

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİNİN

N -SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Esin AKSOY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos - 2010

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİNİN
 N -SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Esin AKSOY

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet BEKİR

Ağustos-2010

KABUL ve ONAY SAYFASI

Esin AKSOY' un YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin N-Soliton Çözümleri” başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../2010

Üye :

Üye :

Üye :

Fen Bilimleri Enstitüsün Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Atalay KÜÇÜKBURSA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

LİNEER OLMAYAN OLUŞUM DENKLEMLERİNİN N-SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Esin AKSOY

Matematik, Yüksek Lisans Tezi, 2010

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet BEKİR

ÖZET

Lineer olmayan denklemler fizik, kimya, biyoloji gibi birçok alanda kullanılan denklemlerdir. Uygulamalı matematik, bu denklemlerin çözümleri ve yeni çözüm yolları geliştirmekle ilgilenir. Bu çalışmada da lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözüm yollarından üstel fonksiyon yöntemi ele alınıp bu yöntemin farklı diferansiyel denklemlere uygulamaları yapılmıştır. Daha sonra üstel fonksiyon yöntemi yardımıyla lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin 1-soliton, 2-soliton, 3-soliton ve bunu daha da geliştirerek N -soliton çözümleri bulunmuştur. Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlere ve fark denklemlerine ilişkin bazı tanım ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde ise üstel fonksiyon yöntemi verilerek farklı KdV denklemlerine uygulamaları yapılmıştır. Daha sonra N -soliton çözümler için üstel fonksiyon yöntemi tanımlanarak bu yöntem ile KdV denkleminin 1-soliton, 2-soliton, 3-soliton ve N -soliton çözümleri bulunmuştur.

Üçüncü bölümde ilk olarak lineer olmayan diferansiyel fark denklemleri için üstel fonksiyon yöntemi tanımlanarak lineer olmayan diferansiyel fark denklemlerinin 1-soliton çözümleri bulunmuştur. Daha sonra ise bu denklemlerin üstel fonksiyon yöntemiyle N -soliton çözümleri elde edilmiştir.

Son bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuç ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel denklemler, Kısmi türevli denklemler, Diferansiyel fark denklemleri, Oluşum denklemleri, Tam çözümler, Üstel fonksiyon yöntemi, N-soliton çözüm.

NONLINEAR EVOLUTION EQUATIONS OF N-SOLITON SOLUTIONS

Esin AKSOY

Mathematics, M. S. Thesis, 2010

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet BEKİR

SUMMARY

Nonlinear equations are equations that can be used many areas such as chemistry, physics and biology. Application mathematics is interested in with exact solution of this equations and improving new solution methods. In this study, solutions of exponential functions method that are nonlinear equations and application of this methods to other equations are done. In addition, 1-soliton, 2-soliton, 3-soliton and N soliton solutions of nonlinear partial differential equations is obtained using exponential functional method. This thesis is in four parts.

First of all, some basic concepts and definitions of partial derivative equations and difference equation at the first part.

Next, exponential functional method is given and applied to different KdV equations at the second part. Then, exponential functional method is defined to construct N-soliton solutions and 1-soliton, 2-soliton, 3-soliton and N-soliton solutions of KdV equations are obtained using this method.

Third part consists of definitions of exponential functional method to construct nonlinear different differential equations and 1-soliton solutions of nonlinear differential different equations. Moreover, N-soliton solutions of these equations are obtained with exponential functional method.

At the last part results obtained from the study and suggestions are given.

Keywords: Differential equations, Partial derivative equations, Differential-difference equations, Evolution equations, Exact solutions, Exp-function method, N-soliton solution.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında ilgi, hoşgörü, anlayış ve yardımlarını eksik etmeyen danışman hocam; Sn. **Doç. Dr. Ahmet BEKİR**' e, tez çalışmamda ve üniversite yaşamım boyunca sürdürdüğüm tüm çalışmalarımda bana destek olan, yardımlarını hiç esirgemeyen hocalarıma ve arkadaşlarıma,

Tüm yaşamım boyunca yanımda olan, maddi manevi hiçbir yardımını esirgemedi bana böylesine güzel bir yaşamı hediye eden ve varlıklarıyla bana güç veren **aileme**,

en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Esin AKSOY
KÜTAHYA, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR.....	vi
1. BÖLÜM	1
1.1 Giriş	1
1.2 Genel Kavramlar.....	1
1.3 Kısmi Türevli Denklemlerin Elde Edilmesi	2
1.4 Birinci Basamaktan Lineer Olmayan Denklemler	3
1.5 Lineer Olmayan Oluşum Denklemleri.....	5
1.6 Soliton Teorisine Fiziksel Bakış	7
1.7 Fark Denklemleri	10
1.8 Diferensiyel Fark Denklemleri.....	12
2. BÖLÜM	14
2.1 Giriş	14
2.2 Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	14
2.1.1 Riccati Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	16
2.3 Üstel Fonksiyon Yöntemi ile İlgili Uygulamalar.....	18
2.3.1 Lineer Olmayan KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	18
2.3.2 Kuvvet Terimli Lineer Olmayan KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	22
2.3.3 Değişken Katsayılı KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	30
2.4 1-Soliton, 2-Soliton, 3-Soliton Çözümler için Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	36
2.4.1 Sabit Katsayılı KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle 1-Soliton, 2-Soliton ve 3-Soliton Çözümü.....	37
2.5 N - Soliton Çözümler için Üstel Fonksiyon Yöntemi	42

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

2.5.1 Lineer Olmayan Değişken Katsayılı KdV Denkleminin N -Soliton Çözümü.....	44
3.BÖLÜM.....	50
3.1 Giriş.....	50
3.2 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemleri için Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	50
3.3 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemlerinin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle İlgili Uygulamaları.....	51
3.3.1 Langmuir Lattice Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	51
3.3.2 Relativistik Toda Lattice Sisteminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	53
3.4 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemlerinin N -Soliton Çözümü için Üstel Fonksiyon Yöntemi.....	56
3.4.1 Toda Lattice Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü.....	58
4.BÖLÜM.....	65
4.1 Giriş.....	65
4.2 Sonuç ve öneriler.....	65
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	66

1. BÖLÜM

1.1 Giriş

Bu bölümde kısmi türevli denklemlerle ilgili bazı tanım ve kavramları verilecektir. Ayrıca lineer olmayan oluşum denklemleri tanımlanmış ve soliton teorisine fiziksel bir bakış yapılmıştır. Daha sonra fark denklemleri ve diferensiyel fark denklemlerinin üzerinde durulmuştur.

1.2 Genel kavramlar

Tanım: İçinde en az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımsız değişkenlere göre çeşitli basamaktan kısmi türevlerini kapsayan eşitliklere (özdeşlik değil) bir kısmi türevli denklem denir.

u bağımlı, x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak;

$$P(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0 \quad (1.2.1)$$

şeklindedir. Burada,

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.2.2)$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.2.3)$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.2.4)$$

$$u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad (1.2.5)$$

$$u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1.2.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.2.7)$$

ve

$$u = u(x) \quad (1.2.8)$$

olmak üzere

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \dots) = 0 \quad (1.2.9)$$

şeklinde. Burada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bağımsız değişkenleri, (u) ise bağımlı değişkeni göstermekte, öte yandan $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ ise:

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (1.2.10)$$

$$u_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}, \quad (1.2.11)$$

olarak ifade edilir.

1.3 Kısmi türevli denklemlerin elde edilmesi

Kısmi türevli denklemlerin çoğu fiziksel olayların analizinden ortaya çıkmıştır. Örnek olarak belli bir ortamda kararlı ısı denilen zamandan bağımsız ısı dağılımı, zamana bağlı ısı yayılması, değişik tipteki dalga yayılmaları gibi fiziksel olaylar kısmi türevli denklemler yardımıyla kolayca incelenebilmektedir.

Fiziksel bir olayı matematiksel ifadelerle modelleyerek bir kısmi türevli denklem elde etmek mümkün olabilir. Kısmi türevli denklemin elde edilme yollarından birisi budur. Ancak bu tip denklemlerin elde edilme şekli üzerinde değil de bu denklemlerin çözümleri üzerinde durulacaktır.

Bu kesimde verilen bir yüzey ailesinin sağladığı en küçük basamaktan kısmi türevli denklemin nasıl elde edildiği görülecektir. Bunun için verilen yüzey ailesindeki bağımlı değişken, bağımsız değişkenlere göre yeterince türetilip verilen yüzey ile hesaplanan türevler arasında keyfi fonksiyonlar ve bunların türevleri yok edilir. Verilen yüzey ailesi, bu denklemin genel çözümü olabileceği gibi, genel çözümün parametrelere bağlı bir alt sınıfı da olabilir. Bu durumda verilen yüzeyle türevler arasında keyfi parametreler yok edilir. Bu yüzey aileleri keyfi sabitlerin yok edilmesi, keyfi fonksiyonların yok edilmesi, geometrik problemler şeklinde çözümlerini bulunur.

1.4 Birinci basamaktan lineer olmayan denklemler

Bu kısımda;

$$p = u_x, \quad (1.4.1)$$

$$q = u_y, \quad (1.4.2)$$

olmak üzere:

$$P(x, y, u, p, q) = 0 \quad (1.4.3)$$

birinci basamaktan genel kısmi türevli denklem incelenecektir. Burada P 'in p ve q 'a göre lineer olması gerekmektedir.

Tanım: Aşağıdaki gibi;

$$G(x, y, u, a, b) = 0 \quad (1.4.4)$$

şeklindeki iki parametrelili bir yüzey ailesi, birinci basamaktan (1.4.3) denklemini sağlıyorsa bu yüzey ailesine (1.4.3)'ün tam integrali denir.

Tanım: Her noktasında, $G(x, y, u, a, b) = 0$ iki parametrelili yüzey ailesindeki her bir yüzeye teğet olan diğer bir yüzeye (1.4.4) yüzey ailesini bir zarfı denir.

Zarf yüzeyi, (1.4.4) yüzey ailesini sağladığı denklemi sağlar. Dolayısıyla zarf yüzeyi (1.4.3) denkleminin bir çözümüdür. Zarf yüzeyi, (1.4.4) denklemindeki a ve b parametrelerine özel değerler verilerek elde edilmez.

Şimdi a ve b parametreleri arasında:

$$b = \varphi(a) \quad (1.4.5)$$

şeklinde bir fonksiyonel bağıntının olduğu varsayılırsa:

$$G(x, y, u, a, (a)) = 0 \quad (1.4.6)$$

Bir parametrelî yüzey ailesi elde edilir. (1.4.6) ailesinin bir zarfı bulunursa, bulunan bu değer (1.4.3) denklemini sağlar. (1.4.5) ailesindeki φ fonksiyonu keyfî olduğundan (1.4.5)'e (1.4.3)'ün genel integrali denir. (1.4.5) ailesinin bir zarfı;

$$G(x, y, u, a, (a)) = 0$$

$$\frac{\partial G(x, y, u, a, \varphi(a))}{\partial a} = 0, \quad (1.4.7)$$

denklemleri arasında a parametresinin yok edilmesi ile bulunur. İki parametrelî (1.4.4) yüzey ailesinin zarfını bulabilmek için

$$G(x, y, u, a, b) = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, u, a, b)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial G(x, y, u, a, b)}{\partial b} = 0,$$

denklemleri arasında a, b parametreleri yok edilir. Bu şekilde elde edilen zarfa verilen denklem için bir singüler integral veya singüler çözüm (tekil çözüm) denir [1].

Teorem : n . mertebeden bir kısmî türevli denklemlerin genel çözümünde n -tane keyfî fonksiyon bulunur. n . mertebeden bir kısmî türevli denklemin genel çözümünde en fazla $\frac{n(n+3)}{2}$ - tane keyfî sabit bulunur.

Birinci mertebeden ve yüksek mertebeden lineer kısmi diferensiyel denklemler için genel çözümler farklı yöntemlerle elde edilebilir.

Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri Lagrange-Charpit yöntemi ile bulunabilir. Fakat yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümünün bulunması için belli bir yöntem yoktur.

Bu nedenle lineer olmayan kısmi türevli denklemleri sağlayan çözümler tam çözümler olarak adlandırılır.

1.5 Lineer olmayan oluşum denklemleri

Bağımsız değişkenlerinde biri t zaman olan kısmi türevli diferensiyel denklemlere oluşum denklemleri denilmektedir. Oluşum denklemleri $K[u]; u$ ve u 'un x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere:

$$u_t = K[u], \quad (1.5.1)$$

formundadır. Eğer $K[u]; u$ terimine göre lineer ise, bu tip denklemlere lineer oluşum denklemleri ve $K[u]; u$ terimine göre lineer değil ise, bu tip denklemlere lineer olmayan oluşum denklemleri denir.

Lineer dalga denklemi veya bir teldeki titreşimi, ısı iletimini tanımlayan denklemler lineer oluşum denklemlerine iki basit örnektir. Lineer olmayan oluşum denklemleri ise mekanik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok daldaki problemlerde gözlenmektedir.

Bu tip denklemlere birkaç örnek verilmek istenirse:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.5.2)$$

formundaki birinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemi, bir boyutlu trafik çalışmalarından türetilmiştir. Bu durumda $u(x, t)$, t zamanında x konumundaki araçların yoğunluğunu göstermektedir. (1.5.2) denklemi, korunum kanunlarına sahip olan gaz dinamiği çalışmaları için bir model denklem olarak da kullanılmaktadır.

İkinci mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin, anlık sıcaklığa bağlı olarak birim zamanda ısı üreten bir ısı kaynağıyla, bir cisimdeki ısı transferi incelenirse,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \nabla u) + f(u), \quad (1.5.3)$$

ile verilen lineer olmayan ısı denklemine ulaşılır. Yer değiştirmeye bağlı, lineer olmayan bir dış kuvvet nedeniyle zorlamalı titreşimi göz önüne alınırsa:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \quad (1.5.4)$$

formundaki lineer olmayan dalga denklemine ulaşılır.

Kuantum mekaniğinde, aşağıdaki formlarda lineer olmayan oluşum denklemleri ile karşılaşılabilir.

Sine-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0, \quad (1.5.5)$$

Klein-Gorden denklemi:

$$u_{tt} - \Delta u + mu + \gamma u^3 = 0, \quad (1.5.6)$$

Kübik Schrödinger denklemi:

$$iu_t - \Delta u + \gamma |u|^2 u = 0, \quad (1.5.7)$$

İkinci mertebeden denklemlere ilave olarak, yüksek mertebeden lineer olmayan oluşum denklemleri ile de karşılaşılabilir. Örneğin polimerler, camlar ve bunlar gibi ikili alaşımların faz geçişleri üzerinde yapılan çalışmalarda, aşağıda verilen Cahn-Hilliard denklemine ulaşılır:

$$u_t + \varepsilon \Delta^2 u = \Delta \Phi(u), \quad (1.5.8)$$

Bu denklemde ε belirli bir küçük sabit ve genellikle $\Phi(u) = u^3 - u$ olarak alınmaktadır. (1.5.8) denklemi dördüncü mertebeden bir oluşum denklemidir. Yüksek mertebeden oluşum denklemlerine diğer bir örnek ise;

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1.5.9)$$

şeklindeki KdV (Korteweg-de Vries) denklemi verilebilir [2].

1.6 Soliton teorisine fiziksel bakış

Bir fizik terimi olarak dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjini taşınmasına yol açan titreşime verilen isimdir. En bilindik olanları, suda ilerleyen yüzey dalgalarıdır. Bununla birlikte ses, ışık ve atomun içindeki taneciklerin hareketleri de dalga özellikleri gösterirler. En basit dalgada bile titreşimler, sabit bir frekans ve dalga boyu ile periyodik olarak salınım yaparlar.

Ses dalgaları gibi mekaniksel dalgalar ilerleyebilecekleri bir ortama ihtiyaç duyarlarken, elektromanyetik dalgalar bir ortama gereksinim duymazlar ve boşlukta bile yayılabilirler. Bir ortamdaki bir dalganın yayılması ortamın özelliklerine de bağlıdır.

Dalgalar, duran ve ilerleyen dalgalar olarak sınıflandırılabilirler. Duran dalgalar, pozisyonu sabit olarak kalan dalgalardır. Bu tip dalgalar, dalganın bulunduğu ortam dalganın hareket ettiği yönün tersine hareket ettiğinde veya durağan bir ortamda birbiri ile zıt yönde ilerleyen dalgaların girişmesi sonucunda oluşurlar. İlerleyen dalgalar ise, bir noktadan diğer bir noktaya madde taşınması söz konusu olmaksızın enerjinin yayılması ile oluşan dalgalardır.

Solitonlar ise aşağıdaki iki temel özelliği sağlayan lineer olmayan dalgalar olarak tanımlanabilir:

1. Şekil, hız gibi özellikleri değişmeksizin yayılan yerleşik (lokalize) dalgalardır.
2. Karşılıklı çarpışmaya karşı kararlıdırlar ve kendi özelliklerini çarpışma sonrasında koruyabilirler.

İlk özellik, solitary dalga şartıdır. İkinci şart ise parçacık özelliğine sahip bir dalga anlamına gelmektedir. Ayrıca solitary dalgalarının özellikleri hakkında Russel adlı bilim insanı tarafından aşağıdaki önemli bilgilere ulaşılmıştır.

Bunlar:

- Solitary dalgaları $h \sec h^2(k(x - vt))$ şekline sahiptir.
- Yeterince büyük miktardaki su kütlesi, iki veya daha fazla bağımsız solitary dalgası üretir.
- Normal dalgaların aksine solitary dalgaları asla birleşmezler. Bu sebeple küçük genliğe sahip bir solitary dalgası ile büyük genliğe sahip bir solitary dalgası birbirleri ile çarpıştıktan sonra, iki solitary dalgası birbirlerinden ayrılarak şekillerinde bir bozulma olmadan yollarına devam edebilirler. Normal dalgalar, ya düzleşmeye başlar ya da dikleşerek sönecek şekilde hareket ederlerken, solitary dalgaları kararlıdır ve uzun mesafelerde yolculuk yapabilirler.
- g yerçekimi ivmesi olmak üzere h yüksekliğine sahip olan ve d derinliğindeki bir kanalda hareket eden bir solitary dalgası:

$$v = \sqrt{g(d + h)} , \quad (1.6.1)$$

ile ifade edilen bir hıza sahiptir. Diğer bir ifade ile dalganın hızı, yüksekliğine ve suyun derinliğine bağlıdır.

Dolayısıyla büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli bir solitary dalgasına göre daha hızlı hareket eder. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile orantılı olduğundan, bir solitary dalga normal dalgalardan farklıdır. Örneğin biri alçak biri yüksek iki ses aynı anda oluştuğunda, kulak her iki sesi de aynı anda duyacaktır. Fakat bu iletim esnasında solitary dalgaları kullanılsaydı, yüksek sesin daha önce duyulması gerekirdi. İnsan vücudundaki sinirler arasındaki iletişim ise normal dalgalarla yapılmazlar. Sıcak bir çay bardağı ele alındığında sıcaklık kademeli olarak hissedilirken, kor halindeki sıcak bir kömür parçasına veya sıcak bir fırına el yaklaştırıldığında, sıcaklık hemen hissedilir ve el geriye çekilir. Dolayısıyla sinirler bir nevi solitary dalgası oluşturarak beyine bilgiyi en kısa şekilde normal dalgalara göre daha hızlı olarak iletirler.

Önceki yıllarda sonuçlar deneysel olarak kalmış ve bir denklem çözümü için solitary dalgaları elde edilememiştir. Bununla birlikte bir denklemin çözümünü veren solitary dalga problemleri araştırma konusu olmuştur. Ünlü matematikçi Korteweg ve Vries tarafından

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \mu(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 , \quad (1.6.2)$$

formundaki sığ su dalgalarının hareketini modelleyen denklem üzerinde çalışmaya başlanılmıştır. Denklemden;

$u(x, t)$, dalga genliğine

$c = \sqrt{gd}$, küçük genlikli dalga hızına,

$\varepsilon = c(d^2/6 - T/2pg)$, Dağılma parametresine,

γ , lineer olmayan parametreye,

T , yüzey gerilimine,

p , suyun yoğunluğuna

karşılık gelmektedir. (1.6.2) denkleminin

$$u(x, t) = \tilde{u}(x - vt), \quad (1.6.3)$$

formunda ve şekli değişmeyen bir hareketli dalga çözümüne sahip olduğu gösterilmiştir. Burada (1.6.3) ifadesi önceki kısımlarda belirtilen Russel'in solitary dalga tanımına uymaktadır. Böylece solitary dalgaların varlığı Korteweg ve Vries tarafından kanıtlanmıştır. Bununla birlikte dalgaların kararlılıkları ve iki solitary dalga çarpışma sonrası oluşan şekillerin değişip değişmediği konusu netlik kazanmamıştır. Netlik kazanmayan konu ile ilgili çalışmalar Kruskal ve Zabusky tarafından incelenmiş, KdV denkleminin sonlu farklar metodu ile çözümleri araştırılırken, solitary dalgaların çarpışma sonrası şekillerini değiştirmedikleri görülmüştür. Bu özelliğin parçacıkların çarpışmasına benzediği bulunarak bu tip dalgalara soliton adı verilmiştir. Sonraki yıllarda konu ile ilgili Gardner, Greene, Kruskal ve Miura ters saçılma dönüşüm (TSD) metodu geliştirilerek, KdV denkleminin soliton çözümleri analitik olarak da verilmiştir.

Soliton çözümleri, hem analitik hem de sayısal olarak elde edildikten sonra, soliton üzerinde çalışmalar hızlanmıştır. Günümüzde ilk kez bir su kanalında gözlenen solitary dalga soliton olarak; akışkanlık mekaniği, temel parçacıklar fiziği, biyofizik gibi birçok fizik alanında kullanılmaktadır. Solitonlar tarafından uzun mesafelerde yol alınabildiği için; teorik olarak bir fiber optikte normal dalga yerine kullanılacak olan solitonlar sayesinde, taşınan sinyalde kayıp olmaksızın büyük miktarda bilgi binlerce kilometre boyunca taşınabilecektir. Bu sebeple,

soliton elektronik ve telekomünikasyon alanlarında oldukça sık kullanılmaktadır. Yakın gelecekte ilerleyen çalışmalar neticesinde radar ve iletişim sektörü gibi birçok yerde solitonların kullanılması beklenmektedir [3].

1.7 Fark denklemleri

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişim $y'(x)$, $y''(x)$, ... türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz.

Tanım: x bağımsız değişken ve buna bağlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \dots, \Delta^n y$ gibi farklarını içine alan bağıntılara fark denklemleri denir. Dikkat edilirse x ' in sürekli olduğu halde tanımlanan diferansiyel denklemlerle fark denklemleri arasında büyük benzerlik vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n) \quad (1.7.1)$$

ile verilen denklem birinci mertebeden fark denklemdir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n) \quad (1.7.2)$$

ile verilen denklem ikinci mertebeden fark denklemdir.

Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y_n 'in hesaplanabilmesi için gerekli olan nokta sayısı göz önüne alınmaktadır.

Fark denklemleri, özellikle zaman unsurunun bir değişken olarak ele alındığı dinamik modellerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Zaman aralıklarının çok küçülmesi durumunda fark denklemleri diferansiyel denklemlere dönüşürler.

Tanım: Şayet fark denkleminde bağımlı değişken birinci dereceden ise bu tür denkleme lineerdir denir.

$$y(n+2) - 5y(n+1) + y(n) = n \quad (1.7.3)$$

ile verilen denklem ikinci mertebeden lineer fark denklemdir.

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} + 2y_{t+1} - 3y_t = 0 \quad (1.7.4)$$

ile verilen denklem üçüncü mertebeden lineer fark denklemdir.

$$y_{k+2} \cdot y_k^2 = y_{k+1}^3 e^k \quad (1.7.5)$$

ile verilen denklem ikinci mertebeden lineer olmayan bir fark denklemdir.

Genel olarak n . mertebeden bir lineer fark denklemi;

$$y(k+n) + A_{n-1}y(k+n-1) + \dots + A_0y(k) = f(k) \quad (1.7.6)$$

veya kısaca,

$$y_{k+n} + A_{n-1}y_{k+n-1} + A_{n-2}y_{k+n-2} + \dots + A_1y_{k+1} + A_0y_k = f_k \quad (1.7.7)$$

şeklinde yazılabilir.

$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ katsayıları sabit iseler, denkleme sabit katsayılı lineer fark denklemi adı verilir. Şayet (1.7.6) denkleminde ise denkleme lineer homojen fark denklemi adı verilir.

Tanım: Fark denklemlerini,

$$f(n+k) + a_{n+k-1}f(n+k-1) + \dots + a_k f(k) = \phi(k) \quad (1.7.8)$$

veya kısaca,

$$y_{n+k} + a_{n+k-1}y_{n+k-1} + \dots + a_k y_k = r(k) \quad (1.7.9)$$

şeklinde göz önüne alalım. Homojen kısmın genel çözümü;

$$y_k^H = c_1 g_1(k) + c_2 g_2(k) + \dots + c_n g_n(k) \quad (1.7.10)$$

ve sağ taraflı denklemin özel çözümü $p(k)$ ise (1.7.8) denkleminin genel çözümü;

$$y_k^G = y_k^H + p(k) \quad (1.7.11)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki gibi şekildeki sağ tarafı sıfırdan farklı olan denklemlere homojen olmayan fark denklemleri denir [4].

1.8 Diferensiyel fark denklemleri

Fark denklemleri, özellikle zaman unsurunun bir değişken olarak ele alındığı dinamik modellerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Zaman aralıklarının çok küçülmesi durumunda fark denklemleri diferensiyel denklemlere dönüşürler.

1950 'lerden beri Fermi ve arkadaşları lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerinin tam çözümü ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır. Mesela yoğun madde fiziği, biyofizik ve makine mühendisliği gibi pek çok farklı alanlardaki çalışmalarda kullanılmaktadır. Bununla birlikte lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerinin tam çözümü bulmak için bazı pratik(uygulamalı) metodlar geliştirildi. Örneğin, Qian, Lou ve Hu özel Toda lattice denklemi için multi-lineer değişken ayırma yaklaşımı geliştirdiler [5]. Baldwin, Göktaş, Hereman [6] ve Zhu [7] diferensiyel fark denklemlerini genişleterek ve tanjant metodunu uygulamışlar ve dolayısıyla diferensiyel fark denklemlerinin çok fazla tam çözümünü elde etmişlerdir.

Diferensiyel fark denklemleri fiziksel olayların modellenmesinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Son zamanlarda ayrık (discrete) lineer olmayan denklemlerin tam çözümleri üzerinde bir takım çalışmalar yapılmaktadır.

Lineer olmayan önemli diferensiyel fark denklemleri aşağıda verilmiştir [8].

a) Hybrid lattice

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (1 + \beta u_n + \gamma u_n^2)(u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t))$$

b) Discretized mKdV lattice

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (\alpha - u_n^2)(u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t))$$

c) Modified Volterra lattice

$$\frac{du_n(t)}{dt} = u_n^2(u_{n-1}(t) - u_{n+1}(t))$$

d) Toda lattice

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n-1} - x_n} - e^{x_n - x_{n+1}},$$

e) Langmuir lattice

$$\frac{du_n(t)}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}),$$

f) Relativistic Toda lattice

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (1 - \alpha u_n)(v_n - v_{n-1}),$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = v_n(u_{n+1} - u_n + \alpha v_{n+1} - \alpha v_{n-1})$$

2. BÖLÜM

2.1 Giriş

Bu bölümde lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözüm yöntemlerinden üstel fonksiyon yöntemi anlatılacaktır. Öncelikle, üstel fonksiyon yöntemi tanımı verilecek sonra yöntemin uygulaması farklı KdV denklemlerine yapılacaktır. Daha sonra N -soliton çözümler için üstel fonksiyon yöntemi tanımlanarak bu yöntem ile KdV denkleminin 1-soliton, 2 -soliton, 3 -soliton ve N -soliton çözümleri bulunacaktır.

2.2 Üstel Fonksiyon Yöntemi

Doğa bilimleri ve mühendislikte önemli bir yere sahip olan ve fiziksel olayların bir modellenmesi olarak elde edilen lineer olmayan diferensiyel denklemlerin integrallenebilirliği 1960'lerden günümüze kadar uygulamalı matematiğin temel konularından biri olmuştur. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi her zaman mümkün olamamaktadır. Bu zorluktan dolayı öncelikli olarak bu tip denklemlerin integrallenebilirliği üzerinde çalışılmıştır. Bununla birlikte integrallenebilir lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Son on yılda bu yöntemler daha da geliştirilerek uygulama alanları genişletilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları tanjant hiperbolik yöntemi [9-11], sinüs-cosinüs yöntemi [12-14], genişletilmiş tanjant hiperbolik yöntemi [15-17], üstel fonksiyon yöntemi [18-20], ilk integral yöntemi [21] ve G'/G -açılım yöntemidir [22-24].

Üstel fonksiyon yöntemi ilk olarak He tarafından tanımlanmış ve birçok bilim insanı tarafından çeşitli uygulamaları verilmiştir [25-27].

Lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümü üstel fonksiyon yöntemiyle elde edilecektir. Öncelikle, kısmi türevli diferensiyel denklemi adi diferensiyel denkleme indirgenecek ve üstel fonksiyon yöntem ile tam çözümü bahsedilecektir. Uygulama olarak da Riccati denklemi üstel fonksiyon yöntemiyle çözülecektir.

Genel olarak,

$$P(u, u_t, u_x, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2.2.1)$$

şeklindeki lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklem ele alalım. Bu denkleme,

$$\xi = kx + wt \quad (2.2.2)$$

k, w keyfi sabitler olmak üzere verilen benzerlik dönüşümü (hareketli dalga dönüşümünü) uygulayalım. Burada k dalga sayısı, w ise dalganın hızını göstermektedir. İfadenin ξ 'ye göre türevi alınır ve aşağıdaki gibi dönüşümler yapılır.

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = w \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = w \cdot u' \quad (2.2.3)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = k \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} = k \cdot u' \quad (2.2.4)$$

$$u_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = \left(k \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_x = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot k = k^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = k^2 \cdot u'' \quad (2.2.5)$$

$$u_{xxx} = k^3 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = k^3 \cdot u''' \quad (2.2.6)$$

.

.

.

Bulunan ifadeler (2.2.1) denkleminde yerine yazılır ve

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (2.2.7)$$

şeklinde denklem elde edilir. Böylece verilen kısmi türevli diferensiyel denklem adi diferensiyel denkleme dönüşür. Dönüşümün çözülebilir olması için adi diferensiyel denklemin lineer kısmının en yüksek mertebeli ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebeli dengelenmesine bakılır.

Üstel fonksiyon yönteminde, c, d, p ve q pozitif tamsayılar, a_n ve b_m daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere:

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n \cdot e^{(n\xi)}}{\sum_{m=-p}^q b_m \cdot e^{(m\xi)}}, \quad (2.2.8)$$

şeklinde çözüm aranır. Lineer olmayan en yüksek mertebeden terim ile en yüksek mertebeden lineer terimin dengelenmesinden $c = p$ ve $d = q$ elde edilir. c, d, p ve q in durumlarına göre tam çözümler elde edilebilir. Örneğin, kolaylık olsun diye $c = p = 1, d = q = 1$ alınırsa çözüm:

$$u(\xi) = \frac{a_{-1} \cdot e^{-\xi} + a_0 + a_1 \cdot e^{\xi}}{b_{-1} e^{-\xi} + b_0 + b_1 \cdot e^{\xi}}, \quad (2.2.9)$$

şeklinde bulunur. Burada $u(x, t) = u(\xi)$ ifadesi indirgenmiş denklemde yerine yazılarak, $e^{(n\xi)}$ ($n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden a_n ve b_m değerleri bulunarak hareketli dalga çözümleri elde edilebilir. Yöntemle ilgili verilen ön bilgilerden sonra yöntem daha geniş şekilde aşağıdaki gibi ifade edilebilir [25].

2.2.1 Riccati Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

Genel olarak Riccati denklemini

$$\mathcal{G}(\eta)' = l_0 + \mathcal{G}^2(\eta) \quad (2.2.1.1)$$

aşağıdaki şekilde verilen benzerlik dönüşümü:

$$\xi = kx + c_0 \quad (2.2.1.2)$$

uygulanır ve

$$ku' - l_0 - u^2 = 0 \quad (2.2.1.3)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem elde edilir. Dönüşümün çözülebilir olması için adi diferensiyel denklemin lineer kısmının en yüksek mertebesi ile lineer olmayan kısmının en yüksek mertebesinin dengelenmesine bakılır. (2.2.1.3) denkleminin genel çözümünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$u(\xi) = \frac{\sum_{m=-p}^q a_m e^{(m\xi)} }{\sum_{n=-c}^d b_n e^{(n\xi)} }, \quad (2.2.1.4)$$

Sonra ifadedeki dengelenmeye bakılır.

$$u' \propto u^2$$

$$u' = \frac{c_1 e^{(p+c)\xi} + \dots}{c_2 e^{2p\xi} + \dots},$$

ve

$$u^2 = \frac{c_3 e^{2c\xi} + \dots}{c_4 e^{2p\xi} + \dots}$$

olup, burada c_i ler katsayıları ifade etmektedir. Bu durumda

$$p + c = 2c$$

$$p = c$$

elde edilir. Aynı şekilde, $d = q$ bulunur. İşlem kolaylığı açısından $d = q = 1$ ve $c = p = 1$ şeklinde kabul edilir ve ifade açılır.

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^{\xi} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{b_1 e^{\xi} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}}, \quad (2.2.1.5)$$

ve bunun neticesinde

$$u_1 = \frac{-\sqrt{-l_0} b_1 e^{(\sqrt{-l_0} x + c_0)} + a_{-1} e^{(-\sqrt{-l_0} x + c_0)}}{b_1 e^{(\sqrt{-l_0} x + c_0)} + \sqrt{-\frac{1}{l_0}} a_{-1} e^{(-\sqrt{-l_0} x + c_0)}}, \quad (2.2.1.6)$$

olarak bulunur. Sonraki adımda a_{-1} ile b_1 keyfî sabitler olmak üzere:

$$u_2 = \frac{-i\sqrt{l_0}b_1e^{(i\sqrt{l_0}x+c_0)} + a_{-1}e^{(-i\sqrt{l_0}x-c_0)}}{b_1e^{(i\sqrt{l_0}x+c_0)} - i\sqrt{\frac{1}{l_0}}a_{-1}e^{(-i\sqrt{l_0}x-c_0)}} \quad (2.2.1.7)$$

olarak bulunur. Keyfi sabitler a_{-1} ve b_1 ile birlikte $i^2 = -1$ olmak üzere;

$$u_3 = \frac{-\sqrt{-l_0}b_1e^{(2\sqrt{-l_0}x+c_0)} + a_0 - \sqrt{-l_0}b_{-1}e^{(-2\sqrt{-l_0}x-c_0)}}{\frac{a_0^2 + l_0b_0^2}{4l_0b_{-1}}e^{(2\sqrt{-l_0}x+c_0)} + b_0 + b_{-1}e^{(-2\sqrt{-l_0}x-c_0)}} \quad (2.2.1.8)$$

Bazı özel eşitliklerde $c_0 = 0$, $b_1 = i$, $a_{-1} = \pm\sqrt{l_0}$ olduğu zaman (2.2.1.6):

$$u = -\sqrt{-l_0} \tanh(\sqrt{-l_0}x), \quad (2.2.1.9)$$

ve

$$u = -\sqrt{-l_0} \coth(\sqrt{-l_0}x), \quad (2.2.1.10)$$

Şayet (2.2.1.7) da $c_0 = 0$, $b_1 = i$, $a_{-1} = \pm\sqrt{l_0}$ olarak yerine konulursa eşitlik:

$$u = \sqrt{l_0} \tanh(\sqrt{l_0}x) \quad (2.2.1.11)$$

ve

$$u = -\sqrt{l_0} \coth(\sqrt{l_0}x) \quad (2.2.1.12)$$

olarak bulunur [28].

2.3 Üstel Fonksiyon Yöntemi İle İlgili Uygulamalar

2.3.1 Lineer Olmayan KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (2.3.1.1)$$

lineer olmayan KdV denklemini göze alalım [29]. Denkleme,

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(x - ct) \quad (2.3.1.2)$$

hareketli dalga dönüşümü uygulanırsa,

$$-cu' + \alpha uu' + k^2 \beta u''' = 0 \quad (2.3.1.3)$$

şeklinde adi diferensiyel denklem elde edilir. Denkleminin çözümünü,

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{n\xi}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{m\xi}} \quad (2.3.1.4)$$

$$= \frac{a_c e^{c\xi} + \dots + a_{-d} e^{-d\xi}}{b_p e^{p\xi} + \dots + b_{-q} e^{-q\xi}}$$

ele alalım. Burada c, d, p ve q bilinmeyen pozitif tamsayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabitlerdir. (2.3.1.3) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimi aşağıdaki gibi dengeleyelim.

$$u''' \square uu'$$

$$u''' = \frac{c_1 e^{(7p+c)\xi} + \dots}{c_2 e^{8p\xi} + \dots} \quad (2.3.1.5)$$

ve

$$uu' = \frac{c_3 e^{(p+2c)\xi} + \dots}{c_4 e^{3p\xi} + \dots} = \frac{c_3 e^{(6p+2c)\xi} + \dots}{c_4 e^{8p\xi} + \dots} \quad (2.3.1.6)$$

dır. Burada c_i ler sadece sabit katsayıları belirtir. (2.3.1.5) ve (2.3.1.6) denklemlerinden,

$$7p + c = 6p + 2c$$

$$p = c$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$u''' = \frac{\dots + d_1 e^{-(7q+d)\xi}}{\dots + d_2 e^{-8q\xi}} \quad (2.3.1.7)$$

ve

$$uu' = \frac{\dots + d_3 e^{-(q+2d)\xi}}{\dots + d_4 e^{-3q\xi}} = \frac{\dots + d_3 e^{-(6q+2d)\xi}}{\dots + d_4 e^{-8q\xi}} \quad (2.3.1.8)$$

dir. Burada d_i ler sadece sabit katsayıları belirtir. (2.3.1.7) ve (2.3.1.8) denklemlerinden,

$$-(7q + d) = -(6q + 2d)$$

$$d = q$$

bulunur. İşlemleri basitleştirmek için, $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ alınır. Bu eşitlikleri (2.3.1.4) denkleminde yerine yazarsak çözüm,

$$u(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}} \quad (2.3.1.9)$$

bulunur. Bulunan (2.3.1.9) denklemini (2.3.1.3) de yerine yazar ve gerekli işlemleri yaparak,

$$\frac{1}{A} [C_{-3} e^{-3\xi} + C_{-2} e^{-2\xi} + C_{-1} e^{-\xi} + C_0 + C_1 e^\xi + C_2 e^{2\xi} + C_3 e^{3\xi}] = 0 \quad (2.3.1.10)$$

şeklinde denklem elde edilir.

$$A = (b_0 + e^\xi + b_{-1} e^{-\xi})^4,$$

$$C_{-3} = \alpha a_{-1} a_0 b_{-1}^2 - c a_0 b_{-1}^3 + k^2 \beta a_0 b_{-1}^3 - \alpha a_{-1}^2 b_{-1} b_0 - k^2 \beta a_{-1} b_{-1}^2 b_0,$$

$$\begin{aligned} C_{-2} = & -2\alpha a_{-1}^2 b_{-1} + 2c a_{-1} b_{-1}^2 - 8k^2 \beta a_{-1} b_{-1}^2 + \alpha a_0^2 b_{-1}^2 \\ & + 2\alpha a_{-1} a_1 b_{-1}^2 - 2c a_1 b_{-1}^3 + 8k^2 \beta a_1 b_{-1}^3 - 2c a_0 b_0 b_{-1}^2 \\ & - 4k^2 \beta a_0 b_0 b_{-1}^2 - \alpha a_{-1}^2 b_0^2 + 2c a_{-1} b_{-1} b_0^2 + 4k^2 \beta a_{-1} b_{-1} b_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{-1} = & -2\alpha a_{-1}a_0b_{-1} - ca_0b_{-1}^2 - 23k^2\beta a_0b_{-1}^2 + 3\alpha a_0a_1b_{-1}^2 - 3\alpha a_{-1}^2b_0 \\
& + 6ca_{-1}b_{-1}b_0 + 18k^2\beta a_{-1}b_{-1}b_0 + \alpha a_{-1}^2b_0 + 2\alpha a_{-1}a_1b_{-1}b_0 - 5ca_1b_{-1}^2b_0 \\
& + 5k^2\beta a_1b_0b_{-1}^2 - \alpha a_{-1}a_0b_{-1}^2 - ca_0b_{-1}b_{-1}^2 + k^2\beta a_0b_{-1}b_{-1}^2 + ca_{-1}b_{-1}^3 - k^2a_{-1}b_{-1}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = & -2\alpha a_{-1}^2 + 4ca_{-1}b_{-1} + 32k^2\beta a_{-1}b_{-1} - 4ca_1b_{-1}^2 - 32k^2\beta a_1b_{-1}^2 \\
& + 2\alpha a_{-1}^2b_{-1} - 4\alpha a_{-1}a_0b_0 + 4\alpha a_1a_0b_0b_{-1} + 4ca_{-1}b_{-1}^2b_0 \\
& - 4k^2\beta a_{-1}b_{-1}^2b_0 - 4ca_1b_{-1}b_{-1}^2b_0 + 4k^2\beta a_1b_{-1}b_{-1}^2b_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & -3\alpha a_{-1}a_0 + 23k^2\beta a_0b_{-1} + 2\alpha a_0a_1b_{-1} + 5ca_{-1}b_0 - 5k^2\beta a_{-1}b_0 \\
& - \alpha a_{-1}^2b_0 - 2\alpha a_{-1}a_1b_0 - 6ca_1b_{-1}b_0 - 18k^2\beta a_1b_{-1}b_0 + 3\alpha a_{-1}^2b_{-1}b_0 \\
& + ca_0b_{-1}^2 - k^2\beta a_0b_{-1}^2\alpha a_0a_1b_{-1}^2 - ca_1b_{-1}^3 + k^2\beta a_1b_{-1}^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & 2ca_{-1} - 8k^2\beta a_{-1} - \alpha a_{-1}^2 - 2\alpha a_{-1}a_1 - 2ca_1b_{-1} \\
& + 8k^2\beta a_1b_{-1} + 2\alpha a_{-1}^2b_{-1} + 2ca_0b_0 + 4k^2\beta a_0b_0 \\
& - 2ca_1b_{-1}^2 - 4k^2\beta a_1b_{-1}^2 + \alpha a_{-1}^2b_{-1}^2,
\end{aligned}$$

$$C_3 = ca_0 - k^2\beta a_0 - \alpha a_0a_1 - ca_1b_0 + k^2\beta a_1b_0 + \alpha a_{-1}^2b_0.$$

Algoritmik denklemler sisteminde Maple kullanılarak aşağıdaki çözümler elde edilir.

$$c = k^2\beta + \alpha a_1, \quad a_{-1} = \frac{1}{4}a_1b_{-1}^2, \quad a_0 = a_1b_0 + \frac{6k^2\beta b_0}{\alpha}, \quad b_{-1} = \frac{b_{-1}^2}{4}. \quad (2.3.1.11)$$

Burada, a_1 ve b_0 bağımsız değişkenlerdir. Bu sonuçları (2.3.1.9) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki tam çözüm bulunur.

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{a_1b_0 + \frac{6k^2\beta b_0}{\alpha} + a_1e^{[k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]} + \frac{1}{4}a_1b_{-1}^2e^{[-k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]}}{b_0 + e^{[k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]} + \frac{1}{4}b_{-1}^2e^{[-k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]}} \\
= & a_1 + \frac{\frac{6k^2\beta b_0}{\alpha}}{b_0 + e^{[k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]} + \frac{1}{4}b_{-1}^2e^{[-k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)]}}. \quad (2.3.1.12)
\end{aligned}$$

Bu çözümleri [30-32] deki sonuçlarla karşılaştırmak için $a_1 = 0$, $b_0 = 2$, $\alpha = -6$, $\beta = 1$, değerlerini kullanırsak, (2.3.1.12) tam çözümü,

$$u(x, t) = \frac{-2k^2 e^{k(x-k^2t)}}{(1 + e^{k(x-k^2t)})^2},$$

şeklinde elde edilir.

2.3.2 Kuvvet Terimli Lineer Olmayan KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon

Yöntemiyle Çözümü

$F(t)$, kuvvet terimi olmak üzere lineer olmayan KdV denklemi

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = F(t) \quad (2.3.2.1)$$

gibi verilsin.

Özel olarak,

$$u(x, t) = v(x, t) + \int F(t) dt, \quad (2.3.2.2)$$

olarak ele alınır.

Sonra (2.3.2.2) denklemini (2.3.2.1) de yerine yazılırsa,

$$v(t) + \alpha v v_x + \alpha \int F(t) dt v_x + \beta v_{xxx} = 0. \quad (2.3.2.3)$$

bulunur. Aşağıdaki dönüşüm

$$v = V(\eta), \quad \eta = kx + \int \tau(t) dt, \quad (2.3.2.4)$$

(2.3.2.3) denkleminde uygulanırsa,

$$\tau(t) V' + k \alpha V V' + k \alpha \int F(t) dt V' + k^3 \beta V''' = 0, \quad (2.3.2.5)$$

denklemini elde edilir. Burada k bir sabit, $\tau(t)$, t ye bağılı bir fonksiyon olmaktadır. V 'de η 'ye bağılı bir diferensiyeldir.

(2.3.2.5) adi diferensiyel denkleminin üstel fonksiyon yöntemine göre çözümü,

$$V(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{n\eta}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{m\eta}}, \quad (2.3.2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada c , d , p ve q bilinmeyen pozitif tamsayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabit olarak belirtmektedir. (2.3.2.6) denklemini alternatif olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(\eta) = \frac{a_c e^{c\eta} + \dots + a_{-d} e^{-d\eta}}{b_p e^{p\eta} + \dots + b_{-q} e^{-q\eta}} \quad (2.3.2.7)$$

c ve p değerlerini belirtmek için (2.3.2.5) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesi basit bir hesaplama ile aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$V''' \square VV'$$

$$V''' = \frac{c_1 e^{(7p+c)\eta} + \dots}{c_2 e^{8p\eta} + \dots} \quad (2.3.2.8)$$

ve

$$VV' = \frac{c_3 e^{(p+2c)\eta} + \dots}{c_4 e^{3p\eta} + \dots} = \frac{c_3 e^{[(3p+c)\eta]} + \dots}{c_4 e^{8p\eta} + \dots} \quad (2.3.2.9)$$

Burada c_i ler sadece katsayıları ifade eder. (2.3.2.8) ve (2.3.2.9) denklemleri dengelenirse,

$$7p + c = 2(3p + c) \quad (2.3.2.10)$$

ve sonuçta

$$p = c \quad (2.3.2.11)$$

bulunur. Aynı şekilde d ve q değerlerini belirtmek için (2.3.2.5) denklemimde lineer terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesinden,

$$V''' = \frac{\dots + d_1 e^{-(7q+d)\eta}}{\dots + d_2 e^{-8q\eta}} \quad (2.3.2.12)$$

ve

$$VV' = \frac{\dots + d_3 e^{-(q+2d)\eta}}{\dots + d_4 e^{-3q\eta}} = \frac{\dots + d_3 e^{[-2(3q+d)\eta]}}{\dots + d_4 e^{-8q\eta}} \quad (2.3.2.13)$$

dir. Burada d_i ler sadece sabit katsayıları belirtir. (2.3.2.12) ve (2.3.2.13) denklemleri dengelenirse,

$$-(7q + d) = -2(3q + d) \quad (2.3.2.14)$$

ve sonuç olarak,

$$d = q \quad (2.3.2.15)$$

bulunur.

1. Durum: $c = p = 1$, $d = q = 1$

c ve d keyfi olarak seçilebilir. Elde edilen çözümler c ve d 'nin değerlerine bağlı olmadığını gösterilecektir. İşlemlerimizde kolaylık sağlamak için $c = p = 1$ ve $d = q = 1$ değerleri alınır. Bu durumda (2.3.2.7) denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$V(\eta) = \frac{a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta}}{b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta}} \quad (2.3.2.16)$$

(2.3.2.16) denklemi, (2.3.2.5) denklemine yerine yazılır ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, $e^{n\eta}$ 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenirse denklem sistemi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$b_1(a_1b_0 - a_0b_1) \left[a_1k\alpha + b_1k^3\beta + b_1k\alpha \int F(t)dt + b_1\tau(t) \right] = 0,$$

$$\begin{aligned} & k \{ a_1^2(b_0^2 + 2b_1b_{-1})\alpha - b_{-1}^2(a_0^2\alpha - 4a_0b_0k^2\beta + 8a_{-1}b_1k^2\beta) \\ & - 2a_1b_1(a_{-1}b_1\alpha + 2(b_0^2 - 2b_1b_{-1})k^2\beta) \} \\ & - 2b_1 \left[b_1(a_0b_0 + a_{-1}b_1) - a_1(b_0^2 + b_1b_{-1}) \right] \left[\tau(t) + k\alpha \int F(t)dt \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -k \{ a_0^2b_0b_1\alpha + a_0 \left[-a_1(b_0^2 + b_1b_{-1})\alpha + b_1(3a_{-1}b_1\alpha + b_0^2k^2\beta - 23b_1b_{-1}k^2\beta) \right] \} \\ & - b_0k \left[-3a_{-1}^2b_{-1}\alpha + 5a_{-1}b_{-1}^2k^2\beta + a_1(2a_{-1}b_1\alpha - b_0^2k^2\beta + 18b_1b_{-1}k^2\beta) \right] \\ & + \{ a_1b_0(b_0^2 + 6b_1b_{-1}) - b_1 \left[5a_{-1}b_0b_1 + a_0(b_0^2 + b_1b_{-1}) \right] \} \left[\tau(t) + k\alpha \int F(t)dt \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(a_1b_{-1} - a_{-1}b_1) \left[k(2a_0b_0\alpha + a_{-1}b_1\alpha + a_1b_{-1}\alpha + 2b_0^2k^2\beta \right. \\ & \left. - 16b_1b_{-1}k^2\beta) + 2(b_0^2 + b_1b_{-1}) \right] \left[\tau(t) + k\alpha \int F(t)dt \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k \{ a_0^2b_0b_{-1}\alpha + a_0 \left[-a_1(b_0^2 + 2b_1b_{-1})\alpha + b_{-1}(3a_1b_{-1}\alpha + b_0^2k^2\beta - 23b_1b_{-1}k^2\beta) \right] \} \\ & + b_0k \left[-3a_{-1}^2b_{-1}\alpha + 5a_{-1}b_{-1}^2k^2\beta + a_{-1}(2a_1b_{-1}\alpha - b_0^2k^2\beta + 18b_1b_{-1}k^2\beta) \right] \\ & - \{ a_{-1}b_0(b_0^2 + 6b_1b_{-1}) - b_{-1} \left[5a_1b_0b_{-1} + a_0(b_0^2 + b_1b_{-1}) \right] \} \left[\tau(t) + k\alpha \int F(t)dt \right] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & k \{ -a_1^2(b_0^2 + 2b_1b_{-1})\alpha - b_{-1}^2(a_0^2\alpha - 4a_0b_0k^2\beta + 8a_1b_{-1}k^2\beta) \\ & - 2a_{-1}b_{-1} \left[a_1b_{-1}\alpha + 2(b_0^2 - 2b_1b_{-1})k^2\beta \right] \\ & - 2b_{-1} \left[b_{-1}(a_0b_0 + a_1b_{-1}) - a_{-1}(b_0^2 + b_1b_{-1}) \right] \left[\tau(t) + k\alpha \int F(t)dt \right] = 0, \end{aligned}$$

$$b_{-1}(a_0b_{-1} - a_{-1}b_0) \left[a_{-1}k\alpha + b_{-1}k^3\beta + b_{-1}k\alpha \int F(t)dt + b_{-1}\tau(t) \right] = 0.$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$a_1 = a_1, \quad a_0 = \frac{b_0(a_1\alpha + 6b_1k^2\beta)}{b_1\alpha}, \quad a_{-1} = \frac{a_1b_0^2}{4b_1^2}, \quad b_1 = b_1, \quad (2.3.2.17)$$

$$b_0 = b_0, \quad b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1}, \quad \tau(t) = -\frac{k(a_1\alpha + b_1k^2\beta + b_1\alpha \int F(t)dt)}{b_1} \quad (2.3.2.18)$$

değerleri bulunur. Bulunan (2.3.2.16)-(2.3.2.18) denklemlerini (2.3.2.2) ve (2.3.2.4) denklemlerinde yazarak (2.3.2.1) denkleminin solitary dalga çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{a_1 e^{\left[kx - k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} + \frac{b_0 (a_1 \alpha + 6b_1 k^2 \beta)}{b_1 \alpha} + \frac{a_1 b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} }{b_1 e^{\left[kx - k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} + b_0 + \frac{b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]}} + \int F(t) dt \\
 = & \frac{a_1}{b_1} + \frac{\frac{6b_0 k^2 \beta}{\alpha}}{b_1 e^{\left[kx - k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} + b_0 + \frac{b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]}} + \int F(t) dt \quad (2.3.2.19)
 \end{aligned}$$

k , keyfi bir şekilde seçildiğinde periyodik solitary dalga çözümlere dönüştürülebilir. $k = iK$ dönüşümü ile,

$$\begin{aligned}
 e^{\left[kx - k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} &= \cos \left[Kx - K \int \frac{a_1 \alpha + b_1 K^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right] \\
 &+ i \sin \left[Kx - K \int \frac{a_1 \alpha + b_1 K^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right] \quad (2.3.2.20)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 e^{\left[-kx + k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} &= \cos \left[Kx - K \int \frac{a_1 \alpha + b_1 K^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right] \\
 &- i \sin \left[Kx - K \int \frac{a_1 \alpha + b_1 K^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]
 \end{aligned}$$

bulunur. Sonra bulunan bu denklemler (2.3.2.19) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u = \frac{a_1}{b_1} + \frac{\frac{6b_0K^2\beta}{\alpha}}{\lambda \cos \left[Kx - K \int \frac{a_1\alpha - b_1K^2\beta + b_1\alpha \int F(t)dt}{b_1} \right] + b_0 + i\mu \sin \left[Kx - K \int \frac{a_1\alpha - b_1K^2\beta + b_1\alpha \int F(t)dt}{b_1} \right]} + \int F(t)dt, \quad (2.3.2.21)$$

bulunur. Burada $\lambda = b_1 + \frac{b_0^2}{4b_1}$, $\mu = b_1 - \frac{b_0^2}{4b_1}$ dir. Eğer (2.3.2.21) denkleminin sanal kısmı sıfır olursa periyodik veya kompakt benzeri bir çözüm elde edilir.

$$\mu = b_1 - \frac{b_0^2}{4b_1} = 0 \quad (2.3.2.22)$$

(2.3.2.22) denkleminde,

$$b_0 = \pm 2b_1 \quad (2.3.2.23)$$

elde edilir. (2.3.2.23) denklemini (2.3.2.21) denkleminde yerine yazılırsa iki periyodik çözüm,

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{\frac{6K^2\beta}{\alpha}}{\cos \left[Kx - K \int \frac{a_1\alpha - b_1K^2\beta + b_1\alpha \int F(t)dt}{b_1} dt \right] + 1} + \int F(t)dt, \quad (2.3.2.24)$$

ve

$$u = \frac{a_1}{b_1} + \frac{\frac{6K^2\beta}{\alpha}}{\cos \left[Kx - K \int \frac{a_1\alpha - b_1K^2\beta + b_1\alpha \int F(t)dt}{b_1} dt \right] - 1} + \int F(t)dt. \quad (2.3.2.25)$$

şeklinde bulunur.

2. Durum: $c = p = 2$, $d = q = 2$

Yukarıda belirtildiği gibi c ve d keyfi olarak seçilebilir. Şimdi $c = p = 2$ ve $d = q = 2$ seçersek (2.3.2.7) denklemi,

$$V(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta} + a_{-2} e^{-2\eta}}{b_2 e^{2\eta} + b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta} + b_{-2} e^{-2\eta}} \quad (2.3.2.26)$$

denkleminde dönüşür. Bu denklemde kolaylık olsun diye $b_2 = 1$, $b_1 = 0$ ve $b_{-1} = 0$ seçilirse (2.3.2.26) denklemi,

$$V(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta} + a_{-2} e^{-2\eta}}{e^{2\eta} + b_0 + b_{-2} e^{-2\eta}} \quad (2.3.2.27)$$

dönüşür. Bu denklemi yukarıdaki sıraya göre (2.3.2.27) denklemi, (2.3.2.5) denkleminde yerine yazılır ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, $e^{m\eta}$ 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenir, denklem sistemi çözülürse,

$$a_2 = a_2, \quad a_1 = a_1, \quad a_0 = -\frac{a_1^2 \alpha (a_2 \alpha + 12k^2 \beta)}{72k^4 \beta^2}, \quad (2.3.2.28)$$

$$a_{-1} = \frac{a_1^3 \alpha^2}{144k^4 \beta^2}, \quad a_{-2} = \frac{a_1^4 a_2 \alpha^4}{20736k^8 \beta^4},$$

$$b_0 = -\frac{a_1^2 \alpha^2}{72k^4 \beta^2}, \quad b_{-2} = \frac{a_1^4 \alpha^4}{20736k^8 \beta^4}, \quad \tau(t) = -k(a_2 \alpha + k^2 \beta + \alpha \int F(t) dt). \quad (2.3.2.29)$$

eşitlikleri bulunur. (2.3.2.27)-(2.3.2.29) denklemleri (2.3.2.2) ve (2.3.2.4) denklemlerinde yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa çözüm:

$$u = a_2 + \frac{a_1}{e^{\left[kx - k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]} + \frac{a_1 \alpha}{6k^2 \beta} + \frac{a_1^2 \alpha^2}{144k^4 \beta^2} e^{\left[-kx + k \int \frac{a_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt}{b_1} \right]}} + \int F(t) dt. \quad (2.3.2.30)$$

dür. Böylelikle (2.3.2.19) denkleminde sırasıyla $a_1 = a_2$, $b_1 = 1$ ve $b_0 = \frac{a_1 \alpha}{6k^2 \beta}$ sonucunu kurabiliriz.

3. Durum: $c = p = 2$, $d = q = 1$

$c = p = 2$ ve $d = q = 1$ ifadelerini (2.3.2.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$V(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta}}{b_2 e^{2\eta} + b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta}} \quad (2.3.2.31)$$

(2.3.2.31) denkleminde özel olarak $b_2 = 1$ seçilirse ve (2.3.2.31) denklemi, (2.3.2.5) denkleminde yerine yazılır ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, $e^{n\eta}$ 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenir, denklem sistemi çözülürse,

$$a_2 = a_2, \quad a_1 = a_1, \quad a_{-1} = -\frac{a_2 \alpha^2 (a_1 - a_2 b_1)^2 (a_1 \alpha - a_2 b_1 \alpha - 6b_1 k^2 \beta)}{864k^6 \beta^3}, \quad (2.3.2.32)$$

$$a_0 = -\frac{(a_1 - a_2 b_1)(a_1 a_2 \alpha^2 - a_2^2 b_1 \alpha^2 + 8a_1 k^2 \alpha \beta - 16a_2 b_1 k^2 \alpha \beta - 48b_1 k^4 \beta^2)}{48k^4 \beta^2}, \quad b_1 = b_1, \quad (2.3.2.33)$$

$$b_0 = -\frac{\alpha(a_1 - a_2 b_1)(a_1 \alpha - a_2 b_1 \alpha - 8b_1 k^2 \beta)}{48k^4 \beta^2}, \quad b_{-1} = -\frac{\alpha^2(a_1 - a_2 b_1)(a_1 \alpha - a_2 b_1 \alpha - 6b_1 k^2 \beta)}{864k^4 \beta^3} \quad (2.3.2.34)$$

$$\tau(t) = -k(a_2 \alpha + k^2 \beta + \alpha \int F(t) dt) \quad (2.3.2.35)$$

eşitlikleri bulunur. (2.3.2.31)-(2.3.2.35) denklemleri (2.3.2.2) ve (2.3.2.4) denklemlerinde yerine yazılır ve $b_2 = 1$ alınır, düzenlemeler yapılırsa çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$u = a_2 + \frac{a_1 - a_2 b_1}{e^{\int_{kx-k}^{\alpha_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt} \frac{1}{b_1} dt} + \frac{\alpha(a_1 - a_2 b_1)}{6k^2 \beta} + \frac{\alpha^2(a_1 - a_2 b_1)^2}{144k^4 \beta^2} e^{\int_{-kx+k}^{\alpha_1 \alpha + b_1 k^2 \beta + b_1 \alpha \int F(t) dt} \frac{1}{b_1} dt}} + \int F(t) dt \quad (2.3.2.36)$$

Böylelikle (2.3.2.19) denkleminde sırasıyla $a_1 = a_2$, $b_1 = 1$ ve $b_0 = \frac{\alpha(a_1 - a_2 b_1)}{6k^2 \beta}$ sonucunu kurabiliriz [33].

2.3.3 Değişken Katsayılı KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

Değişken katsayılı bir KdV denklemi ele alalım.

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0, \quad (2.3.3.1)$$

Burada $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$, t 'ye bağlı keyfî fonksiyonlardır. Lineer olmayan (2.3.3.1) denklemi, homajen olmayan ortamda zayıf dispersif ve zayıf lineer olmayan dalgaların yayılmasının bir modeli olarak tanımlanır. (2.3.3.1) denkleminde Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri, soliton benzeri çözümler ve trigonometrik fonksiyon çözümleri bulunabilir [34].

Aşağıdaki dönüşüm

$$u = U(\eta), \quad \eta = kx + \int \tau(t) dt, \quad (2.3.3.2)$$

(2.3.3.1) denkleminde uygulanırsa,

$$\tau(t)U' + k\alpha(t)UU' + k^3\beta(t)U''' = 0, \quad (2.3.3.3)$$

denklemi elde edilir. Burada k bir sabit, $\tau(t)$, t ye bağlı bir fonksiyon olmaktadır. V 'de η 'ye bağlı bir diferensiyeldir.

(2.3.3.3) adi diferensiyel denkleminin üstel fonksiyon yöntemine göre çözümünü,

$$U(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{n\eta}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{m\eta}}, \quad (2.3.3.4)$$

şeklinde ifade edilir. Burada c , d , p ve q bilinmeyen pozitif tamsayılar, a_n ve b_m bilinmeyen sabit olarak belirtmektedir. (2.3.3.4) denklemini alternatif olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U(\eta) = \frac{a_c e^{c\eta} + \dots + a_{-d} e^{-d\eta}}{b_p e^{p\eta} + \dots + b_{-q} e^{-q\eta}} \quad (2.3.3.5)$$

c ve p değerlerini belirtmek için (2.3.3.3) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesi basit bir hesaplama ile aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$U''' \square UU'$$

$$U''' = \frac{c_1 e^{(7p+c)\eta} + \dots}{c_2 e^{8p\eta} + \dots} \quad (2.3.3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} UU' &= \frac{c_3 e^{(p+2c)\eta} + \dots}{c_4 e^{3p\eta} + \dots} \\ &= \frac{c_3 e^{[(3p+c)\eta]} + \dots}{c_4 e^{8p\eta} + \dots} \end{aligned} \quad (2.3.3.7)$$

Burada c_i ler sadece katsayıları ifade eder. (2.3.3.6) ve (2.3.3.7) denklemleri dengelenirse,

$$7p + c = 2(3p + c) \quad (2.3.3.8)$$

ve sonuçta

$$p = c \quad (2.3.3.9)$$

bulunur. Aynı şekilde d ve q değerlerini belirtmek için (2.3.3.3) denklemimde lineer terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesinden,

$$U''' = \frac{\dots + d_1 e^{-(7q+d)\eta}}{\dots + d_2 e^{-8q\eta}} \quad (2.3.3.10)$$

ve

$$\begin{aligned}
UU' &= \frac{\dots + d_3 e^{-(q+2d)\eta}}{\dots + d_4 e^{-3q\eta}} \\
&= \frac{\dots + d_3 e^{[-2(3q+d)\eta]}}{\dots + d_4 e^{-8q\eta}} \quad (2.3.3.11)
\end{aligned}$$

dir. Burada d_i ler sadece sabit katsayıları belirtir. (2.3.3.10) ve (2.3.3.11) denklemleri dengelenirse,

$$-(7q + d) = -2(3q + d) \quad (2.3.3.12)$$

ve sonuçta,

$$d = q \quad (2.3.3.13)$$

bulunur.

1. Durum: $c = p = 1, d = q = 1$

Biz farklı değerler için c ve d seçebiliriz. Fakat çözümün c ve d 'nin değerlerine bağlı olmadığını gösterilecektir. Kolaylık olsun diye $c = p = 1$ ve $d = q = 1$ değerleri alalım. Bu durumda (2.3.3.5) denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$U(\eta) = \frac{a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta}}{b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta}} \quad (2.3.3.14)$$

(2.3.3.14) denklemi, (2.3.3.3) denkleminde yerine yazar ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, $e^{n\eta}$ 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenirse denklem sistemi aşağıdaki gibi olur.

$$b_1(a_1 b_0 - a_0 b_1) \{a_1 k \alpha(t) + b_1 [k^3 \beta(t) + \tau(t)]\} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&[-a_0^2 b_1^2 - 2a_1 a_{-1} b_1^2 + a_1^2 (b_0^2 + 2b_1 b_{-1})] k \alpha(t) \\
&+ 2b_1 \{2(-a_1 b_0^2 + a_0 b_0 b_1 - 2a_{-1} b_1^2 + 2a_1 b_1 b_{-1}) k^3 \beta(t) \\
&+ [-b_1(a_0 b_0 + a_{-1} b_1) - a_1(b_0^2 + b_1 b_{-1})] \tau(t)\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[-a_0^2 b_0 b_1 + a_1 b_0 (-2a_1 b_1 + 3a_1 b_{-1}) + a_0 (a_1 b_0^2 - 3a_{-1} b_1^2 + 2a_1 b_1 b_{-1}) \right] k \alpha(t) \\ & + \left[b_1 (-a_0 b_0^2 - 5a_{-1} b_0 b_1 + 23a_0 b_1 b_{-1}) + a_1 b_0 (b_0^2 + 18b_1 b_{-1}) \right] k^3 \beta(t) \\ & + \left[-b_1 (a_0 b_0^2 + 5a_{-1} b_0 b_1 + a_0 b_1 b_{-1}) + a_1 b_0 (b_0^2 + 6b_1 b_{-1}) \right] \tau(t) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2(a_1 b_{-1} - a_{-1} b_1) \{ (2a_0 b_0 + a_1 b_{-1} + a_{-1} b_1) k \alpha(t) \\ & + 2 \left[(b_0^2 - 8b_1 b_{-1}) k^3 \beta(t) + 2(b_0^2 + b_1 b_{-1}) \tau(t) \right] \} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[a_0^2 b_0 b_{-1} + a_{-1} b_0 (2a_1 b_{-1} - 3a_{-1} b_1 b_{-1}) + a_0 (3a_1 b_{-1}^2 + a_{-1} b_0^2 - 2a_{-1} b_1 b_{-1}) \right] k \alpha(t) \\ & + \left[b_{-1} (a_0 (b_0^2 + 5a_1 b_0 b_{-1} - 23a_0 b_1 b_{-1}) - a_{-1} b_0 (b_0^2 - 18b_1 b_{-1})) \right] k^3 \beta(t) \\ & + \left[b_{-1} (a_0 b_0^2 + 5a_1 b_0 b_{-1} + a_0 b_1 b_{-1}) - a_{-1} b_0 (b_0^2 + 6b_1 b_{-1}) \right] \tau(t) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[a_0^2 b_{-1}^2 + 2a_1 a_{-1} b_{-1}^2 - a_{-1}^2 (b_0^2 + 2b_1 b_{-1}) \right] k \alpha(t) \\ & - 2b_{-1} \{ 2(-a_{-1} b_0^2 + a_0 b_0 b_{-1} - 2a_1 b_{-1}^2 + 2a_{-1} b_1 b_{-1}) k^3 \beta(t) \\ & + \left[-b_{-1} (a_0 b_0 + a_1 b_{-1}) - a_{-1} (b_0^2 + b_1 b_{-1}) \right] \tau(t) \} = 0, \end{aligned}$$

$$b_{-1} (a_0 b_{-1} - a_{-1} b_0) \{ a_{-1} k \alpha(t) + b_{-1} [k^3 \beta(t) + \tau(t)] \} = 0.$$

Maple yardımıyla, cebirsel denklem sisteminden,

$$a_1 = a_1, \quad a_0 = \frac{b_0 (a_1 + 6b_1 \delta_1 k^2)}{b_1}, \quad a_{-1} = \frac{a_1 b_0^2}{4b_1^2}, \quad b_1 = b_1, \quad b_0 = b_0, \quad (2.3.3.15)$$

$$b_{-1} = \frac{b_0^2}{4b_1}, \quad \beta(t) = \delta_1 \alpha(t), \quad \tau(t) = -\frac{k(a_1 + b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} \alpha(t), \quad \delta_1 = \text{sabit}, \quad (2.3.3.16)$$

değerleri bulunur. (2.3.3.15) ve (2.3.3.16) daki değerleri (2.3.3.14) denkleminde yerine yazılırsa (2.3.3.1) denkleminin genelleştirilmiş solitary çözümü elde edilir.

$$u = \frac{a_1 e^{\left[kx - \frac{k(a_1 + b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]} + \frac{b_0 (a_1 + 6b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} + \frac{a_1 b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + \frac{k(a_1 + b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]}}{b_1 e^{\left[kx - \frac{k(a_1 + b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]} + b_0 + \frac{b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + \frac{k(a_1 + b_1 \delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]}}$$

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{6b_0\delta_1 k^2}{b_1 e^{\left[kx - \frac{k(a_1+b_1\delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]} + b_0 + \frac{b_0^2}{4b_1^2} e^{\left[-kx + \frac{k(a_1+b_1\delta_1 k^2)}{b_1} \int \alpha(t) dt \right]}} \quad (2.3.3.17)$$

2. Durum: $c = p = 2$, $d = q = 2$

Şimdi $c = p = 2$ ve $d = q = 2$ seçersek (2.3.3.5) denklemi,

$$U(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta} + a_{-2} e^{-2\eta}}{b_2 e^{2\eta} + b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta} + b_{-2} e^{-2\eta}} \quad (2.3.3.18)$$

şekline dönüşür. Bu denklemde kolaylık olsun diye $b_2 = 1$, $b_1 = 0$ ve $b_{-1} = 0$ seçilirse (2.3.3.18) denklemi,

$$U(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta} + a_{-2} e^{-2\eta}}{e^{2\eta} + b_0 + b_{-2} e^{-2\eta}} \quad (2.3.3.19)$$

denkleminde dönüşür. Bu denklemi yukarıdaki sıraya göre, (2.3.3.3) denkleminde yerine yazarak ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, e^{η} 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenir, denklem sistemi çözümlenirse,

$$a_2 = -\frac{\delta_2(\delta_3 + k^3)}{k}, \quad a_1 = a_1, \quad a_0 = \frac{a_1^2(\delta_3 - 11k^3)}{72\delta_2 k^5}, \quad a_{-1} = \frac{a_1^3}{144\delta_2^2 k^4}, \quad (2.3.3.20)$$

$$a_{-2} = -\frac{a_1^4(\delta_3 + k^3)}{20736\delta_2^3 k^9}, \quad b_0 = -\frac{a_1^2}{72\delta_2^2 k^4}, \quad b_{-2} = \frac{a_1^4}{20736\delta_2^4 k^8}, \quad (2.3.3.21)$$

$$\beta(t) = \delta_2 \alpha(t), \quad \tau(t) = \delta_3 \delta_3 \alpha(t), \quad \delta_i = \text{sabit} \quad (i = 2, 3). \quad (2.3.3.22)$$

değerleri bulunur. Bulunan (2.3.3.20)-(2.3.3.22) daki değerler (2.3.3.19) denkleminde yerine yazılırsa çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$u = -\frac{\delta_2(\delta_3 + k^3)}{k} + \frac{a_1}{e^{\left[kx + \delta_2 \delta_3 \int \alpha(t) dt \right]} + \frac{a_1}{6\delta_2 k^2} + \frac{a_1^2}{144\delta_2^2 k^4} e^{\left[-kx - \delta_2 \delta_3 \int \alpha(t) dt \right]}} \quad (2.3.3.23)$$

Böylelikle (2.3.3.19) denklemiyle (2.3.3.23) denklemi arasında $a_1 = -\frac{\delta_2(\delta_3 + k^3)}{k}$, $b_1 = 1$,

$b_0 = \frac{a_1}{6\delta_2 k^2}$ ve $\delta_1 = \delta_2$ ilişkisini kurabiliriz.

3. Durum: $c = p = 2$, $d = q = 1$

$c = p = 2$ ve $d = q = 1$ ifadelerini (2.3.3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$U(\eta) = \frac{a_2 e^{2\eta} + a_1 e^\eta + a_0 + a_{-1} e^{-\eta}}{b_2 e^{2\eta} + b_1 e^\eta + b_0 + b_{-1} e^{-\eta}} \quad (2.3.3.24)$$

denklemi elde edilir. (2.3.3.24) denkleminde özel olarak $b_2 = 1$ seçilirse ve (2.3.3.24) denklemi, (2.3.3.3) denkleminde yerine yazılır ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, e^{η} 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenir, denklem sistemi çözümlenirse,

$$a_2 = -\frac{\delta_2(\delta_3 + k^3)}{k}, \quad (2.3.3.25)$$

$$a_{-1} = \frac{(\delta_3 + k^3)(a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 + b_1 \delta_4 k^3)^2 (a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 - 5b_1 \delta_4 k^3)}{864 \delta_4 k^{10}},$$

$$a_1 = a_1, \quad (2.3.3.26)$$

$$a_0 = -\frac{(a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 + b_1 \delta_4 k^3)(a_1 \delta_5 k + b_1 \delta_4 \delta_5^2 - 7a_1 k^4 - 14b_1 \delta_4 \delta_5 k^3 + 33b_1 \delta_4 k^6)}{48 \delta_4 k^7},$$

$$b_0 = -\frac{(a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 + b_1 \delta_4 k^3)(a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 - 7b_1 \delta_4 k^3)}{48 \delta_4^2 k^6}, \quad (2.2.3.27)$$

$$\beta(t) = \delta_4 \alpha(t), \quad \tau(t) = \delta_4 \delta_5 \alpha(t),$$

$$b_{-1} = -\frac{(a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 + b_1 \delta_4 k^3)^2 (a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 - 5b_1 \delta_4 k^3)}{864 \delta_4^3 k^9}, \quad (2.3.3.28)$$

$$b_1 = b_1, \quad \delta_i = \text{sabit} \quad (i=4,5).$$

eşitlikleri bulunur. (2.3.3.25)-(2.3.3.28) denklemlerini (2.3.3.2) ve (2.3.3.4) denklemlerinde yerine yazılır ve $b_2 = 1$ alınır, düzenlemeler yapılırsa çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$u = -\frac{\delta_4(\delta_5 + k^3)}{k} + \frac{144 \delta_4^2 k^5 \sigma}{144 \delta_4^2 k^6 e^{\left[k\alpha - \delta_4 \delta_5 \int \alpha(t) dt \right]} + 24 \delta_4 k^3 \sigma + \sigma^2 e^{\left[-k\alpha + \delta_4 \delta_5 \int \alpha(t) dt \right]}}, \quad (2.3.3.29)$$

Burada $\sigma = a_1 k + b_1 \delta_4 \delta_5 + b_1 \delta_4 k^3$ göstermektedir. Böylelikle (2.3.3.17) denklemiyle (2.3.3.29) denkleminin arasında $b_1 = 144 \delta_4^2 k^6$, $b_0 = 24 \delta_4 k^3 \sigma$, $a_1 = -144 \delta_4^3 k^5 (\delta_5 + k^3)$, ve $\delta_1 = \delta_4$ ilişkisi kurabiliriz [35].

2.4 1-Soliton, 2-Soliton ve 3-Soliton Çözümler İçin Üstel Fonksiyon Yöntemi

Lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin tam çözümünü bulabilmek için üstel fonksiyon yöntemi kullanılmıştır.

Üstel fonksiyon yöntemine göre genel çözümü,

$$u(x,t) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i e^{i\xi}}{\sum_{i=0}^n b_i e^{i\xi}}, \quad \xi = b(x - ct) \quad (2.4.1)$$

şeklinde ele alınır. Burada (2.4.1) denkleminin lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin 1-soliton çözümüdür.

Bu kısımda N- soliton çözümleri bulmak için üstel fonksiyon yönteminin birçok kombinasyonlarının yazılabileceği gösterilecektir. (2.4.1) denkleminin genişletilmesiyle N-soliton çözümleri bulunacaktır. Yani $n \geq 2$ için üstel fonksiyon yöntemi ifade edilecektir.

Aşağıda olduğu gibi

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} a_{ij} e^{i\xi_1 + j\xi_2}}{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} b_{ij} e^{i\xi_1 + j\xi_2}}, \quad \xi_i = b_i(x - c_i t) \quad i = 1, 2 \quad (2.4.2)$$

yada

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_3} a_{ijk} e^{i\xi_1 + j\xi_2 + k\xi_3}}{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} b_{ijk} e^{i\xi_1 + j\xi_2 + k\xi_3}}, \quad \xi_i = b_i(x - c_i t) \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4.3)$$

yazabiliriz. Daha sonra çözüm indirgenmiş adi diferensiyel denkleminde yerine yazılır. Denklem $e^{n\xi}$ nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve katsayıları sıfıra eşitlenirse cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü Maple yardımıyla bulunur. Sonra bulunan değerler yerlerine yazılarak çözüme ulaşılır.

Sonuç olarak, (2.4.2) yada (2.4.3) teki katsayılar (mümkün ise) istenildiği gibi seçilebilir. Sırasıyla (2.4.1), (2.4.2) ve (2.4.3) denklemleri 1-soliton, 2- soliton ve 3- soliton çözümlerini vermektedir. Açıkça bu ilişkileri aynı şekilde herhangi bir N sabiti için N - solitonu çözümleri de yazılabilir. O zaman bilinen 2-soliton ve 3-soliton çözümleri basit ve anlaşılır bir şekilde ortaya çıkar. Genelleştirilmiş yöntemi KdV denkleminde uygulayarak 2-soliton ve 3-soliton çözümleri bulunacaktır.

2. 4.1 Sabit Katsayılı KdV Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle 1-soliton, 2-soliton ve 3-soliton Çözümleri

Şimdi sabit katsayılı KdV denklemini ele alalım.

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (2.4.1.1)$$

Sabit katsayılı KdV denkleminin 2-soliton ve 3-soliton çözümleri elde etmek için Maple kullanarak hesaplamalar yapılmış ve aşağıdaki çözümler bulunmuştur.

1-Soliton:

(2.3.1) başlığı altında sabit katsayılı KdV denkleminin 1-soliton çözümü verilmiştir. (2.3.1.1) denkleminde $\alpha = 6$ ve $\beta = 1$ alınır (2.4.1.1) denklemi elde edilir. (2.4.1.1) denkleminin 1-soliton çözümü,

$$= a_1 + \frac{\frac{6k^2\beta b_0}{\alpha}}{b_0 + e^{\left[k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)\right]} + \frac{1}{4}b_0^2 e^{\left[-k(x-(k^2\beta+\alpha a_1)t)\right]}}$$

idi. $\alpha = 6$ ve $\beta = 1$ için çözüm;

$$= a_1 + \frac{k^2 b_0}{b_0 + e^{\left[k(x-(k^2+6a_1)t)\right]} + \frac{1}{4}b_0^2 e^{\left[-k(x-(k^2+6a_1)t)\right]}}. \quad (2.4.1.2)$$

bulunur.

2-Soliton:

(2.4.1.1) denkleminin çözümünü,

$$u(x,t) = \frac{a_{10}e^{\xi_1} + a_{01}e^{\xi_2} + a_{11}e^{\xi_1+\xi_2} + a_{21}e^{2\xi_1+\xi_2} + a_{12}e^{\xi_1+2\xi_2}}{(1 + a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2} + a_3e^{\xi_1+\xi_2})^2}, \quad (2.4.1.3)$$

varsayalım. Açıkça görülebilir ki (2.4.1.3) denklemi (2.4.2) denklemini özel bir halidir. Burada $\xi_i = b_i(x - c_i t)$, $i = 1, 2$ dir. (2.4.1.3) çözümü (2.4.1.1) denkleminde yerine yazılır ve işlemler yapılırsa,

$$\frac{\sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 A_{ij} e^{i\xi_1 + j\xi_2}}{(1 + a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2} + a_3e^{\xi_1+\xi_2})^5} = 0, \quad (2.4.1.4)$$

denklemi elde edilir. Burada $A_{55} = A_{00} = 0$ bulunur.

Sırasıyla $A_{45} = 0$ ve $A_{54} = 0$ ilişkileri ima edilirse,

$$c_1 = b_1^2, \quad c_2 = b_2^2 \quad (2.4.1.5)$$

bulunur.

Dolayısıyla, $A_{53} = 0$, $A_{35} = 0$ ve $A_{44} = 0$ ilişkileri sırasıyla,

$$a_{21} = -2a_1a_3b_2^2, \quad a_{12} = -2a_2a_3b_1^2, \quad a_{11} = -4a_1a_2(b_1 - b_2)^2$$

verileri elde edilir. Sonra $A_{43} = 0$ alınırsa,

$$a_{10} = \frac{-\left\{2a_1 \left[2a_3b_2^2(b_1 + b_2)^2 + a_1a_2(b_1 - b_2)^2(b_1^2 - 2b_2^2)\right]\right\}}{\left[a_3(b_1 + b_2)^2\right]^{-1}},$$

ve $A_{34} = 0$ alınırsa,

$$a_{01} = \frac{-\left\{2a_2 \left[2a_3b_1^2(b_1 + b_2)^2 + a_1a_2(b_1 - b_2)^2(b_2^2 - 2b_1^2)\right]\right\}}{\left[a_3(b_1 + b_2)^2\right]^{-1}},$$

bulunur. Sonunda, $A_{42} = 0$ iken,

$$a_3 = \frac{a_1a_2(b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2}, \quad (2.4.1.6)$$

elde edilir. Kalanlar ile yine aynı şekilde $A_{ij} = 0$ ilişkileri kurulabilir. Böylece (2.4.1.3) ile verilen 2- soliton çözümü için,

$$a_{10} = -2a_1b_1^2, \quad a_{01} = -2a_2b_2^2,$$

$$a_{11} = -4a_1a_2(b_1 - b_2)^2,$$

$$a_{21} = -\frac{2a_1^2 a_2 b_2^2 (b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2},$$

$$a_{12} = -\frac{2a_1 a_2^2 b_1^2 (b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2},$$

bulunur. a_3 (2.4.1.6) de verilmiş, c_1 ve c_2 (2.4.4) de verilmiştir. a_1, a_2, b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir. Bulunan bu değerleri (2.4.1.3) denkleminde yerine yazarak çözüm elde edilir.

3-Soliton:

Şimdi (2.4.1) denkleminin çözümünü,

$$u(x, t) = \frac{f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (2.4.1.7)$$

şeklinde kabul edelim. Burada $\xi_i = b_i(x - c_i t)$, $i = 1, 2, 3$ ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & a_{100}e^{\xi_1} + a_{010}e^{\xi_2} + a_{001}e^{\xi_3} + a_{110}e^{\xi_1+\xi_2} + a_{101}e^{\xi_1+\xi_3} + a_{011}e^{\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{210}e^{2\xi_1+\xi_2} + a_{120}e^{\xi_1+2\xi_2} + a_{201}e^{2\xi_1+\xi_3} + a_{102}e^{\xi_1+2\xi_3} + a_{021}e^{2\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{012}e^{\xi_2+2\xi_3} + a_{111}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3} + a_{211}e^{2\xi_1+\xi_2+\xi_3} + a_{121}e^{\xi_1+2\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{112}e^{\xi_1+\xi_2+2\xi_3} + a_{221}e^{2\xi_1+2\xi_2+\xi_3} + a_{212}e^{2\xi_1+\xi_2+2\xi_3} + a_{122}e^{\xi_1+2\xi_2+2\xi_3}, \end{aligned}$$

$$f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 + a_1e^{\xi_1} + a_2e^{\xi_2} + a_3e^{\xi_3} + a_4e^{\xi_1+\xi_2} + a_5e^{\xi_1+\xi_3} + a_6e^{\xi_2+\xi_3} + a_7e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3})^2$$

dir. Açıkça görülebilir ki (2.4.1.7) denklemi (2.4.3) denkleminin özel bir halidir. (2.4.1.7) denklemini (2.4.1.1) sabit katsayılı KdV denkleminde yerine yazarak ve benzer işlemler yapılırsa,

$$a_{100} = -2a_1b_1^2, \quad a_{010} = -2a_2b_2^2,$$

$$a_{001} = -2a_3b_3^2, \quad a_{110} = -4a_1a_2(b_1 - b_2)^2,$$

$$a_{101} = -4a_1a_3(b_1 - b_3)^2, \quad a_{011} = -4a_2a_3(b_2 - b_3)^2,$$

$$a_{210} = -\frac{2a_1^2 a_2 b_2^2 (b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2}, \quad a_{120} = -\frac{2a_1 a_2^2 b_1^2 (b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2},$$

$$a_{201} = -\frac{2a_1^2 a_3 b_3^2 (b_1 - b_3)^2}{(b_1 + b_3)^2}, \quad a_{102} = -\frac{2a_1 a_3^2 b_1^2 (b_1 - b_3)^2}{(b_1 + b_3)^2},$$

$$a_{021} = -\frac{2a_2^2 a_3 b_3^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_2 + b_3)^2}, \quad a_{012} = -\frac{2a_2 a_3^2 b_2^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{111} = -\frac{8a_1 a_2 a_3 \left[b_1^2 (b_2^6 + b_3^6) - 2b_1^4 (b_2^4 + b_3^4) + b_1^6 (b_2^2 + b_3^2) + b_2^2 b_3^2 (b_2^2 - b_3^2)^2 \right]}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_3)^2 (b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{211} = -\frac{4a_1^2 a_2 a_3 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_3)^2},$$

$$a_{121} = -\frac{4a_1 a_2^2 a_3 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_2)^2 (b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{112} = -\frac{4a_1 a_2 a_3^2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_3)^2 (b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{221} = -\frac{2a_1^2 a_2^2 a_3 b_3^2 (b_1 - b_2)^4 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_2)^4 (b_1 + b_3)^2 (b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{212} = -\frac{2a_1^2 a_2 a_3^2 b_2^2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^4 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_3)^4 (b_2 + b_3)^2},$$

$$a_{122} = -\frac{2a_1 a_2^2 a_3^2 b_1^2 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^4}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_3)^2 (b_2 + b_3)^4},$$

$$a_4 = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)^2}{(b_1 + b_2)^2},$$

$$a_5 = \frac{a_1 a_3 (b_1 - b_3)^2}{(b_1 + b_3)^2},$$

$$a_6 = \frac{a_2 a_3 (b_2 - b_3)^2}{(b_2 + b_3)^2},$$

$$a_7 = \frac{a_1 a_2 a_3 (b_1 - b_2)^2 (b_1 - b_3)^2 (b_2 - b_3)^2}{(b_1 + b_2)^2 (b_1 + b_3)^2 (b_2 + b_3)^2},$$

değerleri bulunur. Burada, $c_i = b_i^2$, $i = 1, 2, 3$ ve a_1, a_2, a_3 ve b_1, b_2, b_3 keyfi sabitlerdir.

Bulunan bu değerleri (2.4.1.7) denkleminde yerine yazarak (2.4.1.1) denkleminin 3-soliton çözümü bulunur [36].

2.5 N-Soliton Çözümler İçin Üstel Fonksiyon Yöntemi

x ve t 'ye bağlı lineer olmayan oluşum denklemini göz önüne alalım.

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (2.5.1)$$

Üstel fonksiyon denkleminin genel çözümü $u(\xi) = u(x, t)$ olmak üzere,

$$u(\xi) = \frac{\sum_{n=-c}^d a_n e^{n\xi}}{\sum_{m=-p}^q b_m e^{m\xi}},$$

idi. Bu denklemi,

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} a_{i_1} e^{i_1 \xi_1}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} b_{j_1} e^{j_1 \xi_1}}, \quad \xi_1 = k_1 x + c_1 t + w_1 \quad (2.5.2)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. $a_{i_1}, b_{j_1}, k_1, c_1$ ve w_1 bilinmeyen sabitlerdir. p_1 ve q_1 değerleri (2.5.1) denkleminde, en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesiyle tespit edilecektir. (2.5.2) denklemi (2.5.1) kısmi diferensiyel denkleminin 1-soliton çözümü olarak kullanılabilir.

Sırasıyla $N > 1$, tamsayısı için N-soliton çözümü (2.5.2) denkleminde genelleme yapılarak aşağıdaki formda yazılabilir.

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \dots \sum_{i_N=0}^{p_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \dots \sum_{j_N=0}^{q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g \xi_g}}, \quad \xi_g = k_g x + c_g t + w_g, \quad (2.5.3)$$

$N = 2$, değeri için (2.5.3) genel denklemden,

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1 i_2} e^{\sum_{g=1}^2 i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1 j_2} e^{\sum_{g=1}^2 j_g \xi_g}}, \quad (2.5.4)$$

elde edilir. Bu denklem 2-soliton çözümü oluşturmaktadır.

$N = 3$, iken (2.5.3) denklemi,

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} a_{i_1 i_2 i_3} e^{\sum_{g=1}^3 i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} b_{j_1 j_2 j_3} e^{\sum_{g=1}^3 j_g \xi_g}}, \quad (2.5.5)$$

denklemine dönüşür. Bu denklem 3-soliton çözümü oluşturmaktadır.

(2.5.4) denklemini (2.5.1) denkleminde yerine yazılır ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, üstel fonksiyonun katsayılarının her birini sıfıra eşitler, denklem sistemi çözülür. Böylece 2-soliton çözümü elde edilir. Aynı şekilde (2.5.5) denklemi kullanılırsa 3-soliton çözüm bulunur. Sonuç olarak herhangi bir $N \geq 1$ için, lineer olmayan diferensiyel denklemin N-soliton çözümü bulunur [37].

2.5.1 Lineer Olmayan Değişken Katsayılı KdV Denkleminin N-Soliton Çözümü

Değişken katsayılı KdV denklemini aşağıdaki gibi ele alalım.

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} = 0, \quad (2.5.1.1)$$

1-Soliton:

Önce değişken katsayılı KdV denklemini adi diferensiyel denkleme dönüştürmelidir. Bunun için, (2.5.1.1) denklemin $\xi_1 = k_1x + s_1(t) + w_1$ dönüşümü uygulanırsa,

$$s_1'(t) + k_1\alpha(t)uu' + k_1^3\beta(t)u''' = 0, \quad (2.5.1.2)$$

şeklinde adi diferensiyel denkleme dönüşür.

Değişken katsayılı KdV denkleminin üstel fonksiyon yöntemine göre 1-soliton çözümü,

$$u(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} a_{i_1} e^{i_1 \xi_1}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} b_{j_1} e^{j_1 \xi_1}}, \quad (2.5.1.3)$$

idi. Kabul edelim ki (2.5.1.1) denklemin çözümünü bulmak için (2.5.1.3) denklemini özel olarak aşağıdaki gibi alalım.

$$u(x, t) = \frac{a_1 e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2}, \quad (2.5.1.4)$$

Burada, $\xi_1 = k_1x + s_1(t) + w_1$ dir. (2.5.1.3) denklemini (2.5.1.2) denkleminde yerine yazar ve Maple kullanarak hesaplama yapılır, sonra üstel fonksiyonun katsayılarının her biri aşağıdaki gibi sıfıra eşitlenir.

$$a_1 \left[k^3 \beta(t) + s'_1(t) \right] = 0,$$

$$a_1 \left[a_1 k_1 \alpha(t) - 11 b_1 k^3 \beta(t) + b_1 s'_1(t) \right] = 0,$$

$$-a_1 b_1 \left[a_1 k_1 \alpha(t) - 11 b_1 k^3 \beta(t) + b_1 s'_1(t) \right] = 0,$$

$$-a_1 b^3_1 \left[k^3 \beta(t) + s'_1(t) \right] = 0.$$

Bu denklem sisteminin çözülmesiyle,

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 b_1 k^2_1 \delta, \quad s_1(t) = -k^3_1 \delta \int \alpha(t) dt, \\ \beta(t) &= \delta \alpha(t), \quad \delta = \text{sabit}. \end{aligned} \tag{2.5.1.5}$$

değerleri bulunur. Dolayısıyla (2.5.1.1) denkleminin 1-soliton çözümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(x, t) = \frac{12 b_1 k^2_1 \delta e^{\xi_1}}{(1 + b_1 e^{\xi_1})^2}, \tag{2.5.1.6}$$

Burada $\xi_1 = k_1 x - k^3_1 \delta \int \alpha(t) dt + w_1$ olup b_1 , k_1 ve w_1 keyfi sabitler, $\beta(t) = \delta \alpha(t)$ dir.

2-Soliton:

Değişken katsayılı KdV denkleminin 1-soliton çözümünü,

$$u(x, t) = \frac{a_{10} e^{\xi_1} + a_{01} e^{\xi_2} + a_{11} e^{\xi_1 + \xi_2} + a_{21} e^{2\xi_1 + \xi_2} + a_{12} e^{\xi_1 + 2\xi_2}}{(1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_3 e^{\xi_1 + \xi_2})^2}, \tag{2.5.1.7}$$

kabul edelim. Burada $\xi_i = k_i x + s_i(t) + w_i$, $i = 1, 2$ dir. (2.5.1.7) denklemini (2.5.4) denkleminin bir özelidir. (2.5.1.7) çözümü (2.5.1.2) denkleminde yerine yazılırsa ve aynı şekilde işlemler yapılırsa,

$$a_{10} = 12b_1k_1^2\delta, \quad a_{01} = 12b_2k_2^2\delta, \quad a_{11} = 24b_1b_2\delta(k_1 - k_2)^2, \quad (2.5.1.8)$$

$$a_{21} = \frac{12b_1^2b_2k_2^2\delta(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad a_{21} = \frac{12b_1b_2^2k_1^2\delta(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad (2.5.1.9)$$

$$b_3 = \frac{b_1b_2(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

$$s_i(t) = -k_i^3 \delta \int \alpha(t) dt, \quad \beta(t) = \delta \alpha(t), \quad \delta = \text{sabit}, \quad i = 1, 2 \quad (2.5.1.10)$$

değerleri bulunur. Böylece (2.5.1.8)-(2.5.1.10) değerlerini (2.5.1.7) deki 2-soliton çözümünde yerine yazılarak sonuca ulaşılır. Burada b_1 , b_2 , k_1 , k_2 , w_1 ve w_2 keyfî sabitlerdir.

3-Soliton:

Şimdi (2.5.1.1) denkleminin 3-soliton çözümünü,

$$u(x, t) = \frac{f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{f_2^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (2.5.1.11)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, $\xi_i = k_i x + s_i(t) + w_i$, $i = 1, 2, 3$ ve

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & a_{100}e^{\xi_1} + a_{010}e^{\xi_2} + a_{001}e^{\xi_3} + a_{110}e^{\xi_1+\xi_2} + a_{101}e^{\xi_1+\xi_3} + a_{011}e^{\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{210}e^{2\xi_1+\xi_2} + a_{120}e^{\xi_1+2\xi_2} + a_{201}e^{2\xi_1+\xi_3} + a_{102}e^{\xi_1+2\xi_3} + a_{021}e^{2\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{012}e^{\xi_2+2\xi_3} + a_{111}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3} + a_{211}e^{2\xi_1+\xi_2+\xi_3} + a_{121}e^{\xi_1+2\xi_2+\xi_3} \\ & + a_{112}e^{\xi_1+\xi_2+2\xi_3} + a_{221}e^{2\xi_1+2\xi_2+\xi_3} + a_{212}e^{2\xi_1+\xi_2+2\xi_3} + a_{122}e^{\xi_1+2\xi_2+2\xi_3}, \end{aligned}$$

$$f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 + b_1e^{\xi_1} + b_2e^{\xi_2} + b_3e^{\xi_3} + b_4e^{\xi_1+\xi_2} + b_5e^{\xi_1+\xi_3} + b_6e^{\xi_2+\xi_3} + b_7e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3})^2,$$

(2.5.1.11) denklemini (2.5.1.2) de yerine yazılır ve benzer şekilde işlemler yapılırsa,

$$a_{100} = 12b_1k_1^2\delta, \quad a_{010} = 12b_2k_2^2\delta,$$

$$a_{001} = 12b_3k_3^2\delta, \quad a_{110} = 24b_1b_2\delta(k_1 - k_2)^2,$$

$$a_{101} = 24b_1b_3\delta(k_1 - k_3)^2, \quad a_{011} = 24b_2b_3\delta(k_2 - k_3)^2,$$

$$a_{210} = \frac{12b_1^2b_2k_2^2\delta(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad a_{120} = \frac{12b_1b_2^2k_1^2\delta(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

$$a_{201} = \frac{12b_1^2b_3k_3^2\delta(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2}, \quad a_{102} = \frac{12b_1b_3^2k_1^2\delta(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2},$$

$$a_{021} = \frac{12b_2^2b_3k_3^2\delta(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2}, \quad a_{012} = \frac{12b_2b_3^2k_2^2\delta(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2},$$

$$a_{111} = \frac{48b_1b_2b_3\delta\left[k_2^2k_3^2(k_2^2 - k_3^2)^2 + k_1^6(k_2^2 + k_3^2) - 2k_1^2(k_2^4 + k_3^4) + k_1^2(k_2^6 + k_3^6)\right]}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^2},$$

$$a_{211} = \frac{24b_1^2b_2b_3\delta(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2}, \quad b_4 = \frac{b_1b_2(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2},$$

$$a_{112} = \frac{24b_1b_2b_3^2\delta(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^2}, \quad b_5 = \frac{b_1b_3(k_1 - k_3)^2}{(k_1 + k_3)^2},$$

$$a_{221} = \frac{12b_1^2b_2^2b_3k_3^2\delta(k_1 - k_2)^4(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^4(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^2}, \quad b_6 = \frac{b_2b_3(k_2 - k_3)^2}{(k_2 + k_3)^2},$$

$$a_{212} = \frac{12b_1^2b_2b_3^2k_2^2\delta(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^4(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^4(k_2 + k_3)^2}, \quad b_7 = \frac{b_1b_2b_3(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^2},$$

$$a_{122} = \frac{12b_1b_2^2b_3^2k_1^2\delta(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^4}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2(k_2 + k_3)^4}, \quad s_i(t) = -k_i^3\delta\int\alpha(t)dt, \quad \beta(t) = \delta\alpha(t),$$

$$a_{121} = \frac{24b_1b_2^2b_3\delta(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2}{(k_1 + k_2)^2(k_1 + k_3)^2}, \quad \delta = \text{sabit}, \quad i = 1, 2, 3$$

değerleri bulunur. (2.5.1.1) denkleminin 3-soliton çözümünü bulmak için bulunan değerleri (2.5.1.11) denkleminde yerine yazılır ve sonuca ulaşılır. Burada $b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3, w_1, w_2$ ve w_3 keyfî sabitlerdir.

Eğer benzer $N \geq 4$, için benzer işlemler uygulanırsa lineer olmayan değişken katsayılı KdV denkleminin N -soliton çözümüne, (2.5.1.6), (2.5.1.7) ve (2.5.1.11) denklemlerinden bir formül olarak bulabiliriz. (2.5.1.6), (2.5.1.7) ve (2.5.1.11) denklemlerinin alternatif çözümleri:

$$u(x, t) = 12\delta \left[\ln(1 + b_1 e^{\xi_1}) \right]_{xx}, \quad (2.5.1.12)$$

olarak ifade edilir.

Burada $\xi_1 = k_1 x + k_1^3 \delta \int \alpha(t) dt + w_1$ dir.

$$u(x, t) = 12\delta \left[\ln(1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_1 b_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}}) \right]_{xx}, \quad (2.5.1.13)$$

olup,

$$\xi_i = k_i x + k_i^3 \delta \int \alpha(t) dt + w_i \quad (i = 1, 2), \quad e^{B_{12}} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

dir.

$$u(x, t) = 12\delta \left[\ln(1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_3 e^{\xi_3} + b_1 b_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}} + b_1 b_3 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{13}} + b_2 b_3 e^{\xi_2 + \xi_3 + B_{23}} + b_1 b_2 b_3 e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + B_{12} + B_{13} + B_{23}}) \right]_{xx}, \quad (2.5.1.14)$$

şeklindedir. Burada

$$\xi_i = k_i x + k_i^3 \delta \int \alpha(t) dt + w_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad e^{B_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2} \quad (1 \leq i \leq j \leq 3)$$

dür. Böylelikle N -soliton çözümler formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$u(x, t) = 12\delta \left[\ln \left(\sum_{\mu=0,1} \prod_{i=1}^N b_i^{\mu_i} e^{\sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \mu_i \mu_j B_{ij}} \right) \right]_{xx}, \quad (2.5.1.15)$$

Burada $\xi_i = k_i x + k_i^3 \delta \int \alpha(t) dt + w_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), özetle $\sum_{\mu=0,1}$ her biri $i = 1, 2, \dots, N$ $\mu_i = 0, 1$ tüm kombinasyonları gösterir ve $e^{B_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}$ ($1 \leq i \leq j \leq N$) olmaktadır. Eğer (2.5.1.15) denkleminde $\alpha(t) = -6$ ve $\delta = -\frac{1}{6}$, KdV denkleminin N -soliton çözümlerini verir [36].

Benzer şekilde lineer olmayan değişken katsayılı Broer-Kaup denklem sisteminin N -soliton çözümleri üstel fonksiyon yöntemiyle bulunmuştur [38].

3. BÖLÜM:

3.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak lineer olmayan diferensiyel fark denklemleri için üstel fonksiyon yöntemi anlatılacaktır. Sonra lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerinin 1-soliton çözümü ile ilgili uygulamalar yapılacaktır. Daha sonra lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerinin üstel fonksiyon yöntemiyle N -soliton çözümü anlatılacak ve bu yöntemin lineer olmayan fark denklemlerinin uygulayarak N -soliton çözümü elde edilecektir.

3.2 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemleri İçin Üstel Fonksiyon Yöntemi

Üstel fonksiyon metodu için

$$F(u_{n+p_1}(x), u_{n+p_2}(x), \dots, u_{n+p_k}(x), u'_{n+p_1}(x), u'_{n+p_2}(x), \dots, u'_{n+p_k}(x), \dots, u^{(r)}_{n+p_1}(x), u^{(r)}_{n+p_2}(x), \dots, u^{(r)}_{n+p_k}(x)) = 0 \quad (3.2.1)$$

şeklinde lineer olmayan diferensiyel fark denklemleri ele alınırsa, k_i, λ_j ve c keyfi sabitler olmak üzere:

$$u_n(x) = U(\xi_n) \equiv U_n, \quad \xi_n = \sum_{i=1}^s k_i n_i + \sum_{j=1}^h \lambda_j x_j + c, \quad (3.2.2)$$

$$u_{n+p}(x) = U(\xi_{n+p}) \equiv U_{n+p}, \quad \xi_{n+p} = \sum_{i=1}^s k_i (n_i + p) + \sum_{j=1}^h \lambda_j x_j + c, \quad (3.2.3)$$

şeklindeki hareketli dalga dönüşümü (3.2.1) denklemlerine uygulanırsa

$$G(U_{n+p_1}, \dots, U_{n+p_k}, U'_{n+p_1}, \dots, U'_{n+p_k}, \dots, U^{(r)}_{n+p_1}, \dots, U^{(r)}_{n+p_k}) = 0. \quad (3.2.4)$$

şeklinde adi diferensiyel fark denklemlerine elde edilir.

Bu yöntemde, e, f, p ve q homojenleştirilmiş denge prensibinden belirlenecek pozitif tamsayılar, a_n ve b_m daha sonra belirlenecek katsayılar olmak üzere, (3.2.4) denkleminin çözümü;

$$u_n(n, x, t) = U_n(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n \exp(n\xi)}{\sum_{m=-q}^p b_m \exp(m\xi)} \quad (3.2.5)$$

şeklinde aranır. Bu durumda,

$$u_{n-i}(n, x, t) = U_{n-i}(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n e^{n(\xi-id)}}{\sum_{m=-q}^p b_m e^{m(\xi-id)}}, \quad (3.2.6)$$

$$u_{n+i}(n, x, t) = U_{n+i}(\xi) = \frac{\sum_{n=-f}^e a_n e^{n(\xi+id)}}{\sum_{m=-q}^p b_m e^{m(\xi+id)}}, \quad (3.2.7)$$

yazılabilir. $U_n(\xi)$, $U_{n-i}(\xi)$ ve $U_{n+i}(\xi)$ ifadeleri indirgenmiş (3.2.4) denklemde yerine yazılarak, $e^{(j\xi)}$ in kuvvetlerine göre düzenlenirse, cebirsel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden a_n ve b_m değerleri bulunarak hareketli dalga çözümleri elde edilebilir [39-41].

3.3 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemlerinin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle İlgili Uygulamaları

3.3.1 Langmuir Lattice Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

Langmuir zincirler denklemi [42]

$$\frac{du_n(t)}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad (3.3.1.1)$$

ele alınırsa ve (3.3.1.1) denklemine

$$u_n(\xi) = u(\xi_n), \quad \xi = dn + ct + c_0 \quad (3.3.1.2)$$

şeklindeki hareketli dalga dönüşümü uygulanırsa

$$cu'(\xi) = u(\xi)[u(\xi + d) - u(\xi - d)] \quad (3.3.1.3)$$

şeklinde adi diferensiyel denklemi elde edilir. Homojen denge ilkesi uyarınca $e = p$ ve $f = q$ sonucu bulunur. Basitlik olsun diye $e = p = 1$ ve $f = q = 1$ alınır ise (3.2.5), (3.2.6) ve (3.2.7) denklemleri

$$u_n(\xi_n) = \frac{a_1 e^{\xi_n} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi_n}}{e^{\xi_n} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi_n}}, \quad (3.3.1.4)$$

$$u_{n+1}(\xi_n) = \frac{a_1 e^{\xi_n + d} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi_n - d}}{e^{\xi_n + d} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi_n - d}}, \quad (3.3.1.5)$$

ve

$$u_{n-1}(\xi_n) = \frac{a_1 e^{\xi_n - d} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi_n + d}}{e^{\xi_n - d} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi_n + d}}, \quad (3.3.1.6)$$

denklemlerine dönüşür. Burada a_0 , a_1 , a_{-1} , b_1 ve b_{-1} sabitleri daha sonra belirlenecektir. (3.3.1.4), (3.3.1.5) ve (3.3.1.6) denklemlerini (3.3.1.3) denkleminde yerine yazılır ve $e^{n\xi}$ 'nin katsayılarının her birini sıfıra eşitlenir, cebirsel denklem sistemi çözülürse,

$$a_0 = 0, \quad a_{-1} = a_1, \quad b_{-1} = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = \frac{2c}{e^{2d} - e^{-2d}}, \quad (3.3.1.7)$$

değerleri elde edilir.

(3.3.1.4) ve (3.3.1.7) denklemlerinden aşağıdaki gibi yeni bir hareketli dalga çözümü bulunur.

$$u_n(\xi_n) = \frac{\frac{2c}{e^{2d} - e^{-2d}} e^{\xi_n} + a_{-1} e^{-\xi_n}}{e^{\xi_n}}, \quad (3.3.1.8)$$

Burada $\xi = dn + ct + c_0$ dır.

Özellikle, eğer $a_{-1} = 1$ alınırsa (3.3.1.8) denkleminde,

$$u_n = c \csc h 2d + \cosh [2(dn + ct + c_0)] - \sinh [2(dn + ct + c_0)] \quad (3.3.1.9)$$

sonucunu verir. Bu çözüm yalnızca Langmuir lattice dalga çözümüdür [43].

3.3.2 Relativistik Toda Lattice Sisteminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

Şimdi Relativistik Toda Lattice sistemini ele alalım.

$$\frac{du_n(t)}{dt} = (1 - \alpha u_n)(v_n - v_{n-1}), \quad (3.3.2.1)$$

$$\frac{dv_n(t)}{dt} = v_n(u_{n+1} - u_n + \alpha v_{n+1} - \alpha v_{n-1})$$

Aşağıdaki gibi bir dönüşüm alınarak,

$$v_n = -\frac{1}{\alpha} u_n - \frac{1}{\alpha^2} \quad (3.3.2.2)$$

(3.3.2.1) denklemi

$$u'_n(t) = (u_n + \frac{1}{\alpha})(u_{n-1} - u_n) \quad (3.3.2.3)$$

denkleme dönüşür. Hareketli dalga dönüşümünde $u_n(\xi) = U(\xi_n)$, $\xi = dn + ct + c_0$ olup buradan,

$$cU'(\xi) = (U(\xi) + \frac{1}{\alpha})(U(\xi - d) - U(\xi)) \quad (3.3.2.4)$$

şeklinde adi diferensiyel denklemi elde edilir. Homojen denge ilkesi uyarınca $e = p$ ve $f = q$ sonucu bulunur. Basitlik için, $e = p = 1$ ve $f = q = 1$ alınır. Böylece (3.3.2.4) denkleminin hareketli dalga dönüşümünün çözümleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U(\xi) = \frac{a_1 e^\xi + a_0 + a_{-1} e^{-\xi}}{e^\xi + b_0 + b_{-1} e^{-\xi}}, \quad (3.3.2.5)$$

ve

$$U(\xi - d) = \frac{a_1 e^{\xi-d} + a_0 + a_{-1} e^{-\xi+d}}{e^{\xi-d} + b_0 + b_{-1} e^{-\xi+d}} \quad (3.3.2.6)$$

şeklinde yazılır. Bulunan (3.3.2.5) ve (3.3.2.6) çözümleri (3.3.2.4) denkleminde yerine yazılırsa, a_0 , a_1 , a_{-1} , b_0 ve b_{-1} için denge prensibine göre bir dizi cebirsel denklemler sistemi bulunur. Cebirsel denklem sistemleri Maple yardımıyla çözülerek, aşağıdaki gibi iki farklı sonuç elde edilir.

1. Durum:

$$a_0 = 0, \quad a_{-1} = \frac{b_{-1}(e^{2d} - 1 + 2c\alpha e^{2d})}{\alpha(1 - e^{2d})}, \quad b_0 = 0, \quad (3.3.2.7)$$

$$b_{-1} = b_{-1}, \quad a_1 = \frac{e^d - e^{-d} + 2c\alpha e^{-d}}{\alpha(e^{-d} - e^d)}$$

2. Durum:

$$a_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{b_0(e^d - 1 + c\alpha e^{-d})}{1 - e^d}, \quad b_0 = b_0, \quad (3.3.2.8)$$

$$b_{-1} = 0, \quad a_1 = \frac{1 - e^{-d} + c\alpha e^{-d}}{\alpha(e^{-d} - 1)}$$

(3.3.2.5) denkleminde sırasıyla 1-2 durumları yerine yazılır ve $u_n(\xi) = U(\xi_n)$, $\xi = dn + ct + c_0$ kullanılarak (3.3.2.3) denkleminin genel solitary çözümü sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_n(\xi) = \frac{\frac{e^d - e^{-d} + 2c\alpha e^{-d}}{\alpha(e^{-d} - e^d)} e^\xi + \frac{b_{-1}(e^{2d} - 1 + 2c\alpha e^{2d})}{\alpha(1 - e^{2d})} e^{-\xi}}{e^\xi + b_{-1} e^{-\xi}}, \quad (3.3.2.9)$$

$$u_n(\xi) = \frac{\frac{1-e^{-d}+c\alpha e^{-d}}{\alpha(e^{-d}-1)}e^\xi + \frac{b_0(e^d-1+c\alpha e^{-d})}{1-e^d}}{e^\xi + b_0}, \quad (3.3.2.10)$$

Burada $\xi = dn + ct + c_0$ dır.

Özellikle (3.3.2.9) denkleminde eğer $b_{-1} = 1$ alınırsa $u_n(\xi)$,

$$u_n = -c \coth d + \frac{1}{\alpha}(c) \tanh(dn + ct + c_0) - \sec h(dn + ct + c_0) \quad (3.3.2.11)$$

bulunur.

Eğer, (3.3.2.10) denkleminde $b_0 = 1$ alınırsa $u_n(\xi)$,

$$u_n = \left(c - \frac{1}{\alpha}\right) - c(\coth d + \csc hd) - \frac{c}{2}(\csc h(dn + ct + c_0) + \coth(dn + ct + c_0)) \quad (3.3.2.12)$$

bulunur. (3.3.2.2) de belirtilen $v_n = -\frac{1}{\alpha}u_n - \frac{1}{\alpha^2}$ denkleminde dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$v_n = \frac{c}{\alpha} \coth d + \frac{1}{\alpha^2}(c \tanh(dn + ct + c_0) - \sec h(dn + ct + c_0)) - \frac{1}{\alpha^2} \quad (3.3.2.13)$$

$$v_n = -\frac{c}{\alpha} + \frac{c}{\alpha}(\coth d + \csc hd) + \frac{c}{2\alpha}(\csc h(dn + ct + c_0) + \coth(dn + ct + c_0)) \quad (3.3.2.14)$$

Buradaki sonuçlar ile [44,45] deki sonuçları karşılaştırılırsa, bazı elde edilen sonuçların yeni ve görülebilir bir bezerlik olduğu söylenebilir [46].

3.4 Lineer Olmayan Diferensiyel Fark Denklemlerinin N-Soliton Çözümü İçin Üstel Fonksiyon Yöntemi

Bu konuda lineer olmayan diferensiyel fark denklemlerinin N -soliton çözümünü elde etmek için üstel fonksiyon yöntemini genelleyerek çözüme ulaşılabacaktır.

Belirli bir lineer olmayan diferensiyel fark denklemini ele alalım.

$$\Delta(u_{n,t}, u_{n,t}, u_{n,tt}, u_{n,xt}, \dots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \dots) = 0, \quad (3.4.1)$$

Üstel fonksiyon yöntemine göre diferensiyel fark denkleminin çözümü aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u_n(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} a_{i_1} e^{i_1 \xi_1}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} b_{j_1} e^{j_1 \xi_1}}, \quad (3.4.2)$$

$$u_{n-s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} a_{i_1} e^{i_1 (\xi_1 - s k_1)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} b_{j_1} e^{j_1 (\xi_1 - s k_1)}}, \quad (3.4.3)$$

$$u_{n+s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} a_{i_1} e^{i_1 (\xi_1 + s k_1)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} b_{j_1} e^{j_1 (\xi_1 + s k_1)}}, \quad (3.4.4)$$

Burada $\xi_1 = k_1 n + l_1 x + c_1 t + w_1$, s , integral sayısı, a_{i_1} , b_{j_1} , k_1 , l_1 , c_1 ve w_1 bilinmeyen katsayılar, p_1 ve q_1 değerleri (3.4.1) denkleminde en yüksek mertebeden lineer terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin dengelenmesi sonucunda belirlenir. (3.4.2)-(3.4.4) denklemleri 1-soliton çözümü oluşturmaktadır.

Herhangi bir $N > 1$ tamsayı için, (3.4.2)-(3.4.4) genelleyerek diferensiyel fark denklemlerinde N -soliton çözüm aşağıdaki gibi aranır.

$$u_n(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} \cdots \sum_{i_N=0}^{p_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} \cdots \sum_{j_N=0}^{q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g \xi_g}}, \quad (3.4.5)$$

$$u_{n-s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} \cdots \sum_{i_N=0}^{p_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g (\xi_g - s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} \cdots \sum_{j_N=0}^{q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g (\xi_g - s k_g)}}, \quad (3.4.6)$$

$$u_{n+s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} \cdots \sum_{i_N=0}^{p_N} a_{i_1 i_2 \dots i_N} e^{\sum_{g=1}^N i_g (\xi_g + s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} \cdots \sum_{j_N=0}^{q_N} b_{j_1 j_2 \dots j_N} e^{\sum_{g=1}^N j_g (\xi_g + s k_g)}}, \quad (3.4.7)$$

Burada $\xi_g = k_g n + l_g x + c_g t + w_g$, ($g = 1, 2, \dots, N$) olarak alınır.

$N = 2$ değeri için;

$$u_n(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1 i_2} e^{\sum_{g=1}^2 i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1 j_2} e^{\sum_{g=1}^2 j_g \xi_g}}, \quad (3.4.8)$$

$$u_{n-s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1 i_2} e^{\sum_{g=1}^2 i_g (\xi_g - s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1 j_2} e^{\sum_{g=1}^2 j_g (\xi_g - s k_g)}}, \quad (3.4.9)$$

$$u_{n+s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} a_{i_1 i_2} e^{\sum_{g=1}^2 i_g (\xi_g + s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} b_{j_1 j_2} e^{\sum_{g=1}^2 j_g (\xi_g + s k_g)}}, \quad (3.4.10)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm diferensiyel fark denklemlerinde 2-soliton çözümünü oluşturmak için kullanılır.

$N = 3$ değeri için;

$$u_n(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} a_{i_1 i_2 i_3} e^{\sum_{g=1}^3 i_g \xi_g}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} b_{j_1 j_2 j_3} e^{\sum_{g=1}^3 j_g \xi_g}}, \quad (3.4.11)$$

$$u_{n-s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} a_{i_1 i_2 i_3} e^{\sum_{g=1}^3 i_g (\xi_g - s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} b_{j_1 j_2 j_3} e^{\sum_{g=1}^3 j_g (\xi_g - s k_g)}}, \quad (3.4.12)$$

$$u_{n+s}(x, t) = \frac{\sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} \sum_{i_3=0}^{p_3} a_{i_1 i_2 i_3} e^{\sum_{g=1}^3 i_g (\xi_g + s k_g)}}{\sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} b_{j_1 j_2 j_3} e^{\sum_{g=1}^3 j_g (\xi_g + s k_g)}}, \quad (3.4.13)$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm diferensiyel fark denklemlerinde 3-soliton çözümü oluşturmak için kullanılır.

Sonra (3.4.8)-(3.4.10) denklemlerini (3.4.1) denkleminde yerine yazılır. Üstel fonksiyonun katsayılarının her biri sıfıra eşitleyip ve Maple yardımıyla hesaplama yapılır. Denklemler kümesinden elde edilen sonuç 2-soliton çözümü verir. (3.4.11)-(3.4.13) denklemlerini kullanarak (3.4.1) denkleminin 3-soliton çözümü elde edilir. Aynı şekilde herhangi bir $N \geq 1$ için N -soliton çözümün genel formüle için de uygulanabilir [47].

3.4.1 Toda Lattice Denkleminin Üstel Fonksiyon Yöntemiyle Çözümü

Aşağıdaki Toda lattice denklemini ele alalım.

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = e^{x_{n-1} - x_n} - e^{x_n - x_{n+1}}, \quad (3.4.1.1)$$

Burada $x_n = x_n(t)$ olmaktadır.

Aşağıdaki dönüşüm,

$$\frac{du_n}{dt} = e^{x_{n-1}-x_n} - 1, \quad (3.4.1.2)$$

ele alınarak (3.4.1.1) denklemine uygulanırsa ve düzenleme yapılırsa,

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \left(\frac{du_n}{dt} + 1 \right) (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (3.4.1.3)$$

denklemini elde edilir.

1-Soliton:

Kabul edelim ki 1-soliton çözüm;

$$u_n(x, t) = \frac{a_1 e^{\xi_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1}}, \quad (3.4.1.4)$$

$$u_{n-1}(x, t) = \frac{a_1 e^{\xi_1 - k_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1 - k_1}}, \quad (3.4.1.5)$$

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{a_1 e^{\xi_1 + k_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1 + k_1}}, \quad (3.4.1.6)$$

olsun. Burada $\xi_1 = k_1 n + c_1 t + w_1$ şeklindedir. Belli ki (3.4.1.4)-(3.4.1.6) denklemleri (3.4.2)-(3.4.4) denklemlerinin bir özel halidir. (3.4.1.4)-(3.4.1.6) denklemlerini (3.4.1.3) denkleminde yerine yazarsak, Maple kullanarak hesaplama yapılır, aynı dereceden üstel fonksiyonun katsayılarının her biri sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$-a_1 + 2a_1 e^{k_1} + a_1 c_1^2 e^{k_1} - a_1 e^{2k_1} = 0,$$

$$-a_1 b_1 - a_1^2 c_1 + a_1 b_1 c_1^2 + 2a_1 b_1 e^{k_1} + 2a_1^2 c_1 e^{k_1} - a_1 b_1 c_1^2 e^{k_1} - a_1 b_1 e^{2k_1} - a_1^2 c_1 e^{2k_1} + a_1 b_1 c_1^2 e^{2k_1} = 0,$$

$$a_1 b_1^2 + a_1^2 b_1 c_1 - a_1 b_1^2 c_1^2 - 2a_1 b_1^2 e^{k_1} - 2a_1^2 b_1 c_1 e^{k_1} + a_1 b_1^2 c_1^2 e^{k_1} + a_1 b_1^2 e^{2k_1} + a_1^2 b_1 c_1 e^{2k_1} - a_1 b_1^2 c_1^2 e^{2k_1} = 0,$$

$$a_1 b_1^3 - 2a_1 b_1^3 e^{k_1} - a_1 b_1^3 c_1^2 e^{k_1} + a_1 b_1^3 e^{2k_1} = 0$$

Yukarıdaki denklem sisteminin çözümünden,

$$a_1 = 2b_1 \sinh \frac{k_1}{2}, \quad c_1 = 2 \sinh \frac{k_1}{2} \quad (3.4.1.7)$$

değerleri elde edilir. Bu nedenle (3.4.1.1) denkleminin 1-soliton çözümü,

$$e^{x_{n-1} - x_n} - 1 = 2b_1 \sinh \frac{k_1}{2} \left(\frac{a_1 e^{\xi_1}}{1 + b_1 e^{\xi_1}} \right) = \left[\ln(1 + b_1 e^{\xi_1}) \right]_{tt}, \quad (3.4.1.8)$$

şeklinde bulunur.

Burada $\xi_1 = k_1 n + 2 \sinh \frac{k_1}{2} t + w_1$, b_1, k_1 ve w_1 keyfi sabitlerdir.

2-Soliton:

Kabul edelim ki 2-soliton çözüm,

$$u_n(x, t) = \frac{a_{10} e^{\xi_1} + a_{01} e^{\xi_2} + a_{11} e^{\xi_1 + \xi_2}}{1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_3 e^{\xi_1 + \xi_2}}, \quad (3.4.1.9)$$

$$u_{n-1}(x, t) = \frac{a_{10} e^{\xi_1 - k_1} + a_{01} e^{\xi_2 - k_2} + a_{11} e^{\xi_1 + \xi_2 - k_1 - k_2}}{1 + b_1 e^{\xi_1 - k_1} + b_2 e^{\xi_2 - k_2} + b_3 e^{\xi_1 + \xi_2 - k_1 - k_2}}, \quad (3.4.1.10)$$

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{a_{10} e^{\xi_1 + k_1} + a_{01} e^{\xi_2 + k_2} + a_{11} e^{\xi_1 + \xi_2 + k_1 + k_2}}{1 + b_1 e^{\xi_1 + k_1} + b_2 e^{\xi_2 + k_2} + b_3 e^{\xi_1 + \xi_2 + k_1 + k_2}}, \quad (3.4.1.11)$$

olsun. Burada $\xi_i = k_i n + c_i t + w_i$ ($i = 1, 2$) dir. Açıkça (3.4.1.9)-(3.4.1.11) denklemleri (3.4.8)-(3.4.10) denklemleri ile aynı formdadır. (3.4.1.9)-(3.4.1.11) denklemlerini (3.4.1.3) denkleminde yerine yazılır ve yukarıdaki gibi benzer işlemler yapılarak aşağıdaki değerler elde edilir.

$$a_{10} = 2b_1 \sinh \frac{k_1}{2}, \quad a_{01} = 2b_2 \sinh \frac{k_2}{2}, \quad (3.4.1.12)$$

$$a_{11} = 2b_1 b_2 e^{B_{12}} \left(\sinh \frac{k_1}{2} + \sinh \frac{k_2}{2} \right),$$

$$b_3 = b_1 b_2 e^{B_{12}}, \quad c_i = 2 \sinh \frac{k_i}{2} \quad (i = 1, 2), \quad (3.4.1.13)$$

$$e^{B_{12}} = \frac{\sinh^2 \frac{k_1 - k_2}{2}}{\sinh^2 \frac{k_1 + k_2}{2}},$$

Böylece (3.4.1.12) ve (3.4.1.13) yardımıyla (3.4.1.1) denkleminin 2-soliton çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$e^{x_{n-1} - x_n} - 1 = 2 \left(\frac{b_1 \sinh \frac{k_1}{2} e^{\xi_1} + b_2 \sinh \frac{k_2}{2} e^{\xi_2} + b_1 b_2 \left(\sinh \frac{k_1}{2} + \sinh \frac{k_2}{2} \right) e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}}}{1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_1 b_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}}} \right)_t$$

$$= \left[\ln(1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_1 b_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}}) \right]_{tt}, \quad (3.4.1.14)$$

Burada $\xi_i = k_i n + 2 \sinh \frac{k_i}{2} t + w_i$ ($i = 1, 2$), b_1, b_2, k_1, k_2, w_1 ve w_2 keyfi sabitler, $e^{B_{12}}$ ifadesi de (3.4.1.13) de tanımlıdır.

3-Soliton:

Kabul edelim ki 3-soliton çözüm,

$$u_n(x, t) = \frac{f_{1,n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{f_{2,n}^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (3.4.1.15)$$

$$u_{n-1}(x, t) = \frac{f_{1,n-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{f_{2,n-1}^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (3.4.1.16)$$

$$u_{n+1}(x, t) = \frac{f_{1,n+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{f_{2,n+1}^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad (3.4.1.17)$$

olsun. Burada $\xi_i = k_i n + c_i t + w_i$ ($i = 1, 2, 3$) ve

$$\begin{aligned} f_{1,n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & a_{100}e^{\xi_1} + a_{010}e^{\xi_2} + a_{001}e^{\xi_3} + a_{110}e^{\xi_1+\xi_2} \\ & + a_{101}e^{\xi_1+\xi_3} + a_{011}e^{\xi_2+\xi_3} + a_{111}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2,n}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & 1 + b_1e^{\xi_1} + b_2e^{\xi_2} + b_3e^{\xi_3} + b_4e^{\xi_1+\xi_2} \\ & + b_5e^{\xi_1+\xi_3} + b_6e^{\xi_2+\xi_3} + b_7e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1,n-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & a_{100}e^{\xi_1-k_1} + a_{010}e^{\xi_2-k_2} + a_{001}e^{\xi_3-k_3} + a_{110}e^{\xi_1+\xi_2-k_1-k_2} \\ & + a_{101}e^{\xi_1+\xi_3-k_1-k_3} + a_{011}e^{\xi_2+\xi_3-k_2-k_3} + a_{111}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3-k_1-k_2-k_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2,n-1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & 1 + b_1e^{\xi_1-k_1} + b_2e^{\xi_2-k_2} + b_3e^{\xi_3-k_3} + b_4e^{\xi_1+\xi_2-k_1-k_2} \\ & + b_5e^{\xi_1+\xi_3-k_1-k_3} + b_6e^{\xi_2+\xi_3-k_2-k_3} + b_7e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3-k_1-k_2-k_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{1,n+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & a_{100}e^{\xi_1+k_1} + a_{010}e^{\xi_2+k_2} + a_{001}e^{\xi_3+k_3} + a_{110}e^{\xi_1+\xi_2+k_1+k_2} \\ & + a_{101}e^{\xi_1+\xi_3+k_1+k_3} + a_{011}e^{\xi_2+\xi_3+k_2+k_3} + a_{111}e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3+k_1+k_2+k_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2,n+1}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & 1 + b_1e^{\xi_1+k_1} + b_2e^{\xi_2+k_2} + b_3e^{\xi_3+k_3} + b_4e^{\xi_1+\xi_2+k_1+k_2} \\ & + b_5e^{\xi_1+\xi_3+k_1+k_3} + b_6e^{\xi_2+\xi_3+k_2+k_3} + b_7e^{\xi_1+\xi_2+\xi_3+k_1+k_2+k_3}, \end{aligned}$$

dir.

Açıktır görüldüğü gibi (3.4.1.15)-(3.4.1.17) denklemleri (3.4.1.1)-(3.4.1.3) denklemleri ile aynı formdadır. (3.4.1.15)-(3.4.1.17) denklemlerini (3.4.1.3) denkleminde yerine yazılır ve benzer işlemler yapılarak aşağıdaki değerler elde edilir.

$$a_{100} = 2b_1 \sinh \frac{k_1}{2}, \quad a_{010} = 2b_2 \sinh \frac{k_2}{2}, \quad a_{001} = 2b_3 \sinh \frac{k_3}{2}, \quad (3.4.1.18)$$

$$a_{110} = 2b_1 b_2 e^{B_{12}} (\sinh \frac{k_1}{2} + \sinh \frac{k_2}{2}), \quad a_{101} = 2b_1 b_3 e^{B_{13}} (\sinh \frac{k_1}{2} + \sinh \frac{k_3}{2}), \quad (3.4.1.19)$$

$$a_{011} = 2b_2 b_3 e^{B_{23}} (\sinh \frac{k_2}{2} + \sinh \frac{k_3}{2}), \quad (3.4.1.20)$$

$$a_{111} = 2b_1 b_2 b_3 e^{B_{12}+B_{13}+B_{23}} (\sinh \frac{k_1}{2} + \sinh \frac{k_2}{2} + \sinh \frac{k_3}{2}),$$

$$b_4 = b_1 b_2 e^{B_{12}}, \quad b_5 = b_1 b_3 e^{B_{13}}, \quad b_6 = b_2 b_3 e^{B_{23}}, \quad b_7 = b_1 b_2 b_3 e^{B_{12}+B_{13}+B_{23}}, \quad (3.4.1.21)$$

$$c_i = 2 \sinh \frac{k_i}{2} \quad (i=1,2,3), \quad e^{B_{ij}} = \frac{\sinh^2 \frac{k_i - k_j}{2}}{\sinh^2 \frac{k_i + k_j}{2}} \quad (1 \leq i < j \leq 3) \quad (3.4.1.22)$$

(3.4.1.18)-(3.4.1.22) değerlerini (3.4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa 3-soliton çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$e^{x_{n-1} - x_n} - 1 = [\ln(1 + b_1 e^{\xi_1} + b_2 e^{\xi_2} + b_3 e^{\xi_3} + b_1 b_2 e^{\xi_1 + \xi_2 + B_{12}} + b_1 b_3 e^{\xi_1 + \xi_3 + B_{13}} + b_2 b_3 e^{\xi_2 + \xi_3 + B_{23}} + b_1 b_2 b_3 e^{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + B_{12} + B_{13} + B_{23}})]_{tt}, \quad (3.4.1.23)$$

Burada $\xi_i = k_i n + 2 \sinh \frac{k_i}{2} t + w_i \quad (i=1,2,3), \quad b_1, b_2, b_3, k_1, k_2, k_3, w_1, w_2 \text{ ve } w_3$ keyfi sabitler, $B_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq 3)$ değeri, (3.4.1.22) de tanımlıdır.

$N \geq 4$ durumun da benzer şekilde işlemler yapılmaya devam edilirse N -soliton çözümler elde edilir. Bu benzer işlemler en yüksek mertebeden lineer olmayan üstel fonksiyonlarını sıfıra eşitlediğimizde denklem daha basit hale gelmektedir. (3.4.1.8),(3.4.1.14) ve (3.4.1.23)deki elde edilen çözümleri analiz ederek N -soliton çözümlerin genel formülü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e^{x_{n-1}-x_n} - 1 = \left[\ln \left(\sum_{\mu=0,1} \prod_{i=1}^N b^{\mu_i} e^{\sum_{i=1}^N \mu_i \xi_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_i \mu_j B_{ij}} \right) \right]_{tt}, \quad (3.4.1.24)$$

Burada özetle $\sum_{\mu=0,1}$ her biri $i = 1, 2, \dots, N$ için $\mu_i = 0, 1$ tüm kombinasyonları gösterir, $\xi_i = k_i n + 2 \sinh \frac{k_i}{2} t + w_i$, $e^{B_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2}{(k_i + k_j)^2}$ ($1 < j; i, j = 1, 2, \dots, N$) olmaktadır. Eğer $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ alınır ise (3.4.1.24) ile gösterilen çözüm ile [41] da bulunan sonucu birbirine benzerdir.

4. BÖLÜM

4.1 Giriş

Bu bölümde yapılan tez çalışmasından elde edilen sonuçlar ve öneriler ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

4.2 Sonuç ve Öneriler

Bu tezde lineer olmayan farklı KdV denklemlerinin tam çözümleri üstel fonksiyon yöntemiyle bulunmuştur. Ayrıca lineer olmayan oluşum denklemlerinin 1-soliton, 2-soliton, 3-soliton ve bu yöntemi daha da genelleştirerek N -soliton çözümleri elde edilmiştir. Böylece N -soliton çözümlerin varlığı da denklemin integrallenebilir olduğunu göstermektedir.

Benzer şekilde üstel fonksiyon yöntemi farklı lineer olmayan kısmi türevli denklemlere, denklem sistemlerine ve diferensiyel fark denklemlerine de uygulanabilir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılabilir. Bu sonuçlar bazı mühendislik ve fiziksel problemlerin çözümleri için temel teşkil edecektir.

Bu tez çalışmasındaki tüm hesaplamalar MAPLE paket programı ile yapılmıştır. Yine MAPLE paket programı yardımıyla alt programlar yazılarak farklı denklemlerin çözümleri elde edilebilir. Yapılan literatür çalışmalarında denklemlerin çözümleri için kullanılan program kodları çoğunlukla açık şekilde verilmemektedir. Bu nedenle yazılacak olan alt programlarla buna açıklık getirilebilir.

Üstel fonksiyon yöntemi ile elde edilen çözümlerin, $\tanh$ ve $\sin$ - $\cos$ yöntemlerinden daha geniş çözümlere sahip olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Koca K., Kısmi Türevli Denklemler, Gündüz Yayıncılık, 2001.
- [2] Taşcan F., İntegrallenebilen Hamiltoniyen Sistemler ve Perturbasyon (Bozulma) Teori, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Eskişehir, 2002
- [3] Irk D., Bazı Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem Sistemlerinin B-spline Sonlu Elemanlar Çözümleri, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi, Eskişehir, 2007.
- [4] Türker E., Can E., Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Değişim Yayınları, 1997.
- [5] Qian X-M., Lou S-Y., Hu X-B., Variable separation approach for a differential-difference system: special Toda equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, 37 (2004) 2401–2411.
- [6] Baldwin D., Goktas U., Hereman W., Symbolic computation of hyperbolic tangent solutions for nonlinear differential-difference equations, Computer Physics Communucations. 163 (2004) 203–217.
- [7] Zhu J-M., Hyperbolic function method for solving nonlinear differential-difference equations, Chinese Physics, 14 (2005) 1290–1295.
- [8] Dai C., Cen X., Wu S., The application of He's Exp-function method to a nonlinear differential-difference equation, Chaos, Solitons and Fractals, 41 (2009) 511-515.
- [9] Wazwaz A.M., The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, Applied Mathematics and Computation, 154, 3 (2004) 713-723.
- [10] Yusufoglu E., Bekir A., Exact solutions of coupled nonlinear Klein–Gordon equations, Mathematical and Computer Modelling, 48, 11-12 (2008) 1694-1700.
- [11] Yusufoglu E., Bekir A., A travelling wave solution to the Ostrovsky equation, Applied Mathematics and Computation, 186, 1 (2007) 256-260.
- [12] Wazwaz A.M., A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations, Mathematical and Computer Modelling, 40, 5-6 (2004) 499-508.
- [13] Yusufoglu E., Bekir A., Solitons and periodic solutions of coupled nonlinear evolution equations by using the sine-cosine method, International Journal of Computer Mathematics, 83, 12 (2006) 915-924.
- [14] Bekir A., New Solitons and Periodic Wave Solutions For Some Nonlinear Physical Models by Using The Sine-Cosine Method, Physica Scripta, 77, 4 (2008) 501-504.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- [15] Wazwaz A.M., The extended tanh method for abundant solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *Applied Mathematics and Computation*, 187, 2 (2007) 1131-1142.
- [16] Bekir A., Applications of the extended tanh method for coupled nonlinear evolution equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, 9 (2008) 1748-1757.
- [17] Yusufoglu E., Bekir A., On the Extended Tanh Method Applications of Nonlinear Equations, *International Journal of Nonlinear Science*, 4, 1 (2007) 10-16.
- [18] Wu XH., He JH., Exp-Function Method and its Application to Nonlinear Equations, *Chaos Solitons and Fractals*, 38, 3 (2008) 903-910.
- [19] Bekir A., Boz A., Exact Solutions for a Class of Nonlinear Partial Differential Equations using Exp-Function Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8,4 (2007) 505-512.
- [20] Yusufoglu E., New solitary solutions for modified forms of DP and CH equations using Exp-function method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 5 (2009) 2442-2447.
- [21] Taşcan F., Bekir A., Travelling wave solutions of the Cahn-Allen equation by using first integral method, *Applied Mathematics and Computation*, 207, 1 (2009) 279-282.
- [22] Wang M.L., Li X.Z., Zhang J.L., The $(\frac{G'}{G})$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, 372, 4 (2008) 417-423.
- [23] Bekir A., Application of the $(\frac{G'}{G})$ -expansion method for nonlinear evolution equations, *Physics Letters A*, 372, 19 (2008) 3400-3406.
- [24] Aslan İ., Öziş T., Analytic study on two nonlinear evolution equations by using the $(\frac{G'}{G})$ -expansion method, *Applied Mathematics and Computation*, 211, 2 (2009) 531-536.
- [25] He JH., Wu XH., Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 3 (2006) 700-708.
- [26] He JH., Wu XH., Solitary Solutions Periodic Solutions and Compacton- Like Solutions using the Exp-Function Method, *Computers Mathematics with Applications*, 54, 7-8 (2007) 966-986.
- [27] Abdou M., He JH., New Periodic Solutions for Nonlinear Evolution Equations using Exp-Function Method, *Chaos Solitons and Fractals*, 34, 5 (2007) 1421-1429.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- [28] Dai C., Chen J., Exact Solution of (2+1)-Dimensional Stochastic Broer-Kaup Equation, *Physics Letters A*, 373, 14 (2009) 1218-1225.
- [29] Ebaid A., Exp-function method exactly solving a KdV equation with forcing term, *Physics Letters A*, 365, (2007) 213-219.
- [30] Zhang H., Extended Jacobi elliptic function expansion method and its applications, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12, 5 (2007) 627-635.
- [31] Zhang H., New exact travelling wave solutions for some nonlinear evolution equations, *Chaos Solitons and Fractals*, 26, 3 (2005) 921-925.
- [32] Wazwaz A.M., Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method, *Chaos Solitons and Fractals*, 12, 12 (2001) 2283-2293.
- [33] Zhang S., Exp-function method exactly solving a KdV equation with forcing term, *Applied Mathematics and Computation*, 197, 1 (2008) 128-134.
- [34] Zhang S., Application of Exp-function method to a KdV equation with variable coefficients, *Physics Letters A*, 365 (2007) 448-453.
- [35] Taogetusang, Sirendaoerji, The Jacobi elliptic function-like exact solutions to two kinds of KdV equations with variable coefficients and KdV equation with forcible term, *Chinese Physics*, 15 (2006) 2809-2018.
- [36] Marinakis V., The Exp- Function Method and N-Soliton Solutions, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 63a (2008) 653-656.
- [37] Zhang S., Zhang H.-Q., Exp-function method for N- soliton solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, 373, (2009) 2501-2505.
- [38] Zhang S., Zhang H.Q., An Exp-function method for new N -soliton solutions with arbitrary functions of a (2+1)-dimensional vcBK system, *Computers Mathematics with Applications*, (Baskıda)
- [39] Zhu S.D., Exp-function method for the hybrid-lattice system, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8 (2007) 461–464.
- [40] Zhu S.D., Exp-function method for the discrete mKdV lattice, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8 (2007) 465–468.
- [41] Dai C.Q., Wang Y.Y., Exact travelling wave solutions of Toda lattice equations obtained via the Exp-function method, , *Zeitschrift für Naturforschung A*, 63 (2008) 657-662.

KAYNAKLAR DİZİNİ(devam)

- [42] Wadati M., Transformation theories for nonlinear discrete systems, Progress of Theoretical Physics Supplement, 59 (1976) 36–63.
- [43] Liu C-S., Exponential function rational expansion method for nonlinear differential-difference equations, Chaos, Solitons and Fractals 40 (2009) 708–716.
- [44] Zhu J.-M., Homotopy perturbation method for the nonlinearity relativistic Toda lattice equations, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 31 (2008) 373-381.
- [45] Wu X.F., Hua G.S., Exact discrete Exp-function solutions of the relativistic Toda lattice system, Journal of Physics: Conference Series, 96, (2008) 012175.
- [46] Bekir A., Application of the Exp-function method for nonlinear differential-difference equations, Applied Mathematics and Computation, 215, 11 (2010) 4049–4053.
- [47] Zhang S., Zhang H.Q., Exp-Function Method for N -Soliton Solutions of Nonlinear Differential-Difference Equations, Zeitschrift für Naturforschung A, (Baskıda)