlaştırılmıştır. Bu eşitliklerde $\bar{y}^*$ ve $\bar{x}_i^*$ orijinal değişkenlerin ortalamaları, s_{y^*} ve $s_{x_i^*}$ ise orijinal değişkenlerin ortalamalarından farklarının kareler toplamıdır. ρ_j terimi hataların j -gecikmeli otokorelasyonu olup, $C_j = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+j})$ olmak üzere $\rho_j = \frac{C_j}{C_0}$ ($j = 0, 1, \dots, 14$) şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu gösterim kullanıldığında (2.29)'daki model matris formunda

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}_{n \times 1}, \quad Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{V} \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada hataların kovaryans matrisi

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{14} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{14} & \rho_{13} & \rho_{12} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

olarak tanımlanabilir.

Uygulamada ilk olarak (2.29)'un parametreleri EKK kullanılarak tahmin edilmiş ve GEKK, mixed veya ridge tahminlerine ihtiyaç olup olmadığı incelenmiştir. Hata terimlerinin ilişkili olup olmadığını test etmek için Durbin-Watson testine başvurulmuştur. Burada hesaplanan d istatistiği $d = 0,353$ olup %5 anlamlılık düzeyinde kritik değerler $d_L = 0,946$ ve $d_U = 1,543$ 'dür. Dolayısıyla %5 anlamlılık düzeyinde hata terimleri arasında pozitif otokorelasyon olduğu sonucuna varılmıştır. Değişkenlerin birbirleriyle ilişkili olup olmadığını incelemek için $X'X$ matrisi hesaplanmış ve bu matrisin köşegen dışındaki elemanı 0,9982 olarak gözlenmiştir. Standartlaştırılmış değişkenler için $X'X$ matrisinin köşegen dışı elemanları, değişkenler arasındaki korelasyon katsayılarını vermektedir. Dolayısıyla x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısının bir hayli yüksek olduğu söylenebilir. $X'X$ matrisinin koşul sayısı¹ 33,1266 olduğundan bu değer de değişkenlerin birbirleriyle yüksek derecede ilişkili olduğu anlamına gelmektedir. Korelasyon katsayısı ve koşul sayısı birlikte ele alındığında açıklayıcı değişkenler arasında bir iç ilişki probleminin olduğu söylenebilir. Bu durumda incelenen verinin hata terimleri otokorelasyonlu ve aynı zamanda açıklayıcı değişkenleri de iç ilişkili olduğundan, adı geçen tahmin edicilerin kullanılması uygun görülmüştür. Uygulamanın geri kalan kısmında $\hat{b}$, $\hat{b}_M$ ve $\hat{b}(k)$ tahminleri hesaplanmış ve birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

2.4.1. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmini

(2.8)'de tanımlanan $\hat{b}'$ 'yi hesaplamak için V matrisine ihtiyaç vardır. V 'nin bir tahminini elde etmek için rezidülerin korelasyon yapısının bilinmesi gerekmektedir.

¹ En büyük özdeğerin en küçük özdeğere oranının karekökü.

Bu amaçla Bayhan ve Bayhan'ın (1998) yaklaşımı kullanılmış ve geçmiş veriler yardımıyla ρ_j 'ler tahmin edilerek V matrisinin bir tahmini hesaplanmıştır. Burada

$$\hat{\rho}_j = \frac{\hat{c}_j}{\hat{c}_0}, \quad \hat{C}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-j} (\hat{e}_i - \bar{e})(\hat{e}_{i+j} - \bar{e}), j = 0, 1, \dots, 14, n = 60 \quad (2.32)$$

şeklinde hesaplanmış olup

$$\hat{e} = y - X\hat{\beta}$$

geçmiş verilerin EKK rezidüleridir. Verinin korelasyon yapısının değişmediği varsayımı altında (2.32) ile elde edilen tahminler kullanılarak güncel veri için (2.31)'deki V matrisi tahmin edilmiştir². Son olarak bu V matrisi kullanılarak GEKK tahmini

$$\hat{b} = (0,3473 \quad 0,4617)' \quad (2.33)$$

şeklinde hesaplanmış olup, bu tahminin varyans-kovaryans matrisi

$$\hat{V}_1 = \hat{\sigma}^2 S^{-1} = \begin{pmatrix} 0,9967 & -0,9867 \\ -0,9867 & 1,0199 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

olarak tahmin edilmiştir. Burada $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{15-2} \sum_{i=1}^{15} \hat{e}_i^2$ şeklinde hesaplanan güncel verilerin hata varyansı tahmini olup, $\hat{e} = y - X\hat{b}$ şeklindeki GEKK rezidüleridir.

2.4.2. Mixed Tahmini

(2.11)'de verilen $\hat{b}_M$ tahmin ediciyi kullanabilmek için R ve r 'nin bilinmesi gerekmektedir. Bu çalışmada Bayhan ve Bayhan'ın (1998) kullandığı ve aşağıda verilen R matrisi ile r vektörünün kullanılması tercih edilmiştir:

$$R = \begin{pmatrix} 0,14497 & 0,10490 \\ 0,00775 & 0,18499 \end{pmatrix} \text{ ve } r = \begin{pmatrix} 0,13027 \\ 0,13801 \end{pmatrix}$$

Kullanılan bu değerler standartlaştırılmış geçmiş verinin 48 ve 49'uncu gözlemlerine karşılık gelmektedir. Bu durumda (2.11)'deki W matrisi, V 'nin ilk iki satır ve sütunundan elde edilen

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0,70716 \\ 0,70716 & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Tüm bu değerler kullanıldığında parametrelerin mixed tahmini

² Her ne kadar bu yolla elde edilen matris $\hat{V}$ olsa da çalışmanın geri kalan kısmında gösterim basitliği açısından V sembolü kullanılmıştır.

$$\hat{\mathbf{b}}_M = (0,2549 \quad 0,5663)' \quad (2.35)$$

şeklinde hesaplanmış olup, bu tahminin varyans-kovaryans matrisi

$$\hat{\mathbf{V}}_2 = \hat{\sigma}^2(\mathbf{S} + \mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1735 & -0,1553 \\ -0,1553 & 0,1786 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

olarak bulunmuştur. (2.34) ve (2.36) incelendiğinde mixed tahmin edicinin GEKK tahmin ediciden daha düşük varyans ve kovaryanslara sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca (2.16)'da ifade edildiği üzere $\hat{\mathbf{V}}_1 - \hat{\mathbf{V}}_2$ farkının da pd olduğu gösterilebilir.

2.4.3. Ridge Tahmini

Ridge tahminlerinin hesaplanabilmesi için k 'nin belirlenmesi gerekmektedir. Bu yöntemler Bölüm 2.3'de tanımlanan:

- i. Teorem 2.3'de önerildiği üzere $k_{T23} > \frac{\xi_{maks}}{2}$ şeklinde seçilmesi;
- ii. $\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}^2/\hat{\mathbf{b}}'\hat{\mathbf{b}}$ (Hoerl ve ark., 1975);
- iii. $\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2/\hat{\alpha}_{maks}^2$ (Hoerl ve Kennard, 1970);
- iv. hko tahminini minimum yapan $\hat{k}_{mse}$ değeri

şeklinde sıralanabilir.

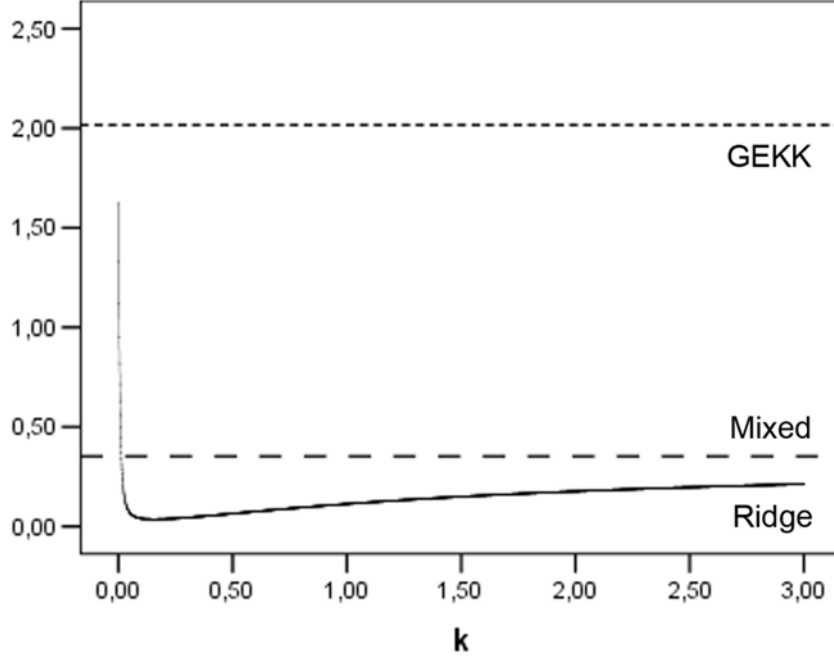
İlk olarak Teorem 2.3'deki k seçme yöntemi ele alınmıştır. Teorem 2.3'deki yöntem $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_3 > 0$ olmasını, bir başka deyişle ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi bakımından mixed tahmin ediciden daha iyi olmasını garanti etmektedir. $\mathbf{R}'\mathbf{W}^{-1}\mathbf{R}$ matrisinin özdeğerleri 0,0433 ve 0,0312 olduğundan, 0,0433/2'den büyük olan bir k değeri seçildiğinde Teorem 2.3 sağlanacaktır. Bu çalışmada ilgili k değeri $k_{T23} = 0,2$ olarak seçilmiştir.

Hoerl ve ark. (1975) tarafından önerilen yöntem için GEKK tahminleri kullanıldığında $\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}^2/\hat{\mathbf{b}}'\hat{\mathbf{b}} = 0,1025$ değeri hesaplanmıştır.

$\hat{\alpha}$ kanonik modelin GEKK tahmini, $\hat{\sigma}^2$ GEKK rezidülerinden elde edilen hata varyans tahmini olmak üzere, Hoerl ve Kennard'ın (1970) önerdiği yöntem için $\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2/\hat{\alpha}_{maks}^2 = 0,0299$ tahmini elde edilmiştir.

hko tahminini minimum yapan k değeri seçilirken $\widehat{mse}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ fonksiyonu k 'nin 0,001(0,001)3 aralığında incelenmiştir. Elde edilen hko tahminleri, GEKK ve

mixed tahmin edicilerin hko tahminleriyle birlikte Şekil 2.1’de verilmiştir. Şekil 2.1’de hko tahminini minimum yapan k değeri $\hat{k}_{mse} = 0,1550$ ’dir.



Şekil 2.1. Şampuan verisi için hko tahminleri

Yukarıda hesaplanan k tahminlerinin her biri için $\hat{\mathbf{b}}(k)$, $\widehat{Cov}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ ve $\widehat{MSE}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ matrisleri ile $\widehat{mse}(\hat{\mathbf{b}}(k))$ değerleri Çizelge 2.1’de verilmektedir.

Çizelge 2.1. Şampuan verisi için ridge tahminleri

k	$\hat{\mathbf{b}}(k)$	$\widehat{Cov}(\hat{\mathbf{b}}(k))$	$\widehat{MSE}(\hat{\mathbf{b}}(k))$	$\widehat{mse}(\hat{\mathbf{b}}(k))$
k_{T23} (0,2)	$\begin{pmatrix} 0,3223 \\ 0,3234 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0086 & 0,0052 \\ 0,0085 & 0,0085 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0092 & 0,0086 \\ 0,0276 & 0,0276 \end{pmatrix}$	0,0368
$\hat{k}_{HKB}$ (0,1025)	$\begin{pmatrix} 0,3555 \\ 0,3605 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0144 & 0,0025 \\ 0,0144 & 0,0144 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0145 & 0,0017 \\ 0,0246 & 0,0246 \end{pmatrix}$	0,0391
$\hat{k}_{HK}$ (0,0299)	$\begin{pmatrix} 0,3786 \\ 0,4005 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0590 & -0,0395 \\ 0,0599 & 0,0599 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0600 & -0,0414 \\ 0,0637 & 0,0637 \end{pmatrix}$	0,1237
$\hat{k}_{mse}$ (0,1550)	$\begin{pmatrix} 0,3371 \\ 0,3393 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0103 & 0,0048 \\ 0,0102 & 0,0102 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,0104 & 0,0061 \\ 0,0252 & 0,0252 \end{pmatrix}$	0,0356

Çizelge 2.1'deki varyans-kovaryans matrisleri incelendiğinde, k 'nin değeri küçüldükçe tahminlerin varyanslarının beklendiği üzere büyüdüğü görülmektedir. Varyanslar göz önüne alındığında en iyi ridge tahmininin en büyük k değerine sahip olan k_{T23} için elde edildiği görülmektedir. Bu k tahmini varyansları küçültme amacına dayandığından, diğer ridge tahminlerinden daha küçük varyanslara sahip olması şaşırtıcı değildir. Buna karşılık hem parametre tahminlerinin tek tek hko değerlerinde hem de tahminin tümünün hko değerinde, varyanslarda olduğu gibi k 'ye bağlı belirli bir yapı görülmemektedir. hko anlamında en iyi tahmin $\hat{k}_{mse}$ için elde edilmiştir. Bu tahmin edicideki amaç hko'nu minimum yapmak olduğundan bu durum da beklentilerle uyumludur. hko anlamında $\hat{k}_{mse}$ 'nin ardından gelen k tahminleri sırasıyla k_{T23} , $\hat{k}_{HKB}$ ve $\hat{k}_{HK}$ 'dir. Özellikle k_{T23} kullanılarak seçilen k değerinde elde edilen hko'nun minimum hko'na oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 2.1'deki ridge tahminleri, (2.33) ve (2.34)'deki GEKK tahminleri ile karşılaştırıldığında ridge tahminlerinin tamamında varyans ve kovaryansların daha düşük çıktığı görülmektedir. Dolayısıyla iç ilişkiye sahip bu veri seti için GEKK yerine ridge tahmin edici kullanıldığında katsayı tahminlerinin varyanslarının düşürüldüğü söylenebilir. Seçilen k değeri büyüdükçe varyanslarda elde edilen kazanç da artmaktadır. hko anlamında da benzer sonuçlar elde edilmiştir. GEKK tahmin edici yansız olduğundan hko tahmini (2.34)'deki varyans-kovaryans matrisinin izi olan 2,0166'dır. Çizelge 2.1'deki hko tahminlerinin tamamının 2,0166'dan küçük olduğu, dolayısıyla ridge tahminlerinin hko anlamında da GEKK'den daha iyi olduğu görülmektedir. Öte yandan HKO açısından karşılaştırmalarda durum farklıdır. (2.34)'deki varyans-kovaryans matrisi ile Çizelge 2.1'deki HKO matrislerinin farkı alındığında, $\hat{k}_{HKB}$ ve $\hat{k}_{HK}$ için bu farkların pd olduğu görülmektedir. Ayrıca bu iki k tahmini için (2.20)'deki koşul da sağlanmaktadır. Dolayısıyla $\hat{k}_{HKB}$ ve $\hat{k}_{HK}$ için elde edilen ridge tahminlerinin HKO anlamında da GEKK'den daha iyi olduğu söylenebilir. Ancak diğer k tahminleri için (2.20)'deki koşul sağlanmamaktadır. Ayrıca bu k tahminleri için (2.34)'deki varyans-kovaryans matrisi ile Çizelge 2.1'deki HKO matrislerinin farkı incelendiğinde bu farkın pd olmadığı görülmüştür. Bu durumda k_{T23} ve $\hat{k}_{mse}$ için

elde edilen ridge tahminlerinin, HKO açısından GEKK'den daha iyi olmadığı sonucuna varılabilir.

Son olarak bu veri seti için mixed ve ridge tahmin ediciler karşılaştırılmıştır. Çizelge 2.1'deki ridge tahminleri ile (2.33) ve (2.34)'deki mixed tahminleri karşılaştırıldığında ridge tahmin edicilerin yine daha düşük varyanslara sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca mixed tahmin edicinin hko'nun tahminini bulmak için (2.34)'ün izi alındığında, ridge tahminlerin Çizelge 2.1'deki hko değerlerinden daha büyük olan 0,3521'e ulaşılmaktadır. Dolayısıyla ridge tahmin edicilerin hko anlamında da mixed tahmin ediciden daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. HKO açısından yapılan karşılaştırmalarda ise $\hat{k}_{HK}$ için Teorem 2.2'nin sağlandığı görülmektedir. Ayrıca bu k değeri için mixed tahmin edicinin (2.34)'deki varyans-kovaryans matrisi ile ridge tahmin edicinin Çizelge 2.1'deki HKO matrisi arasındaki fark pd'dir. Öte yandan diğer k değerleri için Teorem 2.2 sağlanmamakta ve ilgili matrisler arasındaki fark pd olmamaktadır. Dolayısıyla HKO açısından sadece $\hat{k}_{HK}$ için ridge tahmin edicinin mixed tahmin ediciden daha iyi olduğu söylenebilir. Kullanılan diğer k değerleri için mixed tahmin edici HKO anlamında ridge tahmin ediciden daha iyi sonuçlar vermiştir.

Öte yandan Bayhan ve Bayhan'ın (1998) varyanslara dayanarak yaptıkları karşılaştırmalarda, bu veri seti için en iyi tahmin edicinin mixed tahmin edici olduğu belirtilmektedir. İlgili çalışmada ridge tahminleri standartlaştırılmış gözlemlerden hesaplanmışken, mixed ve GEKK tahminleri orijinal veri kullanılarak elde edilmiştir. Ölçü birimlerinin farklı seçilmesi, Bayhan ve Bayhan'ın (1998) hatalı sonuçlara ulaşmasına neden olmuştur. Yukarıda elde edilen sonuçlar, Bayhan ve Bayhan'ın (1998) kullandığı k seçme yöntemleri uygulandığı halde, ridge tahmin edicinin varyanslarının ilgili veri seti için daha küçük çıktığını göstermektedir. Öte yandan ridge tahmin edici yanlı olduğundan, bu tahmin edici ile GEKK ve mixed tahmin ediciyi karşılaştırırken hko kriterinin kullanılması gerekmektedir. Yukarıdaki sonuçlar göstermektedir ki, ilgili veri seti için uygun bir k değeri seçildiğinde, ridge tahmin edici hem GEKK hem de mixed tahmin ediciden hko ve HKO anlamında daha iyi sonuçlar vermektedir.

2.5. Monte Carlo Deneyi

Literatürde EKK ve klasik ridge tahmin edicileri karşılaştıran pek çok simülasyon çalışması bulunmaktadır. Öte yandan literatürde (2.6)'da verilen genel doğrusal regresyon modeli için $\hat{\mathbf{b}}$, $\hat{\mathbf{b}}_M$ ve $\hat{\mathbf{b}}(k)$ tahmin edicileri bir arada karşılaştıran bir simülasyon çalışmasına rastlanmamıştır. Bu çalışmada ilgili tahmin ediciler Monte Carlo simülasyon deneyi yardımıyla hko kriteri açısından karşılaştırılmıştır. Tahmin edicilerin farklı veri setlerindeki davranışlarını ortaya koyabilmek amacıyla simülasyon çalışmasında farklı parametreler kullanılmıştır. Farklı veri setleri için elde edilecek bulguların, uygulamalı bir çalışmada incelenen veri seti için en uygun tahmin ediciyi belirlemeye yardımcı olması amaçlanmıştır. İlk olarak Monte Carlo deneyindeki veri üretim süreci incelenmiştir.

2.5.1. Veri Üretim Süreci ve Performans Kriteri

Çalışmada kullanılan simülasyon modeli Kibria (2003) ve McDonald ve Galarneau'nun (1975) çalışmalarına dayanmaktadır. z_{1ji} ve z_{2ji} standart normal dağılımdan üretilen bağımsız rassal sayılar olmak üzere, açıklayıcı değişkenler (2.37a) ve (2.37b)'deki sürece göre üretilmiştir:

$$x_{ji} = (1 - \kappa^2)^{1/2} z_{1ji} + \kappa z_{1,p+1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.37a)$$

$$R_{ji} = (1 - \kappa^2)^{1/2} z_{2ji} + \kappa z_{2,p+1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2.37b)$$

Burada herhangi iki x_j ve x_l ($j, l = 1, 2, \dots, p$ ve $j \neq l$) açıklayıcı değişkeni arasındaki korelasyon katsayısı κ^2 'ye eşittir. Benzer özellik herhangi iki R_j ve R_l değişkeni ($j, l = 1, 2, \dots, p$ ve $j \neq l$) için de geçerlidir. Kibria'da (2003) olduğu gibi κ için $\kappa = 0,7, 0,8, 0,9$ ve $0,99$ değerleri seçilerek değişkenler arasındaki iç ilişkinin farklı düzeyleri ele alınmıştır. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{R}$ matrislerinin elemanları, $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ ve $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ korelasyon formunda olacak şekilde standartlaştırılmıştır. Açıklayıcı değişkenler Monte Carlo deneyinin başında üretilmiş ve denemeler boyunca sabit tutulmuştur.

Açıklayıcı değişkenler üretildikten sonra y ve r bağımlı değişkenlerine ait n ve m sayıdaki gözlemleri üretirken

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.38a)$$

$$r_i = \beta_1 R_{1i} + \beta_2 R_{2i} + \dots + \beta_p R_{pi} + \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.38b)$$

eşitliklerinden yararlanılmıştır. (2.38a) ve (2.38b)'deki hata terimleri üretilirken (2.39a), (2.39b) ve (2.39c)'de verilen üç farklı süreç kullanılmıştır:

$$\varepsilon_i = e_{1i}, \quad \phi_j = e_{2j}, \quad \text{beyaz gürültü süreci} \quad (2.39a)$$

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + e_{1i}, \quad \phi_j = \rho \phi_{j-1} + e_{2j}, \quad \text{AR(1) süreci} \quad (2.39b)$$

$$\varepsilon_i = e_{1i} + \tau e_{1i-1}, \quad \phi_j = e_{2j} + \tau e_{2j-1}, \quad \text{MA(1) süreci} \quad (2.39c)$$

Burada e_1 ve e_2 terimleri bağımsız ve $N(0, \sigma_e^2)$ dağılımından üretilen değerler olup $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ şeklindedir. Deneydeki gözlem ve açıklayıcı değişken sayıları $n = 20, p = 4$ ve $n = 60, p = 10$ olarak seçilmiştir. Mixed tahmin edicide ek bilgidaki gözlem sayısının bu tahmin edicinin performansını etkileyeceği beklendiğinden, m 'nin değeri n ile orantılı olacak şekilde seçilmiştir. n 'ye karşılık m değerleri $(n, m) = \{(20, 2), (60, 6)\}$ olarak seçilmiş ve bu sayede m/n oranının 0,1 olması sağlanmıştır.

(2.39a), (2.39b), (2.39c)'deki ε_i hata terimlerinin V matrisleri ve varyansları Trenkler (1984) ile Judge ve ark. (1985) tarafından sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$V = I_n, \quad \sigma^2 = \sigma_e^2, \quad \text{beyaz gürültü süreci} \quad (2.40a)$$

$$V = (v_{ij}), \quad v_{ij} = \rho^{|i-j|}, \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}, \quad \text{AR(1) süreci} \quad (2.40b)$$

$$V = \frac{1}{1+\tau^2} \begin{pmatrix} 1+\tau^2 & \tau & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tau & 1+\tau^2 & \tau & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\tau^2 & \tau \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau & 1+\tau^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma^2 = \sigma_e^2(1+\tau^2), \quad \text{MA(1) süreci} \quad (2.40c)$$

ρ ve τ için 0,3; 0,5 ve 0,7 şeklinde üç farklı değer seçilmiştir. Çalışmada σ 'nın sekiz farklı değeri incelenmiş olup bu değerler 0,01; 0,1; 0,25; 0,5; 1; 4; 9 ve 20'dir. σ için bu değerleri elde edebilmek amacıyla (2.40b) ve (2.40c) eşitliklerinde uygun σ_e^2 değerleri kullanılmıştır. W matrisi oluşturulurken V matrisinin ilk m satır ve sütunu alınarak, r 'nin y ile aynı korelasyon yapısına sahip olması sağlanmıştır.

β vektörü, Newhouse ve Oman'da (1971) belirtildiği üzere, $X'V^{-1}X$ 'in en büyük özdeğerine karşılık gelen standartlaştırılmış özvektör olarak seçilmiştir. Özvektörleri hesaplamadan önce X_* matrisi standartlaştırılmış ve $X'V^{-1}X$ 'in de korelasyon formunda olması sağlanmıştır. Bu sayede özdeğerler toplamının tüm deney için değişken sayısına eşit olması sağlanmış ve karşılaştırmaların daha anlamlı olması amaçlanmıştır. n , p , κ , ρ ve τ 'nin farklı değerleri için $X'V^{-1}X$ 'in koşul sayıları (KS) Çizelge 2.2'de verilmektedir.

Çizelge 2.2. Farklı hata terimleri için simülasyon verisinin koşul sayıları

κ	0,70	0,80	0,90	0,99	0,70	0,80	0,90	0,99
n, p	$n = 20, p = 4$				$n = 60, p = 10$			
Beyaz Gürültü	2,083	2,833	4,436	15,680	5,026	6,750	10,408	35,037
AR(1), $\rho = 0,3$	2,393	3,258	5,146	18,113	4,248	5,670	8,707	29,770
AR(1), $\rho = 0,5$	2,585	3,523	5,568	19,847	3,914	5,201	7,990	27,312
AR(1), $\rho = 0,7$	2,715	3,704	5,850	20,920	3,718	4,944	7,612	26,265
MA(1), $\tau = 0,3$	2,335	3,183	5,033	18,118	4,350	5,785	8,880	29,784
MA(1), $\tau = 0,5$	2,407	3,295	5,264	19,854	4,079	5,407	8,322	28,453
MA(1), $\tau = 0,7$	2,339	3,226	19,146	20,928	4,214	5,536	8,503	29,671

Bu veri üretim süreci kullanılarak $\hat{b}$, $\hat{b}_M$ ve $\hat{b}(k)$ tahmin edicileri (2.41)'de verilen skaler hko kriteri kullanılarak karşılaştırılmıştır:

$$mse(\hat{\theta}) = \frac{1}{MCN} \sum_{mci=1}^{MCN} (\hat{\theta}_{mci} - \beta)'(\hat{\theta}_{mci} - \beta) \quad (2.41)$$

Burada $\hat{\theta}$, β 'nin bir tahmin edicisi; $\hat{\theta}_{mci}$, Monte Carlo deneyin mci -inci denemesindeki $\hat{\theta}$ tahmini ve MCN deneme sayısı olup, bu çalışmada $MCN = 5.000$ alınmıştır. (2.41) kullanılarak farklı tahmin edicilerin skaler hko değerleri tahmin edilmiştir. $\hat{b}(k)$ tahminleri hesaplanırken bağımlı değişkenler de standartlaştırılarak $X'V^{-1}y$ ve $R'W^{-1}r$ 'nin korelasyon formunda olması sağlanmıştır. Standartlaştırılmış veriden elde edilen bu tahminler daha sonra orijinal ölçeğe dönüştürülerek (2.41)'de kullanılmıştır. Çalışmada k 'nin seçiminde Bölüm 2.3'de verilen k_{T23} , $\hat{k}_{HKB}$ ve $\hat{k}_{HK}$ yöntemleri uygulanmıştır. Teorem 2.3'de verilen k_{T23} kullanılırken, $k_{T23} > \frac{\xi_{maks}}{2}$ eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $\hat{k}_{T23} = 1,05 \times \frac{\xi_{maks}}{2}$ alınmıştır.

2.5.2. Simülasyon Sonuçları

Bu bölümde, incelenen veri üretim süreci kullanılarak $\hat{b}$, $\hat{b}_M$ ve $\hat{b}(k)$ tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır. Simülasyon için gerekli program MATLAB 7.0'da kodlanmış olup, tesadüfi sayı üreticinin tohum değeri (MATLAB'da state değeri olarak adlandırılmaktadır) 170904 olarak alınmıştır. (2.41) eşitliğiyle elde edilen hko tahminleri, beyaz gürültü ve AR(1) hataları için Çizelge 2.3 - Çizelge 2.10'da verilmiştir. Hata terimleri MA(1) sürecine göre üretildiğinde AR(1) ile benzer sonuçlar elde edilmiş ve bu yüzden çizelgelerde MA(1) sonuçlarına yer verilmemiştir.

Sonuçlar ilk olarak σ için yorumlanmıştır. σ 'nın incelenen tahmin ediciler üzerindeki etkisi aynı olup, farklı hata süreçlerinde bu durum değişmemiştir. σ 'nın hko üzerinde etkili olduğu ve σ arttıkça hko değerlerinin de arttığı görülmüştür.

Ardından çoklu iç ilişkinin derecesini belirleyen κ parametresinin hko üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çoklu iç ilişkinin derecesi arttıkça tahmin edicilerin hko değerlerinin de artması beklenmektedir. Bu durum $\hat{k}_{T23}$ haricinde tüm tahmin ediciler geçerli olup, κ arttıkça hko tahminlerinin de büyüdüğü gözlenmiştir. Öte yandan beklentinin aksine κ 'nın $\hat{k}_{T23}$ üzerinde tam tersi bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir. Çizelge 2.3 - Çizelge 2.10'daki hko tahminleri incelendiğinde $\hat{k}_{T23}$ için κ 'nın değeri büyüdükçe genellikle hko'nın küçüldüğü görülmektedir.

İncelenen diğer bir parametre ise gözlem (n), değişken (p) ve ek bilgi (m) sayısıdır. n ve p değiştikçe koşul sayıları da değiştiğinden, $(n, p) = (20, 4)$ durumu ile $(n, p) = (60, 10)$ durumunu doğrudan karşılaştırmak uygun olmaz. Buna karşın her iki durum incelendiğinde n ve p 'deki değişimlerin tahmin edicilerin davranışlarını çok fazla etkilemediği söylenebilir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.3. $n = 20$, $p = 4$ ve beyaz gürültü hataları için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 2$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 2,083$					
0,01	0,0005 ⁺	0,0005 ⁺	0,0005 ⁺	0,2577	0,0005 ⁺
0,1	0,0537	0,0523	0,0515	0,2614	0,0514 ⁺
0,25	0,3354	0,2855	0,2911	0,2812 ⁺	0,3212
0,5	1,3414	0,8418	1,1436	0,3512 ⁺	1,2849
1	5,3657	2,5381	4,9447	0,6293 ⁺	5,1396
4	85,8510	33,7630	85,2510	6,1711 ⁺	82,2330
9	434,6210	167,5646	434,0065	30,1606 ⁺	416,3066
20	2146,2766	821,8888	2145,6591	147,8516 ⁺	2055,8349
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 2,833$					
0,01	0,0007 ⁺	0,0007 ⁺	0,0007 ⁺	0,1970	0,0007 ⁺
0,1	0,0737	0,0708	0,0700 ⁺	0,2005	0,0727
0,25	0,4607	0,3636	0,3900	0,2176 ⁺	0,4547
0,5	1,8429	1,0128	1,5447	0,2782 ⁺	1,8187
1	7,3717	3,1599	6,7562	0,5192 ⁺	7,2749
4	117,9473	44,6383	117,0710	5,3204 ⁺	116,3978
9	597,1081	223,4175	596,2104	26,1044 ⁺	589,2637
20	2948,6821	1099,2832	2947,7799	128,0698 ⁺	2909,9443
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 4,436$					
0,01	0,0014 ⁺	0,0014 ⁺	0,0014 ⁺	0,1509	0,0014 ⁺
0,1	0,1406	0,1298 ⁺	0,1301	0,1535	0,1413
0,25	0,8787	0,5768	0,7103	0,1662 ⁺	0,8834
0,5	3,5150	1,5777	2,8774	0,2109 ⁺	3,5335
1	14,0599	5,4119	12,7994	0,3888 ⁺	14,1341
4	224,9588	82,2866	223,1846	3,9294 ⁺⁺	226,1460
9	1138,8539	414,9755	1137,0364	19,2543 ⁺	1144,8639
20	5623,9698	2046,8672	5622,1431	94,4330 ⁺	5653,6488
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 15,680$					
0,01	0,0144	0,0143 ⁺	0,0143 ⁺	0,1212	0,0146
0,1	1,4431	0,7935	1,0911	0,1225 ⁺	1,4644
0,25	9,0193	3,3572	6,4238	0,1291 ⁺	9,1526
0,5	36,0773	12,8081	28,4498	0,1519 ⁺	36,6106
1	144,3092	50,9693	130,3155	0,2422 ⁺	146,4423
4	2308,9477	814,4638	2289,7422	2,0355 ⁺	2343,0763
9	11689,0478	4122,8166	11669,3907	9,7909 ⁺	11861,8236
20	57723,6927	20359,1029	57703,9382	47,8257 ⁺	58576,9065

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.4. $n = 60$, $p = 10$ ve beyaz gürültü hataları için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 6$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 5,026$					
0,01	0,0021	0,0021	0,0021	0,1313	0,0013 ⁺
0,1	0,2062	0,1956	0,1916	0,1358	0,1296 ⁺
0,25	1,2890	0,9637	1,1101	0,1599 ⁺	0,8102
0,5	5,1559	2,8179	4,6578	0,2461 ⁺	3,2408
1	20,6236	10,1919	19,8659	0,5905 ⁺	12,9631
4	329,9771	160,3755	329,0840	7,4788 ⁺	207,4098
9	1670,5090	811,3517	1669,6074	37,3276 ⁺	1050,0121
20	8249,4274	4005,8430	8248,5240	183,8153 ⁺	5185,2448
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 2,833$					
0,01	0,0029	0,0029	0,0029	0,1275	0,0019 ⁺
0,1	0,2910	0,2701	0,2701	0,1301 ⁺	0,1854
0,25	1,8186	1,2474	1,5690	0,1439 ⁺	1,1585
0,5	7,2742	3,7533	6,5795	0,1932 ⁺	4,6339
1	29,0969	14,1217	28,0280	0,3902 ⁺	18,5358
4	465,5497	224,2311	464,2814	4,3310 ⁺	296,5721
9	2356,8454	1134,9341	2355,5644	21,4084 ⁺	1501,3960
20	11638,7428	5604,3349	11637,4591	105,2204 ⁺	7414,3014
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 10,408$					
0,01	0,0055	0,0055	0,0055	0,1242	0,0036 ⁺
0,1	0,5538	0,4824	0,5025	0,1255 ⁺	0,3590
0,25	3,4614	2,0145	2,9701	0,1323 ⁺	2,2437
0,5	13,8456	6,7976	12,5312	0,1565 ⁺	8,9747
1	55,3823	26,7190	53,3527	0,2537 ⁺	35,8989
4	886,1168	426,9046	883,6956	2,1987 ⁺	574,3821
9	4485,9664	2161,1377	4483,5199	10,6287 ⁺	2907,8095
20	22152,9207	10672,1937	22150,4690	52,0026 ⁺	14359,5531
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 35,037$					
0,01	0,0540	0,0533	0,0533	0,1191	0,0354 ⁺
0,1	5,4050	2,8678	4,4876	0,1196 ⁺	3,5434
0,25	33,7812	16,3094	28,5036	0,1221 ⁺	22,1465
0,5	135,1249	65,0987	122,2563	0,1314 ⁺	88,5860
1	540,4998	260,3743	520,7680	0,1687 ⁺	354,3441
4	8647,9961	4165,9701	8624,3780	0,9159 ⁺	5669,5057
9	43780,4804	21090,2178	43756,6083	4,1564 ⁺	28701,8728
20	216199,9034	104149,2159	216175,9795	20,0636 ⁺	141737,6433

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.5. $n = 20$, $p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,3$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 2$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 2,393$					
0,01	0,0005 ⁺	0,0690	0,0005 ⁺	0,2868	0,0005 ⁺
0,1	0,0501	0,1426	0,0480 ⁺	0,2897	0,0488
0,25	0,3129	0,4836	0,2719 ⁺	0,3038	0,3049
0,5	1,2518	1,3390	1,0700	0,3533 ⁺	1,2196
1	5,0071	4,0058	4,6163	0,5496 ⁺	4,8785
4	80,1133	54,0753	79,5447	4,4540 ⁺	78,0565
9	405,5734	268,7963	404,9904	21,3472 ⁺	395,1608
20	2002,8316	1318,7540	2002,2456	104,2106 ⁺	1951,4114
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 3,258$					
0,01	0,0007 ⁺	0,0834	0,0007 ⁺	0,2226	0,0007 ⁺
0,1	0,0693	0,1865	0,0659 ⁺	0,2251	0,0693
0,25	0,4331	0,6365	0,3680	0,2373 ⁺	0,4330
0,5	1,7326	1,6965	1,4569	0,2802 ⁺	1,7319
1	6,9304	5,1914	6,3538	0,4502 ⁺	6,9277
4	110,8857	73,2961	110,0509	3,8312 ⁺	110,8424
9	561,3587	366,7575	560,5023	18,4595 ⁺	561,1398
20	2772,1415	1804,1909	2771,2807	90,2123 ⁺	2771,0610
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 5,146$					
0,01	0,0013 ⁺	0,1304	0,0013 ⁺	0,1723	0,0014
0,1	0,1332	0,3257	0,1234 ⁺	0,1742	0,1351
0,25	0,8325	1,0661	0,6762	0,1833 ⁺	0,8446
0,5	3,3301	2,8165	2,7339	0,2154 ⁺	3,3783
1	13,3203	9,3274	12,1276	0,3422 ⁺	13,5131
4	213,1243	139,5322	211,4250	2,8619 ⁺	216,2093
9	1078,9417	702,4147	1077,1994	13,7606 ⁺	1094,5596
20	5328,1073	3462,1888	5326,3560	67,2148 ⁺	5405,2324
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 18,113$					
0,01	0,0138	1,0448	0,0137 ⁺	0,1387	0,0141
0,1	1,3805	2,1827	1,0488	0,1398 ⁺	1,4094
0,25	8,6282	6,5793	6,1674	0,1449 ⁺	8,8086
0,5	34,5128	22,8847	27,2465	0,1626 ⁺	35,2345
1	138,0514	89,5127	124,6259	0,2320 ⁺	140,9380
4	2208,8218	1430,3319	2190,2694	1,6069 ⁺	2255,0086
9	11182,1604	7247,7844	11163,1686	7,5473 ⁺	11415,9809
20	55220,5454	35810,0929	55201,4611	36,6724 ⁺	56375,2144

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.6. $n = 60$, $p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,3$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 6$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 4,248$					
0,01	0,0017	0,1566	0,0017	0,2237	0,0011 ⁺
0,1	0,1737	0,3361	0,1628	0,2269	0,1105 ⁺
0,25	1,0855	1,0914	0,9431	0,2438 ⁺	0,6905
0,5	4,3421	3,0237	3,9301	0,3034 ⁺	2,7620
1	17,3682	10,3461	16,7316	0,5413 ⁺	11,0481
4	277,8916	157,6754	277,1366	5,2881 ⁺	176,7700
9	1406,8263	794,7189	1406,0638	25,8454 ⁺	894,8983
20	6947,2902	3918,1092	6946,5262	126,7137 ⁺	4419,2507
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 5,670$					
0,01	0,0024	0,3047	0,0024	0,2265	0,0016 ⁺
0,1	0,2448	0,5123	0,2285	0,2284	0,1577 ⁺
0,25	1,5298	1,3526	1,3288	0,2377 ⁺	0,9855
0,5	6,1193	3,6519	5,5406	0,2708 ⁺	3,9418
1	24,4770	12,7986	23,5757	0,4026 ⁺	15,7674
4	391,6320	195,1887	390,5580	3,0313 ⁺	252,2783
9	1982,6372	982,7718	1981,5522	14,4144 ⁺	1277,1591
20	9790,8009	4842,9523	9789,7136	70,2659 ⁺	6306,9583
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 8,707$					
0,01	0,0047	0,8021	0,0046	0,2246	0,0031 ⁺
0,1	0,4655	1,0585	0,4261	0,2255 ⁺	0,3050
0,25	2,9091	2,1604	2,5063	0,2302 ⁺	1,9064
0,5	11,6364	5,8066	10,5315	0,2467 ⁺	7,6257
1	46,5458	20,6697	44,8276	0,3126 ⁺	30,5030
4	744,7324	316,0790	742,6796	1,6263 ⁺	488,0476
9	3770,2079	1592,7930	3768,1336	7,3143 ⁺	2470,7411
20	18618,3107	7852,4905	18616,2321	35,2210 ⁺	12201,1907
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 29,770$					
0,01	0,0454	10,4852	0,0449	0,2173	0,0301 ⁺
0,1	4,5381	11,1666	3,7813	0,2177 ⁺	3,0091
0,25	28,3633	19,1880	23,9057	0,2196 ⁺	18,8071
0,5	113,4532	50,4369	102,5220	0,2266 ⁺	75,2282
1	453,8127	174,9431	437,0591	0,2545 ⁺	300,9129
4	7261,0040	2638,9093	7240,9880	0,8110 ⁺	4814,6060
9	36758,8327	13283,0977	36738,6055	3,2204 ⁺	24373,9430
20	181525,0999	65467,2656	181504,8299	15,0422 ⁺	120365,1507

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.7. $n = 20$, $p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,5$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 2$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 2,585$					
0,01	0,0004 ⁺	0,6121	0,0004 ⁺	0,2824	0,0004 ⁺
0,1	0,0423	0,7356	0,0408 ⁺	0,2848	0,0419
0,25	0,2644	1,3364	0,2336 ⁺	0,2961	0,2622
0,5	1,0577	3,0059	0,9183	0,3359 ⁺	1,0487
1	4,2308	8,2508	3,9224	0,4935 ⁺	4,1949
4	67,6923	106,3705	67,2270	3,6245 ⁺	67,1181
9	342,6925	527,1617	342,2137	17,1674 ⁺	339,7852
20	1692,3086	2584,3929	1691,8271	83,5908 ⁺	1677,9515
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 3,523$					
0,01	0,0006 ⁺	0,6848	0,0006 ⁺	0,2189	0,0006 ⁺
0,1	0,0588	0,8605	0,0563 ⁺	0,2209	0,0596
0,25	0,3676	1,6837	0,3185	0,2308 ⁺	0,3727
0,5	1,4703	3,8524	1,2562	0,2653 ⁺	1,4909
1	5,8814	10,8173	5,4216	0,4019 ⁺	5,9634
4	94,1024	145,4271	93,4164	3,1147 ⁺	95,4147
9	476,3932	725,7571	475,6875	14,8486 ⁺	483,0370
20	2352,5589	3568,1244	2351,8490	72,3983 ⁺	2385,3680
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 5,568$					
0,01	0,0011 ⁺	0,9074	0,0011 ⁺	0,1690	0,0012
0,1	0,1135	1,2471	0,1063 ⁺	0,1706	0,1165
0,25	0,7097	2,6957	0,5895	0,1780 ⁺	0,7281
0,5	2,8386	6,3779	2,3659	0,2038 ⁺	2,9122
1	11,3546	19,4275	10,3897	0,3059 ⁺	11,6489
4	181,6735	279,1563	180,2716	2,3310 ⁺	186,3831
9	919,7222	1402,9521	918,2818	11,0874 ⁺	943,5642
20	4541,8379	6914,1002	4540,3894	54,0293 ⁺	4659,5765
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 19,847$					
0,01	0,0118	4,9083	0,0117 ⁺	0,1356	0,0122
0,1	1,1833	6,6457	0,9221	0,1365 ⁺	1,2187
0,25	7,3957	13,1201	5,3902	0,1407 ⁺	7,6171
0,5	29,5827	42,0600	23,6146	0,1550 ⁺	30,4684
1	118,3309	170,2721	107,2580	0,2111 ⁺	121,8736
4	1893,2943	2857,0520	1877,9035	1,3192 ⁺	1949,9777
9	9584,8023	14627,5084	9569,0347	6,1048 ⁺	9871,7623
20	47332,3570	72607,0681	47316,5093	29,5634 ⁺	48749,4435

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.8. $n = 60$, $p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,5$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 6$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 3,914$					
0,01	0,0013	0,6272	0,0013	0,2778	0,0009 ⁺
0,1	0,1321	0,8617	0,1254	0,2802	0,0871 ⁺
0,25	0,8257	1,9333	0,7290	0,2922 ⁺	0,5444
0,5	3,3028	4,8967	3,0043	0,3343 ⁺	2,1777
1	13,2110	15,6556	12,7338	0,5016 ⁺	8,7108
4	211,3762	231,2615	210,8012	3,8325 ⁺	139,3726
9	1070,0919	1162,7605	1069,5106	18,2490 ⁺	705,5739
20	5284,4043	5727,9803	5283,8218	88,9707 ⁺	3484,3156
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 5,201$					
0,01	0,0019	1,0665	0,0019	0,2853	0,0012 ⁺
0,1	0,1861	1,3083	0,1760	0,2866	0,1241 ⁺
0,25	1,1630	2,3202	1,0240	0,2933 ⁺	0,7755
0,5	4,6519	4,8082	4,2271	0,3165 ⁺	3,1018
1	18,6075	15,6667	17,9277	0,4085 ⁺	12,4073
4	297,7203	255,7453	296,9007	2,2385 ⁺	198,5165
9	1507,2088	1311,2554	1506,3802	10,1560 ⁺	1004,9898
20	7443,0065	6515,1230	7442,1761	48,9914 ⁺	4962,9128
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 7,990$					
0,01	0,0035	2,7900	0,0035	0,2844	0,0024 ⁺
0,1	0,3537	3,0304	0,3284	0,2851	0,2397 ⁺
0,25	2,2105	4,3784	1,9228	0,2885 ⁺	1,4981
0,5	8,8422	8,9684	8,0160	0,3002 ⁺	5,9922
1	35,3686	27,3483	34,0625	0,3464 ⁺	23,9689
4	565,8977	390,7051	564,3280	1,2641 ⁺	383,5022
9	2864,8572	1956,0162	2863,2706	5,2323 ⁺	1941,4799
20	14147,4430	9622,3131	14145,8530	24,6930 ⁺	9587,5550
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 27,312$					
0,01	0,0345	38,3931	0,0342	0,2754	0,0236 ⁺
0,1	3,4472	39,3765	2,8978	0,2757 ⁺	2,3597
0,25	21,5452	49,3367	18,1696	0,2772 ⁺	14,7483
0,5	86,1810	90,5680	77,8181	0,2822 ⁺	58,9934
1	344,7239	247,4893	331,8859	0,3022 ⁺	235,9734
4	5515,5819	3134,4528	5500,2568	0,6971 ⁺	3775,5752
9	27922,6333	15317,6015	27907,1489	2,4044 ⁺	19113,8494
20	137889,5470	74544,5082	137874,0308	10,7759 ⁺	94389,3797

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.9. $n = 20$, $p = 4$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,7$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 2$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 2,715$					
0,01	0,0003 ⁺	4,5667	0,0003 ⁺	0,2669	0,0003 ⁺
0,1	0,0324	4,8657	0,0316 ⁺	0,2688	0,0328
0,25	0,2026	6,3954	0,1856 ⁺	0,2779	0,2052
0,5	0,8103	11,2695	0,7296	0,3095 ⁺	0,8209
1	3,2411	27,4545	3,0547	0,4345 ⁺	3,2834
4	51,8573	319,3010	51,5606	2,9139 ⁺	52,5344
9	262,5278	1568,7872	262,2211	13,6352 ⁺	265,9556
20	1296,4333	7677,4628	1296,1247	66,2138 ⁺	1313,3610
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 3,704$					
0,01	0,0005 ⁺	4,9337	0,0005 ⁺	0,2056	0,0005 ⁺
0,1	0,0452	5,3619	0,0439 ⁺	0,2072	0,0466
0,25	0,2825	7,5162	0,2552	0,2151 ⁺	0,2916
0,5	1,1301	14,1719	1,0036	0,2425 ⁺	1,1662
1	4,5203	36,0440	4,2378	0,3508 ⁺	4,6649
4	72,3248	438,3323	71,8860	2,4994 ⁺	74,6385
9	366,1441	2169,2937	365,6910	11,7901 ⁺	377,8573
20	1808,1191	10644,3947	1807,6631	57,3518 ⁺	1865,9621
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 5,850$					
0,01	0,0009 ⁺	6,0258	0,0009 ⁺	0,1578	0,0009 ⁺
0,1	0,0876	6,8699	0,0837 ⁺	0,1590	0,0911
0,25	0,5473	10,9432	0,4778	0,1649 ⁺	0,5695
0,5	2,1890	22,9044	1,8996	0,1854 ⁺	2,2779
1	8,7561	63,1523	8,1492	0,2661 ⁺	9,1116
4	140,0973	839,1410	139,1968	1,8663 ⁺	145,7859
9	709,2423	4201,1764	708,3153	8,7828 ⁺	738,0410
20	3502,4313	20694,5393	3501,4989	42,6977 ⁺	3644,6471
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 20,920$					
0,01	0,0092	24,6717	0,0091 ⁺	0,1258	0,0095
0,1	0,9163	31,7859	0,7590	0,1265 ⁺	0,9549
0,25	5,7270	64,1662	4,4235	0,1298 ⁺	5,9684
0,5	22,9080	163,7802	18,9911	0,1409 ⁺	23,8736
1	91,6321	566,3907	84,4233	0,1844 ⁺	95,4944
4	1466,1133	8760,1941	1456,1628	1,0415 ⁺	1527,9100
9	7422,1985	44357,7824	7412,0089	4,7406 ⁺	7735,0443
20	36652,8323	219193,8023	36642,5924	22,8697 ⁺	38197,7498

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

2. DOĞRUSAL MODELLERDE MIXED VE RIDGE TAHMİN EDİCİLERİN
KARŞILAŞTIRILMASI Hüseyin GÜLER

Çizelge 2.10. $n = 60$, $p = 10$ ve AR(1) hataları ($\rho = 0,7$) için hko tahminleri

σ	$\hat{b}$	$\hat{b}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{b}(\hat{k}_{HKB})$	$m = 6$	
				$\hat{b}(\hat{k}_{T23})$	$\hat{b}_M$
$\kappa = 0,70$ ve $KS = 3,718$					
0,01	0,0008	3,5302	0,0008	0,3092	0,0006 ⁺
0,1	0,0849	3,9798	0,0821	0,3108	0,0616 ⁺
0,25	0,5307	6,1880	0,4835	0,3184 ⁺	0,3848
0,5	2,1228	13,1789	1,9596	0,3448 ⁺	1,5392
1	8,4912	38,4555	8,2112	0,4494 ⁺	6,1567
4	135,8586	525,0916	135,5080	2,5265 ⁺	98,5072
9	687,7843	2612,0195	687,4289	11,5099 ⁺	498,6927
20	3396,4658	12814,6304	3396,1095	55,5677 ⁺	2462,6800
$\kappa = 0,80$ ve $KS = 4,944$					
0,01	0,0012	4,9304	0,0012	0,3205	0,0009 ⁺
0,1	0,1196	5,3911	0,1152	0,3214	0,0874 ⁺
0,25	0,7474	7,5755	0,6774	0,3256 ⁺	0,5465
0,5	2,9894	14,1061	2,7509	0,3401 ⁺	2,1861
1	11,9577	38,9544	11,5535	0,3975 ⁺	8,7442
4	191,3231	556,5573	190,8218	1,5349 ⁺	139,9075
9	968,5732	2814,0554	968,0655	6,4506 ⁺	708,2815
20	4783,0773	13913,0883	4782,5684	30,5542 ⁺	3497,6863
$\kappa = 0,90$ ve $KS = 7,612$					
0,01	0,0023	11,5527	0,0023	0,3208	0,0017 ⁺
0,1	0,2272	11,8483	0,2159	0,3212	0,1685 ⁺
0,25	1,4203	13,1418	1,2666	0,3234 ⁺	1,0534
0,5	5,6812	17,5758	5,1993	0,3308 ⁺	4,2137
1	22,7247	46,3731	21,9353	0,3597 ⁺	16,8548
4	363,5948	751,4353	362,6320	0,9306 ⁺	269,6770
9	1840,6989	3893,1922	1839,7249	3,3959 ⁺	1365,2398
20	9089,8711	19450,8675	9088,8949	15,4809 ⁺	6741,9252
$\kappa = 0,99$ ve $KS = 26,265$					
0,01	0,0221	157,7228	0,0220	0,3106	0,0165 ⁺
0,1	2,2144	161,3246	1,9105	0,3108 ⁺	1,6527
0,25	13,8402	180,6477	11,8041	0,3117 ⁺	10,3296
0,5	55,3607	257,1813	50,2218	0,3149 ⁺	41,3185
1	221,4427	563,5507	213,5387	0,3274 ⁺	165,2739
4	3543,0830	6196,2941	3533,6627	0,5731 ⁺	2644,3827
9	17936,8575	29839,4920	17927,3413	1,6333 ⁺	13387,1876
20	88577,0739	144544,7859	88567,5390	6,8289 ⁺	66109,5683

⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

Çalışmada hata terimleri sürecinin tahmin edicilerin performansı üzerindeki etkisi de incelenmiştir. Hata terimleri sürecinin GEKK, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin edici üzerinde benzer etkileri gözlenmiştir. AR(1) ve MA(1) süreçlerinde hatalar beyaz gürültü sürecinden uzaklaştıkça (ρ veya τ büyüdükçe) bu tahmin edicilerin hko değerlerinin küçüldüğü görülmüştür. Bunun yanında GEKK tahmin edici için hata süreç parametreleri eşitken ($\rho = \tau = 0,3, 0,5$ veya $0,7$ olduğunda) AR(1) ve MA(1) süreçleri için hko değerlerinde büyük bir değişiklik gözlenmemiştir. Benzer bir durum $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin edici için de geçerlidir. Dolayısıyla GEKK, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin ediciler için hata süreç parametresinin aldığı değerin hko üzerindeki etkisinin, sürecin tipinden daha önemli olduğu söylenebilir.

$\hat{k}_{HK}$ 'nin hko'nın da AR(1) ve MA(1) süreçleri için ρ veya τ büyüdükçe arttığı görülmektedir. Bu tahmin edici için AR(1) ve MA(1) süreçleri karşılaştırıldığında, κ küçülüp ρ veya τ büyüdükçe MA(1) sürecinde daha düşük hko değerleri gözlenmektedir.

Hata sürecinin $\hat{k}_{T23}$ üzerinde n ve p 'ye bağlı olan daha farklı bir etkisinin olduğu görülmüştür. $(n, p) = (20, 4)$ olduğunda $\hat{k}_{T23}$ tahmin edici; GEKK, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin edicilere benzer bir yapı sergilemektedir. Bu durumda ρ veya τ büyüdükçe $\hat{k}_{T23}$ tahmin edicinin hko'nın küçüldüğü görülmektedir. Öte yandan $(n, p) = (60, 10)$ için σ küçük değerler aldıkça, ρ veya τ 'daki artışın hko'nı arttırdığı söylenebilir. Ancak σ 'nın büyük değerleri için ρ veya τ 'nun hko üzerindeki etkisinin bunun tersine olduğu görülmektedir. Bu tahmin edici için AR(1) ve MA(1) süreçleri karşılaştırıldığında, κ küçülüp ρ veya τ büyüdükçe tahmin edicinin hko'nın AR(1) süreci için daha düşük olduğu görülmektedir.

Buraya kadarki kısımda yalnızca tahmin edicilerin farklı durumlardaki davranışları incelenmiştir. Tahmin ediciler birbirleriyle karşılaştırıldıklarında aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

İlk olarak beyaz gürültü sürecinde $\hat{k}_{HK}$, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin edicinin GEKK'den daima daha iyi olduğu görülmektedir.³ $\hat{k}_{HKB}$ 'nin GEKK'den daha düşük

³ Çizelgelerde bazı durumlar için mixed tahmin edicinin hko tahmininin GEKK'inkinden daha büyük olduğu görülmüştür. Ancak bu durum Monte Carlo örnekleme hatasına bağlı olup bu durumlarda mixed ve GEKK tahmin edicilerin hko değerlerinin eşit olduğu kabul edilebilir.

hko'na sahip olduğu gözlenirse de bu fark genellikle küçüktür. Bu durum AR(1) ve MA(1) hataları için de geçerlidir. GEKK ve mixed tahmin edici için beyaz gürültüdeki sonuçlar AR(1) ve MA(1) süreçleri için de geçerlidir. Ancak GEKK ve $\hat{k}_{HK}$ arasındaki karşılaştırmalar hata sürecine bağlı olarak değişmektedir. $\rho = 0,3$ (veya $\tau = 0,3$) iken σ 'nın küçük değerleri için GEKK'in $\hat{k}_{HK}$ 'den daha iyi olduğu görülmekte ancak σ büyüdükçe durum tersine dönmektedir. Benzer bir durum $(n, p) = (60, 10)$ ve $\rho = 0,5$ (veya $\tau = 0,5$) için de geçerli olup, sadece $\kappa = 0,7$ için σ 'nın değeri ne olursa olsun GEKK'in $\hat{k}_{HK}$ 'den daha iyi olduğu gözlenmektedir. Öte yandan geri kalan durumlarda GEKK ve mixed tahmin ediciler daima $\hat{k}_{HK}$ 'den daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu durum ρ veya τ büyüdükçe $\hat{k}_{HK}$ 'nin performansının daha kötü olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla hata terimleri beyaz gürültü sürecinden uzaklaştıkça $\hat{k}_{HK}$ 'nin kullanılmasının uygun olmadığı söylenebilir.

Mixed tahmin edici ile GEKK, $\hat{k}_{HK}$ ve $\hat{k}_{HKB}$ tahmin ediciler karşılaştırıldığında şu sonuçlara ulaşılmaktadır: İlk olarak $(n, p) = (60, 10)$ için mixed tahmin edicinin GEKK ve $\hat{k}_{HKB}$ 'den daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Öte yandan mixed tahmin edici ile $\hat{k}_{HK}$ karşılaştırıldığında daha farklı sonuçlarla karşılaşmaktadır. Büyük σ değerleri için hata terimleri beyaz gürültü sürecini takip ediyor veya $\rho, \tau = 0,3; 0,5$ için $(n, p) = (60, 10)$ oluyorsa $\hat{k}_{HK}$ 'nin mixed tahmin ediciden daha iyi olduğu gözlenmektedir. Öte yandan σ 'nın küçük olduğu bazı durumlarda mixed tahmin edicinin performansı $\hat{k}_{HK}$ 'ninkinden daha iyidir. Bu bulgular mixed tahmin edicinin daima GEKK'e tercih edilebileceği ve n ile p yeterince büyük olduğunda $\hat{k}_{HKB}$ 'den de iyi olduğu anlamına gelmektedir. Öte yandan beyaz gürültü hata süreci veya büyük örnekler için mixed tahmin edicinin $\hat{k}_{HK}$ üzerinde herhangi bir üstünlüğü bulunmamaktadır. Ancak hatalar beyaz gürültü sürecinden gelmiyor ve küçük bir örneklerle çalışılıyorsa mixed tahmin ediciyi kullanmak avantajlı olabilmektedir.

Son olarak $\hat{k}_{T23}$ ile incelenen diğer tahmin ediciler karşılaştırılmıştır. $\sigma = 0,01$ veya $0,1$ için $\hat{k}_{T23}$ 'ün GEKK, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin ediciden daha büyük hko değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Öte yandan genel olarak bakıldığında $\sigma \geq 0,25$ için $\hat{k}_{T23}$ 'ün performansının GEKK, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin ediciden daha

iyi olduğu söylenebilir. Diğer taraftan $\hat{k}_{T23}$ 'ün hemen hemen her zaman (beyaz gürültü süreci ve $\rho, \tau = 0,3$ için $(n, p) = (20, 4)$ hariç) $\hat{k}_{HK}$ 'den daha iyi olduğu görülmektedir. Ayrıca çoklu iç ilişkinin derecesi arttıkça $\hat{k}_{T23}$ 'ün hko değerinin küçüldüğü de daha önce belirtilmiştir. Sonuç olarak σ çok küçük olmadıkça $\hat{k}_{T23}$ 'ün GEKK, $\hat{k}_{HK}$, $\hat{k}_{HKB}$ ve mixed tahmin ediciye tercih edilebileceği söylenebilir.

2.6. Sonuçlar

Bu bölümde çoklu iç ilişki ve otokorelasyon problemlerinin birlikte karşılaşıldığı durum incelenmiştir. Çoklu iç ilişkili ve korelasyonlu hata terimlerinin yer aldığı doğrusal regresyon modeli için mixed tahmin edici ile ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans ve HKO matrisleri açısından karşılaştırması yapılmıştır. Teorik bulguların ışığında uygun bir k değeri seçildiğinde ridge tahmin edicinin GEKK ve mixed tahmin ediciden HKO açısından daha iyi sonuçlar verdiği sonucuna ulaşılmıştır. Bunun yanında ridge tahmin ediciyi ek bilgi kullanarak varyans-kovaryans matrisi açısından mixed tahmin ediciden daha iyi yapan k değerini tanımlayan bir teorem verilmiştir. Simülasyon sonuçlarına göre σ çok küçük olmadıkça bu k değerinin ridge tahmin edicinin hko değerini de düşürdüğü görülmüştür. Bu sonuçlar ekonometrik bir örnek üzerinde de desteklenmiştir. Çalışmada önerilen k seçme yönteminin ekonometrik örnek üzerinde de hko açısından tatmin edici olduğu görülmüştür. Öte yandan bu çalışmada varyans-kovaryans matrisinin bilindiği durum incelenmiş olup takip eden çalışmalarda bu matrisin bilinmediği durumlar için benzer karşılaştırmalar yapılabilir.

3. MODIFIED VE KISITLI RIDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİLER ÜZERİNE BİR İNCELEME

Bu bölümde doğrusal eşitlik kısıtlı modeller için kullanılabilecek kısıtlı ridge regresyon (KRR) tahmin edici üzerinde durulacaktır. Bu tahmin edicinin elde edilmesinde kullanılabilecek farklı yöntemler incelenecek, ardından tahmin edicinin kısıtlı en küçük kareler (KEKK) tahmin edici ve modified ridge regresyon (MRR) tahmin edici ile teorik karşılaştırması yapılacaktır. Elde edilen bulgular bir Monte Carlo simülasyon çalışması ile desteklenecektir. Monte Carlo deneyi sayesinde hem alternatif tahmin ediciler karşılaştırılacak hem de yanlış tahmin ediciler için yanlışlık parametresinin seçiminde kullanılabilecek bazı yöntemler mukayese edilecektir. Son olarak teorik ve Monte Carlo karşılaştırmaları desteklemek amacıyla ilgili tahmin ediciler Gruber’de (1998) verilmiş olan beş ülkenin AR&GE harcamaları verisine uygulanacaktır.

3.1. Giriş

Doğrusal regresyon modeli parametrelerinin tahmininde her ne kadar ilk akla gelen yöntem EKK tahmin edici olsa da bu tahmin edici verinin doğasında var olan kısıtların sağlanacağını garanti etmez. İncelenen verilerde parametreler üzerine bir takım kısıtlar konulması gerekebilir. Örneğin Q üretim düzeyi, K sermaye ve L işgücü olmak üzere (3.1)’deki üretim fonksiyonu ele alınsın:

$$\ln Q_t = \beta_0 + \beta_1 \ln K_t + \beta_2 \ln L_t + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

Bu fonksiyonda β_1 ve β_2 parametreleri üretimin sırasıyla sermaye ve işgücüne göre esnekliklerini gösterir. İktisat teorisindeki ölçeğe göre sabit getiri varsayımı gereğince (3.1)’deki üretim fonksiyonu için

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \quad (3.2)$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. (3.1) modelinin parametreleri EKK yöntemi ile tahmin edildiğinde elde edilen tahminlerin (3.2)’deki kısıtı sağlayacağını garantisi yoktur. EKK yöntemi sadece $S(\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ şeklindeki hata kareler toplamını minimum yapmayı amaçlar ve (3.2)’deki gibi kısıtları göz ardı eder. Bu yüzden elde

edilen parametre tahminleri ilgili kısıtı sağlamayabilir. Bu durumu görmek amacıyla Çizelge 3.1'deki hipotetik veri ele alınabilir. Bu veri simülasyon yoluyla üretilmiş olup K_t ve L_t gözlemleri (20,40) aralığındaki kesikli düzgün dağılımdan birbirlerinden bağımsız olacak şekilde türetilmiştir. Hata terimleri ε_t ise standart normal dağılımdan çekilmiştir. $\beta_0 = 0,1$, $\beta_1 = 0,6$ ve $\beta_2 = 0,4$ olmak üzere türetilen değerler (3.1)'de yerine yazılarak Q_t gözlemleri hesaplanmıştır. Burada seçilen β_1 ve β_2 değerlerinin (3.2)'deki kısıtı sağladığına dikkat edilmelidir.

Çizelge 3.1. Hipotetik üretim verisi

t	Q_t	K_t	L_t	ε_t
1	17,8	35	37	-0,797
2	108,0	25	25	1,363
3	31,2	30	37	-0,145
4	25,4	34	25	-0,270
5	207,7	38	39	1,588
6	7,5	40	27	-1,610
7	46,0	31	24	0,397
8	45,8	22	25	0,582
9	12,3	23	32	-0,861
10	22,9	25	29	-0,246

Çizelge 3.1'deki hipotetik veri kullanılarak (3.1) modelinin parametreleri (2.2)'de verilen EKK tahmin edici ile tahmin edildiğinde (3.3)'deki tahminlere ulaşılır:

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 2,8590 \\ -0,3962 \\ 0,5827 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

EKK tahminlerinden görüldüğü üzere $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = -0,3962 + 0,5827 = 0,1865$ olup (3.2)'deki kısıt sağlanmamaktadır.

(3.2)'de verilen eşitlik $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{r} = 1$ olmak üzere (2.3)'de verilen matris formundaki gibi ifade edilebilir. Parametreler üzerinde (2.3)'deki gibi doğrusal eşitlik kısıtlarının olması durumunda kullanılabilecek KEKK tahmin ediciye ikinci bölümde kısaca değinilmiştir. İkinci bölümde bahsedildiği üzere bu tahmin edici (2.4)'deki gibi tanımlanır ve EKK tahmin ediciden farklı olarak kısıtları da sağlar. (2.4)'deki tahmin edici elde edilirken

$$S(\beta) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta) - 2\lambda'(\mathbf{R}\beta - \mathbf{r})$$

fonksiyonu minimum yapılır. Burada λ Lagrange çarpanları vektörü olup λ 'ya göre türev alındığında (2.3)'deki $R\beta = r$ kısıtına ulaşılır. Dolayısıyla elde edilen tahminler kısıtları doğrudan sağlar. Kısıtlar doğruyken KEKK tahmin edici β için yansız olup, EKK tahmin ediciden daha düşük varyanslara sahiptir. Kısıtlar doğru değilse varyanslar daha düşük olmakla birlikte KEKK tahmin edici yansız olmaz. Çizelge 3.1'deki veriye KEKK tahmin edici uygulandığında (3.4)'deki tahminler elde edilir:

$$\hat{\beta}_r = \begin{pmatrix} 0,1036 \\ -0,0623 \\ 1,0623 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

(3.4)'deki KEKK tahminleri kullanıldığında (3.2)'deki kısıtın sağlandığı görülmektedir. Öte yandan (3.4)'deki tahminlerde her ne kadar (3.2) kısıtı sağlansa da $\hat{\beta}_1 = -0,0623$ olup beklentinin aksine negatif işaretlidir. Bu veri için $X'X$ matrisinin özdeğerleri 0,0195, 0,2550 ve 240,0049 olup koşul sayısı 110,9412'dir. Açıklayıcı değişkenler her ne kadar birbirlerinden bağımsız olarak üretilmiş olsa da gözlem sayısı az olduğundan $X'X$ matrisi kötü koşulludur. Bunun sonucunda da parametre tahminleri beklenen işaretlere sahip değildir.

Bu problemi çözmek için (2.5)'deki RR tahmin edicinin uygulanması düşünülebilir. $k = 0,4$ olmak üzere hesaplanan ridge tahminleri (3.5)'de verilmektedir:

$$\hat{\beta}(0,4) = \begin{pmatrix} 0,2816 \\ 0,2555 \\ 0,6880 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Her ne kadar (3.5)'de elde edilen parametre tahminleri beklenen işaretlerle uyumlu olsalar da $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ toplamı 0,9435 olup (3.2)'deki kısıtı sağlamamaktadır. Bunun nedeni ridge tahmin edicinin, EKK tahmin edici gibi kısıtları göz ardı etmesidir.

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi parametrelere ilişkin doğrusal kısıtlarla karşılaşıldığında ilgili veri çoklu iç ilişkiye sahip olabilir. Bu durumda EKK tahmin ediciye dayanan KEKK tahmin edici kısıtları sağlasa bile çoklu iç ilişkiden olumsuz bir şekilde etkilenmektedir. Öte yandan ridge tahmin edici bu etkiyi azaltmakla birlikte kısıtları sağlamamaktadır. Bu durumda alternatif tahmin edicilerin kullanılması gerekmektedir. Çoklu iç ilişkili modellerde parametrelerle ilgili ön bilgi

olması durumunda kullanılabilecek alternatif tahmin ediciler arasında MRR ve KRR tahmin ediciler yer almaktadır.

3.2. Modified Ridge Regresyon Tahmin Edici

Modified ridge regresyon tahmin edici Swindel (1976) tarafından tanımlanmış olup RR tahmin edici ile ön bilgi bir araya getirilerek elde edilmiştir. (2.1)'deki doğrusal regresyon modeli ele alınsın. Parametre vektörü β hakkındaki ön bilgiyi içeren vektör b ile gösterilsin. Burada $b: p \times 1$ tipinde stokastik olmayan bir vektör ve $k \geq 0$ bir sabit olmak üzere MRR tahmin edici

$$\hat{\beta}(k, b) = (X'X + kI_p)^{-1}(X'y + kb) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (3.6)'dan görüleceği üzere MRR tahmin edicide $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k sabiti eklenerek çoklu iç ilişkinin etkisinin azaltılması amaçlanmaktadır. $S = X'X$ ve $S_k = X'X + kI_p$ olmak üzere MRR tahmin edici

$$\hat{\beta}(k, b) = S_k^{-1}(X'y + kb) \quad (3.7)$$

şeklinde gösterilebilir. Öte yandan (3.7)'deki ifade basitleştirilerek MRR tahmin edici ile ilgili bazı sonuçlara ulaşılabılır. Çeşitli matris işlemleri yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(k, b) &= S_k^{-1}(X'y + kb) = S_k^{-1}X'y + kS_k^{-1}b \\ &= S_k^{-1}SS^{-1}X'y + kS_k^{-1}b = S_k^{-1}S\hat{\beta} + kS_k^{-1}b \\ &= S_k^{-1}S\hat{\beta} - S_k^{-1}Sb + S_k^{-1}Sb + kS_k^{-1}b \\ &= S_k^{-1}S(\hat{\beta} - b) + S_k^{-1} \underbrace{(S + kI_p)}_{S_k} b \\ \hat{\beta}(k, b) &= S_k^{-1}S(\hat{\beta} - b) + b \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Öte yandan

$$SS^{-1} = I_p \Rightarrow SS^{-1} + kS^{-1} - kS^{-1} = I_p \Rightarrow \underbrace{(S + kI_p)}_{S_k} S^{-1} - kS^{-1} = I_p$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$S_k S^{-1} = I_p + kS^{-1} \Rightarrow SS_k^{-1} = (I_p + kS^{-1})^{-1}$$

ve SS_k^{-1} simetrik olduğundan

$$\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} = (\mathbf{I}_p + k \mathbf{S}^{-1})^{-1} \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.8)'deki MRR tahmin edicide yerine yazılırsa

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b}) = (\mathbf{I}_p + k \mathbf{S}^{-1})^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} \quad (3.10)$$

ifadesine ulaşılır. MRR tahmin edicinin (3.10)'daki gibi ifade edilmesi sonucunda aşağıdaki özellikler kolaylıkla görülebilir:

- i. $\mathbf{b} = \hat{\boldsymbol{\beta}}$ alınırsa $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}$ olur. Dolayısıyla ön bilgi olarak EKK tahmin edici kullanıldığında MRR tahmin edici EKK'e dönüşmüş olur.
- ii. $k = 0$ alınırsa $\hat{\boldsymbol{\beta}}(0, \mathbf{b}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}$ elde edilir. Yani ridge tahmin edicide olduğu gibi, MRR tahmin edici de $k = 0$ durumunda EKK tahmin ediciye dönüşür.
- iii. $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ olup yeterince büyük k değerleri için MRR tahmin edici ön bilgi vektörüne yakınsar.
- iv. $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ alınırsa $\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{0}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}(k)$ olur. Yani herhangi bir ön bilgi olmaması durumunda MRR tahmin edici ridge tahmin ediciye dönüşür.

Yukarıdaki (ii) ve (iii) numaralı özellikler bir arada düşünüldüğünde, MRR tahmin edicinin EKK tahmin ediciyi $\mathbf{b}$ vektörüne doğru ötelediği görülmektedir. k 'nin değeri küçüldükçe MRR tahmin edici EKK tahmin ediciye yaklaşırken, k 'nin değeri büyüdükçe bu tahmin edici ön bilgi vektörüne yakınsamaktadır.

MRR tahmin edicinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b})) &= E(\mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y} + k\mathbf{b})) = \mathbf{S}_k^{-1} E(\mathbf{X}'\mathbf{y} + k\mathbf{b}) = \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklindedir. $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b})) \neq \boldsymbol{\beta}$ olduğundan MRR tahmin edicinin yanlı olduğu kolayca görülmektedir. Bu tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b})) &= E(\hat{\boldsymbol{\beta}}(k, \mathbf{b})) - \boldsymbol{\beta} = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta} \\ &= (\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} - \mathbf{I}_p)\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{S} + k\mathbf{I}_p - k\mathbf{I}_p) - \mathbf{I}_p)\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} \\ &= (\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}_k - k\mathbf{S}_k^{-1} - \mathbf{I}_p)\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} \\ &= -k\mathbf{S}_k^{-1}\boldsymbol{\beta} + k\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{b} \\ &= -k\mathbf{S}_k^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

olur. (3.12) incelendiğinde MRR tahmin edicinin yanını belirleyen iki faktörün olduğu ortaya çıkar. Bunlardan ilki RR tahmin edicide olduğu gibi k parametresi, ikincisi ise gerçek parametre değeri ile ön bilgi arasındaki fark olan $\beta - b$ 'dir. k 'nin değeri ne kadar küçük alınırsa MRR tahmin edici EKK tahmin ediciye o kadar yakın olacak ve yanlılığı azalacaktır. Benzer şekilde ön bilgi vektörü bilinmeyen gerçek parametre vektörüne yaklaştıkça MRR tahmin edicinin yanı yine küçülecektir. Özel olarak $b = \beta$ olduğunda (ön bilgi doğru ise) k 'nin değeri ne olursa olsun MRR tahmin edicinin yansız olacağı açıktır.

MRR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ise

$$\begin{aligned} V_1 = Cov(\hat{\beta}(k, b)) &= Cov(S_k^{-1}(X'y + kb)) = S_k^{-1}Cov(X'y + kb)S_k^{-1} \\ &= \sigma^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

olup ridge tahmin edicinininkiyle aynıdır. b stokastik olmadığından tahmin edicinin varyansını etkilememekte ve MRR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi ile ridge tahmin edicinininki aynı çıkmaktadır.

(3.12) ve (3.13) kullanıldığında MRR tahmin edicinin hata kareleri ortalaması matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\beta}(k, b)) &= Cov(\hat{\beta}(k, b)) + Bias(\hat{\beta}(k, b))Bias'(\hat{\beta}(k, b)) \\ &= \sigma^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} + k^2 S_k^{-1}(\beta - b)(\beta - b)'S_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. (3.10)'dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}(k, b) = b$ eşitliğine ulaşılabileceği belirtilmiştir. Benzer şekilde (3.12)'den $\lim_{k \rightarrow \infty} Bias(\hat{\beta}(k, b)) = b - \beta$, (3.13)'den $\lim_{k \rightarrow \infty} Cov(\hat{\beta}(k, b)) = 0_{p \times p}$ ve (3.14)'den $\lim_{k \rightarrow \infty} MSE(\hat{\beta}(k, b)) = (\beta - b)(\beta - b)'$ eşitlikleri elde edilebilir. Dolayısıyla k 'nin değeri büyüdükçe MRR tahmin edici ön bilgiye yaklaşmakta, bunun sonucunda da tahmin edicinin yanı $b - \beta$ 'ya, varyans-kovaryansları sıfıra ve HKO matrisi $(\beta - b)(\beta - b)'$ ifadesine yaklaşmaktadır.

Kaçıranlar ve ark.'nda (2011) belirtildiği üzere Swindel (1976) EKK ile MRR tahmin edicileri HKO anlamında karşılaştırmış ve HKO anlamında kendi tanımladığı tahmin edicinin daha iyi olduğunu göstermiştir. Öte yandan aynı k değeri seçildiğinde MRR ile ridge tahmin edicinin HKO karşılaştırması Pliskin (1987)

tarafından verilmiştir. Pliskin (1987) MRR tahmin edicinin ridge tahmin ediciden HKO anlamında daha iyi olması için gerek ve yeter koşulu belirtmiştir.

Çizelge 3.1'deki hipotetik veri için $\mathbf{b} = (0,1 \quad 0,6 \quad 0,4)'$ ön bilgi vektörünün alındığını varsayalım. Burada ön bilgi vektörü gerçek parametre vektörüne eşit alınmış olup (3.2)'deki kısıtı da sağlamaktadır. Bu durumda $k = 0,4$ olmak üzere

$$\hat{\beta}(0,4; \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0,2405 \\ 0,3227 \\ 0,6345 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

tahminlerine ulaşılır. Bu tahminler gerçek parametre vektörüne (3.5)'deki ridge tahminlerinden daha yakın olmakla birlikte $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 0,9572$ olup (3.2)'deki kısıtı sağlamamaktadırlar. Bu durum MRR tahmin edicinin de doğrusal eşitlik kısıtlarını sağlama zorunluluğunun olmadığını göstermektedir. HKO anlamında ridge tahmin ediciden daha iyi olsa da MRR tahmin edici de kısıtları sağlamayı garanti etmez.

3.3. Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edici

MRR tahmin edicinin yanı sıra hem doğrusal kısıtları dikkate alan hem de çoklu iç ilişki problemini ortadan kaldırmaya yönelik tahmin ediciler tanımlanmaya çalışılmıştır. Bunlardan birisi Sarkar (1992) tarafından tanımlanmış olan kısıtlı ridge regresyon tahmin edicidir. Bu tahmin edici

$$\beta^*(k) = (I_p + kS^{-1})^{-1} \hat{\beta}_r, \quad k \geq 0 \quad (3.16)$$

şeklinde dir. Sarkar (1992) tanımladığı tahmin edicinin hem KEKK hem de RR tahmin edicilerden hko anlamında daha iyi olduğunu göstermiştir. Kaçıranlar ve ark. (1998) ise MRR tahmin edici ile Sarkar'ın (1992) tanımladığı kısıtlı ridge regresyon tahmin ediciyi HKO anlamında karşılaştırmıştır.

Öte yandan Groß (2003a) $\beta^*(k)$ 'nin $R\beta^*(k) = \mathbf{r}$ kısıtını tüm $\mathbf{y}$ vektörleri için sağlamadığını ve bu nedenle kısıtlı bir tahmin edici olmadığını belirtmiştir. Bu nedenle Sarkar'ın (1992) tanımladığı ve KEKK tahmin ediciyi büzen bu tahmin edici, Groß (2003b) tarafından ridge-shrinkage kısıtlı en küçük kareler tahmin edici olarak adlandırılmıştır. Çizelge 3.1'deki veri için $k = 0,4$ olmak üzere (3.16)'daki tahmin edici kullanıldığında

$$\beta^*(0,4) = \begin{pmatrix} 0,1536 \\ 0,2735 \\ 0,7093 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

eşitliğindeki tahminlere ulaşılır. Bu tahminler için $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 0,9828$ olup, Groß'da (2003a) belirtildiği üzere kısıtın bu tahmin edici için de sağlanmadığı görülmektedir.

Sarkar'ın (1992) kısıtları sağlamayan ridge tahmin edicisini dikkate alan Groß (2003a), kısıtlı ridge regresyon tahmin ediciyi (3.18)'deki gibi tanımlamıştır:

$$\hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}(k, \beta_0) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k, \beta_0) - r), \quad k \geq 0 \quad (3.18)$$

Burada $\beta_0 = R'(RR')^{-1}r$ ve $\hat{\beta}(k, \beta_0) = S_k^{-1}(X'y + kR'(RR')^{-1}r)$ olup $\hat{\beta}(k, \beta_0)$ (3.7)'deki MRR tahmin edicide $b = \beta_0$ alınmasıyla elde edilmektedir. Dikkat edilirse (3.18)'deki KRR tahmin edici yapı olarak (2.4)'deki KEKK tahmin ediciye benzemektedir. (2.4)'deki KEKK tahmin ediciden farklı olarak KRR tahmin edicide $\hat{\beta}$ yerine $\hat{\beta}(k, \beta_0)$ ile gösterilen MRR tahmin edici kullanılmaktadır. Groß'un (2003a) tanımladığı KRR tahmin edicinin Sarkar'ın (1992) tanımladığı KRR tahmin ediciden farklı olarak $R\beta = r$ kısıtını sağladığı kolayca gösterilebilir:

$$\begin{aligned} R\hat{\beta}_r(k) &= R\hat{\beta}(k, \beta_0) - R S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k, \beta_0) - r) \\ &= R\hat{\beta}(k, \beta_0) - R\hat{\beta}(k, \beta_0) + r = r \end{aligned}$$

Ayrıca burada kullanılan β_0 'ın da $R\beta_0 = r$ kısıtını sağladığı açıktır. Çizelge 3.1'deki veri için $k = 0,4$ olmak üzere (3.18)'deki KRR tahmin edici uygulandığında

$$\hat{\beta}_r(0,4) = \begin{pmatrix} 0,0977 \\ 0,2814 \\ 0,7186 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

tahminleri elde edilir. Burada tahminler beklenen işaretlerle uyumlu olup $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 = 1$ kısıtının sağlandığı da görülmektedir.

Groß'un (2003a) tanımladığı KRR tahmin edicinin bir diğer özelliği de $\lim_{k \rightarrow 0} \hat{\beta}_r(k) = \hat{\beta}_r$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\beta}_r(k) = \beta_0$ olmasıdır. Dolayısıyla KRR tahmin edici k arttıkça parametre uzayında $\hat{\beta}_r$ 'den β_0 'a uzanan bir yol izlemektedir. Groß'da (2003a) KRR tahmin edicinin KEKK tahmin ediciden daha iyi olmasını sağlayan gerek ve yeter koşul verilmiştir. Aynı çalışmada k parametresinin seçimi için bir yöntem de önerilmiştir.

KEKK ve KRR tahmin ediciler arasındaki benzerliği görmek için (3.18)'deki KRR tahmin edicide $\hat{\beta}(k, \beta_0)$ yerine yazılıp matris işlemleri yapılırsa (3.20)'deki sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_r(k) &= \hat{\beta}(k, \beta_0) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k, \beta_0) - r) \\
 &= S_k^{-1} (X' y + k \beta_0) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R S_k^{-1} (X' y + k \beta_0) - r) \\
 &= S_k^{-1} X' y + k S_k^{-1} \beta_0 \\
 &\quad - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R S_k^{-1} X' y + k R S_k^{-1} \beta_0 - r) \\
 &= \hat{\beta}(k) + k S_k^{-1} \beta_0 - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k) + k R S_k^{-1} \beta_0 - r) \\
 &= \hat{\beta}(k) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k) - r) \\
 &\quad + k S_k^{-1} \beta_0 - k S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} R S_k^{-1} \beta_0 \\
 &= \hat{\beta}(k) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k) - r) \\
 &\quad + \underbrace{k S_k^{-1} R' (R R')^{-1} r - k S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} R S_k^{-1} R' (R R')^{-1} r}_{\substack{I_m \\ 0_{p \times 1}}} \\
 \hat{\beta}_r(k) &= \hat{\beta}(k) - S_k^{-1} R' [R S_k^{-1} R']^{-1} (R \hat{\beta}(k) - r) \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

(3.20)'den görüldüğü üzere KRR tahmin edici KEKK tahmin edicinin RR' 'a genellenmiş haline benzemektedir. Her ne kadar Groß (2003a) KRR tahmin ediciyi sezgisel olarak tanımlamış olsa da bu tahmin edicinin RR, KEKK ve MRR tahmin edicilerin elde edildiği yollarla türetilbildiği Kaçıranlar ve ark. (2011) tarafından gösterilmiştir. Hoerl ve Kennard (1970) RR tahmin ediciyi türetirken $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına bir pozitif k sabiti eklemiş ve EKK tahmin edici için normal denklemleri bu haliyle çözmüşlerdir. Benzer şekilde KEKK tahmin edicide de $S(\beta) = (y - X\beta)'(y - X\beta) - 2\lambda'(R\beta - r)$ fonksiyonu için normal denklemlerin

$$X'X\beta = X'y + R'\lambda \tag{3.21a}$$

$$R\beta - r = 0_{m \times 1} \tag{3.21b}$$

olduğu gösterilebilir. Bu denklemler çözüldüğünde (2.4)'deki KEKK tahmin edici elde edilmektedir. Öte yandan çoklu iç ilişkinin etkisini gidermek için (3.21a)'daki eşitlikte $X'X$ matrisinin köşegen elemanlarına k eklenirse

$$(X'X + kI_p)\hat{\beta}^*(k) = X'y + R'\lambda \tag{3.22a}$$

$$R\hat{\beta}^*(k) - r = 0_{m \times 1} \tag{3.22b}$$

eşitliklerine ulaşılır. (3.22a)'dan

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^*(k) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} + (\mathbf{X}'\mathbf{X} + k\mathbf{I}_p)^{-1} \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \\ &= \hat{\beta}(k) + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23)'de elde edilen tahmin (3.22b)'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{R}\hat{\beta}(k) + \mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \quad (3.24)$$

bulunur. $\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'$ pd olduğundan (3.24)'den $\boldsymbol{\lambda}$ 'nın tahmininin

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = [\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\beta}(k)) \quad (3.25)$$

olduğu gösterilebilir. (3.25)'deki $\boldsymbol{\lambda}$ tahmini (3.23)'de yerine yazılırsa

$$\hat{\beta}^*(k) = \hat{\beta}(k) + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\beta}(k)) \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26)'da elde edilen tahmin edicinin (3.20)'deki KRR tahmin edici olduğu görülmektedir. Dolayısıyla KEKK ve ridge tahmin ediciler bir araya getirildiğinde Groß'un (2003a) doğrudan tanımladığı KRR tahmin edici elde edilebilmektedir.

Kaçıranlar ve ark.'nda (2011) KRR tahmin edicinin elde edilmesi için iki farklı yöntem daha uygulanmıştır. Bunlardan ilkinde Hoerl ve Kennard'ın (1970) ridge tahmin ediciyi elde ederken hata kareler toplamını kullandıkları yaklaşım izlenmiştir. Bu yaklaşımın amaç fonksiyonunda, parametre tahmininin minimum uzunluğa sahip olmasının yanında, doğrusal kısıtları sağlaması da hedeflenmiştir. Elde edilen tahmin edici yine (3.20)'deki KRR tahmin edici ile denk çıkmıştır. Kaçıranlar ve ark.'nda (2011) son olarak Swindel'in (1976) MRR tahmin ediciyi elde ederken izlediği yol takip edilmiş ve yine KRR tahmin ediciye ulaşılmıştır.

KRR tahmin edicinin diğer tahmin edicilerle karşılaştırılabilmesi için beklenen değerine, varyans-kovaryans matrisine, yanına ve hata kareler ortalamasına ihtiyaç vardır. (3.20) numaralı eşitlikte $\hat{\beta}(k)$ diğer terimlerden ayrılırsa

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_r(k) &= \hat{\beta}(k) - \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} (\mathbf{R}\hat{\beta}(k) - \mathbf{r}) \\ &= \hat{\beta}(k) - \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{R}\hat{\beta}(k) + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{r} \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{R})\hat{\beta}(k) + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{r}\end{aligned}\quad (3.27)$$

elde edilir. Öte yandan $\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{B}$ olmak üzere (3.27) eşitliği

$$\hat{\beta}_r(k) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\hat{\beta}(k) + \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{R}']^{-1} \mathbf{r} \quad (3.28)$$

şeklinde düzenlenebilir. $\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{r}$ terimi sabit olduğundan (3.28)'in beklenen değeri

$$E(\hat{\beta}_r(k)) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})E(\hat{\beta}(k)) + \mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{r} \quad (3.29)$$

olacaktır. Ridge tahmin edicinin beklenen değeri $E(\hat{\beta}(k)) = \mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\beta$ olduğundan

$$E(\hat{\beta}_r(k)) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\beta + \mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{r} \quad (3.30)$$

elde edilir. KRR tahmin edicinin yanı ise

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\beta}_r(k)) &= E(\hat{\beta}_r(k)) - \beta \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\beta + \mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{r} - \beta \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur. $\mathbf{R}\beta = \mathbf{r}$ kısıtının doğru olduğu varsayımı altında (3.31) eşitliği

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\beta}_r(k)) &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\beta + \underbrace{\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}\beta - \beta \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\beta - (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\beta \\ &= (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})(\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S} - \mathbf{I}_p)\beta \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (3.12)'de gösterildiği üzere $\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S} - \mathbf{I}_p = -k\mathbf{S}_k^{-1}$ olduğundan

$$Bias(\hat{\beta}_r(k)) = -k(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\beta \quad (3.32)$$

elde edilir. $(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1} = \mathbf{M}_k$ olmak üzere KRR tahmin edicinin yanı

$$Bias(\hat{\beta}_r(k)) = -k\mathbf{M}_k\beta \quad (3.33)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(3.28) numaralı eşitlik kullanılırsa KRR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi

$$Cov(\hat{\beta}_r(k)) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})Cov(\hat{\beta}(k))(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})' \quad (3.34)$$

olacaktır. Ridge tahmin edici için $Cov(\hat{\beta}(k)) = \sigma^2\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}_k^{-1}$ olduğundan, daha önce

tanımlanan $(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1} = \mathbf{M}_k$ ve $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_k'$ eşitlikleri kullanılırsa

$$Cov(\hat{\beta}_r(k)) = \sigma^2(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{S}\mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})' \quad (3.35)$$

$$\mathbf{V}_2 = Cov(\hat{\beta}_r(k)) = \sigma^2\mathbf{M}_k\mathbf{S}\mathbf{M}_k \quad (3.36)$$

elde edilir. Öte yandan (3.13)'de belirtildiği üzere MRR tahmin edici ile ridge tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi eşit olduğundan (3.34) ifadesi

$$\mathbf{V}_2 = \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k)) = (\mathbf{I}_p - \mathbf{B})\mathbf{V}_1(\mathbf{I}_p - \mathbf{B})' \quad (3.37)$$

şeklinde de yazılabilir.

Son olarak $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtının doğru olduğu varsayımıyla (3.33) ve (3.36) ifadeleri kullanılarak KRR tahmin edicinin HKO matrisi

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k)) &= \text{Cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k)) + \text{Bias}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k))\text{Bias}'(\hat{\boldsymbol{\beta}}_r(k)) \\ &= \sigma^2 \mathbf{M}_k \mathbf{S} \mathbf{M}_k + k^2 \mathbf{M}_k \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}' \mathbf{M}_k \end{aligned} \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir.

3.4. Modified ve Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Bu bölümde parametrelere ait ön bilgileri kullanan MRR ve KRR tahmin edicilerin varyans-kovaryans ve HKO karşılaştırmaları verilecektir. Karşılaştırmalarda KRR tahmin edici için $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ kısıtının doğru olduğu varsayılmaktadır.

MRR ve KRR tahmin edicilerin varyans-kovaryans matrisleri farkı (3.13) ve (3.36)'daki eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 &= \sigma^2 [\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} - \mathbf{M}_k \mathbf{S} \mathbf{M}_k] \\ &= \sigma^2 [\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} - (\mathbf{I}_p - \mathbf{B}) \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} (\mathbf{I}_p - \mathbf{B}) \mathbf{S}_k^{-1}] \end{aligned} \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilebilir. $(\mathbf{I}_p - \mathbf{B}) = \mathbf{A}_1$ olmak üzere, $\mathbf{M}_k$ matrisi simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 &= \sigma^2 [\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} - \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{S}_k^{-1}] = \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} [\mathbf{S} - \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1] \mathbf{S}_k^{-1} \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S}^{1/2} [\mathbf{I}_p - \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{S}^{-1/2}] \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

yazılabilir. (3.40)'da elde edilen farkın nnd olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{I}_p - \mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{S}^{-1/2} \geq 0$ olmasıdır. Bunun için gerek ve yeter koşul ise $\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{S}^{-1/2}$ matrisinin en büyük özdeğerinin 1'e eşit veya daha küçük olmasıdır. $\mathbf{S}^{-1/2} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1 \mathbf{S}^{-1/2}$ ile $\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1' \mathbf{S} \mathbf{A}_1$ matrisinin özdeğerleri aynı olduğundan

(3.40)'daki farkın nnd olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ olmasıdır. Bu durumda Teorem 3.1 verilebilir.

Teorem 3.1. $\hat{\beta}_r(k)$ 'nin varyans-kovaryans matrisi anlamında $\hat{\beta}(k, \mathbf{b})$ 'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ olmasıdır.

Ridge tahmin edici ile MRR tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisleri aynı olduğundan Teorem 3.1'in sonucu olarak Sonuç 3.1 verilebilir.

Sonuç 3.1. $\hat{\beta}_r(k)$ 'nin varyans-kovaryans matrisi anlamında $\hat{\beta}(k)$ 'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ olmasıdır.

$\mathbf{T} = \sigma^2(\mathbf{S} - \mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1)$, $\mathbf{t}_1 = k(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{b})$, $\mathbf{t}_2 = k\mathbf{A}'_1\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{T}$ matrisinin genelleştirilmiş inversi $\mathbf{T}^+$ ve $\mathbf{T}$ 'nin kolon uzayı $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$ ile gösterilsin. (3.14) ve (3.18)'deki HKO matrisleri kullanılarak MRR ve KRR tahmin edicilerin HKO karşılaştırmaları Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'de verildiği gibidir.

Teorem 3.2. $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ ve $\mathbf{t}_1 \in \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ olmak üzere $\hat{\beta}_r(k)$ 'nin HKO anlamında $\hat{\beta}(k, \mathbf{b})$ tahmin ediciden daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $(\mathbf{t}'_1\mathbf{T}^+\mathbf{t}_1 + 1)(\mathbf{t}'_2\mathbf{T}^+\mathbf{t}_2 - 1) \leq (\mathbf{t}'_1\mathbf{T}^+\mathbf{t}_2)^2$ olmasıdır.

Teorem 3.3. $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}'_1\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$, $\mathbf{t}_1 \notin \mathfrak{R}(\mathbf{T})$ ve $\mathbf{t}_2 \in \mathfrak{R}(\mathbf{T} + \mathbf{t}'_1\mathbf{T})$ olmak üzere $\hat{\beta}_r(k)$ 'nin HKO anlamında $\hat{\beta}(k, \mathbf{b})$ 'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{t}'_2\mathbf{T}^+\mathbf{t}_2 - 2\varphi(\mathbf{t}'_2\mathbf{v})(\mathbf{t}'_2\mathbf{u}) + \gamma\varphi^2(\mathbf{u}'\mathbf{t}_2)^2 \leq 1$ olmasıdır. Burada $\mathbf{u} = (\mathbf{I}_p - \mathbf{T}\mathbf{T}^+)\mathbf{t}_1$, $\mathbf{v} = \mathbf{T}^+\mathbf{t}_1$, $\gamma = 1 + \mathbf{t}'_1\mathbf{T}^+\mathbf{t}_1$ ve $\varphi = (\mathbf{u}'\mathbf{u})^{-1}$ 'dir.

Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün ispatları için Kaçiranlar ve ark.'na (2011) bakılabilir. Öte yandan bu teoremlerde $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{p \times 1}$ alındığında KRR ile RR tahmin edicilerin HKO karşılaştırmaları da elde edilmiş olur.

3.5. Monte Carlo Deneyi

Bu bölümde teorik karşılaştırmaları desteklemek amacıyla bir Monte Carlo deneyine yer verilmiştir. Monte Carlo deneyindeki veri üretim süreci ve performans kriteri Bölüm 2.5'dekine benzerdir. Bu sayede EKK, KEKK, RR, MRR ve KRR tahmin edicilerin hko karşılaştırmalarının yapılması amaçlanmıştır. Veri üretim sürecinde çoklu iç ilişki ve hata varyansının farklı düzeyleri ele alınmış, ön bilgi ve kısıtlar için de çeşitli alternatifler kullanılmıştır. Veri üretim süreci McDonald ve Galarneau (1975), Liu (2003) ve Güler ve Kaçıranlar (2009) ile benzerdir. Simülasyonlarda MATLAB 7.0 kullanılmış olup tohum değeri 170904 alınmıştır.

Gözlem ve açıklayıcı değişken sayısının etkisini görmek üzere n ile p 'nin $(n, p) = \{(20,4), (60,10)\}$ şeklindeki iki farklı kombinasyonu göz önüne alınmıştır. Açıklayıcı değişkenler (2.37a)'dakine benzer şekilde

$$x_{ji} = (1 - \kappa^2)^{1/2} z_{ji} + \kappa z_{p+1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (3.41)$$

eşitliği ile üretilmiştir. Burada z_{ji} değerleri standart normal dağılımdan üretilen birbirinden bağımsız gözlemlerdir. (3.41)'deki eşitlikle üretilen herhangi iki açıklayıcı değişken arasındaki korelasyon katsayısı κ^2 'ye eşit olacaktır. Bu çalışmada κ için 0,7, 0,8, 0,9 ve 0,99 değerleri kullanılarak çoklu iç ilişkinin derecesi giderek arttırılmıştır. Üretilen açıklayıcı değişkenler $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisi korelasyon formunda olacak şekilde standartlaştırılmıştır. Elde edilen $\mathbf{X}$ matrisleri denemeler boyunca sabit tutulmuştur. Parametre vektörü $\boldsymbol{\beta} = (1 \quad 2 \quad \dots \quad p)'$ şeklinde alınmış olup bu vektör de denemeler boyunca sabit tutulmuştur.

Her bir denemede bağımsız ε_i 'ler ($i = 1, 2, \dots, n$) sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılımdan türetilmiştir. σ için 0,1; 1 ve 10 değerleri kullanılmıştır. Deneyin başında üretilen $\mathbf{X}$ ve $\boldsymbol{\beta}$ ile her bir denemede üretilen $\boldsymbol{\varepsilon}$ kullanılarak bağımlı değişkenin simülasyonu $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ eşitliği ile yapılmıştır.

Kısıtlı tahmin ediciler için iki farklı türde kısıt kullanılarak kısıt sayısının hko değerini nasıl etkilediği araştırılmıştır. Parametreler üzerine konulan ilk tür kısıtta kısıt sayısı $m = 1$ alınarak $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = \frac{p(p+1)}{2} \zeta$ kısıtı kullanılmıştır. Bu kısıt için $\mathbf{R} = (1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)$ ve $\mathbf{r} = \frac{p(p+1)}{2} \zeta$ yazılabilir. Burada ζ parametresi

kullanılarak kısıtın doğru olup olmadığı ve kısıttaki sapma miktarı kontrol edilebilmektedir. Çalışmada ζ için 1; 1,05 ve 1,10 değerleri kullanılmış olup bu değerler deneyin başında atanıp denemeler boyunca sabit tutulmuştur. Seçilen β vektörü için $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p$ toplamı $\frac{p(p+1)}{2}$ ’ye eşit olduğundan $\zeta = 1$ alındığında ilgili kısıt doğru olacaktır. Öte yandan $\zeta = 1,05$ veya $\zeta = 1,10$ alındığında kısıtta %5 veya %10’luk bir hata payı olacaktır. İkinci tür kısıtta ise $m = p/2$ alınarak

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } r = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ \vdots \\ 2p-1 \end{pmatrix} \zeta$$

kullanılmıştır. Burada ζ ’nin rolü bir önceki kısıtla aynıdır. Öte yandan R , r , β ve ζ değerleri deneyin başında atanıp sabit tutulduğundan kısıtların stokastik olmasının önüne geçilmiştir.

MRR tahmin edici için aynı ön bilgiyi kullanmak adına b vektörü $b = \zeta\beta$ olarak seçilmiştir. ζ için yine 1; 1,05 ve 1,10 değerleri kullanılmıştır. $\zeta = 1$ için ön bilgi doğru olurken, $\zeta \neq 1$ için ön bilginin sapması kısıtlardaki sapma ile aynı olacaktır.

k ’nin seçiminde Hoerl ve ark. (1975) ve Groß’da (2003a) önerilen iki farklı tahmin edici kullanılmıştır. Bu tahmin ediciler sırasıyla $\hat{k}_{HKB} = p\hat{\sigma}_{EKK}^2 / \hat{\beta}'\hat{\beta}$ ve $\hat{k}_G = (p - m)\hat{\sigma}_r^2 / (\hat{\beta}_r'Q\hat{\beta}_r)$ şeklindedir. Burada $\hat{\sigma}_{EKK}^2$ ve $\hat{\sigma}_r^2$ hata varyansının sırasıyla EKK ve KEKK tahmin edicileri olup, $Q = I_p - R'(RR')^{-1}R$ olarak tanımlanmıştır.

Tahmin edicileri karşılaştırmada kullanılacak hko değerinin tahmininde (2.41)’deki eşitlikten faydalanılmıştır. Bu deney için deneme sayısı daha önceki bölümde olduğu üzere $MCN = 5.000$ olarak alınmıştır. Monte Carlo deneyin farklı parametre değerleri için simülasyonlar tekrarlanmış ve hko tahminleri Çizelge 3.2 - Çizelge 3.13’de verilmiştir. Sonuçlar ön bilgi ve kısıtların doğru olduğu veya olmadığı durumlar için Bölüm 3.5.1 ve Bölüm 3.5.2’de ayrı ayrı incelenmiştir.

3.5.1. Ön Bilgi ve Kısıtların Doğru Olduğu Durum

Ön bilgi ve kısıtların doğru olduğu durum için tahmin edicilerin hko tahminleri Çizelge 3.2 - Çizelge 3.5’de verilmektedir. Bu çizelgeler incelendiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

1. Kısıtlar doğru iken KEKK tahmin edici daima EKK tahmin ediciden daha küçük hko değerleri vermektedir. Kısıt sayısı 1 olduğunda da bu durum devam etmektedir. Öte yandan kısıt sayısı arttıkça KEKK tahmin edicinin hko’ndaki kazanç da artmaktadır.
2. RR, MRR ve KRR tahmin ediciler aynı k değerleri için karşılaştırıldığında MRR ve KRR tahmin edicilerin daima ridge tahmin ediciden daha düşük hko değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Bu tahmin edicilerle ilgili aşağıdaki sonuçlara da ulaşılabilir:
 - a. RR ve MRR tahmin ediciler karşılaştırıldığında σ büyük olmadıkça MRR’un RR tahmin ediciden daha iyi olması için $\hat{k}_G$ ’nin kullanılması uygun görülmektedir. Kısıt sayısı arttıkça σ ’nın değeri ne olursa olsun $\hat{k}_G$ ’nin $\hat{k}_{HKB}$ ’den daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.
 - b. RR ve KRR tahmin ediciler karşılaştırıldığında şu sonuçlara ulaşılmaktadır: Gözlem ve parametre sayısı arttıkça $\hat{k}_{HKB}$ kullanıldığında KRR tahmin edici RR tahmin ediciden daha etkin olmaktadır. Ancak gözlem ve değişken sayısı küçük olduğunda, hata varyansı büyük olmadıkça $\hat{k}_G$ ’nin kullanılması daha uygun görülmektedir. Kısıt sayısı arttıkça $\sigma \neq 10$ iken $(n, p) = (60, 10)$ olsa dahi $\hat{k}_G$, $\hat{k}_{HKB}$ ’den daha iyi sonuç vermektedir. Dolayısıyla k ’nin seçiminde kısıt sayısının dikkate alınması gerekmektedir. m artarken σ büyük olmadığı sürece KRR tahmin edici için $\hat{k}_G$ ’nin kullanılması daha uygun görülmektedir.

Çizelge 3.2. $n = 20$, $p = 4$, $m = 1$ ve $\zeta = 1$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,0487	0,0535	0,0535	0,0485* ⁺	0,0536	0,0528	0,0485* ⁺
	1	5,3657	4,8700	4,3231	4,0377	3,7450*	4,8479	2,7115* ⁺	3,2397
	10	536,5692	486,9953	193,8175	188,7226	163,3375* ⁺	210,7243	206,0518	183,8833*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,0699	0,0734	0,0733	0,0696*	0,0733	0,0719	0,0694* ⁺
	1	7,3717	6,9897	5,3931	5,0834	4,9673*	5,3222	3,4808* ⁺	4,1917
	10	737,1705	698,9654	254,0273	250,3568	227,1618* ⁺	288,2741	285,1651	263,1372*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,1376	0,1393	0,1391	0,1363*	0,1386	0,1340* ⁺	0,1355
	1	14,0599	13,7592	8,4951	7,9850*	8,1726	7,6222	6,0143* ⁺	6,9330
	10	1405,9924	1375,9193	458,9409	456,5659	434,4674* ⁺	540,5101	538,5796	516,4917*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,4407	1,3138	1,2979*	1,3114	1,2318	0,9772* ⁺	1,2293
	1	144,3092	144,0697	50,7552	49,4260* ⁺	50,5079	56,1879	54,8276*	55,9221
	10	14430,9232	14406,9714	4467,3968	4466,0762	4443,4988* ⁺	5417,0790	5415,9437	5393,1875*

Çizelge 3.3. $n = 20$, $p = 4$, $m = 2$ ve $\zeta = 1$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,3287	0,0535	0,0535	0,0372* ⁺	0,0579	0,0507	0,0377*
	1	5,3657	4,0297	4,3231	4,0377	2,7363*	6,8949	2,2926	1,9242* ⁺
	10	536,5692	374,2393	193,8175	188,7226	118,4365* ⁺	216,9992	211,5593	154,5778*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,3448	0,0734	0,0733	0,0535* ⁺	0,0794	0,0678	0,0543*
	1	7,3717	5,6696	5,3931	5,0834	3,5977*	6,5775	3,1022	2,6130* ⁺
	10	737,1705	538,2640	254,0273	250,3568	165,2795* ⁺	297,2848	293,4424	222,3600*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,3967	0,1393	0,1391	0,1050* ⁺	0,1585	0,1187	0,1077*
	1	14,0599	10,9163	8,4951	7,9850	5,8242*	8,2149	5,7394	4,7931* ⁺
	10	1405,9924	1063,0062	458,9409	456,5659	317,4141* ⁺	559,5406	557,0458	439,0082*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,4045	1,3138	1,2979	0,9966*	1,6166	0,6965* ⁺	0,7735
	1	144,3092	111,6815	50,7552	49,4260	36,2597* ⁺	57,9752	56,4526	46,3612*
	10	14430,9232	11139,5682	4467,3968	4466,0762	3252,7178* ⁺	5622,8960	5621,5221	4593,1452*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. ⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

Çizelge 3.4. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\zeta = 1$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7	0,1	0,2062	0,2018	0,2060	0,2059	0,2016* ⁺	0,2059	0,2050	0,2017*
(5,03)	1	20,6236	20,1826	18,5749	18,1894*	18,2475	17,5529	13,6738* ⁺	17,6345
	10	2062,3568	2018,2624	645,8480	621,7723*	627,3549	627,6139	602,1492* ⁺	612,2671
0,8	0,1	0,2910	0,2877	0,2905	0,2904	0,2873* ⁺	0,2905	0,2886	0,2874*
(6,75)	1	29,0969	28,7701	25,2664	24,5252*	25,0515	23,4495	17,3958* ⁺	23,5916
	10	2909,6857	2877,0079	864,7540	840,5143* ⁺	850,5246	868,0708	843,4938*	856,0332
0,9	0,1	0,5538	0,5516	0,5522	0,5517	0,5500*	0,5525	0,5452* ⁺	0,5505
(10,39)	1	55,3823	55,1635	43,5502	41,4423*	43,4365	38,0894	27,0398* ⁺	38,1967
	10	5538,2302	5516,3483	1548,6215	1523,1727* ⁺	1537,1725	1616,1873	1591,3633*	1605,9026
0,99	0,1	5,4050	5,4038	5,2513	5,2144*	5,2502	5,2456	4,6982* ⁺	5,2450
(35,51)	1	540,4998	540,3794	222,6780	205,6443*	222,5978	191,5153	168,3547* ⁺	191,4447
	10	54049,9758	54037,9440	14171,8321	14144,9560* ⁺	14162,2059	15409,7395	15384,3752*	15400,3962

Çizelge 3.5. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\zeta = 1$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7	0,1	0,2062	0,0899	0,2060	0,2059	0,0898*	0,3793	0,1857	0,0895* ⁺
(5,03)	1	20,6236	8,9868	18,5749	18,1894	8,2477*	35,8225	5,4017	3,9449* ⁺
	10	2062,3568	898,6765	645,8480	621,7723	323,6750*	493,8755	456,7605	289,8513* ⁺
0,8	0,1	0,2910	0,1277	0,2905	0,2904	0,1275*	0,6438	0,2516	0,1267* ⁺
(6,75)	1	29,0969	12,7664	25,2664	24,5252	11,3445*	37,2399	7,2505	5,1964* ⁺
	10	2909,6857	1276,6384	864,7540	840,5143	442,3211*	674,6516	640,8664	411,2984* ⁺
0,9	0,1	0,5538	0,2444	0,5522	0,5517	0,2438*	1,7219	0,4274	0,2393* ⁺
(10,39)	1	55,3823	24,4376	43,5502	41,4423	19,8879*	43,8980	13,0003	8,9968* ⁺
	10	5538,2302	2443,7562	1548,6215	1523,1727	808,9713*	1246,4959	1214,1066	786,8178* ⁺
0,99	0,1	5,4050	2,3978	5,2513	5,2144	2,3408*	20,2424	1,9279	1,5669* ⁺
(35,51)	1	540,4998	239,7828	222,6780	205,6443	109,2916*	151,6408	119,2125	78,4028* ⁺
	10	54049,9758	23978,2791	14171,8321	14144,9560	7569,1120* ⁺	11858,7276	11827,5847	7722,6487*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. ⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir

c. MRR ve KRR tahmin edicilerin karşılaştırmasında $m = 1$ ve $\hat{k}_{HKB}$ için elde edilen sonuçlar şu şekildedir: Çoklu iç ilişkinin derecesi ve hata varyansı büyüdükçe MRR tahmin edicinin hko değeri KRR tahmin edicinininkinden daha düşük olmaktadır. Öte yandan çoklu iç ilişkinin derecesi ve hata varyansı küçük olduğunda KRR tahmin edicinin kullanılması uygun görülmektedir. $\hat{k}_G$ için sonuçlar benzer olmakla birlikte, çoklu iç ilişkinin derecesi küçük olsa dahi hata varyansının etkisi daha belirgin olmaktadır. Bu durumda hata varyansı büyüdükçe MRR tahmin edicinin hko tahmini KRR tahmin edicinininkinden daha düşük olmaktadır. Ancak $m = p/2$ için sonuçlar tamamiyle farklıdır. Bu durumda KRR tahmin edicinin hko değerleri hem $\hat{k}_{HKB}$ hem de $\hat{k}_G$ için MRR tahmin edicinininkinden daha düşük çıkmaktadır. Dolayısıyla kısıt sayısı arttıkça KRR tahmin edicinin uygulamada daha iyi sonuçlar vereceği söylenebilir. Öte yandan kısıt sayısı az olduğunda, MRR ve KRR tahmin ediciler arasında seçim yaparken çoklu iç ilişkinin düzeyi, hata varyansı ve k seçme yöntemine dikkat edilmelidir.

3. Son olarak yanlı tahmin edicilerle yansız olanlar karşılaştırılmıştır.

a. k seçmek için hangi yöntem kullanılırsa kullansın MRR ve KRR tahmin edicilerin EKK tahmin ediciden daha iyi olduğu görülmektedir. Aynı durum RR tahmin edici için $\hat{k}_{HKB}$ kullanılırken geçerli olmakla birlikte $\hat{k}_G$ için sonuçlar farklılaşmaktadır. $m = p/2$ ve düşük hata varyansı için RR tahmin edicide $\hat{k}_G$ kullanıldığında, bazı durumlar için EKK tahmin ediciden daha büyük hko değerleri elde edilmektedir. Bu durumda RR tahmin edici için kısıt sayısı arttıkça k parametresinin seçiminde $\hat{k}_{HKB}$ yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

b. Yanlı tahmin ediciler KEKK ile karşılaştırıldığında elde edilen sonuçlar şu şekildedir: İlk olarak RR ile KEKK tahmin ediciler karşılaştırıldığında, hata varyansı büyük olmadıkça eldeki doğru

kısıtlar sayesinde KEKK'in daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Benzer bir durum MRR ile KEKK tahmin ediciler karşılaştırıldığında da görülmektedir. Dolayısıyla hata varyansı büyük olmadıkça, doğru kısıtları MRR tahmin edicide ön bilgi olarak kullanmak yerine KEKK tahmin edicinin kullanılmasının daha uygun olacağı söylenebilir. Öte yandan KRR tahmin edici KEKK ile aynı kısıtları kullandığından, KRR tahmin edicinin KEKK tahmin ediciden daima daha iyi olduğu görülmektedir.

3.5.2. Ön Bilgi ve Kısıtların Doğru Olmadığı Durum

Bu bölümde Çizelge 3.6 - Çizelge 3.13'deki hko tahminleri kullanılarak ön bilgi ve kısıtların doğru olmadığı durum için tahmin ediciler karşılaştırılmıştır.

1. Kısıtlar doğru olmadığında EKK ve KEKK tahmin ediciler arasındaki karşılaştırmalar tamamıyla farklılaşmaktadır. Sadece tek bir hatalı kısıt olduğunda hata varyansı küçükken EKK tahmin edici KEKK tahmin ediciye tercih edilebilir. Öte yandan gözlem ve değişken sayısı arttıkça EKK tahmin edici KEKK tahmin ediciye σ 'nın orta büyüklükteki değerleri için dahi tercih edilebilir. Bu durum hem $\zeta = 1,05$ hem de $\zeta = 1,10$ için geçerlidir. Ancak kısıt sayısı arttıkça EKK tahmin edici sadece σ 'nın 0,1 olduğu birkaç durum için KEKK tahmin ediciden daha iyi olmaktadır. Dolayısıyla kısıtlar doğru olmasa bile hata varyansı ve kısıt sayısı çok küçük olmadığı sürece KEKK tahmin edici EKK tahmin ediciye tercih edilebilir. Bunun yanı sıra kısıtlardaki sapma arttıkça KEKK tahmin edicinin hko'nın beklendiği gibi arttığı görülmektedir.
2. Ön bilgi doğru olmadığında MRR tahmin edici RR tahmin ediciden daha düşük hko değerlerine sahip olmayı sürdürmektedir. Ancak kısıtların hatalı olması KRR tahmin edicinin performansını kötü yönde etkilemekte ve bazı durumlarda RR tahmin ediciden daha büyük hko değerlerine sahip olmasına yol açmaktadır. Elde edilen sonuçlar şu şekildedir:

Çizelge 3.6. $n = 20, p = 4, m = 1$ ve $\zeta = 1,05$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,1121	0,0535*	0,0535*	0,1120	0,0550	0,0519* ⁺	0,1125
	1	5,3657	4,9324	4,3231	4,0324	3,8102*	4,8722	2,6982* ⁺	3,2971
	10	536,5692	487,0487	193,8175	188,7161	163,3928* ⁺	210,7224	206,0503	183,9206*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,1331	0,0734	0,0733*	0,1328	0,0749	0,0699* ⁺	0,1339
	1	7,3717	7,0519	5,3931	5,0781	5,0324*	5,3354	3,4602* ⁺	4,2418
	10	737,1705	699,0180	254,0273	250,3530	227,2167* ⁺	288,2681	285,1545	263,1656*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,2003	0,1393	0,1391*	0,1991	0,1423	0,1253* ⁺	0,2021
	1	14,0599	13,8209	8,4951	7,9786*	8,2364	7,6042	5,9709* ⁺	6,9583
	10	1405,9924	1375,9715	458,9409	456,5709	434,5225* ⁺	540,4803	538,5453	516,4994*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,5033	1,3138	1,2975*	1,3741	1,2541	0,6250* ⁺	1,3133
	1	144,3092	144,1321	50,7552	49,4286* ⁺	50,5710	55,6760	54,3094*	55,4697
	10	14430,9232	14407,0313	4467,3968	4466,0989	4443,5682* ⁺	5416,6738	5415,5530	5392,8494*

Çizelge 3.7. $n = 20, p = 4, m = 2$ ve $\zeta = 1,05$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,1102	0,0535*	0,0535*	0,1101	0,0738	0,0479* ⁺	0,1136
	1	5,3657	3,8118	4,3231	4,0324	2,8121*	6,9468	2,2889	1,9896* ⁺
	10	536,5692	374,0276	193,8175	188,7161	118,5079* ⁺	216,9901	211,5532	154,6317*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,1265	0,0734	0,0733*	0,1263	0,1052	0,0617* ⁺	0,1332
	1	7,3717	5,4519	5,3931	5,0781	3,6737*	6,6101	3,0903	2,6725* ⁺
	10	737,1705	538,0531	254,0273	250,3530	165,3501* ⁺	297,2722	293,4297	222,4087*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,1788	0,1393	0,1391*	0,1777	0,2408	0,0974* ⁺	0,1966
	1	14,0599	10,6992	8,4951	7,9786	5,8998*	8,2084	5,7049	4,8344* ⁺
	10	1405,9924	1062,7962	458,9409	456,5709	317,4841* ⁺	559,5078	557,0122	439,0432*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,1865	1,3138	1,2975	1,0696*	2,0454	0,4103* ⁺	0,7217
	1	144,3092	111,4646	50,7552	49,4286	36,3332* ⁺	57,5259	55,9951	46,0552*
	10	14430,9232	11139,3613	4467,3968	4466,0989	3252,7931* ⁺	5622,5328	5621,1681	4592,9183*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. ⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

Çizelge 3.8. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\zeta = 1,05$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (5,03)	0,1	0,2062	1,7660	0,2060	0,2059*	1,7700	0,2464	0,1955* ⁺	1,9612
	1	20,6236	21,8012	18,5749	18,1853*	20,1908	17,6561	13,0069* ⁺	20,2441
	10	2062,3568	2020,4242	645,8480	621,8249*	629,6633	626,4345	600,9251* ⁺	613,3410
0,8 (6,75)	0,1	0,2910	1,8381	0,2905	0,2904*	1,8439	0,4319	0,2646* ⁺	2,2609
	1	29,0969	30,3899	25,2664	24,5175*	27,1083	23,5187	16,2807* ⁺	26,2519
	10	2909,6857	2879,3222	864,7540	840,5979* ⁺	852,8084	866,6397	842,0204*	856,8615
0,9 (10,39)	0,1	0,5538	1,9140	0,5522	0,5517*	1,9236	1,2912	0,4480* ⁺	3,1964
	1	55,3823	56,6152	43,5502	41,4238*	45,4930	37,6380	24,7830* ⁺	40,0783
	10	5538,2302	5518,6933	1548,6215	1523,2848* ⁺	1539,2569	1614,0118	1589,1757*	1605,8310
0,99 (35,51)	0,1	5,4050	6,3625	5,2513	5,2139*	6,2734	24,8446	1,3598* ⁺	26,5540
	1	540,4998	541,4893	222,6780	205,6477*	224,1772	175,6349	150,3130* ⁺	177,0465
	10	54049,9758	54040,5654	14171,8321	14145,0982* ⁺	14163,7778	15392,1500	15366,8495*	15384,4269

Çizelge 3.9. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\zeta = 1,05$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (5,03)	0,1	0,2062	1,0734	0,2060	0,2059*	1,0731	6,3195	0,1224* ⁺	1,1237
	1	20,6236	9,9713	18,5749	18,1853	9,2193*	36,9113	5,2608	4,7719* ⁺
	10	2062,3568	899,6711	645,8480	621,8249	324,6007*	493,8441	456,7614	290,7052* ⁺
0,8 (6,75)	0,1	0,2910	1,1109	0,2905	0,2904*	1,1105	12,9554	0,1407* ⁺	1,2637
	1	29,0969	13,7514	25,2664	24,5175	12,3116*	38,4525	6,9065	5,9121* ⁺
	10	2909,6857	1277,6408	864,7540	840,5979	443,2478*	674,4363	640,6886	412,0560* ⁺
0,9 (10,39)	0,1	0,5538	1,2221	0,5522	0,5517*	1,2211	29,0985	0,1763* ⁺	1,6671
	1	55,3823	25,4177	43,5502	41,4238	20,8418*	44,9001	12,0337	9,3525* ⁺
	10	5538,2302	2444,7609	1548,6215	1523,2848	809,9012*	1245,7010	1213,3755	787,2650* ⁺
0,99 (35,51)	0,1	5,4050	3,3619	5,2513	5,2139	3,3028*	67,8602	0,2639* ⁺	2,8690
	1	540,4998	240,7478	222,6780	205,6477	110,2220*	141,6907	106,8792	71,9909* ⁺
	10	54049,9758	23979,2532	14171,8321	14145,0982	7570,0485* ⁺	11847,5361	11816,5590	7717,2963*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. + : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir

Çizelge 3.10. $n = 20, p = 4, m = 1$ ve $\zeta = 1,10$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,3024	0,0535	0,0535*	0,3023	0,0610	0,0496	0,3069* ⁺
	1	5,3657	5,1218	4,3231	4,0278	4,0018*	4,9063	2,6745*	3,4701
	10	536,5692	487,2290	193,8175	188,7333	163,5735* ⁺	210,7014	206,0513	184,0655*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,3228	0,0734	0,0733*	0,3227	0,0859	0,0645* ⁺	0,3342
	1	7,3717	7,2407	5,3931	5,0739*	5,2235	5,3428	3,4129* ⁺	4,3943
	10	737,1705	699,1971	254,0273	250,3664	227,3969* ⁺	288,2267	285,1223	263,2853*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,3887	0,1393	0,1391*	0,3875	0,1837	0,1042* ⁺	0,4321
	1	14,0599	14,0083	8,4951	7,9740*	8,4255	7,5280	5,8511* ⁺	7,0392
	10	1405,9924	1376,1493	458,9409	456,5877	434,7028* ⁺	540,3636	538,4327	516,5464*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,6913	1,3138	1,2972*	1,5620	1,7873	0,2786* ⁺	2,0302
	1	144,3092	144,3199	50,7552	49,4379* ⁺	50,7591	54,1535	52,7715*	54,1309
	10	14430,9232	14407,2166	4467,3968	4466,1301	4443,7626* ⁺	5415,1920	5414,0924	5391,5598*

Çizelge 3.11. $n = 20, p = 4, m = 2$ ve $\zeta = 1,10$ için hko tahminleri

ρ (KS)	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7 (2,08)	0,1	0,0537	0,3287	0,0535*	0,0535*	0,3287	0,1530	0,0417* ⁺	0,3468
	1	5,3657	4,0297	4,3231	4,0278	3,0334*	7,0282	2,2905	2,1885* ⁺
	10	536,5692	374,2393	193,8175	188,7333	118,7244* ⁺	216,9631	211,5548	154,8167*
0,8 (2,83)	0,1	0,0737	0,3448	0,0734	0,0733*	0,3447	0,2436	0,0494* ⁺	0,3818
	1	7,3717	5,6696	5,3931	5,0739	3,8950*	6,6567	3,0643	2,8546* ⁺
	10	737,1705	538,2640	254,0273	250,3664	165,5658* ⁺	297,2275	293,4026	222,5768*
0,9 (4,44)	0,1	0,1406	0,3967	0,1393	0,1391*	0,3957	0,6139	0,0669* ⁺	0,4873
	1	14,0599	10,9163	8,4951	7,9740	6,1205*	8,1641	5,6080	4,9625* ⁺
	10	1405,9924	1063,0062	458,9409	456,5877	317,6990* ⁺	559,3974	556,9124	439,1599*
0,99 (15,62)	0,1	1,4431	1,4045	1,3138	1,2972	1,2879*	3,0521	0,1855* ⁺	0,9355
	1	144,3092	111,6815	50,7552	49,4379	36,5518* ⁺	56,1860	54,6325	45,1474*
	10	14430,9232	11139,5682	4467,3968	4466,1301	3253,0135* ⁺	5621,2163	5619,8681	4592,0544*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. ⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir.

Çizelge 3.12. $n = 60, p = 10, m = 1$ ve $\zeta = 1,10$ için hko tahminleri

$\rho (KS)$	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7	0,1	0,2062	6,4466	0,2060	0,2059*	6,4516	0,8071	0,1752* ⁺	7,7341
(5,03)	1	20,6236	26,5360	18,5749	18,1827*	24,9943	18,0343	11,8160* ⁺	25,6629
	10	2062,3568	2025,7024	645,8480	621,9971*	633,7616	624,8548	599,4100* ⁺	615,9659
0,8	0,1	0,2910	6,4739	0,2905	0,2904*	6,4816	2,1588	0,2245* ⁺	9,4786
(6,75)	1	29,0969	35,0952	25,2664	24,5127*	31,9139	24,0131	14,2030* ⁺	31,6790
	10	2909,6857	2884,7219	864,7540	840,8048*	856,8577	864,2076	839,6400* ⁺	858,6288
0,9	0,1	0,5538	5,9813	0,5522	0,5517*	1,9236	7,8466	0,3456* ⁺	14,9437
(10,39)	1	55,3823	60,7718	43,5502	41,4137*	49,8489	37,3506	20,3502* ⁺	44,0254
	10	5538,2302	5523,7432	1548,6215	1523,5287* ⁺	1543,0324	1608,9149	1584,1525*	1604,6725
0,99	0,1	5,4050	9,2052	5,2513	5,2135*	9,1624	54,5618	0,8105* ⁺	58,6318
(35,51)	1	540,4998	544,4831	222,6780	205,7325*	227,3629	142,4184	111,5959* ⁺	146,8128
	10	54049,9758	54045,0707	14171,8321	14145,3820* ⁺	14166,9172	15337,3914	15312,2421*	15332,8994

Çizelge 3.13. $n = 60, p = 10, m = 5$ ve $\zeta = 1,10$ için hko tahminleri

$\rho (KS)$	σ	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_r$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_{HKB}, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G)$	$\hat{\beta}(\hat{k}_G, b)$	$\hat{\beta}_r(\hat{k}_G)$
0,7	0,1	0,2062	4,0236	0,2060	0,2059* ⁺	4,0232	25,1426	0,2955*	4,3669
(5,03)	1	20,6236	12,9226	18,5749	18,1827	12,1535*	40,7313	4,8720* ⁺	7,3195
	10	2062,3568	902,6325	645,8480	621,9971	327,4577*	493,3013	456,3909	293,1680* ⁺
0,8	0,1	0,2910	4,0602	0,2905	0,2904* ⁺	4,0595	38,3643	0,4187*	4,7200
(6,75)	1	29,0969	16,7024	25,2664	24,5127	15,2391*	42,2889	6,0499* ⁺	8,1901
	10	2909,6857	1280,6093	864,7540	840,8048	446,1046*	673,2711	639,6846	414,1603* ⁺
0,9	0,1	0,5538	4,1547	0,5522	0,5517* ⁺	4,1532	57,5909	0,6003*	5,3136
(10,39)	1	55,3823	28,3528	43,5502	41,4137	23,7429*	47,9434	9,7991* ⁺	10,7932
	10	5538,2302	2447,7205	1548,6215	1523,5287	812,7567*	1242,5966	1210,4521	788,2445* ⁺
0,99	0,1	5,4050	6,2541	5,2513	5,2135*	6,1925	79,9231	0,8141* ⁺	6,1106
(35,51)	1	540,4998	243,6409	222,6780	205,7325	113,0718*	120,4333	79,7249	58,0410* ⁺
	10	54049,9758	23982,1553	14171,8321	14145,3820	7572,9019* ⁺	11808,9411	11778,2473	7697,5578*

* : Aynı k değeri için en küçük hko değerini gösterir. ⁺ : İlgili satırdaki en küçük hko değerini gösterir

- a. RR ve MRR tahmin ediciler karşılaştırıldığında $\hat{k}_G$ 'nin daha iyi sonuçlar vermeyi sürdürdüğü görülmektedir. Dolayısıyla ön bilgi hatalı olduğunda da $\hat{k}_{HKB}$ yerine $\hat{k}_G$ kullanıldığında MRR tahmin edici RR'dan daha etkin olmaktadır.
 - b. RR ve KRR karşılaştırmalarının kısıtların hatalı olmasından etkilendiği görülmektedir. RR ve KRR karşılaştırmaları, kısıtlar hatalı olduğunda EKK ve KEKK karşılaştırmalarına benzerdir. Kısıtlar hatalı olsa bile σ ve m küçük olmadıkça KRR tahmin edici RR tahmin ediciye tercih edilebilir. Kısıtlardaki sapma arttıkça KRR tahmin edicinin hko değerlerinin de KEKK tahmin edicide olduğu gibi arttığı görülmektedir. Bu sonuçlar hem $\hat{k}_G$ hem de $\hat{k}_{HKB}$ için geçerlidir. KRR tahmin edicinin hko değerleri farklı k 'ler için karşılaştırıldığında $\hat{k}_G$ 'nin $\sigma \neq 1$ için genellikle $\hat{k}_{HKB}$ 'den daha iyi olduğu görülmektedir.
 - c. MRR ve KRR tahmin ediciler karşılaştırıldığında KRR tahmin edicinin kısıt sayısı ve hata varyansı küçük olmadıkça MRR tahmin ediciye tercih edilebileceği görülmektedir. Benzer sonuçlar hem $\hat{k}_G$ hem de $\hat{k}_{HKB}$ için geçerlidir.
3. Ridge tahmin edicilerin EKK ve KEKK tahmin ediciler ile karşılaştırılmasında elde edilen sonuçlar şu şekildedir:
- a. EKK tahmin edici ile $\hat{k}_{HKB}$ için MRR ve RR tahmin ediciler kısıtlardaki bilgiyi kullanmadıklarından, elde edilen hko değerleri kısıtların doğru olduğu durumdakilerle aynıdır. Dolayısıyla $\hat{k}_{HKB}$ için MRR ve RR tahmin edicilerin EKK ile karşılaştırmasında durum değişmemektedir. Öte yandan $\hat{k}_G$ için MRR tahmin edicinin genellikle EKK'den daha iyi olduğu fakat bazı durumlarda EKK'in öne geçtiği görülmektedir. Hata varyansı küçükken RR tahmin edicide $\hat{k}_G$ kullanıldığında hko değerinin EKK'inkinden daha büyük olduğu görülmektedir. Bu sonuç σ 'nın 1'e eşit olduğu bazı durumlarda da gözlenmiştir. Dolayısıyla RR tahmin edicinin EKK'den daha iyi olması için $\hat{k}_{HKB}$ 'nin kullanılması gerektiği söylenebilir. Benzer

durum KRR tahmin edici için de geçerlidir. Hata varyansı küçükken KRR tahmin edicinin hko değerleri EKK'inkinden daha büyük olmaktadır. Dolayısıyla kısıtların doğruluğundan emin olunmadıkça σ 'nın küçük değerleri için KRR tahmin edici kullanılırken dikkatli olunmalıdır.

- b. KEKK ile RR tahmin ediciler karşılaştırıldığında $m = 1$ iken RR tahmin edici için $\hat{k}_{HKB}$ 'nin daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir. Bu durum $m = p/2$ için σ 'nın 0,1 veya 1 olduğu bazı durumlar haricinde de geçerlidir. Dolayısıyla hatalı kısıtlar KEKK tahmin edicinin $\hat{k}_{HKB}$ 'li RR tahmin ediciye göre performansını kötü yönde etkilemektedir. Öte yandan hatalı kısıtlar $\hat{k}_G$ 'li RR tahmin edicinin hko değerlerini arttırmakta ve RR'un bazı durumlarda KEKK'den daha kötü olmasına yol açmaktadır. MRR'un KEKK'e göre karşılaştırılmasında şu sonuçlar ortaya çıkmaktadır: k 'nin değeri $\hat{k}_G$ ile seçildiğinde MRR'un hko değeri daima KEKK'inkinden küçük çıkmaktadır. Bu durum $m = 1$ iken $\hat{k}_{HKB}$ için de geçerlidir. Ancak $m = p/2$ iken MRR tahmin edicide $\hat{k}_{HKB}$ kullanıldığında, özellikle $(n, p) = (60, 10)$ ve $\sigma = 1$ için KEKK'den daha büyük hko değerleri elde edilmektedir. Bu durum kısıtlar hatalı olsa bile bu bilginin MRR tahmin edicide ön bilgi olarak kullanılması ve k 'nin $\hat{k}_{HKB}$ ile seçilmesi durumunda KEKK'den daha düşük hko elde edilebileceğini göstermektedir. Çizelgeler incelendiğinde MRR tahmin edicide $\hat{k}_G$ kullanıldığında KEKK'den daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Son olarak KRR ve KEKK tahmin ediciler karşılaştırıldığında $\hat{k}_{HKB}$ için KRR'un hemen hemen her zaman KEKK'den daha iyi olduğu söylenebilir. Öte yandan KRR'da $\hat{k}_G$ kullanıldığında hata varyansı küçük olmadıkça KEKK'den daha iyi sonuçlar elde edilmektedir. KRR ile KEKK karşılaştırıldığında $\hat{k}_{HKB}$ 'nin daha iyi bir alternatif olduğu görülmektedir.

Doğru ve hatalı kısıtlar için yapılan karşılaştırmalar her zaman için diğerlerinden daha iyi olan tek bir tahmin edicinin olmadığını göstermektedir. Öte yandan EKK tahmin edici beklendiği üzere en kötü tahmin edici olarak ortaya çıkmaktadır. RR tahmin edici genellikle EKK'den daha iyi olmakla birlikte; KRR, KEKK ve MRR tahmin ediciler hemen hemen her zaman RR'dan daha iyidir. Kısıtlar doğruyken KRR ve KEKK tahmin ediciler genellikle MRR'dan daha iyiyken; KRR tahmin edici KEKK'den daha düşük hko değerlerine sahiptir. Dolayısıyla genel anlamda bakıldığında kısıtlar doğruyken KRR'un karşılaştırmalardaki en iyi tahmin edici olduğu söylenebilir. Kısıtlar hatalıyken de EKK tahmin edicinin performansı diğer tahmin edicilerinkinden kötüdür. Ancak KEKK tahmin edici hatalı kısıtlardan kötü yönde etkilenmektedir. $\hat{k}_G$ için MRR, $\hat{k}_{HKB}$ için RR tahmin edici KEKK'i geçerken; KRR tahmin edici kısıtların doğru olduğu durumdaki gibi KEKK'den daha iyidir. KRR ve MRR tahmin ediciler $\hat{k}_G$ için RR tahmin ediciden daha iyiyken; KRR tahmin edici genellikle MRR tahmin ediciden daha üstündür. Dolayısıyla her zaman için tek bir en iyi tahmin edici gözlenememişse de KRR tahmin edicinin genellikle diğer tahmin edicilerden daha iyi performansa sahip olduğu söylenebilir.

3.6. Uygulama

Daha önceki bölümlerde teorik yöntemler ve simülasyonla karşılaştırılan tahmin ediciler bu bölümde gerçek bir veri seti üzerinde karşılaştırılacaktır. Bu veri Gruber (1998) tarafından verilmiş olup Akdeniz ve Erol (2003) ile Zhong ve Yang (2007) tarafından da kullanılmıştır. Veri setindeki değişkenler farklı ülkelerin toplam ulusal AR&GE harcamalarının Gayri Safi Milli Hasılları içindeki payıdır. Bağımlı değişken y ABD'nin AR&GE/GSYİH yüzdesi olup; x_1 , x_2 , x_3 ve x_4 değişkenleri sırasıyla Fransa, Batı Almanya, Japonya ve Sovyetler Birliği'nin AR&GE/GSYİH yüzdeleridir. Veriler 1972-86 arasındaki $n = 10$ yıllık gözlemlerden oluşmaktadır.

Akdeniz ve Erol (2003) ile Zhong ve Yang (2007) sabit terimi de içeren X matrisinin koşul sayısını inceleyerek verinin çoklu iç ilişki problemine sahip olduğunu belirtmiştir. Zhong ve Yang (2007) ridge regresyon için k 'yi Hoerl ve

Kennard'ın (1970) önerdiği formülle seçmiş ve $\hat{k} = 0,0033$ değerini kullanmıştır. Elde edilen tahminleri kullanarak $\mathbf{R}$ ve $\mathbf{r}$ 'yi

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1,2170 \\ 1,0904 \end{pmatrix}$$

şeklinde belirlemişlerdir. Bu çalışmada da Zhong ve Yang'ın (2007) KEKK ve KRR için kullandığı kısıtlar kullanılmıştır. MRR tahmin edicideki ön bilgiyi belirlemek için verilerdeki değişim incelenmiştir. β_i regresyon katsayıları x_i 'deki bir birim artışa karşılık y 'deki ortalama değişimi gösterdiğinden $i = 1,2,3,4$ ve $j = 1,2, \dots, 9$ için

$$\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{i,j+1} - x_{i,j}}$$

değerleri hesaplanmıştır. Bu değerlerin j üzerinden ortalaması alınarak x_1, x_2, x_3 ve x_4 değişkeni için sırasıyla 0,7, 0,5, 0,43 ve -0,1 değerleri elde edilmiştir.⁴ Bu değerler kullanılarak MRR tahmin edici için ön bilgi vektörü

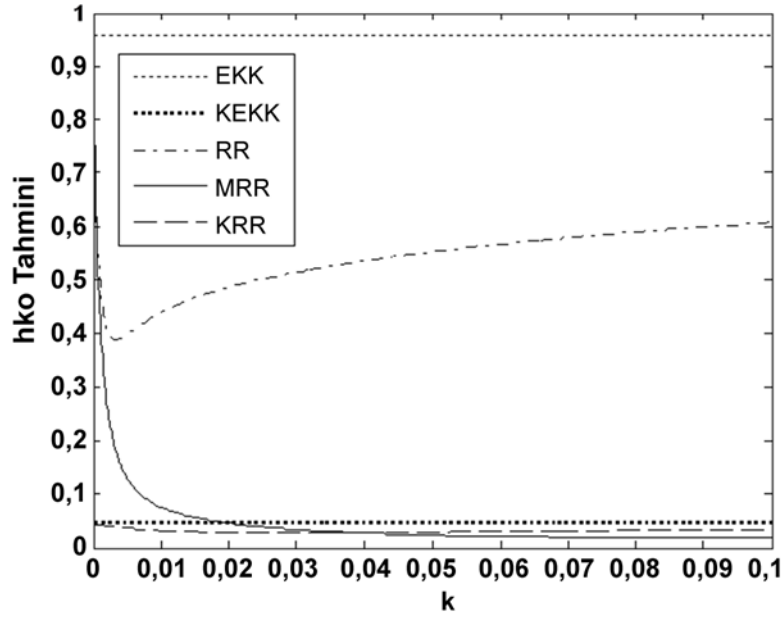
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,7 \\ 0 \\ 0,6 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

olarak alınmıştır.⁵

Bu bilgiler kullanılarak tahmin edicilerin hko değerleri tahmin edilmiştir. RR MRR ve KRR tahmin ediciler için k değeri 0,0001(0,0001)0,10 aralığında alınmıştır. hko tahminleri Şekil 3.1'de verilmektedir. EKK ve KEKK tahmin edicileri k 'ye dayanmadığından hko tahminleri de tüm k değerleri için sabit çıkmıştır. Şekil 3.1'den görüleceği üzere KEKK'in hko tahmini EKK'e göre daha düşüktür. RR tahmin edicinin hko tahminleri incelendiğinde k 'nin 0,003 civarındaki değerleri için hko tahmininin 0,4 düzeylerinde seyrettiği görülmektedir. Bu k değeri Zhong ve Yang'ın (2007) kullandığı Hoerl ve Kennard (1970) formülüyle elde edilen 0,0033'e oldukça yakındır. Öte yandan RR için hko tahmini KEKK'inkinden küçük olmadığından bu veri seti için KEKK'in daha uygun olduğu söylenebilir.

⁴ Bazı gözlemler için açıklayıcı değişkenlerdeki fark sıfır çıkmaktadır. Bu durumda payda sıfır olacağından ilgili gözlemler göz ardı edilmiştir.

⁵ $\mathbf{b}$ 'nin ilk değeri olan 0,6 sabit terime karşılık gelmektedir. Bu değer MRR'un hko tahminleri incelenerek seçilmiştir. β_2, β_3 ve β_4 için bulunan 0,5, 0,43 ve -0,1 değerleri hko tahminlerini istenen düzeylere çekmediğinden bu parametreler için sırasıyla 0, 0,6 ve -0,5 değerleri kullanılmıştır.



Şekil 3.1. Gruber (1998) verisi için k 'ye göre hko tahminleri

Öte yandan MRR tahmin edici 0,02'den daha büyük k değerleri için KEKK tahmin ediciden daha iyi hko tahminlerine sahiptir.

MRR ve KRR tahmin ediciler karşılaştırıldığında MRR'un $k > 0,04$ için KRR tahmin ediciden daha iyi olduğu görülmektedir. Ancak k 'nin küçük değerleri için KRR tahmin edicinin hko tahminleri MRR'a oranla daha düşüktür.

Kullanılan tahmin ediciler için parametre ve hko tahminleri Çizelge 3.14'de verilmektedir. Yanlı tahmin ediciler için k 'nin seçiminde $\hat{k}_{HKB}$, $\hat{k}_G$ ve $\hat{k}_{mse}$ yöntemleri kullanılmıştır. $\hat{k}_{mse}$ tahminleri bulunurken seçilen aralıkta hko tahminini minimum yapan k değeri alınmıştır. Çizelge 3.14'deki hko tahminleri incelendiğinde KEKK'in EKK'den daha düşük hko'na sahip olduğu görülmektedir. Aynı çizelgede RR, MRR ve KRR tahmin edicilerin seçilen k değerleri için EKK'den daha düşük hko tahminlerine sahip olduğu göze çarpmaktadır. Öte yandan RR tahmin edicinin hko tahmini KEKK'inkinden daha düşük değildir. Bu durum Şekil 3.1'de de görülmektedir. Buna ilaveten hata varyansının EKK tahmini $\hat{\sigma} = 0,0403$ olup oldukça düşük bir değerdir. Bir önceki bölümdeki simülasyon çalışmasında hata varyansı büyük olduğunda RR tahmin edicinin KEKK tahmin ediciye tercih

3. MODIFIED VE KISITLI RIDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİLER ÜZERİNE BİR İNCELEME Hüseyin GÜLER

edilebileceği belirtilmiştir. Dolayısıyla RR tahmin edicinin KEKK'den daha büyük hko'na sahip olması, hata varyansının küçük olmasıyla açıklayabilir.

Çizelge 3.14. Gruber (1998) verisi için parametre ve hko tahminleri

Tahmin Edici	k	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	hko
EKK		0,692	0,626	-0,115	0,287	0,026	0,9566
KEKK		0,267	0,633	0,019	0,196	0,103	0,0451
RR	$\hat{k}_{HKB}$	0,158	0,570	0,070	0,199	0,130	0,4267
MRR	(0,0084)	0,717	0,623	-0,111	0,292	0,014	0,0864
KRR		0,286	0,575	0,026	0,224	0,106	0,0330
RR	$\hat{k}_G$	0,087	0,486	0,117	0,214	0,152	0,4990
MRR	(0,024)	0,721	0,621	-0,098	0,297	0,003	0,0399
KRR		0,307	0,508	0,035	0,256	0,111	0,0269
RR	$\hat{k}_{mse} = 0,0035$	0,266	0,606	0,025	0,207	0,106	0,3894
MRR	$\hat{k}_{mse} = 0,0998$	0,720	0,624	-0,066	0,324	-0,037	0,0173
KRR	$\hat{k}_{mse} = 0,0294$	0,313	0,492	0,037	0,263	0,112	0,0267

Çizelge 3.14'den aynı k değeri için MRR ve KRR tahmin edicilerin RR'a göre daha düşük hko'na sahip olduğu görülmektedir. Simülasyon bölümünde σ büyük değilken $\hat{k}_G$ kullanıldığında MRR'un RR'dan daha iyi olacağı belirtilmiştir. Ayrıca simülasyon deneyinde gözlem ve değişken sayısı az iken, σ büyük olmadığı sürece $\hat{k}_G$ kullanıldığında KRR'un RR'dan daha iyi olacağı da belirtilmiştir. Dolayısıyla bu örnek RR, MRR ve KRR tahmin edicilerin simülasyon karşılaştırmasındaki sonuçları desteklemektedir. Bununla birlikte RR tahmin edici için minimum hko tahmini, farklı k değerleri için MRR ve KRR'un hko tahminlerinden daha düşük değildir. Bu yüzden ilgili veri setine RR tahmin edicinin uygulanmasının doğru olmadığı söylenebilir.

k 'nin değeri $\hat{k}_{HKB}$ veya $\hat{k}_G$ ile seçildiğinde KRR tahmin edicinin hko tahmini MRR'unkinden daha iyidir. Öte yandan MRR için tahmin edilen minimum hko değeri KRR'unkinden daha düşüktür. Yine simülasyon bölümünde hata varyansı küçükken MRR'un KRR'dan daha düşük hko değerine sahip olduğu belirtilmiştir. Gerçek veri setinde hata varyansı tahmini düşük olduğundan bu sonuç da simülasyon deneyi ile uyumludur. Ayrıca Çizelge 3.14'de $\hat{k}_{HKB}$ kullanıldığında MRR'un KEKK'den daha büyük hko değerine sahip olduğu görülmektedir.

Son olarak Teorem 3.1, Sonuç 3.1, Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün veri seti üzerindeki uygulaması incelenecektir. Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1'deki varyans-kovaryans matrisleri σ^2 'ya bağlı olduğundan bu parametre yerine EKK tahmini kullanılmıştır. Bilinmeyen k değerinin seçimindeyse $\hat{k}_G$ 'den faydalanılmıştır. Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1'e göre KRR'un varyans-kovaryans matrisi anlamında MRR'dan daha iyi olması için gerek ve yeter koşul $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1'\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ olmasıdır. İncelenen veri seti için $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1'\mathbf{S}\mathbf{A}_1) = 1,3047 > 1$ olduğundan $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$ farkı nnd olmamalıdır. Varyans-kovaryans matrislerinin tahminleri kullanıldığında $\hat{\mathbf{V}}_1 - \hat{\mathbf{V}}_2$ farkının nnd olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla Teorem 3.1 ve Sonuç 3.1 gereğince bu veri seti için KRR'un varyans-kovaryans matrisi anlamında MRR'dan daha iyi olmadığı söylenebilir. Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün uygulanabilmesi için $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1'\mathbf{S}\mathbf{A}_1) \leq 1$ olması gerekmektedir. Bu veri setinde $\lambda_{maks}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_1'\mathbf{S}\mathbf{A}_1) > 1$ olduğundan Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün uygulanamayacağı söylenebilir.

3.7. Sonuçlar

Uygulamalı çalışmalarda parametreler hakkında ön bilgi ya da parametrelere konulan kısıtlar bulunabilmektedir. Bu durumda kullanılabilecek alternatif tahmin ediciler arasında KEKK, MRR ve KRR tahmin ediciler yer almaktadır. MRR tahmin edici Swindel (1976) tarafından tanımlanmış olup bu tahmin edicinin EKK'den daha iyi olması için gerek ve yeter koşul ilgili çalışmada verilmiştir. Sarkar (1992) ise bir KRR tahmin edici tanımlanmış ve bu tahmin edicinin kısıtlar doğru olmasa bile RR tahmin ediciden hko anlamında daha iyi olduğunu göstermiştir. Groß (2003a) ise Sarkar (1992) tarafından tanımlanan bu tahmin edicinin kısıtları sağlamadığını belirterek kısıtları sağlayan yeni bir KRR tahmin edici tanımlamıştır. Bu yeni tahmin edicinin KEKK'den HKO anlamında daha iyi olması için gerek ve yeter koşul da ilgili çalışmada verilmiştir. Bu çalışmada Groß (2003a) tarafından tanımlanan KRR tahmin edici, HKO ve varyans-kovaryans matrisleri açısından MRR ve RR tahmin edicilerle karşılaştırılmıştır. Teorik karşılaştırmalar bir Monte Carlo çalışması ve gerçek veri seti ile desteklenmiştir.

4. GÖZLEMLERE BAĞLI KISITLI RIDGE REGRESYON TAHMİN EDİCİ

Bu bölümde kısıtları gözlemlere bağlı olan doğrusal regresyon modeli incelenecektir. Bu model için kısıtları sağlayan ve çoklu iç ilişki durumunda da kullanılabilecek yeni bir tahmin edici tanımlanacaktır. Bu yeni tahmin edici ridge regresyon tahmin ediciye dayandığından ve kısıtları gözlemlere bağlı doğrusal regresyon modelinde kullanılabileceğinden Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Ridge Regresyon (GBKRR) tahmin edici olarak adlandırılacaktır. Bu bölümde ayrıca GBKRR tahmin edici ile Doran ve ark. (2003) tarafından tanımlanan genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler (GKEKK) tahmin edicinin HKO karşılaştırmaları yapılacaktır. Teorik karşılaştırmalar Monte Carlo simülasyon deneyi ile desteklenecektir. Yeni tanımlanan tahmin edici Alston ve Chalfant'ın (1991) veri setine uygulanacak ve sonuçlar mevcut tahminlerle karşılaştırılacaktır.

4.1. Giriş

Zaman ve bireylere bağlı doğrusal regresyon modeli

$$\mathbf{y}_{it} = \mathbf{X}_{it}\boldsymbol{\beta}_{it} + \boldsymbol{\varepsilon}_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.1)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\mathbf{y}_{it} = (y_{1it} \ y_{2it} \ \dots \ y_{Nit})': N \times 1$ tipinde bağımlı değişkenler vektörü; $\mathbf{X}_{it}: N \times P$ tipinde açıklayıcı değişkenler matrisi; $\boldsymbol{\beta}_{it}: P \times 1$ tipinde bilinmeyen parametreler vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon}_{it}: N \times 1$ tipinde hata terimleri vektörüdür. Modelde N ve P sırasıyla bağımlı ve açıklayıcı değişken sayısıdır. Ayrıca i ve t sırasıyla birey ve zaman indisleri olup, I ve T yine sırasıyla toplam birey ve zaman periyotları sayısıdır. Dikkat edilirse (4.1) eşitliğindeki modelin parametreleri hem zamana hem de bireylere; bir başka deyişle gözlemlere bağlıdır. Bu modelde klasik doğrusal regresyon modelinde olduğu gibi hata terimlerinin ortalamasının sıfır, birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı oldukları varsayılır. Bu varsayımlar matris formunda (4.2)'deki gibi verilebilir:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}) = \mathbf{0}_{N \times 1}, \text{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}\boldsymbol{\varepsilon}_{it}') = \sigma^2 \mathbf{I}_N, E(\boldsymbol{\varepsilon}_{it}\boldsymbol{\varepsilon}_{lm}') = \mathbf{0}_{N \times N} \quad (4.2)$$

tüm i, t, l ve m için ($l \neq i$ ve/veya $m \neq t$)

Bu tip bir regresyon modeli iktisadi değişkenlere uygulandığında genellikle parametreler üzerine bazı doğrusal kısıtlamaların getirilmesi gerekmektedir. Ayrıca bu kısıtlar genellikle zamana ve/veya bireylere bağlı olarak değişebilmektedir. Bu tip kısıtlar gözlemlere bağlı kısıtlar olarak adlandırılır ve

$$\mathbf{R}_{it}\boldsymbol{\beta}_{it} = \mathbf{r}_{it} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{R}_{it}: J \times P$ tipinde elemanları bilinen bir matris olup J kısıt sayısıdır. Ayrıca $\text{rank}(\mathbf{R}_{it}) = J \leq P$ 'dir. $\mathbf{r}_{it}: J \times 1$ tipinde yine elemanları bilinen bir vektördür. Dikkat edilirse her bir gözlem için P parametre üzerine J kısıt konulmaktadır. Bu kısıtlar altında (4.1)'deki regresyon modeli gözlemlere bağlı kısıtlı regresyon modeli (GBKRM) olarak adlandırılır. GBKRM için toplam gözlem sayısı NIT olmakla birlikte toplam parametre sayısı PIT 'dir. Ayrıca her bir gözlem vektöründe J tane kısıt yer aldığından toplam kısıt sayısı JIT 'dir.

GBKRM'nin parametrelerini tahmin etmek için parametrelerin gözlemlere göre sabit olduğu

$$\boldsymbol{\beta}_{11} = \boldsymbol{\beta}_{12} = \dots = \boldsymbol{\beta}_{1T} = \boldsymbol{\beta}_{21} = \dots = \boldsymbol{\beta}_{IT}$$

şeklinde varsayılabilir. Ancak bu durumda P parametre için JIT tane kısıt bulunmaktadır ve genellikle $JIT > P$ olduğundan parametre tahminlerini bulmak mümkün olmaz (Doran ve ark., 2003; Doran ve ark., 2006). Bu problemi çözmek için Doran ve ark. (2006) tarafından özetlenen aşağıdaki dört yöntemden biri uygulanabilir:

1. Gözlemlere bağlı kısıtlar ihmal edilebilir (Doran ve ark., 2006; Beattie ve Taylor, 1985). Ancak bu durumda parametre tahminleri etkin olmayıp, iktisat teorisinin belirttiği kısıtlarda yer alan özellikleri taşımazlar.
2. Gözlemlere bağlı kısıtlar yerine bu kısıtlar için yeterli olmakla birlikte gerekli olmayan az sayıda sabit kısıt kullanılabilir. Ancak bu tip sabit kısıtlar her durum için bulunamayabilir. Öte yandan bu tip kısıtlar oluşturulabilse bile tahmin ediciler yansız olmayabilirler.
3. Kısıtların tüm gözlemler yerine verilerin aritmetik veya geometrik ortalamalarında geçerli olduğu varsayılarak kısıt sayısı azaltılabilir. Bu yöntemle örnek olarak Clements ve Izan (1987) ve Selvanathan (1989)

verilebilir. Ancak burada parametreler üzerinde gerekenden daha az kısıt uygulanmaktadır.

4. Özetlenen ilk üç yöntemde gözlemlere bağlı kısıtlar ya ihmal edilmekte ya da sayıları azaltılmaya çalışılmaktadır. Literatürdeki bazı çalışmalarda ise bu kısıtlar aynen korunmakta ancak farklı tahmin yöntemleri uygulanmaktadır. Doran ve Rambaldi'de (1997) tahmin yöntemi olarak Kalman filtre tahmin edicisi, O'Donnell ve ark.'nda (2001) tekil değer ayrışım tahmin edicisi, Doran ve ark.'nda (2003 ve 2006) ise GKEKK tahmin edicisi kullanılarak zamana bağlı kısıtların yer aldığı modelin parametreleri tahmin edilmiştir. Kalman filtre tahmin edicisi özellikle tahmin edilecek parametre sayısı fazla olduğunda yakınsama sorunu ile karşı karşıya kalabilmektedir (Doran ve ark., 2006). Öte yandan tekil değer ayrışım ve GKEKK tahmin edicileri hem pek çok paket program ile uygulanabilir hem de yakınsama problemine maruz kalmadığından uygulamada daha etkin olarak kullanılabilir.

GKEKK tahmin edicinin uygulaması kolay olsa da bu tahmin edici en küçük kareler yöntemine dayandığından verideki çoklu iç ilişkiden olumsuz yönde etkilenebilmektedir. Bu eksikliği gidermek için bu çalışmada hem gözlemlere bağlı kısıtları sağlayan hem de çoklu iç ilişki durumunda kullanılabilecek yeni bir tahmin edici tanımlanmıştır. Bu tahmin edici ridge regresyon yöntemine dayandığından ve gözlemlere bağlı kısıtları da içerdiğinden gözlemlere bağlı kısıtlı ridge regresyon (GBKRR) tahmin edici olarak adlandırılmıştır. Ayrıca bu tahmin edici ile GKEKK tahmin edici teorik olarak karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar Monte Carlo simülasyonları ile desteklenmiş olup tahmin edicilerin gerçek bir veri seti üzerinde nasıl uygulanabileceği de gösterilmiştir.

4.2. Tahmin Ediciler

Bir önceki bölümde belirtildiği üzere (4.1) numaralı modelde yer alan *PIT* tane parametrenin (4.3)'de verilen *JIT* tane gözlemlere bağlı kısıtı sağlaması istenmektedir. Bu parametreleri tahmin etmek için Doran ve ark. (2006) tarafından

GKEKK tahmin edici tanımlanmıştır. Bu tahmin edicide ilk olarak (4.3) numaralı denklemdeki kısıtların genel çözümü bulunur. Ardından bulunan bu çözüm (4.1)'deki modelde yerine yazılır. Daha sonra elde edilen yeni modelin parametreleri için bir belirlenme varsayımı yapılır ve parametreler EKK tahmin edici ile tahmin edilir. Elde edilen bu tahmin edici GKEKK tahmin edici olarak adlandırılır. (4.3) denkleminin genel çözümü için Lemma 4.1 verilebilir.

Lemma 4.1 (Graybill, 1983). $m \times n$ tipindeki A matrisi $AX = g$ denkleminin bir çözümü olsun. $h: n \times 1$ tipinde keyfi bir vektör olmak üzere $AX = g$ 'nin bir çözümü

$$x_0 = A^+g + (I_n - A^+A)h \quad (4.4)$$

olur. Ayrıca $AX = g$ 'nin tüm çözümleri keyfi bir h vektörü kullanılarak (4.4)'deki gibi yazılabilir.

(4.3) denklemine Lemma 4.1 uygulanarak β_{it} 'nin genel çözümü bulunabilir. Lemma 4.1'de $A = R_{it}$, $X = \beta_{it}$, $g = r_{it}$ ve $h = \gamma_{it}$ alındığında (4.3)'ün genel çözümü

$$\beta_{it} = R_{it}^+r_{it} + H_{it}\gamma_{it} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\gamma_{it}: P \times 1$ tipinde keyfi bir vektör; R_{it}^+ , R_{it} 'nin genelleştirilmiş inversi; $H_{it} = I_P - R_{it}^+R_{it}: P \times P$ tipinde simetrik idempotent bir matristir. Lemma 4.1 gereği β_{it} vektörünün (4.3)'deki gözlemlere bağlı kısıtları sağlaması için gerek ve yeter koşul (4.5)'deki formda olmasıdır.

(4.5)'deki genel çözüm (4.1)'deki GBKRM'nde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{it} &= X_{it}(R_{it}^+r_{it} + H_{it}\gamma_{it}) + \varepsilon_{it} \\ &= X_{it}R_{it}^+r_{it} + X_{it}H_{it}\gamma_{it} + \varepsilon_{it} \\ \Rightarrow y_{it} - X_{it}R_{it}^+r_{it} &= X_{it}H_{it}\gamma_{it} + \varepsilon_{it} \\ \Rightarrow w_{it} &= Z_{it}\gamma_{it} + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada $w_{it} = y_{it} - X_{it}R_{it}^+r_{it}: N \times 1$ tipinde elemanları bilinen bir vektör, $Z_{it} = X_{it}H_{it}: N \times P$ tipinde bilinen bir matris ve $\gamma_{it}: P \times 1$ tipinde bilinmeyen parametreler vektörüdür. (4.6) numaralı eşitlikte verilen model indirgenmiş form olarak adlandırılabilir. İndirgenmiş formun parametreleri tüm i ve

t 'ler için tahmin edilir ve bu tahminler de (4.5) numaralı eşitlikte yerine yazılırsa β_{it} 'nin kısıtları sağlayan tahminleri hesaplanmış olur. Öte yandan indirgenmiş formda da ekstra bir belirlenme varsayımı yapılmadığı sürece gözlem ve parametre sayısı orijinal modelinki ile aynıdır. Bu tip bir varsayım Doran ve ark. (2006) tarafından γ_{it} 'nin değişmezlik varsayımı⁶ olarak adlandırılmakta olup

$$\gamma_{it} = \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.7)$$

şeklinde verilmektedir. Bu varsayım altında (4.6)'daki indirgenmiş form denklemi

$$w_{it} = Z_{it}\gamma + \varepsilon_{it}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.8)$$

olarak ifade edilebilir. Burada ε_{it} terimi klasik hata terimidir. Değişmezlik varsayımı altında γ_{it} 'ler γ 'ya eşit olduğundan ve (4.8)'de verilen kısıtlı indirgenmiş modelin hata terimleri EKK varsayımlarını sağladığından γ_{it} 'nin EKK tahmin edicisi

$$\hat{\gamma}_{it} = \hat{\gamma} = (Z'Z)^{-1}Z'w = S^{-1}Z'w \quad (4.9)$$

olarak verilebilir. Bu eşitlik için $Z = (Z'_{11} \quad Z'_{12} \quad \dots \quad Z'_{1T} \quad Z'_{21} \quad \dots \quad Z'_{IT})'$, $w = (w'_{11} \quad w'_{12} \quad \dots \quad w'_{1T} \quad w'_{21} \quad \dots \quad w'_{IT})'$ ve $S = Z'Z$ 'dir. Ayrıca burada Z matrisinin tam sütun ranklı olduğu, bir başka deyişle $rank(Z) = P$ olduğu varsayılmaktadır. Son olarak (4.9) denkleminde elde edilen $\hat{\gamma}_{it}$ tahmin edicisi, (4.3) denkleminde yerine yazılırsa β_{it} 'nin GKEKK tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_{it} = R_{it}^+ r_{it} + H_{it} \hat{\gamma}, \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.10)$$

olur. (4.10)'dan görüldüğü üzere GKEKK tahmin edicisi sadece γ_{it} 'nin gözlemlere göre sabit olmasını gerektirmekle birlikte; R_{it}^+ , r_{it} ve H_{it} gözlemlere bağlı olarak değiştiğinden $\hat{\beta}_{it}$ için böyle bir sınırlama getirmemektedir. Doran ve ark.'nda (2006) değişmezlik varsayımı sağlandığında (4.10)'da verilen GKEKK tahmin edicisinin β_{it} için BLUE olduğu belirtilmektedir. Bu tahmin edici tüm i ve t 'ler için $R_{it} = R$ ve $r_{it} = r$ olduğunda kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisine dönüştüğünden genelleştirilmiş kısıtlı en küçük kareler tahmin edicisi olarak adlandırılmıştır.

GKEKK tahmin edicide γ_{it} sabit tutulurken β_{it} 'nin gözlemlere göre farklılık göstermesine izin verilmektedir. Ayrıca kısıtlar modele tahmin aşamasından önce doğrudan uygulanmaktadır. Öte yandan GKEKK tahmin edicisi EKK yöntemine

⁶ Her ne kadar GKEKK tahmin edicisi γ_{it} 'nin değişmezliğini gerektirmese de bu tip bir varsayım modele basitlik sağlamak açısından kullanılabilir. Doran ve ark. (2006) γ_{it} 'nin zamana göre belirli yapılarda değiştiği durum için de GKEKK tahmin edicinin tanımlanabileceğini belirtmektedir.

dayanan bir tahmin edici olduğundan, $\mathbf{Z}$ matrisinin tam sütun ranklı olmasını gerektirir. Veride çoklu iç ilişki olduğunda bu varsayım çığnenebilir. Özel olarak tam çoklu iç ilişki durumunda $|\mathbf{Z}'\mathbf{Z}| = 0$ olacağından bu tahmin edici kullanılarak tahminler hesaplanamaz. Tama yakın çoklu iç ilişkide⁷ $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ matrisinin determinantı sıfıra yakın olacağından tahminleri hesaplamak mümkün olur. Ancak bu durum tahmin edicinin bazı istenmeyen özelliklere sahip olmasına yol açacaktır. GKEKK tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisinin elemanları olması gerekenden büyük çıkacak ve bunun sonucunda da parametrelerle ilgili hipotez testlerinde ikinci tip hata olasılıkları büyüyecektir. Ayrıca çoklu belirleme katsayısı olan R^2 büyük olmakla birlikte parametrelerin tümü için yapılacak F testi anlamsız çıkabilecektir.

EKK veya EKK tabanlı tahmin edicilerin bu eksikliği ridge regresyon tahmin edici kullanılarak giderilebilir. Bu düşünce, yukarıda özetlenen GKEKK tahmin ediciye de uygulanarak çoklu iç ilişkinin etkisi azaltılabilir. Bu noktadan hareketle GBKRM parametrelerinin tahmini için ridge regresyona dayanan bir tahmin edici tanımlanmış ve bu tahmin edici Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Ridge Regresyon (GBKRR) tahmin edici olarak adlandırılmıştır.

Bilindiği gibi RR tahmin edicide $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ matrisinin köşegen elemanlarına pozitif k sabiti eklenmektedir (Hoerl ve Kennard, 1970). GBKRM için çoklu iç ilişkiden etkilenecek matris $\mathbf{Z}$ olduğundan, (4.7)'deki değişmezlik varsayımı altında $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ 'nin köşegen elemanlarına $k > 0$ eklendiğinde ridge regresyon tahmin edicisi

$$\hat{\mathbf{y}}_{it}(k) = \hat{\mathbf{y}}(k) = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I}_p)^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{w} = \mathbf{S}_k^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{w} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{S}_k = \mathbf{Z}'\mathbf{Z} + k\mathbf{I}_p = \mathbf{S} + k\mathbf{I}_p$ 'dir. $\mathbf{y}$ 'nin ridge regresyon tahmin edicisi (4.3) numaralı denklemde yerine yazılırsa β_{it} 'nin GBKRR tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_{it}(k) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \hat{\mathbf{y}}(k) , \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbf{y}_{it} = \mathbf{y}$ varsayımı sağlandığında GKEKK tahmin edicisi β_{it} için BLUE'dır. Öte yandan GBKRR tahmin edicisi bu parametre için yanlıdır. Bununla birlikte takip eden bölümde gösterildiği üzere uygun bir k değeri seçildiğinde GBKRR tahmin

⁷ Bundan sonraki kısımda çoklu iç ilişki ile tama yakın çoklu iç ilişki kastedilecektir.

edici HKO anlamında GKEKK tahmin ediciden daha iyi olmaktadır. $\boldsymbol{y}_{it} = \boldsymbol{y}$ varsayımının sağlanmadığı durum için HKO karşılaştırmaları da bir sonraki bölümde yapılmıştır. Varsayım sağlanmadığında her iki tahmin edici de yanlı olmakla birlikte yine uygun bir k değeri seçildiğinde ve ekstra bir kısıt daha sağlandığında GBKRR tahmin edicinin HKO anlamında GKEKK'den daha iyi olduğu gösterilmiştir.

4.2.1. Genelleştirilmiş Kısıtlı En Küçük Kareler ve Gözlemlere Bağlı Kısıtlı Ridge Regresyon Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması

Bu bölümde GKEKK ve GBKRR tahmin edicilerin HKO matrisleri karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmalar ilk olarak $\boldsymbol{y}_{it} = \boldsymbol{y}$ varsayımının sağlandığı durum için verilmiş, ardından bu varsayımın sağlanmadığı durum için de genelleştirilmiştir.

4.2.1.1. Değişmezlik Varsayımının Sağlandığı Durum

$\boldsymbol{\beta}_{it}$ 'nin GKEKK ve GBKRR tahmin edicileri elde edilirken $\boldsymbol{y}_{it}$ 'nin EKK ve ridge tahmin edicileri (4.5) numaralı denklemde yerine yazılmaktadır. GKEKK ve GBKRR tahmin edicileri $\boldsymbol{y}_{it}$ 'nin farklı tahmin edicilerine aynı doğrusal fonksiyonlar uygulanarak elde edildiğinden, GKEKK ve GBKRR tahmin edicilerini HKO anlamında karşılaştırmakla $\boldsymbol{y}_{it}$ 'nin tahmin edicilerini karşılaştırmak birbirine denktir. Bu bölümde değişmezlik varsayımının ($\boldsymbol{y}_{it} = \boldsymbol{y}$) sağlandığı durum için $\hat{\boldsymbol{y}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{y}}_{it}(k)$ 'nin beklenen değer vektörleri ile varyans-kovaryans ve HKO matrisleri elde edilmiştir. Bu sayede $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)$ için aynı vektör ve matrisler elde edilmiştir. Ardından $\hat{\boldsymbol{y}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{y}}_{it}(k)$ 'nin HKO matrisleri karşılaştırılmış ve bu sayede $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)$ de HKO anlamında karşılaştırılmış olacaktır.

$\hat{\boldsymbol{y}}_{it}$ 'nin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{y}}_{it}) &= E(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{S}^{-1}E(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{S}^{-1}E(\sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \boldsymbol{Z}'_{lm}\boldsymbol{w}_{lm}) \\ &= \boldsymbol{S}^{-1} \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \boldsymbol{Z}'_{lm}E(\boldsymbol{w}_{lm}) \end{aligned}$$

şeklinde. (4.2) varsayımı altında (4.6) numaralı modelden $E(\boldsymbol{w}_{lm}) = \boldsymbol{Z}_{lm}\boldsymbol{y}_{lm}$ yazılabilir. Bu sayede $\boldsymbol{S}_{lm} = \boldsymbol{Z}'_{lm}\boldsymbol{Z}_{lm}$ olmak üzere

$$E(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{Z}'_{lm} \mathbf{Z}_{lm} \mathbf{y}_{lm} = \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \mathbf{y}_{lm} \quad (4.13)$$

eşitliğine ulaşılabilir. $\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} = \mathbf{S}$ yazılabileceğinden, (4.7) numaralı eşitlikteki değişmezlik varsayımı sağlandığında $\mathbf{y}_{it}$ 'nin EKK tahmin edicisi

$$E(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \mathbf{y}_{lm} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{y} = \mathbf{y} \quad (4.14)$$

eşitliği gereği yansız olacaktır. Ayrıca $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon'_{11} \quad \varepsilon'_{12} \quad \cdots \quad \varepsilon'_{1T} \quad \varepsilon'_{21} \quad \cdots \quad \varepsilon'_{IT})'$ olmak üzere, bu tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi,

$$Cov(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = Cov(\mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{w}) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z}' Cov(\mathbf{w}) \mathbf{Z} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z}' Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{Z} \mathbf{S}^{-1}$$

şeklinde verilebilir. (4.2)'de verilen varsayımlar gereği $\boldsymbol{\varepsilon}$ 'un varyans-kovaryans matrisi $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{NIT}$ olduğundan

$$Cov(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{Z}' \sigma^2 \mathbf{I}_{NIT} \mathbf{Z} \mathbf{S}^{-1} = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} \quad (4.15)$$

elde edilir. Öte yandan $\hat{\mathbf{y}}_{it}$ yansız olduğundan HKO matrisi ile varyans-kovaryans matrisi birbirine eşit olur ve

$$MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = Cov(\hat{\mathbf{y}}_{it}) = \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} \quad (4.16)$$

yazılabilir.

$\mathbf{y}_{it}$ 'nin ridge tahmin edicisi olan $\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)$ 'nin beklenen değeri

$$E(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) = E(\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{w}) = \mathbf{S}_k^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \mathbf{y}_{lm} \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada da değişmezlik varsayımı altında,

$$E(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{y} \quad (4.18)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $k = 0$ olmadıkça $\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)$ 'nin $\mathbf{y}_{it}$ için yanlı olduğu söylenebilir. Bu tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) &= E(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) - \mathbf{y} = \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{y} = \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{S}_k \mathbf{y}) \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} (\mathbf{S} \mathbf{y} - \mathbf{S} \mathbf{y} - k \mathbf{y}) = -k \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak verilebilir. Varyans-kovaryans matrisi ise

$$Cov(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) = Cov(\mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{w}) = \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} \quad (4.20)$$

şeklindedir. (4.19) ve (4.20) numaralı denklemler aracılığıyla $\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)$ 'nin HKO matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) &= Cov(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) + Bias(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) Bias'(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} + k^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{y} \mathbf{y}' \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

olur.

Öte yandan $\boldsymbol{\gamma}_{it}$ 'nin herhangi bir tahmin edicisi $\boldsymbol{\gamma}_{it}^*$ olmak üzere, $\boldsymbol{\beta}_{it}$ 'nin $\boldsymbol{\gamma}_{it}^*$ kullanılarak elde edilen tahmin edicisi

$$\boldsymbol{\beta}_{it}^* = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \boldsymbol{\gamma}_{it}^*$$

şeklinde verilebilir. Dolayısıyla

$$E(\boldsymbol{\beta}_{it}^*) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} E(\boldsymbol{\gamma}_{it}^*) \quad (4.22)$$

ve

$$Cov(\boldsymbol{\beta}_{it}^*) = \mathbf{H}_{it} Cov(\boldsymbol{\gamma}_{it}^*) \mathbf{H}_{it} \quad (4.23)$$

elde edilebilir. Ayrıca

$$Bias(\boldsymbol{\beta}_{it}^*) = \mathbf{H}_{it} Bias(\boldsymbol{\gamma}_{it}^*) \quad (4.24)$$

olduğundan

$$MSE(\boldsymbol{\beta}_{it}^*) = \mathbf{H}_{it} MSE(\boldsymbol{\gamma}_{it}^*) \mathbf{H}_{it} \quad (4.25)$$

yazılabilir. (4.22), (4.23), (4.24) ve (4.25) numaralı eşitliklerde $\boldsymbol{\gamma}_{it}^*$ yerine $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)$ yazıldığında, sırasıyla $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)$ için beklenen değer, varyans-kovaryans, yan ve HKO matrisleri elde edilebilir. Değişmezlik varsayımı altında $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}$ için bu matrisler

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} E(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}_{it} \quad (4.26)$$

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = \mathbf{H}_{it} Cov(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) \mathbf{H}_{it} = \sigma^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{it} \quad (4.27)$$

ve

$$MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = \mathbf{H}_{it} MSE(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) \mathbf{H}_{it} = \sigma^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{it} \quad (4.28)$$

şeklindedir. Aynı varsayım altında (4.18), (4.19), (4.20) ve (4.21) kullanıldığında $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)$ için ilgili matrisler

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} E(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \boldsymbol{\gamma} \quad (4.29)$$

$$Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{H}_{it} Bias(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) = -k \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma} \quad (4.30)$$

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{H}_{it} Cov(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) \mathbf{H}_{it} = \sigma^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_{it} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) &= \mathbf{H}_{it} MSE(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) \mathbf{H}_{it} \\ &= \sigma^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_{it} + k^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{H}_{it} \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak elde edilir. (4.26) ve (4.29) numaralı eşitliklerden görüldüğü üzere GKEKK tahmin edicisi değişmezlik varsayımı altında yansızken GBKRR tahmin edicisi

yanlıdır. Ayrıca (4.28) ve (4.32) numaralı eşitlikler gereği $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(k)$ 'yi HKO açısından karşılaştırmakla $\hat{\gamma}_{it}$ ve $\hat{\gamma}_{it}(k)$ 'yi karşılaştırmanın birbirine denk olduğu söylenebilir. Teorem 4.1'de bu tahmin edicilerin HKO karşılaştırması için gerek ve yeter koşul verilmektedir.

Teorem 4.1. $MSE(\hat{\gamma}_{it}) - MSE(\hat{\gamma}_{it}(k)) > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\gamma' \left(\frac{2}{k} I_p + S^{-1} \right)^{-1} \gamma < \sigma^2$ olmasıdır.

İspat. Değişmezlik varsayımı sağlandığında (4.16) ve (4.21) numaralı eşitliklerden $\hat{\gamma}_{it}$ ve $\hat{\gamma}_{it}(k)$ 'nin HKO matrisleri arasındaki fark

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\gamma}_{it}) - MSE(\hat{\gamma}_{it}(k)) &= \sigma^2 S^{-1} - \sigma^2 S_k^{-1} S S_k^{-1} - k^2 S_k^{-1} \gamma \gamma' S_k^{-1} \\ &= \sigma^2 S_k^{-1} (S_k S^{-1} S_k - S) S_k^{-1} - k^2 S_k^{-1} \gamma \gamma' S_k^{-1} \\ &= \sigma^2 S_k^{-1} \left[(S_k S^{-1} S_k - S) - \frac{k^2}{\sigma^2} \gamma \gamma' \right] S_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklinde ifade edilebilir. $\sigma^2 > 0$ ve $S_k^{-1} > 0$ olduğundan

$$MSE(\hat{\gamma}_{it}) - MSE(\hat{\gamma}_{it}(k)) > 0 \Leftrightarrow (S_k S^{-1} S_k - S) - \frac{k^2}{\sigma^2} \gamma \gamma' > 0 \quad (4.34)$$

yazılabilir. Ayrıca $S_k S^{-1} S_k = 2k I_p + k^2 S^{-1}$ olduğundan (4.34)'den

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\gamma}_{it}) - MSE(\hat{\gamma}_{it}(k)) > 0 &\Leftrightarrow 2k I_p + k^2 S^{-1} - \frac{k^2}{\sigma^2} \gamma \gamma' > 0 \\ &\equiv k^2 \left(\frac{2}{k} I_p + S^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \gamma \gamma' \right) > 0 \\ &\equiv \frac{2}{k} I_p + S^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \gamma \gamma' > 0 \\ &\equiv \sigma^2 \left(\frac{2}{k} I_p + S^{-1} \right) - \gamma \gamma' > 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilebilir. $\left(\frac{2}{k} I_p + S^{-1} \right) > 0$, γ sıfırdan farklı bir vektör ve $\sigma^2 > 0$ skaler olduğundan Lemma 2.5 kullanılırsa

$$MSE(\hat{\gamma}_{it}) - MSE(\hat{\gamma}_{it}(k)) > 0 \Leftrightarrow \gamma' \left(\frac{2}{k} I_p + S^{-1} \right)^{-1} \gamma < \sigma^2$$

yazılabilir.

4.2.1.2. Değişmezlik Varsayımının Sağlanmadığı Durum

Bir önceki bölümde verilen HKO karşılaştırmaları (4.7)'deki değişmezlik varsayımının sağlandığı durum için geçerlidir. Öte yandan γ_{it} 'lerden en az biri diğerlerinden farklı ise bu varsayım sağlanmayacak ve ilgili karşılaştırmalar geçerli olmayacaktır. Değişmezlik varsayımının sağlanmadığı durum için HKO karşılaştırmaları bu bölümde verilmiştir.

γ_{lm} 'lerin ($l = 1, 2, \dots, I$, $m = 1, 2, \dots, T$) tümü birbirine eşit olmadığında $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin beklenen değeri için (4.14) eşitliğini kullanmak doğru olmaz. Değişmezlik varsayımı sağlanmıyorsa $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin beklenen değeri (4.13)'deki gibi olacaktır. Bu durumda $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin yanı

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\gamma}_{it}) &= E(\hat{\gamma}_{it}) - \gamma_{it} = \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \gamma_{lm} - \gamma_{it} \\ &= \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} (\gamma_{lm} - \gamma_{it}) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

olup $\mathbf{A}_1 = \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} (\gamma_{lm} - \gamma_{it})$ 'dir. $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin yansız olabilmesi için tüm γ_{lm} 'lerin γ_{it} 'ye eşit olması; bir başka deyişle değişmezlik varsayımının sağlanması gerektiği görülmektedir. Bu yüzden değişmezlik varsayımı sağlanmadığında GKEKK tahmin edicisi yanlıdır. Öte yandan (4.15) numaralı eşitlik türetilirken değişmezlik varsayımı kullanılmadığından, $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin varyans-kovaryans matrisi (4.15)'deki gibi olmaya devam edecektir. Bu durumda $\hat{\gamma}_{it}$ 'nin HKO matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\gamma}_{it}) &= Cov(\hat{\gamma}_{it}) + Bias(\hat{\gamma}_{it})Bias'(\hat{\gamma}_{it}) \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1' \mathbf{S}^{-1} \end{aligned} \quad (4.37)$$

olur.

Değişmezlik varsayımının sağlanmaması GBKRR tahmin edicinin HKO matrisini de etkileyecektir. Bu durumda $\hat{\gamma}_{it}(k)$ 'nin beklenen değer vektörü (4.17)'deki gibi olacağından bu tahmin edicinin yanı

$$\begin{aligned} Bias(\hat{\gamma}_{it}(k)) &= E(\hat{\gamma}_{it}(k)) - \gamma_{it} = \mathbf{S}_k^{-1} \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \gamma_{lm} - \gamma_{it} \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} (\sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \gamma_{lm} - \mathbf{S}_k \gamma_{it}) \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} (\sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \gamma_{lm} - \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \gamma_{it} - k \gamma_{it}) \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} \{ \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} (\gamma_{lm} - \gamma_{it}) - k \gamma_{it} \} \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} \{ \sum_{l=1}^I \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} (\gamma_{lm} - \gamma_{it}) \} - k \mathbf{S}_k^{-1} \gamma_{it} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{A}_1 - k \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{it} \quad (4.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada da tüm $\boldsymbol{\gamma}_{lm}$ 'ler birbirine eşit olduğunda yanın (4.19) eşitliğine dönüşeceği söylenebilir. Ayrıca $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)$ 'nin varyans-kovaryans matrisinin de değişmezlik varsayımından etkilenmeyeceği ifade edilebilir. Bu durumda (4.20) ve (4.38) numaralı eşitlikler kullanıldığında, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)$ 'nin HKO matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) &= Cov(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) + Bias(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k))Bias'(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) \\ &= \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} + \mathbf{S}_k^{-1} \{ \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1' - k \boldsymbol{\gamma}_{it} \mathbf{A}_1' - k \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\gamma}_{it}' + k^2 \boldsymbol{\gamma}_{it} \boldsymbol{\gamma}_{it}' \} \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.39)$$

olur.

$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}$ ve $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)$ için elde edilen beklenen değer, yan ve HKO matrisleri (4.22), (4.23), (4.24) ve (4.25) numaralı eşitliklerde yerine yazıldığında GKEKK ve GBKRR tahmin edicilerin HKO matrisleri elde edilebilir. Değişmezlik varsayımı sağlanmadığında $\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}$ yanlı olduğundan GKEKK tahmin edici de yanlı olacaktır. Burada

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} E(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) = \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \boldsymbol{\gamma}_{lm}$$

ve

$$Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) = \mathbf{H}_{it} Bias(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) = \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \quad (4.40)$$

yazılabilir. GKEKK tahmin edicinin varyans-kovaryans matrisi de değişmezlik varsayımından etkilenmeyeceğinden (4.27)'deki eşitlik geçerliliğini sürdürecektir. O halde (4.27) ve (4.36) numaralı eşitlikler kullanıldığında GKEKK tahmin edicinin HKO matrisi

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}) &= \mathbf{H}_{it} MSE(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}) \mathbf{H}_{it} \\ &= \sigma^2 \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{it} + \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1' \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_{it} \end{aligned} \quad (4.41)$$

olur. Benzer şekilde değişmezlik varsayımı sağlanmadığında GBKRR tahmin edici için

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{r}_{it} + \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^T \mathbf{S}_{lm} \boldsymbol{\gamma}_{lm} \quad (4.42)$$

$$Bias(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{A}_1 - k \mathbf{H}_{it} \mathbf{S}_k^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{it} \quad (4.43)$$

$$MSE(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{it}(k)) = \mathbf{H}_{it} MSE(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{it}(k)) \mathbf{H}_{it} \quad (4.44)$$

yazılabilir.

Teorem 4.2’de değişmezlik varsayımının sağlanmaması durumunda $\hat{\mathbf{y}}_{it}$ ve $\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)$ tahmin edicilerin HKO matrisleri karşılaştırılmaktadır.

Teorem 4.2. $\mathbf{y}_{it}\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}'_{it} \geq 0$ olmak üzere $MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}) - MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) > 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{y}'_{it} \left(\frac{2}{k} \mathbf{I}_p + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{it} < \sigma^2$ olmasıdır.

İspat. (4.37) ve (4.39) numaralı eşitlikler kullanılarak $\hat{\mathbf{y}}_{it}$ ve $\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)$ ’nin HKO matrisleri farkı

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}) - MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) &= \sigma^2 \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} - \sigma^2 \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}_k^{-1} \\ &\quad - \mathbf{S}_k^{-1} \{ \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 - k \mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 - k \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it} + k^2 \mathbf{y}_{it} \mathbf{y}'_{it} \} \mathbf{S}_k^{-1} \\ &= \mathbf{S}_k^{-1} \{ \sigma^2 (\mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{S}) + \mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 + k \mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 \\ &\quad + k \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it} - k^2 \mathbf{y}_{it} \mathbf{y}'_{it} \} \mathbf{S}_k^{-1} \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathbf{S}_k^{-1}$ pd olduğundan $MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}) - MSE(\hat{\mathbf{y}}_{it}(k)) > 0$ için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \Delta &= \sigma^2 \left(\mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{S} - \frac{k^2}{\sigma^2} \mathbf{y}_{it} \mathbf{y}'_{it} \right) + \mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \\ &\quad + k \mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 + k \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it} > 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

olmasıdır. (4.46)’yı sadeleştirmek için

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \quad (4.47a)$$

$$\mathbf{B} = k \mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 + k \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it} \quad (4.47b)$$

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \left(\mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S}_k - \mathbf{S} - \frac{k^2}{\sigma^2} \mathbf{y}_{it} \mathbf{y}'_{it} \right) \quad (4.47c)$$

tanımlamaları yapıp $\Delta = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ yazılabilir. Δ ’nın elemanları tek tek incelenerek ispat tamamlanabilir. $\mathbf{A}$ ’nın psd olduğunu göstermek için (4.47a)’da $\mathbf{S}_k \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I}_p + k \mathbf{S}^{-1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{I}_p + k \mathbf{S}^{-1}) \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 (\mathbf{I}_p + k \mathbf{S}^{-1}) - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \\ &= \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 + k \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} + k \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 + k^2 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \\ &= k (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1) + k^2 \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \mathbf{S}^{-1} \end{aligned} \quad (4.48)$$

elde edilir. $k > 0$, $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}'_1 \geq 0$ ve $\mathbf{S}^{-1} > 0$ olduğundan $\mathbf{A} \geq 0$ yazılabilir. Δ ’nın ikinci elemanı olan $\mathbf{B}$ matrisi $\mathbf{B} = k (\mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it})$ şeklinde yazılabilir. Öte yandan $k > 0$ ve varsayım gereği $\mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}'_{it} \geq 0$ olduğundan $\mathbf{B} \geq 0$ olacaktır. Teorem

4.1’de $\mathbf{C} > 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $\mathbf{y}'_{it} \left(\frac{2}{k} \mathbf{I}_P + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{it} < \sigma^2$ olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla $\mathbf{y}_{it} \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{it} \geq 0$ varsayımı altında $\mathbf{\Delta} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} > 0$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{y}'_{it} \left(\frac{2}{k} \mathbf{I}_P + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{y}_{it} < \sigma^2$ olmasıdır. Bu durumda ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1 klasik doğrusal regresyon modeli için EKK ve RR tahmin edicilerin HKO karşılaştırmasına benzer bir sonuç vermektedir. Değişmezlik varsayımının sağlanmadığı Teorem 4.2’de ise ek bir varsayıma ihtiyaç duyulmaktadır. Bu iki teoremin sonucu olarak belirli şartlar sağlandığında GBKRR tahmin edicinin HKO anlamında GKEKK tahmin ediciden daha iyi olduğu söylenebilir. Öte yandan GKEKK ve GBKRR tahmin edicilerin temelinde EKK ve RR tahmin ediciler yattığından yanlılık parametresinin seçiminde RR tahmin edicide kullanılan yöntemlere başvurulabilir. GBKRR tahmin edicide (4.6) modeline RR yöntemi uygulandığından, bu model için $\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2 / \max(\hat{\alpha}_i^2)$ (Hoerl ve Kennard, 1970) ve $\hat{k}_{HKB} = P \hat{\sigma}^2 / \hat{\mathbf{y}}'_{it} \hat{\mathbf{y}}_{it}$ (Hoerl ve ark., 1975) yöntemleri kullanılabilir. Burada $\hat{\sigma}^2$ (4.6) modeline EKK uygulandığında elde edilen hata varyansı tahmini ve $\hat{\alpha}_i^2$ kanonik formdaki (4.6) modelinin parametre tahminleridir.

4.3. Monte Carlo Deneyi

Bu bölümde GKEKK ve GBKRR tahmin ediciler bir Monte Carlo simülasyon deneyi ile karşılaştırılmıştır. Gözlemlere bağlı kısıtlı regresyon modelinde açıklayıcı değişkenler iç ilişkili olacak şekilde türetilmiş ve bu durumda iki tahmin edici karşılaştırılmıştır. Simülasyonlarda ayrıca değişmezlik varsayımının sağlandığı ve sağlanmadığı durumlar da incelenmiştir. Monte Carlo deneyi McDonald ve Galarneau (1975) ile Doran ve ark.’nın (2003 ve 2006) çalışmaları göz önüne alınarak tasarlanmıştır. Simülasyon için MATLAB 7.0 kullanılmış olup tohum değeri 170904 alınmıştır.

Veri üretim sürecinde Doran ve ark.'nın (2003 ve 2006) ele aldığı translog üretim fonksiyonu kullanılmıştır. Üretim miktarı y , girdiler x_1 ve x_2 olmak üzere üretim fonksiyonu

$$\ln y_t = \beta_{0t} + \sum_{i=1}^2 \beta_{it} \ln x_{it} + 0,5 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_{ijt} \ln x_{it} \ln x_{jt} + \varepsilon_t \quad (4.49)$$

şeklinde tanımlanmıştır. β_{it} ve β_{ijt} model parametreleri olmak üzere $\beta_{12t} = \beta_{21t}$ 'dir. Hata terimleri ε_t ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan normal dağılımdan gelmektedir. Ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında (4.49) modelinin parametreleri

$$\sum_{i=1}^2 \beta_{it} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_{ijt} \ln x_{jt} = 1 \quad (4.50)$$

kısıtını sağlamalıdır. (4.49) modelinin parametreleri ve (4.50) kısıtı gözlemlere bağlı olduğundan kullanılan model GBKRM'dir. $N = 1, P = 6, J = 1$,

$$\mathbf{y}_{it} = (\ln y_t),$$

$$\mathbf{X}_{it} = (1 \quad \ln x_{1t} \quad \ln x_{2t} \quad 0,5(\ln x_{1t})^2 \quad \ln x_{1t} \ln x_{2t} \quad 0,5(\ln x_{2t})^2),$$

$$\boldsymbol{\beta}_{it} = (\beta_{0t} \quad \beta_{1t} \quad \beta_{2t} \quad \beta_{11t} \quad \beta_{12t} \quad \beta_{22t}),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{it} = (\varepsilon_t),$$

$$\mathbf{R}_{it} = (0 \quad 1 \quad 1 \quad \ln x_{1t} \quad \ln(x_{1t}x_{2t}) \quad \ln x_{2t}),$$

$$\mathbf{r}_{it} = (1)$$

olmak üzere (4.49) modeli (4.1)'deki; (4.50) kısıtları ise (4.3)'deki gibi yazılabilir. Lemma 4.1 kullanılarak bu model (4.6)'daki indirgenmiş formda da ifade edilebilir.

Veri üretim sürecinde (4.50) kısıtları altında (4.49) modelinin indirgenmiş formundan faydalanılmıştır. Açıklayıcı değişkenler

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1000 & 1000\kappa^2 \\ 1000\kappa^2 & 1000 \end{pmatrix} \right), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (4.51)$$

dağılımından türetilmiştir. (3.51)'deki eşitlikle üretilen açıklayıcı değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı κ^2 'ye eşittir. Önceki bölümlerde olduğu üzere κ için 0,7, 0,8, 0,9 ve 0,99 değerleri kullanılmıştır. Elde edilen $\mathbf{X}_{it}$ matrisleri denemeler boyunca sabit tutulmuştur. Ayrıca kısıt matrisleri kullanılarak $\mathbf{Z}_{it} = \mathbf{X}_{it}\mathbf{H}_{it}$ eşitliğinden (4.6) modelinin açıklayıcı değişkenleri de deneyin başında hesaplanarak denemeler boyunca sabit tutulmuştur. T için 20, 50 ve 100 değerleri kullanılmıştır.

Parametre vektörü β_{it} 'nin (4.50) kısıtını sağlaması için öncelikle γ_{it} vektörü türetilmiştir. Elde edilen γ_{it} 'ler (4.5)'de yerine yazılarak β_{it} 'ler hesaplanmıştır. Bu sayede üretilen β_{it} 'ler (4.50) kısıtını sağlamak zorundadır. γ_{it} 'ler üretilirken

$$\gamma_{it} = \delta \mathbf{j}_P + \rho \gamma_{it-1} + \mathbf{u}_{it}, |\rho| < 1 \quad (4.52)$$

eşitliği kullanılmıştır. Burada bağımsız $\mathbf{u}_{it}$ terimleri ortalaması sıfır, varyansı σ_u^2 olan normal dağılımdan gelmektedir. ρ ve σ_u^2 terimleri değişmezlik varsayımını etkilemektedir. ρ terimi $\sigma_u^2 = 0$ için γ_{it} 'nin ortalamasının artmasına yol açarken; $\sigma_u^2 \neq 0$ için β_{it} 'nin varyansının değişmesine neden olmaktadır. γ_{it} 'nin başlangıç değeri olarak $\gamma_{i0} = \delta \mathbf{j}_P / (1 - \rho)$ alınmıştır. γ_{it} 'ler deneyin başında üretilip denemeler boyunca sabit tutulmuştur. Bu sayede β_{it} parametrelerinin denemeden denemeye değişmemesi sağlanmıştır. Deney boyunca δ parametresi 0,65 alınmıştır. ρ için 0; 0,20 ve 0,80 değerleri kullanılmıştır. σ_u için kullanılan değerler 0 ve 0,08'dir. $\rho = \sigma_u = 0$ için değişmezlik varsayımı sağlanırken, bu parametreler sıfırdan uzaklaştıkça varsayımdaki sapma artmaktadır. Ayrıca $\sigma_u = 0$ için γ_{it} 'ler deterministik; $\sigma_u = 0,08$ için stokastik olmaktadır.

Her bir denemede bağımsız ε_t 'ler ($t = 1, 2, \dots, T$) sıfır ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılımdan türetilmiştir. σ için 0,1; 1 ve 10 değerleri kullanılmıştır. Deneyin başında üretilen $\mathbf{Z}_{it}$ ve γ_{it} ile her bir denemede üretilen ε_{it} kullanılarak $\mathbf{w}_{it}$ 'nin simülasyonu (4.6) eşitliğinden yapılmıştır. Daha sonra $\mathbf{y}_{it} = \mathbf{w}_{it} - \mathbf{X}_{it} \mathbf{R}_{it}^+ \mathbf{r}_{it}$ eşitliği kullanılarak $\mathbf{y}_{it}$ hesaplanmıştır. Böylece her bir denemede (4.49) modeli için (4.50) kısıtını sağlayan veriler üretilmiştir.

(4.49) modelinin parametreleri her bir denemede GKEKK ve GBKRR tahmin ediciler kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin aşamasında $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ ve $\mathbf{Z}'\mathbf{w}$ matrisleri korelasyon formunda olacak şekilde standartlaştırılmıştır. GBKRR için k 'nin seçiminde $\hat{k}_{HK} = \hat{\sigma}^2 / \max(\hat{\alpha}_i^2)$ ve $\hat{k}_{HKB} = P \hat{\sigma}^2 / \hat{\gamma}_{it}' \hat{\gamma}_{it}$ tahmin edicileri kullanılmıştır.

Tahmin edicileri karşılaştırmak için hko tahminlerine başvurulmuştur. Burada performans kriteri olarak

$$\widehat{rmse}(\hat{\theta}) = \frac{1}{MCN} \sum_{mci=1}^{MCN} \left[\frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sqrt{(\hat{\theta}_{it,mci} - \beta_{it})' (\hat{\theta}_{it,mci} - \beta_{it})} \right] \quad (4.53)$$

kullanılmıştır. (4.53) numaralı eşitlikte $\hat{\theta}_{it}$, β_{it} 'nin bir tahmin edicisi; $\hat{\theta}_{it,mci}$, Monte Carlo deneyin mci_inci denemesindeki $\hat{\theta}_{it}$ tahmini ve MCN deneme sayısıdır. (4.53)'de köşeli parantez içindeki ifade, mci_inci denemede NT gözleme ait parametre tahminlerinin karekök hko (khko) değerlerinin ortalamasıdır. Bu bölümde de deneme sayısı $MCN = 5.000$ alınmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.1 - Çizelge 4.6'da özetlenmektedir.

Simülasyon sonuçları yorumlanırken ilk olarak model parametrelerinin etkisi incelenmiştir. Ardından tahmin edicilerin performansları birbirleriyle karşılaştırılmıştır.

1. T 'nin etkisi: Parametreler (γ_{it}) deterministik bir yapıya sahipken ($\sigma_u = 0$) gözlem sayısının tahmin ediciler üzerindeki etkisi farklılık göstermemektedir. Bu durumda değişmezlik varsayımı sağlanmasa da ($\rho \neq 0$) T arttıkça tahmin edicilerin khko değerlerinin genelde azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla gözlem sayısı arttıkça tahmin edicilerin daha iyi performans sergiledikleri söylenebilir. Öte yandan parametreler stokastik bir yapı sergilerken ($\sigma_u \neq 0$) T 'nin $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ üzerindeki etkisi aynı iken $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ üzerindeki etkisi diğer ikisinden farklıdır. Bu durumda κ ve σ küçük olmadığı sürece T arttıkça $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ 'nin khko değerleri genelde düşmektedir. Ancak κ ve σ 'nın her ikisi de küçükken T artarken ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ 'nin khko değerleri önce artmakta, sonra azalış göstermektedir. $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ için κ ve σ küçük olmadığı sürece yine T artarken khko değeri azalmaktadır. Ancak κ ve σ 'nın her ikisi de küçük olduğunda $T = 20$ 'den $T = 50$ 'ye çıkıldığında khko değeri büyük bir düşüş göstermektedir. $T = 50$ 'den $T = 100$ 'e çıktığında khko değeri artmakla birlikte $T = 20$ 'dekinden daha düşük düzeylerde gerçekleşmektedir. Tüm bunlar bir arada düşünüldüğünde genel olarak gözlem sayısı arttıkça tahmin edicilerin hassasiyetinin arttığı söylenebilir.

Çizelge 4.1. $\rho = 0$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	11781,01	42,94	2857,60	5466,55	16,80	1196,59	3532,69	13,52	753,79
	1	117810,14	416,02	28575,96	54665,54	170,51	11965,84	35326,91	134,65	7537,85
	10	1178101,39	4252,29	285759,60	546655,36	1787,32	119658,33	353269,13	1409,03	75378,49
0,8	0,1	11186,59	47,76	2735,70	4942,82	19,25	1090,29	3063,73	22,77	656,02
	1	111865,89	484,56	27356,95	49428,23	207,23	10902,77	30637,31	162,11	6560,23
	10	1118658,93	4788,46	273569,50	494282,34	1986,89	109027,64	306373,15	1579,34	65602,30
0,9	0,1	11214,45	58,31	2760,60	4392,33	35,42	980,88	2601,51	22,74	565,00
	1	112144,47	625,49	27605,93	43923,31	276,07	9808,70	26015,11	230,94	5650,01
	10	1121444,73	5899,32	276059,26	439233,12	2755,57	98086,89	260151,08	2336,00	56500,07
0,99	0,1	12566,33	173,65	3225,99	3828,63	125,67	933,96	2308,58	122,10	576,73
	1	125663,34	1849,84	32259,84	38286,26	1605,06	9339,49	23085,84	1248,53	5767,27
	10	1256633,42	24644,56	322598,34	382862,58	12832,52	93394,84	230858,37	13352,61	57672,65

Çizelge 4.2. $\rho = 0,2$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	11781,01	41,46	2857,60	5466,55	16,22	1196,59	3532,69	13,21	753,79
	1	117810,14	415,62	28575,96	54665,54	168,89	11965,84	35326,91	134,63	7537,85
	10	1178101,39	4845,88	285759,60	546655,36	1701,77	119658,33	353269,13	1372,82	75378,49
0,8	0,1	11186,59	47,83	2735,70	4942,82	19,85	1090,29	3063,73	16,01	656,03
	1	111865,89	475,41	27356,95	49428,23	201,14	10902,77	30637,31	163,12	6560,23
	10	1118658,93	4808,40	273569,50	494282,34	1962,34	109027,64	306373,15	1586,86	65602,30
0,9	0,1	11214,45	59,60	2760,60	4392,33	27,14	980,88	2601,51	22,87	565,01
	1	112144,47	596,91	27605,93	43923,31	279,70	9808,70	26015,11	229,09	5650,01
	10	1121444,73	5887,78	276059,26	439233,12	2859,40	98086,90	260151,08	3702,13	56500,07
0,99	0,1	12566,33	171,14	3225,99	3828,63	123,97	933,96	2308,58	123,23	576,73
	1	125663,34	1737,44	32259,84	38286,26	1298,17	9339,49	23085,84	1414,61	5767,27
	10	1256633,42	21279,96	322598,34	382862,58	14450,06	93394,84	230858,37	13564,45	57672,65

Çizelge 4.3. $\rho = 0,8$ ve $\sigma_u = 0$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	11781,01	46,29	2857,62	5466,55	17,46	1196,66	3532,69	14,25	753,84
	1	117810,14	418,69	28575,97	54665,54	163,98	11965,87	35326,91	154,06	7537,85
	10	1178101,39	4195,02	285759,61	546655,36	1721,53	119658,36	353269,13	1309,55	75378,49
0,8	0,1	11186,59	54,07	2735,72	4942,82	20,78	1090,35	3063,73	17,07	656,07
	1	111865,89	475,45	27356,96	49428,23	193,49	10902,80	30637,31	162,79	6560,23
	10	1118658,93	4817,07	273569,51	494282,34	1994,65	109027,67	306373,15	1601,00	65602,30
0,9	0,1	11214,45	66,88	2760,62	4392,33	29,14	980,93	2601,51	25,03	565,05
	1	112144,47	587,06	27605,94	43923,31	277,67	9808,73	26015,11	226,74	5650,02
	10	1121444,73	5957,45	276059,27	439233,12	2766,47	98086,92	260151,08	2351,29	56500,08
0,99	0,1	12566,33	186,80	3226,00	3828,63	131,21	934,00	2308,58	130,78	576,76
	1	125663,34	1729,22	32259,85	38286,26	1556,78	9339,52	23085,84	1182,49	5767,28
	10	1256633,42	33468,50	322598,35	382862,58	14869,51	93394,87	230858,37	16053,79	57672,67

Çizelge 4.4. $\rho = 0$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	32981,55	378,14	2918,24	34327,38	14,70	8670,09	22668,03	34,39	5441,23
	1	120210,25	515,66	27456,65	61567,10	130,48	14283,65	39672,05	167,17	9004,35
	10	1178146,30	4368,33	285290,46	547632,06	1598,74	119850,45	353747,83	1362,28	75442,61
0,8	0,1	45439,13	16,60	6257,82	31929,09	67,23	8370,68	19167,77	48,82	4452,79
	1	116939,69	371,75	27676,76	56205,57	156,22	13174,85	34171,18	200,54	7742,44
	10	1118568,65	4715,03	273051,86	495155,20	1915,23	109249,44	306638,66	1662,64	65650,01
0,9	0,1	58740,47	31,65	11634,86	28564,37	100,68	7572,52	14409,34	52,52	2834,29
	1	120245,95	423,64	29833,70	50129,73	215,38	11890,02	28320,54	233,60	6327,37
	10	1121449,64	5807,76	275628,42	440438,84	2883,39	98322,33	260286,25	2281,83	56513,79
0,99	0,1	77337,89	493,29	19559,33	22951,39	196,62	5587,85	6910,39	346,99	969,08
	1	138485,46	1858,36	36853,84	42887,86	1332,54	10852,77	23583,20	1318,51	5694,17
	10	1256670,89	17812,97	322303,67	383711,44	12788,37	93628,81	230776,50	18518,53	57634,54

Çizelge 4.5. $\rho = 0,2$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	33644,61	359,87	3018,02	33087,56	6,82	7521,34	23444,67	37,67	6095,34
	1	120311,79	516,73	27495,77	61096,48	129,30	13960,32	39965,29	173,13	9191,23
	10	1178153,04	4281,12	285284,08	547574,42	1596,85	119812,75	353778,08	1348,98	75459,66
0,8	0,1	45783,75	13,71	6352,98	31125,45	9,05	7462,13	19453,11	69,54	4773,76
	1	117018,40	363,39	27707,41	55885,75	157,91	12935,08	34275,58	220,68	7827,50
	10	1118572,05	4875,22	273048,10	495114,59	1926,05	109220,43	306648,63	1636,19	65658,14
0,9	0,1	58354,30	25,91	11452,10	28277,10	70,71	6997,50	14003,74	52,61	2748,29
	1	120131,55	417,48	29768,02	50014,17	211,55	11757,25	28192,14	211,44	6290,98
	10	1121443,52	5892,09	275622,98	440420,90	2747,52	98304,41	260276,11	2305,18	56512,12
0,99	0,1	75127,21	419,85	18294,26	23398,65	166,49	5507,19	5555,49	291,48	866,75
	1	137729,19	2009,30	36446,77	43059,48	1362,67	10863,76	23385,43	1300,19	5623,31
	10	1256628,10	17749,39	322279,41	383735,72	12658,63	93627,33	230784,60	15074,18	57633,21

Çizelge 4.6. $\rho = 0,8$ ve $\sigma_u = 0,08$ için khko tahminleri

κ	σ	$T = 20$			$T = 50$			$T = 100$		
		$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$	$\hat{\beta}_{it}$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$	$\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$
0,7	0,1	15111,71	144,85	674,14	38671,17	32,48	6273,05	27982,05	82,34	6711,74
	1	118063,75	444,72	26206,48	63343,22	142,43	13896,64	41872,08	176,82	9746,75
	10	1178050,11	4274,79	285281,14	547847,05	1595,66	119807,29	353972,74	1473,61	75501,82
0,8	0,1	21211,66	25,36	1280,70	39473,34	35,87	7680,89	25788,85	63,04	6735,78
	1	112794,78	417,33	25435,25	59534,57	162,91	13622,72	36961,35	211,89	8832,99
	10	1118477,84	4772,29	273027,11	495573,52	1956,87	109305,69	306910,83	1630,54	65744,61
0,9	0,1	30235,47	37,77	2588,78	40292,78	44,75	9621,85	22192,28	38,81	5899,50
	1	114002,79	487,04	26343,52	55669,18	293,20	13542,26	31462,45	168,65	7636,13
	10	1121210,09	6400,21	275485,59	441262,81	2646,54	98532,29	260552,20	2265,62	56622,67
0,99	0,1	44666,29	532,63	5579,11	42238,17	363,61	13270,96	16408,03	297,32	3438,87
	1	129664,94	1803,20	32019,13	52702,82	1383,36	14758,09	26382,03	1241,72	6778,93
	10	1256280,30	18290,42	322034,76	385048,83	12745,13	94148,64	230868,27	25376,95	57717,50

2. κ 'nın etkisi: κ parametresi x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki ilişkiyi kontrol etmek amacıyla modele eklenmiştir. κ arttıkça bu değişkenler arasındaki ilişki de artacaktır. Bu durumun çoklu iç ilişkiyi de arttırması beklenmektedir. Ancak $\mathbf{X}_{it} = (1 \quad \ln x_{1t} \quad \ln x_{2t} \quad 0,5(\ln x_{1t})^2 \quad \ln x_{1t} \ln x_{2t} \quad 0,5(\ln x_{2t})^2)$ olmak üzere parametrelerin tahmininde $\mathbf{Z}_{it} = \mathbf{X}_{it} \mathbf{H}_{it}$ matrisinden faydalanılmaktadır. $\mathbf{X}$ matrisi x_1 ve x_2 değişkenlerinin logaritmik dönüşümlerinden meydana gelmekte bununla birlikte parametrelerin tahmininde $\mathbf{Z}_{it}$ matrisi kullanılmaktadır. Dolayısıyla her ne kadar κ arttıkça x_1 ve x_2 değişkenleri arasındaki korelasyon artsa da bu durumun $\mathbf{Z}$ matrisinin koşul sayısını her zaman arttıramayabileceği yapılan incelemelerde görülmüştür. Dolayısıyla κ 'nın artmasının çoklu iç ilişkinin değil, sadece x değişkenleri arasındaki ilişkinin arttığı anlamına geldiğine dikkat edilmelidir. Bu yüzden κ arttıkça khko değerlerinin daima artmayabileceği söylenebilir. Parametreler deterministikken her ne kadar κ arttıkça khko değerleri düzenli bir artış gösterse de parametreler stokastikken özellikle T büyüdüğünde bu yapı bozulmaktadır. Parametreler stokastikken küçük T değerleri için κ arttıkça $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ 'nin khko değerleri de artmaktadır. T değeri büyükken κ arttıkça bu tahmin edicilerin khko değerlerinin azaldığı görülebilmekle birlikte, değişmezlik varsayımından uzaklaşıldıkça (ρ ve σ_u) büyüdükçe ancak $T = 100$ için khko değerleri azalabilmektedir. $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ için parametreler deterministik olmasa bile κ arttıkça genel olarak khko değerlerinin arttığı görülmektedir.
3. σ 'nın etkisi: HKO matrisleri σ^2 ile orantılı olduğundan khko değerlerinin de σ ile orantılı olması beklenmektedir. Çizelge 4.1 - Çizelge 4.6 incelendiğinde hata terimlerinin varyansı artarken genel olarak khko değerlerinin de aynı oranda arttığı görülmektedir. Dolayısıyla hata varyansı büyüdükçe tahmin edicilerin performansı düşmektedir.
4. ρ ve σ_u 'nın etkisi: Bu ikili parametrelerin (γ_{it}) değişmezlik varsayımını sağlayıp ($\rho = \sigma_u = 0$) sağlamamasını ve sağlamıyorlarsa deterministik ($\rho \neq 0, \sigma_u = 0$) veya stokastik ($\rho = 0, \sigma_u \neq 0$) olmasını belirlemektedir.

Parametreler deterministik bir yapı sergilerken ρ 'nun artması $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ 'nin khko değerlerini etkilememektedir.⁸ Ancak $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ tahmin edicinin khko değerleri ρ 'ya göre farklılık göstermektedir. κ ve σ büyükken ρ artarken tahmin edicinin khko değeri genellikle artmaktadır. Ancak κ ve σ büyük değilken khko değerlerinde ρ 'ya bağlı belirgin bir yapı görülmemektedir. Bu durumda $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ 'nin değişmezlik varsayımının deterministik olarak bozulmasından etkilenmediği, $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ 'nin ise ancak değişkenler arası ilişki ve hata varyansı büyükken olumsuz etkilendiği söylenebilir. Değişmezlik varsayımının stokastik olarak bozulmasının tahmin ediciler üzerindeki etkisi daha farklıdır. $\hat{\beta}_{it}$ ve $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HKB})$ için hata varyansı küçükken σ_u 'nun artması khko değerlerini büyük ölçüde arttırmaktayken, hata varyansı büyük olduğunda σ_u 'nun khko üzerinde önemli bir etkisi görülmemektedir. $\hat{\beta}_{it}(\hat{k}_{HK})$ için de benzer bir durum söz konusudur. Bu tahmin edicide de hata varyansı küçükken σ_u 'nun artması khko değerlerini büyük ölçüde arttırmaktadır. Ancak T küçükken bu belirgin etki bozulabilmektedir. Hata varyansı büyükken diğer iki tahmin edicide olduğu gibi σ_u 'nun khko üzerinde önemli bir etkisi tespit edilememiştir. Dolayısıyla değişmezlik varsayımının deterministik yönden bozulmasının khko değerlerini çok fazla etkilemediği söylenebilir. Stokastik bozulmalar için hata varyansı küçük olmadıkça benzer durum söz konusu iken hata varyansı büyüdükçe khko değerleri olumsuz yönde etkilenmektedir.

5. Tahmin edicilerin karşılaştırılması: Yapılan simülasyonlarda tüm parametreler için GKEKK tahmin edicinin khko anlamında GBKRR tahmin edicinin gerisinde kaldığı görülmektedir. Bu durum seçilen k değerleri için Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'nin genellikle sağlanacağı anlamına gelmektedir. Öte yandan GBKRR tahmin edici için k seçme yöntemleri birbirleriyle karşılaştırıldığında seçilen parametreler için $\hat{k}_{HK}$ 'nin $\hat{k}_{HKB}$ 'den daima daha

⁸ Çizelge 4.1-Çizelge 4.6'da iki ondalık basamak kullanılmıştır. Ondalık basamak sayısı ikiden fazla iken ρ arttıkça bu tahmin edicilerin khko değerlerinin farklılık gösterdiği tespit edilmiştir.

iyi olduğu görülmektedir. Dolayısıyla GBKRR tahmin edici için uygulamada k değeri belirlenirken $\hat{k}_{HK}$ 'nin kullanılması daha uygun olacaktır.

4.4. Talep Denklemi Tahmini

Alston ve Chalfant (1991) 1977:I–1988:IV dönemi için Avustralya'nın sığır, kuzu, domuz ve tavuk eti tüketimine ait talep denklemini tahmin etmiştir. Doran ve Rambaldi (1997) ise aynı veriye zamana bağlı iktisadi kısıtları eklemiştir. Bu sayede talep denklemi iktisat teorisinin öne sürdüğü kısıtları sağlamıştır. Aynı çalışmada ilgili modelin parametre tahminleri Kalman filtre yöntemiyle elde edilmiştir. Doran ve ark. (2006) ise bu modelin parametre tahminlerini GKEKK ile elde etmiştir. Bu çalışmada ilgili modelin parametreleri GBKRR ile tahmin edilecek ve sonuçlar karşılaştırılacaktır.

Talep denklemi için regresyon modeli

$$\ln q_{lt} = \beta_{l0} + \sum_{j=1}^4 \beta_{lj} \ln p_{jt} + \beta_{l5} \ln y_t + \varepsilon_{lt}, l = 1(1)4, t = 1(1)48 \quad (4.54)$$

şeklinde dir. Burada q_{lt} l _inci et türünün t anındaki kişi başı talebi (kg); p_{lt} l _inci et türünün t anındaki ortalama perakende satış fiyatı (\$/kg) ve y_t t anındaki toplam et harcamaları (\$) olarak tanımlanmaktadır. Doran ve Rambaldi (1997) y_t değişkeninin geliri temsil ettiğini belirtmektedir. $l = 1$ sığır, $l = 2$ kuzu, $l = 3$ domuz ve $l = 4$ tavuk etini göstermektedir. 1977:I–1988:IV dönemine ait üç aylık veriler kullanıldığından $T = 48$ gözlemlik veride mevsimsellik bulunabilir. Bu yüzden tahmin aşamasında mevsimsellikten arındırılmış veriler kullanılmıştır. (4.54) numaralı eşitlikte verilen model ilgili malın tüketimini yine ilgili malın fiyatı, diğer malların fiyatı ve tüketicinin geliri ile açıkladığından tipik bir talep denklemidir. Modelde kısmi türev alındığında

$$\beta_{lj} = \frac{dq_l/q_l}{dp_j/p_j}, l = 1(1)4, j = 1(1)4 \quad (4.55)$$

elde edilir. Dolayısıyla $j = l$ için β_{ll} katsayısı l _inci mala ait talebin fiyat esnekliği olup ilgili malın fiyatındaki yüzde değişime karşılık talebinde meydana gelen yüzde değişmeyi gösterir. Talep kanunu gereğince $\beta_{ll} < 0$ olması beklenir. Öte yandan β_{ll} 'nin mutlak değerine göre bir malın esnekliği

- $|\beta_{ll}| = 1$ ise birim esnek
- $|\beta_{ll}| > 1$ ise esnek talep
- $|\beta_{ll}| < 1$ ise esnek olmayan talep

şeklinde sınıflandırılabilir. Ayrıca $j \neq l$ için β_{lj} katsayısı j _inci malın fiyatındaki yüzde değişmeye karşılık l _inci malın talebindeki yüzde değişimi gösterdiğinden l _inci malın j _inci mala göre çapraz talep esnekliği olarak adlandırılır. Çapraz talep esnekliği sıfır çıkarsa iki mal arasında bir ilişki olmadığı söylenebilir.

Bu model için iktisat teorisinin getirdiği kısıtlar

$$\sum_{l=1}^4 w_{lt} \beta_{l5} = 1 \quad (4.56a)$$

$$\frac{\beta_{lm}}{w_{mt}} + \beta_{l5} = \frac{\beta_{ml}}{w_{lt}} + \beta_{m5} , \quad l = 1,2,3, \quad m = l + 1, \dots, 4 \quad (4.56b)$$

$$\sum_{m=1}^5 \beta_{lm} = 0 , \quad l = 1,2,3,4 \quad (4.56c)$$

şeklinde. (4.56a) numaralı kısıt Engel kısıdı; (4.56b) numaralı kısıt Slutsky kısıdı ve (4.56c) numaralı kısıt homojenlik kısıdı olarak adlandırılır. Burada

$$w_{lt} = \frac{p_{lt} q_{lt}}{\sum_{m=1}^4 p_{mt} q_{mt}} \quad (4.57)$$

şeklinde tanımlanır. (4.56a) ve (4.56b) denklemleri w_{lt} 'yi içerdiğinden, bu iki kısıdın gözlemlere bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Kısıtlar gözlemlere bağlı olduğundan, parametreleri kısıtlı en küçük kareler yöntemi ile tahmin etmek mümkün değildir. Bu modelin parametrelerini tahmin etmek için GKEKK ya da GBKRR tahmin edicileri kullanılabilir.

(4.56c) numaralı kısıt gözlemlere bağlı olmayıp bu kısıt kullanılarak β_{l5} parametresi için $\beta_{l5} = -\sum_{m=1}^4 \beta_{lm}$ elde edilebilir. Bu eşitlik (4.54) numaralı denklemden yerine yazılırsa (4.58)'de verilen indirgenmiş model elde edilir.

$$\ln q_{lt} = \beta_{l0} + \sum_{j=1}^4 \beta_{lj} \ln p_{jt}^* + \varepsilon_{lt} , \quad l = 1(1)4, \quad t = 1(1)48 \quad (4.58)$$

Burada $p_{jt}^* = p_{jt}/y_t$ olup indirgenmiş model için Engel ve Slutsky kısıtları sırasıyla

$$\sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 w_{lt} \beta_{lm} = -1 \quad (4.59a)$$

$$\beta_{lm}(w_{mt}^{-1} - 1) - \sum_{n \neq m}^4 \beta_{ln} = \beta_{ml}(w_{lt}^{-1} - 1) - \sum_{n \neq l}^4 \beta_{mn} , \quad (4.59b)$$

$$l = 1,2,3, \quad m = l + 1, \dots, 4$$

şeklinde verilebilir.

(4.58) eşitliğindeki model parametreleri zamana göre değişken kabul edilirse bu model GBKRM haline gelmiş olur. İlgili model matris formunda

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{X}_t \boldsymbol{\beta}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1(1)48 \quad (4.60)$$

ile ifade edilebilir. Burada $\mathbf{y}_t = (\ln q_{1t} \quad \ln q_{2t} \quad \ln q_{3t} \quad \ln q_{4t})': 4 \times 1$ tipinde bağımlı değişken vektörü; $\mathbf{x}_t = (1 \quad \ln p_{1t}^* \quad \ln p_{2t}^* \quad \ln p_{3t}^* \quad \ln p_{4t}^*)': 5 \times 1$ olmak üzere, $\mathbf{X}_t = \mathbf{I}_4 \otimes \mathbf{x}_t: 4 \times 20$ tipinde açıklayıcı değişkenler matrisi ve $\otimes$ operatörü Kronocker çarpımıdır. $\boldsymbol{\beta}_{lt} = (\beta_{l0t} \quad \beta_{l1t} \quad \beta_{l2t} \quad \beta_{l3t} \quad \beta_{l4t})': 5 \times 1$ l _inci malın t anındaki esnekliklerini gösteren parametre vektörü olmak üzere $\boldsymbol{\beta}_t = (\boldsymbol{\beta}'_{1t} \quad \boldsymbol{\beta}'_{2t} \quad \boldsymbol{\beta}'_{3t} \quad \boldsymbol{\beta}'_{4t})': 20 \times 1$ modelin bilinmeyen parametre vektörüdür. Ayrıca $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t} \quad \varepsilon_{2t} \quad \varepsilon_{3t} \quad \varepsilon_{4t})': 4 \times 1$ tipindeki hata terimleridir.

(4.59a) ve (4.59b) eşitliklerinde kısıtlar ise matris formunda

$$\mathbf{R}_t \boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{r}_t, \quad t = 1(1)48 \quad (4.61)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{R}_t = \begin{pmatrix} 0 & w_{1t} & w_{1t} & w_{1t} & w_{1t} & 0 & w_{2t} & w_{2t} & w_{2t} & w_{2t} \\ 0 & -1 & w_{2t}^{-1} - 1 & -1 & -1 & 0 & 1 - w_{1t}^{-1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & w_{3t}^{-1} - 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & w_{4t}^{-1} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & w_{3t}^{-1} - 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & w_{4t}^{-1} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{3t} & w_{3t} & w_{3t} & w_{3t} & 0 & w_{4t} & w_{4t} & w_{4t} & w_{4t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - w_{1t}^{-1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - w_{1t}^{-1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 - w_{2t}^{-1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 - w_{2t}^{-1} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & w_{4t}^{-1} - 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - w_{3t}^{-1} & 1 \end{pmatrix}_{7 \times 20} \quad (4.62)$$

ve

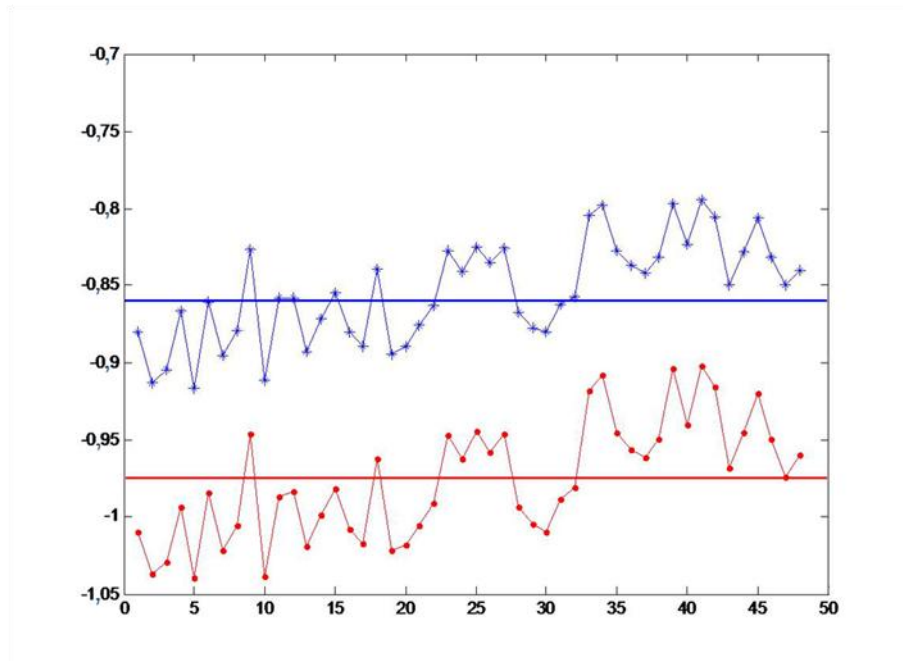
$$\mathbf{r}_t = (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)': 7 \times 1 \quad (4.63)$$

şeklinde. Görüldüğü gibi her bir t için parametreler üzerine konulan 7 kısıt olduğundan toplam kısıt sayısı $7 \times 48 = 336$ olup (4.58)'deki indirgenmiş modelde toplam 20 parametre bulunmaktadır. 20 parametrenin 336 eşitlik kısıtını sağlaması mümkün olmadığından bu kısıtlar için (4.60)'daki GBKRM'nin uygulanması gerekmektedir. Bu modelde parametreler de zamana göre değiştiğinden toplam

parametre sayısı $20 \times 48 = 960$ olacaktır. 960 parametre 336 eşitlik kısıtını sağlayabileceğinden (4.58)'e (4.60)'daki GBKRM uygulanabilir.

Tahmin edicilerin uygulamasına geçmeden önce verideki çoklu iç ilişki problemi incelenmiştir. GKEKK tahmin edici için tersi alınacak standartlaştırılmış S matrisinin koşul sayısı 503,57'dir. Koşul sayısı oldukça büyük olduğundan GKEKK ile elde edilecek tahminlerin çoklu iç ilişkiden etkileneceği söylenebilir. Öte yandan GBKRR tahmin edici için $k = 0,5$ alındığında S_k matrisinin koşul sayısı 3,86'ya düşmektedir. Dolayısıyla GBKRR tahmin edicinin GKEKK tahmin ediciye göre çoklu iç ilişkiden daha az etkileneceği ifade edilebilir.

Daha sonra hem GKEKK hem de GBKRR tahmin ediciler için parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerde her bir gözlem için farklı parametre tahminleri elde edilmektedir. Sığır eti için elde edilen fiyat esneklikleri tahminlerinin zamana göre grafikleri Şekil 4.1'de verilmektedir. Yıldızlı grafik GBKRR, noktalı grafik GKEKK tahminlerini göstermektedir. Grafikteki yatay çizgiler ise tahminlerin ortalamalarını belirtmektedir.

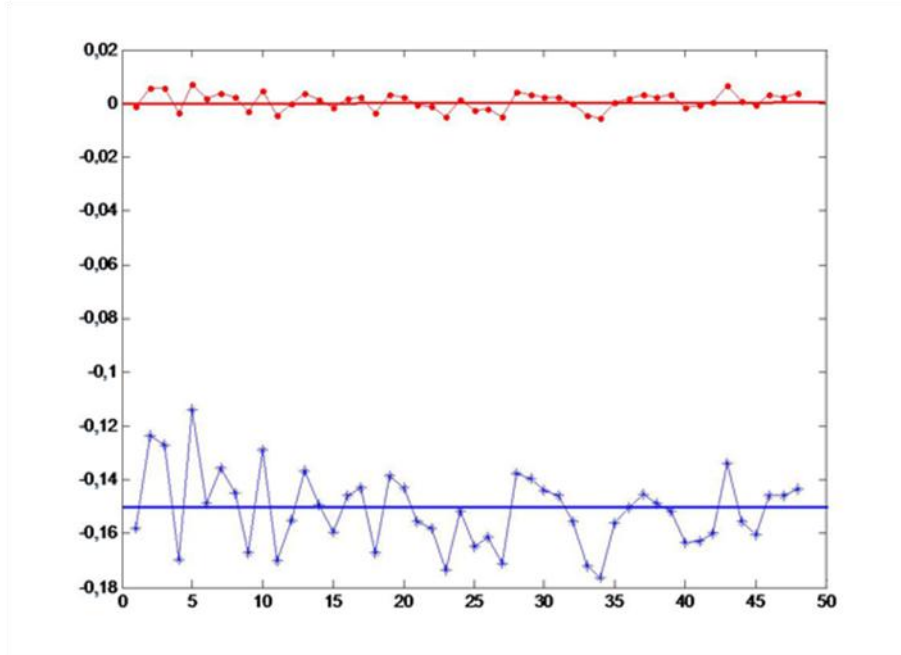


Şekil 4.1. Sığır eti talep esnekliği

Yıldızlı grafik GBKRR, noktalı grafik GKEKK tahminlerini, yatay çizgiler ise tahminlerin ortalamalarını göstermektedir.

Şekil 4.1’de görüleceği üzere sığır eti talep esneklikleri her iki tahmin edici için benzer bir yapı göstermektedir. Her iki tahmin edicide de talep esneklikleri zamanla artmakta ancak genel olarak kendi ortalamaları civarında seyretilmektedir. Her ne kadar grafikler yapı olarak birbirlerine benzeseler de esnekliklerin aldığı değerlerin birbirlerinden farklı olduğu dikkat çekmektedir. GKEKK ile elde edilen esneklikler daha geniş bir aralıktayken, GBKRR ile elde edilen esneklikler birbirlerine daha yakın değer almaktadır. Bu durum GKEKK tahminlerinin varyansının daha büyük olduğunu göstermektedir. GKEKK için esneklik tahminleri $-1,039$ ile $-0,902$ arasında yer almakta ve 33 gözlem için esneklikler mutlak değerce 1’den büyük çıkmaktadır. Bu durumda GKEKK tahminlerine göre sığır etinin 33 dönem için esnek bir talebe, kalan 15 dönem için esnek olmayan talebe sahip olduğu söylenebilir. Talebin esnek olduğu dönem genellikle 1982:II (21. gözlem) ve öncesinde yer almaktadır. GKEKK tahminlerine göre 1982:II’den sonra sadece iki gözlem (1984:I ve 1984:II) için esnek talep görülürken diğer gözlemlerde talep esnek değildir. GBKRR tahminlerine göre durum farklıdır. Bu tahminler $-0,917$ ile $-0,794$ arasında yer aldığından GBKRR tahminlerine göre sığır eti talebi incelenen dönemde esnek değildir.

Sığır eti talebinin kuzu eti fiyatına göre çapraz esneklikleri Şekil 4.2’de verilmektedir. Bu esneklikler de her iki tahmin edici için paralel bir seyir göstermektedir. Çapraz esneklikler genel olarak ortalama etrafında rassal bir yapıya sahiptir. Sığır eti fiyat esnekliklerinde GKEKK tahminleri daha büyük varyansa sahipken, çapraz esnekliklerde GBKRR’un varyansının daha büyük olduğu göze çarpmaktadır. GKEKK için çapraz esneklik tahminleri $-0,005$ ile $0,007$ arasındayken, GBKRR için $-0,176$ ile $-0,114$ arasındadır. GKEKK tahminleri sıfıra çok yakın olduğundan, bu tahmin ediciye göre sığır ve kuzu etlerinin ilişkisiz mallar olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.2. Sığır eti talebinin kuzu eti fiyatına göre çapraz talep esnekliği
Yıldızlı grafik GBKRR, noktalı grafik GKEKK tahminlerini, yatay çizgiler ise tahminlerin ortalamalarını göstermektedir.

Benzer grafikler diğer et ürünleri ve çapraz talep esneklikleri için de çizilebilir. Bu sonuçları özetlemek amacıyla her bir katsayı için ilgili parametre tahminlerinin 48 gözlem için ortalaması alınmıştır. Bu sayede elde edilen ortalama esneklikler ve bu esnekliklerin standart hataları Çizelge 4.7’de verilmektedir.

Çizelge 4.7. Alston ve Chalfant (1991) verisi için parametre tahminleri

	GKEKK				GBKRR ($k = 0,5$)			
	Sığır	Kuzu	Domuz	Tavuk	Sığır	Kuzu	Domuz	Tavuk
Sabit	-0,653 (0,0019)	-1,786 (0,0097)	-1,689 (0,0090)	-2,034 (0,0128)	-1,539 (0,0004)	-0,717 (0,0004)	-0,983 (0,0006)	-0,689 (0,0004)
Sığır	-0,976 (0,0010)	0,018 (0,0023)	-0,032 (0,0023)	-0,049 (0,0023)	-0,854 (0,0004)	-0,205 (0,0007)	-0,183 (0,0007)	-0,064 (0,0008)
Kuzu	0,001 (0,0006)	-1,004 (0,0034)	-0,034 (0,0019)	0,049 (0,0018)	-0,151 (0,0002)	-0,297 (0,0006)	-0,115 (0,0004)	-0,034 (0,0006)
Domuz	-0,011 (0,0008)	-0,035 (0,0027)	-0,955 (0,0036)	0,010 (0,0029)	-0,171 (0,0003)	-0,133 (0,0006)	-0,301 (0,0007)	-0,197 (0,0006)
Tavuk	-0,012 (0,0004)	0,047 (0,0016)	0,005 (0,0020)	-1,012 (0,0033)	-0,094 (0,0002)	-0,026 (0,0005)	-0,141 (0,0004)	-0,389 (0,0007)
Gelir	0,998 (0,0006)	0,974 (0,0031)	1,015 (0,0028)	1,002 (0,0038)	1,270 (0,0001)	0,661 (0,0002)	0,740 (0,0002)	0,685 (0,0002)

*: Parantez içindeki değerler standart hatalardır.

Çizelge 4.7 incelendiğinde her iki tahmin edici için de et ürünlerinin kendi ortalama esneklikleri beklendiği gibi negatif işaretli çıkmıştır. Ancak GBKRR için ortalama çapraz talep esnekliklerinin tamamı negatif işaretliken, GKEKK için bazı tahminlerin ortalamaları pozitif işaretlidir. Örneğin sığır eti talebinin kuzu eti fiyatına göre ortalama çapraz talep esnekliği 0,001, benzer şekilde kuzu eti talebinin sığır eti fiyatına göre ortalama çapraz talep esnekliği 0,018'dir. Çapraz esnekliklerin iktisadi olarak pozitif çıkması beklenmektedir. Tahminlerin beklentinin aksine genellikle negatif çıktığı görülmektedir. Bu sorun parametreler üzerine konulabilecek eşitsizlik kısıtları ile giderilebilir.

Çizelge 4.7'deki bir diğer sonuç ise ortalama esnekliklerin mutlak değerce birden küçük olmasıdır. Bu durumda tüm et ürünlerinin hem kendi hem de birbirlerine göre ortalama olarak esnek olmayan talebe sahip olduğu söylenebilir. Ayrıca et ürünlerinin ortalama gelir esneklikleri de beklendiği gibi pozitif işaretlidir. GKEKK'e göre domuz ve tavuk etinin ortalama gelir esnekliği 1'den büyükken, GBKRR için sadece sığır etinin ortalama gelir esnekliği 1'den büyüktür.

Çizelge 4.7'deki standart hatalar incelendiğinde GBKRR tahmin edicinin GKEKK'e göre çok daha düşük standart hatalara sahip olduğu görülmektedir. GKEKK tahminlerinin standart hataları, GBKRR standart hatalarının 2,23 katı ile 28,92 katı arasındadır.

Son olarak tahmin edicilerin hko değerleri karşılaştırılmıştır. Teorem 4.1'de gösterildiği üzere GBKRR tahmin edicisinin GKEKK tahmin ediciden HKO anlamında daha iyi olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{y}' \left(\frac{2}{k} \mathbf{I}_p + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{y} < \sigma^2$ olmasıdır. İncelenen veri seti için $\hat{\sigma}^2 = 0,00009$ gibi çok düşük bir değere sahiptir. $k = 0,5$ değeri; $\mathbf{y}'$ 'nin (4.9) denkleminde verilen EKK tahmini ve $\mathbf{S}$ matrisi yerlerine yazıldığında $\hat{\mathbf{y}}' \left(\frac{2}{0,5} \mathbf{I}_p + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{y}} = 1,8999$ elde edilir. Bu değer $\hat{\sigma}^2$ 'dan büyük olduğundan GKEKK tahmin edicisinin HKO anlamında GBKRR tahmin ediciden daha iyi çıkması beklenir. Gerçekten de parametre tahminlerinin skaler hko ortalamaları GKEKK için 0,0010 iken GBKRR için 0,2895'dir. Bu durumda seçilen k değeri için GBKRR tahmin edicinin GKEKK'den hko anlamında daha iyi olmadığı söylenebilir. Bu durum $\hat{\sigma}^2$ 'nin çok küçük olması ile açıklanabilir. $\hat{\sigma}^2$ küçük

olduğundan seçilen $k = 0,5$ değeri için $\mathbf{y}' \left(\frac{2}{k} \mathbf{I}_P + \mathbf{S}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{y} < \sigma^2$ koşulu sağlanamamaktadır. Yapılan denemelerde ilgili koşulun sağlanabilmesi için k değerinin 0,00001 veya daha küçük alınması gerektiği görülmüştür. Bu durumda da k değeri çok küçük olduğundan GBKRR ve GKEKK tahminleri hemen hemen eşit çıkmaktadır. Ayrıca seçilen bu k değeri için $\mathbf{S}_k$ matrisinin koşul sayısı 431,07 olup, çoklu iç ilişki probleminin devam ettiği de görülmektedir. Dolayısıyla h_{ko} 'nu düşürmek için k 'nin bu şekilde seçilmesinin uygun olmadığı söylenebilir. $k = 0,5$ değeri standart hatalar açısından iyi sonuç vermektedir. Benzer durum $\hat{k}_{HK}$ ve $\hat{k}_{HKB}$ için de geçerlidir. $\hat{\sigma}^2$ tahmini çok küçük olduğundan $\hat{k}_{HK} = 4,35 \times 10^{-7}$ ve $\hat{k}_{HKB} = 8,9310^{-8}$ değerleri elde edilmiştir. Bu değerler de sıfıra çok yakın olduğundan çoklu iç ilişki problemini çözmekten uzaktırlar.

4.5. Sonuçlar

Bu bölümde GBKRM için ridge regresyona dayanan bir tahmin edici tanımlanmıştır. Tanımlanan bu tahmin edici GBKRR tahmin edici olarak adlandırılmış ve EKK temelli GKEKK tahmin edici ile HKO anlamında karşılaştırılmıştır. GBKRR tahmin edicinin GKEKK tahmin ediciden HKO anlamında daha iyi olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Ayrıca adı geçen tahmin ediciler bir Monte Carlo deney aracılığıyla karşılaştırılmıştır. Bu sayede çeşitli parametrelerin tahmin edicilerin performansı üzerindeki etkisi tespit edilmiştir. Simülasyon sonuçları kh_{ko} anlamında GBKRR tahmin edicinin GKEKK tahmin ediciden daha iyi olduğunu göstermiştir. Ayrıca GBKRR tahmin edici için iki farklı k seçme yöntemi de karşılaştırılmış ve $\hat{k}_{HK}$ 'nin $\hat{k}_{HKB}$ 'den daha iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Son olarak tahmin ediciler gerçek bir veri seti üzerinde karşılaştırılmıştır. Gerçek veri seti üzerinde yapılan incelemeler sonucunda eşitsizlik kısıtlı tahmin edicilerin kullanılması gündeme gelmiştir. Daha sonraki çalışmalarda GBKRM için eşitsizlik kısıtlı ridge regresyon tahmin edicinin tanımlanması planlanmaktadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Ekonometride karşılaşılabilecek üç probleme değinilmiştir. Bunlardan ilkinde zaman serisi verilerinde karşılaşılan otokorelasyon ve kesit verilerinde karşılaşılan değişen varyans problemi ele alınmıştır. Hata terimlerine ilişkin varsayımları bozan bu durum ile çoklu iç ilişkinin bir arada yer aldığı doğrusal regresyon modeli incelenmiştir. Bu modelde kullanılması önerilen mixed ve ridge tahmin edicilerin varyans-kovaryans ve HKO matrisleri karşılaştırılmıştır. Seçilen uygun bir k değeri için ridge tahmin edicinin GEKK ve mixed tahmin ediciden HKO anlamında daha iyi sonuçlar verebileceği gösterilmiştir. Ridge tahmin edici için ek bilgiyi de hesaba katan bir k seçme yöntemi önerilmiştir. Ayrıca teorik bulgular, yapılan bir simülasyon çalışmasıyla da desteklenmiştir. Simülasyon çalışmasında otokorelasyonlu hata terimleri kullanılmış ve çeşitli model parametreleri için tahmin edicilerin performansları karşılaştırılmıştır. İlgili sonuçlar ekonometrik bir örnek kullanılarak desteklenmiştir. Çalışmada önerilen k seçme yönteminin hem simülasyonlarda hem de ekonometrik örnek üzerinde tatmin edici sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Öte yandan bu çalışmadaki bulgular hata terimlerinin varyans-kovaryans matrisinin bilindiği durumlar için elde edilmiş olup, takip eden çalışmalarda bu matrisin bilinmediği durumlar için benzer karşılaştırmaların yapılması önerilmiştir.

İncelenen ikinci problemde parametrelere ait ön bilgi ve kısıtların varlığında kullanılabilecek alternatif tahmin ediciler üzerinde durulmuştur. Bu tahmin ediciler arasında KEKK, MRR ve KRR yer almaktadır. MRR ve KRR tahmin edicilerin çoklu iç ilişki durumunda çözüm olması beklenmektedir. Groß (2003a) tarafından tanımlanan KRR tahmin edicinin, HKO ve varyans-kovaryans matrisleri açısından MRR ve RR tahmin edicilerle karşılaştırması verilmiştir. Teorik karşılaştırmalar, yapılan bir Monte Carlo çalışması ile desteklenmiştir. Simülasyon çalışması bu tahmin ediciler içinde tek bir iyi tahmin edici olmadığını, tahmin edicilerin performanslarının çeşitli parametrelerden etkilendiğini göstermiştir. Ancak genel olarak çoklu iç ilişkili modelde KRR tahmin edicinin hko anlamında öne çıktığı, bu tahmin ediciyi MRR tahmin edicinin takip ettiği belirlenmiştir. Ayrıca tahmin

edicilerin performansları gerçek bir veri seti üzerinde incelenmiştir. Bu veri setinde de KRR ve MRR tahmin edicilerin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Son problemde kısıtların gözlemlere bağlı olarak değiştiği GBKRM üzerinde durulmuştur. Bu model için ridge regresyona dayanan GBKRR tahmin edici tanımlanmıştır. Bu tahmin edici HKO anlamında GKEKK tahmin edici ile karşılaştırılmıştır. GBKRR tahmin edicinin GKEKK tahmin ediciden HKO anlamında daha iyi olması için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Diğer bölümlerde olduğu gibi tahmin edicilerin Monte Carlo karşılaştırması yapılmıştır. Monte Carlo sonuçları GBKRR tahmin edicinin khko anlamında GKEKK tahmin ediciden daha iyi olduğunu göstermiştir. GBKRR tahmin edici için farklı k seçme yöntemleri de karşılaştırılmış ve $\hat{k}_{HK}$ 'nin iyi sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Gerçek veri seti üzerindeki incelemeler sonucunda eşitsizlik kısıtlı tahmin edicilerin kullanılması gerektiği ortaya çıkmıştır. GBKRM için eşitsizlik kısıtlı ridge regresyon tahmin edicinin tanımlanması planlanmıştır.

KAYNAKLAR

- AITKEN, A.C., 1935. On Least Squares and Linear Combinations of Observations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 55: 42-48.
- AKDENİZ, F., ve EROL, H., 2003. Mean Squared Error Matrix Comparisons of Some Biased Estimators in Linear Regression. Communications in Statistics, Theory and Methods, 32: 2389-2413.
- ALSTON, J.M., ve CHALFANT, J.A., 1991. Effects of Functional Form on Test for Structural Change in Demand. Department of Agricultural Economics, University of California, Davis (Yayınlanmamış).
- BAYHAN, G.M., ve BAYHAN, M., 1998. Forecasting Using Autocorrelated Errors and Multicollinear Predictor Variables. Computers ind. Engng, 34(2): 413-421.
- BEATTIE, B.C., ve TAYLOR, C.R., 1985. The Econometrics of Production. Wiley, New York, 258s.
- BELSLEY, D.A., KUH, E., ve WELSCH, R.E., 2004. Regression Diagnostics, Identifying Influential Data and Sources of Collinearity. Wiley-Interscience, New Jersey, 292s.
- CLEMENTS, K.W., ve IZAN, H.Y., 1987. The Measurement of Inflation: A Stochastic Approach. Journal of Business and Economic Statistics, 5: 339-359.
- DHRYMES, P.J., 1974. Econometrics. Springer, New York, 592s.
- DORAN, H.E., O'DONNELL, C.J., ve RAMBALDI, A.N., 2003. Imposing Observation-Varying Equality Constraints Using Generalised Restricted Least Squares. University of Queensland, School of Economics, Discussion Paper Series; ISSN 1446 55232.
- _____, 2006. Theoretical and Empirical Properties of Generalised Restricted Least Squares (M. DUNGEY editör). ESAM 06 Econometric Society Australasian Meeting. Australasian Meeting of the Econometric Society ESAM 06, Alice Springs, Northern Territory, Australia, 1-38.

- DORAN, H.E., ve RAMBALDI, A.N., 1997. Applying Linear Time-Varying Constraints to Econometric Models: With an Application to Demand Systems. *Journal of Econometrics*, 79: 83-95.
- FAREBROTHER, R.W., 1976. Further Results on the Mean Square Error of Ridge Regression. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, 38(3): 248-250.
- GOLDBERGER, A.S., 1962. Best Linear Unbiased Prediction in the Generalized Regression Model. *Journal of the American Statistical Association*, 57: 369-375.
- GOSLING, B.J., HSU, J.J., ve PUTERMAN, M.L., 1982. Ridge Estimation in Regression Problems with Autocorrelated Errors. Working paper no. 810. Faculty of Commerce and Business Administration, University of British Columbia, Vancouver.
- GRAYBILL, F.A., 1983. *Matrices with Applications in Statistics*, 2nd ed. Wadsworth: Belmont CA, 461s.
- GRIFFITHS, W.E., HILL, R.C., ve JUDGE, G.C., 1993. *Learning and Practicing Econometrics*. John Wiley & Sons, New York, 896s.
- GROß, J., 2003a. Restricted Ridge Estimation. *Stat. Prob. Lett.*, 65: 57-64.
- GROß, J., 2003b. *Linear Regression*. Springer Verlag, New York, 406s.
- GRUBER, M.H.J., 1998. *Improving Efficiency by Shrinkage*. Marcel Dekker Inc., New York, 648s.
- GÜLER, H., ve KAÇIRANLAR, S., 2009. A Comparison of Mixed and Ridge Estimators of Linear Modes. *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 38: 368-401.
- HOERL, A.E., ve KENNARD R.W., 1970. Ridge Regression: Biased Estimation for Non-Orthogonal Problems. *Technometrics*, 12: 55-67.
- HOERL, A.E., ve KENNARD R.W., ve BALDWIN, K.F., 1975. Ridge Regression: Some Simulation. *Communications in Statistics*, 5: 105-123.
- JUDGE, G.C., GRIFFITHS, W.E., HILL, R.C., LÜTKEPOHL, H., ve LEE, T.C., 1985. *The Theory and Practice of Econometrics*, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1056s.

- JUDGE, G.C., HILL, R.C., GRIFFITHS, W.E., LÜTKEPOHL, H., ve LEE, T.C., 1988. Introduction to the Theory and Practice of Econometrics, 2nd ed. John Wiley & Sons, New York, 1064s.
- KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., AKDENİZ, F., 1998. Mean Squared Error Comparison of Modified Ridge Regression Estimator and the Restricted Ridge Regression Estimator. Communications in Statistics, Theory and Methods, 27: 131-138.
- KAÇIRANLAR, S., SAKALLIOĞLU, S., ÖZKALE, M.R., ve GÜLER, H., 2011. More on the Restricted Ridge Regression Estimation. Journal of Statistical Computation and Simulation, iFirst, 1-16.
- KIBRIA, B.M.G., 2003. Performance of Some New Ridge Regression Estimators. Communications in Statistics, Simulation and Computation, 32(2): 419-435.
- LEE, B.M.S., ve TRIVEDI, P.K., 1982. Error Misspecification and Properties of the Simple Ridge Estimator. Communications in Statistics, Theory and Methods, 11(14): 1615-1624.
- LIU, K., 2003. Using Liu-Type Estimator to Combat Collinearity. Communications in Statistics, Theory and Methods, 32: 1009-1020.
- MCDONALD, G.C., ve GALARNEAU, D.I., 1975. A Monte Carlo Evaluation of Some Ridge-Type Estimators. Journal of the American Statistical Association, 70: 407-416.
- MONTGOMERY, D.C., PECK, E.A., ve VINING, G.G., 2001. Introduction to Linear Regression Analysis, 3rd ed. John Wiley & Sons, New York, 672s.
- O'DONNELL, C.J., RAMBALDI, A.N., ve DORAN, H.E., 2001. Estimating Economic Relationships Subject to Firm- and Time- Varying Equality and Inequality Constraints. Journal of Applied Econometrics, 16:709-726.
- PLISKIN, J.L., 1987. A Ridge-Type Estimator and Good Prior Means. Communications in Statistics, Theory and Methods, 16: 3429-3437.
- RAO, C.R., ve TOUTENBURG, H., 1995. Linear Models-Least Squares and Alternatives. Springer Verlag, New York , 352s.

- SARKAR, N., 1992. A New Estimator Combining the Ridge Regression and the Restricted Least Squares Methods of Estimation. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 21: 1987-2000.
- SELVANATHAN, E.A., 1989. A Note on the Stochastic Approach to Index Numbers. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7: 471-474.
- SMITH, G., ve CAMPBELL, F., 1980. A Critique of Some Ridge Regression Methods. *Journal of the American Statistical Association*, 75: 74-81.
- SWINDEL, B.F., 1976. Good Estimators Based on Prior Information. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 5: 1065-1075.
- THEIL, H., 1963. On the use of Incomplete Prior Information in Regression Analysis. *Journal of the American Statistical Society*, 58: 401-414.
- _____, 1971. *Principles of Econometrics*. John Wiley & Sons, New York, 768s.
- THEIL, H., ve GOLDBERGER, A.S., 1961. On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics. *International Economic Review*, 2(1): 65-78.
- TOUTENBURG, H., 1982. *Prior Information in Linear Models*. John Wiley & Sons, New York, 226s.
- TRENKLER, G., 1984. On the Performance of Biased Estimators in the Linear Regression Model with Correlated or Heteroscedastic Errors. *Journal of Econometrics*, 25: 179-190.
- ZHONG, Z., ve YANG, H., 2007. Ridge Estimation to the Restricted Linear Model. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 36: 2099-2115.

ÖZGEÇMİŞ

19.08.1980’de Ankara’da doğdu. İlkokul, ortaokul ve liseyi bu şehirde bitirdikten sonra 1997 yılında Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümünde Lisans eğitimine başladı. 2001 yılında Bölüm Birincisi olarak bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Gazi Üniversitesinde İstatistik Yüksek Lisansına başladı. 2002 yılında Gazi Üniversitesi Ekonometri Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışma hayatına atıldı. 2002 yılında Ekonometri Yüksek Lisansına da kaydoldu. 2004 yılında Yrd. Doç. Dr. Ebru ÖZGÜR GÜLER ile evlendi. 2004 yılında İstatistik Yüksek Lisansını, 2005 yılında da Ekonometri Yüksek Lisansını tamamladı. 2005 yılında Ankara’dan ayrılarak Çukurova Üniversitesi Ekonometri Bölümüne Öğretim Görevlisi olarak atandı. 2005 yılında Çukurova Üniversitesi İstatistik Bölümünde Doktora eğitimine başladı. 2006 yılında kızı Elif Naz GÜLER dünyaya geldi.