

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

AÇILABİLİR VE REGLE YÜZEY
TASARIMINDA
DUALLIK
KAVRAMI

Esra ERKAN

Tez Danışmanı : Yard. Doç. Dr. Bahadır TANTAY

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.02.01
Sunuş Tarihi : 13.06.2011

Bornova-İZMİR
2011

Esra ERKAN tarafından **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak sunulan “**Açılabilir ve Regle Yüzey Tasarımında Dualik Kavramı**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 13/06/2011 yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Yard. Doç. Dr. Bahadır TANTAY

.....

Raportör Üye : Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN

.....

Üye : Yard. Doç. Dr. İlhan KARAKILIÇ

.....

ÖZET**AÇILABİLİR VE REGLE YÜZEY TASARIMINDA
DUALLİK**

ERKAN, Esra

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Bahadır TANTAY

Mayıs 2011, 45 sayfa

Bu çalışmanın amacı, Endüstri ve Tasarımda en çok kullanılan açılabilir ve regle yüzeylerin daha hızlı ve hassas dizaynı için duallik kavramının uygulanmasıdır.

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, çalışma hakkında genel bir bilginin verildiği giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci ve üçüncü bölümde, Ravani ve Ku' nun 1991'deki çalışması esas olarak ele alınmış, doğrular geometrisine dayalı olarak açılabilir ve regle yüzeyler için Bertrand eğriler teorisi genelleştirilmesi sunulmuştur. Ayrıca, düzlem ve noktaların üç boyutlu uzayda birbirlerinin geometrik dualleri olmasından ve açılabilir yüzeylerin bir parametrelili düzlemler ailesi olmasından bahsedilmiştir.

Anahtar sözcükler: Bertrand eğrileri, Bertrand çiftleri, Regle yüzeyler, Açılabilir yüzeyler, Ofsetler, Duallik, Diferansiyel geometri

ABSTRACT

DUALITY IN DESIGNING OF RULED AND DEVELOPABLE SURFACES

ERKAN, Esra

MSc. in Mathematics

Supervisor: Assis. Prof. Dr. Bahadır TANTAY

June 2011, 45 pages

The purpose of this study, we will apply duality concept for faster and more sensitive design of ruled and developable surfaces that used in industry and designing.

This thesis is consisted of three chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second and third chapter Ravani and Ku's study at 1991 is examined, a generalization of the theory of Bertrand curves is presented for ruled and developable surfaces based on line geometry. Moreover, it is touched that planes and points are geometric duals of one another in three dimensional space and that a developable surface can also be considered as a one parameter family of planes .

Keywords: Bertrand curves, Bertrand mates, ruled surfaces, developable surfaces, offsets, duality, differential geometry

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca, bana danışmanlık ederek beni yönlendiren ve maddi-manevi desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Yard. Doç. Dr. Bahadır TANTAY'a ve ihtiyaç duyduğumda fikirlerine başvurduğum değerli hocam sayın Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN'a ve çalışmalarım süresince büyük bir müsamaha ve sabır göstererek maddi manevi desteğini esirgemeyen emektar anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. BERTRAND EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ.....	3
2.1 Bertrand Eğrileri.....	4
2.2 Regle Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi.....	12
3. REGLE YÜZEYLERİN BERTRAND OFSETLERİ.....	24
3.1 Açılabilir Yüzeyin bir parametrelî Düzlemler Ailesi Olarak İfade Edilmesi..	34
3.1.1 Bezier eğrileri.....	34
3.1.2 Bezier eğrileri için matris formu.....	38
3.1.3 B-Spline eğrileri.....	39
3.1.4 B-Spline eğrileri için matris formu.....	41
3.1.5 Kübik parametrelendirme.....	41

İÇİNDEKİLER (devam)

4. SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Bertrand ofseti olan eğrilerin Frenet çatılarının konumu	9
2.2 Regle yüzeyin doğurana.....	13
2.3 Açılabilir yüzeyin küresel göstergesi ve boğaz eğrisinin teğeti	23
3.1 İki doğru arasındaki ofset	24
3.2 Regle yüzey ve yönlü ofseti.....	26
3.3 Regle yüzey ve yönlü olmayan ofseti	26
3.4 Regle yüzey ve paralel olmayan ofseti.....	29
3.5 Açılabilir yüzey ve paralel ofseti	32
3.6 Bezier eğrisinin konveks tekne özelliğini sağlaması	35
3.7 Karma fonksiyonlarının Bezier eğrisini ilk ve son noktaları arasında interpole etmesi.....	35
3.8 Bir kontrol noktasının yer değiştirmesiyle Bezier eğrisinde oluşan değişiklikler	36
3.9 Bezier eğrisinin konveks tekne özelliğini sağlaması	37
3.10 Bezier eğrisi lokal kontrolü sağlayamaz	38

ÇİZELGELER DİZİNİÇizelgeSayfa

3.1 Eğrileri ve yüzeylerin geometrik modellemesinde noktalar ve düzlemler arasındaki duallık	44
--	----

1.GİRİŞ

Bir doğrunun bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen regle yüzeyler, Öklid geometrisinde ilgi çekici bir araştırma konusu olmuştur. Regle yüzeyler ilk olarak, bütün regle yüzeylerin sağladığı lineer denklemi kuran G. Monge tarafından araştırılmıştır. En bilinen regle yüzeyler, düzlem, silindir veya koninin eğrilmiş yüzeyleri, düzgün bir uzay eğrisinin oluşturduğu yüzeyler, hiperbolik paraboloid ve bir parçalı hiperboloid dir.

Regle yüzeyler ve özellikle açılabilir yüzeyler, araba, gemi ürünlerinin imalatı ve diğer birçok alanda örneğin, hareket analizi, katı cisim simülasyonu ve model tabanlı nesne tanıma sistemlerini tasarlamada kullanılmıştır. Regle yüzeylerin tanımlanması, tasarlanması ve üretilmesi, makine mühendisliği ve mühendislik matematiğinde önemli bir konu olmuştur (Zha, 1997)

Regle yüzeyler içerisindeki açılabilir yüzeyler, metal tabaka tasarımı ve işlenmesinde yararlı olduğundan önemli bir alt sınıfı oluştururlar. Her açılabilir yüzey, hareketli bir düzlemin (bir parametrelili hareket altında) zarf yüzeyi olarak elde edilebilir. Açılabilir regle yüzeyler, geniş ölçüde CAD (Bilgisayar Destekli Tasarım) ve CADM (Bilgisayar Destekli Tasarım ve Üretim) alanında kullanılır. Bir ‘‘açılabilir’’ regle yüzey, düzleme açılabilen bir yüzeydir. Böyle bir yüzey, tüm doğuranları boyunca sabit bir teğet düzleme sahiptir. Bilgisayar destekli tasarım ve üretim sistemlerinde açılabilir yüzeylerden yaygın olarak istifade edilir; çünkü açılabilir yüzeyler materyalin bir düz levhasının esneme ve yırtma yapmadan bükülmesiyle oluşturulabilir. Açılabilir yüzeyler, metal levha, kağıt, deri ya da kontrplak gibi materyallerden oluşan ürünlerin modellenmesi için potansiyel olarak uygundur. Açılabilir yüzeylerin uygulamaları gemi gövdelerinin tasarımında, otomotiv ve uçak gövdelerinin parçalarında, borulama işi ve kanal sisteminde, ayakkabı tasarımı ve giyimde ortaya çıkmaktadır (Chu and Sequin, 2002).

Bu tezde amaç, endüstride ve tasarımda en çok kullanılan açılabilir ve regle yüzeylerin daha hızlı ve hassas dizaynı için duallik kavramını uygulamaktır. Bu amaçla, Ravani ve Ku'nun (1991) çalışması esas alınarak, regle yüzeyler ve açılabilir yüzeylerin özel bir ofset eğrisi ve tasarımı incelenmiştir. Regle ve

açılabilir yüzey tasarımı için duallığı incelemek, bu tezin ikinci amacıdır. Bu amaçla, ilgili çalışmalar incelenmiştir.

2. BERTRAND EĞRİLERİ VE REGLE YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Bu bölümde, Bertrand eğrileri teorisinin genelleştirilmesi, doğrular geometrisine dayandırılan açılabilir ve regle yüzeyler için gösterilecektir. Uzayın geometrik yapı blokları olarak, noktalar yerine doğrular kullanılarak Bertrand anlamında ofset olan iki regle yüzey tanımlanacaktır. Bu, genelde her regle yüzeyin Bertrand ofsetlerinin çift sonsuzluğa sahip olabildiğini gösterir; fakat açılabilir bir regle yüzeyin açılabilir bir Bertrand ofsete sahip olması için regresyon kenarının eğrilik ve burulması arasındaki lineer denklem sağlanmalıdır.

Sabit eğrilikli eğrilerde ofset uzaklığını $-\frac{1}{k} = -R$ eğrilik merkezi alırsak ofset bir noktaya dejenere olur. $|-R|$ den daha büyük (- yönde) alırsak, eğri ters döner (paralel eğri olmaz). Ek olarak, bu açılabilir yüzeyin açılabilir ofsetleri paralel ofsetlerdir. Sonuçlar, teorik merak olmasının yanı sıra, ürünlerin geometrik modelleme ve üretiminde uygulamalara sahiptir.

Eğri ve yüzeylerin ofsetlerinin doğuşu, mekanik ürünlerin geometrik modelleme ve model tabanlı üretiminde pek çok uygulamaya sahiptir. Ofset yüzeyler, kabuk tipli nesneler ve kalın yüzeylerin geometrik modellerini oluşturmak ya da geometrik modellemedeki toleransları ifade etmek için kullanılabilir. Yüzeylerin yuvarlak tip kesicilerle nümerik kontrol aracılığıyla frezelenmesinde kesicinin hareket programı, gerçek yüzeyden kesicinin yarıçapı kadar uzaklıkta bulunan bir ofset yüzey üzerinde hareket eden kesicinin merkezi cinsinden meydana getirilir. Aynı durum, koordinat ölçüm makineleri kullanılarak yontulan yüzeylerin incelenmesinde meydana gelir. Bu durumda CMM (Koordinat Ölçüm Makineleri) için hareket programı, yuvar tipli kesicinin küresel ucunun merkezi cinsindendir. Bu merkez nokta, ölçülen orijinal yüzey parçasından hafif bir ofset olan yüzey üzerinde hareket eder.

Ofset profilleri ile ilgili çalışmalar, 19. yüzyıla kadar uzanır. Bu alandaki örnek teşkil edecek çalışma, Bertrand ındır. Bertrand, ortak asal normallere sahip eğri çiftleri üzerinde çalışmıştır. Böyle eğriler, günümüzde Bertrand eğrileri olarak adlandırılır ve birbirlerinin ofsetleri olarak göz önüne alınabilir. Bertrand eğrilerinin teorisi, bir sonraki bölümde ayrıntılı bir şekilde tekrar incelenecektir.

Son zamanlarda, eğrilerin ve ofsetlerin yüzeyleriyle ilgilenen CAGD (Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım) literatüründe bir dizi çalışmalar yapılmıştır. Klass (1983), Tiller ve Hanson (1984), Hoschek (1985) ve Farouki (1985), eğrilerin ve yüzeylerin ofsetlerini oluşturmak için metodlar geliştirmişlerdir. Hem Papaioannou ve Kritsis (1985) hem de Faux ve Pratt (1979), NC (Nümerik Kontrol) makinelerindeki ofset yüzeylerin kullanımını ele almışlardır. Chen ve Ravani (1987), yüzeylerin ofsetlerinde kendi kendilerine kesişim düğümlerinin tespit edilmesi ve ortadan kaldırılması için interaktif prosedürler geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, regle yüzeylerin Bertrand ofsetleri ele alınmakta ve doğrular geometrisi kullanılarak, Bertrand eğrilerinininkine benzer bir teorinin regle yüzeyler için geliştirilebileceği gösterilmektedir. Bu bağlamda, iki regle yüzeyin Bertrand çifti olması koşulu geliştirilmektedir ve bunun, açılabilir regle yüzeyler durumu dışında, iki yüzeyin paralel ofsetler olmasından farklı olduğu açık hale gelecektir.

Bu çalışmanın düzenlenmesi aşağıdaki gibidir:

Öncelikle Bertrand eğrilerinin teorisi gözden geçirilmiş ve yeni terimler dahilinde göz önüne alınmıştır. Bu, makalede geliştirilmiş olan Bertrand regle yüzeylerinin teorisi ile ilişkisini açıklamak için gereklidir. Son olarak, Bertrand regle yüzeylerinin yeni teorisi ve açılabilir yüzeylerin özel ama ilginç bir hali sunulmuştur. Sonuçlar, bilgisayar destekli örnekler kullanılarak açıklanmıştır (Ravani and Ku, 1991).

2.1 Bertrand Eğrileri

Tanım 2.1.1 $I \subset \mathbb{R}$, I , $\mathbb{R}$ nin açık alt aralığı olsun.

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

şeklinde tanımlanan diferansyellenebilir ve regüler α fonksiyonuna E^n de bir eğri denir (Çalışkan, 2007). Düzlemde $x = x(t)$, $y = y(t)$ bir eğrinin parametrik denklemidir. Uzayda ise, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ bir eğrinin parametrik denklemi olup, düzlem eğride t parametresi yok edilirse $y = f(x)$ veya $x = \phi(y)$ veya daha genel olarak $f(x, y) = 0$ gibi x ve y arasında bağıntı gösterir (Akbulut, 1970).

Bir eğri çifti, eğer karşılıklı noktaları arasında birebir eşleme var ve her iki eğri, bu karşılıklı noktalarda ortak normallere sahip iseler Bertrand çifti olarak adlandırılırlar. Bu tür eğriler, Bertrand ofsetleri olarak verilecektir.

İşte bu az önce söylediğimiz, asal normali diğer eğrinin asal normali olan eğriyi bulma problemi, görünüşte, ilk olarak Saint-Venant (Weatherburn'a (1930) bakınız) tarafından kurulmuş; fakat Bertrand (1850) tarafından çözülmüştür. Burada, regle yüzeyler için benzer bir teori geliştirilmeden önce, gerekli detayların kısa bir özeti verilecektir. Bu bölümde sunulan materyal, diferansiyel geometride iyi bilinen şeylerdir. Burada sadece CAGD (Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım) amaçlarına uygun bir formda göz önüne alınacaktır.

Uzayda bir $\vec{r}(u)$ düzgün parametrik eğrisini düşünelim. $\vec{r}(u)$ nun s yay uzunluğu: asal normali

$$\vec{r}_u(u) = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \text{ olmak üzere, } s = \int_b^a |\vec{r}_u(u)| du \quad (1)$$

eşitliği ile verilmektedir. Bu eğrinin Frenet üçyüzlüsü;

$$\vec{T} = \text{teğet vektörü} = \vec{r}_s = \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|} \quad (2)$$

$$\vec{N} = \text{asal normali} = \frac{\vec{T}_s}{|\vec{T}_s|} = \frac{\vec{r}_{ss}}{|\vec{r}_{ss}|} = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}) \times \vec{r}_u}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}| \times |\vec{r}_u|} \quad (3)$$

$$\vec{B} = \text{binormal vektör} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{\vec{r}_s \times \vec{r}_{ss}}{|\vec{r}_{ss}|} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}|} \quad (4)$$

eşitlikleriyle verilen vektörlerden oluşmaktadır.

Eşitlikler, şu şekilde elde edilmektedir: Öncelikle ilk denklem

$$\vec{T} = \vec{r}_s = \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|} \Rightarrow \vec{r}_u = \vec{r}_s \cdot \frac{ds}{du} \quad (5)$$

şeklinde düzenlenir ve iki taraftan u ya göre türev alınırsa,

$$\vec{r}_{uu} = \vec{T}_s \cdot \frac{d^2s}{du^2} + \vec{T}_s \cdot \frac{ds}{du} \cdot \frac{ds}{du}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{T} \cdot \frac{d^2 s}{du^2} + \vec{T}_s \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^2 \\
&= \vec{T} \cdot \frac{d^2 s}{du^2} + \vec{N} \cdot |\vec{T}_s| \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^2
\end{aligned}$$

(3) nolu eşitlik de kullanılarak

$$\vec{r}_{uu} = \vec{T} \cdot \frac{d^2 s}{du^2} + |\vec{r}_{ss}| \cdot \vec{N} \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^2 \quad (6)$$

eşitliği elde edilir. (5) ve (6) nolu eşitlikler vektörel çarpılırsa,

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu} = (\vec{T} \times \vec{T}) \cdot \frac{ds}{du} \cdot \frac{d^2 s}{du^2} + \vec{T} \times \vec{N} \cdot |\vec{r}_{ss}| \cdot \frac{ds}{du} \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^2$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu} = |\vec{r}_{ss}| \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^3 \cdot \vec{B}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu} = |\vec{r}_{ss}| \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^3 \cdot \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}}{|\vec{r}_{ss}| \left(\frac{ds}{du} \right)^3}$$

elde edilir. Bir önceki eşitlikte iki tarafın normunu alalım.

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}| = |\vec{r}_{ss}| \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^3 \cdot |\vec{B}|$$

$|\vec{B}|=1$ olduğu da kullanılarak,

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}| = |\vec{r}_{ss}| \cdot \left(\frac{ds}{du} \right)^3$$

elde edilir. Bu eşitlik ile $\vec{B}$ binormalinin elde edildiği denklem düzenlenirse,

$$\vec{B} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}|}$$

bulunur ve $\vec{T}$ teğet vektörü ile vektörel çarpılarak,

$$\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}|} \times \frac{\vec{r}_u}{|\vec{r}_u|} = \frac{(\vec{r} \times \vec{r}_{uu}) \times \vec{r}_u}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}| |\vec{r}_u|}$$

elde edilir. Bu vektörlere ilişkin Frenet formülleri böylece,

$$\kappa = \text{eğrilik} = |\vec{r}_{ss}| = \frac{|\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu}|}{|\vec{r}_u|^3}$$

ve

$$\tau = \text{burulma} = \frac{\vec{r}_s \cdot (\vec{r}_{ss} \times \vec{r}_{sss})}{(\vec{r}_{ss})^2} = \frac{\vec{r}_u \cdot (\vec{r}_{uu} \times \vec{r}_{uuu})}{(\vec{r}_u \times \vec{r}_{uu})^2}$$

olmak üzere,

$$\vec{T}_s = \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \cdot \vec{N} \quad (7)$$

$$\vec{N}_s = \frac{d\vec{N}}{ds} = -\kappa \cdot \vec{T} + \tau \cdot \vec{B} \quad (8)$$

$$\vec{B}_s = \frac{d\vec{B}}{ds} = \tau \cdot \vec{N} \quad (9)$$

şeklindedir.

Şimdi de bir $\vec{r}$ uzay eğrisini ve bunun $\vec{r}^*$ Bertrand ofsetini alalım. Eğer $\vec{N}$, $\vec{r}$ eğrisinin asal normalini gösterirse, o zaman $\vec{r}^*$, $\vec{N}$ ile aynı olan $\vec{N}^*$ asal normaline sahiptir. $\vec{r}$ üzerindeki bir noktaya karşılık gelen $\vec{r}^*$ üzerindeki bir nokta

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \lambda \cdot \vec{N} \quad (10)$$

eşitliği ile verilmektedir ve burada λ , karşılıklı noktalar arasındaki ofset mesafesidir. Bertrand çifti olan eğrilerin gerekli olan özelliklerinden bazıları aşağıdaki teoremlere dayanılarak tanımlanabilir.

Teorem 2.1.2 Bertand çiftleri olan eğriler, birbirlerinin sabit ofsetleridir.

İspat. $\vec{r}$ ve $\vec{r}^*$, $\vec{r}$ üzerinde s yay uzunluğuna sahip Bertrand çiftlerinin bir kümesi olsun. $\vec{r}^*$ Bertrand ofsetinin teğeti, $\vec{r}_s^*$ ye paraleldir. Bu, $\vec{r}_s^*$ nin $\vec{N}$ ye dik olduğu anlamına gelir. Analitik olarak (10) eşitliği ve Frenet formüllerinden

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \lambda \cdot \vec{N}$$

yazılır. İki taraftan s ye göre türev alınarak,

$$\vec{r}_s^* = \vec{r}_s + \lambda_s \cdot \vec{N} + \lambda \cdot \vec{N}_s$$

ve (8) eşitliği de yerleştirerek

$$\vec{r}_s^* = \vec{T} + \lambda_s \vec{N} + \lambda(-\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}) \quad (11)$$

eşitliği elde edilir. $\vec{r}_s^*$, $\vec{N}$ ye dik olduğundan, $\langle \vec{r}_s^*, \vec{N} \rangle = 0$ ya da $\lambda_s = 0$ dir. Yani,

$$\langle \vec{T} + \lambda_s \cdot \vec{N} + \lambda \cdot (-\kappa \vec{T} + \tau \vec{B}), \vec{N} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{T}, \vec{N} \rangle + \lambda_s \cdot \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle - \lambda \cdot \kappa \cdot \langle \vec{T}, \vec{N} \rangle + \lambda \cdot \tau \cdot \langle \vec{B}, \vec{N} \rangle = 0$$

$$\lambda_s = 0$$

$$\lambda = \text{sabit}$$

tir. Diğer bir deyişle, bir eğrinin ve onun Bertrand ofsetinin karşılıklı noktaları arasındaki mesafe, teoremi ispatlayan sabittir.

Eğri ve Bertrand ofseti arasında karşılıklı bir ilişki olduğuna dikkat edilmelidir. Diğer bir deyişle, bir $\vec{r}^*$ eğrisi, bir $\vec{r}$ eğrisinin Bertrand ofseti ise, o zaman $\vec{r}$ eğrisi, $\vec{r}^*$ eğrisinin de Bertrand ofsetidir.

Teorem 2.1.3 Bir eğri ve bu eğrinin Bertrand ofsetinin karşılıklı noktalarındaki teğetleri arasında sabit bir açı vardır.

İspat. İlk olarak $\frac{d}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle$ ifadesini hesaplamak gereklidir.

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = \langle \vec{T}_s, \vec{T}^* \rangle + \langle \vec{T}, \vec{T}_{s^*}^* \rangle \cdot \frac{ds^*}{ds}$$

Frenet formüllerinden,

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = \kappa \langle \vec{N}, \vec{T}^* \rangle + \kappa^* \langle \vec{T}, \vec{N}^* \rangle \cdot \frac{ds^*}{ds}$$

yazılır ve bir eğrinin asal normali $\vec{N}$ ve Bertrand ofsetinin asal normali $\vec{N}^*$ çakıştığı için yani $\vec{N} = \vec{N}^*$ ve $\vec{N} \perp \vec{T}$ olduğundan $\vec{N}^* \perp \vec{T}$ dir. Benzer mantıkla $\vec{N} \perp \vec{T}^*$ dir. Böylece denklem,

$$\frac{d}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = \kappa \cdot 0 + \kappa^* \cdot 0$$

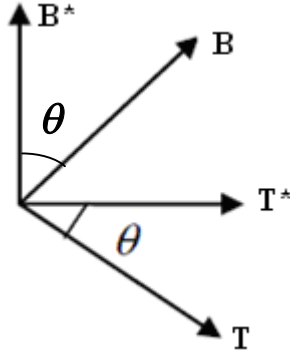
$$\frac{d}{ds} \langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = 0$$

ya da

$$\langle \vec{T}, \vec{T}^* \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$$

halini alır. Burada θ ; $\vec{T}$ ve $\vec{T}^*$ arasındaki açıdır ve ispat tamamlanır.

Bir eğrinin ve Bertrand ofsetinin asal normallerinin çakıştığı gerçeği ışığında, yukarıdaki teoremden bu iki eğrinin binormallerinin, iki eğri üzerindeki karşılıklı noktalarda aynı sabit θ açısı oluşturduğu ortaya çıkar. Bir eğrinin ve Bertrand ofsetinin Frenet üçyüzlüsü arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilir:



Şekil 2.1 Bertrand ofseti olan eğrilerin Frenet çatılarının konumu

$\vec{B}^*, \vec{T}^*, \vec{T}, \vec{B} \perp \vec{N} = \vec{N}^*$ olduğundan $\vec{B}^*, \vec{T}^*, \vec{T}, \vec{B}$ aynı düzlemde dirler. Buradan,

$$\vec{T}^* = \vec{T} \cdot \cos \theta + \vec{B} \cdot \cos\left(\frac{\Pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \vec{T} \cdot \cos \theta + \vec{B} \cdot \sin \theta$$

$$\vec{N}^* = \vec{N}$$

$$\vec{B}^* = \vec{T} \cdot \cos\left(\frac{\Pi}{2} + \theta\right) + \vec{B} \cdot \cos \theta$$

$$= -\vec{T} \cdot \sin \theta + \vec{B} \cdot \cos \theta$$

elde edilir ve

$$\begin{bmatrix} \vec{T}^* \\ \vec{N}^* \\ \vec{B}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad (12)$$

şeklinde yazılır.

Teorem 2.1.4 Bir $\vec{r}$ eğrisi, $\vec{r}^*$ Bertrand ofsetine sahip ise, o zaman $\vec{r}$ eğrisinin eğrilik ve burulması arasında aşağıdaki ilişki yazılabilir:

$$(1 - \lambda \kappa) \sin \theta - \lambda \tau \cos \theta = 0 \quad (13)$$

Burada θ , karşılıklı noktalardaki teğetler arasındaki sabit açıdır.

Bu teoremin daha genel bir hali, a ve b sabitler olmak üzere

$$a \cdot \kappa(t) + b \cdot \tau(t) = 1$$

genel lineer bağıntısı olarak, (13) eşitliğini ifade eder.

İspat s, $\vec{r}$ eğrisi boyunca yay uzunluğu olsun. λ , ofset mesafesinin bir sabit olduğu gerçeği ışığında, (10) eşitliğinden:

$$\vec{r}^* = \vec{r} + \lambda \cdot \vec{N}$$

$$\vec{r}_s^* = \vec{r}_s + \lambda_s \cdot \vec{N} + \lambda \cdot \vec{N}_s$$

$\lambda_s = 0$ ve Frenet denklemlerinden

$$\frac{d\vec{r}^*}{ds} = \vec{T} + \lambda \cdot (-\kappa \vec{T} + \tau \vec{B})$$

$$\frac{d\vec{r}^*}{ds} = (1 - \lambda \kappa) \vec{T} + \lambda \tau \vec{B} \quad (14)$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $\vec{B}^*$ ile skaler çarpılırsa,

$$\left\langle \frac{d\vec{r}^*}{ds}, \vec{B}^* \right\rangle = \left\langle (1 - \lambda \kappa) \cdot \vec{T} + \lambda \cdot \tau \cdot \vec{B}, \vec{B}^* \right\rangle$$

$$\langle \vec{T}^*, \vec{B}^* \rangle = (1 - \lambda \kappa) \cdot \langle \vec{T}, \vec{B}^* \rangle + \lambda \cdot \tau \cdot \langle \vec{B}, \vec{B}^* \rangle$$

elde edilir. Bu denklem, $\langle \vec{T}^*, \vec{B}^* \rangle = 0$ ve (12) eşitliğinden

$\vec{B}^* = -\vec{T} \cdot \sin \theta + \vec{B} \cdot \cos \theta$ olduğu kullanılarak düzenlenirse,

$$0 = (1 - \lambda\kappa) \cdot \langle \vec{T}, -\vec{T} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta \rangle + \lambda \cdot \tau \cdot \langle \vec{B}, -\vec{T} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta \rangle$$

$$0 = (1 - \lambda\kappa)[- \sin \theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \cos \theta \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle] + \lambda \tau [- \sin \theta \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle + \cos \theta \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle]$$

ve $\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = 1$, $\langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = 1$, $\langle \vec{T}, \vec{B} \rangle = 0$ olduğu da kullanılarak,

$$0 = (1 - \lambda\kappa)(- \sin \theta) + \lambda \tau \cos \theta$$

$$(1 - \lambda\kappa) \sin \theta - \lambda \tau \cos \theta = 0$$

eşitliği bulunur ve ispat tamamlanır.

Bir eğrinin ve Bertrand ofsetinin yay uzunluğu arasındaki ilişki, aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

s^* , $\vec{r}$ eğrisinin Bertrand ofseti üzerindeki yay uzunluğu olsun. Öyleyse,

$$\frac{d\vec{r}^*}{ds} = \frac{d\vec{r}^*}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \vec{T}^* \frac{ds^*}{ds}$$

eşitliği yazılır ya da (14) eşitliği kullanılarak,

$$\frac{d\vec{r}^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \lambda\tau\vec{B}$$

$$\vec{T}^* \cdot \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \lambda\tau\vec{B}$$

eşitliği elde edilir.

(12) eşitliğindeki $\vec{T}^*$ ifadesi yerine yerleştirilir ve katsayılar eşitlenirse,

$$(\vec{T} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta) \cdot \frac{ds^*}{ds} = (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \lambda\tau\vec{B}$$

$$\cos \theta \cdot \frac{ds^*}{ds} \cdot \vec{T} + \sin \theta \cdot \frac{ds^*}{ds} \cdot \vec{B} = (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \lambda\tau\vec{B}$$

$$\cos \theta \cdot \frac{ds^*}{ds} = 1 - \lambda\kappa \quad \text{ve} \quad \sin \theta \cdot \frac{ds^*}{ds} = \lambda\tau$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \lambda\kappa}{\cos \theta} = \frac{\lambda\tau}{\sin \theta} \tag{15}$$

eşitliği bulunur.

$\tau = 0$, yani düzlemsel eğri olması durumunda (13) eşitliği, $\theta = 0$ ve λ nın herhangi bir değer alabileceğini ifade eder:

$$(1 - \lambda\kappa)\sin\theta - \lambda\tau\cos\theta = 0$$

$$\tau = 0 \Rightarrow (1 - \lambda\kappa) \cdot \sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

İlk şart, bir düzlem eğrisi ve onun Bertrand ofsetinin karşılıklı noktalarında paralel teğetlere sahip olduğunu gösterir. Bir uzay eğrisinin karşılıklı noktalarında ofsetine paralel teğetlerinin bulunması için, ofsetinin θ sı sıfır olmalıdır. Bu, (13) eşitliği karşısında eğrinin ofseti ile çakışması anlamına gelen $\lambda = 0$ olduğunu ifade eder:

$$(1 - \lambda\kappa)\sin\theta - \lambda\tau\cos\theta = 0$$

$$\theta = 0 \Rightarrow -\lambda \cdot \tau = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Bundan dolayı, bir uzay eğrisinin Bertrand ofseti, karşılıklı noktalarında paralel teğetlere sahip değildir.

Bu, eğrilerin Bertrand ofsetlerinin oluşturulması için gerekli temel türetmeleri tamamlar. Bu tür ofsetler, geçmişte üretim ve tasarım uygulamalarında kullanılmıştır (Ravani and Ku, 1991)

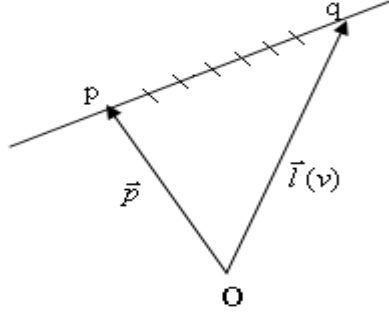
2.2. Regle Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi

Bu bölümde, bir sonraki bölümdeki gelişmelerle ilgili olan regle yüzeylerin diferensiyel geometrisi kısaca gözden geçirilecektir. Weatherburn da (1930) daha fazla ayrıntı bulunabilir.

Tanım 2.2.1 Üç boyutlu Öklid uzayında verilen $\vec{l}$ doğrusunun verilen eğri boyunca hareket ettirilmesi ile bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye üç boyutlu Öklid uzayında bir “regle yüzey” denir. Ya da bir regle yüzey, bir parametrelili doğrular ailesidir diyebiliriz. Bu doğrular, “yüzeyin doğuranları” olarak adlandırılır. $\vec{l}(v)$, p ve q noktalarından geçen bir doğru olsun. $\vec{l}(v)$ nin parametrik denklemi,

$$\vec{l}(v) = \vec{p} + v \cdot (q - p)$$

dir.



Şekil 2.2 $\vec{l}(v)$ doğrusu

$\vec{l}(v)$ tarafından çizilen bir parametrelili yörünge, $\vec{L}(u, v)$ olarak gösterilen aşağıdaki

$$\vec{L}(u, v) = \vec{p}(u) + v \cdot [\vec{q}(u) - \vec{p}(u)] = \vec{p}(u) + v \cdot \vec{e}(u) \quad (16)$$

denklemleri ile tanımlanan regle yüzeydir. Burada $\vec{p}(u)$ ve $\vec{q}(u)$, p ve q uç noktalarının yörüngeleri ve u, hareket parametresidir. p noktası, u değişirken regle yüzeyin “dayanak eğrisi” olarak adlandırılan genel bir uzay eğrisi çizer. Benzer şekilde, $\vec{e}(u) = \vec{q}(u) - \vec{p}(u)$ vektörü, regle yüzeyin küresel göstergesi olarak adlandırılan $|p - q|$ yarıçaplı bir kürenin yüzeyi üzerindeki bir eğriyi çizer. Eğer, doğuran doğru üzerindeki p ve q noktası dışında iki nokta seçilirse, yüzeyin meydana gelen $\vec{e}(u)$ küresel göstergesi, önceki gibi aynı küresel eğri olacak, fakat farklı yarıçaplı bir küre üzerinde olacaktır. Buna karşın, regle yüzeyin dayanak eğrisi tek değildir. Bu yüzden, regle yüzeyde uzanan ve dayanak eğrisi gibi tüm doğuranları kesen herhangi bir $\vec{r}(s)$ uzay eğrisi seçilebilir. Böylece, regle yüzeyin denklemleri,

$$\vec{L}(s, k) = \vec{r}(s) + k \cdot \vec{e}(s) \quad (17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada s, $\vec{r}(s)$ dayanak eğrisi boyunca yay uzunluğudur ve $\vec{e}(s)$ küresel göstergesi, birim yarıçapa sahiptir. Eğer, $\vec{e}(s)$ nin yay uzunluğunu q ile gösterirsek, bu değer

$$q = \int_a^b \left| \frac{d\vec{e}(s)}{ds} \right| \cdot ds \quad (18)$$

şeklinde yazılır.

Denklem (17) ile gösterilen regle yüzey için birim yüzey normali, $\vec{U}$, şöyle elde edilmektedir: Öncelikle, yüzeyin normal vektörünü hesaplamada ihtiyaç duyulan, $\vec{L}_s$ ve $\vec{L}_t$ teğet vektörleri bulunmalıdır.

$$\vec{L}_s = \frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}, \quad \vec{L}_k = \vec{e}(s)$$

Buradan,

$$\vec{U}(s, k) = \frac{\vec{L}_s \times \vec{L}_k}{\|\vec{L}_s \times \vec{L}_k\|} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e}}{\sqrt{\left\langle \left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e}, \left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e} \right\rangle}}$$

eşitliği yazılır.

Lagrange Özdeşliği, $\langle (x \times y), (x^* \times y^*) \rangle = \langle x, x^* \rangle \cdot \langle y, y^* \rangle - \langle y, x^* \rangle \cdot \langle x, y^* \rangle$ de kullanılarak,

$$= \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e}}{\sqrt{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \right] \cdot [\vec{e}(s) \cdot \vec{e}(s)] - \left[\vec{e}(s) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \right] \cdot \left[\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \cdot \vec{e}(s) \right]}}$$

yazılır. $\|\vec{e}(s)\| = 1$ olduğundan $\vec{e}(s)^2 = 1$ dir ve bunun için s ye göre türev alınarak,

$$2 \cdot \vec{e}(s) \cdot \frac{d\vec{e}}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{e}(s) \cdot \frac{d\vec{e}}{ds} = 0$$

elde edilir. Bu iki sonuç, son denklemde yerleştirilirse,

$$\vec{U}(s, t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + t \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e}}{\sqrt{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + t \frac{d\vec{e}}{ds}\right)^2 - \left[\vec{e}(s) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + t \cdot \vec{e}(s) \cdot \frac{d\vec{e}}{ds} \right] \left[\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) + t \frac{d\vec{e}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right] }}$$

$$\vec{U}(s, t) = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + t \frac{d\vec{e}}{ds}\right) \times \vec{e}}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + t \frac{d\vec{e}}{ds}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s)\right)^2 \right]^{1/2}} \quad (19)$$

bulunur.

Regle yüzeyin genel $\vec{L}_\varepsilon = \vec{L}(s_0, k)$ doğurarı boyunca birim normali, k sonsuz azalırken sınırlayıcı bir doğrultuya yaklaşır. Bu doğrultu, “asimptotik normal doğrultu” olarak adlandırılır ve şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\vec{U}(s, k) \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} &= \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds} \right) \times \vec{e}}{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{ds} + k \frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{e} \right) + \frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e} \right]}{\left[\left(k \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{e}}{ds} \right) \right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{e} \right) + \frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e} \right]}{\left[k^2 \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{e} \right) + \frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e} \right]}{\left[k^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 - \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right] \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{e} \right) + \frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e} \right]}{|k| \cdot \left[\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 - \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{e} \right) + \frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e} \right]}{-k \cdot \left[\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} + \frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 - \frac{1}{k^2} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{e}(s) \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} \\
&= \frac{-\frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e}}{\left[\left(\frac{d\vec{e}}{ds} \right)^2 \right]^{1/2}} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} = \frac{-\frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e}}{\left| \frac{d\vec{e}}{ds} \right|} \Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}}
\end{aligned}$$

ve buradan da,

$$\vec{g}(s)\Big|_{s=s_0} = \vec{U}(s, k)\Big|_{\substack{s=s_0 \\ k \rightarrow -\infty}} = \frac{-\frac{d\vec{e}}{ds} \times \vec{e}}{\left|\frac{d\vec{e}}{ds}\right|}\Big|_{s=s_0} \quad (20)$$

elde edilir.

$k, +\infty$ a doğru artarken, birim normal $\vec{L}_\varepsilon$ etrafında 180° döner ve en sonunda $-g$ yönünü alır.

$\vec{U}$ birim yüzey normalinin yalnızca 90° döndüğü ve $\vec{g}$ asimptotik normaline dik olduğu nokta ya da “Açılabilir olmayan bir regle yüzey üzerinde alınan bir nokta, yüzeyin $\vec{t}$ ana doğrusunu çizerken, bu noktadaki teğet düzlem $\vec{t}$ anadoğrusu etrafında döner. Burada, açılabilir yüzey için, herhangi bir anadoğrusu boyunca yüzey normali daima aynı doğrultuyu muhafaza ettiğinden ve teğet düzlem de normale dik olduğundan, bir açılabilir yüzeyin herhangi bir anadoğrusu boyunca teğet düzlemin aynı olduğunu hatırlayalım. Yüzey üzerinde alınan nokta, anadoğru etrafında sonsuz uzaklaştığı vakit normal doğrultusu yukarıdaki ifadeye göre $\vec{g}$ asimptotik normalidir. Bu normal doğrultuya karşılık gelen teğet düzleme, “asimptotik düzlem” denir. Anadoğru üzerinde teğet düzlemin asimptotik düzleme dik olduğu nokta (Biran, 1970) ” L_ε üzerindeki “boğaz noktası” olarak adlandırılır. $\vec{U}$ birim yüzey normalinin bu noktadaki, $\vec{t}$ ile gösterilen, yönü regle yüzeyin merkezi normalidir ve

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{e}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{e}}{ds}\right|} \quad (21)$$

ile verilir.

Öyleyse, regle yüzey üzerindeki Frenet üçyüzlüsü; $\vec{e}$, $\vec{t}$ ve $\vec{g}$ vektörlerinin dexterous triplet i ile tanımlanabilir. Bu vektörler,

$\vec{e}$ = küresel gösterge

$$\vec{t} = \text{merkezi normal} = \vec{e}_q = \frac{\vec{e}_s}{|\vec{e}_s|} \quad (22)$$

$$\vec{g} = \text{asimptotik normal} = \frac{\vec{e} \times \vec{e}_s}{|\vec{e}_s|}$$

denklemleri ile verilir.

Bu son eşitliklerin türevleri alınarak, bir eğrinin Frenet denklemlerine benzeyen denklem kümesine ulaşılır.

$$\begin{aligned} \vec{e}_q &= \frac{d\vec{e}}{dq} = \vec{t} \\ \vec{t}_q &= \frac{d\vec{t}}{dq} = \gamma \vec{g} - \vec{e} \\ \vec{g}_q &= \frac{d\vec{g}}{dq} = -\gamma \vec{t} \end{aligned} \quad (23)$$

Burada, $\gamma = \frac{\vec{e} \cdot (\vec{e}_s \times \vec{e}_{ss})}{|\vec{e}_s|^3}$; $\vec{e}$ nin jeodezik eğriliğidir. Bu eğrilik şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \vec{e}_s &= \vec{e}_q \cdot \frac{dq}{ds} = \vec{t} \cdot \frac{dq}{ds} \\ \vec{e}_{ss} &= \vec{e}_{qq} \cdot \frac{dq}{ds} \cdot \frac{dq}{ds} + \vec{e}_q \cdot \frac{d^2q}{ds^2} = \vec{t}_q \cdot \left(\frac{dq}{ds}\right)^2 + \vec{t} \cdot \frac{d^2q}{ds^2} \end{aligned}$$

türevleri bulunur ve elde edilen iki eşitliğe vektörel çarpım uygulanırsa,

$$\vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} = \left(\vec{t} \cdot \frac{dq}{ds}\right) \times \left(\vec{t}_q \cdot \left(\frac{dq}{ds}\right)^2 + \vec{t} \cdot \frac{d^2q}{ds^2}\right)$$

bulunur. Son eşitlik, türev formülleri kullanılarak düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} &= (\vec{t} \times (\gamma \vec{g} - \vec{e})) \cdot \left(\frac{dq}{ds}\right)^3 + (\vec{t} \times \vec{t}) \cdot \frac{dq}{ds} \cdot \frac{d^2q}{ds^2} \\ \vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} &= (\gamma (\vec{t} \times \vec{g}) - \vec{t} \times \vec{e}) \cdot \left(\frac{dq}{ds}\right)^3 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, $\vec{t} \times \vec{g} = \vec{e}$ ve $\vec{t} \times \vec{e} = -\vec{g}$ olduğu da eşitlikte yerleştirilip tekrar düzenlenirse,

$$\vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} = (\gamma \cdot \vec{e} + \vec{g}) \cdot \left(\frac{dq}{ds} \right)^3$$

bulunur. γ jeodezik eğriliğini bulmak için eşitlik $\vec{e}$ vektörü ile skaler çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}, \vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} \rangle &= \langle \vec{e}, (\gamma \vec{e} + \vec{g}) \cdot \left(\frac{dq}{ds} \right)^3 \rangle \\ &= (\gamma \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle + \langle \vec{e}, \vec{g} \rangle) \cdot \left(\frac{dq}{ds} \right)^3 \\ &= \gamma \cdot \left(\frac{dq}{ds} \right)^3 \end{aligned}$$

elde edilir ve $dq = \int_b^a |\vec{e}_s| \cdot ds$ olduğundan eşitlik düzenlenirse,

$$\gamma = \frac{\langle \vec{e}, \vec{e}_s \times \vec{e}_{ss} \rangle}{|\vec{e}_s|^3}$$

jeodezik eğriliği bulunur.

Ayrıca (23) nolu eşitliklere şu yolla ulaşılır:

İlk eşitlik, (22) nolu eşitlik yardımıyla

$$\vec{e}_q = \frac{d\vec{e}}{dq} = \vec{t}$$

bulunur.

İkinci eşitlik $\vec{t}_q = -\vec{e} + \gamma \cdot \vec{t}$ için $\vec{t}_q = a\vec{e} + b\vec{t} + c\vec{g}$ eşitliğindeki a, b ve c katsayıları bulunmalıdır. Bunun için,

- Eşitliği $\vec{e}$ vektörü ile skaler çarpalım.

$\langle \vec{t}_q, \vec{e} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{e} \rangle + c\langle \vec{g}, \vec{e} \rangle$; $\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1$, $\langle \vec{t}, \vec{e} \rangle = 0$, $\langle \vec{g}, \vec{e} \rangle = 0$ olduğundan eşitlik,

$$\langle \vec{t}_q, \vec{e} \rangle = a$$

halini alır ve $\langle \vec{t}, \vec{e} \rangle = 0$ olduğundan bu eşitliğin q ya göre türevi alınarak,

$$\langle \vec{t}_q, \vec{e} \rangle + \langle \vec{t}, \vec{e}_q \rangle = 0$$

$$a + \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = 0$$

$$a = -1$$

bulunur.

- Eşitliği $\vec{t}$ vektörü ile skaler çarpalım:

$\langle \vec{t}_q, \vec{t} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{t} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle + c\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle$; $\langle \vec{e}, \vec{t} \rangle = 0$, $\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = 1$, $\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle = 0$ olduğundan eşitlik,

$$\langle \vec{t}_q, \vec{t} \rangle = b$$

halini alır ve

$$|\vec{t}| = 1 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow 2 \cdot \vec{t} \cdot \vec{t}_q = 0 \Rightarrow \vec{t} \cdot \vec{t}_q = 0 \text{ ile}$$

$$b = 0$$

bulunur.

- Eşitliği $\vec{g}$ vektörü ile skaler çarpalım:

$$\langle \vec{t}_q, \vec{g} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{g} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{g} \rangle + c\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle$$
; $\langle \vec{e}, \vec{g} \rangle = \langle \vec{t}, \vec{g} \rangle = 0$, $\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle = 1$

oldüğundan eşitlik,

$$\langle \vec{t}_q, \vec{g} \rangle = c$$

halini alır ve $\langle \vec{t}, \vec{g} \rangle = 0$ olduğundan q ya göre türevi alınarak

$$\langle \vec{t}_q, \vec{g} \rangle + \langle \vec{t}, \vec{g}_q \rangle = 0 \Rightarrow c + \langle \vec{t}, \vec{g}_q \rangle = 0$$

$$\Rightarrow c = -|\vec{t}| \cdot |\vec{g}_q| \cdot \cos \theta$$

$$\Rightarrow c = \gamma = \text{skaler}$$

bulunur. Böylece, $\vec{t}_q = -\vec{e} + \gamma \cdot \vec{t}$ elde edilir.

Üçüncü eşitlik, $\vec{g}_q = -\gamma \cdot \vec{t}$ için $\vec{g}_q = a\vec{e} + b\vec{t} + c\vec{g}$ eşitliğindeki a, b ve c katsayıları bulunmalıdır. Bunun için,

- Eşitliği $\vec{e}$ vektörü ile skaler çarpalım:

$$\langle \vec{g}_q, \vec{e} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{e} \rangle + c\langle \vec{g}, \vec{e} \rangle; \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1, \langle \vec{t}, \vec{e} \rangle = \langle \vec{g}, \vec{e} \rangle = 0$$

olduğundan eşitlik,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{e} \rangle = a$$

halini alır ve $\langle \vec{g}, \vec{e} \rangle = 0$ olduğundan q ya göre türevi alınarak,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{e} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{e}_q \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{e} \rangle = -\langle \vec{g}, \vec{e}_q \rangle = \langle \vec{g}, \vec{t} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{e} \rangle = -\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle$$

$$\Rightarrow a = 0$$

bulunur.

- Eşitliği $\vec{t}$ vektörü ile iç çarpalım:

$$\langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{t} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle + c\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle; \langle \vec{e}, \vec{t} \rangle = 0, \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle = 1, \langle \vec{g}, \vec{t} \rangle = 0 \text{ olduğundan}$$

eşitlik,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle = b$$

halini alır ve $\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle = 0$ olduğundan q ya göre türevi alınarak,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{t}_q \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle = -\langle \vec{g}, \vec{t}_q \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle = -\langle \vec{g}, \gamma \vec{g} - \vec{e} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{t} \rangle = -\gamma \langle \vec{g}, \vec{g} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{e} \rangle$$

$$\Rightarrow b = -\gamma$$

bulunur.

- Eşitliği $\vec{g}$ vektörü ile skaler çarpalım:

$\langle \vec{g}_q, \vec{g} \rangle = a\langle \vec{e}, \vec{g} \rangle + b\langle \vec{t}, \vec{g} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{g} \rangle$; $\langle \vec{e}, \vec{g} \rangle = \langle \vec{t}, \vec{g} \rangle = 0$, $\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle = 1$ olduğundan eşitliği,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{g} \rangle = c$$

halini alır ve $\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle = 1$ olduğundan q ya göre türevi alınarak,

$$\langle \vec{g}_q, \vec{g} \rangle + \langle \vec{g}, \vec{g}_q \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{g}_q, \vec{g} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

bulunur. Böylece, $\vec{g}_q = -\gamma \cdot \vec{t}$ elde edilir.

Bu son eşitlikler, bir regle yüzeyin Jeodezik-Frenet denklemleri olarak adlandırılır.

Regle yüzey üzerindeki boğaz noktalarının kümesi, boğaz eğrisini tanımlar. $\vec{c}(s)$ boğaz eğrisi, $\vec{r}(s)$ dayanak eğrisi cinsinden

$$\vec{c}(s) = \vec{r}(s) - \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{e}_s}{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_s} \cdot \vec{e}(s) \quad (24)$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliğin elde edilişi aşağıda verilmektedir.

$\vec{L}_\varepsilon$ ana doğrusu üzerinde boğaz noktasına karşılık gelen k parametresinin değerini arayalım. Boğaz noktasında teğet düzlem asimptotik düzleme dik, asimptotik düzlem ise (20) nolu eşitlik ile verilen asimptotik normal doğrultuya diktir. Bu yüzden, boğaz noktasında normalin paralel olduğu $\vec{L}_s \times \vec{L}_k$ vektörü ile $\vec{e}_s$ ve $\vec{e}$ vektörleri aynı düzleme paraleldir. Yani,

$$(\vec{L}_s \times \vec{L}_t, \vec{e}_s, \vec{e}) = 0$$

yazılır ve buradan

$$\left\langle \frac{(\vec{r}_s + k\vec{e}_s) \times \vec{e}}{[(\vec{r}_s + k\vec{e}_s)^2 - (\vec{r}_s \cdot \vec{e}(s))^2]^{1/2}}, \vec{e}_s \times \vec{e} \right\rangle = 0$$

$$\langle (\vec{r}_s + k\vec{e}_s) \times \vec{e}, \vec{e}_s \times \vec{e} \rangle = 0$$

Lagrange özdeşliğinin kullanılmasıyla,

$$((\vec{r}_s + k\vec{e}_s) \cdot \vec{e}) \cdot (\vec{e} \cdot \vec{e}_s) - (\vec{e} \cdot \vec{e}) \cdot ((\vec{r}_s + k\vec{e}_s) \cdot \vec{e}_s) = 0$$

elde edilen eşitlik, boğaz noktasının k parametresine bağlı değerini verir. Şimdi bu k parametre değerini bulalım.

$|\vec{e}| = 1$ olduğundan $\vec{e}^2 = 1$ dir. Buradan türev alınarak, $\vec{e} \cdot \vec{e}_s = 0$ elde edilir. Bu değerleri son eşitlikte yerleştirecek,

$$-(\vec{r}_s + k\vec{e}_s) \cdot \vec{e}_s = 0 \Rightarrow -\vec{r}_s \cdot \vec{e}_s - k \cdot \vec{e}_s \cdot \vec{e}_s = 0$$

$$\Rightarrow k = -\frac{\vec{r}_s \cdot \vec{e}_s}{\vec{e}_s \cdot \vec{e}_s}$$

bulunur. Elde edilen k parametre değeri, yüzey denkleminde yazılarak (24) nolu eşitlik ile ifade edilen boğaz eğrisi denklemi bulunur.

Boğaz noktası aynı zamanda, iki ardışık doğuran arasındaki ortak normalin ayağıdır. Eğer regle yüzeyin ardışık doğuranları kesişirse, o zaman yüzeye açılabilir denir. Bunun için analitik şart şudur :

$$\vec{r}_s \cdot (\vec{e} \times \vec{e}_s) = 0 \quad (25)$$

Açılabilir bir regle yüzeyde, her ardışık doğuran çifti kesiştiğinde bir düzlem tanımlar. Bu yüzden, açılabilir bir regle yüzey, bir parametrelili düzlemler ailesi olarak düşünülebilir. Yüzeyin doğuranları, her iki ardışık düzlemin kesişimidir. Bir açılabilir regle yüzey için her düzlem ailesi doğuranı boyunca yüzeye dokunduğundan, yüzey normali aynı doğrultuyu koruduğundan ve teğet düzlem de normale dik olduğundan teğet düzlem doğuranın tüm noktalarında aynıdır. Bu nedenle açılabilir bir yüzey, yırtmaksızın veya uzatmaksızın bir düzleme açılabilir. Açılabilir bir yüzey için ardışık doğuranların kesişimlerinin geometrik yeri, her doğuranın temas ettiği ve yüzeyin regresyon ayrıtı olarak ifade edildiği yerdir.

Regresyon ayrıtı ise, düzlemler ailesindeki t parametresine karşılık gelen üç ardışık düzlem, “karakteristik nokta” olarak adlandırılan bir noktada kesişir ve bu karakteristik noktanın geometrik yeri, açılabilir yüzeyin “regresyon ayrıtı” ya da “keskin ayrıtı” olarak bilinen eğridir (Balkı, 2010)

Bu kısımda, $\vec{c}(s)$ boğaz eğrisi bir yüzeyin dayanak eğrisi olarak alınacak ve $\vec{e}(s)$ küresel göstergesi, birim küreye normalleştirilecektir. Yani,

$$|\vec{e}(s)| = 1$$

olacaktır.

$\vec{e}(s)$ doğrultusundaki doğuranın birim vektörüne eş bir birim vektörün O başlangıç noktasına taşınır ve bu vektör birim küre üzerinde bir küresel eğri tanımlar. Bu eğri, yüzeyin küresel göstergesidir (Valiron, 1986).

Bu, genelliği bozmadan herhangi bir regle yüzey üzerinde uygulanabilir.

$$\vec{L}(s, k) = \vec{c}(s) + k \cdot \vec{e}(s) \quad (26)$$

Bu son denklem, $\vec{c}(s)$ boğaz eğrisinin teğetinin, regle yüzeyin $\vec{t} = \frac{\vec{e}_s}{|\vec{e}_s|}$ merkezi

normaline dik olmasını gerektirir. Bu şart analitik olarak,

$$\vec{c}_s \cdot \vec{e}_s = 0 \quad (27)$$

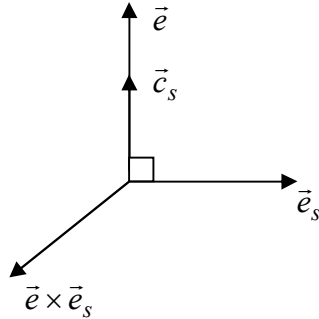
şeklinde ifade edilir.

Regle yüzey açılabilir yüzey ise o zaman

$$\vec{c}_s \cdot (\vec{e} \times \vec{e}_s) = 0 \quad (28)$$

dir, yani yüzeyin normal doğrultusunun, anadoğrusu boyunca aynı kalması şartıdır.

(27) ve (28) nolu eşitliklerden açılabilir yüzeyin küresel göstergesi, $\vec{e}$, boğaz eğrisinin (regresyon kenarının) teğeti olduğu sonucu çıkar. Yani, $\vec{c}_s \perp \vec{e}_s$ ve $\vec{c}_s \perp \vec{e} \times \vec{e}_s$ olduğundan $\vec{c}_s$ vektörü, $\vec{e}$ vektörü yönünde olmalıdır (Şekil 1.2).

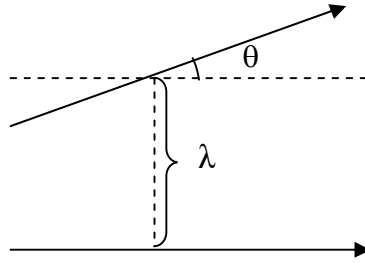


Şekil 2.3 Açılabilir yüzeyin küresel göstergesi ve boğaz eğrisinin teğeti

3. REGLE YÜZEYLERİN BERTRAND OFSETLERİ

Bu bölümde, regle ve açılabilir yüzeyler için Bertrand ofsetleri kavramı oluşturulacaktır. İki parametrelili noktalar ailesi olarak genel bir yüzey gibi bir regle yüzey göz önüne alırsak, bu yüzeyin normal ofseti, orijinal taban yüzeyi ile her noktasında ortak normale sahip bir yüzeydir. Böyle yüzeyler, paralel ofsetler olarak verilecektir. Farouki (1985,1986) tarafından, belirli bir yüzey sınıfı için hem tam hem de yaklaşık paralel ofset üretim metotları geliştirilmiştir. Aynı teknikler, regle ve açılabilir yüzey durumları için kolayca özelleştirilebilir. Ama, burada elde edilen sonuçlar Bertrand eğri çiftlerinin sahip olduğu eğrilik ve burulma gibi özelliklerinin birbiri cinsinden ifade edilmesi durumlarını içermemektedir. Bu yüzden, aynı güzellik ve avantajları taşımaz. Burada, regle yüzeyler, doğrular geometrisi kapsamında bir parametrelili doğrular ailesi olarak göz önüne alınırsa, o zaman böyle yüzeyler için Bertrand çiftleri ile ilgili yukarıda bahsedilen özelliklerin kullanılabileceği gösterilir.

Doğrular geometrisinde, iki doğru arasındaki ofset mesafesi, lineer ve açısal ofset cinsinden tanımlanır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 İki doğru arasındaki ofset

Lineer ofset, λ , iki doğru arasındaki ortak dikmenin uzunluğudur.

Açısal ofset, θ , iki doğrudan birinin ortak dikme boyunca kaydırılıp diğer doğruyla kesiştirilmesi sonucu aralarında oluşan açıdır.

Birbirinin Bertrand ofseti olan iki eğri için ofset mesafesi, taban eğrisinin her bir noktasındaki normali boyunca alınır. Bir regle yüzey için, her doğuran konumunda, doğuran boyunca yüzeyin pek çok normali vardır. Örneğin, regle yüzey parçalarıyla sınırlı kalmazsa, doğuranın sonsuzdaki yüzey normali, yüzeyin $\bar{g}$ asimptotik normaline paraleldir. Aynı doğuran üzerindeki merkez ya da boğaz

noktasında, yüzeyin normali asimptotik doğrultudan 90° döner ve yüzeyin $\vec{t}$ merkez normaline paralel konuma gelir. Aynı doğuran izlenirse, yüzeyin normali 90° daha döner ve doğuranın diğer uç noktası $-g$ ye paralel konuma gelir. Bunu akılda tutarak, regle yüzeyin Bertrand ofseti için aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.1 Her iki yüzeyin karşılıklı doğuranlarının boğaz noktalarında ortak asal normale sahip olacak şekilde doğuranları arasında birebir eşleme var ise, bu iki regle yüzey birbirlerinin Bertrand ofsetleri olarak adlandırılır.

$\vec{L}(s, k)$ taban regle yüzeyi,

$$\vec{L}(s, k) = \vec{c}(s) + k \cdot \vec{e}(s)$$

denklemleri ile ifade edilir. Burada $\vec{c}$, yüzeyin boğaz eğrisi ve s , $\vec{c}$ eğrisi boyunca yay uzunluğudur. Eğer $\vec{t}$, $\vec{e}$ ve $\vec{g}$, $\vec{L}$ yüzeyinin jeodezik Frenet üçyüzlüsü ise, o zaman $\vec{L}$ yüzeyinin $\vec{L}^*$ Bertrand ofsetinin jeodezik Frenet üçyüzlüsü (bir eğri ve Bertrand ofsetinin Frenet üçyüzlüsü arasındaki ilişkiden),

$$\begin{bmatrix} \vec{e}^* \\ \vec{t}^* \\ \vec{g}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e} \\ \vec{t} \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ile verilir.

Yukarıdaki eşitliğin, Bertrand eğrileri için verilen paralelinin eşitliği ile tamamen aynı olduğuna dikkat edelim.

$\vec{L}^*$ ofset yüzeyinin denklemi, $\vec{L}$ taban yüzeyi cinsinden,

$$\vec{L}^*(s, k) = \vec{c}^*(s) + k \cdot \vec{e}^*(s) = [\vec{c}(s) + \lambda \vec{t}(s)] + k[(\cos\theta) \vec{e}(s) + (\sin\theta) \vec{g}(s)] \quad (30)$$

olarak yazılabilir, burada λ , lineer ofset ve θ , iki yüzey arasındaki açısal ofsettir. Eğer $\theta = 0$ olursa, taban yüzeyi ve ofseti üzerindeki karşılıklı doğuranların birbirine paralel olduğuna dikkate edilmelidir. Bu durumda, bu iki yüzey “yönlü ofsetler” olarak adlandırılacaktır. (30) nolu denklem $\theta = 0$ için aşağıdaki şekilde basitleştirilebilir:

$$\vec{L}^*(s, k) = \vec{c}(s) + \lambda \vec{t}(s) + k \vec{e}(s) = \vec{L}(s, k) + \lambda \vec{t}(s) \quad (31)$$

Benzer şekilde, $\theta = 90^\circ$ olursa taban yüzeyi ve Bertrand ofsetinin karşılıklı doğuranları dik açıda olurlar. Bu durumda, bu iki yüzey “dik ofsetler” olarak adlandırılacaktır. (30) nolu denklem $\theta = 90^\circ$ için

$$\vec{L}^*(s, k) = \vec{c}(s) + \lambda \vec{t}(s) + k \vec{g}(s) \quad (32)$$

şeklinde basitleşir.

CAGD (Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım) açısından, yönlü ofsetlerin sıfırdan farklı θ değerine sahip ofsetlerde daha faydalı görüldüğüne dikkat edilmelidir. Renk Levhası 3.2, regle yüzeyin ve onun yönlü ofsetinin bilgisayarla oluşturulmuş bir resmidir.



Renk Plakası 3.2 Regle yüzey ve yönlü ofseti

Renk levhası 3.3, yönlü olmayan (aykırı) ofseti ve daha büyük lineer ofset uzaklığı ile aynı yüzeyi gösterir.



Renk Plakası 3.3 Regle yüzey ve yönlü olmayan ofseti

Teorem 3.2 Tanım 2.1 de tanımlandığı gibi Bertrand çifti olan iki regle yüzey birbirinin sabit ofsetleridir.

Ofset terimi, karşılıklı doğuranlar arasındaki lineer ve açısal ofsetleri kapsamı ile doğru geometrisi bakış açısıyla yukarıda tanımlanmıştır.

İspat Bertrand ofseti tanımından, $\vec{L}^*$ yüzeyinin $\vec{t}^*$ merkezi normali ile $\vec{L}$ yüzeyinin $\vec{t}$ merkezi normali aynıdır, yani

$$\vec{t}^* = \vec{t}$$

vardır ve buradan,

$$\vec{t}^* = \frac{\vec{e}_s^*}{|\vec{e}_s^*|}, \quad \vec{e}_s^* = \mu \cdot \vec{t} \quad (\mu \text{ bir skaler})$$

dır. q , $\vec{e}(s)$ boyunca yay uzunluğu olarak alınırsa, (29) nolu eşitliği ve türevin zincir kuralı kullanılarak,

$$\vec{e}^* = \cos \theta \cdot \vec{e} + 0 \cdot \vec{t} + \sin \theta \cdot \vec{g}$$

$$\vec{e}_s^* = (-\sin \theta) \cdot \theta_s \cdot \vec{e} + \cos \theta \cdot \vec{e}_s + \cos \theta \cdot \theta_s \cdot \vec{g} + \sin \theta \cdot \vec{g}_s$$

elde edilir ve

$$\vec{e}_s = \vec{e}_q \cdot q_s = \vec{t} \cdot \vec{q}_s$$

$$\vec{g}_s = \vec{g}_q \cdot q_s = (-\gamma \cdot \vec{t}) \cdot q_s$$

olduğundan, bu eşitlikler $\vec{e}_s^*$ eşitliğinde yerleştirilirse,

$$\mu \cdot \vec{t} = (-\sin \theta) \cdot \theta_s \cdot \vec{e} + \cos \theta \cdot q_s \cdot \vec{t} + \cos \theta \cdot \theta_s \cdot \vec{g} + \sin \theta \cdot q_s \cdot (-\gamma \cdot \vec{t})$$

bulunur. Burada γ , $\vec{e}$ nin jeodezik eğriliğidir. Eşitlik Frenet vektörlerine göre düzenlenirse,

$$\mu \cdot \vec{t} = (-\sin \theta) \cdot \theta_s \cdot \vec{e} + (\cos \theta \cdot q_s - \sin \theta \cdot q_s \cdot \gamma) \cdot \vec{t} + \cos \theta \cdot \theta_s \cdot \vec{g}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin iki tarafındaki katsayılar eşitlenirse,

$$(-\sin \theta) \cdot \theta_s \cdot \vec{e} + \cos \theta \cdot \theta_s \cdot \vec{g} = 0$$

$$\theta_s ((-\sin \theta) \cdot \vec{e} + \cos \theta \cdot \vec{g}) = 0, \quad (-\sin \theta) \cdot \vec{e} + \cos \theta \cdot \vec{g} = \vec{g}^* \neq 0$$

$$\theta_s = \frac{d\theta}{ds} = 0$$

bulunur.

Bu, θ nın sabit olmasını gerektirir ve Bertrand ofseti olan iki regle yüzeyin karşılıklı doğuranları arasındaki açısız ofsetin sabit olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $\vec{L}^*$ yüzeyinin dayanak eğrisi, kendisinin boğaz çizgisi olduğundan

$$\vec{c}_s^* \cdot \vec{e}_s^* = 0$$

dir ve $\vec{e}_s^* = \mu \cdot \vec{t}$ olduğundan eşitlik düzenlenirse,

$$\mu \cdot \vec{c}_s^* \cdot \vec{t} = 0$$

bulunur. Ayrıca $\vec{c}^* = \vec{c} + \lambda \cdot \vec{t}$ olduğundan

$$\frac{d(\vec{c} + \lambda \vec{t})}{ds} \cdot \vec{t} = 0$$

eşitliği yazılır ve bu son eşitlik,

$$(\vec{c}_s + \lambda_s \cdot \vec{t} + \lambda \cdot \vec{t}_s) \cdot \vec{t} = 0$$

$$(\vec{c}_s + \lambda_s \cdot \vec{t} + \lambda \cdot \vec{t}_q \cdot q_s) \cdot \vec{t} = 0$$

(23) eşitliği yardımıyla,

$$(\vec{c}_s + \lambda_s \cdot \vec{t} + \lambda \cdot q_s \cdot (\gamma \vec{g} - \vec{e})) \cdot \vec{t} = 0$$

halini alır. İşlemlere devam edilirse,

$$c_s \cdot \vec{t} + \lambda_s \cdot \vec{t}^2 + \lambda \cdot q_s \cdot (\gamma \vec{g} - \vec{e}) \cdot \vec{t} = 0$$

$$\vec{c}_s \cdot \frac{\vec{e}_s}{|\vec{e}_s|} + \lambda_s \cdot \vec{t}^2 + \lambda \cdot q_s \cdot \gamma \cdot \vec{g} \cdot \vec{t} - \lambda \cdot q_s \cdot \vec{e} \cdot \vec{t} = 0$$

(27) eşitliği ve $\langle \vec{g}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{e}, \vec{t} \rangle = 0$ ile

$$\lambda_s \cdot \vec{t}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_s = 0 \Rightarrow \lambda = \text{sabit}$$

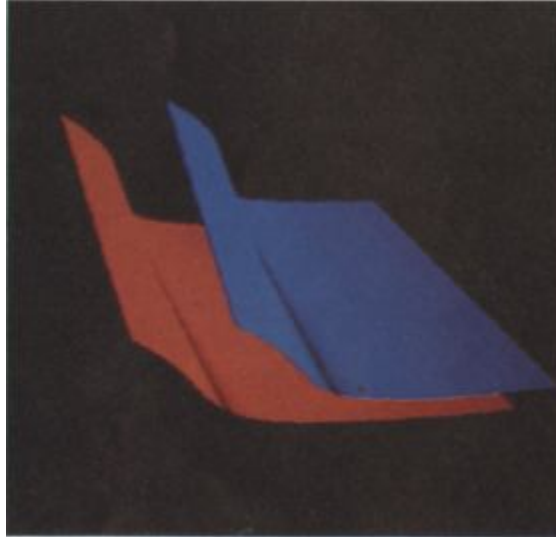
bulunur. Sonuç olarak, $\lambda = \text{sabit}$ ve $\theta = \text{sabit}$ gerçeği, ispatı tamamlar.

O halde, genelde, bir regle yüzey, çift sonsuzlukta Bertrand ofsetlere sahiptir. Her bir Bertrand ofset, sabit lineer ofset, λ ve sabit açısal ofset, θ kullanılarak,

$$\vec{L}^*(s, k) = \vec{c}^*(s) + k\vec{e}^*(s) = [\vec{c}(s) + \lambda\vec{t}(s)] + k[(\cos\theta)\vec{e}(s) + (\sin\theta)\vec{g}(s)] \quad (33)$$

denkleminde üretilebilir. Bu regle yüzey ailesindeki herhangi iki yüzey, Bertrand regle yüzeyleri tanımı anlamında birbirinin tersidir.

Bir regle yüzeyin yönlü Bertrand ofsetlerinin, genelde, paralel ofsetler olmadığına dikkat edelim. Bu, bir regle yüzeyin her bir doğuranı boyunca normallerinin aynı olmadığı gerçeğinden açıktır. İki Bertrand ofsetin, paralel ofsetler olmadığı gerçeği, bir regle yüzey ve onun yönlü ofsetlerinden birini gösteren Renk Levhası 3.4’de örneklenmiştir.



Renk Levhası 3.4 Regle yüzey ve paralel olmayan ofseti

Böylece, “Bir regle yüzeyin yönlü Bertrand ofsetleri hangi koşullar altında paralel ofsetlerdir?” sorusu ortaya çıkar. Yönlü Bertrand ofsetin, paralel ofsetinin olması için, karşılıklı doğuran çiftinin farklı noktalarındaki normalleri tamamen aynı olmalıdır. Bu, taban yüzeyinin ve onun Bertrand ofsetinin her ikisinin de açılabilir olmak zorunda olduğu anlamına gelir. Oysa, bir açılabilir yüzeyin Bertrand ofsetinin, genelde, açılabilir olmak zorunda olmadığına ve bir regüler regle yüzey olabileceğine dikkat çekmelidir.

Açılabilir bir yüzeyde, küresel göstergesi, $\vec{e}(s)$, regresyon kenarına (boğaz eğrisine) teğettir. Yani, yüzeyin doğuranları, yüzeyin boğaz eğrisinin teğetleridir. Böylece, açılabilir bir yüzey,

$$\vec{L}(s, k) = \vec{c}(s) + k\vec{T}(s) \quad (34)$$

olarak tanımlanabilir. Burada $\vec{T}(s)$, $\vec{c}(s)$ eğrisinin teğetidir ve $\vec{c}(s)$, yüzeyin regresyon ayırıtı ya da boğaz eğrisidir. Yüzeyin jeodezik Frenet üçyüzlüsü,

$$\vec{e} = \vec{c}_s = \vec{T} = \vec{c} \text{ nin teğeti}$$

$$\vec{t} = \vec{e}_q = q_s \vec{T}_s = q_s \kappa \vec{N} = \vec{N} \text{ ya da } \vec{c} \text{ nin asal normali} \quad (35)$$

$$\vec{g} = \vec{e} \times \vec{t} = \vec{T} \times \vec{N} = \vec{B} \text{ ya da } \vec{c} \text{ nin binormali}$$

şeklindedir.

Açılabilir bir yüzeyin Bertrand ofseti,

$$\vec{L}^*(s, k) = (\vec{c}(s) + \lambda \vec{T}(s)) + k[(\cos \theta) \vec{e} + (\sin \theta) \vec{g}]$$

ya da $\vec{e} = \vec{T}$, $\vec{t} = \vec{N}$ ve $\vec{g} = \vec{B}$ yazılarak

$$\vec{L}^*(s, k) = (\vec{c}(s) + \lambda \vec{N}(s)) + k[(\cos \theta) \vec{T} + (\sin \theta) \vec{B}] \quad (36)$$

şeklinde ifade edilir.

L^* regle yüzeyinin, genelde, açılabilir olmadığı (36) nolu eşitlikten açıktır. Çünkü L^* regle yüzeyinin açılabilir olması için,

$$\frac{d}{ds}(\vec{c} + \lambda \vec{N}) = \eta[(\cos \theta) \vec{T} + (\sin \theta) \vec{B}] \quad (\eta \text{ bir skalerdir.})$$

$$\therefore (\vec{c}_s + \lambda \vec{N}_s) = \eta[(\cos \theta) \vec{T} + (\sin \theta) \vec{B}]$$

eşitliği sağlanmalıdır. Yani, (36) nolu regle yüzey denklemi için açılabilir olma şartı,

$$\left(\frac{d}{ds}(\vec{c} + \lambda \vec{N}), (\cos \theta) \vec{T} + (\sin \theta) \vec{B}, [(\cos \theta) \vec{T} + (\sin \theta) \vec{B}] \right) = 0$$

şeklinde. Yorumlayacak olursak, karma çarpımın sıfır olması için bu üç vektörden ikisi birbirine paralel olmalıdır. İkinci ve üçüncü vektörler birbirine paralel olamayacağı için bu iki vektör, birinci ve ikinci vektördür.

(8) ve (35) nolu eşitlikler yani, $\vec{c}_s = \vec{T}$ ve $\vec{N}_s = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}$ kullanılarak,

$$(\vec{c}_s + \lambda\vec{N}_s) = \eta[(\cos\theta)\vec{T} + (\sin\theta)\vec{B}]$$

eşitliği düzenlenirse,

$$\vec{T} + \lambda(-\kappa\vec{T} + \tau\vec{B}) = \eta[(\cos\theta)\vec{T} + (\sin\theta)\vec{B}]$$

$$(1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \tau\lambda\vec{B} = \eta[(\cos\theta)\vec{T} + (\sin\theta)\vec{B}]$$

elde edilir. Bu son eşitliğin iki tarafını $\vec{B}^*$ ile skaler çarpalım.

$$\langle (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \tau\lambda\vec{B}, \vec{B}^* \rangle = \langle \eta[(\cos\theta)\vec{T} + (\sin\theta)\vec{B}], \vec{B}^* \rangle$$

(12) nolu eşitlikten $\vec{B}^* = -\vec{T} \sin\theta + \vec{B} \cos\theta$ değerini yukarıdaki eşitlikte yerleştirelim:

$$\begin{aligned} \langle (1 - \lambda\kappa)\vec{T} + \tau\lambda\vec{B}, -\vec{T} \sin\theta + \vec{B} \cos\theta \rangle &= \langle \eta[(\cos\theta)\vec{T} + (\sin\theta)\vec{B}], -\vec{T} \sin\theta + \vec{B} \cos\theta \rangle \\ &= -(1 - \lambda\kappa) \sin\theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + (1 - \lambda\kappa) \cos\theta \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle - \lambda\tau \sin\theta \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle - \lambda\tau \cos\theta \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle \\ &= \eta[\cos\theta \sin\theta \langle \vec{T}, \vec{T} \rangle + \cos^2\theta \langle \vec{T}, \vec{B} \rangle - \sin^2\theta \langle \vec{B}, \vec{T} \rangle + \cos\theta \sin\theta \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle] \end{aligned}$$

Gerekli sadeleştirmelerin yapılmasıyla eşitlik,

$$(1 - \lambda\kappa) \sin\theta - \lambda\tau \cos\theta = \eta[-\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \cdot 0 + \sin^2\theta \cdot 0 + \sin\theta \cos\theta]$$

$$(1 - \lambda\kappa) \sin\theta - \lambda\tau \cos\theta = 0 \quad (37)$$

halini alır. Son denklem, açılabilir bir Bertrand ofsete sahip olan açılabilir yüzey için, regresyon kenarının eğrilik ve burulması arasında lineer bir denklemin var olması gerektiğini ifade eder. Bu denklem, Bertrand eğrileri için ifade edilen (10) nolu denklem ile tamamen benzerdir. Sonuçlar, aşağıdaki teorem ve sonucu ile özetlenebilir.

Teorem 3.3 Eğer bir $\vec{L}$ açılabilir yüzeyi, bir $\vec{L}^*$ açılabilir Bertrand ofsetine sahipse, öyleyse regresyon kenarının eğrilik ve burulması arasında hem gerek hem yeter koşul olan şu bağıntı yazılabilir:

$$(1-\lambda\kappa)\sin\theta - \lambda\tau\cos\theta = 0$$

Sonuç Teorem 3.4 Açılabilir bir yüzeyin açılabilir ofseti, yönlü ofset ise o zaman bu paralel ofsettir.

Renk Levhası 3.5, bir açılabilir yüzeyi ve onun aynı zamanda paralel olan yönlü Bertrand ofsetini göstermektedir.



Renk Levhası 3.5 Açılabilir yüzey ve paralel ofseti

Teorem 3.3, Bertrand eğrileri ile ilgili bölümdeki Teorem 2.1.4 e geometrik duallığın uygulanmasıyla açık hale gelir. Bu, açılabilir yüzeylerin aynı zamanda bir-parametrel düzlemler ailesi olarak düşünülebilmesindendir.

Düzlemler ve noktalar, üç boyutlu uzayda birbirinin geometrik dualleridir:

Bir (p, q, r, s) koordinat takımı, E ile gösterilen üç boyutlu Öklid uzayındaki bir nokta ya da bir düzlem olarak yorumlanabilir. Bu koordinatlarda verilen bir P noktası,

$$P = (x, y, z) = \left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s} \right) \quad (38)$$

şeklinde ifade edilir ve U düzlemi,

$$U : px + qy + rz = s \quad (39)$$

eşitliği ile verilmektedir. (38) eşitliğinden x, y ve z nin karşılıkları alınıp (39) eşitliğinde yerine konulduğunda

$$p^2 + q^2 + r^2 = s^2 \quad (40)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sağlandığında, P noktasının dualinin U düzlemi olduğu ifade edilir. (Balkı, 2010)

İki nokta iki düzlem durumu için;

$P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ve $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ biçimindeki iki homojen koordinatlar takımı, iki nokta ya da iki düzlem olarak yorumlanabilir. İki nokta bir doğuyu temsil eder; iki düzlem de bir noktada kesişir. Düzlem yorumlaması kullanılarak,

$$P : p_1x + p_2y + p_3z = p_4$$

$$Q : q_1x + q_2y + q_3z = q_4$$

eşitliğiyle ifade edilen iki düzlemin kesişiminin bir L doğrusu olduğu görülür.

$p = (p_1, p_2, p_3)$ ve $q = (q_1, q_2, q_3)$ olmak üzere bu doğrunun Plücker koordinatları,

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p} \times \vec{q} \\ q_4 \vec{p} - p_4 \vec{q} \end{array} \right\}$$

biçimindedir. Benzer çalışmalar, üç nokta – üç düzlem durumu için incelenmiştir. (Balkı, 2010)

3.1 Açılabilir Yüzeyin 1-parametrelili Düzlemler Ailesi Olarak İfade Edilmesi

3.1.1 Bezier eğrileri

Bezier eğrileri, eğriye yaklaşım sağlayan ve sıralı noktalar kümesi olan $(V_0...V_n)$ kontrol noktalarını kullanır. Bu noktalar, grafik ekranında temsil edilebilir ve kullanıcıya eğrinin şeklini kontrol imkanı verir. Bezier eğrileri serbest şekilli eğrilerin temsilde kullanılan polinom fonksiyonlarını baz almıştır. n.dereceden Bezier eğrisi, n+1 kontrol noktasına sahip bir parametrik fonksiyondur ve

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n V_i B_{i,n}(t) \quad (41)$$

denklemleriyle verilir. Burada, V_i ler kontrol noktalarıdır. $B_{i,n}(t)$ fonksiyonu Bezier temsili için, karma fonksiyondur ve Bernstein polinomları ise aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (42)$$

n polinomun derecesidir ve

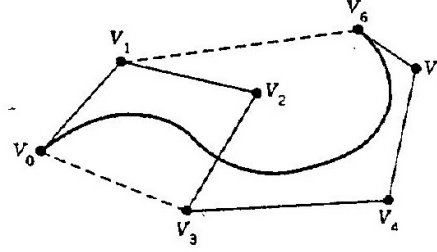
$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, \dots, n \quad (43)$$

binom katsayılarıdır. Bu karma fonksiyonlar,

$$B_{i,n}(t) \geq 0, \quad \text{tüm } i \text{ ler için } 0 \leq t \leq 1$$

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (44)$$

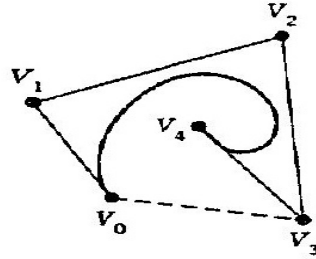
şartlarını sağlarlar. (44) denklemlerinin ikincisi, normalleştirme özelliğidir. Bu şartlar eğrinin tümüyle kontrol noktaları tarafından oluşturulan konveks tekne içinde kalmasını zorlar (Şekil 3.6)



Şekil 3.6 Bezier eğrisinin konveks tekne özelliğini sağlaması

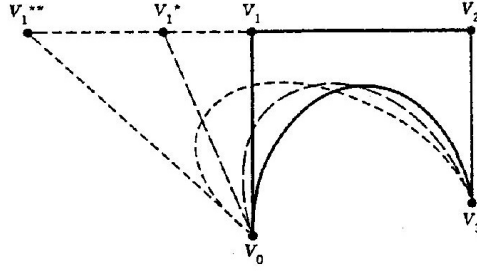
Konveks tekne, kontrol noktaları arasına gerilmiş bir lastiğin oluşturduğu çokgen olarak düşünülebilir.

Bezier karma fonksiyonları $n+1$ kontrol noktasıyla n . dereceden polinom üretir ve eğriyi ilk ve son noktaları arasında interpolate olmaya zorlar (Şekil 3.7)



Şekil 3.7 Karma fonksiyonlarının Bezier eğrisini ilk ve son noktaları arasında interpolate etmesi

Aradaki kontrol noktaları sadece eğriyi kendilerine doğru çekerler ve eğrinin istenen şekle ulaşması için kullanılırlar. Şekil 3.8 ile bir kontrol noktasının hareketiyle Bezier eğrisinin şeklinin nasıl değiştiğini gösteriyor (Anand, 1992)



Şekil 3.8 Bir kontrol noktasının yer değiştirmesiyle Bezier eğrisinde oluşan değişiklikler

Karma fonksiyonların kullanımına bir örnek olarak V_0, V_1, V_2, V_3 dört kontrol noktasını göz önüne alalım. $n+1=4$ olduğundan polinomun derecesi $n=3$ tür. (41) denklemini açarak

$$Q(t) = V_0 B_{0,3} + V_1 B_{1,3} + V_2 B_{2,3} + V_3 B_{3,3} \quad (45)$$

buluruz. (42) denkleminde verilen Bernstein polinomlarına göre dört karma fonksiyon vardır:

$$B_{0,3} = \frac{3!}{0!3!} t^0 (1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_{1,3} = \frac{3!}{1!2!} t^1 (1-t)^2 = 3t(1-t)^2 \quad (46)$$

$$B_{2,3} = \frac{3!}{2!1!} t^2 (1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3} = \frac{3!}{3!0!} t^3 (1-t)^0 = t^3$$

Normalleştirme özelliği, karma fonksiyonlara uygulanır, yani toplamaları 1 e eşittir.

$$[(1-t)^3] + [3t(1-t)^2] + [3t^2(1-t)] + t^3 = 0 \quad (47)$$

Bu fonksiyonları (45) denkleminde yerleştirilirse,

$$Q(t) = (1-t)^3 V_0 + 3t(1-t)^2 V_1 + 3t^2(1-t)V_2 + t^3 V_3 \quad (48)$$

elde edilir. Bezier eğrisinin ilk ve son kontrol noktalarından geçtiği bilinir. Buna göre,

$$t = 0, Q(0) = V_0$$

$$t = 1, Q(1) = V_3 \quad (49)$$

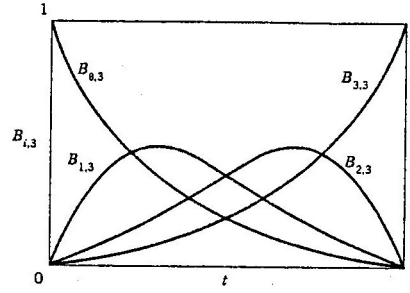
Bu değerlerdeki karma fonksiyonlar,

$$t = 0, B_{0,3} = 1$$

$$t = 1, B_{3,3} = 1 \text{ ve } B_{1,3} = B_{2,3} = 0$$

dır.

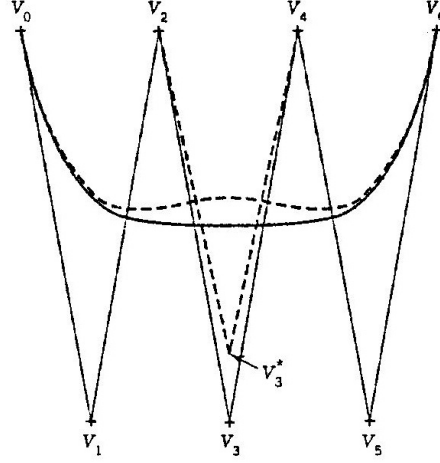
Kübik Bezier eğrisi için karma fonksiyonların çizimi Şekil 3.9'da gösterilmiştir.



Şekil 3.9 Kübik Bezier Eğrisi için karma fonksiyonların çizimi

Her bir kontrol noktası, kendisiyle ilgili karma fonksiyonla ağırlıklanır ve her bir noktanın etkisi parametrik değer 0 dan 1 e artarken değişir. Karma fonksiyonlar aynı zamanda Bezier eğrisini ilk ve son iki kontrol noktaları arasındaki çizgiye teğet olmasını sağlar.

Bezier eğrileri için karma fonksiyonlar olarak kullanılan Bernstein polinomları tek polinom eğrisiyle kontrol noktaları dizisine yaklaşım gösterir. Böyle oluşan şeklin derecesi, kontrol noktasına bağlıdır. Bezier eğrilerinde lokal kontrol sağlanamaz. Yani bir kontrol noktasının değişmesi tüm eğri parçasının şeklini değiştirir (Şekil 3.10). (Anand, 1992)



Şekil 3.10 Bezier eğrisi lokal kontrol sağlayamaz

3.1.2 Bezier eğrisi için matris formu

Bezier eğrileri matris formunda uygun olarak ifade edilebilirler. Örneğin,

$$Q(t) = (1-t)^3 V_0 + 3(1-t)t V_1 + 3t^2(1-t) V_2 + t^3 V_3$$

eşitliği ile verilen bir kübik Bezier eğrisini düşünelim. Bu eşitlik matris formunda aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$Q(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} (1-3t+3t^2-3t^3) & (3t-6t^2+3t^3) & (3t^2-3t^3) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

daha yoğun formda da aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir (Anand, 1992)

$$Q(t) = [t] \cdot [M]_{be} \cdot [V]_{be}$$

3.1.3 B-Spline eğrileri

Bezier karma fonksiyonları, eldeki mevcut kontrol noktalarının sayısına bağlı olan Bernstein polinomlarını kullanır. Bu eğriler, global kontrole sahiptirler. Yani, bir tek kontrol noktasının hareketi tüm eğriyi etkiler. Yüksek dereceli fonksiyonları ve global etkiyi azaltmak için Bezier eğrileri, düşük dereceli birçok parçalar birleştirilerek kurulur. Bu hem lokal kontrolü hem de sürekliliği sağlayarak derece değiştirme serbestliği sağlar. Sonuçta elde edilen Bezier eğrisinin daha önce ifade ettiğimiz özelliklere sahip olmakla birlikte, birleşik eğrinin farklı özellikleri vardır. Parçaları birleştirmek için seçilen metot, istenilen süreklilik derecesine bağlıdır.

Bezierdeki Bernstein polinomlarına bir alternatif, herhangi sayıdaki kontrol noktalarından geçen tek parçalı geometrik polinom üreten B-spline karma fonksiyonlarının kullanımıdır. Polinomun derecesi kontrol nokta sayısından bağımsız olarak tasarımcının isteğine bağlı olarak seçilir. Karma veya temel fonksiyonun derecesi elde edilecek olan B-Spline eğrisinin derecesini kontrol eder. B-Spline eğrileri, lokal kontrol yapar, yani eğer bir nokta hareket ettirilirse sadece bazı parçalar etkilenir, diğer kısımlar değişmeden kalır. B-Spline parçaları arasındaki süreklilik, temel fonksiyonun derecesinin bir fonksiyonudur. Böylece süreklilik, mümkün olan derecede seçeneklerinin daraltılmasında, tasarımcı için ana faktördür. B-Spline eğrileri de Bezier eğrileri gibi karma fonksiyonlarla temsil edilirler. Denklemi,

$$P(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) V_i \quad (50)$$

şeklinde. Burada, V_i ler kontrol noktaları, $N_{i,k}$ lar $(k-1)$. Dereceden karma fonksiyonları temsil ederler. Matematiksel olarak spline, parça $(k-1)$. dereceden

polinom yani C^{k-2} sürekliliği varsa, k. mertebeden ya da (k-1). derecedendir denilir. Diğer bir ifadeyle,

- a) Polinomun derecesi, $[t_i, t_{i+1}]$ aralığında (k-1) i geçmez.
- b) Konum ve [1 den (k-1) e kadar] türev sürekliliği vardır. Kübik B-Spline durumu için, k=4, derece = 3 tür. 2.derece sürekliliği sağlanmıştır. i. karma fonksiyon $N_{i,k}(t)$ aşağıdaki tekrarlı eşitlikte tanımlanmıştır.

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \text{ ve}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-t_i)}{(t_{i+k-1}-t_i)} N_{i,k-1}(t) + \frac{(t_{i+k}-t)}{(t_{i+k}-t_{i+1})} N_{i+1,k-1}(t) \quad (51)$$

Burada düğüm vektörü, $[t_i \dots t_{i+k}]$ dır. (51) nolu eşitlikte ağırlıklar parantez içinde verilmiştir. Düğüm vektörleri şu şartlara bağlıdır: Azalmayan sırada olmalıdır, yani düğüm vektörünün elemanları olan t_i ler $t_i \leq t_{i+1}$ şartını sağlamalıdır. Aynı değer, k dan daha fazla görünmemelidir, yani spline ın mertebesinden daha çok olamaz. Bu aynı değer düğümler, genellikle katlı düğümler olarak değerlendirilirler.

Bezier eğrisi gibi, B-Spline lar da normalleştirme ve konveks tekne özelliğini sağlarlar. Normalleştirme özelliği,

$$\sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) = 1$$

şeklinde ifade edilir.

Herhangi bir B-Spline eğrisinde, derece (k-1), kontrol noktaları ve düğüm sayısı birbiriyle

$$(m+1) = (n+1) + k$$

düğüm sayısı kontr. nok. say. eğrinin mertebesi

bağıntısıyla bağlıdır. Buradan

$$m = n + k$$

elde edilir. Dügüm vektörleri böylece $[t_0 \dots t_{n+k}]$ dır (Anand, 1992)

3.1.3 B-Spline eğrisi için matris formu

B-Spline'lar ile ilgilenirken matris biçimlendirilmesi kullanılabilir. Örneğin, kübik bir B-Spline matris formunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$P_i(t) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i-1} \\ V_i \\ V_{i+1} \\ V_{i+2} \end{bmatrix}$$

ya da kısaca

$$P(t) = \frac{1}{6} [t] \cdot [M]_{Bs} \cdot [V]_{Bs}$$

şeklinde yazılabilir (Anand, 1992).

3.1.5 Kübik parametrelendirme

Genel olarak bir parametreye bağlı düzlemler ailesi, bir hacim oluşturur ancak tanıma göre bir açılabilir yüzey olan bu düzlemlerin oluşturduğu zarfa dikkatimizi yoğunlaştırıyoruz. Bu nedenle, bir açılabilir yüzeyi bir eğrinin duali olan bir kimlik olarak gözlemliyoruz. Bir eğri, herhangi bir dereceden bir polinom ile, yakınlştırılabilir: geometrik modellemede sıklıkla yapıldığı üzere üçüncü dereceden polinom seçiyoruz. Polinom katsayıları, istenen eğrinin modelleme sürecinin parçası olarak dikkatli biçimde seçilecektir. Kontrol köşeleri ve polinom katsayıları arasındaki ilişki, oluşan eğri ve kontrol köşeleri arasındaki fiziksel, geometrik ya da cebirsel ilişkiler ile belirlenmektedir. Bir kübik parametrik eğri,

$$P(t) = f^T M G \tag{52}$$

eşitliği ile verilmektedir. Burada V_j , $j=1, 2, 3, 4$ kontrol köşeleri olmak üzere

$$f^T = [1 \quad t \quad t^2 \quad t^3]$$

$$G = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri geçerlidir. M matrisi, bir 4×4 boyutlu sabit tabanlı matristir. Bu makalede, Bezier ve B-spline biçimleri ele alındığından herhangi durumdaki temel matrisler olan M_{be} ve M_{bs} matrisleri sırasıyla,

$$M_{be} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{bs} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

eşitlikleri ile verilmektedir. Kontrol köşeleri yerine kontrol düzlemlerini kullandığımızda bir parametreye bağlı düzlemler ailesini üretiyoruz. Düzlemler ailesini belirleyen eşitlik,

$$U(t) = f^T M G \quad (53)$$

ile verilir. (Eğrilere ilişkin kübik parametrelendirme durumundaki gibi aynı yöntemle bulunur.) Burada, f , M , G , V_j nin kontrol düzlemlerinin düzlem koordinatları olarak yorumlanmasının dışında önceki biçimdedir (Balkı, 2010).

(53) eşitliği ile belirlenen düzlemler ailesindeki ardışık iki düzlem zarf biçimindeki açılabilir yüzey üzerinde bulunan bir doğrudaki kesişir. t 'nin herhangi bir değerine uyan düzlem,

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)) \text{ ve } X = (x, y, z) \text{ olmak üzere,}$$

$$u(t) \cdot x = u_4(t) \quad (54)$$

ile vektör formunda tekrar yazılan (53) eşitliği verilmektedir. Bu düzleme bitişik olan düzlem,

$$u(t + \delta \cdot t) \cdot x = u_4(t + \delta \cdot t), \delta \cdot t \rightarrow 0 \quad (55)$$

eşitliği ile verilir. (54) eşitliğinin (55) eşitliğinden çıkarılmasıyla bulunan eşitliğin her iki yanını $\delta \cdot t$ 'ye bölmek suretiyle (54) eşitliğinin türevi elde edilir:

$$\frac{du(t)}{dt} \cdot x = \frac{du_4(t)}{dt} \quad (56)$$

Bu iki düzlemin ((54) ve (56) eşitlikleri) kesişim doğrusu, açılabilir yüzeyin üzerinde bulunur ve t ye karşılık gelen yüzeyin doğuranı olarak bilinir. Yukarıdaki iki düzlemin $L(t) = (\vec{s}, \vec{r})$ ile gösterilen kesişim doğrusu plucker koordinatları cinsinden üs işaretinin t 'ye göre türevi gösterdiği,

$$\vec{s} = \vec{u} \times \dot{\vec{u}}$$

$$\vec{r} = \dot{u}_4 \vec{u} - u_4 \dot{\vec{u}} \quad (57)$$

şeklinde hesaplanır. $[0,1]$ aralığında t parametresini değiştirdikçe $L(t)$ doğrusu, açılabilir yüzeyi oluşturur. Bu durumda (53) eşitliği, zarf biçimindeki açılabilir yüzeyinin (57) eşitliği ile doğru geometrik biçiminde verildiği tek parametrelili düzlemler ailesine ilişkin bir Bezier ya da B-spline formülasyonunu temsil eder. Bir açılabilir yüzey, iki parametreye bağlı noktalar takımı olarak bir yüzeyi

belirlemede kullanılan geleneksel yaklaşım yerine burada bir tek parametrelî düzlemler ailesi açısından ele alınır.

Bu nedenle bir açılabilir yüzey, burada geleneksel durumdaki bir Bezier ya da B-Spline eğrisine benzerlikler taşır. Çünkü hem açılabilir yüzey hem de eğri, bir tek düzlemler ya da noktalar gibi örnek geometrik biçimler ailesidir (Balkı, 2010).

Balkı (2010)'nın çalışmasında açılabilir yüzeylerin temsili kullanılarak parametrik kübik eğriler ve açılabilir yüzeylerin geometrik modellenmesi bağlamında birbirinin duali oldukları incelenmiş ve aşağıdaki çizelge ile kısaca ifade edilmiştir.

EĞRİLER	AÇILABİLİR YÜZEYLER
Eğri üzerinde bir kontrol noktası	Açılabilir yüzeye teğet olan bir kontrol düzlemi
İki kontrol noktası bir teğeti tanımlar.	İki kontrol düzlemi bir doğru belirler.
Üç kontrol noktası bir oskütatör düzlem belirler.	Üç kontrol düzlemi karakteristik noktayı Belirler.
Dört kontrol noktası bir eğri belirler.	Dört kontrol düzlemi bir açılabilir yüzey belirler.

Çizelge 3.1 Eğrilerin ve yüzeylerin geometrik modellenmesinde noktalar ve düzlemler arasındaki duallik

5. SONUÇ

Bu çalışmada, doğrular geometrisi kullanılarak, açılabilir ve regle yüzeyler için eğrilerin Bertrand ofsetlerinin genelleştirilmesi geliştirilmiştir. Sonuçlar, ilginç bir şekilde hem IR^2 deki eğrilerin nokta geometrisi ile IR^3 deki regle yüzeylerin doğrular geometrisi arasındaki benzerliği hem de IR^3 deki açılabilir yüzeyler ve eğriler arasındaki duallığı gösterir. Örneğin; bir düzlem eğrisi Bertrand çiftlerinin sonsuzluğuna sahip olabildiği gibi bir regle yüzey aynı yönde yönlü Bertrand ofsetlerinin sonsuzluğuna sahip olabilir. Bundan başka, üç boyutlu eğrilerle benzerlik bakımından, eğer ofsetin karakteristik eğrisinin (regresyon kenarı) eğrilik ve burulması arasındaki lineer denklem sağlanırsa, açılabilir bir yüzey açılabilir bir Bertrand ofsete sahiptir. Sonuçlar, yontulmuş yüzeylerin bilgisayar destekli tasarımında birçok uygulamaya sahiptir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akbulut, F.**, 1970, Vektörel Analiz, Ege Üniversitesi Matbaası.
- Anand, V. B.**, 1992, Computer Graphics and Geometric Modeling for Engineers, John Wiley & Sons, Inc.
- Balkı, P.**, 2010, Geometrik Tasarım Açısından Eğri ve Yüzeyle Farklı Bir Bakış, Y. Lisans Tezi, Ege Üniversitesi
- Biran, L.**, 1970, Diferansiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi.
- Chu, C.-H. and Sequin, C. H.**, 2002, Developable Bezier Patches: Properties and Design, Computer-Aided Design, 34, 511-527.
- Çalışkan, A.**, 2007, Diferansiyel Geometri Ders Notları.
- Ravani, B. and Ku, T. S.**, 1991, Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces, Computer, 23.
- Valiron, G.**, 1986, The Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces, Math SCI Press.
- Zha, X. F.**, 1997, A new Approach to Generation of Ruled Surfaces and its Applications in Engineering, Advanced Manufacturig Technology, 13, 155-163.

ÖZGEÇMİŞ

Esra ERKAN, 01/07/1985 tarihinde İzmir’de doğdu. 1991-1996 yılları arasında İzmir’in Konak ilçesinde ilkokulu okudu. Ortaokulu, İzmir’de Fevzi Çakmak ortaokulunda, liseyi de İzmir Kız Lisesinde okuyup, 2004 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazanarak, 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’ne bağlı olarak Matematik Anabilimdalı Geometri Bilimdalı’nda yüksek lisansa başladı.