

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**UZAYABİLİR-SÜREKLİ FİBERLERLE TAKVİYE EDİLMİŞ
KOMPOZİTLERİN İNVARİYANTLAR CİNSİNDEN NON-
LİNEER DAVRANIŞI İÇİN BÜNYE BAĞINTILARI**

Erhan ADIGÜZEL

DanışmanYrd. Doç. Dr. Melek USAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
Isparta 2011**

TEZ ONAYI

Erhan ADIGÜZEL tarafından hazırlanan “**Uzayabilir-Sürekli Fiberlerle Takviye Edilmiş Kompozitlerin İnvaryantlar Cinsinden Non-Lineer Davranışı için Bünye Bağntıları**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi Makine Eğitimi Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Melek USAL

Süleyman Demirel Üniversitesi Teknoloji Fakültesi İmalat Mühendisliği Bölümü

Jüri Üyeleri :

Yrd.Doç. Dr. Mustafa Reşit USAL

Süleyman Demirel Üniversitesi Teknoloji Fakültesi İmalat Mühendisliği Bölümü

Yrd. Doç. Dr. Ümran ESENDEMİR

Süleyman Demirel Üniversitesi Müh. Mim. Fak. Makine Mühendisliği Bölümü

Doç.Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Sürekli Ortam Modeli	12
1.2. Sürekli Ortam Hareketi.....	14
1.3. Şekil Değiştirme.....	16
1.4. Hareket.....	25
1.4.1 Yay ve hacim elemanların maddesel türevi	28
1.4.2 Green - Gauss (diverjans) teoremi	31
1.5. Denge Denklemleri.....	34
1.5.1. Kütleinin korunumu	34
1.5.2. Lineer momentum denkliği.....	35
1.5.3. Açısal momentum denkliği	35
1.5.4. Enerji denkliği.....	35
1.5.5. Termodinamiğin ikinci kanunu (Clausius - Duhem eşitsizliği)	36
1.6. Fiber Kinematiği ve Deformasyonunun Geometrisi	37
2. KAYNAK ÖZETLERİ	42
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	48
3.1. Materyal	48
3.2. Yöntem.....	59
4. BULGULAR	64
4.1 Gerilmenin Maddesel Formu	64
4.2. Gerilmenin Uzaysal Formu	75
5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	84
6. KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	94

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

UZAYABİLİR-SÜREKLİ FİBERLERLE TAKVİYE EDİLMİŞ KOMPOZİTLERİN İNVARİYANTLAR CİNSİNDEN NON- LİNEER DAVRANIŞI İÇİN BÜNYE BAĞINTILARI

Erhan ADIGÜZEL

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Makina Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Melek USAL

Bu çalışmada uzayabilir-sürekli fiberlerle takviye edilmiş izotrop matris malzemesinden ibaret kompozitlerin nonlinear davranışını belirlemek için teorik bir araştırma üstlenilmiştir. Teori sürekli ortamlar mekaniğinin kapsamı içinde formülize edilmiştir. Fiber dağılımları nedeniyle anizotrop bir özellik taşıyan anizotropik yapıdaki kompozit malzemedeki, matris malzemenin izotrop bir ortam olduğu farz edilmiştir. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde genel termodinamik denge denklemleri, Clausius-Duhem eşitsizliği, bünye teorisi aksiyonları, fiberlerin deformasyon geometrisi ve kinematiği ile ilgili denklemler belirleyici olmuştur. Dış yüklere maruz kalan kompozit malzeme tepkisini gerilme şeklinde ifade etmektedir. Uygulamalarda makul kabul olarak görülen ortamın sıkışmazlığı göz önüne alınarak gerilmeye ayıt bünye denklemi elde edilmiştir. Termodinamik kısıtlamaların neticesi olarak gerilme potansiyeli fonksiyonunun deformasyon tansörüne fiber vektörlerine ve sıcaklığa bağlı olduğu görülmüştür. Gerilme potansiyelinin argümanlarını belirlemek için malzeme üzerine konulan izotropi kısıtlamasından dolayı invaryant teorisine ait bulgular bir metot olarak kullanılmıştır. Etkileşimlerin nonlinear olarak göz önüne alınacağı var sayılmıştır. Gerilmenin nonlinear bünye denklemi hem maddesel hem de uzaysal formatlarda elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Balans denklemleri, Bünye aksiyonları, Sürekli ortam mekaniği, Fiber takviyeli kompozitler, İnvaryatlar, İzotropik Matris malzeme, Nonlinear etkileşimler, Gerilme.

2011, 94 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CONSTITUTIVE RELATIONS FOR NONLINEAR BEHAVIOR OF EXTENSIBLE- CONTINUOUS FIBERS REINFORCED COMPOSITES IN TERMS OF INVARIANTS

Erhan ADIGÜZEL

Süleyman Demirel University School of Applied and Natural Sciences

Supervisor: Asst. Prof. Melek USAL

In this study, a theoretical investigation is undertaken determine the nonlinear behavior of composites consisting of an isotropic matrix material reinforced by extensible-continuous fibers. The theory is formulated in the scope of continuum mechanics. In the composite material, which has an anisotropic structure with the property of being an anisotropic due to fiber distributions, matrix material is supposed to be an isotropic medium. General thermodynamic balance equations, Clausius-Duhem inequality, constitutive theory axioms, equations dealing with to kinematics and deformation geometries of fibers have been determining in the process of this study. The reaction of composite material subject to external loads is expressed in stress. Considering incompressibility of the medium, this assumption is fairly meaningful for the practical applications, constitutive equation of the stress has been obtained. It has been observed that as a result of thermodynamic constraints, the stress potential function is dependent on the deformation tensor, the fiber vectors and the temperature. To determine arguments of the stress potential functional, findings relating to the theory of invariants have been used as a method because of that isotropy constraint is imposed on the material. It is assumed that interactions will be considered nonlinear. The nonlinear constitutive equation of the stress has been obtained in both material and spatial coordinates.

KEYWORDS: Balance equations, Constitutive axioms, Continuum mechanics, Fiber-reinforced composites, Invariants, Isotropic matrix material, Nonlinear interactions, Stress.

2011, 94 pages

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın yapılmasında yardım ve desteklerini esirgemeyen, çalışmayı titizlikle yöneten ve beni yönlendiren değerli Danışman Hocam Yrd. Doç. Dr. Melek USAL’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarımda karşılaştığım problem ve engellerde bilgi ve tecrübelerine başvurduğum değerli Hocam Yrd. Doç. Dr. M. Reşit USAL’a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri bulunan Annem, Babam ve Kardeşime şükranlarımı sunuyorum.

Erhan ADIGÜZEL

ISPARTA, 2011

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Kompozit malzemelerin üretildikleri malzeme sınıfları.....	1
Şekil 1.2. Değişik şekilli fiber takviyeli kompozitler.....	3
Şekil 1.3. Fiber ve reçine kullanarak kompozit malzemenin üretilmesi.....	4
Şekil 1.4. Sürekli ve kesikli fiber takviyeli kompozitler.....	4
Şekil 1.5. Ortalama yoğunluğun değişimi.....	13
Şekil 1.6. Maddesel ve uzaysal koordinatlar.....	14
Şekil 1.7. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme	17
Şekil 1.8. Maddesel türev	26
Şekil 1.9. Yay elemanındaki değişim.....	27
Şekil 1.10. Hareketli süreksizlik yüzeyi	33
Şekil 1.11. Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi.....	37
Şekil 1.12. İki fiber ailesinin dağılımı a)Deformasyondan önce b)Deformasyondan sonra.....	39

SİMGELER DİZİNİ

$A(X)$	A – Fiber ailesinin deformasyondan önceki dağılımı
$a(X)$	a – Fiber ailesinin deformasyondan sonraki dağılımı
$B(X)$	B – Fiber ailesinin deformasyondan önceki dağılımı
$b(X)$	b – Fiber ailesinin deformasyondan sonraki dağılımı
a	İvme
$a_1, a_2, \dots, a_6$	Serbest enerjiyi tanımlayan polinomun katsayıları
C_{KL}, C_{KL}^{-1}	Gren – Piola deformasyon tansörleri
c_{kl}, c_{kl}^{-1}	Cauchy – Finger deformasyon tansörleri
d_{kl}	Şekil Değiştirme (genleme) hızı tansörü
dL, dl	Deformasyondan önceki ve sonraki elemanter fiber uzunluğu
dS, ds	Deformasyondan önceki ve sonraki köşegen uzunluğu
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$	Zamana göre hareketi takip eden türev
E	İç enerji
E_{KL}, e_{kl}	Maddesel (lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörü
f	Birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet
$F_{kK} = x_{k,K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}$	Deformasyon gradyanı
h	Birim kütle başına ısı kaynağı
$I_i (i=1, 2, \dots, 6)$	İnvaryant değerler
$I_K, i_k (K, k=1, 2, 3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlardaki birim vektörler
$J = \det F$	Deformasyon gradyanına ait matrisin determinanı
M	Momentum
K	Kinetik enerji
L	Hız gradyanı tansörü
m	Kütle
n	Dış birim normal vektör
P	Maddesel koordinatlarda parçacığın işgal ettiği nokta
p	Hidrostatik basınç
p	P noktasının t anında uzaysal koordinatlardaki yeri

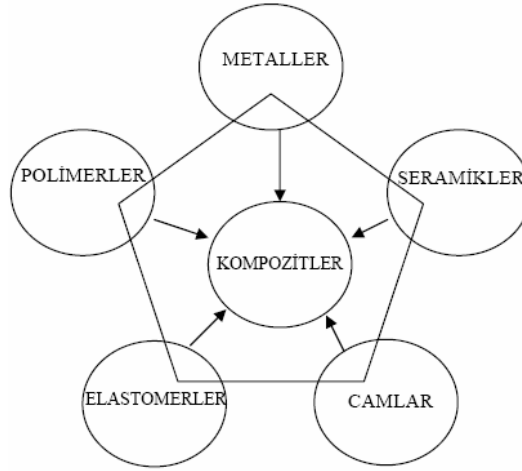
q	Isı akısı vektörü
Q	Maddesel koordinat sisteminin tam ortogonal transformasyon matrisi
$Q_K(X)=X_{K,k} q_k$	Maddesel koordinat sisteminde ısı vektörü
R, r	Maddesel noktanın deformasyondan önceki ve sonraki konum vektörleri
S	Simetri grubuna ait dönüşüm matrisi
t	Gerilme Tansörü
$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl}$	Maddesel koordinatlarda gerilme tansörü
$t(n)$	n yüzeyine tesir eden gerilme vektörü
u	Yer değiştirme vektörü
V, v	Deformasyondan önceki ve sonraki hacim
$V_{k,l} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$	Deformasyon hızı tansörü
w_{kl}	Spin veya çevri tansörü
δ_{KL}, δ_{KL}	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda kronecker delta
$\alpha_i, \beta_i, (i=1, 2, \dots)$	Denklemleri kısaltmak için kullanılan kısaltmalar
ω	Açısal hız vektörü
Σ	Birim kütle başına iç enerji
$\Sigma_{KLM}, \Sigma_{klm}$	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda permütasyon sembolü
η	Birim kütle başına entropi yoğunluğu
$Q(X,t)$	Bir t anında X maddesel noktasının mutlak sıcaklığı
λ_a	A fiber ailesinin uzama oranı
λ_b	B fiber ailesinin uzama oranı
$\rho\gamma$	Birim kütle başına entropi üretimi
ρ_0, ρ	Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
σ	Sürekli ortam içinde yer alan süreksizlik yüzeyi
$\Sigma \equiv \rho_0 \psi$	Gerilme potansiyeli
$X_K, x_k (K,k=1,2,3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
X, x	Maddesel ve uzaysal koordinatlar

$\psi \equiv \varepsilon - \theta\eta$	Genelleştirilmiş serbest enerji yoğunluğu
∇	Gradyan operatörü
Γ	Toplam entropi üretimi
ψ	Birim kütle başına herhangi bir alan büyüklüğü
λ, Λ	Shifter (kaydırıcı)

1. GİRİŞ

Bu çalışma, uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviyeli kompozit bir malzemenin non-lineer davranışını temsil eden bünye bağıntılarının elde edilmesi amacını taşımaktadır. Modern sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilke ve aksiyomları, bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde yol gösterici ve belirleyici olmuştur. Hazırlanan bu tezin bilimsel bütünlük içindeki özel yerini tespit etmek için gerekli görülen kavramlarla ilgili genel bilgiler sistematik içinde incelenmiştir.

Hayatı kolaylaştıran kullanılabilir cisimler yapmak amacı ile doğal ya da yapay yollardan üretilmiş maddelere malzeme denir. Günümüzde birçok malzeme çeşidi bulunmaktadır. Malzemeler cinsine göre; metalik, seramik, polimer, kompozit, elastomer, cam malzemeler vb. olarak sınıflandırılabilir. Şekil 1.1’de kompozit malzemelerin üretiminde kullanılabilecek malzeme sınıfları görülmektedir.



Şekil 1.1. Kompozit malzemelerin üretildikleri malzeme sınıfları

Günümüzde mekanik ve malzeme bilimindeki gelişmeler ve eş zamanlı olarak ortaya çıkan dizayn ve imalat teknolojilerindeki ilerlemeler çok sayıda yeni ve ileri derecede mühendislik malzemesi üretti. Bu fonksiyonel malzemeler, mekanik, elektrik, magnetik alan veya ısınma gibi bir dış fiziksel olayın etkisinde kaldığı zaman şeklini ve maddesel özelliklerini değiştirme konusunda farklı davranışlar sergilerler.

Kompozit malzeme, iki ya da daha fazla sayıdaki, aynı veya farklı gruptaki malzemelerin en iyi özelliklerini, yeni ve tek bir malzemede toplamak amacıyla, makro düzeyde birleştirilmesiyle oluşturulan malzemeler olarak adlandırılır. Bir kompozit malzeme bünyesinde, çekirdek olarak adlandırılan takviye elemanı ve bunun etrafını çevreleyen matris malzemesinin bulunduğu bilinmektedir. Takviye elemanı olarak değişik morfolojiye sahip kısa ve uzun elyaflar, Whiskerler (kılcal kristaller), kırılmış veya parçacıklı seramikler kullanılmaktadır. Bunların temel fonksiyonu gelen yükü taşımak ve matrisin rijitlik ve dayanımını artırmaktır.

Kompozit bir malzemelerin, metal malzemelere göre avantaj ve dezavantajları şu şekilde sıralayabiliriz.

Avantajları:

- Hafiflik.
- Şeffaflık özelliği.
- Titresimleri absorbe edilme özelliği sağlaması.
- Kompozitlerden bazıları çok yüksek akma sınırı değerlerine sahiptir.
- Korozyon problemi yoktur.
- Kopma uzaması metallere göre daha yüksektir.
- Kompozitler sıcaklıktan etkilenmez.
- Yorulma dirençleri oldukça yüksektir.

Dezavantajları:

- Metallere yapışmazlar.
- Fırınlamadan (pişirmeden) kullanılamazlar.
- Değişik doğrultuda değişik mekanik özelliklere sahiptir
- Üretimi nispeten pahalıdır.

Kompozit malzeme matris adı verilen bir ana bileşenle, yüksek mukavemete ve yüksek elastik modülüne sahip olan takviye edici (fiber, tane, tanecik, dolgu, kat) olarak adlandırılan yapısal bileşenlerden oluşurlar. Kompozitleri başlıca üç ana grupta inceleyebiliriz (Spencer, 1971).

- Fiber takviyeli kompozitler
- Tabakalı kompozitler
- Tanecikli kompozitler

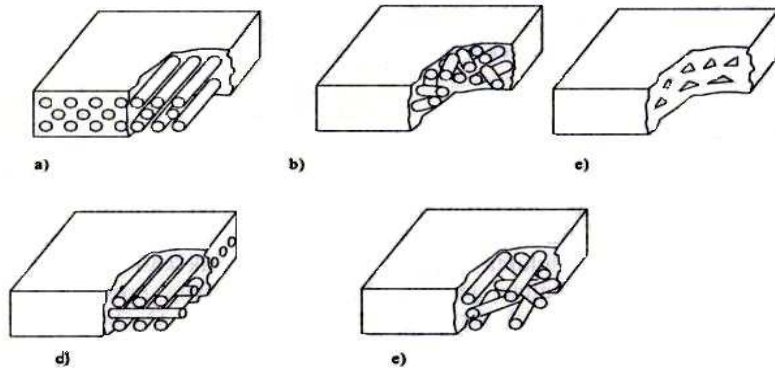
Kompozit aslında karışım anlamına gelmekle birlikte çözünen ve çözen bileşenlerden oluşmaz. Bileşenler arasında atom alışverişi bulunmamaktadır. Geleneksel malzemelerde mevcut olmayan ya da sınırlı olan bazı özellikleri geliştirmek amacıyla birbiri içerisinde çözünemeyen farklı özelliklere sahip en az iki bileşenden oluşan malzemelere kompozit malzemeler denir. Kompozit bileşenleri kimyasal olarak birbirlerini etkilemezler ve özellikle insan tarafından dizayn edilerek üretilirler. Kompozit bileşenlerinin atom boyutu 300 nano altında ise bu tür kompozitlere nano kompozit denir. Malzemeler birbiri içerisinde çözünürse bu tür malzemeler kompozit değil alaşım olur. Kompozit malzemelerde yapıyı oluşturan bileşenler birbiri içinde çözünmeleri istenmez.

Fiber takviyeli kompozit malzemeler (FTK), farklı şekillerde sınıflandırılabilirler. Takviye elemanının şekline göre şöyle sınıflandırılırlar;

- a) Sürekli fiber takviyeli kompozitler
- b) Kesikli fiber takviyeli kompozitler

Yapıya bağlı olarak yapılan sınıflandırma ise,

- a) Tek katlı kompozitler
- b) Çok katlı kompozitler

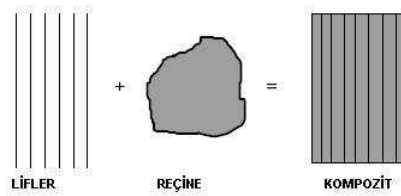


Şekil 1.2. Değişik şekilli fiber takviyeli kompozitler

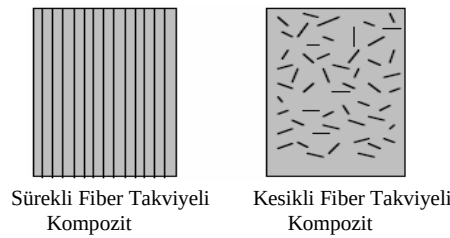
Fiber takviyeli kompozit malzemelerde bileşen malzemeler, moleküler boyutta birbirinden farklıdır ve mekanik olarak birbirinden ayrılabilirler. Kompozit malzemelerin son özellikleri, bileşen malzemelerin özelliklerinden daha iyidir (Aran, 1990; Mazumdar, 2002).

Tipik kompozit malzeme, takviye fiberlerin Şekil 1.2.' de görüldüğü gibi, matris içine yerleştirilmesiyle olur. Fiberler kısa veya sürekli fiber olabilir. Polimerik matrislerin kullanıldığı kompozitler daha yaygınlaşmıştır ve birçok endüstride kullanılmaktadır (Mazumdar, 2002).

Kompozitler hakkında hatırlanması gereken önemli bir nokta; yükü fiberler taşımaktadır ve kompozit malzemenin dayanımı fiber eksenine doğrultusunda en büyük değerdedir. Yük doğrultusunda yapılan sürekli fiber takviyesi, matris malzemenin özelliklerini çok aşan özelliklerle sağlamaktadır. Aynı fiber kısa fiber haline getirildiğinde (kesildiğinde), sürekli fiberlere göre daha düşük özellikler gösterirler.



Şekil 1.3. Fiber ve reçine kullanarak kompozit malzemenin üretilmesi (Mazumdar, 2002)



Şekil 1.4. Sürekli ve kesikli fiber takviyeli kompozitler (Mazumdar, 2002)

Kompozit malzemelerde çeşitli form ve oranlarda takviye fazı ile bu malzemenin çevresinde hacimsel olarak çoğunluğu oluşturan matris malzeme bulunmaktadır. Bu iki malzeme grubundan, takviye malzemesi kompozit malzemenin mukavemet ve

yük taşıma özelliğini, matris malzeme ise plastik deformasyona geçişte oluşabilecek çatlak ilerlemelerini önleyici rol oynamakta ve kompozit malzemenin kopmasını geciktirmektedir.

Matris olarak kullanılan malzemenin bir amacı da fiber malzemeleri yük altında bir arada tutabilmek ve yükü fiberler arasında homojen olarak dağıtmaktır. Böylece fiber malzemelerde plastik deformasyon gerçekleştiğinde ortaya çıkacak çatlak ilerlemesi olayının önüne geçilmiş olur. Kompozit malzemelerin avantajı, bileşenlerinin en iyi özelliklerini bir araya getirmesidir.

Kompozit malzeme üretilmesiyle genel olarak yüksek dayanım, yüksek rijitlik, yüksek yorulma dayanımı, mükemmel aşınma direnci, yüksek sıcaklık kapasitesi, iyi korozyon direnci, iyi termal ve ısı iletkenliği, düşük ağırlık, çekicilik ve estetik görünüm gibi özellikler sağlanabilir. Bütün bu özellikler aynı zamanda oluşmaz ve herhangi bir uygulama için böyle bir gereksinime ihtiyaç yoktur. Fakat yukarıda belirtilen bu özellikler için gerekli şartlar, uygun matris ve takviye elemanı çifti, üretim tekniği, optimizasyonu, bileşenlerin mukavemet özellikleri ve diğer faktörler göz önüne alınarak üretim yapılırsa istenilen özelliği elde etmek mümkündür. Bu avantajları yanında bazı dezavantajları da mevcuttur. Bunlardan bazıları, üretim güçlüğü, pahalı olması, işlenmesinin güç olması, gerekli yüzey kalitesinin elde edilemeyişi ve diğer malzemeler gibi geri dönüşümünün olmayışı gibi sıralanabilir (Şahin, 2006).

Kompozit malzemeler için kullanımda çok farklı fiber ve matris malzemeler bulunmaktadır. Mühendislikte önemli olan diğer bir nokta ise fiberlerin dayanımının yüksek ve maliyetinin düşük olmasıdır. Bor, cam, karbon grafit (farklı karbon içerikli), organik fiber aramid, seramik fiber silikon karpit ve alüminyum oksit fiberlere örnek olarak verilebilir. Termoplastik polimerler, termoset polimerler, metaller (alüminyum, titanyum ve bakır gibi) ve seramikler matris malzemelere örnek olarak verilebilir (Holzapfel, 2000).

Fiber takviyeli kompozit malzemeler endüstri mühendisliğinde ve tıp alanında değişik uygulamalarda kullanılır. Endüstride kemerlerin ve yüksek basınç tüplerinin

sonlu elastik tepkisi, tekerleklerde kullanılan çelik takviyeli lastikler ve elektronik aletlerde kullanılan ufak bir silikon parçadaki çok kısımlı elektronik devreler gibi birçok uygulama alanı kompozit malzemelerle ilgilidir. Kalça eklemi dikme aleti ve hafif tekerlekli sandalye ise tıp alanındaki uygulamalardır (Holzapfel, 2000).

Kompozit malzemeler en genel anlamda doğal kompozitler ve yapay kompozitler olmak üzere ikiye ayrılır. Doğal ve yapay kompozit malzemelerde fonksiyonel açıdan benzerlikler olmakla birlikte imalat yöntemleri ve kullanım maksatları açısından çok büyük farklılıklar vardır. Ağaç, kemik, adale, ve diğer biyolojik dokular gibi doğal kompozitler insanoğlunun belli maksatlar doğrultusunda gerçekleştirmiş olduğu bir imalat ve fabrikasyon işleminin sonucu değildir (Usal, 2001). Bu çalışmada ise sürekli ortamlar mekaniği kapsamında kompozitlerin makro davranışlarının bir göstergesi olan bazı malzeme modüllerini ve bu davranışları yöneten bünye denklemleri incelemektedir.

Doğal kompozitlerin en yaygın olanı ahşap yapı elemanlarıdır. Ahşabın uzunlamasına boşluklu hücreleri, değişik sarım açlarına sahip olan spiral şeklinde sarılmış selüloz fiberlerden yapılmıştır. En önemli doğal kompozitlerden bir diğeri de, organik fiberlerden, küçük inorganik kristallerden, su ve yağdan meydana gelen kemik yapısıdır. İnsan bedeninde ve hayvanlarda kolajen adı verilen ve lifli proteinlerden oluşan kompozit bir malzeme vardır. Canlıların vücudundaki bu kolajen maddesi deriye, bağırsak, kıkırdak, tendon, kemik ve dişlere (diş minesinin dışında) sağlam bir yapı kazandırır. Bu bileşenlerin oranları kemiğin türüne, yaşına ve nasıl bir canlıya ait olduğuna göre değişmekle birlikte, kolajen denilen organik fiberlerin toplam kemik ağırlığındaki oranı yaklaşık olarak % 35 civarında olmaktadır.

Deri, atardamar, toplardamar, ak ciğer ve kalp duvarları gibi belirli bir ön şekil değiştirmeden sonra yük taşıma özelliğine sahip olan biyolojik malzemelere yumuşak doku adı verilmektedir. Bu dokular da elastin ve kolajen adı verilen lifler ile bunların arasını dolduran mucopolyscharides adı verilen bir dolgu malzemesinden oluşmaktadır. Bu liflerin geometrik dağılışı ve oranları bir dokudan diğer dokuya farklılık gösterir (Demiray, 1985). Çeşitli durumlarda dokuların

zedelenmesi, protez ve suni organların projelendirilmesi ve damarlar içerisinde pulsatif kan akımının incelenmesi gibi bir çok fizyolojik araştırmalarda, yumuşak dokuların dış kuvvetler altındaki mekanik davranışlarının ve bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir (Demiary ve Dost, 1987). Biyolojik yapı elemanlarının sürekli ve / veya süreksiz fiberlerle takviye edildiğini farz ederek bu yapılara uygun matematiksel modeller oluşturulmuştur Lanir (1980, 1983), Fung (1981), Lipson (1984), Egan (1987) ve Woo vd. (1993).

Timsah derisi de mükemmel bir doğal kompozittir. Timsahın derisi fiberglasla aynı yapıda bir malzemedir. Bilim adamları okun, bıçağın ve hatta bazen kurşunların bile işlemediği timsah derisinin neden bu kadar sağlam olduğunu yakın bir zamana kadar bilmiyorlardı. Konuyla ilgili yapılan araştırmalar çok ilginç sonuçlar vermiştir: Timsahın sırt derisinde özel bir doku bulunmaktadır. Bu dokuya sağlamlığını veren malzeme, içinde kullanılan kolajen proteini lifleridir. Bu liflerin özelliği ise dokuların içerisine eklenerek dokunun yapısını güçlendirmeleridir. (Bülbül, 2007)

Son yıllarda, lifle güçlendirilmiş polimer kompozitlerin, yüksek spesifik mukavemet ve modülleri nedeni ile önemi gittikçe artmaktadır. Aramid, cam lifi kullanılan kompozitlerin, otomobil ve inşaat alanında kullanımları yaygın olmasına karşın, doğal selülozik liflerin kullanımına ilgide artmaktadır. Bu lifler, karbon, aramid lifleri kadar mukavim olmasa da, en önemli avantajları düşük fiyat ve biyolojik olarak parçalanabilir olmalarıdır. Ayrıca, selülozik yapılar ısı ve neme karşı mükemmel bir yalıtım göstermektedirler. Selülozik lifler 4 farklı grup altında incelenebilir;

- Tohum lifleri: Pamuk
- Sap lifleri: Keten, Kenevir, Jüt, Rami
- Yaprak lifleri: Manila, Sisal, Muz, Ananas
- Meyve lifleri: Hindistan cevizi (Bozacı, 2007).

Doğal bambu lifleri popüleritesi artan liflerdendir. Üstün konfor ve yüksek performans özellikleri sayesinde giysilerde, ev tekstillerinde, kompozitlerde, jeotekstillerde, endüstriyel tekstillerde kullanılmaktadır. Bambu lifleri vasküler

demetler şeklinde bitkinin yapısında dağınık bir şekilde bulunmaktadır. Bambu bitkisinin yaşı ile içerdiği lif oranı arasında bir bağlantı bulunmaktadır. Bitkinin yapısındaki lifler, gövde içinde sıkı ve aksial bir şekilde yerleşime sahiptir. Özellikle bitkinin üst ve dış kısımlarında lif yoğunluğu daha fazladır. Bu lifler yüksek elastikliğe sahip, gövdeye paralel bir şekilde yerleşmiş ve yaklaşık 40 kN/cm^2 'lık kopma mukavemetine sahiptir (Karahan, 2006).

İki fiber ailesi ile takviye edilmiş bir kompozitlerin fiber doğrultusundaki katılığı, fiberlere dik doğrultulardan daha büyüktür ve fiberlerin bütün malzemede düzgün bir şekilde dağıldığı durum göz önüne alındığından tercihli doğrultuya göre enine izotropi söz konusudur. Tercihli doğrultuya dik doğrultu boyunca malzeme tepkisi izotrop tur (Holzapfel, 2000).

Kompozitlerde fiberler kuvvet yönüne paralel veya dik yönde veyahut rast gele dağılmış durumda bulunurlar. Fiberler yönlenmiş durumda iken kompozit büyük ölçüde anizotrop olur. Fiberler rast gele dağıtılmış ise düzlemsel boyutta izotrop olurlar. Fiberlerle kuvvet birbirine paralel ise fiberlerle matris aynı miktarda şekil değiştirir. Buna eş şekil değiştirme hali denir.

Elastik cisimlerde gerilme durumu cismin şekli değiştirilirken izlenen yola bağlı değildir ve cismi şeklini değiştirmeye zorlayan etken ortadan kaldırılırsa cisim ilk şekline geri döner. Bu özellik elastiklik olarak adlandırılır ve bu özelliği taşıyan cisimler elastik cisim adını alır. Deneyimler elastik cismin gerilmesiz olduğu bir durumun varlığını gösterir. Bu duruma doğal durum denir ve elastik bir cisim daima doğal durumuna dönmeye çalışır. Hiperelastik cisimler ortamın bir X parçacığında ve t anındaki gerilme tansörünün, sadece aynı yerde ve andaki şekil değiştirme, ya da genleme tansörüyle belirlendiği cisimler olarak tanımlanır. Elastiklik özelliği taşıyan çeşitli ortamlar bulunmakla birlikte ancak bünye denklemi yukarıda varsayıldığı türden olan elastik cisimler hiperelastik cisim olarak adlandırılır. Genellikle bir sürekli ortamın gerilme durumunu belirleyen o ondaki genlemelerden başka etmenler de vardır. Bunların tümüyle ihmal edilme zorunluluğu hiperelastisiteyi bir ölçüde matematik soyutlama olarak nitelendirmeyi akla getirir. Bu temelde doğru olmakla

beraber uygulama aralığı iyi belirlendiğinde hiperelastisite teorisinin çeşitli mühendislik dallarında geniş bir yelpazede yer alan problemlerin çözümünde çok başarılı olarak kullanıldığı da bir gerçektir. Bu yüzden teori, boyutlandırma gibi pratik açıdan çok önemli bazı mühendislik problemlerin çözümünü ampirik yaklaşımdan kurtarıp matematiksel analize olanak sağlayan rasyonel bir çerçeveye oturtmakla bilim ve teknoloji tarihinde önemli bir yer almış bulunmaktadır (Şuhubi, 1994).

Sürekli ortamlar mekaniği akışkanları (su, yağ, hava, vb.) ve katıları (kauçuk, metal, seramik, ahşap ve yaşayan doku gibi) içerir. Süreklilik gibi malzemenin makroskopik doğasını tanımlamada fenomenolojik yaklaşım tekniği kullanılır. Fenomenolojik yaklaşım matematiksel denklemler ile deneysel verileri uygun hale getirmeyle uğraşır ve özellikle katı mekaniğinde başarılı olmuştur (Holzapfel, 2000). Sürekli ortamlar mekaniği, kütle dağılımı sürekli kabul edilebilen maddesel cisimlerin mekanik davranışını belirlemekle uğraşan bir bilim dalıdır. Maddesel bir cisim gerçekte ayrık parçacıklardan oluştuğu için sürekli model ancak bir matematik soyutlama olarak değerlendirilebilir. Bununla beraber sonlu bir hacimdeki parçacık sayısının sonlu kalmasına karşın, çok özel durumlar dışında, genellikle çok büyük olması, bu parçacıkların sayısını sonsuz kabul etmekle yapılan hatayı pek çok, özellikle teknolojik, uygulamada kabul edilebilir sınırların içine sokar ve ortamın makroskopik davranışı ile ilgilendiğimiz sürece sürekli model ile elde ettiğimiz sonuçlar, çoğu zaman, aradığımız büyüklüklerin yerel çalkantılarının sistematik olarak düzgünleştirilmiş değerlerine karşı gelir ve pratik açıdan gereksinimlerimizi hemen hemen tümüyle karşılayabilen bilgileri bize sağlar. Ancak ortamı oluşturan parçacıkların yapısı çok çeşitli türden etkileşmelere yol açtığı için ilke olarak sürekli ortamların genel mekanik davranışını, çeşitli alanlarla etkileşimini göz önüne almadan belirlemek mümkün değildir. Çağdaş sürekli ortamlar mekaniği bütün bu etkileşimleri en genel biçimiyle rasyonel bir çerçeve içine sokabilme çabalarının bir ürünüdür (Şuhubi, 1994).

Kısım 1.1’de sürekli ortam modeli tanımlanmıştır. Geometrik ve kinematik temsilde maddesel noktaların başlangıç anında bulundukları yer ve daha sonra işgal etmiş

oldukları yerlerin tespiti için bir referans sistemine ihtiyaç vardır. Bu nedenle kısım 1.2’de sürekli ortamın hareketi ile koordinat sistemleri hakkında bilgi verilmiştir. Kısım 1.3’de maddesel ve uzaysal koordinatlarda yer vektörü, hareket deformasyonu temsili, deformasyon gradyanı, Green, Cauchy, Piola ve Finger deformasyon tansörleri, gerilmeyi oluşturan genleme (Strain) tansörü hakkında kısa bilgiler ve ilgili notasyon verilmiştir.

Kısım 1.4’de ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler ve daha genel olarak da şekil değiştirme karakteristiklerinin zamanla değişim hızının nasıl ölçüleceği (maddesel türev) belirlenmeye çalışılmıştır. Süreksizlik yüzeyi tanımlanarak genelleştirilmiş Green – Gauss (diverjans) teoremi verilmiştir.

Kısım 1.5’te denge denklemleri hem ortam içinde ve hem de süreksizlik yüzeyi üzerinde (veya ortam sınırında) geçerli olan hali ile birlikte verilmiş olup sırasıyla kütle korunumu, lineer momentum denkliği, açısal momentum denkliği, enerji dengesi ve entropi eşitsizliğinden oluşmaktadır.

Kısım 1.6’da ortamla birlikte hareket ettiği varsayılan fiberlerin, deformasyon sırasındaki mekanik davranışı, fiberlerin dağılımını temsil eden fiber vektörlerinin deformasyondan önceki ve sonraki durumu, fiberlerin uzama hızı, fiber vektörlerinin zamana göre değişimi hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Kısım 2. de bünye denklemleri, deformasyon, gerilme, kompozit malzemeler ve fiberler gibi konular ile ilgili olarak daha önce yapılmış olan çalışmalar kısa özetler halinde sunulmuştur.

Kısım 3.1’de fiber takviyeli ortamların termodinamiğinden bahsedilmektedir. Burada Termodinamiğin 1. ve 2. kanunlarının birleştirilmesinden elde edilen Clausius – Duhem eşitsizliği temel başlangıç noktası olarak dikkate alınmaktadır. Bu eşitsizlikte; entropi yoğunluğunun, iç enerjinin ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil

etmektedir. Bir termodinamik proste iç enerji ve entropi değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından, (3.2) ifadesinde verildiği tarzda bir Legendre transformasyonu uygulanarak, zamanla değişen terimler iç enerji ve entropi yerine serbest enerji ve sıcaklık cinsinden yazılmıştır.

Clausius–Duhem eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerjinin zamana göre maddesel türevinin hesaplanıp yerine konulması gerekir. Ancak bu işlem Σ nın hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunu tespit etmeden önce yapılamaz. Burada her şeye ait bilginin serbest enerji fonksiyonuna ait bilgiden kaynaklandığını göz önünde bulundurarak daha kısa bir yol izlenmiştir. Eringen (1980) ve Şuhubi (1994) tarafından tüm bünye fonksiyonları için geliştirilmiş olan bünye aksiyomları tek tek ele alınmış ve bunların neticeleri, Clausius – Duhem eşitsizliğini temsil eden (3.11) eşitsizliğinde yer alan serbest enerji Σ için dile getirilmiştir. Kozalite, determinizm, eşbulma, uygunluk, objektivite, maddesel simetri ve yöresellik aksiyomları kullanılarak Σ nın genelde hangi argümanlara bağlı olması gerektiği (3.34) denkleminde verilmiştir. Σ nın bünye aksiyomlarına uygun haliyle, sonunda kimlere bağlı olduğu açıkça belirlendikten sonra, zamana göre maddesel türevler alınmıştır. Sıcaklık sabit olduğu için sıcaklığa bağlı ifadelerin maddesel türevi sıfır olur. Gerilmenin, $\mathbf{C}$ deformasyon tansörü ile $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ fiber vektörlerine bağlı olan Σ dan türetildiği görülmektedir. Ortam sıkışmaz kabul edilerek gerilme tansörünün bünye denklemi maddesel ve uzaysal koordinatlarda (3.49) ve (3.50) ifadeleriyle elde edilmiştir.

Kısım 3.2’de, matris malzemesinin izotrop olduğu kabul edildiğinden Σ üzerindeki bağlayıcı etkenlerden kaynaklanan sonuçlar açıkça ortaya konmakta ve serbest enerji ifadesine son şekli verilerek, fiber takviyeli hiperelastik izotrop ortamlar için matematiksel bir bünye modeli oluşturulmaktadır. Bunun için Cebrik İnvaryantlar Teorisine göre, Σ gerilme potansiyeli $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve bunların müşterek invaryantları olan (3.55) ifadesiyle verilen 12 adet bağımsız invaryantlara bağlıdır. Bu invaryantlardan ilk üçünün yerine (3.56) ifadesi ile verilen asal invaryantlar kullanılmıştır. Ancak bu çalışmada ortamın sıkışmazlığı ve fiberlerin kinematiği kısmında (1.100) ve (1.113) ifadeleri dikkate alındığında III , I_4 , I_5 invaryantlarının 1’e eşit olduğu görülür ve bu

invariantlar Σ nın bağılı olduğu invariantlar listesinden çıkarılır. Σ nın $\mathbf{C}$ tansörüne göre türevi alınıp (3.60) denkleminde yerine yazılarak, bu çalışmada ele alınan malzeme için gerilmenin non-lineer bünye denklemi maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden (3.63) elde edilmiştir.

Kısım 4.1’de Σ nın bağılı olduğu invariantların analitik bir fonksiyonu olduğu kabul edilerek, Σ ikinci dereceden bir polinom açılımı ile temsil edilmiştir. (3.63) denklemlerinde bulunan Σ invariantlarına göre türevleri bu açılmadan hesaplanarak, kısmi türevlerde yer alan Green deformasyon tansörüne bağılı invariantlar ve (3.63) ifadesinde ki Green deformasyon tansörüne bağılı terimler genleme tansörü $\mathbf{E}$ cinsinden ifade edilmiştir. (3.63) denklemindeki terimler (4.2), (4.3) ve (4.4) ifadeleri kullanılarak tek tek hesaplanmıştır. Bu işlemler yapılırken mekanik etkileşimler non-lineer kabul edilmekte ve $\mathbf{E}$ tansörünün ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınmıştır. Diğer taraftan malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarlı kalacağından matematiksel olarak $\underline{\mathbf{A}} \rightarrow -\underline{\mathbf{A}}$ ve $\underline{\mathbf{B}} \rightarrow -\underline{\mathbf{B}}$ değişimlerinden etkilenmeyeceği için $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörlerine ait bileşenlerini dış çarpımında çift sayıda olan terimleri dikkate alınmıştır. Uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviye edilmiş izotrop matris malzemesine sahip sıkışmaz kompozit bir ortamda mekanik etkileşimlerin non-lineer kabul edildiği durumda gerilmenin bünye denklemi maddesel formda (4.17) ifadesiyle, uzaysal formu ise (4.22) ifadesiyle elde edilmiştir.

1.1. Sürekli Ortam Modeli

Bir maddesel cismin içinden alacağımız tamamen keyfi her hacim bu cismin kütlelerinin bir kısmını içeriyorsa bu cisim bir sürekli ortam olarak nitelendirilebilir. Buna göre sürekli bir ortamın bir noktası etrafında keyfi, yani istediğimiz kadar küçük seçebileceğimiz bir Δv hacmini dikkate alırsak bu hacimde cismin bir Δm kütlesi bulunacaktır. Bu nokta civarında ortalama yoğunluk,

$$\rho = \frac{\Delta_m}{\Delta_v} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Sürekli ortam varsayımına göre Δv ne kadar küçük olursa olsun içinde kütle bulunacağından yukarıdaki ifadenin $\Delta v \rightarrow 0$ için bir limiti olacaktır. Dolayısıyla ortamın göz önüne alınan noktadaki yoğunluğu bu limit işleminin sonucu olarak,

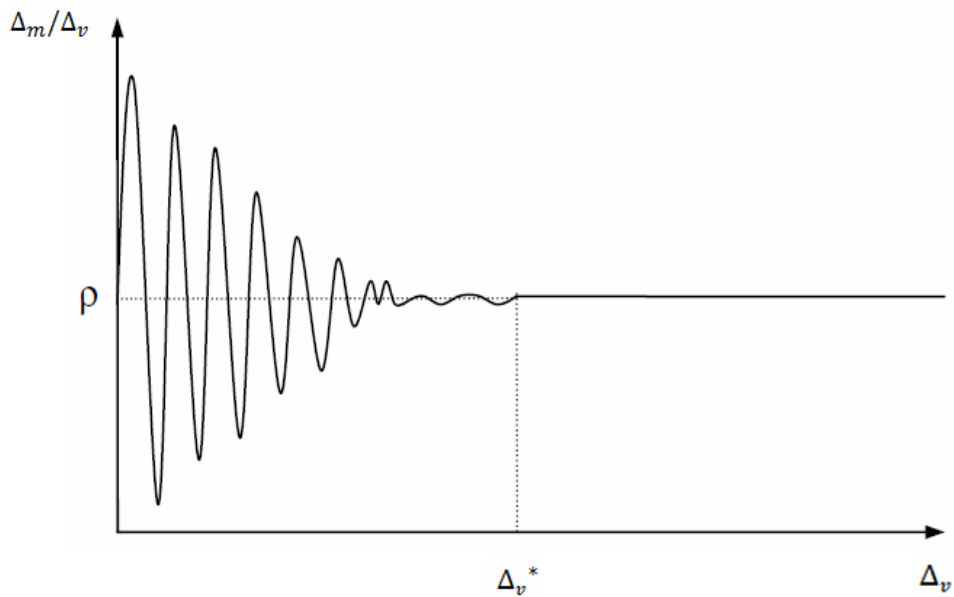
$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta_m}{\Delta v} = \frac{\Delta_m}{\Delta v} \quad (1.2)$$

bulunur. Atomistik ölçeğe indiğimizde madde büyük ölçüde boşluklu bir yapı sergiler. Buna göre bir noktada tanımlanan yoğunluğun statik olarak anlamlı bir ortalama karşı gelebilmesi için Δv hacminin bir Δv^* kritik değerinden büyük olması gerekir. $\Delta v < \Delta v^*$ için bir noktada yoğunluk, Δv ye bağlı olarak, büyük çalkantılar gösterir (Şekil 1.5).

Sürekli ortam modeli, sonlu bir hacimdeki parçacık sayısını sonsuz almaya eşdeğerdir. Buna göre cismin içinde alınan bir V hacminde bulunan kütle miktarı,

$$M = \int_V \rho dv \quad (1.3)$$

integrali ile hesaplanır.

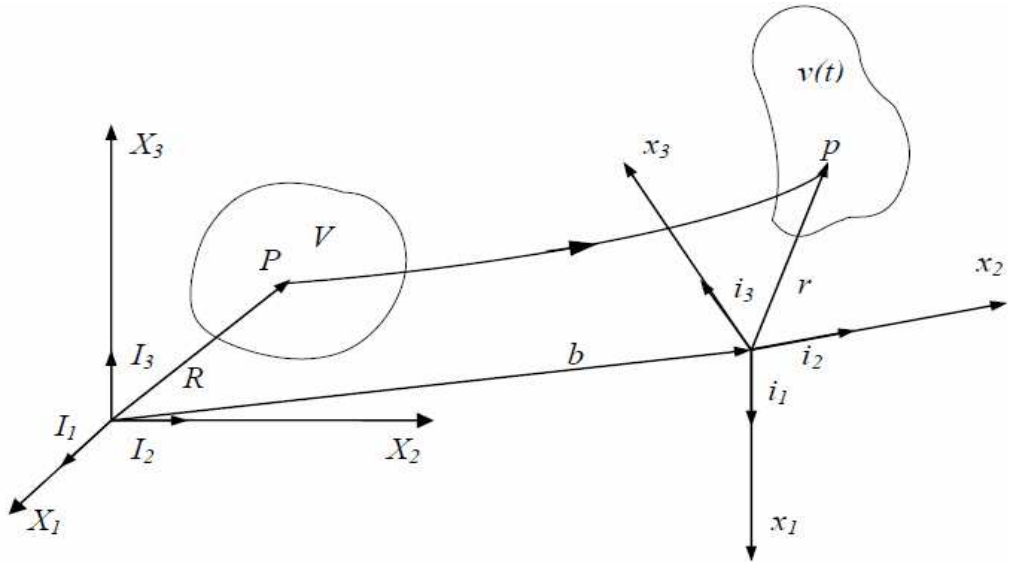


Şekil 1.5. Ortalama yoğunluğun değişimi (Şuhubi, 1994)

1.2. Sürekli Ortam Hareketi

Bir sürekli ortamın hareketini belirlemek için bu ortamı oluşturan, sonsuz sayıdaki bütün parçacıkların zamanla bulundukları uzaysal konumlarının belirlenmesi gerekir. Ortamın belli bir andaki konumunun tamamen bilindiği varsayılır, bu konum referans konumu olarak adlandırılır ve oluşturduğu hacimsel bölge V ile gösterilir. Ortamın referans konumunu belirli kılmak için bir X_1, X_2, X_3 Kartezyen koordinat takımı seçilir. Ortamın bir parçacığı, şimdi referans konumunda işgal ettiği P noktasının yerini tanımlayan $\mathbf{R}$ yer vektörü, ya da eşdeğer olarak X_K ($K = 1, 2, 3$) koordinatlarıyla tamamen belirlenir. X_K koordinatlarına maddesel koordinatlar (Lagrange Koordinatları) adı verilir.

Sürekli bir ortamın hareketini belirlemek için referans konumundaki herhangi bir P maddesel noktasının t anında uzayda bulunduğu konumu, yani p noktasının yerini, belirlemek için x_1, x_2, x_3 Kartezyen koordinat takımı seçilir (Şekil 1.2). Bu koordinat takımında p uzaysal noktası $\mathbf{r}$ yer vektörü, ya da x_k ($k = 1, 2, 3$) koordinatlarıyla belirlenir. Bu koordinatlara uzaysal koordinatlar (Euler koordinatları) adı verilir. Gerek duyulduğu takdirde maddesel ve uzaysal koordinatlar çakışık olarak seçilebilir.



Şekil 1.6. Maddesel ve uzaysal koordinatlar (Şuhubi, 1994)

Bir t anında her P parçacığının işgal ettiği p noktaları zamanla değişen bir $v(t)$ bölgesini oluşturur. Bu bölge ortamın t anındaki konumunu belirler. Buna göre sürekli ortamın hareketi, her P noktasına bir t anında hangi p noktasının karşı geldiğini gösteren bir dönüşüm olarak tanımlanır. Böyle bir dönüşüm,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad x_k = x_k(X_K, t) \quad (1.4)$$

sürekli bağıntıları yardımıyla tanımlanır. Tersı söylenmedikçe referans konumunun $t = 0$ anına karşı geldiği kabul edilir. Sürekli ortamın hareketini tanımlayan (1.4) dönüşümünün bir fiziksel harekete karşı gelebilmesi için sürekli olması gerekir. Ayrıca bu dönüşümün hacmi sonlu olan bir bölgeye hacmi sıfır, ya da sonsuz bir bölgeye dönüştürmemesi için, dönüşümün jakobyeni sıfırdan ve sonsuzdan farklı olması gerekir. Yani,

$$J(\mathbf{X}, t) = \det(x_{k,K}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0, \infty \quad (1.5)$$

şartının sağlanması gerekir. Bir $J(\mathbf{X}, t)$ fonksiyonunu (1.5) in mutlak değeri,

$$J(\mathbf{X}, t) = |J(\mathbf{X}, t)| = |\det(x_{k,K})| \quad 0 < j < \infty \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır. Temel varsayımımız uyarınca $J \neq 0$ olduğundan j ile J arasındaki fark çoğu zaman pratik bakımdan ortadan kalkar. Kapalı fonksiyon uyarınca (1.5) ya da (1.6) koşulu (1.4) dönüşümünün sürekli bir tersinin olacağını ifade eder. Bu ilke uyarınca (1.4) dönüşümünden,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t), \quad X_K = X_K(x_k, t) \quad (1.7)$$

yazılabilir. Fiziksel olarak bu bağıntılar, seçilmiş, belli bir uzay noktasından çeşitli zamanlarda ortamın hangi parçacıklarının geçtiğini belirler ve $v(t)$ uzaysal bölgeler ailesini tek bir V maddesel bölgesine dönüştürür.

1.3. Şekil Değiştirme

Referans konumunda verilen bir V bölgesini dolduran bir sürekli ortamın belli bir t , örneğin t_1 , anında $v(t)$ uzay bölgesine dönüştüğünü ve bu sürekli dönüşümün verilen,

$$x_k = x_k(X_K, t) \quad \text{ve ya} \quad X_K = X_K(x_k, t) \quad (1.8)$$

hareket denklemlerinin t parametresinin t_1 eğerleriyle tamamen belirlenmiş olduğu varsayılır. Dolayısıyla başlangıçtaki, yani referans konumundaki herhangi bir P parçacığı t_1 anında p uzay noktasına taşınmış olur. P ve p noktalarının yer vektörleri,

$$\mathbf{R} = X_K \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k \quad (1.9)$$

ile verilir ve (1.9) bağıntıları yardımıyla birbirlerine bağlanır (Şekil 1.3). Bundan sonra Einstein toplama uyuşumundan yararlanılarak ve tekrarlanan iki indis üzerinde 1 den 3 e kadar toplama yapılacağı kabul edilir. Uzaysal ve maddesel koordinat takımları arasındaki dönüşüm,

$$\mathbf{i}_k = \lambda_{kK} \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{I}_K = \Lambda_{Kk} \mathbf{i}_k \quad (1.10)$$

bağıntıları ile belirlenir. λ ve Λ katsayı matrisleri birbirinin tersidir ve,

$$\lambda_{kK} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{I}_{Kk} = \mathbf{I}_K \mathbf{i}_k \quad (1.11)$$

olarak tanımlanır. Her iki koordinat takımı da dik olduğundan bu dönüşüm ortogonaldır. Yani,

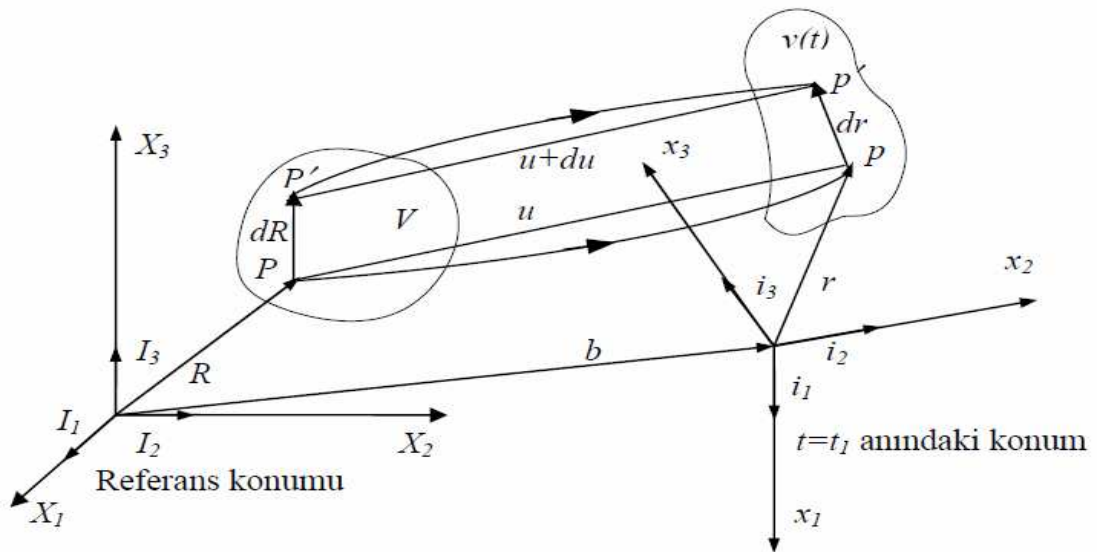
$$\Lambda = \lambda^{-1} = \lambda^T \quad \text{veya} \quad \Lambda_{kk} = \lambda_{kk} \quad (1.12)$$

yazılabilir. Λ_{kk} matrisi λ_{kk} matrisinin transpozu olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bu katsayılar,

$$\lambda_{kk} \lambda_{kl} = \delta_{kl}, \quad \lambda_{kk} \lambda_{kL} = \delta_{KL} \quad (1.13)$$

Bağıntılarını gerçeklemek zorundadır. Burada δ_{kl} ve δ_{KL} büyüklükleri Kronecker delta olarak adlandırılır ve birim matrisi temsil eder. Yani iki indis birbirine eşitse 1, farklı ise 0 değerini alırlar. λ matrisi yardımıyla uzaysal koordinat takımında tanımlanmış bir vektörü kendisine paralel kalarak maddesel koordinat takımına kaydırabilir, ya da bu işlemin tersi yapabilir. Bu özellikler nedeniyle λ_{kk} katsayıları kaydırıcılar (Shifter) olarak adlandırılır.

Deformasyonu temsil etmek için, Şekil 1.3 de P parçacığına çok yakın olan başka bir P' parçacığı göz önüne alınır. P' nün P ye göre konumunu sonsuz küçük $d\mathbf{R}$ vektörüyle belirlenir. P' maddesel noktası hareketle t_1 anında p' uzay noktasına taşınmış olur. p' noktasının P nin görüntüsü olan p noktasına göre konumu da yine sonsuz küçük olan $d\mathbf{r}$ vektörüyle belirlenir.



Şekil 1.7. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değişime (Şuhubi, 1994)

Bu vektörler maddesel ve uzaysal koordinat eksenleri üzerindeki bileşenleri cinsinden,

$$d\mathbf{R} = dX_K \mathbf{I}_K, \quad d\mathbf{r} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (1.14)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (1.9) bağıntısında zamanın sabit olduğunu göz önünde tutularak diferansiyeli alınırsa,

$$dx_k = x_{k,K} dX_K, \quad dX_K = X_{K,k} dx_k \quad (1.15)$$

ifadeleri elde edilir. Bir alt indisten önceki virgül o indisin belirttiği değişkene göre kısmi türevini gösterir, (1.15) deki $x_{k,K}$ ve $X_{K,k}$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K}, \quad X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K}{\partial x_k} \quad (1.16)$$

Bir P parçacığında, örneğin t_1 anında, hesaplanmış $x_{k,K}$ büyüklüklerine o maddesel noktada ve o andaki şekil değiştirme gradyanı adı verilir ve boyutsuz F matrisi ile gösterilir.

$$F(\mathbf{X}, t_1) = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$j = |\det F| \neq 0$ olduğundan F matrisinin bir F^{-1} tersi vardır. (1.8) bağıntılarını göz önüne alır ve belli bir anda kısmi türevin zincir kuralını uygularsak,

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{k,l}, \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL} \quad (1.18)$$

yazılabilir, buradan da,

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = [X_{K,k}] \quad (1.19)$$

ifadesi elde edilir. Bir matrisin tersini hesaplamak için her elemanın yerine kofaktörünü koyarak oluşturduğumuz matrisin transpozunu matrisin determinantına bölünmesi gerekir.

$$X_{K,k} = \frac{\text{Kofaktör}[x_{k,K}]}{J} \quad (1.20)$$

Bilindiği gibi bir determinanı hesaplarken bir satırdaki elemanları kofaktörleriyle çarpıp işaret kuralına uygun şekilde toplanır. Buna göre determinantın açılımı o satırdaki elemanlara göre birinci derecedendir ve determinantın bir elemanına göre türevini alırsak bu elemanın kofaktörünü elde ederiz. Bu sonuç,

$$\frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} = \text{Kofaktör}[x_{k,K}] = J X_{K,k} \Rightarrow \frac{\partial_j}{\partial x_{k,K}} = j X_{K,k} \quad (1.21)$$

özdeşliğini verir. $d\mathbf{R}$ vektörünün boyu dS , $d\mathbf{r}$ vektörünün boyu ise ds ile gösterildiği takdirde,

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dX_K dX_K, \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx_k dx_k \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir. (1.16) bağıntılarını kullanarak yukarıdaki ifadeler,

$$ds^2 = x_{k,K} x_{k,L} dX_K dX_L = C_{KL} dX_K dX_L \quad (1.23)$$

$$dS^2 = X_{K,k} X_{K,l} dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l$$

şeklinde elde edilir. Burada t anında hesaplanmış bileşenleri,

$$C_{KL}(X,t) = x_{k,K} x_{k,L}, \quad c_{kl}(x,t) = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.24)$$

ile verilen ifadeler sırasıyla Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörleri veya matrisleri adını alır. Bu matrislerin simetrik olduğu ve,

$$C_{KL} = C_{LK}, \quad c_{kl} = c_{lk} \quad (1.25)$$

bağıntılarının sağlandığı görülmektedir. C ve c büyüklüklerini matrisin yanı sıra tansör olarak da nitelendirilmesinin nedeni sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatları dönüştürüp yeni koordinat takımlarına geçildiğinde bileşenlerinin belirli bir kurala göre değişmesidir. X_K koordinat eksenleri yine dik X'_K koordinat eksenlerine dönüştürülsün. Bu dönüşüm Q ortogonal matrisi yardımıyla gerçekleşir ve koordinat eksenleri arasında,

$$X'_K = Q_{KL} X_L, \quad X_K = Q_{LK} X'_L \quad (1.26)$$

ilişkileri yazılabilir. Buna göre C tansörünün yeni koordinat takımındaki bileşenleri,

$$C'_{KL} = \frac{\partial x_k}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X'_L} = \frac{\partial x_k}{\partial X_M} \frac{\partial X_M}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_N} \frac{\partial X_N}{\partial X'_L} = Q_{KM} Q_{LM} x_{k,M} x_{k,N} = Q_{KL} Q_{LN} Q_{MN} \quad (1.27)$$

şeklinde bulunur. Bu da C nin ikinci mertebe bir maddesel tansör olduğunu gösterir. Burada (1.26) bağıntısının Q ortogonal bir matris olmasa da, yani koordinatları dik olmayan bir takıma dönüştürüldüğünde de Q^T yerine Q^{-1} matrisini alma koşuluyla geçerli kalacağına dikkat edilmeli. Benzer olarak uzaysal koordinatları,

$$c'_k = Q_{kl} x_l \quad (1.28)$$

ile dönüştürülürse c nin ikinci mertebe bir uzaysal tansör olduğunu gösteren,

$$c'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} c_{mn} \quad (1.29)$$

ifadesi elde edilir. Buraya kadar verilen ifadeler matris notasyonu kullanılarak yazılırsa; dX ve dx sütun vektörleri,

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}, \quad dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

şeklinde tanımlanır. (1.15) bağıntıları matris notasyonu ile,

$$dx = \underline{\underline{F}} dX, \quad dX = \underline{\underline{F}}^{-1} dx \quad (1.31)$$

yazılabilir. (1.22) ve (1.31) bağıntılarından,

$$ds^2 = dx^T dx = dX^T \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} dX, \quad dS^2 = dX^T dX = dx^T \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} F^{-1} dx \quad (1.32)$$

bulunur. (1.23) bağıntısı göz önünde tutulduğunda Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörlerinin şekil değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (1.32)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Bazı durumlarda (1.34) ile verilen matrisler yerine terslerinin kullanılması gerekebilir. Bu matrisler ise,

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}^T, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{F}}^{-1T} \quad (1.34)$$

veya bileşenleri cinsinden,

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}, \quad C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k} \quad (1.35)$$

şeklinde ifade edilir. c^{-1} ve C^{-1} tansörleri sırasıyla Finger ve Piola şekil değiştirme tansörleri olarak bilinir. Hareket denklemleri $r = r(R,t)$ şeklinde verilmesi yerine P parçacığının u yer değiştirme vektörüne bağlı olarak ifade edilir. Yer değiştirme vektörünü (Şekil 1.7),

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} + \mathbf{b} \quad (1.36)$$

olarak tanımlanır. u vektörünü,

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K \quad (1.37)$$

şeklinde yazarak uzaysal ve maddesel bileşenleri belirlenir. (1.8) hareket denklemlerinden yararlanarak uzaysal ve maddesel yer vektörlerini $r = r(X_K, t)$ ve $R = R(x_k, t)$ olarak ifade edilirse,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{C}_K dX_K, \quad d\mathbf{R} = \mathbf{c}_k dx_k \quad (1.38)$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{C}_K$ ve $\mathbf{c}_k$ vektörleri,

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_K} = x_{i,K} \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_k} = X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad (1.39)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu vektörler cinsinden şekil değiştirme tansörleri,

$$C_{KL} = \mathbf{X}_K \cdot \mathbf{X}_L, \quad c_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \quad (1.40)$$

olarak bulunur. (1.39)₁ bağıntısından,

$$\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = x_{k,K} \mathbf{i}_k \cdot x_{l,L} \mathbf{i}_l = x_{k,K} \cdot x_{l,L} \delta_{kl} = x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.41)$$

bulunur ve benzer şekilde (1.39)₂ bağıntısından da,

$$\mathbf{c}_K \cdot \mathbf{c}_L = X_{K,k} \mathbf{I}_k \cdot X_{L,l} \mathbf{I}_L = X_{K,k} X_{L,l} \delta_{KL} = X_{K,k} X_{K,k} \quad (1.42)$$

bağıntısı bulunur. $\mathbf{C}_K$ ve $\mathbf{c}_k$ vektörlerinin fiziksel anlamı tanımlardan açıkça görülmektedir. (1.39) ifadelerine benzer olarak,

$$\mathbf{c}_k^{-1} = x_{k,K} \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{C}_K^{-1} = X_{K,k} \mathbf{i}_k \quad (1.43)$$

vektörleri tanımlanır. $\mathbf{c}^{-1}$ vektörlerinin $\mathbf{c}_k$ vektörlerine karşıt olduğu, yani,

$$\mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l = \delta_{kl} \quad (1.44)$$

bağıntısını sağladıkları görülür. (1.40) ve (1.44) bağıntılarından,

$$\mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l = x_{k,K} \mathbf{I}_K \cdot X_{L,l} \mathbf{I}_L = x_{k,K} X_{L,l} \delta_{KL} = x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad (1.45)$$

bulunur. Benzer şekilde $\mathbf{C}^{-1}$ vektörlerinin de $\mathbf{C}_K$ vektörlerine karşıt olduğu ve

$$\mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L = \delta_{KL} \quad (1.46)$$

bağıntılarının sağlandığı gösterilebilir. (1.35) bağıntısı göz önünde tutulursa,

$$\mathbf{c}_{kl}^{-1} = \mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l^{-1}, \quad \mathbf{C}_{KL}^{-1} = \mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L^{-1} \quad (1.47)$$

yazılabilir. $\mathbf{c}^{-1}$ ile $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{C}^{-1}$ ile $\mathbf{C}$ tansörleri birbirlerinin tersleri olduğu için,

$$\mathbf{c}_{km}^{-1} \mathbf{c}_{ml} = \delta_{kl}, \quad \mathbf{C}_{KM}^{-1} \mathbf{C}_{ML} = \delta_{KL} \quad (1.48)$$

bağıntılarının da geçerli olacağı açıktır. Cismin şekil değiştirmesinden söz edebilmek için parçacıkları arasındaki uzaklığın hareketi sırasında değişmesi gerekmektedir. Ortamın iki parçacığı arasındaki uzaklığın değişmesi için $ds \neq dS$

olması gerektiğinden ortamın bir noktasındaki şekil değiştirmenin ölçümü olarak $ds^2 - dS^2$ büyüklüğü seçilir. (1.22) ve (1.23) bağıntıları yardımıyla,

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (1.49)$$

yazılabilir. Burada E_{KL} ve e_{kl} simetrik tansörleri,

$$E_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}), \quad e_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - c_{kl}) \quad (1.50)$$

olarak tanımlanır ve sırasıyla maddesel (Lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörleri adını alır. Bir maddesel noktada E tansörünün değerini bildiğimiz takdirde bu noktadan geçen sonsuz küçük dX_K maddesel vektörünün hareketi sırasında boyundaki değişim (1.49) bağıntısıyla belirlenir. Aynı boy değişimi bu parçacığın t anındaki yerinde e tansörünün değeri yardımıyla da hesaplanabilir. (1.50) bağıntıları matris formunda,

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}), \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{c}}) \quad (1.51)$$

yazılabilir. (1.51) bağıntılarından (1.49) da yararlanılırsa maddesel ve uzaysal genleme tansörlerinin,

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \quad E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.52)$$

eşitlikleriyle birbirlerine bağlandığı görülebilir. (1.36) ve (1.39) bağıntıları, b vektörü koordinatlara bağlı olmadığı için yer değiştirme vektörü cinsinden,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_K &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_K} = \mathbf{I}_K + U_{L,K} \mathbf{I}_L = (\delta_{LK} + U_{L,K}) \mathbf{I}_L \\ \mathbf{c}_k &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k - u_{l,k} \mathbf{i}_l = (\delta_{lk} + u_{l,k}) \mathbf{i}_l \end{aligned} \quad (1.53)$$

sonucu elde edilir. Şekil değiştirme tansörleri için yer değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$\begin{aligned}
C_{KL} &= \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{NL} + U_{N,L})\delta_{MN} \\
&= (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{ML} + U_{M,L}) = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} , \\
c_{kl} &= \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{nl} - u_{n,l})\delta_{mn} = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{ml} - u_{m,l}) \\
&= \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l}
\end{aligned} \tag{1.54}$$

sonuçları bulunur. Maddesel ve uzaysal genleme tansörleri de (1.50) tanımları yer değiştirme gradyanı cinsinden,

$$\begin{aligned}
E_{KL} &= \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}) \\
e_{kl} &= \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}u_{m,l})
\end{aligned} \tag{1.55}$$

şeklinde ifade edilir.

1.4. Hareket

Bu bölümde, ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler hesaplanacak ve daha genel olarak ta şekil değiştirme karakteristiklerinin zamanla değişim hızının nasıl ölçülebileceği belirlenmeye çalışılacak. Ortamın hareketini tanımlayan maddesel koordinatlarla uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm (1.4) bağıntısıyla aşağıdaki şekilde verilmişti.

$$x_k = x_k(X_k, t), \quad \mathbf{X} \in v \tag{1.56}$$

(1.56) bağıntısı V bölgesindeki belli bir X parçacığı seçildiğinde t parametresine bağlı bir eğri gösterir. Sürekli ortamın hareketi sırasında X parçacığının izlediği yolu gösteren bu eğriye göz önüne alınan parçacığın yörüngesi adı verilir. (1.56) bağıntısı tüm ortam parçacıklarının yörüngeler ailesini tanımlamaktadır. Bunun için ilk olarak

sürekli ortamın parçacıklarına bağlı bir fonksiyonun zamanla değişim hızını ölçmek gerekir.

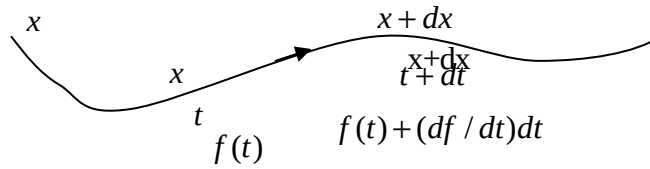
Sürekli ortama bağlı bir skaler, vektör ya da tansör değerli bir alan büyüklüğü $f(X,t)$ şeklinde verilebilir. Maddesel gösterilimde böyle bir fonksiyon, ilgili alan büyüklüğünün bir parçacıkta aldığı değerin bu parçacık yörüngesi üzerinde hareket ederken zamanla nasıl değiştiğini bize verir. (1.56) ifadesinin tersi f fonksiyonunda kullanılırsa,

$$f[X(x,t)] = f(\mathbf{x},t) \quad (1.57)$$

yazılabilir. $f(x,t)$ fonksiyonu göz önüne alınan alan büyüklüğünün uzaysal gösterilimi adını alır. Maddesel ve uzaysal gösterilimde bu fonksiyon aynı sembolle göstermesine karşın birbirine karşı gelen maddesel ve uzaysal noktalarda sayısal değerleri eşit olmakla beraber $f(X,t)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları tümüyle farklı fonksiyonlardır. Bir x uzay noktasında $f(x,t)$ fonksiyonu alan büyüklüğünün bu noktadan çeşitli zamanlarda geçen farklı parçacıklarda aldığı değerleri gösterir. Uzaysal gösterilimden maddesel gösterilime geçiş,

$$f(X,t) = f[\mathbf{x}(X,t),t] \quad (1.58)$$

dönüşümü yardımıyla sağlanır. Bir alan büyüklüğünün sürekli ortamın bir parçacığını izlerken zamana göre değişim hızı maddesel türev olarak tanımlanır (Şekil 1.8).



Şekil 1.8. Maddesel türev (Şuhubi, 1994)

Eğer maddesel gösterilim kullanılıyorsa maddesel türev X_K koordinatlarını sabit tutarak zamana göre hesaplanan türev olduğundan,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{f} \quad (1.59)$$

yazılabilir. Uzaysal gösterilim kullanıldığında (1.57) bağıntısını X değişkenlerini sabit tutarak t değişkenine göre türetirsek zincir kuralına göre,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \left. \frac{\partial f[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t]}{\partial t} \right|_{x=Sbt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{x=Sbt} + \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \right|_{x=Sbt} \quad (1.60)$$

elde edilir. Bir parçacığın hızı $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ yer vektörüne bağlı olarak,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \frac{dx_k}{dt} \mathbf{i}_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} \mathbf{i}_k \quad (1.61)$$

veya bileşenleri cinsinden,

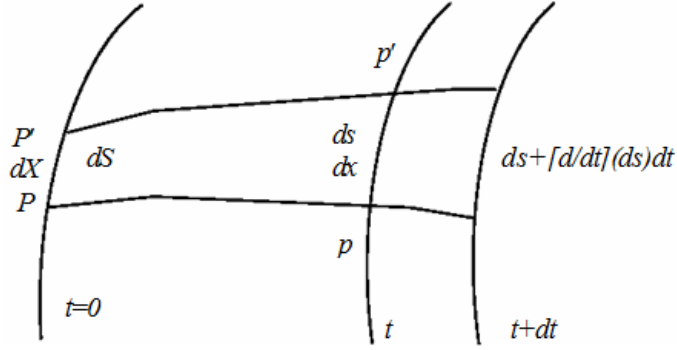
$$v_k(\mathbf{X}, t) = \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t'} \quad \mathbf{v} = v_k \mathbf{i}_k \quad (1.62)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre uzaysal gösterilimde f alanının (1.60) ile verilen maddesel türevi,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,k} v_k \quad (1.63)$$

olur. (1.63) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim x koordinatları sabit tutularak zamana göre alınmış türev olduğundan yerel değişme hızını gösterir. İkinci terim ise t anında x noktasında bulunan parçacığın hareketinden kaynaklandığı için konvektif değişme hızı adını alır.

1.4.1 Yay ve hacim elemanların maddesel türevi



Şekil 1.9. Yay elemanındaki değişim (Şuhubi, 1994)

Referans konumunda bir P maddesel noktasından geçen sonsuz küçük bir dS yay elemanı ve bu elemanın t anındaki ds görüntüsü göz önüne alınırsa (Şekil 1.9), tanına sonsuz yakın $t+dt$ anında bu elemandaki değişim maddesel türevin tanımına göre $ds + (ds)dt$ olur. ds yay elemanının maddesel türevini belirlemek amacıyla önce p noktasını p' noktasına birleştiren dx vektörünün maddesel türevi hesaplanmaya çalışılacak. Bu vektör referans konumundaki dX elemanter vektörünün hareket altında t anındaki görüntüsü olduğundan $dx_k = x_{k,K} dX_K$ yazılabilir. dX_K bileşenleri amana bağlı olmadığından türetmenin zincir kuralından uygun şekilde yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dx_k) &= \frac{d}{dt}(x_{k,K} dX_K) = \frac{\partial}{\partial t}(x_{k,K}) dX_K = \frac{\partial}{\partial X_K} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) dX_K \\ &= v_{k,K} dX_K = v_{k,K} X_{K,l} dx_l = v_{k,l} dx_l \end{aligned} \quad (1.64)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(\dot{dx}_k) = v_{k,l} dx_l \quad (1.65)$$

yazılabilir. (1.64) de üçüncü ve beşinci ifadelerde dX_K bileşenlerinin katsayılarını eşitlersek şekil değiştirme gradyanının maddesel türevi,

$$\frac{d}{dt}(x_{k,K}) = (\dot{x}_{k,K}) = v_{k,K} = v_{k,l} x_{l,K} \quad (1.66)$$

olarak bulunur. Hız gradyanı tansörü,

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}, \quad L_{kl} = v_{l,k} \quad (1.67)$$

ile tanımlanırsa, (1.65) ve (1.66) bağlantıları,

$$(\dot{dx}) = L^T dx, \quad \dot{F} = L^T F \quad (1.68)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Hız gradyanı tansörünün simetrik ve antisimetrik kısımlarından oluşan iki yeni tansörü,

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) = d_{lk}, \quad w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) = -w_{lk} \quad (1.69)$$

veya,

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}), \quad \underline{\underline{w}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}}^T - \underline{\underline{L}}), \quad \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}} \quad (1.70)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. d tansörüne şekil değiştirme hızı (bazen de genleme hızı) tansörü, w tansörüne ise spin veya çevri tansörü adı verilir. (1.21) bağıntısından yararlanarak önce,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} \frac{d}{dt}(x_{k,K}) = J X_{K,k} v_{k,l} x_{l,k} = J v_{k,k} \quad (1.71)$$

şeklinde jakobyenin maddesel türevi elde edilir. Bir ortamın hacim elemanının değişme hızı, $dv = j dV$ olduğundan türetme ile,

$$\frac{d}{dt}(dv) = \frac{dj}{dt} dV \quad (1.72)$$

yazılabilir. jakobyenin maddesel türevinden faydalanılarak,

$$\frac{d}{dt}(dv) = j v_{k,k} dV = v_{k,k} dv = \nabla \cdot v dv \quad (1.73)$$

bulunur. Referans konumunda V hacmi hareketle t anında $v(t)$ hacmine dönüşürse $v(t)$ hacim integralinin maddesel türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi(\mathbf{x}, t) dv &= \frac{\partial}{\partial t} \int_v \Phi(\mathbf{X}, t) j dV = \int_v \frac{\partial}{\partial t} [j \Phi(\mathbf{X}, t)] dv \\ &= \int_{v(t)} j \dot{\phi} j^{-1} dv = \int_{v(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \phi v_{k,k} \right) dv \end{aligned} \quad (1.74)$$

Maddesel türevin tanımından faydalanarak (1.75) ifadesi,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] dv \quad (1.75)$$

şeklinde yazılabilir. t ye göre kısmi türevi x değişkenleri sabit tutularak alındığı için (1.75) bağıntısında sağ taraftaki ilk terimde türev ile integral operatörünün yeri değiştirilebilir. Son terim de Green - Gauss integral teoremi kullanılarak $v(t)$ hacmini içine alan $S(t)$ kapalı yüzeyi üzerindeki bir integrale dönüştürülürse,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v(t)} \phi dv + \int_{S(t)} \phi v_n da \quad (1.76)$$

elde edilir. $v_n = v \cdot n$ ortam hızının yüzeye dik bileşenidir. ϕv_n büyüklüğüne ϕ alanının yüzey boyunca akısı adı verilir ve ortam hareketiyle bu fiziksel alanın $S(t)$ yüzeyinin bir tarafından öteki tarafına bu yüzeyin birim alanı başına birim zamanda aktarılan kısmını gösterir.

1.4.2 Green - Gauss (diverjans) teoremi

Doğa yasalarından sürekli ortamların hareketini yöneten denklemlerin çıkartılmasına olanak sağlayan bazı integral teoremlerinin genelleştirilmesi gerekir. Bilindiği gibi bir ∂v kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v hacminde tanımlanmış vektör ya da tansör değerli sürekli bir fonksiyon için Green - Gauss veya diverjans teoremi olarak bilinen teorem bu alanın diverjansının hacim içindeki integralini normal bileşeninin yüzey üzerindeki integrale dönüştürür,

$$\int_v \nabla \cdot \phi dv = \int_{\partial v} \mathbf{n} \cdot \phi da \quad (1.77)$$

$\mathbf{n}$ yüzeyin birim dış normalidir. ϕ bir vektör alanı olduğu takdirde yukarıdaki skaler denklemin anlamı açıktır. ϕ ikinci mertebe bir tansör alanı ise (1.77) vektör değerlidir ve,

$$\nabla \cdot \phi = \phi_{kl,k} i_l, \quad \mathbf{n} \cdot \phi = n_k \phi_{kl} i_l \quad (1.78)$$

olarak tanımlanır. Şimdi v bölgesinde hareketli de olabilen bir σ yüzeyi üzerinde ϕ tansör alanının süreksizlik göstermesi halinde diverjans teoreminin genelleştirilmiş şeklini elde etmeye çalışacağız. v hacmini iki parçaya ayıran σ yüzeyinin dış normalini keyfi olarak yönleyelim ve v bölgesini σ yüzeyinin dış normalinin yöneldiği tarafta kalan parçasını v^+ , öteki parçasını ise v^- ile gösterelim. $v = v^+ \cup v^-$ olduğu açıktır. σ yüzeyi ϕ alanı için bir süreksizlik yüzeyi ise bu alan σ üzerindeki bir noktada, bu noktaya v^+ ya da v^- bölgeleri içinden yaklaşıldığına göre farklı değerler alır. Bu değerler sırasıyla ϕ^+ ve ϕ^- ile gösterilir (Şekil 1.10).

$$\llbracket \phi \rrbracket = \phi^+ - \phi^- \quad (1.79)$$

olarak tanımlanır.

Doğal olarak bu büyüklük σ yüzeyinin koordinatlarının bir fonksiyonudur. ϕ alanı $v^+ \cup v^-$

kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^+ ve $v \cup \sigma$ kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^- bölgelerinde süreklidir. Dolayısıyla bu bölgelerde Green - Gauss teoremi (1.78) şekliyle uygulanabilir. σ yüzeyinin bu anlamda dış normalinin v^+ için $-n$ olduğuna dikkat edilirse,

$$\begin{aligned}\int_{v^+} \nabla \cdot \phi \, dv &= \int_{\partial v^+} \mathbf{n} \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \phi^+ \, da, \\ \int_{v^-} \nabla \cdot \phi \, dv &= \int_{\partial v^-} \mathbf{n} \cdot \phi \, da + \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \phi^- \, da,\end{aligned}\tag{1.80}$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa genelleştirilmiş Green - Gauss teoremi,

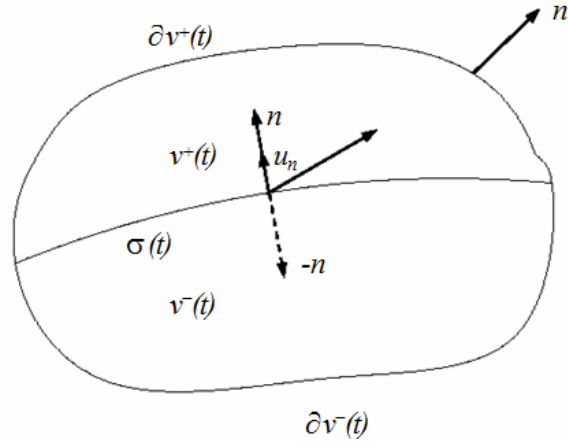
$$\int_v \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v} \mathbf{n} \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \|\phi\| \, da \tag{1.81}$$

şeklinde elde edilir. Sürekli alanlar için σ yüzeyi üzerinde $\|\phi\| = 0$ olacağı için (1.81) denklemi (1.77) denklemine indirgenir. $v(t)$ bölgesinin sürekli ortamda bir maddesel bölge olduğu kabul edilirse ve σ süreksizlik yüzeyinin de verilen bir u hızı ile hareket ettiği varsayılır (Şekil 1.10). Amaç (1.75) denklemini ϕ tansör alanının σ üzerinde süreksizlik gösterdiği hale genelleştirmektir. Bunun için kısmi türev operatörünü integralin içine sokarak (1.76) denklemini ϕ alanının içinde sürekli v^+ ve v^- bölgelerine ayrı ayrı uygulanırsa (Şekil 1.10),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{v^+(t)} \phi \, dv &= \int_{v^+(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v^+(t)} \phi v_n \, da - \int_{\sigma(t)} \phi^+ u_n \, da, \\ \frac{d}{dt} \int_{v^-(t)} \phi \, dv &= \int_{v^-(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v^-(t)} \phi v_n \, da + \int_{\sigma(t)} \phi^- u_n \, da\end{aligned}\tag{1.82}$$

elde edilir. Bu denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi \, dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v(t)} \phi v_n \, da - \int_{\sigma(t)} u_n \|\phi\| \, da \tag{1.83}$$



Şekil 1.10. Hareketli süreksizlik yüzeyi (Şuhubi, 1994)

sonucu elde edilir. $v_n = n_k v_k$ olduğuna dikkat edilerek süreksizlik yüzeyi içeren bir bölgede diverjans teoremini ifade eden (1.81) denklemi kullanılırsa,

$$\int_{\partial v(t)} \phi v_n da = \int_{\partial v(t)} n_k v_k \phi da = \int_{v(t)} (v_k \phi)_{,k} dv + \int_{\sigma(t)} n_k \|v_k \phi\| da \quad (1.84)$$

yazılabilir. Bu ifade (1.83) bağıntısına yerleştirilir, $v(t)$ ve $\sigma(t)$ bölgeleri üzerindeki integralleri bir araya toplanır ve $\sigma(t)$ yüzeyinin u_n normal hızının süreksizlik gösteremeyeceğine dikkat edilirse sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv &= \int_{v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + (\phi v_k)_{,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} \|U \phi\| da \\ &= \int_{v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi v_{k,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} \|U \phi\| da \end{aligned} \quad (1.85)$$

elde edilir. Burada $\sigma(t)$ yüzeyi üzerinde tanımlanan,

$$\mathbf{U} = u_n - v_n = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \quad (1.86)$$

büyüklüğüne yer değiştirme hızı adı verilir ve $\sigma(t)$ yüzeyinin sürekli ortama göre bağıl

normal hızını gösterir. $\|u_n\| = 0$ olduğundan,

$$\|U\| = -\|v_n\| \quad (1.87)$$

bağıntısı geçerlidir.

1.5. Denge Denklemleri

Bu kısımda bütün sürekli ortamların mekanik davranışlarını yöneten temel ilkelerden söz edilecek. Klasik fiziğin çerçevesi içinde bu ilkeler bir maddesel cismin kütesinin hareketinden etkilenmemesinden ve sürekli bir ortamın Newton'un üç yasasına uyarak etkileşen çok sayıda parçacıkla modellenmesinden kaynaklanır. Sürekli ortamlar mekaniğinde, ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olmaksızın geçerli olan termomekanik davranışı yöneten denklemler, global ve yerel denge (balans) denklemleri olarak adlandırılır. Termomekanik denge denklemleri yazılırken, denklemler önce global olarak yazılıp sonra da genelleştirilmiş Green - Gauss ve Stokes teoremleri yardımıyla elde edilen yerel denge denklemleri aşağıda yazılmıştır.

1.5.1. Kütleinin korunumu

Kütleinin korunumu, bir maddesel hacmin toplam kütesinin hareketi sırasında değişmediğini ifade eder. Matematiksel olarak bu ilke, $\rho(\mathbf{x}, t)$ yoğunluk fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\begin{aligned} v(t) \text{ içinde; } \frac{d\rho}{dt} \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \\ \sigma(t) \text{ üzerinde; } \|U\rho\| = 0 \end{aligned} \quad (1.88)$$

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)}$$

1.5.2. Lineer momentum denkliği

Bu ilke herhangi bir maddesel cismin toplam lineer momentumunun zamana göre değişme hızının, bu cismin üzerine etkiyen toplam kuvvete eşit olduğunu ifade eder.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \quad \text{içinde; } \rho \dot{\mathbf{v}}_\rho &= \rho \mathbf{f}_\rho + \mathbf{t}_{rp,r} \\ \sigma(t) \quad \text{üzerinde; } \left\| n_l \mathbf{t}_{lk} + \rho \mathbf{v}_k U \right\| &= 0 \end{aligned} \quad (1.89)$$

1.5.3. Açısal momentum denkliği

Bu korunum yasası, herhangi bir maddesel cismin sabit bir noktaya göre açısal momentumunun zamana göre değişme hızının cisme etkiyen dış kuvvetlerin aynı noktaya göre toplam momentine eşit olduğunu ifade eder.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \quad \text{içinde; } \varepsilon_{krp} t_{rp} &= 0, \quad t_{rp} = t_{pr} \\ \sigma(t) \quad \text{üzerinde; } \varepsilon_{klp} r_l \left\| n_r t_{rp} + \rho \mathbf{v}_p U \right\| &= 0 \end{aligned} \quad (1.90)$$

1.5.4. Enerji denkliği

Bu ilke herhangi bir maddesel cismin toplam kinetik enerjisi ile toplam iç enerjisinin toplamının zamana göre değişme hızının, cisme etkiyen dış kuvvetlerin gücü ile birim zamanda cisme giren ya da cisimden çıkan tüm enerjilerin toplamına eşit olduğunu ifade eder. Enerji denkliği matematik olarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) \quad \text{içinde; } \rho \dot{\mathcal{E}} &= \mathbf{t}_{kl} \mathbf{v}_{l,k} - \mathbf{q}_{k,k} + \rho h \\ \sigma(t) \quad \text{üzerinde; } \rho U \left\| \mathcal{E} + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right\| &+ n_k \left\| \mathbf{t}_{kl} \mathbf{v}_l - \mathbf{q}_k \right\| = 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

1.5.5. Termodinamiğin ikinci kanunu (Clausius - Duhem eşitsizliği)

Entropi eşitsizliği veya Clausius - Duhem eşitsizliği de denilen bu kanuna göre, serbest cisim içindeki entropinin zamana göre artışı, cisme hacim kaynaklarından ve yüzeyden giren entropiden daha büyüktür veya en az ona eşittir. Termodinamiğin ikinci kanunu matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{v(t) içinde; } \rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta^2} q \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (1.92)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \|\eta\| - \left\| \frac{n \cdot q}{\theta} \right\| \leq 0$$

Sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilkeleri olan kütle korunumu, lineer momentumun korunumu, açısal momentumun korunumu, enerjinin korunumu ve entropi eşitsizliği kullanılarak 5 adet denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{v}_\rho = \rho f_\rho + t_{rp,r} \quad (3)$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \quad (1) \quad (1.93)$$

Bu denklemlerde $\mathbf{f}$ ve h gibi dış kuvvetlerin bilindiği kabul edilmiştir. Bu denklemlere karşılık aşağıda belirtilen 16 tane bilinmeyen vardır.

$$\rho(1), v_k(3), t_{kl}(6), q_k(3), \theta(1), \eta(1), \varepsilon(1)$$

Elde edilen denklemler, yukarıda verilen bilinmeyenlerin belirlenmesi için yeterli değildir. Denklem sayısı ile bilinmeyen arasındaki fark (11) bünye denklemleri kullanılarak kapatılır (Kabul, 2004).

1.6. Fiber Kinamatiği ve Deformasyonunun Geometrisi

Ele alınan kompozit malzemenin her noktasından iki farklı fiber ailesinden bir elemanın geçtiği varsayılmıştır (Şekil 1.8). Bu fiber elemanı ele alınan malzeme boyunca $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ ve $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ ile gösterilen iki vektör alını oluşturur. Herhangi bir fiber ailesine ait bir fiber eğrisinin parametrik denkleminde o fiber eğrisine ait birim teğet vektörün nasıl bulunacağı, eğrilerin diferansiyel geometrisinden bilinmektedir. Bu durumda herhangi bir fiber ailesine ait fiber dağılımı geometrik olarak bili verilmişse, birim teğet vektörlerinin dağılımdan bulunur (Spencer, 1972). Malzemenin deformasyonu sırasında, fiber ailesinin ortamla birlikte taşındığı varsayılan, fiber deformasyonuna ait geometrik bağıntılar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\mathbf{A}(\mathbf{X})$ ve $\mathbf{B}(\mathbf{X})$ fiber vektörleri deformasyondan sonra $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ve $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ fiber vektörüne dönüşür (Şekil 1.8). Fiber vektörünün dönüşümü ortamla birlikte sürüklenme şeklinde olduğuna göre şekil (1.8) deki geometriden görüldüğü gibi A fiber ailesi için aşağıda verilen bağıntılar geçerlidir (Usal, 1994).

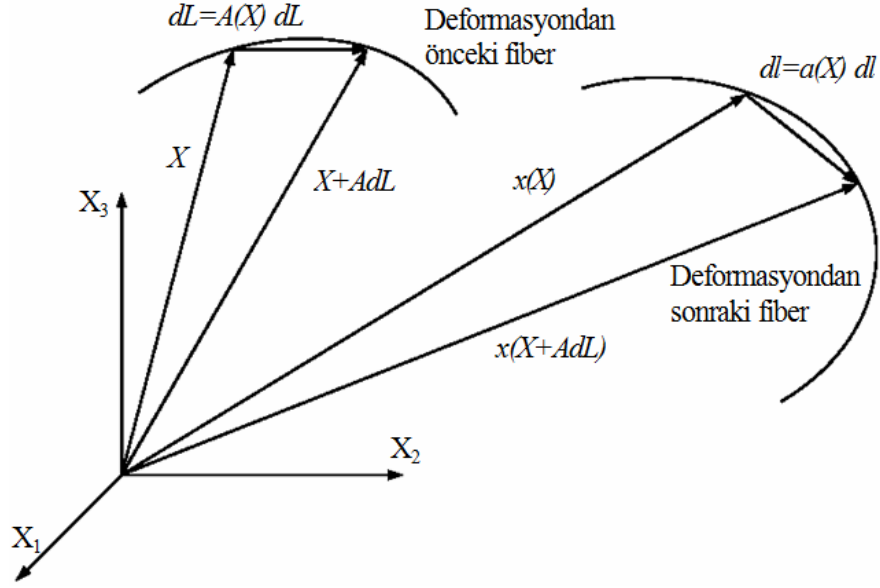
$$dx_k = x_{k,K} dX_K \quad (1.93)$$

$$\mathbf{a} dl = \mathbf{x}(\mathbf{X} + \mathbf{A} dL) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (1.94)$$

Bu ifade a birim vektörünün bileşenleri cinsinden

$$a_k dl = x_k(\mathbf{X} + \mathbf{A} dL) - x_k(\mathbf{X}) \quad (1.95)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 1.12. Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi (Usal, 1994)

(1.94) ifadesinin sağ tarafı X noktası civarında Taylor serisi ile temsil edilir,

$$x_{k,K} A_K dL + \frac{1}{2} x_{k,KL} A_K A_L (dL)^2 + \dots \quad (1.96)$$

İfadesi elde edilir. Yüksek mertebeden terimleri ihmal ederek,

$$a_k dl = x_{k,K} A_K dL \quad (1.97)$$

olduğu görülür. A - ailesine ait fiber uzama oranı

$$\lambda_a \left(\frac{dl}{dL} \right)_a \quad (1.98)$$

şeklinde tanımlanmak sureti ile (1.97) yerine

$$a_k = \lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K \quad , \quad \underline{a} = \lambda_a^{-1} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{A}} \quad (1.99)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, A fiber ailesine ait deformasyon geometrisini veren

ifadedir.

$|A| = |a| = 1$ olduğundan $A_K A_K$ ve $a_k a_k$ terimleri aşağıdaki şekilde yazılır.

$$A_K A_K = |A|^2 = 1, \quad a_k a_k = |a|^2 = 1 \quad (1.100)$$

$$1 = \lambda_a^{-2} x_{k,K} x_{k,L} A_K A_L = (\lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K) (\lambda_a^{-1} x_{k,L} A_L) = \lambda_a^{-2} C_{KL} A_K A_L \quad (1.101)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da aşağıdaki ifade elde edilebilir.

$$\lambda_a^2 C_{KL} A_K A_L, \quad \lambda_a^2 = \underline{A}^T \underline{C} \underline{A} \quad (1.102)$$

Fiberlerin hareketlerine ait bağıntılar fiber genleşme oranı λ , fiber vektörleri a ve b nin zamanla değişiminin deformasyonu takiben

$$2\lambda_a \dot{\lambda}_a = \dot{C}_{KL} A_K A_L = \overline{\dot{x}_{k,K} x_{k,L}} A_K A_L \quad (1.103)$$

olarak bulunur. Bu bağıntıdaki $\dot{C}_{KL}$ terimi,

$$\overline{\dot{x}_{k,K} x_{k,L}} = v_{k,l} x_{l,K} x_{k,L} + x_{k,k} v_{k,l} x_{l,L} \quad (1.104)$$

şeklinde ifade edilebilir. (1.103) ifadesi (1.102) da yerine yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa $\dot{\lambda}_a$ yı veren ifade aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\lambda}_a = \lambda_a v_{k,l} a_k a_l \quad (1.105)$$

(1.144) ifadesinin türevi alınıp gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\dot{a}_k = -\lambda_a^{-2} \lambda_a \dot{\lambda}_a a_k + \lambda_a^{-1} v_{k,l} \lambda_a a_l \quad (1.106)$$

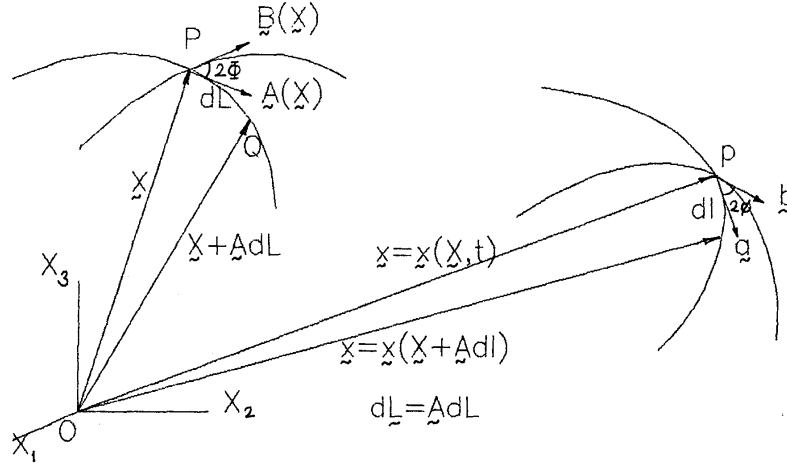
ifadesi elde edilir. Kronecker delta'nın tanımından yararlanarak $v_{k,j}$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v_{k,j} = \delta_{ki} v_{i,j} \quad (1.107)$$

(1.104) ve (1.106) bağıntıları (1.106) denkleminde yerine yazılırsa a_k en son haliyle aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{a}_k = (\delta_{ki} - a_k a_i) v_{i,j} a_j \quad (1.108)$$

A- fiber ailesi için buraya kadar verilen bağıntılar aynı şekilde B- fiber ailesi için de yazılabilir.



Şekil 1.13. İki fiber ailesinin dağılımı. a) Deformasyondan önce , b) Deformasyondan sonra

B-fiber ailesi için geçerli olan bağıntılar:

$$b_k = \lambda_b^{-1} x_{k,K} B_K \quad (1.109)$$

$$\lambda_b^2 = C_{KL} B_K B_L \quad (1.110)$$

$$\dot{\lambda}_b = \lambda_b v_{k,l} b_k b_l \quad (1.111)$$

$$\dot{b}_k = (\delta_{ki} - b_k b_i) v_{i,j} b_j \quad (1.112)$$

$$B_K B_K = |B|^2 = 1, \quad b_k b_k = |b|^2 = 1 \quad (1.113)$$

şeklinde ifade edilebilir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Modern sürekli ortamlar mekaniğine ait temel kavram, aksiyom ve denklemler çalışmamızın her aşamasında kullanılmıştır. Sürekli ortamlar mekaniği alanında Eringen (1967, 1980), ve Şuhubi (1994)'nin kitapları temel kaynaklar olarak kullanılmıştır. Eringen (1967), modern sürekli ortamlar mekaniğinin ana iskeletini oluşturduğu bu eserinde sırasıyla gerinme, hareket, gerilme, sürekli ortamın termodinamiği, bünye denklemleri ve elastisite teorisi, akışkanların dinamiği ve termoelastisite konularını sistematik bir tarzda işlemiştir. Eringen (1980)' de yukarıdaki konulardan farklı olarak sürekli ortamların elektrodinamiğini ayrı bir bölüm olarak vermiştir. Şuhubi (1994)'nin eseri ise Eringen (1967)'nin paralelinde ancak daha detaylı yazılmış ve sürekli ortamlar mekaniği konusunda Türkçe literatüre kazandırılmış bir başyapıt mahiyetindedir. Sürekli ortamlar mekaniği konusunda yabancı literatürde çok sayıda yayın bulunmaktadır. Bunlar arasında Jaunzemis (1967), Malvern (1969), Dawson (1976), Spencer (1980), Chandrasekharai ve Debnath (1994) önemli eserler olarak görülmektedir. Termoelastisite ve uygulamaları konusunda Nowacki (1975)' nin kitabı büyük bir boşluğu doldurmaktadır. Nowacki bu eserinde termoelastisitenin temel denklemlerini oluşturmakta, termoelastik ortamda harmonik dalgalar, periyodik olmayan kaynaklardan doğan termoelastik dalgaların yayılması, düzlem termoelastisite problemleri, anizotropik cisimlerin termoelastisitesi konularını büyük bir titizlikle incelemektedir. Bu kaynak özellikle uygulamalar yönünden oldukça zengindir (Usal, 2001).

Sürekli ortamlar mekaniğinin en önemli matematiksel araçlarından olan invaryantlar teorisi ilk defa Rivlin ve Ericksen (1955) tarafından izotropik malzemeler için gerilme – deformasyon bağıntıları konusunda ele alınmıştır. Sürekli ortamlar ve invaryantlar konusunda önemli çalışmalar yapan Rivlin'in makaleleri, editörlüğünü Barenblatt ve Joseph (1996)'ın yaptığı 2828 sayfalık eserde bir araya gerilmiştir. Bu eser izotropik sonlu elastisite, anizotropik sonlu elastisite, elastik malzemelerde sonlu deformasyonlar üzerinde küçük deformasyonların süper pozisyonu, bünye denklemleri ve invaryantlar konusunda önemli bir başvuru kaynağı oluşturmaktadır.

İnvariantlar teorisini derli toplu bir kitap halinde bir araya getiren ilk çalışma Spencer (1971) tarafından yapılmıştır. Bu alanda Spencer (1960, 1964), Spencer ve Rivlin (1959, 1961), Adkins (1959, 1960, 1962), Wineman ve Pipkin (1964), Simith (1962, 1964) ve Zheng (1993-a, 1993-b, 1993-c, 1993-d) tarafından yapılan çalışmalar vektör, simetrik ve antisimetrik tansör değerli fonksiyonların temsilleri ve bünye denklemleri üzerindeki maddesel simetri kısıtlamaları gibi konularda kapsamlı bilgiler vermektedir.

Kompozit malzemeler, özellikle fiber takviyeli kompozit malzemelerle ilgili temel referansımız Spencer (1972) olmuştur. Spencer (1972) fiber takviyeli malzemelerin deformasyonlarını açıklayan bu çalışmasında, kısıtlama şartları ve kinematik, düzlem gerinmenin kinematiği, kinematik olarak uygun diğer deformasyonlar, kısıtlanmış malzemelerde gerilmeler, fiber takviyeli kompozitlerin elastisitesi ve plastisitesi konularını detaylı bir şekilde incelemiştir. Fiber takviyeli kompozitler mekaniğinin sürekli ortam teorisi yine Spencer (1984)' ın editörlüğünde uluslararası mekanik bilimleri merkezi tarafından yayınlanan kurs notlarında bir araya getirilmiştir. Bu çalışmada, güçlü anizotropik katılar için bünye teorisi, ideal fiber takviyeli malzemelerde sonlu deformasyonlar ve gerilmeler, fiber takviyeli lineer elastik katılar için düzlem problemler, helisel olarak sarılmış liflerle takviyeli silindirlerde mekanik davranış, fiber takviyeli malzemelerin kırılma mekaniği, fiber takviyeli diskler ve plakalardaki boşlukların güçlendirilmesi, fiber takviyeli plastik kiriş ve plakaların dinamiği, uzamaz fiber ailelerine ait şebeke teorisi kapsamlı bir şekilde izah edilmiştir.

Kompozit malzemelerin mühendislik mekaniği ile ilgili önemli bir çalışma Danial ve Isahi (1994) tarafından yapılmıştır. Bu kitapta kompozit malzemelerin tarihsel gelişimi, avantajları ve sınırları incelenmiş, kompozitlere ait temel kavramlar ve karakteristikler sunulmuştur. Ayrıca kompozitlerin karakterizasyonu ve testleri için kullanılan deneysel metotlar anlatılmaktadır (Kabul, 2004).

Tek yönlü bir tabakanın gerilme – gerinme davranışını belirlemek için non-lineer elastik matris özelliklerini lineer elastik fiber özellikleri ile birleştiren yaklaşık bir

teori Frost (1990)'un çalışmasında görülmektedir. Bu çalışmanın sonucunda, eksenel doğrultulardaki yüklemeler için fiber etkileri belirginleşirken non-lineer etkiler fazla hissedilmemekte, eksenel olmayan yükleme durumlarında ise matris etkileri ön plana çıkmakta dolayısıyla non-lineer etkilerin önemli olduğu belirtilmektedir (Usal, 2001).

Attord (2003) çalışmasında, izotropik hiperelastik malzemeler için gerinme enerjisi yoğunluğunu türetmiştir. Gerinme enerjisi yoğunluğu sıkıştırılabilirlik ve sıkıştırılamazlık bileşenlerine ayrılmıştır. Sıkıştırılamazlık bileşeni sadece hacim invaryantı J nin bir fonksiyonu olarak gösterilirken sıkıştırılamazlık bileşeni genelleştirilmiş Mooney ifadesiyle aynıdır. Elde edilen gerinme enerji yoğunluğu homojen gerinme altında kauçuk, hidrostatik basınç altında sıkıştırılabilir izotropik malzemeler ve eksenel olmayan çekme altında hacmi değişen sıkıştırılamaz izotropik malzemeleri içeren problemlerin incelenmesinde kullanılmıştır. Elde edilen verileri deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır. Aynı zamanda bu formülasyonu sıkıştırılabilir izotropik Neo – Hooke malzemeler için gerinme enerji yoğunluğunu türetmek için kullanmıştır.

Diani vd. (2004) yaptıkları çalışmada, izotropik ve anizotropik kauçuk benzeri malzemelerin büyük deformasyonu için malzeme yönüne bağımlı bünye modelini formüle etmişlerdir. Bu gibi malzemeler genellikle izotropik özellik göstermesine rağmen silindirden geçirilmiş kauçuklarda anizotropik davranış gözlenmiştir. Kauçuk benzeri malzemeleri karakterize eden gerinme enerjisi yoğunluğu fonksiyonu genellikle asal germe oranlarına bağlıdır, bundan dolayı anizotropiyi ifade etmek zordur. Bunun yanında önerilen gerinme enerji yoğunluğu malzeme yönüne bağlıdır ve anizotropiyi ifade eder. Malzeme tepkisinin gerinmeye bağlı olduğu durum için temel gerinme enerji formunu fenomenolojikselsel olarak elde etmişlerdir. Bu modelin tepkisini anizotropik hiperelastik kauçuk benzeri malzemeler için eksenel olmayan çekme deneyi verileriyle ve izotropik kauçuk benzeri malzemeler için eksenel olmayan ve çift eksenli çekme ile karşılaştırmışlardır.

Apalak (2008) “Plastik esaslı tek yönlü fiber takviyeli kompozit malzemelerin sönüm değerlerinin tespiti” adlı proje çalışmasında plastik (epoksi) esaslı tek yönlü sürekli fiber (karbon) takviyeli kompozit malzemelerden imal edilen yapıştırıcı ile birleştirilmiş iki adet T tipi kompozit bağlantının ve karşılaştırma amacıyla kullanılan tek tip ankastre kompozit bir kirişin titreşim sönüm değerleri (loss factor) deneysel olarak tespit edilmiştir.

Criscione vd. (2000) yaptıkları çalışmada, referans konfigürasyonuna göre izotropik davranış sergileyen hiperelastik malzemelerin sonlu deformasyonu için orijinal bir bünye formülasyonu geliştirmişlerdir.

Dluzewski (2000) çalışmasında, anizotropik elastik malzemeler için gerilme – gerinme bünye denklemlerini elde etmiştir ve özellikle logaritmik gerinme üzerinde durmuştur. Spesifik iç enerji için Cauchy gerilme denklemini içeren bünye denklemini türetmiştir. Nispeten basit ve elastik malzemelerin geniş bir sınıfını içeren matematiksel ilişkileri vermiştir.

Bonet ve Burtan (1998) çalışmalarında, tamamen non-lineer alanında fiber doğrultusunda elastik malzemelerin modellenmesinde kullanılabilecek basit enine izotropik hiperelastik malzemelerin bünye denklemleri üzerinde çalışmışlardır. İkinci Piola – Kirchhoff tansörü, Cauchy gerilme tansörü ve Lagrange – Euler elastisite tansörü ifadelerini elde etmişlerdir. Kullandıkları malzemenin performansını göstermek için statik ve dinamik uygulamalar yapmışlardır.

Gadala (1997) çalışmasında, non-lineer bünye ilişkilerinin sayısal ve sonlu eleman modeli alanlarındaki gelişmeler üzerine bir çalışma yapmıştır. Bu çalışma elastik, hiperelastik, elastoplastik ve anizotropik plastik malzeme modellerini içermektedir. Hiperelastik modelde sıkıştırılamazlık kısıtlamasını uygulamıştır. Hiperelastik modelin sayısal davranışı için sistematığı ve genel prosedürü vermiştir (Usal, 2001).

Şahin (2006) yılında yayınlamış olduğu “Kompozit malzemelere giriş” adlı eserinde, kompozit malzemeler ve uygulama alanları, seramik elyaflar, matris malzemeleri,

fabrikasyon teknikleri, elyaf-matris ara yüzeyi ve önemi, izotropik ve ortopedik tabakalarda makro-mekanik analiz yanında mikro-mekanik analizler açıklanmış ve kompozit malzemelerin mekanik özellikleri üzerinde durmuştur. Ayrıca, kompozit malzemelerin işlenebilirliği yanında Nanoteknolojinin tanıtımı ve önemi, deneysel tasarım ve modelleme teknikleri açıklanmış ve kompozitlerle ilgili yapılan deneysel araştırma sonuçları ve bunlara uygulanan teorik modelleme metotlarıyla ilgili bazı sonuçlara yer vermiştir.

Şuhubi (1994) Türkçe olarak literatürlerde yer alan sürekli ortamlar mekaniği alanında yazılmış ilk eser olmasından dolayı oldukça önemli bir özelliğe sahiptir.

Kabul (2004) sürekli ortam mekaniğine giriş adlı yüksek lisans seminerinde sürekli ortam hakkında bilgiler verilmiş, kompozit malzemeler tanımlanmış, fiber takviyeli kompozit malzemeler hakkında bilgilendirmeler yer almaktadır.

Kabul (2005) “Fiber takviyeli hiperelastik malzemeler için matematiksel bir model” adlı yüksek lisans tezinde, tek fiber ailesi ile takviye edilmiş hiperelastik bir malzemenin non-lineer davranışı modern sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. Mekaniğin denge kanunları ile tutarlı olan termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarının birleştirilmiş şekli, gerilme potansiyelinin zamana göre maddesel türevi cinsinden ifade edilmiştir. Gerilme potansiyelinin bağımsız değişkenleri, Green deformasyon tansörü ve fiber vektörü olarak belirlenmiştir.

Altınışık (2007) yüksek lisan tezinde, doğal kompozit malzemelerin otomotiv sanayinde kullanılması araştırmıştır. Yapılan çalışmada miktar olarak en fazla yetişen ve kullanılmayan doğal lifin kompozit malzeme içindeki mukavemet değerleri araştırılmıştır. Sanayide üretilen araçların birçok yerinde kullanılan cam elyafın yerine doğal lif kullanmanın çok daha avantajlı olduğu görülmüştür. Bu amaçla doğal lif destekli kompozit malzemelerin araçlarda kullanımının uygun olduğu kanaatine varılmıştır.

Usal (1994) doktora çalışmasında, iki bağımsız ve genleşmez fiber ailesiyle takviye edilmiş ve güçlü bir elektrostatik alanla etkileşim halinde olan non-lineer elastik bir dielektrik ortamın termodinamik davranışını sistematik olarak incelemiştir. Bu çalışmada invaryantlarda yararlanılarak bir bünye modeli kurmuştur.

Usal, Usal ve Esendemir (2006) yaptıkları iki uzamaz fiber aileli sıkışmaz, viskoelastik bir ortamın non-lineer davranışını belirleyen bünye denklemleri elde edilmiştir. Malzeme viskoelastik olduğundan ortaya çıkan gerilme, elastik ve disipatif iki simetrik gerilmenin toplamı şeklindedir.

Öntürk (1999) “Fiberlerle takviyeli viskoelastik bir malzemeye homojen enformasyonun uygulanması” adlı bu çalışmasında, fiberlerle takviye edilmiş viskoelastik bir kompozit ortama ait gerilme bünye denklemine homojen deformasyon uygulanmıştır. Bunun için önce deformasyon geometrisi incelenmiş ve gerekli kinematik bağıntılar elde edilmiştir. Kompozit ortamda ve $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ vektörleriyle gösterilen doğrusal fiberler kullanılmıştır. Daha sonra homojen deformasyonda kullanılacak olan büyüklükler ve kompozit ortamdaki kısıtlamaları veren ifadeler elde edilmiştir. Bundan sonra ortaya çıkan kinematik kısıtlamalar altında homojen deformasyona maruz kalan bir kompozit ortamın gerilme analizi yapılmıştır. Elde edilen gerilme bileşenleri daha sonra sıkışmazlık ve uzamazlık kısıtlamalarından dolayı ortamda oluşan reaksiyon gerilmelerinin bulunmasında kullanılmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu çalışmada materyal olarak, uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviyeli sıkışmaz kompozit bir malzeme ele alınıp dış yükleme sonucunda oluşan gerilmenin bünye denklemi elde edilmiştir. Fiberlerin dağılımı nedeniyle yönlü bir ortam olma özelliği kazanarak anizotropik bir yapıya kavuşan malzemede, matris malzemesi normalde izotrop bir ortam olarak düşünülmüştür. Dış yüklemelere karşı kompozit malzeme davranış olarak kendisini gerilme tarzında ifade etmektedir. Bu çalışmada tüm ortamlar için geçerli olan genel denge denklemleri, termodinamiğin ikinci prensibi (Clausius- Duhem eşitsizliği), bünye teorisinin aksiyomları, özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ve malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlara dayanarak bünye fonksiyoneli bulunurken gerilme potansiyelinin argümanlarının somut olarak tayini için invaryantlar teorisine ait bulgular rutin bir yöntem olarak kullanılmıştır.

Kısım 1.5' de söz edilen denge denklemleri herhangi fiziksel ortam için geçerli olan denklemlerdir. Bu bölümde termodinamiğin birinci ve ikinci kanunu birleştirilip, bünye aksiyomları da kullanılarak gerilme, entropi yoğunluğu, iç enerji ve ısı akısı yoğunluğu saptanacaktır. Bu bölümde termodinamiğin kısıtlamaları kullanılarak ortamın fiziksel ve topolojik özellikleri de kullanılarak bünye denklemlerine ait genel formüller çıkarılıp daha sonra bünye aksiyomları kullanılarak formüller somutlaştırılacaktır.

Kısım 1.5 deki (1.92)₁ ifadesini pratik kullanım bakımından daha yararlı şekillerde yazmak için, (1.91)₁ ifadesinden ısı kaynağı (ρh) terimini çekip, (1.92)₁ ifadesinde yerine yazdığımızda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho\gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta}(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta}) + \frac{1}{\theta}t_{kl}v_{l,k} - \frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k} \geq 0 \quad (3.1)$$

Bu ifadedeki entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içerisinde kontrol edilemeyeceğinden, bu türevi kontrol edilebilen büyüklük olan θ cinsinden yazmak için aşağıdaki gibi tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılır.

$$\psi = \varepsilon - \theta \eta \quad (3.2)$$

Entropi yerine sıcaklık bağımsız değişken olarak kullanıldığı zaman iç enerji yoğunluğu yerine yukarıdaki ifade tanımlanır ve genelleştirilmiş Helmholtz serbest enerji yoğunluğu adını alır. Termodinamik bakımdan enerjinin kullanılabilir kısmını temsil eder. Daha sonra belirtileceği gibi, serbest enerji yoğunluğunun hangi büyüklüklere bağlı olduğunu malzemenin bünyesi belirleyecektir. (3.2) ifadesindeki ε u çekip maddesel türevini alarak (3.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak, kontrol edilebilir bağımsız değişkenler cinsinden entropi eşitsizliği (Termodinamiğin ikinci kanunu) aşağıdaki şekli alır (Şuhubi, 1994).

$$\rho \gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.3)$$

θ pozitif değerli olduğundan (3.3) eşitsizliği θ ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirmez. (3.3) eşitsizliği θ ile çarpılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho(\dot{\phi} + \dot{\theta} \eta) + t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.4)$$

Bu ifadede yer alan gerilme tansörü mekanik yüklemelerden kaynaklanmaktadır ve simetriktir. Bu ifadedeki ikinci terim olan gerime tansörü ile hız gradyanı çarpımı, (1.69) da ki tanımlama 1 a kullanılarak gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$t_{kl} v_{l,k} = t_{kl} d_{lk} \quad (3.5)$$

(3.5) ifadesi (3.4) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$-\rho(\dot{\psi} + \theta \dot{\eta}) + t_{kl} d_{kl} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.6)$$

(1.24) denklemiyle verilen Green deformasyon tansörünün maddesel türevi alınır, d_{kl} cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\dot{C}_{KL} = 2d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (3.7)$$

(3.7) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa, d_{kl} simetrik şekil değiştirme hızı tansörü $\dot{C}_{KL}$ cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d_{lk} = d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (3.8)$$

(3.6) eşitsizliğinde, ρ yerine (1.88)₃ d_{kl} ve (3.8) ifadesini yazar ve eşitsizlik J ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho_0(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} - \frac{1}{2} J q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.9)$$

ψ ye bağlı olarak gerilme potansiyeli,

$$\Sigma = \rho_0 \psi \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır ve gerilme potansiyelinin (3.9) da yerine yazılmasıyla eşitsizlik aşağıdaki yeni formuna kavuşur.

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} - \frac{1}{\theta} J q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.11)$$

Bundan böyle (3.10) denklemi ile tanımlanan Σ yı gerilme potansiyeli ismi ile kullanacağız. (3.11) içinde yer alan argümanların maddesel koordinatlar ile uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T_{KL} \equiv JX_{K,k}X_{L,l}t_{kl} \quad (3.12)$$

$$Q_K = JX_{K,k}q_k \quad (3.13)$$

$$\theta_{,K} \equiv x_{k,K}\theta_{,k} \quad (3.14)$$

(3.12) – (3.14) tanımlarından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$t_{kl} = J^{-1}x_{k,K}x_{l,L}T_{KL} \quad (3.15)$$

$$q_k = J^{-1}x_{k,K}Q_K \quad (3.16)$$

$$\theta_{,k} = X_{K,k}\theta_{,K} \quad (3.17)$$

(3.11) eşitsizliğinde (3.12), (3.14) ve (3.16) ifadeleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa (3.6) eşitsizliği maddesel koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta} \theta_{,K} Q_K \geq 0 \quad (3.18)$$

Yukarıdaki eşitsizlik entropi üretiminin genel bir ifadesidir. Bu eşitsizliğin kullanılabilmesi için Σ gerilme potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunun ve ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Buna göre Σ nın argümanlarını seçmek, formal olarak belli bir malzeme seçmek demektir. Şu aşamada problem, yukarıdaki entropi eşitsizliğinde Σ gerilme potansiyelinin nelere bağlı olduğunu tespit etmektir.

Bu çalışmada iki fiber aileleri hiperelastik davranış gösteren bir maddesel cisim seçilmiştir. Seçilen bu malzemeye göre Σ nın argümanları ve bağlı olduğu değişkenler Eringenin (1980) ve Şuhubinin (1994) daha genel ve sistematik bir

yaklaşım izleyerek tüm bünye fonksiyonları için geliştirdikleri bünye aksiyomları kullanılarak bulunacaktır.

Kozalite ve Determinizm aksiyomlarına göre (Eringen, 1980; Şuhubi, 1994), Σ 'nın X maddesel noktasının t anındaki serbest enerjisi, cismi meydana getiren tüm maddesel noktaların hareket ve sıcaklık tarihine bağlı olduğundan $\Sigma(X,t)$,

$$\Sigma(\mathbf{X},t)=\Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}',t'),\theta(\mathbf{X}',t'),\mathbf{X}], \quad \mathbf{X}'\in B, -\infty < t' \leq t \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Uzun işlemlerden sonra Objektivite ve Hafıza aksiyomuna göre Σ aşağıdaki şekli alır (Şuhubi, 1994).

$$\Sigma(\mathbf{X},t)=\Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}',t)-\mathbf{x}(\mathbf{X},t),\theta(\mathbf{X}',t),\mathbf{X}] \quad (3.20)$$

(3.20) ifadesinde eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki ilk terim olan hareket farkı X noktası civarında Taylor serisi ile gibi temsil edilebildiğini farz ederek,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}',t)-\mathbf{x}(\mathbf{X},t) &= \mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X},t)(X'_K-X_K)+ \\ &\frac{1}{2!} \mathbf{x}_{,KL}(\mathbf{X},t)(X'_K-X_K)(X'_L-X_L)+\dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki temsilin mümkün olabilmesi için hareketin tüm gradyanlarının mevcut olması gerekir. Diğer taraftan yakın civarsallık aksiyomuna göre Σ 'nın argümanlarına olan bağımlılığı $\mathbf{X}'$ ve $\mathbf{X}$ arasındaki mesafe arttıkça hızla sönümlenmektedir. Bu aksiyoma göre (3.21) seri temsiline kaç terimin alınacağı belirlenmiş olur. Basit termomekanik malzemelerde olduğu gibi bu aksiyoma dayanarak (3.21) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terimden sonraki terimlerin etkilerinin olmadığı düşünülmüştür. Buna göre (3.21) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}',t)-\mathbf{x}(\mathbf{X},t)=\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X},t)(X'_K-X_K) \quad (3.22)$$

(3.22) ifadesi, (3.20) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2] \quad (3.23)$$

(3.20) ifadesindeki $\mathbf{D}_1$ ve $\mathbf{D}_2$ vektörleri, (3.22) ifadesindeki $(X'_K - X_K)$ şeklindeki terimleri temsil eden vektörlerdir. $\mathbf{D}_1$ ve $\mathbf{D}_2$ vektörleri, malzemenin anizotrop özelliklerinin bünye aksiyomlarından kaynaklandığını göstermektedir. Buradan görüldüğü gibi objektivite aksiyomu ortamın anizotropisini temsil etme imkanını ortaya çıkarmaktadır. Bu çalışmada seçilen malzeme homojen ve izotrop olmakla birlikte, fiber takviyeli olması nedeniyle güçlü bir anizotropi özelliği göstermektedir. Çift fiber ailesi için $\mathbf{D}_1$ ve $\mathbf{D}_2$ vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Öntürk, 1993; Usal, 1994).

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &\equiv \mathbf{A}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{D}_2 &\equiv \mathbf{B}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Diğer taraftan sıcaklığın uzaysal tarihi, X civarında Taylor serisi açılımı ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \theta(X', t) &= \theta(\mathbf{X}, t) + \theta_{,K}(\mathbf{X}, t) (X'_K - X_K) + \\ &\frac{1}{2!} \theta_{,KL}(\mathbf{X}, t) (X'_K - X_K) (X'_L - X_L) + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Yakın civarsallık aksiyomundan faydalananarak (3.25) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terimden sonraki terimler sıfırlanır. Ayrıca izotermal şartlarda oluşacağı düşünülerek $\theta_{,K} = 0$ yazılırsa (3.25) ifadesi aşağıdaki hale dönüşür.

$$\theta(\mathbf{X}', t) = \theta(\mathbf{X}, t) \quad (3.26)$$

(3.26) ifadesi, (3.23) ifadesinde yerine yazılırsa Σ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[x_{k,K}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), X_K, \mathbf{A}(\mathbf{X}), \mathbf{B}(\mathbf{X})] \quad (3.27)$$

(3.27) ifadesindeki büyük indisler maddesel koordinatlardaki bileşenleri, küçük indisler ise uzaysal koordinatlardaki bileşenleri göstermektedir.

Objektivite aksiyomu, (3.27) ifadesine bir kısıtlama daha getirir. Bu kısıtlamaya göre Σ serbest enerji fonksiyonu, deforme olmuş malzemenin rijit hareketleri altında invariant kalmalıdır. Bu durumda, uzaysal koordinat sisteminin zamana bağlı transformasyonları altında, Σ 'nın invariant kalması gerekir. Cauchy teoremine göre bu şartın sağlanması ve Σ 'nın ilk argümanının tek değerli bir fonksiyonu olabilmesi için $\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t) = x_{k,K} \mathbf{i}_k(\mathbf{X}, t)$ 'ya olan bağımlılığı, $\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t)$ vektörlerinin aşağıda belirtildiği gibi ikişer ikişer skaler ve üçlü karışık çarpımlarına bağımlılığı şeklinde olması demektir (Şuhubi, 1994).

$$\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{x}_{,L}(\mathbf{X}, t) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{x}_{,K}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{x}_{,L}(\mathbf{X}, t) \times \mathbf{x}_{,M}(\mathbf{X}, t) \quad (3.29)$$

(3.27) ifadesindeki diğer argümanlar, maddesel koordinatlarda ifade edildiğinden Cauchy teoremi bu argümanlar için söz konusu değildir ve bu argümanlar aynen yerinde kalır. (3.28) ifadesi Green deformasyon tansörünün tanımıdır ve aşağıdaki gibi yazılır (Şuhubi, 1994).

$$C_{KL} \equiv x_{k,K}(\mathbf{X}, t) x_{k,L}(\mathbf{X}, t) \quad (3.30)$$

(3.29) ifadesi ise deformasyon gradyanının determinantını tanımlamakta olup aşağıdaki gibi ifade edilir (Şuhubi, 1994).

$$J \equiv \det(x_{k,K}) = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.31)$$

(3.31) ifadesindeki $\det(x_{k,K})$ aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$J \equiv \det(x_{k,K}) = \sqrt{\det \underline{\underline{C}}} = \frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}, t - \tau')} \quad (3.32)$$

(3.30) ve (3.32) ifadelerinden faydalanarak (3.27) ifadesi aşağıdaki hale gelir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \rho^{-1}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), X_K, \mathbf{A}(\mathbf{X}), \mathbf{B}(\mathbf{X})] \quad (3.33)$$

Tutarlılık aksiyomu; bünye denklemlerinin, sürekli ortamlar mekaniğinin tüm denge denklemleriyle tutarlı olmasını ifade etmektedir. Buna göre, daha önce kütle korunumu yasası $J = \frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}, t)} = \sqrt{\det C_{KL}}$ şeklinde belirtildiğinden, (3.33) ifadesinde de C_{KL} 'nin mevcut olması nedeniyle, ρ^{-1} değişkenler listesinden çıkarılabilir. Bu durumda (3.1.33) ifadesi aşağıdaki hale indirgenir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}, t), X_K, \mathbf{A}(\mathbf{X}), \mathbf{B}(\mathbf{X})] \quad (3.34)$$

Malzemenin homojen olduğunu kabul ederek, (3.34) ifadesi ile verilen Σ 'nin bağlı olduğu argümanlardan $\mathbf{X}$ kaldırılır. Bu durumda,

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), A_K(\mathbf{X}), B_K(\mathbf{X}), \theta(\mathbf{X}, t)] \quad (3.35)$$

Bu durumda $\mathbf{A}_K$ ve $\mathbf{B}_K$ 'nin maddesel türevinin sıfır olduğunu düşünerek (3.35) ifadesinin maddesel türevi alınır aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (3.36)$$

(3.36) ifadesi (3.18) eşitsizliğinde yerine yazılıp ortak terimlerin parantezleri alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{2} \left(\bar{T}_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \right) \dot{C}_{KL} - \rho_0 \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_K \theta_{,K} \geq 0 \quad (3.37)$$

(3.37) ifadesiyle verilen entropi eşitsizliğindeki termodinamik proses, aşağıdaki gibi bir sütun vektör ile gösterilebilir.

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{KL} \\ \dot{\theta} \\ \theta_{,K} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

(3.38) ifadesi ile verilen sütun vektör, bu çalışmada ele alınan malzeme için termodinamik prosesi temsil eden keyfi bir vektör olarak düşünülmüştür.

(3.37) eşitsizliğindeki argümanları, sağdan başlayarak θ 'yı $\dot{\theta}$ ve $\theta_{,K}$ şeklinde, ve C_{KL} türevini $\dot{C}_{KL}$ şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden, (3.37) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $\dot{\theta}$ 'nin, $\theta_{,K}$ 'nin, ve $\dot{C}_{KL}$ 'nin katsayıları sıfır olacaktır (Şuhubi, 1994). (3.37) eşitsizliğindeki $\dot{C}_{KL}$, $\dot{\theta}$ ve $\theta_{,K}$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\frac{1}{2} \left(T_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \right) = 0 \quad \Rightarrow T_{KL} = -2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}}$$

$$\eta = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}$$

$$Q_K = 0 \quad (3.39)$$

(3.39)₃ ifadesi ortamda ısı iletiminin olmadığını ifade etmektedir. (3.39)₁ ifadesi gerilme için bünye denklemleridir. Σ 'nin bağlı olduğu argümanlar tekrar yazıldığında;

$$\Sigma = \Sigma(C_{KL}, A_K, B_K, \theta) \quad (3.40)$$

Bu aşamada, incelenen malzemenin uymak zorunda kaldığı maddesel simetri kısıtlamalarından bahsetmek uygun olacaktır. $\mathfrak{S}$, tercihli doğrultulara karşılık gelen bir maddesel koordinat takımını yeni bir maddesel koordinat takımına dönüştüren ve yapının fiziksel özelliklerini invariyan bırakarak ortogonal matrislerden oluşmuş sonlu bir grup olsun. Bu gruba incelenen kristal yapının simetri grubu denir ve ortogonal grubun bir alt grubunu oluşturur, dolayısıyla $\mathfrak{S} \subseteq O(3)$ yazılabilir. Simetri grubu tam ortogonal gruba eşitse malzeme izotropdur. $\mathfrak{S}$ simetri grubunun üyesi olan ve sonlu sayıda $\underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S}$ matrislerinden oluşmuş bir simetri grubu dikkate alındığında, bünye fonksiyonellerinin aşağıdaki koordinat dönüşümleri altında şeklen – değişmez kalması gerektiği görülmektedir (Şuhubi, 1994).

$$X'_K = S_{KL} X_L, \quad X_L = S_{LK}^T X'_K = S_{KL} X'_K, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T, \quad \forall \underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S} \quad (3.41)$$

(3.41) ile verilen maddesel simetri kısıtlaması, $\Sigma = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \theta)$ bünye fonksiyonellerini aşağıdaki gibi ifade etmeyi gerektirir.

$$\Sigma' = \Sigma \Rightarrow \Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{A}}', \underline{\underline{B}}', \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \theta) \quad (3.42)$$

Bünye fonksiyonellerinin argümanları ise (3.41) ile verilen dönüşüm dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= S_{KM} S_{LN} C_{MN} &\Rightarrow \underline{\underline{C}}' &= \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T \\ A'_K &= S_{KM} A_M &\Rightarrow \underline{\underline{A}}' &= \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}} \\ B'_K &= S_{KM} B_M &\Rightarrow \underline{\underline{B}}' &= \underline{\underline{S}} \underline{\underline{B}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

(3.43) de verilen ifadeler (3.42) ifadesiyle verilen bünye fonksiyoneline yerine yazıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\Sigma (\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T , \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{S}} \underline{\underline{B}} , \theta) = \Sigma (\underline{\underline{C}} , \underline{\underline{A}} , \underline{\underline{B}} , \theta) \quad (3.44)$$

Bu çalışmada ele alınan kompozit malzemede matris malzeme izotrop kabul edildiğinden (3.44) ifadesiyle verilen bünye fonksiyoneli izotrop ortamlar için bağlı olduğu argümanlarının ortak invariantları vasıtası ile belirlenecektir.

Genellikle fiberli doğal veya biyolojik kompozitler sıkışmaz kompozitler olarak kabul edilir. Örneğin canlı dokular veya implant için sentetik kompozitler bu grup kompozitler sınıfındadır ve bu kompozitler non-lineer davranış özelliği gösterir. Uzayabilir fiberlerle takviyeli kompozit malzemelerin non-lineer bünye bağıntılarının elde edilmesi, özellikle doğal kompozitlerin non-lineer davranışının belirlenmesine ve kullanım alanlarının genişlemesine yardımcı olacaktır.

Gerilme bünye denkleminin Kirchhoff şekli Şuhubi (1994) tarafından,

$$T_{Kk} (\underline{\underline{F}} , \underline{\underline{X}}) = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \quad (3.45)$$

şeklinde verilmekte ve bu bağıntı Cauchy gerilme tansörü ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilmektedir.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} x_{l,K} \quad (3.46)$$

şeklinde yazabilir. Ortam sıkışmaz olduğu takdirde ise,

$$J = 1 \quad \text{veya} \quad \det \underline{\underline{C}} = III = 1 \quad (3.47)$$

şartı sağlanmalıdır.

$$\Sigma - p(\mathbf{x}, t) (J - 1) \quad (3.48)$$

Bu ifadede p , uzay ve zaman değişkenlerinin keyfi fonksiyonları olup Lagrange çarpanı adını alır. (3.48) fonksiyonun $x_{k,K}$ ya göre türevi alınıp (3.46) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$T_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.49)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, ortam sıkışmaz kabul edildiğinde gerilme tansörünün uzaysal koordinatlardaki formudur. (3.49) ifadesinin maddesel koordinatlardaki formu ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$T_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.50)$$

3.2. Yöntem

İzotrop bir ortamın bünye denklemleri maddesel koordinat eksen takımını keyfi bir dik eksen takımına çeviren ve ortogonal, $\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T$, matrisi ile belirlenen koordinat dönüşümü altında şeklen-değişmez (form – invariant) kalmalıdır. Bu durumda, simetri grubu $\{ \underline{\underline{Q}} \}$ matrislerinden oluşan bir maddesel ortamın X_K noktası ve A_K ve B_K fiber aileleri aşağıdaki gibi dönüşür.

$$\begin{aligned} A'_K &= Q_{KL} A_L & , & & \underline{\underline{A}}' &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} \\ X'_K &= Q_{KL} X_L & , & & \underline{\underline{X}}' &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{X}} \\ B'_K &= Q_{KL} B_L & , & & \underline{\underline{B}}' &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{B}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Bu durumda, gerilme potansiyeli Σ ,

$$\Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{A}}', \underline{\underline{B}}', \theta) \quad (3.52)$$

şeklinde dönüşür. Σ nın argümanları da bu dönüşüm altında,

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= Q_{KM} Q_{LN} C_{MN} & , & & \underline{\underline{C'}} &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}}^T \\ A'_K &= Q_{KL} A_L & , & & \underline{\underline{A'}} &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} \\ B'_K &= Q_{KL} B_L & , & & \underline{\underline{B'}} &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{B}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

olarak ifade edilir. (3.52) ve (3.53) ifadeleri yardımıyla,

$$\Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \theta) = \Sigma(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}}^T, \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{B}}, \theta) , \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in O(3) \quad (3.54)$$

eşitliği yazılır. Burada $O(3)$, 3- boyutlu ortogonal simetri grubunu temsil etmektedir. Diğer taraftan Σ' nın kendi argümanlarının analitik fonksiyonu olduğu varsayıldığından, simetri grubunun üyesi olan ortogonal dönüşümler altında invariant kalması beklenen Σ' nın, argümanlarının sonlu sayıda invariantlarına bağlı olması gerekir. İnvaryantlar teorisindeki yöntemleri kullanarak (Spencer, 1972), bir simetrik matrisin $(\underline{\underline{C}})$ ve iki polar vektörün $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ birbirinden bağımsız 12 adet invariantı mevcuttur:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \text{tr } \underline{\underline{C}} = C_{KK} \\ I_2 &\equiv \text{tr } \underline{\underline{C}}^2 = C_{KL} C_{LK} \\ I_3 &\equiv \text{tr } \underline{\underline{C}}^3 = C_{KL} C_{LM} C_{MK} \\ I_4 &\equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_K A_K = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \\ I_5 &\equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B_K B_K = \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \\ I_6 &\equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_K B_K = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{B}} \\ I_7 &\equiv \mathbf{A} \cdot \underline{\underline{C}} \mathbf{A} = A_K C_{KL} A_L = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}}) = \lambda_a^2 \\ I_8 &\equiv \mathbf{A} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \mathbf{A} = A_K C_{KL} C_{LM} A_M = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{C}}^2 \underline{\underline{A}}) \\ I_9 &\equiv \mathbf{B} \cdot \underline{\underline{C}} \mathbf{B} = B_K C_{KL} B_L = \underline{\underline{B}}^T (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{B}}) = \lambda_b^2 \\ I_{10} &\equiv \mathbf{B} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \mathbf{B} = B_K C_{KL} C_{LM} B_M = \underline{\underline{B}}^T (\underline{\underline{C}}^2 \underline{\underline{B}}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$I_{11} \equiv A \cdot \underline{\underline{C}} B = A_K C_{KL} B_L = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{C}} B)$$

$$I_{12} \equiv A \cdot \underline{\underline{C}}^2 B = A_K C_{KL} C_{LM} B_M = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{C}}^2 B)$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invariantları,

$$I = I_1 = tr \underline{\underline{C}}$$

$$II = \frac{1}{2} [I_1^2 - I_2] = \frac{1}{2} [(tr \underline{\underline{C}})^2 - tr \underline{\underline{C}}^2]$$

$$III = \frac{1}{6} [I_1^3 - 3 I_1 I_2 + 2 I_3] = \det \underline{\underline{C}} \quad (3.56)$$

şeklinde olduğu dikkate alınarak (Eringen, 1980), (3.55) ifadesindeki (I_1, I_2, I_3) invariantları yerine (3.56) da verilen asal invariantları kullanarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma (I, II, III, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}, \theta) \quad (3.57)$$

Ayrıca, ortamın sıkışmazlığı ve fiberlerin kinematiği kısmında (1.100) ve (1.113) ifadeleri dikkate alındığında III , I_4 ve I_5 invariantlarının değeri 1' e eşit olduğu görülür ve Σ 'nın bu invariantlara olan bağımlılığı kalkar. Sonuç olarak Σ 'nın bağlı olduğu invariantlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$I = tr \underline{\underline{C}} = C_{KK}$$

$$II = \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK})$$

$$I_6 = A_K B_K$$

$$I_7 = A_K C_{KL} A_L = \lambda_a^2$$

$$I_8 = A_K C_{KS} C_{SL} A_L$$

$$I_9 = B_K C_{KL} B_L = \lambda_b^2$$

$$I_{10} = B_K C_{KS} C_{SL} B_L$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= A_K C_{KL} B_L \\
I_{12} &= A_K C_{KS} C_{SL} B_L
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Bu durumda Σ için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma (I, II, I_6, I_7, I_8, I_9, I_{10}, I_{11}, I_{12}, \theta) \tag{3.59}$$

Ortamın sıkışmaz kabul edildiği durumda gerilmeye ait bünye denklemleri 3.1. kısmında (3.48) bağıntılarıyla maddesel formda aşağıdaki gibi verilmişti.

$$\bar{T}_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PR}} \tag{3.60}$$

Bu ifade de yer alan kısmi türev (3.59) ifadesiyle belirtilen invaryantlara göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PR}} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} \frac{\partial I_9}{\partial C_{PR}} + \\
&\quad \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} \frac{\partial I_{10}}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} \frac{\partial I_{11}}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} \frac{\partial I_{12}}{\partial C_{PR}}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

(3.59) ifadesiyle ile verilen invaryantların C_{PR} 'ye göre sıfır olmayan türevleri de aşağıda görüldüğü gibidir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial C_{PR}} &= \delta_{PR} \\
\frac{\partial II}{\partial C_{PR}} &= \delta_{PR} C_{KK} - C_{PR} \\
\frac{\partial I_7}{\partial C_{PR}} &= A_P A_R
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_8}{\partial C_{PR}} &= A_P A_K C_{KR} + C_{PK} A_K A_R \\
\frac{\partial I_9}{\partial C_{PR}} &= B_P B_R \\
\frac{\partial I_{10}}{\partial C_{PR}} &= B_P B_K C_{KR} + C_{PK} B_K B_R \\
\frac{\partial I_{11}}{\partial C_{PR}} &= A_P B_R \\
\frac{\partial I_{12}}{\partial C_{PR}} &= A_P B_K C_{KR} + C_{PK} A_K B_R
\end{aligned} \tag{3.62}$$

(3.62) de elde edilen sonuçlar (3.61) eşitliklerinde yerlerine yazılıp (3.59) denklemlerine taşınırsa, mekanik yükleme ile deforme olan, iki fiber aileli bir izotrop ortamda, ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzayabilir olduğu durumda gerilme alanına ait bünye denklemleri maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -p C_{PR}^{-1} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{KK} \right) \delta_{PR} - \right. \\
& \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} A_P A_R + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (A_P A_K C_{KR} + C_{PK} A_K A_R) + \\
& \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} B_P B_R + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (B_P B_K C_{KR} + C_{PK} B_K B_R) + \\
& \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} A_P B_R + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (A_P B_K C_{KR} + C_{PK} A_K B_R) \right\}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

4. BULGULAR

4.1 Gerilmenin Maddesel Formu

(3.63) denkleminde gözüken Lagrange çarpanı $-p$; alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenecektir. $-p$ bünye denklemleri ile belirlenemez. Gerilmenin bünye denklemi olan (3.63) ifadelerindeki Σ ’nın invaryantlarına göre türevlerinin bilinmesi gerekir. (3.59) ifadesinden Σ ’nın hangi argümanlara bağlı olduğu görülmektedir. Ancak şu aşamada Σ ’nın bu invaryantlara nasıl bağlı olduğu bilinmemektedir. Σ , bu invaryantların analitik bir fonksiyonu ise bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Ancak kuvvet serisinin kaçınıcı mertebeden olacağı ve kaç teriminin alınacağı başka bir ifadeyle Σ ’nın kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği, deformasyon invaryantının büyüklüğüne, olaydaki etkileşim paylarına kısacası non-lineerlik mertebelerine bağlıdır (Zheng ve Spencer, 1993; Zheng, 1993).

Diğer taraftan bu polinomun, iç enerji pozitif tanımlı olduğundan pozitif tanımlı ve invaryantların sırasının Σ ’yı etkilememesi için simetrik katsayılı olması yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Buna göre bir polinom yaklaşımının seçilmesi durumunda, serbest enerji fonksiyonu Σ için mevcut invaryantlar cinsinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j \quad (i, j = 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12), \quad a_{ij} = a_{ji} \\ \Sigma &= a_{11} I^2 + 2 a_{12} I II + 2 a_{16} I I_6 + 2 a_{17} I I_7 + 2 a_{18} I I_8 + 2 a_{19} I I_9 + \\ &2 a_{1,10} I I_{10} + 2 a_{1,11} I I_{11} + 2 a_{1,12} I I_{12} + a_{22} II^2 + 2 a_{26} II I_6 + 2 a_{27} II I_7 + \\ &2 a_{28} II I_8 + 2 a_{2,9} II I_9 + 2 a_{2,10} II I_{10} + 2 a_{2,11} II I_{11} + 2 a_{2,12} II I_{12} + \\ &a_{66} I_6^2 + 2 a_{67} I_6 I_7 + 2 a_{68} I_6 I_8 + 2 a_{6,9} I_6 I_9 + 2 a_{6,10} I_6 I_{10} + \\ &2 a_{6,11} I_6 I_{11} + 2 a_{6,12} I_6 I_{12} + a_{77} I_7^2 + 2 a_{78} I_7 I_8 + 2 a_{7,9} I_7 I_9 + 2 a_{7,10} I_7 I_{10} + 2 a_{7,11} I_7 I_{11} + \\ &2 a_{7,12} I_7 I_{12} + a_{88} I_8^2 + 2 a_{8,9} I_8 I_9 + 2 a_{8,10} I_8 I_{10} + \\ &2 a_{8,11} I_8 I_{11} + 2 a_{8,12} I_8 I_{12} + a_{99} I_9^2 + 2 a_{9,10} I_9 I_{10} + 2 a_{9,11} I_9 I_{11} + \\ &2 a_{9,12} I_9 I_{12} + a_{10,10} I_{10}^2 + 2 a_{10,11} I_{10} I_{11} + 2 a_{10,12} I_{10} I_{12} + a_{11,11} I_{11}^2 + \\ &2 a_{11,12} I_{11} I_{12} + a_{12,12} I_{12}^2\end{aligned}\quad (4.1)$$

(3.63) ifadelerindeki Σ 'nın invaryantlara göre türevleri (4.1) polinom açılımından faydalanarak bulunabilir. (4.1) ifadesinin ihtiva ettiği invaryantlara göre Σ 'nın kısmi türevleri alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I} = 2a_{11} I + 2a_{12} II + 2a_{16} I_6 + 2a_{17} I_7 + 2a_{18} I_8 + 2a_{19} I_9 + 2a_{1,10} I_{10} + \\ 2a_{1,11} I_{11} + 2a_{1,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial II} = 2a_{12} I + 2a_{22} II + 2a_{26} I_6 + 2a_{27} I_7 + 2a_{28} I_8 + 2a_{29} I_9 + 2a_{2,10} I_{10} + \\ 2a_{2,11} I_{11} + 2a_{2,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} = 2a_{16} I + 2a_{26} II + 2a_{66} I_6 + 2a_{67} I_7 + 2a_{68} I_8 + 2a_{69} I_9 + 2a_{6,10} I_{10} + \\ 2a_{6,11} I_{11} + 2a_{6,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} = 2a_{17} I + 2a_{27} II + 2a_{67} I_6 + 2a_{77} I_7 + 2a_{78} I_8 + 2a_{79} I_9 + 2a_{7,10} I_{10} + \\ 2a_{7,11} I_{11} + 2a_{7,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} = 2a_{18} I + 2a_{28} II + 2a_{68} I_6 + 2a_{78} I_7 + 2a_{88} I_8 + 2a_{89} I_9 + 2a_{8,10} I_{10} + \\ 2a_{8,11} I_{11} + 2a_{8,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} = 2a_{19} I + 2a_{29} II + 2a_{69} I_6 + 2a_{79} I_7 + 2a_{89} I_8 + 2a_{99} I_9 + 2a_{9,10} I_{10} + \\ 2a_{9,11} I_{11} + 2a_{9,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} = 2a_{1,10} I + 2a_{2,10} II + 2a_{6,10} I_6 + 2a_{7,10} I_7 + 2a_{8,10} I_8 + 2a_{9,10} I_9 + 2a_{10,10} I_{10} + \\ 2a_{10,11} I_{11} + 2a_{10,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} = 2a_{1,11} I + 2a_{2,11} II + 2a_{6,11} I_6 + 2a_{7,11} I_7 + 2a_{8,11} I_8 + 2a_{9,11} I_9 + 2a_{10,11} I_{10} +$$

$$2a_{11,11} I_{11} + 2a_{12,12} I_{12}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} = 2a_{1,12} I + 2a_{2,12} II + 2a_{6,12} I_6 + 2a_{7,12} I_7 + 2a_{8,12} I_8 + 2a_{9,12} I_9 + 2a_{10,12} I_{10} +$$

$$2a_{11,12} I_{11} + 2a_{12,12} I_{12}$$

(4.2)

Bu aşamada invaryantların kimin fonksiyonu olduğuna dikkat edilmeksizin gerilme potansiyelinin invaryantlara göre türevleri alınmıştır. (4.2) ifadesindeki invaryantların (3.58) ifadesiyle nelere bağlı olduğu belirtilmişti. Green deformasyon tansörüne $\mathbf{C}$ bağlı invaryantlar, daha kullanışlı bir parametre olan genleme tansörü $\mathbf{E}$ cinsinden ifade edilebilir. Bu amaç doğrultusunda, (3.58) ifadesiyle verilen Green deformasyon tansörüne bağlı invaryantlar, aşağıdaki bilinen ifadeler kullanılarak genleme tansörü cinsinden hesaplanabilir.

$$C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$$

$$C_{KK} = 3 + 2E_{KK}$$

$$A_K A_K = 1$$

$$B_K B_K = 1$$

(4.3)

olduğuna göre,

$$I = 3 + 2E_{KK}$$

$$II = \frac{1}{2} (6 + 8E_{KK} + 4E_{KK} E_{LL} - 4E_{KL} E_{LK})$$

$$I_6 = A_K B_K$$

$$I_7 = 1 + 2A_K E_{KL} A_L$$

$$I_8 = 1 + 4A_K E_{KL} A_L + 4A_K E_{KL} E_{LM} A_M$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= 1 + 2 B_K E_{KL} B_L \\
I_{10} &= 1 + 4 B_K E_{KL} B_L + 4 B_K E_{KM} E_{ML} B_L \\
I_{11} &= A_K B_K + 2 A_K E_{KL} B_L \\
I_{12} &= A_K B_K + 4 A_K E_{KL} B_L + 4 A_K E_{KM} E_{ML} B_L
\end{aligned} \tag{4.4}$$

invariantları yazılabilir. (3.63) ifadesiyle verilen gerilme denklemi gerekli indis değişikliği yapılarak aşağıdaki formda elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} &= -p C_{PR}^{-1} + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{QQ} \right) \delta_{PR} - \right. \\
&\frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} A_P A_R + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (A_P A_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q A_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} B_P B_R + \\
&\frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (B_P B_Q C_{QR} + C_{PQ} B_Q B_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} A_P B_R + \\
&\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (A_P B_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q B_R) \right\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) denkleminin sağ tarafında Lagrange çarpanının içeren terimin dışında kalan bütün terimler, (4.2) ifadesiyle verilen kısmi türevler ve (4.4) ifadesiyle verilen invariantlar kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Diğer taraftan, **A** ve **B** fiber vektörleri yerine (- **A** ve - **B**) yazıldığında maddesel ortam buna duyarsız kalacağı için **A** ve **B** vektörlerinin bileşenlerinin dış çarpımlarının sadece çift sayıda olan terimleri işlemlere dahil edilmesi gerektiğini de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned}
&2 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{QQ} \right) \delta_{PR} = \\
&(6a_{11} + 24a_{12} + 2a_{17} + 2a_{18} + 2a_{19} + 2a_{1,10} + 18a_{22} + 6a_{27} + 6a_{28} + 6a_{29} + 6a_{1,10}) \delta_{PR} + \\
&(4a_{11} + 26a_{12} + 30a_{22} + 2a_{17} + 2a_{18} + 2a_{19} + 2a_{1,10}) E_{KK} \delta_{PR} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (8a_{12} + 20a_{22}) E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} - (4a_{12} + 12a_{22}) E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \\
& (4a_{17} + 12a_{27} + 8a_{18} + 24a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + \\
& (8a_{18} + 24a_{28}) A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + (4a_{19} + 12a_{29} + 8a_{1,10} + 24a_{1,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \\
& 8a_{1,10} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + (4a_{17} + 8a_{18}) A_K E_{KL} A_L E_{QQ} \delta_{PR} + \\
& (4a_{19} + 8a_{1,10}) B_K E_{KL} B_L E_{QQ} \delta_{PR} + 24_{2,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_M \delta_{PR}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} &= (6a_{12} + 6a_{22} + 2a_{27} + 2a_{28} + 2a_{29} + 2a_{2,10}) \delta_{PR} + \\
& (12a_{12} + 12a_{22} + 4a_{27} + 4a_{28} + 4a_{29} + 4a_{2,10}) E_{PR} + (8a_{12} + 16a_{22}) E_{KK} \delta_{PR} + \\
& (4a_{12} + 8a_{22}) E_{KK} \delta_{PR} - 4a_{22} E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + (8a_{27} + 16a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + \\
& (4a_{27} + 4a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + 8a_{28} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \\
& (8a_{29} + 16a_{2,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + (4a_{29} + 8a_{2,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} A_P A_R &= (6a_{17} + 6a_{27} + 2a_{77} + 2a_{78} + 2a_{79} + 2a_{7,10}) A_P A_R + \\
& (4a_{17} + 8a_{27}) E_{KK} A_P A_R + 4a_{27} E_{KK} E_{LL} A_P A_R - 4a_{27} E_{KL} E_{LK} A_P A_R + \\
& (4a_{77} + 8a_{78}) A_K E_{KL} A_L A_P A_R + 8a_{78} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + \\
& (4a_{79} + 8a_{78}) B_K E_{KL} B_L A_P A_R + 8a_{7,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P A_R
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (A_P A_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q A_R) &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} [A_P A_R + A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R] \\
&= (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_P A_Q E_{QR} + \\
& (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_Q A_R E_{PQ} + \\
& (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_P A_Q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4a_{18} + 8a_{28}) A_P A_Q E_{KK} E_{QR} + (4a_{18} + 8a_{28}) A_Q A_R E_{KK} E_{PQ} + (4a_{18} + 8a_{28}) E_{KK} A_P A_R + \\
& (4a_{78} + 8a_{88}) A_K A_L E_{KL} A_P A_Q E_{QR} + (4a_{78} + 8a_{88}) A_K A_L E_{KL} E_{PQ} A_Q A_R + \\
& (4a_{78} + 8a_{88}) A_K E_{KL} A_L A_P A_R + (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L A_P A_Q E_{QR} + \\
& (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q A_R + (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L A_P A_R + \\
& 4a_{28} E_{KK} E_{LL} A_P A_R - 4a_{28} E_{KL} E_{LK} A_P A_R + 8a_{78} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + 8a_{8,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_M A_P A_R
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} B_P B_R &= (6a_{19} + 6a_{29} + 2a_{79} + 2a_{89} + 2a_{99} + 2a_{9,10}) B_P B_R + \\
& (4a_{19} + 8a_{29}) E_{KK} B_P B_R + (4a_{79} + 8a_{89}) A_K E_{KL} A_L B_P B_R + \\
& 4a_{29} E_{KK} E_{LL} B_P B_R - 4a_{29} E_{KL} E_{LK} B_P B_R + 8a_{89} A_K E_{KL} E_{LM} A_M B_P B_R + \\
& (4a_{99} + 8a_{9,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_R + 8a_{9,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (B_P B_Q C_{QR} + C_{PQ} B_Q B_R) &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} [B_P B_R + B_P B_Q E_{QR} + E_{PQ} B_Q B_R] \\
&= (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_P B_Q E_{QR} + \\
& (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_Q B_R E_{PQ} + \\
& (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_P B_R + \\
& (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_P B_Q E_{KK} E_{QR} + (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_Q B_R E_{KK} E_{PQ} + (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_Q B_R E_{PQ} E_{KK} + \\
& (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K A_L E_{KL} B_P B_Q E_{QR} + (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K A_L E_{KL} E_{PQ} B_Q B_R + \\
& (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K E_{KL} A_L B_P B_R + (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_Q E_{QR} + \\
& (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L E_{PQ} B_Q B_R + (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_R + \\
& 4a_{2,10} E_{KK} E_{LL} B_P B_R - 4a_{2,10} E_{KL} E_{LK} B_P B_R + 8a_{8,10} A_K E_{KL} E_{LM} A_M B_P B_R + \\
& 8a_{10,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} A_P B_R &= (2a_{6,11} + 2a_{11,11} + 2a_{11,12}) A_K B_K A_P B_R \\
&+ (4a_{11,11} + 8a_{11,12}) A_K E_{KL} B_K A_P B_R + 8a_{11,12} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} (A_P B_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q B_R) &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{12}} [A_P B_R + (A_P B_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q B_R)] \\
&= (2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K A_P B_R + (2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K A_P B_Q E_{QR} + \\
&(2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K E_{PQ} A_Q B_R + (4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L A_P B_R + \\
&(4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L A_P B_Q E_{QR} + (4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q B_R \\
&8a_{12,12} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R
\end{aligned} \tag{4.13}$$

(4.6) ve (4.13) ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazılıp ortak terimler dikkate alınarak düzenlemeler yapılırsa gerilme için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} &= -p C_{PR}^{-1} + \\
&(6a_{11} + 24a_{12} + 2a_{17} + 2a_{18} + 2a_{19} + 2a_{1,10} + 18a_{22} + 6a_{27} + 6a_{28} + 6a_{29} + 6a_{1,10}) \delta_{PR} + \\
&(4a_{11} + 26a_{12} + 30a_{22} + 2a_{17} + 2a_{18} + 2a_{19} + 2a_{1,10}) E_{KK} \delta_{PR} + \\
&(8a_{12} + 20a_{22}) E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} - (4a_{12} + 12a_{22}) E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \\
&(4a_{17} + 12a_{27} + 8a_{18} + 24a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + \\
&(8a_{18} + 24a_{28}) A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + (4a_{19} + 12a_{29} + 8a_{1,10} + 24a_{1,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \\
&8a_{1,10} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + (4a_{17} + 8a_{18}) A_K E_{KL} A_L E_{QQ} \delta_{PR} + \\
&(4a_{19} + 8a_{1,10}) B_K E_{KL} B_L E_{QQ} \delta_{PR} + 24a_{2,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_M \delta_{PR} + \\
&(6a_{12} + 6a_{22} + 2a_{27} + 2a_{28} + 2a_{29} + 2a_{2,10}) \delta_{PR} + \\
&(12a_{12} + 12a_{22} + 4a_{27} + 4a_{28} + 4a_{29} + 4a_{2,10}) E_{PR} + (8a_{12} + 16a_{22}) E_{KK} \delta_{PR} + \\
&(4a_{12} + 8a_{22}) E_{KK} \delta_{PR} - 4a_{22} E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + (8a_{27} + 16a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (4a_{27} + 4a_{28}) A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + 8a_{28} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \\
& (8a_{29} + 16a_{2,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + (4a_{29} + 8a_{2,10}) B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \\
& (6a_{17} + 6a_{27} + 2a_{77} + 2a_{78} + 2a_{79} + 2a_{7,10}) A_P A_R + \\
& (4a_{17} + 8a_{27}) E_{KK} A_P A_R + 4a_{27} E_{KK} E_{LL} A_P A_R - 4a_{27} E_{KL} E_{LK} A_P A_R + \\
& (4a_{77} + 8a_{78}) A_K E_{KL} A_L A_P A_R + 8a_{78} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + \\
& (4a_{79} + 8a_{78}) B_K E_{KL} B_L A_P A_R + 8a_{7,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P A_R + \\
& (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_P A_Q E_{QR} + \\
& (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_Q A_R E_{PQ} + \\
& (6a_{18} + 6a_{28} + 2a_{78} + 2a_{88} + 2a_{89} + 2a_{8,10}) A_P A_Q + \\
& (4a_{18} + 8a_{28}) A_P A_Q E_{KK} E_{QR} + (4a_{18} + 8a_{28}) A_Q A_R E_{KK} E_{PQ} + (4a_{18} + 8a_{28}) E_{KK} A_P A_R + \\
& (4a_{78} + 8a_{88}) A_K A_L E_{KL} A_P A_Q E_{QR} + (4a_{78} + 8a_{88}) A_K A_L E_{KL} E_{PQ} A_Q A_R + \\
& (4a_{78} + 8a_{88}) A_K E_{KL} A_L A_P A_R + (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L A_P A_Q E_{QR} + \\
& (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q A_R + (4a_{89} + 8a_{8,10}) B_K E_{KL} B_L A_P A_R + \\
& 4a_{28} E_{KK} E_{LL} A_P A_R - 4a_{28} E_{KL} E_{LK} A_P A_R + 8a_{78} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + \\
& 8a_{8,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_M A_P A_R + (6a_{19} + 6a_{29} + 2a_{79} + 2a_{89} + 2a_{99} + 2a_{9,10}) B_P B_R + \\
& (4a_{19} + 8a_{29}) E_{KK} B_P B_R + (4a_{79} + 8a_{89}) A_K E_{KL} A_L B_P B_R + \\
& 4a_{29} E_{KK} E_{LL} B_P B_R - 4a_{29} E_{KL} E_{LK} B_P B_R + 8a_{89} A_K E_{KL} E_{LM} A_M B_P B_R + \\
& (4a_{99} + 8a_{9,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_R + 8a_{9,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R + \\
& (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_P B_Q E_{QR} + \\
& (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_Q B_R E_{PQ} + \\
& (6a_{1,10} + 6a_{2,10} + 2a_{7,10} + 2a_{8,10} + 2a_{9,10} + 2a_{10,10}) B_P B_R + \\
& (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_P B_Q E_{KK} E_{QR} + (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_Q B_R E_{KK} E_{PQ} + (4a_{1,10} + 8a_{2,10}) B_Q B_R E_{PQ} E_{KK} + \\
& (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K A_L E_{KL} B_P B_Q E_{QR} + (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K A_L E_{KL} E_{PQ} B_Q B_R + \\
& (4a_{7,10} + 8a_{8,10}) A_K E_{KL} A_L B_P B_R + (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_Q E_{QR} + \\
& (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L E_{PQ} B_Q B_R + (4a_{9,10} + 8a_{10,10}) B_K E_{KL} B_L B_P B_R + \\
& 4a_{2,10} E_{KK} E_{LL} B_P B_R - 4a_{2,10} E_{KL} E_{LK} B_P B_R + 8a_{8,10} A_K E_{KL} E_{LM} A_M B_P B_R +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8a_{10,10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R + (2a_{6,11} + 2a_{11,11} + 2a_{11,12}) A_K B_K A_P B_R + \\
& (4a_{11,11} + 8a_{11,12}) A_K E_{KL} B_K A_P B_R + 8a_{11,12} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R + \\
& (2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K A_P B_R + (2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K A_P B_Q E_{QR} + \\
& (2a_{6,12} + 2a_{11,12} + 2a_{12,12}) A_K B_K E_{PQ} A_Q B_R + (4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L A_P B_R + \\
& (4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L A_P B_Q E_{QR} + (4a_{11,12} + 8a_{12,12}) A_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q B_R \\
& 8a_{12,12} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) denklemindeki a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$) katsayıları X parçacığına ve ortamın θ sıcaklığına bağlıdır. Bu denklemde parantez içlerindeki a_{ij} lerin toplamalarının her birisi için β_k ($k=1, 2, 3, \dots, 42$) şeklinde yeni atamalar yapılmış ve aşağıdaki katsayılarla tanımlanmıştır;

$$\begin{aligned}
\beta_1 &\equiv 2(3a_{11} + 15a_{12} + 3a_{22} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{1,10} + 12a_{22} + 3a_{27} + 3a_{28} + 3a_{29} + \\
& 3a_{2,10} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{2,10}) \\
\beta_2 &\equiv 2(2a_{11} + 19a_{12} + 27a_{22} + a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{1,10}) \\
\beta_3 &\equiv 4(2a_{12} + 5a_{22}) \\
\beta_4 &\equiv -4(a_{12} + 3a_{22}) \\
\beta_5 &\equiv 4(a_{17} + 4a_{27} + 2a_{18} + 7a_{2,8}) \\
\beta_6 &\equiv 8(a_{18} + 3a_{28} + a_{1,10}) \\
\beta_7 &\equiv 8(a_{18} + 3a_{28} + a_{1,10}) \\
\beta_8 &\equiv 4(3a_{17} + 2a_{18}) \\
\beta_9 &\equiv 4(a_{19} + 2a_{1,10}) \\
\beta_{10} &\equiv 24a_{2,10} \\
\beta_{11} &\equiv 4(3a_{12} + 3a_{22} + a_{27} + a_{28} + a_{29} + a_{2,10} +) \\
\beta_{12} &\equiv -4a_{22} \\
\beta_{13} &\equiv 8(a_{27} + 2a_{28}) \\
\beta_{14} &\equiv 8a_{28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{15} &\equiv 8(a_{29} + 2a_{2,10}) \\
\beta_{16} &\equiv 2(3a_{17} + 3a_{27} + a_{77} + a_{78} + a_{79} + a_{7,10} + 3a_{18} + 3a_{28} + a_{88} + a_{89} + a_{8,10}) \\
\beta_{17} &\equiv 4(a_{17} + 2a_{27} + a_{18} + 2a_{28}) \\
\beta_{18} &\equiv 4(a_{27} + a_{28}) \\
\beta_{19} &\equiv 4(a_{77} + 3a_{78} + 2a_{88}) \\
\beta_{20} &\equiv 16a_{78} \\
\beta_{21} &\equiv 4(a_{79} + 2a_{78} + a_{89} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{22} &\equiv 8(a_{7,10} + a_{8,10}) \\
\beta_{23} &\equiv 2(3a_{18} + 3a_{28} + a_{78} + a_{88} + a_{89} + a_{8,10}) \\
\beta_{24} &\equiv 4(a_{18} + 2a_{28}) \\
\beta_{25} &\equiv 4(a_{78} + 2a_{88}) \\
\beta_{26} &\equiv 4(a_{89} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{27} &\equiv 2(3a_{19} + 3a_{29} + a_{79} + a_{89} + a_{8,10}) \\
\beta_{28} &\equiv 4(a_{19} + 2a_{29}) \\
\beta_{29} &\equiv 4(4a_{79} + 8a_{89} + a_{7,10} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{30} &\equiv 4a_{29} \\
\beta_{31} &\equiv 8(a_{89} + a_{8,10}) \\
\beta_{32} &\equiv 4(a_{99} + 2a_{9,10} + a_{7,10} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{33} &\equiv 8(a_{9,10} + a_{10,10}) \\
\beta_{34} &\equiv 2(3a_{1,10} + 3a_{2,10} + a_{7,10} + a_{8,10} + a_{9,10} + a_{10,10}) \\
\beta_{35} &\equiv 4(a_{1,10} + 2a_{2,10}) \\
\beta_{36} &\equiv 4(a_{7,10} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{37} &\equiv 4(a_{9,10} + 2a_{8,10}) \\
\beta_{38} &\equiv 2(a_{6,11} + 2a_{6,12} + a_{11,11} + 2a_{11,12} + a_{12,12}) \\
\beta_{39} &\equiv 4(a_{11,11} + 3a_{12,11} + 2a_{12,12}) \\
\beta_{40} &\equiv 8(a_{12,11} + a_{12,12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{41} &\equiv 2(a_{6,12} + a_{11,12} + a_{12,12}) \\
\beta_{42} &\equiv 4(a_{11,12} + 2a_{12,12})
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

(4.15) ifadesindeki katsayılar, (4.14) denkleminde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -p C_{PR}^{-1} + \beta_1 \delta_{PR} + \beta_2 E_{KK} \delta_{PR} + \beta_3 E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} + \beta_4 E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \beta_5 A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + \\
& \beta_6 A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \beta_7 B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \beta_8 A_K E_{KL} A_L E_{QQ} \delta_{PR} + \beta_9 B_K E_{KL} B_L E_{QQ} \delta_{PR} + \\
& \beta_{10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L \delta_{PR} + \beta_{11} E_{PR} + \beta_{12} E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \beta_{13} A_K E_{KL} A_L E_{PR} + \\
& \beta_{14} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \beta_{15} B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \\
& \beta_{16} A_P A_R + \beta_{17} E_{KK} A_P A_R + \beta_{18} (E_{KK} E_{LL} A_P A_R - E_{KL} E_{LK} A_P A_R) + \beta_{19} A_K E_{KL} A_L A_P A_R + \\
& \beta_{20} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + \beta_{21} B_K E_{KL} B_L A_P A_R + \beta_{22} B_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P A_R + \\
& \beta_{23} (A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) + \beta_{24} (E_{KK} A_P A_Q E_{QR} + E_{KK} E_{PQ} A_Q A_P) + \\
& \beta_{25} (A_K E_{KL} A_L A_P A_Q E_{QR} + A_K E_{KL} A_L E_{PQ} A_Q A_R) + \\
& \beta_{26} (B_K E_{KL} B_L A_P A_Q E_{QR} + B_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q A_R) + \\
& \beta_{27} B_P B_R + \beta_{28} B_P B_R E_{KK} + \beta_{29} A_K E_{KL} A_L B_P B_R + \beta_{30} (E_{KK} E_{LL} B_P B_R - E_{KL} E_{LK} B_P B_R) + \\
& \beta_{31} A_K E_{KL} E_{LK} A_M B_P B_R + \beta_{32} B_K E_{KL} B_L B_P B_R + \beta_{33} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R + \\
& \beta_{34} (B_P B_Q E_{QR} + E_{PQ} B_Q B_R) + \beta_{35} (E_{KK} B_P B_Q E_{QR} + 2E_{KK} E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{36} (A_K E_{KL} A_L B_P B_Q E_{QR} + A_K E_{KL} A_L E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{37} (B_K E_{KL} B_L B_P B_Q E_{QR} + B_K E_{KL} B_L E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{38} A_K B_L A_P A_R + \beta_{39} A_K E_{KL} B_L A_P B_R + \beta_{40} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R + \\
& \beta_{41} (A_K B_K A_P B_Q E_{QR} + A_K B_K E_{PQ} A_Q B_R) + \beta_{42} (A_K E_{KL} B_L A_P B_Q E_{QR} + A_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q B_R)
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Başlangıçta gerilmemiş ve yüksüz durumda, (4.16) denklemindeki $\beta_1 \delta_{PR}$ terimi sıfır olur. Buna göre gerilmenin maddesel koordinatlardaki formu aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -p C_{PR}^{-1} + \beta_2 E_{KK} \delta_{PR} + \beta_3 E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} + \beta_4 E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \beta_5 A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} + \\
& \beta_6 A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \beta_7 B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \beta_8 A_K E_{KL} A_L E_{QQ} \delta_{PR} + \beta_9 B_K E_{KL} B_L E_{QQ} \delta_{PR} + \\
& \beta_{10} B_K E_{KM} E_{ML} B_L \delta_{PR} + \beta_{11} E_{PR} + \beta_{12} E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + \beta_{13} A_K E_{KL} A_L E_{PR} + \\
& \beta_{14} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} + \beta_{15} B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} + \beta_{16} A_P A_R + \beta_{17} E_{KK} A_P A_R + \\
& \beta_{18} (E_{KK} E_{LL} A_P A_R - E_{KL} E_{LK} A_P A_R) + \beta_{19} A_K E_{KL} A_L A_P A_R + \\
& \beta_{20} A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R + \beta_{21} B_K E_{KL} B_L A_P A_R + \beta_{22} B_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P A_R + \\
& \beta_{23} (A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) + \beta_{24} (E_{KK} A_P A_Q E_{QR} + E_{KK} E_{PQ} A_Q A_P) + \\
& \beta_{25} (A_K E_{KL} A_L A_P A_Q E_{QR} + A_K E_{KL} A_L E_{PQ} A_Q A_R) + \\
& \beta_{26} (B_K E_{KL} B_L A_P A_Q E_{QR} + B_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q A_R) + \\
& \beta_{27} B_P B_R + \beta_{28} B_P B_R E_{KK} + \beta_{29} A_K E_{KL} A_L B_P B_R + \beta_{30} (E_{KK} E_{LL} B_P B_R - E_{KL} E_{LK} B_P B_R) + \\
& \beta_{31} A_K E_{KL} E_{LK} A_M B_P B_R + \beta_{32} B_K E_{KL} B_L B_P B_R + \beta_{33} B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R + \\
& \beta_{34} (B_P B_Q E_{QR} + E_{PQ} B_Q B_R) + \beta_{35} (E_{KK} B_P B_Q E_{QR} + 2 E_{KK} E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{36} (A_K E_{KL} A_L B_P B_Q E_{QR} + A_K E_{KL} A_L E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{37} (B_K E_{KL} B_L B_P B_Q E_{QR} + B_K E_{KL} B_L E_{PQ} B_Q B_R) + \\
& \beta_{38} A_K B_L A_P B_R + \beta_{39} A_K E_{KL} B_L A_P B_R + \beta_{40} A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R + \\
& \beta_{41} (A_K B_K A_P B_Q E_{QR} + A_K B_K E_{PQ} A_Q B_R) + \beta_{42} (A_K E_{KL} B_L A_P B_Q E_{QR} + A_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q B_R)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

(4.17) denklemi bu çalışmada ele alınan ortam için söz konusu kabuller altında elde edilen gerilmenin maddesel koordinatlar daki non-lineer bünye denklemidir. Bu denklemden görüldüğü üzere deformasyon tansörü ve fiber yük vektörlerine ait terimler gerilmeyi hem ayrı ayrı hem de birlikte lineer ve non-lineer formda katkıda bulunmaktadır.

4.2. Gerilmenin Uzaysal Formu

Kısım 3.1 de gerilmenin uzaysal formu, maddesel formlarına bağlı olarak aşağıdaki gibi verilmişti

$$t_{pr} = J^{-1} x_{p,P} x_{r,R} T_{PR} \quad (4.18)$$

Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden $III = 1$ alınır. Buna göre $J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{III}} = 1$ olduğundan (4.18) ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$t_{pr} = x_{p,P} x_{r,R} T_{PR} \quad (4.19)$$

(4.17) denklemindeki maddesel koordinatlara bağımlı olan, genleme deformasyon tansörünün ve fiber vektörlerinin uzaysal koordinatlardaki şekilleri ile kronecker delta, Piola ve Finger deformasyon tansörleri bilindiği gibi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} E_{KL} &= x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} \\ A_K &= \lambda_a X_{K,m} a_m \\ B_K &= \lambda_b X_{K,m} a_m \\ \delta_{mn} &= x_{m,K} X_{K,n} \\ C_{PR}^{-1} &= X_{P,k} X_{R,k} \\ c_{pr}^{-1} &= x_{p,K} x_{r,K} \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.17) ifadesi (4.19) denkleminde yerine yazılır ve ortaya çıkan her terim (4.20) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki verilen ifadelere benzer şekilde hesaplanırsa,

$$-p C_{PR}^{-1} x_{p,P} x_{r,R} = -p X_{P,k} X_{R,k} x_{p,P} x_{r,R} = -p \delta_{pk} \delta_{kr} = -p \delta_{pr}$$

$$E_{KK} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{p,P} x_{r,P} = c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{pr}^{-1}$$

$$E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,L} e_{ij} x_{p,P} x_{r,P} = c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ij}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,K} e_{ij} x_{p,P} x_{r,P} = c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$A_K E_{KL} A_L \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{K,n} a_n x_{p,P} x_{r,P} = \lambda_a^2 a_i a_j e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} x_{n,L} x_{h,M} e_{nh} \lambda_a X_{M,t} a_t x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_i a_h c_{j,n}^{-1} e_{ij} e_{nh} c_{pr}^{-1} \end{aligned}$$

$$B_K E_{KL} B_L \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,t} a_t x_{p,P} x_{r,P} = \lambda_a^2 a_i a_j e_{i,j} c_{pr}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KL} A_L E_{QQ} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,t} a_t x_{n,Q} x_{t,Q} e_{nt} x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_i a_j e_{i,j} c_{nt}^{-1} c_{pr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_K E_{KL} B_L E_{QQ} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,t} a_t x_{n,Q} x_{t,Q} e_{nt} x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_b^2 a_i a_j e_{i,j} c_{nt}^{-1} c_{pr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_K E_{KM} E_{ML} B_L \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_b X_{K,s} a_s x_{i,K} x_{j,M} e_{ij} x_{n,M} x_{t,L} e_{nt} \lambda_b X_{L,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_b^2 a_i a_t c_{p,r}^{-1} e_{ij} e_{nt} c_{jn}^{-1} \end{aligned}$$

$$E_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,P} x_{n,R} e_{mn} x_{p,P} x_{r,R} = c_{mp}^{-1} e_{mn} c_{nr}^{-1}$$

$$E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,K} e_{ij} x_{p,P} x_{r,P} = c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KL} A_L E_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,h} a_h x_{t,P} x_{s,R} e_{ts} x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_i a_j e_{i,j} c_{tp}^{-1} e_{ts} c_{sr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KL} E_{LM} A_M \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} x_{t,L} x_{h,M} e_{th} \lambda_a X_{M,s} a_s x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_i a_h c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th} c_{pr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_K E_{KL} B_L E_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,t} a_t x_{h,P} x_{s,R} e_{hs} x_{p,P} x_{r,P} \\
&= \lambda_b^2 a_i a_j c_{hp}^{-1} e_{ij} e_{hs} c_{sr}^{-1}
\end{aligned}$$

$$A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_a X_{P,m} a_m \lambda_a X_{R,n} a_n x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_a^2 a_p a_R$$

$$E_{KK} A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} \lambda_a X_{P,i} a_i \lambda_a X_{R,j} a_j x_{p,P} x_{r,P} = \lambda_a^2 a_p a_r e_{mn} c_{mn}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{KK} E_{LL} A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,M} e_{mn} x_{i,L} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{P,t} a_t \lambda_a X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\
&= \lambda_a^2 a_p a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ij}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{KL} E_{LK} A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,K} e_{ij} \lambda_a X_{P,t} a_t \lambda_a X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\
&= \lambda_a^2 a_p a_r c_{mj}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ni}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_K E_{KL} A_L A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,t} a_t \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_a X_{R,f} a_f x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^4 a_i a_j a_r a_p e_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_K E_{KL} E_{LM} A_M A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} x_{t,L} x_{h,M} e_{th} \lambda_a X_{M,s} a_s \lambda_a X_{P,u} a_u \lambda_a X_{R,v} a_v x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^4 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_K E_{KL} B_L A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,t} a_t \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_a X_{R,u} a_u x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_r a_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,M} e_{ij} x_{n,M} x_{s,L} e_{ns} \lambda_b X_{L,t} a_t \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_a X_{R,u} a_u x_{p,P} x_{r,P} \\
&= \lambda_b^2 \lambda_a^2 a_i a_s a_p a_r c_{jn}^{-1} e_{ij} e_{ns}
\end{aligned}$$

$$A_p A_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_a X_{p,m} a_m \lambda_a X_{Q,n} a_n x_{i,Q} x_{j,R} e_{ij} x_{p,P} x_{r,P} = \lambda_a^2 a_p a_i e_{ij} c_{jr}^{-1}$$

$$E_{PQ} A_Q A_R x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,P} x_{n,Q} e_{mn} \lambda_a X_{Q,i} a_i \lambda_a X_{R,j} a_j x_{p,P} x_{r,P} = \lambda_a^2 a_n a_r e_{mn} c_{mp}^{-1}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} A_p A_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} \lambda_a X_{p,i} a_i \lambda_a X_{Q,j} a_j x_{t,Q} x_{s,R} e_{ts} x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_p a_t e_{mn} e_{ts} c_{mn}^{-1} c_{sr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} E_{LL} A_Q A_p x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,M} e_{mn} x_{i,P} x_{j,Q} e_{ij} \lambda_a X_{Q,t} a_t \lambda_a X_{p,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_a^2 a_i a_h c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_K E_{KL} A_L A_p A_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,n} a_n \lambda_a X_{p,t} a_t \lambda_a X_{Q,h} a_h x_{u,Q} x_{s,R} e_{us} x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^4 a_i a_j a_u a_p c_{sr}^{-1} e_{ij} e_{us} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_K E_{KL} A_L E_{PQ} A_Q A_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,n} a_n x_{t,P} x_{h,Q} e_{th} \lambda_a X_{Q,s} a_s \lambda_a X_{R,u} a_u x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^4 a_i a_j a_h a_r c_{tp}^{-1} e_{ij} e_{th} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_K E_{KL} B_L A_p A_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n \lambda_a X_{p,t} a_t \lambda_a X_{Q,h} a_h x_{s,Q} x_{u,R} e_{su} x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_s a_p c_{ur}^{-1} e_{su} e_{su} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &B_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q A_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n x_{s,P} x_{u,Q} e_{su} \lambda_a X_{Q,h} a_h \lambda_a X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_u a_r c_{sp}^{-1} e_{ij} \end{aligned}$$

$$B_p B_R x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b X_{p,m} a_m \lambda_b X_{R,n} a_n x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b^2 a_p a_r$$

$$B_P B_R E_{KK} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b X_{P,m} a_m \lambda_b X_{R,n} a_n x_{i,K} x_{j,K} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b^2 a_p a_r e_{ij} c_{ij}^{-1}$$

$$\begin{aligned} & A_K E_{KL} A_L B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,n} a_n \lambda_b X_{P,t} a_t \lambda_b X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_r e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} E_{LL} B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{i,L} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{P,t} a_t \lambda_b X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_b^2 a_p a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ij}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KL} E_{LK} B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,K} e_{i,j} \lambda_b X_{P,t} a_t \lambda_b X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,P} \\ &= \lambda_b^2 a_p a_r c_{mj}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ni}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_K E_{KL} E_{LM} A_M B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} x_{t,L} x_{h,M} e_{th} \lambda_a X_{M,n} a_n \lambda_b X_{P,s} a_s \lambda_b X_{R,u} a_u x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_K E_{KL} B_L B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n \lambda_b X_{P,t} a_t \lambda_b X_{R,h} a_h x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b^4 a_i a_j a_r a_p e_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_K E_{KM} E_{ML} B_L B_P B_R x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,M} e_{ij} x_{i,M} x_{h,L} e_{t,h} \lambda_b X_{L,s} a_s \lambda_b X_{P,u} a_u \lambda_b X_{R,v} a_v x_{p,P} x_{r,R} \\ &= \lambda_b^4 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} \end{aligned}$$

$$B_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b X_{P,m} a_m \lambda_b X_{Q,n} a_n x_{i,Q} x_{j,R} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b^2 a_p a_i e_{ij} c_{jr}^{-1}$$

$$E_{PQ} B_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} = x_{i,p} x_{j,Q} e_{ij} \lambda_b X_{Q,h} a_h \lambda_b X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b^2 a_j a_r e_{ij} c_{ij}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
E_{KK} B_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} \lambda_b X_{P,h} a_h \lambda_b X_{Q,t} a_t x_{i,Q} x_{j,R} e_{ij} x_{p,P} x_{r,P} \\
&= \lambda_b^2 a_p a_i c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{jr}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2E_{KK} E_{PQ} B_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} &= 2 x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,P} x_{j,Q} e_{ij} \lambda_b X_{Q,h} a_h \lambda_b X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,P} \\
&= 2 \lambda_b^2 a_j a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ip}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_K E_{KL} A_L B_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,n} a_n \lambda_b X_{P,h} a_h \lambda_b X_{Q,t} a_t x_{l,Q} x_{k,R} e_{lk} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_l e_{ij} e_{lk} c_{kr}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_K E_{KL} A_L E_{PQ} B_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_a X_{L,n} a_n x_{h,P} x_{t,Q} e_{ht} \lambda_b X_{Q,u} a_u \lambda_b X_{R,v} a_v x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_t a_r c_{hp}^{-1} e_{ij} e_{th}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_K E_{KL} B_L B_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n \lambda_b X_{P,h} a_h \lambda_b X_{Q,t} a_t x_{l,Q} x_{k,R} e_{lk} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_b^4 a_i a_j a_l a_p e_{ij} e_{lk} c_{kr}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_b X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n x_{l,P} x_{k,Q} e_{lk} \lambda_b X_{Q,h} a_h \lambda_b X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_b^4 a_i a_j a_k a_r e_{ij} e_{lk} c_{lp}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B_K E_{KL} B_L E_{PQ} B_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&A_K B_K A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} = \lambda_b X_{K,m} a_m \lambda_b X_{K,n} a_n \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_a X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^3 \lambda_b a_K^2 a_p a_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_K E_{KL} B_L A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} &= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_a X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^3 \lambda_b a_i a_j a_p a_r e_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_K E_{KM} E_{ML} B_L A_P B_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,M} e_{ij} x_{l,M} x_{k,L} e_{lk} \lambda_b X_{L,h} a_h \lambda_a X_{P,t} a_t \lambda_b X_{R,v} a_v x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_k a_p a_r c_{jl}^{-1} e_{ij} e_{lk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_K B_K A_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m \lambda_b X_{K,n} a_n \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_b X_{Q,t} a_t x_{i,Q} x_{j,R} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_K^2 a_p a_i c_{jr}^{-1} e_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_K B_K E_{PQ} A_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m \lambda_b X_{K,n} a_n x_{i,P} x_{j,Q} e_{ij} \lambda_a X_{Q,h} a_h \lambda_b X_{R,t} a_t x_{l,Q} x_{k,R} e_{lk} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_K^2 a_j a_r c_{ip}^{-1} e_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_K E_{KL} B_L A_P B_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n \lambda_a X_{P,h} a_h \lambda_b X_{Q,t} a_t x_{l,Q} x_{k,R} e_{lk} x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_l c_{kr}^{-1} e_{ij} e_{lk}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_K E_{KL} B_L E_{PQ} A_Q B_R x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a X_{K,m} a_m x_{i,K} x_{j,L} e_{ij} \lambda_b X_{L,n} a_n x_{l,P} x_{k,Q} e_{kQ} \lambda_a X_{Q,h} a_h \lambda_b X_{R,t} a_t x_{p,P} x_{r,R} \\
&= \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_k a_r c_{lp}^{-1} e_{ij} e_{lk} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Gerilmenin uzaysal formu aşığıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -p \delta_{pr} + \\
& \beta_2 c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{pr}^{-1} + \beta_3 c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ij}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} + \beta_4 c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} + \beta_5 \lambda_a^2 a_i a_j e_{ij} c_{pr}^{-1} + \\
& \beta_6 \lambda_a^2 a_i a_h c_{jn}^{-1} e_{ij} e_{nh} c_{pr}^{-1} + \beta_7 \lambda_a^2 a_i a_j e_{ij} c_{pr}^{-1} + \beta_8 \lambda_a^2 a_i a_j e_{ij} c_{nt}^{-1} c_{pr}^{-1} + \beta_9 \lambda_b^2 a_i a_j e_{ij} c_{nt}^{-1} c_{pr}^{-1} + \\
& \beta_{10} \lambda_b^2 a_i a_t c_{p,r}^{-1} e_{i,j} e_{n,t} c_{j,n}^{-1} + \beta_{11} c_{mp}^{-1} e_{mn} c_{nr}^{-1} + \beta_{12} c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} + \beta_{13} \lambda_a^2 a_i a_j e_{i,j} c_{t,p}^{-1} e_{t,s} c_{s,r}^{-1} + \\
& \beta_{14} \lambda_a^2 a_i a_h c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th} c_{pr}^{-1} + \beta_{15} \lambda_b^2 a_i a_j c_{hp}^{-1} e_{ij} e_{hs} c_{sr}^{-1} + \beta_{16} \lambda_a^2 a_p a_R +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \beta_{17} \lambda_a^2 a_p a_r e_{mn} c_{mn}^{-1} + \beta_{18} (\lambda_a^2 a_p a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ij}^{-1} - \lambda_a^2 a_p a_r c_{mj}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ni}^{-1}) + \\
& \beta_{19} \lambda_a^4 a_i a_j a_r a_p e_{ij} + \beta_{20} \lambda_a^4 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th} + \beta_{21} \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_r a_p + \beta_{22} \lambda_b^2 \lambda_a^2 a_i a_s a_p a_r c_{jn}^{-1} e_{ij} e_{ns} + \\
& \beta_{23} (\lambda_a^2 a_p a_i e_{ij} c_{jr}^{-1} + \lambda_a^2 a_n a_r e_{mn} c_{mp}^{-1}) + \beta_{24} (\lambda_a^2 a_p a_t e_{mn} e_{ts} c_{mn}^{-1} c_{sr}^{-1} + \lambda_a^2 a_i a_h c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} \chi_{p,p} \chi_{r,R}) + \\
& \beta_{25} (\lambda_a^4 a_i a_j a_u a_p c_{sr}^{-1} e_{ij} e_{us} + \lambda_a^4 a_i a_j a_h a_r c_{tp}^{-1} e_{ij} e_{th}) + \\
& \beta_{26} (\lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_s a_p c_{ur}^{-1} e_{su} e_{su} + \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_u a_r c_{sp}^{-1} e_{ij}) + \beta_{27} \lambda_b^2 a_p a_r + \\
& \beta_{28} \lambda_b^2 a_p a_r e_{ij} c_{ij}^{-1} + \beta_{29} \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_r e_{ij} + \beta_{30} (\lambda_b^2 a_p a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ij}^{-1} - \lambda_b^2 a_p a_r c_{mj}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ni}^{-1}) + \\
& \beta_{31} \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} e_{th} + \beta_{32} \lambda_b^4 a_i a_j a_r a_p e_{ij} + \beta_{33} \lambda_b^4 a_i a_h a_p a_r c_{jt}^{-1} e_{ij} + \\
& \beta_{34} (\lambda_b^2 a_p a_i e_{ij} c_{jr}^{-1} + \lambda_b^2 a_j a_r e_{ij} c_{ij}^{-1}) + \beta_{35} (\lambda_b^2 a_p a_i c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{jr}^{-1} + 2 \lambda_b^2 a_j a_r c_{mn}^{-1} e_{mn} e_{ij} c_{ip}^{-1}) + \\
& \beta_{36} (\lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_i e_{ij} e_{lk} c_{kr}^{-1} + \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_t a_r c_{hp}^{-1} e_{ij} e_{th}) + \\
& \beta_{37} (\lambda_b^4 a_i a_j a_l a_p e_{ij} e_{lk} c_{kr}^{-1} + \lambda_b^4 a_i a_j a_k a_r e_{ij} e_{lk} c_{lp}^{-1}) + \\
& \beta_{38} \lambda_a^3 \lambda_b a_K^2 a_p a_r + \beta_{39} \lambda_a^3 \lambda_b a_i a_j a_p a_r e_{ij} + \beta_{40} \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_k a_p a_r c_{jl}^{-1} e_{ij} e_{lk} + \\
& \beta_{41} (\lambda_a^2 \lambda_b^2 a_K^2 a_p a_i c_{jr}^{-1} e_{ij} + \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_K^2 a_j a_r c_{ip}^{-1} e_{ij}) + \\
& \beta_{42} (\lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_p a_i c_{kr}^{-1} e_{ij} e_{lk} + \lambda_a^2 \lambda_b^2 a_i a_j a_k a_r c_{lp}^{-1} e_{ij} e_{lk})
\end{aligned} \tag{4.22}$$

(4.22) ifadesi, uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviye edilmiş sıkışmaz kompozit bir malzemede dış yükleme sonucunda oluşan gerilmenin uzaysal koordinatlardaki non-linear bünye denklemini verir. Bu denklemin oluşmasına, Finger ve Strain deformasyon tansörlerinin birlikte lineer ve non-linear etkileşimleri, bu deformasyon tansörlerinin fiber vektörleriyle birlikte lineer ve non-linear etkileşimleri katkıda bulunmaktadır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada materyal olarak, uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviye edilmiş sıkışmaz kompozit bir malzeme ele alınıp dış yükleme sonucunda kompozit malzemede oluşan gerilmenin non-lineer bünye denklemi elde edilmiştir. Fiberlerin dağılımı nedeniyle yönlü bir ortam olma özelliği kazanarak anizotropik bir yapıya kavuşan malzemede, matris malzemesi normalde izotrop bir ortam olarak düşünülmüştür. Dış yüklemelere karşı kompozit malzeme davranış olarak kendisini gerilme tarzında ifade etmektedir. Bu çalışmada tüm ortamlar için geçerli olan genel denge denklemleri, termodinamiğin ikinci prensibi (Clausius-Duhem eşitsizliği), bünye teorisinin aksiyomları, özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ve malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlara dayanarak bünye fonksiyoneli bulunurken gerilme potansiyelinin argümanlarının somut olarak tayini için invariantlar teorisine ait bulgular rutin bir yöntem olarak kullanılmıştır.

Termodinamiğin 1. ve 2. kanunlarının birleştirilmesinden elde edilen Clausius–Duhem eşitsizliği temel başlangıç noktası olarak dikkate alınmaktadır. Bu eşitsizlikte; entropi yoğunluğunun, iç enerjinin ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç enerji ve entropi değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından, (3.2) ifadesinde verildiği tarzda bir Legendre transformasyonu uygulanarak, zamanla değişen terimler iç enerji ve entropi yerine serbest enerji ve sıcaklık cinsinden yazılmıştır.

Clausius–Duhem eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerjinin zamana göre maddesel türevinin hesaplanıp yerine konulması gerekir. Ancak bu işlem Σ nın hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunu tespit etmeden önce yapılamaz. Kozalite, determinizm, eşbulma, uygunluk, objektivite, maddesel simetri ve yöresellik aksiyomları kullanılarak Σ nın bağlı olduğu argümanlar (3.34) denkleminde verilmiştir. Malzemenin homojen olduğu kabul edilerek (3.34) ifadesiyle verilen Σ nın argümanlarından $\mathbf{X}$ kaldırılır ve bu durumda Σ nın bağlı olduğu argümanlar Green deformasyon tansörü C_{KL} , deformasyondan önceki

fiberlerin vektör alanlarının X noktasındaki değerleri A_K ve B_K ile sıcaklık θ_0 şeklindedir. Σ nın bünye aksiyomlarına uygun haliyle, sonunda kimlere bağlı olduğu açıkça belirlendikten sonra, zamana göre maddesel türevi alınıp entropi eşitsizliğinde yerine yazılmıştır. Termodinamik kısıtlamalar sonucunda, gerilmenin, $\mathbf{C}$ deformasyon tansörü ile $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ fiber vektörlerine bağlı olan Σ dan türetildiği görülmektedir. Sıkışmaz ortamlar, pratikte yaygın kabul olduğundan ortam sıkışmaz kabul edilerek gerilme tansörünün bünye denklemi, maddesel koordinatlarda (3.50) ve uzaysal koordinatlarda (3.49) ifadeleriyle verilmiştir.

Matris malzeme izotrop alındığından gerilme potansiyelinin argümanlarının somut olarak tayini için invariyanlar teorisine ait bulgular kullanılmıştır. Bunun için Cebrik İnvariantlar Teorisine göre, Σ gerilme potansiyeli $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ ve bunların müşterek invariyanları olan ve (3.55) ifadesiyle verilen 12 adet bağımsız invariyanlara bağlıdır. Bu invariyanlardan ilk üçünün yerine (3.56) ifadesi ile verilen asal invariyanlar kullanılmıştır. Ancak ortam sıkışmaz kabul edildiğinden ve fiberlerin kinematiği kısmında (1.100) ve (1.113) ifadeleri dikkate alındığında III , I_4 ve I_5 invariyanlarının 1'e eşit olduğu görülür ve bu invariyanlar Σ nın bağlı olduğu invariyanlar listesinden çıkarılır. (3.59) ifadesinin $\mathbf{C}$ tansörüne göre türevi alınıp (3.60) denkleminde yerine yazılarak, uzayabilir-sürekli iki fiber ailesi ile takviyeli kompozit bir malzemenin non-lineer davranışını temsil eden bünye denklemi maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden (3.63) ifadesiyle elde edilmiştir.

(3.63) ifadesiyle verilen gerilmenin non-lineer bünye denkleminin daha somut bir şeklinin elde edilmesi için Σ' nın bağlı olduğu argümanlarına göre türevlerinin bilinmesi gerektiğinden Σ gerilme potansiyeli ikinci dereceden bir polinomla temsil edilerek invariyanlarına göre türevleri hesaplanmıştır. Kısmi türevlerde yer alan Green deformasyon tansörüne bağlı invariyanlar, genleme tansörü $\mathbf{E}$ cinsinden ifade edilmiştir. Bu çalışmada etkileşimler non-lineer kabul edildiğinden $\mathbf{E}$ tansörünün ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınmıştır. Diğer taraftan, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ fiber vektörleri yerine $(-\mathbf{A}$ ve $-\mathbf{B})$ yazıldığında maddesel ortam buna duyarız kalacağı için $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörlerinin bileşenlerinin dış çarpımlarının sadece çift sayıda olan terimleri işlemlere dahil edilmiştir. Daha sonra, gerilmenin maddesel koordinatlardaki

bileşenleri cinsinden non-lineer bünye denklemleri daha somut bir şekilde (4.17) ifadesi ile ortaya konulmuştur. Bu denklemden hem deformasyon alanının hem de fiber dağılımlarının ayrı ayrı ve birlikte lineer ve non-lineer etkileri gerilmenin oluşumuna katkıda bulunduğu görülmektedir. Gerilmenin bünye denkleminin uzaysal koordinatlardaki formu Finger ve Genleme deformasyon tansörleri cinsinden (4.22) ifadesiyle ile verilmiştir.

Bu çalışmada, uzayabilir-sürekli fiberlerle takviye edilmiş kompozitlerin non-lineer davranışını belirlemek amacıyla birleşik ve sistematik bir usulde bir sentez yapmaya yönelik bir girişim için, denge denklemlerinden bünye teorisinin termodinamiğine sistematik bir yaklaşım sunulmuştur. Gerilme potansiyeli fonksiyonunun argümanlarını belirlemek için, matris malzeme üzerine konulan izotropi kısıtlamasından dolayı, invaryantlar teorisinin bulguları bir yöntem olarak kullanılmıştır. Sonuç olarak gerilmenin non-lineer bünye bağıntısı hem maddesel hem de uzaysal koordinatlarda deformasyon tansörlerinin ve fiber vektörlerinin bileşenleri cinsinden elde edilmiştir.

Biyolojik yapı elemanlarının sürekli ve / veya süreksiz fiberlerle takviye edildiği farz edilmektedir. Genellikle fiberli doğal veya biyolojik kompozitler sıkışmaz kompozitler olarak kabul edilir. Örneğin canlı dokular veya implant için sentetik kompozitler bu grupta kompozitler sınıfındadır ve bu kompozitler non-lineer davranış özelliği gösterir. Deri, atardamar, toplardamar, akciğer ve kalp duvarları gibi biyolojik malzemelere yumuşak doku adı verilmektedir. Bu dokular da elastin ve kolajen adı verilen lifler ile bunların arasını dolduran mucopolyscharides adı verilen bir dolgu malzemesinden oluşmaktadır. Çeşitli durumlarda dokuların zedelenmesi, protez ve suni organların projelendirilmesi ve damarlar içerisinde pulsatif kan akımının incelenmesi gibi bir çok fizyolojik araştırmalarda, yumuşak dokuların dış kuvvetler altındaki mekanik davranışlarının ve bünye denklemlerinin bilinmesi gerekir. Uzayabilir-sürekli fiberlerle takviyeli kompozit malzemelerin non-lineer bünye bağıntılarının elde edilmesi, özellikle doğal kompozitlerin non-lineer davranışının belirlenmesine ve kullanım alanlarının genişlemesine yardımcı olacaktır.

Bu çalışmanın devamında, deneylerden elde edilecek elastik sabitleri kullanarak, geometrisi, sınır şartları, yükleme durumu ve fiber dağılımları belli olan kompozit bir ortam için uygun sayısal çözümleme metoduyla nümerik sonuçlar elde edilebilir. Bu çalışmada uzayabilir-sürekli iki fiber ailesiyle takviyeli sıkışmaz kompozit bir malzeme için non-lineer bünye denklemlerinin genel yapısı türetilmiştir ve bu çalışma teorik bir çalışmadır. Bu çalışmada ortaya konulan formasyon fiber takviyeli kompozit malzemeler için yapılacak deneylere bir alt yapı oluşturabilir.

Kompozitlerin bünye modelleri üzerine gelecekte yapılacak çalışmalar muhtemelen ilginç problemlerin çözümü için geliştirilen bünye teorilerinin uygulamasına odaklanacaktır.

6.KAYNAKLAR

- Adkins, J.E., 1959. Further Symmetry Relations for Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal, 4, 215-222.
- Adkins, J.E., 1960. Symmetry Relations for Orthotropic and Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal, 5 , 263-274.
- Adkins, J.E., 1962. Syzygies Relating the Invariants for Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal, 9, 162-175.
- Adıgüzel, E., 2010. Fiber Takviyeli Kompozit Malzemelerin Üretim Yöntemleri ve Teknolojide Kullanım Alanları. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri, 36 s, Isparta.
- Altınışik, F., 2007. Doğal Kompozit Malzemelerin Otomotiv Sanayinde Kullanımı. Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 62 s, Mersin.
- Aran, A. 1990. Elyaf Takviyeli Karma Malzemeler. İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, s.1-50, MK. 575 Ders Notları, İstanbul.
- Aplak, Z.G., Ekici R., Yıldırım, M., Livkebabcı, D., 2008. Plastik Esaslı Tek Yönlü Fiber Takviyeli Kompozit Malzemelerin Sönüm Değerlerinin Tespiti. TÜBİTAK Projesi.
- Attord, M.M. 2003. Finite Strain – Isotropic Hyperelasticity, International Journal of Solids and Structures 40 , 4353 – 4378.
- Barenblatt, G.I., Joseph, D.D., 1996. Collected Papers of R.S. Rivlin, Volume- I ve II, Springer – Verlag, New York, 2828 p.
- Blangino, E., Valente, S., Barba, M., 2008. Non Linear Behavior of Articular Ligaments: Formulation with the Microplane Theory. Biomedical Engineering, Biomed, 103 – 157.
- Boehler, J.P., 1987. Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, Springer Verlag Wien - New York, 289 p.
- Bonet, J., Burton, J.A., (1998). A Simple Orthotropic, Transversely Isotropic Hyperelastic Constitutive Equation for Large Strain Computations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 162, 151 – 164.

- Bozacı, E., Öktem, T., Seventekin, N., 2007. Ananas Yaprak Lifi. Ege Üniversitesi Tekstil ve Konfeksiyon Araştırma Uygulama Merkezi, 3, 167-169.
- Borg, S.F., 1990. Matrix–Tensor Methods in Continuum Mechanics, World Scientific, London, 336 p.
- Bülbül, F., 2007. Bir Doğal Kompozit Malzeme: Diş. Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi, 3, 61-66.
- Chandrasekharaiah, D.S., Debnath, L., 1994. Continuum Mechanics, Academic Press, Boston, 595 p.
- Christensen, R. M., Wu, E. M., 1977. Optimal Design of Anisotropic (Fiber-Reinforced) Flywheels, J. Composite Materials, 11, 395-404.
- Cho, J., Fenner, J., Werner, B., Daniel, I. M., 2010. A Constitutive Model For Fiber-Reinforced Polymer Composites. Journal Of Composite Materials, 44, 3133 – 3150.
- Criscione, C.J., Humphrey, D.J., Douglas, S.A., Hunter, C.W., (2000). An Invariant Basis for Natural Strain Which Yields Orthogonal Stress Response Terms in Isotropic Hyperelasticity, Journal of The mechanics of Solids, 48, 2445 – 2465.
- Daniel, I.M., Ishai, O., 1994. Engineering Mechanics of Composite Materials, Oxford University Press, 395 p.
- Dawson, T.H., 1976. Theory and Practice of Solid Mechanics, Plenum Press, New York and London, 281 p.
- Demiray, H., 1985. Yumuşak Biyolojik Dokular İçin Bünye Denklemleri, IV. Ulusal Mekanik Kongresi, 60-77.
- Demiray, H., Dost, S., 1987. Arterilerin Sonlu Elastik Deformasyon Analizi, V. Ulusal Mekanik Kongresi , Kirazlıyayla , 400-408.
- Dluzewski, P., 2000. Anisotropic Hyperelasticity Based Upon General Strain Measures, Journal of Elasticity, 6, 119 – 129.
- Diani, J., Brieu, M., Vacherand, M.J., Rezgui, A., (2004). Directional Model for Isotropic and Anisotropic Hyperelastic Rubber – Like Materials, Mechanics of Materials, 36, 313 – 321.

- Egan, J.M., 1987. A Constitutive Model for the Mechanical Behavior of Soft Connective Tissues, J. Biomechanics, 20, 681-692.
- Eringen, A.C., 1962. Nonlinear Theory of Continuous Media, Mc Graw-Hill Book Co, 467 p.
- Eringen, A.C., 1967. Mechanics of continua, John Wiley & Sons. Inc, New York, 502 p.
- Eringen, A.C., 1980. Mechanics of Continua, Robert E. Krieger Pub. Co., Huntington, 590 p, New York.
- Eringen, A.C., 1970. Balance Laws of Micromorphic Mechanics, Int. J. Engng. Sci, 8, 819-828.
- Frost, S.R., 1990. An Approximate theory for Predicting the Moduli of Uni-Directional Laminates with Non-Linear Stress/Strain Behaviour, J. Composite Materials, 24, 269-292.
- Fung, Y.C., 1981. The Lung-A Perspective of Biomechanics Development, J. Biomechanical Engineering, 103, 91-96.
- Gadala, M.S., 1997. Recent Advances in the Numerical Modeling of Constitutive Relations, Finite Elements in Analysis and Design, 24, 171 – 185.
- Şuhubi, S.E., 1994. Sürekli Ortamlar Mekaniği – Giriş, İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, 243s.
- Usal M.R., 1994. Fiber takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışına ait Matematiksel bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi – Fen Bilimleri Enstitüsü, 108s, Kayseri
- Usal M., 2001. Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı için Matematiksel Modelleme, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 232 s, Isparta.
- Holzappel, A.G., 2000. Non-linear Solid Mechanics. John Wiley and Sons Ltd, 455 p, Chichester.
- Hamamcı, B., 2006. Fiber Takviyeli Termoelastik Malzemeler İçin Matematiksel Bir Model. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 90s, Isparta.
- Jansson, S. 1995. Non-linear Constitutive Equations for Strongly Bonded Fiber-reinforced Metal Matrix Composites, Composites, 26(6), 415 - 424.
- Jaunzemis, W., 1967. Continuum Mechanics, The Macmillan Company, New York, 602 p.

- Kabul, A., 2004. Sürekli Ortamlar Mekanigine Giriş, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri, 40 s, Isparta.
- Kabul A., 2004. Fiber Takviyeli Hiperelastik Malzemeler için Matematiksel Bir Model, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 103s, Isparta
- Karahan, A., 2006. Doğal Bambu Lifleri. Ege Üniversitesi Tekstil ve Konfeksiyon Araştırma Uygulama Merkezi, 4, 236-240.
- Lanir, Y., 1980. A Microstructure Model for the Rheology of Mammalian Tendon, J. Biomech. Eng., 102, 332-339.
- Lanir, Y., 1983. Constitutive Equations for Fibrous Connective Tissues, J. Biomechanics, 16, 1-12.
- Lipson, S.F., Katz, J.L., 1984. The Relationship Between Elastic Properties and Microstructure of Bovine Cortical Bone, J. Biomechanics, 17, 231-240.
- Luccioni, B. M., 2006. Constitutive Model for Fiber-Reinforced Composite Laminates. Journal of Applied Mechanics, Volume 73 Issue, 6, 901 – 911.
- Malvern, L.E., 1969. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, 713p, New Jersey.
- Mazumdar, S.K., 2002. Composites Manufacturing, Materials, Product, and Process Engineering, 4-10s New York.
- Nowacki, W., 1975. Dynamic Problems of Thermoelasticity, Noordhoff International Publishing, Netherlands, 436 p.
- Rivlin, R.S., Ericksen, J.L., 1955. Stress – Deformation Relations for Isotropic Materials, Mechanics Division, Naval Research Laboratory, Washington, D.C, 323-424.
- Öntürk N., 1993. İki Fiber Ailesi ile Takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerinin Modellenmesi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 180 s, Ankara.
- Spencer, A.J.M., Rivlin, R.S., 1959. Further Results in the Theory Matrix Polynomials, Arch. Rational Mech. Anal, 4, 214-230.
- Spencer, A.C., 1960. The Invariants of six Symmetric 3x3 Matrices, Arch. Rational Mech. Anal, 7, 309-336.
- Spencer, A.J.M, 1964. Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second Order Tensors : Part II, Arch. Rational Mech. Anal, 18, 51-82.

- Spencer, A.J.M., 1971. Theory of Invariants in Continuum Physics, Volume Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York, 115 p.
- Spencer, A.J.M., 1972. Deformations of Fibre-Reinforced Materials, Clarendon press, Oxford. 110 p.
- Spencer, A.J.M., 1980. Continuum Mechanics, Longman Inc, 182 p.
- Spencer, A.J.M., 1984. Continuum Theory of the Mechanics of Fibre Reinforced Composites, International center for mechanical sciences, Course and lecturers, nr.282, ed. by A.J.M. Spencer, Springer Verlag, Wien-New York.
- Şahin, Y., 2000. Kompozit Malzemelere Giriş, Gazi Üniversitesi, 327s.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., (1970). Theory of Elasticity, McGraw Hill, 567p.
- Usal, M.R., Usal, M., Kabul, A., 2005. A Mathematical Model for Fiber Reinforced Hyperelastic Material and results with Finite Element Method, Journal of Applied Sciences, 5, 9, 1617-1631.
- Usal, M.R., Usal, M., Esendemir, Ü., 2006. A Mathematical Model for Thermomechanical Behavior of Arbitrary Fiber Reinforced Viscoelastic Composites – I, Science and Engineering of Composite Materials, 13, 4, 291-300.
- Usal, M., Usal, M.R., Esendemir, Ü., 2008. A Continuum Formulation for Fiber - Reinforced Viscoelastic Composite Materials with Microstructure Part - I: Anisotropic Matrix Material, Science and Engineering of Composite Materials, 15, 3, 217-234.
- Wineman, A.S., Pipkin, A.C., 1964. Material Symmetry Restrictions on Constitutive Equations, Arch. Rational Mech. Anal, 17, 184-214.
- Woo, S.L-Y., Johnson, G.A., Smith, B.A., 1993. Mathematical Modeling of Ligaments and Tendons, J. Biomechan. Engng., 15, 468-472.
- Zheng, Q.S., 1993-a. On Transversely Isotropic, Orthotropic and Relative Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part I: Two Dimensional Orthotropic and Relative Isotropic Functions and Three Dimensional Relative Isotropic Functions, Int. J. Engng Sci, 31, 1399-1409.
- Zheng, Q.S., 1993-b. On Transversely Isotropic , Orthotropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part II: The Representations for Three Dimensional Transversely Isotropic Functions, Int. J. Engng, Sci, 31, 1411-1423.

- Zheng, Q.S., 1993-c. On Transversely Isotropic, Orthotropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part III: The Irreducibility of the Representations for Three Dimensional Transv. Isotro. Func., Int. J. Engng, Sci, 31, 1425-1433.
- Zheng, Q.S., 1993-d. On Transversely Isotropic, Orthotropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part IV: The Representations for Three Dimensional Orthotropic Functions, Int. J. Engng, Sci, 31, 1435-1443 .
- Zheng, Q.S., 1993-e. On Transversely Isotropic, Orthotropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part V: The Irreducibility of the Representations for Three Dimensional Orthotropic Functions and the Summary, Int. J. Engng, Sci, 31, 1445-1453.
- Zheng, Q. S. , Spencer, A. J. M. , 1993. Tensors Which Characterize Anisotropies, Int. J. Engng, Sci, 31, 679 – 693.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erhan ADIGÜZEL

Doğum Yeri ve Yılı : İZMİT / 1986

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce



Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : 2000 – 2004 Kocaeli Teknik Lisesi

Lisans : 2005 – 2009 Süleyman Demirel Üniversitesi

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

1- 02/2010 – 12/2010 Üretim Sorumlusu (Yamaç Sanayi Tekerlekleri A.Ş.)