

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HAMILTONIAN SİSTEMLER İÇİN AYRIK-ZAMANLI DAYANIKLI
KONTROLÖR TASARIMI**

**DOKTORA TEZİ
Yaprak YALÇIN**

Anabilim Dalı : Elektrik Mühendisliği

Programı : Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği

HAZİRAN 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HAMILTONIAN SİSTEMLER İÇİN AYRIK-ZAMANLI DAYANIKLI
KONTROLÖR TASARIMI**

**DOKTORA TEZİ
Yaprak YALÇIN
(504032105)**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Şubat 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2010

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Leyla GÖREN SÜMER (İTÜ)
Eş Danışman : Doç. Dr. Salman KURTULAN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Cem GÖKNAR(Doğuş Ünv.)
Prof. Dr. Galip CANSEVER(YTÜ)
Prof. Dr. Külmiz ÇEVİK(İTÜ)
Doç. Dr. M. Turan SÖYLEMEZ (İTÜ)
Doç. Dr. N. Serap Şengör (İTÜ)**

HAZİRAN 2010

Sevgili anneme ve babama,

ÖNSÖZ

Eğitim yaşamımın en önemli çalışmasının, bana büyük katkılarının olduğunu ve izleyen akademik yaşamımda, bu süreçte edindiğimi umduğum, akademik bilgi ve disiplinin yol gösterici olacağını düşünüyorum. Doktora tez çalışmasının niteliği gereği uzun süreli çalışma ve emeğin sonucu oluşan bu çalışmanın da kontrol bilimi ve mühendisliği için yararlı ve kullanılabilir olmasını dilerim.

Tez çalışmam sırasında, bana sahip oldukları her türlü bilimsel, akademik, mühendislik bilgi ve birikimleri aktarmaya çalışan ve yaşama dair de eğitildiğimi düşündüğüm keyifli ve eğitici yoğun çalışma dönemleri yaşatan, değerli hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Leyla Gören Sümer'e ve değerli hocam ve tez eş danışmanım Sayın Doç. Dr. Salman Kurtulan'a tüm yönlendirmeleri ve yardımları için en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Bilimsel ve akademik çalışmaların içinde bulunma konusunda beni isteklendiren ve bireysel gelişimimi ve eğitimimi çok önemseyen sevgili aileme, tüm destekleri ve emekleri için çok teşekkür ederim.

Haziran 2010

Yaprak Yalçın
(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ.....	xiv
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİ	7
2.1 Temel Tanım ve Kavramlar	7
2.1.1 Sürekli zaman tanım bölgesinde tanım ve kavramlar	7
2.1.2 Ayrık zaman tanım bölgesinde tanım ve kavramlar	9
2.2 Hamiltonian Sistemler.....	12
2.2.1 Ayrık Hamiltonian sistemler	14
3. HAMILTONİAN SİSTEMLERİN AYRIK ZAMANLI MODELİ.....	15
3.1 Giriş.....	15
3.2 Ayrık Zamanlı Modelleme Yöntemi	16
3.3 Sayısal Deneyler.....	28
3.4 Sonuçlar	42
4. KAPI KONTROLLÜ HAMILTONİAN SİSTEMLERİN DOĞRUDAN AYRIK ZAMANLI KONTROLÜ	43
4.1 Giriş.....	43
4.2 Ön Bilgi.....	48
4.3 IDA-PBC Tasarımının Ayrık Zaman Karşılığı	50
4.4 Sayısal Deneyler.....	58
4.5 Sonuçlar	67
5. HAMILTONİAN SİSTEMLERDE AYRIK ZAMANLI H_∞ OPTIMAL KONTROL	69
5.1 Giriş.....	69
5.2 Doğrusal Olmayan H_∞ Optimal Kontrol Literatür Özeti.....	70
5.2.1 Sürekli zamanlı H_∞ optimal bozucu bastırma problemi.....	72

5.2.1.1 Durum geribeslemesi ile çözüm	73
5.2.1.2 Belirsizlik içeren sistemler için durum geribeslemesi ile çözüm.	74
5.2.1.3 Belirsizlik içeren sürekli Hamiltonian sistemler için durum geribeslemesi ile çözüm	75
5.2.2 Ayrık zamanlı H_∞ optimal bozucu bastırma problemi	75
5.2.2.1 Durum geribeslemesi ile çözüm	78
5.3 Hamiltonian Sistemlerde Doğrudan Ayrık Tasarım ile Bozucu Bastırma	79
5.3.1 Sayısal deney	85
5.4 Hamiltonian Sistemlerde Doğrudan Ayrık Tasarım ile Dayanıkl Bozucu Bastırma Problemi.....	90
5.4.1 Sayısal deney	94
5.5 Sonuçlar	99
6. KARŞILAŞTIRMALAR	101
6.1 Giriş	101
6.2 Ön Bilgi	102
6.3 Kararlı Kılma.....	104
6.4 Bozucu Bastırma	105
6.5 Sonuçlar	109
7. UYGULAMA SONUÇLARI.....	110
7.1 Giriş	110
7.2 Gezer Köprülü Vinç Sisteminin Ayrık Zamanlı PBC Yöntemi ile Kontrolü	112
7.3 Sonuçlar.....	118
8. SONUÇLAR	119
KAYNAKLAR.....	123
ÖZGEÇMİŞ.....	133

KISALTMALAR

IDA-PBC	: Interconnection and Damping Assignment Passivity Based Control
PBC	: Passivity Based Control
PCH	: Port Controlled Hamiltonian
PDE	: Partial Differential Equation
QAL	: Quadratic Approximation Lemma
HJI	: Hamilton Jacobi Isaacs

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Van der Pol osilatörünün sürekli ve ayrık faz portresi.	29
Şekil 3.2 : Van der Pol Osilatörünün sürekli ve ayrık değişkenlerinin zamana göre değişimi.	30
Şekil 3.3 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)' de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin x ve y değişkenlerinin faz portreleri.	31
Şekil 3.4 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin x ve p_x değişkenlerinin faz portreleri.	32
Şekil 3.5 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin y ve p_y değişkenlerinin faz portreleri.	33
Şekil 3.6 : Çift sarkaç sistemi.	34
Şekil 3.7 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)' de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_1 ve q_2 değişkenlerinin faz portreleri.	35
Şekil 3.8 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_1 ve p_1 değişkenlerinin faz portreleri.	36
Şekil 3.9 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_2 ve p_2 değişkenlerinin faz portreleri.	37
Şekil 3.10 : Araba-sarkaç sistemi.	38
Şekil 3.11 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_1 ve q_2 değişkenlerinin faz portreleri.	39
Şekil 3.12 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_1 ve p_1 değişkenlerinin faz portreleri.	40
Şekil 3.13 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_2 ve p_2 değişkenlerinin faz portreleri.	41
Şekil 4.1 : Araba-sarkaç sistemi	59
Şekil 4.2 : Araba konumunun zamana bağlı değişimi.	61
Şekil 4.3 : Sarkaç açısının zamana bağlı değişimi.	61
Şekil 4.4 : Sürekli ve ayrık kontrol kuralları.	62
Şekil 4.5 : q_1 ve q_2 değişkenlerine faz portresi.	62
Şekil 4.6 : Top-çubuk sistemi.	63
Şekil 4.7 : Top konumunun zamanla değişimi.	64
Şekil 4.8 : Çubuk açısının zamanla değişimi	64

Şekil 4.9 : Sürekli ve ayrık kontrol işaretleri.	65
Şekil 4.10: q_1 ve q_2 değişkenlerine ilişkin sürekli ve ayrık faz diyagramları	65
Şekil 4.11 : Çift sarkaç sisteminin sürekli ve doğrudan ayrık kontrol kuralı altında cevapları.	67
Şekil 5.1 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin momentum değişkenlerindeki etkisi.	87
Şekil 5.2 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin konum değişkenlerindeki etkisi.	87
Şekil 5.3 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_1 durum değişkenin zamana göre değişimi.	88
Şekil 5.4 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_2 durum değişkenin zamana göre değişimi.	88
Şekil 5.5 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_1 durum değişkenin zamana göre değişimi.	89
Şekil 5.6 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_2 durum değişkenin zamana göre değişimi.	89
Şekil 5.7 : Kontrol işareti u_1 'in zamana göre değişimi.	90
Şekil 5.8 : Kontrol girişi u_2 'nin zaman göre değişimi.	90
Şekil 5.9 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin momentum değişkenlerindeki etkisi.	95
Şekil 5.10 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin konum değişkenlerindeki etkisi.	95
Şekil 5.11: Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_1 momentum değişkeninin zamana göre değişimi.	96
Şekil 5.12: Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_2 momentum değişkeninin zamana göre değişimi.	97
Şekil 5.13: Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_1 konum değişkeninin zamana göre değişimi.	97
Şekil 5.14: Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_2 konum değişkeninin zamana göre değişimi.	98
Şekil 5.15 : u_1 kontrol işaretinin zamana göre değişimi.	98
Şekil 5.16 : u_2 kontrol işareti zamana göre değişimi.	99
Şekil 7.1 : Gezer köprülü vinç.	112
Şekil 7.2 : Gezer köprülü vinç sistemi ilkesel şeması.	113
Şekil 7.3 : İTÜ Endüstriyel Otomasyon Laboratuvarı'nda bulunan gezer köprülü vinç düzeneği	116
Şekil 7.4 : Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 0.06m konumundan 1.0m konumuna hareketi nedeniyle oluşan salınım eğrileri.	116
Şekil 7.5 : Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 0.06m konumundan 1.0m konumuna götürülmesi.	117
Şekil 7.6 : Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 1m konumundan 0.35m konumuna hareketi nedeniyle oluşan salınım eğrileri.	117
Şekil 7.7 : Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 1m konumundan 0.35m konumuna götürülmesi.	118

SEMBOL LİSTESİ

Σ_t	: Durum uzayında verilmiş sürekli zamanlı doğrusal olmayan sistem
Σ_k	: Durum uzayında verilmiş ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistem
s	: Katkı fonksiyonu (supply rate)
V	: Depo fonksiyonu (storage function), Lyapunov fonksiyonu
γ	: Girişten çıkışa L_2 kazancı
q	: Genelleştirilmiş konumlar vektörü
p	: Genelleştirilmiş momentumlar vektörü
x	: Yerel koordinatlar veya durum değişkenleri vektörü
$\mathcal{H}(x)$	: Hamiltonian sistemin toplam enerji fonksiyonu (yerel koordinatlarda)
$\tilde{\mathcal{H}}(x)$	: Enerji fonksiyonun ikinci mertebeden Taylor seri açılımı (yerel koordinatlarda)
$\hat{H}(x)$	: Ayrık-zamanlı Hamiltonian sistemin toplam enerji fonksiyonu (yerel koordinatlarda)
$\mathcal{H}_{Hess}(x)$	: Enerji fonksiyonun Hessian matrisi (yerel koordinatlarda)
$J(x)$	: Ters-simetrik matris, Hamiltonian sistemin iç bağlantı matrisi (yerel koordinatlarda)
$R(x)$	: Negatif olmayan simetrik matris, Hamiltonian sistemin kayıp yapısı (yerel koordinatlarda)
$G(x)$	: Hamiltonian sistemin kuvvet giriş matrisi (yerel koordinatlarda)
$\tilde{\mathcal{H}}$	: Belirsizlik içeren Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonu
$\mathcal{H}(q,p)$	: Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonu (genelleştirilmiş koordinatlarda)
$\mathcal{H}_d(q,p)$	: İstenen kapalı çevrimli sistemin enerji fonksiyonu (genelleştirilmiş koordinatlar)
$\mathcal{P}(q)$	: Hamiltonian sistemin potansiyel enerji fonksiyonu (genelleştirilmiş koordinatlarda)
$\mathcal{K}(q,p)$	: Hamiltonian sistemin kinetik enerji fonksiyonu
$\mathcal{P}_d(q)$	: İstenen kapalı çevrimli sistemin potansiyel enerji fonksiyonu (genelleştirilmiş koordinatlar)
$\mathcal{K}_d(q,p)$	: İstenen kapalı çevrimli sistemin kinetik enerji fonksiyonu (genelleştirilmiş koordinatlar)

$M(q)$	: Hamiltonian sistemin genelleştirilmiş eylemsizlik (inertia) matrisi
$M_d(q)$	: İstenen kapalı çevrimli Hamiltonian sistemin genelleştirilmiş eylemsizlik (inertia) matrisi.
J	: Standart ters-simetrik matris
$R(q, p)$	: Hamiltonian sistemin kayıp yapısı (genelleştirilmiş koordinatlarda)
$R_d(q, p)$	: İstenen kapalı çevrimli sistemin kayıp yapısı (genelleştirilmiş koordinatlarda)
$G(q)$	: Hamiltonian sistemin kuvvet giriş matrisi (input force matrix)
$\nabla \mathcal{H}$	: Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonunun gradyanı
$\nabla \mathcal{K}$	: Hamiltonian sistemin kinetik enerji fonksiyonunun gradyanı
$\nabla \mathcal{P}$	: Hamiltonian sistemin potansiyel enerji fonksiyonunun gradyanı
$\bar{\nabla} H$	: Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonunun ayrık-gradyanı
$\bar{\nabla} K$	: Hamiltonian sistemin kinetik enerji fonksiyonunun ayrık-gradyanı
$\bar{\nabla} P$	: Hamiltonian sistemin potansiyel enerji fonksiyonunun ayrık-gradyanı
$u_{es}(t)$	: Enerji biçimlendirme kontrol kuralı
$u_{di}(t)$	: Sönüm atama kontrol kuralı
$\Delta \mathcal{P}(q)$	: Hamiltonian sistemin parametrelerindeki belirsizliğin potansiyel enerji fonksiyonundaki etkisi
$\Delta \mathcal{H}$	: Hamiltonian sistemin parametrelerindeki belirsizliğin enerji fonksiyonundaki etkisi
$\Delta M(q)$	: Sistemin eylemsizlik matrisindeki belirsizlik
φ	: Kayıp oranı (dissipation rate) fonksiyonu
T	: Örneklem periyodu
$V_x(x)$	: $V(x)$ fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevlerinin yer aldığı bir satır vektör

HAMILTONIAN SİSTEMLER İÇİN AYRIK ZAMANLI DAYANIKLI KONTROLÖR TASARIMI

ÖZET

Bu doktora çalışması kapsamında; İlk olarak, toplu-parametrelili Hamiltonian sistemlerin, doğrudan ayrık kontrolör tasarım yöntemleri geliştirmeye elverişli ayrık zamanlı modelinin eldesi için, sistemin sürekli modelinin bilindiği varsayılarak ve ayrık-gradyan kavramı ile ileri Euler ayrıklaştırması kullanılarak gradyan temelli bir yöntem geliştirilmiştir. Üç farklı yeni ayrık-gradyan ifadesi önerilmiş ve bu gradyanlar kullanılarak elde edilen ayrık zamanlı modeller verilmiştir. Bu modellerin bazı koşullar altında enerji korunumlu oldukları ve simplektik fark sistemi (symplectic difference system) tanımladıkları gösterilmiştir. Ayrıca, türetilen modeller, kayıplı ve kayıpsız iyi-bilinen çeşitli Hamiltonian sistemler için benzetimler yapılarak sınanmıştır. Benzetim sonuçları, bu çalışmada türetilen modellerin, doğrudan sayısal kontrol tasarım yöntemleri geliştirme amacıyla kullanılabilirliğini göstermiştir.

Daha sonra, sürekli Hamiltonian sistemler için geliştirilmiş olan ve PBC (Passivity Based Control) tekniği olarak bilinen yöntemin, doğrudan ayrık zaman karşılığı n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için elde edilmiştir. Doğrudan ayrık zaman tasarım yönteminde, enerji biçimlendirme ve sönüm atama işlemlerini yapan kontrol kuralları, açık çevrimli ve istenen kapalı çevrimli sistemlerin ayrık zamanlı modelleri - bu tez çalışmasında önerilen yöntemle elde edilen - kullanılarak türetilmiştir. Bu tezde, sadece eksik-sürülmüş sistemler için kontrol kuralları türetilirken, istenen kapalı çevrimli sistemin sürekli modelinin bilindiği varsayılmıştır. Eksik sürülmüş sistemler olarak araba-sarkaç ve top-çubuk sistemleri ile tam sürülmüş sistem olarak çift sarkaç sistemi için benzetim yolu ile kontrol uygulamaları yapılarak önerilen yöntemin başarısı sınanmıştır. Benzetimlerde kullanılan örnekleme periyotları için, ayrık kontrolör sürekli kontrolöre çok yakın bir başarımlı göstermiş, sürekli kontrolörün emülatörü ise kapalı çevrim sistemi kararsız yapmıştır. Ayrık kontrol kurallarının hesap karmaşıklığı hemen hemen emülatörün ki ile aynı mertebeden olduğunu vurgulamak yerinde olacaktır.

Ardından, n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için ayrık zamanlı bozucu bastırma problemi ele alınmış, sistemin ayrık zamanlı Hamiltonian modeli için problemin formülasyonu yapılmış ve problemin çözüm koşulu bir teorem ile verilmiştir. Genel doğrusal olmayan sistemler için problemin çözümünün varlık koşulu, Hamilton-Jacobi-Issacs (HJI) kısmi diferansiyel eşitsizliği biçiminde verilirken, Hamiltonian sistemler için problemin çözümünün varlık koşulu, daha kullanışlı bir koşul olan cebirsel bir HJI eşitsizliği biçiminde elde edilmiştir. İlgili teorem kullanılarak elde edilen kontrol kuralının başarısı, çift sarkaç sistemi üzerinde, benzetim yolu ile uygulanarak sınanmıştır. Benzetim sonuçları, bu çalışmada önerilen ayrık kontrol kuralının, emülatör kontrol kuralına göre daha başarılı olduğunu göstermiştir. Seçilen

örnekleme zamanı için emülatör kontrol kuralı kapalı çevrimli sistemi kararsız yapmıştır.

Bu doktora çalışmasında, parametrelerinde belirsizlik içeren n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için ayrık zamanlı dayanıklı bozucu bastırma problemi de ele alınmıştır. n-serbestlik dereceli sistemlerin dayanıklı kontrol probleminin, özel bir kontrol yapısı kullanıldığında, bozucu bastırma problemine indirgenebildiği gösterilerek, dayanıklı bozucu bastırma probleminin doğrudan ayrık tasarımla çözümü bir yeter koşulla verilmiştir. Problemin çözümünün varlığına ilişkin yeter koşulun, parametre belirsizlikleri göz ardı edilerek yapılan bozucu bastırma problemi için elde edilen yeter koşuldan daha sıkı olduğu gösterilmiştir. Yöntemin çift sarkaç sistemine uygulanmasına ilişkin yapılan benzetimlerde, belirsizlikler göz ardı edilerek yapılan tasarım sonucu elde edilen kontrol kuralının kapalı çevrimli sistemi kararsız yapabileceği gözlenmiştir.

Ayrıca, Navarro-Lopez (2002a) tarafından, genel doğrusal olmayan sistemlerin yerel kararlılık probleminin çözümü için sunulmuş olan, kayıplı olma kuramına dayanan yöntem, Hamiltonian sistemlerin ayrık zaman modelleri kullanılarak yeniden yazılmıştır. Bu sonuç, ayrık zamanlı PBC tasarımı ile elde edilen sonuçla karşılaştırılmıştır. Elde edilen kontrol kuralının, PBC tasarımı ile elde edilen sönüm atama kontrol kuralı ile aynı olduğu görülmüştür. Ayrıca, Navarro-Lopez (2002a)'ın sunmuş olduğu kayıplı olma tanımı, bozucu bastırma probleminin çözümü için de kullanılmış ve daha önce elde edilen yeter koşuldan daha kullanışlı bir koşul elde edilmiştir. Sistemin parametrelerinin bir koşulu sağlaması durumunda basit bir cebirsel hesap ile kontrol kuralının inşasının olanaklı olduğu gösterilmiştir.

Son olarak, gezer köprülülük vinçlerde yükün konumlandırılması ve köprü hareketinden kaynaklanan salınımın azaltılması problemi için bu çalışmada önerilen PBC yöntemi ile doğrudan ayrık zamanlı kontrolör tasarımı ve gerçeğine uygun inşa edilmiş bir gezer vinç düzeneği üzerinde, ulaşılabilir ticari endüstriyel donanımlar ile uygulama yapılmıştır. Deney sonuçları, önerilen ayrık zamanlı PBC yönteminin, yükü hedef noktaya kontrolsüz duruma göre sistem hızını azaltmadan götürüp, hedef noktaya ulaştıktan sonra oluşan salınımları önemli ölçüde azalttığını göstermiştir.

DISCRETE-TIME ROBUST CONTROL OF HAMILTONIAN SYSTEMS

SUMMARY

The problem of discrete-time modelling of the lumped-parameter Hamiltonian systems is considered and a novel gradient-based method is presented considering the discrete gradient concept and the forward Euler discretization under the assumption of the continuous Hamiltonian model is known. It has been proven that the proposed discrete-time model defines a symplectic difference system and has the energy conserving property under some conditions. In order to provide alternate discrete time models, three different discrete-gradient definitions are given. All models are considered for several well-known Hamiltonian systems and tested by simulations. The results are demonstrated that all these models are convenient to utilize for discrete-time controller design purposes.

After then, the direct discrete time control of the Port Controlled Hamiltonian Systems (PCHS) in the sense of energy shaping and damping injection is considered. The discrete-time counterpart of PBC technique is developed for n -degree of freedom mechanical systems using this proposed discrete-time model. The discrete-time control rules which correspond to potential energy shaping and damping assignment are designed directly using the discrete time model of the desired system and the discrete time model of the open loop systems. The performance of the proposed method is applied to under-actuated card-pendulum and ball-beam systems and fully-actuated double pendulum systems and its performance is tested by simulations. The simulation results showed that the discrete control rule has almost same performance with the continuous controller, however, the emulator controller destabilizes the closed loop system. Besides, the computational complexity of discrete controller is similar to the complexity of the emulator.

Next, the discrete-time disturbance attenuation problem for the n -dof freedom mechanical systems is investigated. The problem is formulated for the discrete-time Hamiltonian model of the system and a sufficient condition on the existence of the solution is given as a theorem. While, the existence of the solution of the problem for the general nonlinear system is given as a HJI partial differential inequality in literature, it has been shown in this study that the existence condition of the solution of the problem for the Hamiltonian systems can be reduced to an algebraic HJI inequality which is a more feasible condition. The performance of the controller obtained by utilizing the theorem presented in this dissertation is tested by simulations on the double pendulum system. Simulations results demonstrated that the controller obtained using the method developed in this paper has better performance than the emulator controller for sampled data Hamiltonian systems. The emulator controller unstabilizes the system for the considered sampling period.

Furthermore, the discrete-time robust disturbance attenuation problem for n -dof mechanical systems with energy function uncertainty is considered. First, it is shown that the robust control problem of the n -dof mechanical systems can be reduced to the disturbance attenuation problem when a specific type of control rule is used.

Then, the solution of robust disturbance attenuation problem via direct-discrete time design is given as a sufficient condition. This sufficient condition is more strict than the one which is obtained when the uncertainties is ignored. Also, the simulations verified that the control rule which is designed ignoring uncertainties makes the closed loop system unstable.

Furthermore, the method presented by Navarro-Lopez (2002a) for the solution on the stability problem of general nonlinear systems, which is based on dissipativity theory, is rewritten for the discrete-model of Hamiltonian systems proposed this dissertation. The result is compared with the damping injection control rule obtained by the discrete-time PBC design and it is seen that both control rule is same. Besides, the dissipativity definition presented by Navarro-Lopez (2002a) is utilized for the disturbance attenuation problem of Hamiltonian systems. A more feasible new result is obtained. It is shown that, due to this new result, the construction of the control rule is possible by a simple algebraic computation.

Finally, the problem of precise positioning of the load and reducing the oscillations arise from the movement of the bridge or trolley, in the industrial overhead crane systems is considered. For the solution of the problem the discrete-time PBC method proposed in this study is utilized. The implementation and experiments are carried out with standard technological equipments on the mechanism which is built in the context of this study at the ratio of 1/20 according to original industrial overhead crane systems. The experiment results demonstrated that the controller obtained via the discrete-time PBC method render the correct positioning of the load as fast as uncontrolled case and considerably reduce the oscillations after reaching the destination point.

1. GİRİŞ

Mekanik ve elektrik alt sistemlerin birleşiminden oluşan karmaşık sistemlerin modellenmesi, analizi ve kontrolü, sistem-kontrol bilimi ve mühendisliğinin önemli çalışma konularındandır. Bu tür sistemler, doğaları gereği doğrusal olmayan karmaşık dinamiklere sahiptir. Doğrusal olmayan sistemlerin oldukça genel bir sınıfına ilişkin analiz ve kontrol yöntemleri, doğrusal sistemler için izlenen yoldan gidilerek geliştirilmeye çalışılmıştır. Kontrol edilebilirlik, gözlenebilirlik gibi temel tanım, kavramlar ve analiz teknikleri açısından oldukça başarılı sonuçlar elde edilmesine rağmen kontrolör tasarımı konusunda elde edilen sonuçların tatminkar olduğunu söylemek zordur. Gelişmenin en fazla olduğu alan kararlılık olmasına rağmen, genel kararlı kılma teknikleri bile ancak doğrusal olmayan sistemlerin bazı özel sınıfları için verilebilmiştir. Bunun sebebi, tüm doğrusal olmayan sistemler için geçerli bir teknik geliştirmek amaçlandığında, bu karmaşık dinamikleri yekpare bir çalışma zeminine yerleştirmenin zorluğudur. Doğrusal olmayan sistemler için, doğrusal sistemlere ilişkin tasarım tekniklerinin esnekliğine sahip bir tasarım tekniği geliştirebilmek için iyi-tanımlanmış bir yapı ile tasarıma başlamak ve sonra bu sınıf sistem için genel bir tasarım tekniği geliştirmek gerekir (Ortega ve diğ.,1998). 1990'larda, iyi tanımlanmış doğrusal olmayan sistem sınıfı olarak, Euler-Lagrange ve eşdeğer olarak Hamiltonian sistem sınıfı seçilmiş, bu sistemlerin iç bağlantı, kayıp ve enerji fonksiyonlarını değiştirerek başta sistemi kararlı kılma teknikleri daha sonra da çeşitli kontrol amaçlarını yerine getiren kontrol kuralı inşaa yöntemleri geliştirilmiştir (Ortega ve diğ.,1998; Van der Schaft, 2000).

Hamiltonian sistemlerle, çoğunlukla doğrusal olmayan geniş bir sınıf fizik sistemin - elektrik, elektro-mekanik, robotik ve karmaşık şebeke sistemleri v.d.- matematik modeli olarak karşılaşılr. Sürekli Hamiltonian sistemlere ilişkin temel teoriye Marsden (1992), Meyer ve Glen (1992), Van der Schaft (2000), kitaplarından ve buralarda belirtilen kaynaklardan ulaşılabilir.

Serbest sistem modeli Hamiltonian sistem yapısında olan sistemlere, kontrolör tasarlamak amacıyla, uygun bir yapı -kapı yapısı- üzerinden giriş ve çıkış

değişkenleri eklenir, elde edilen bu yeni sisteme kapı kontrollü Hamiltonian (Port-controlled Hamiltonian (PCH)) sistem adı verilmektedir. Literatürde, bu sistemlerin analizi ve kontrolüne ilişkin çok sayıda çalışma vardır, örnek olarak Van der Schaft, (2000), Ortega ve diğ., (2002), Ortega ve Garcia-Canseco, (2004) verilebilir.

Doğrusal olmayan sistemlerin davranışını, özellikle kararlılığını, incelemek için, doğrusal sistemlerde kullanılan araçlar yetersiz kaldığından, sistemin enerjisinin zamana göre değişimi, kayıplı olma (dissipativity) ve kayıplı olmanın özel durumu olan pasif olma (passivity) kavramlarına dayanan yeni teknikler geliştirilmiştir. Sistemlerin giriş-çıkış ve iç davranışı, kayıplı olma kavramı ve enerji fonksiyonlarının özellikleri ile ilişkilendirilebilir. Sistemin Hamiltonian modeli, doğrusal olmayan sistemlerin kararlılık analizi için gerekli olan Lyapunov fonksiyonunu ve kararlı kılma probleminin çözümü için gerekli olan kayıp fonksiyonunu, yapısı gereği içerir. (Byrnes ve Lin, 1994; Lin ve Byrnes, 1995a; Lin ve Byrnes, 1995b; Lin ve Byrnes, 1995c; Lin ve Byrnes, 1995d; Sengör, 1995; Pavel ve Fairman, 1997; Gökmar ve Sengör, 1998; Isidori ve Lin, 1998; Van der Schaft, 2000; Navarro-López, 2002a; Laila ve diğ., 2002; Lewis, 2004).

Kapı-kontrollü Hamiltonian sistemlerin kararlı kılınması ve konum kontrolü için pasif olma temelli kontrol (Passivity-based Control (PBC)) teknikleri geliştirilmiştir. PBC yaklaşımı, hem Euler-Lagrange ve hem de PCH sistemlerin kontrolü için sunulmuş güçlü bir tasarım metodudur (Ortega, ve diğ., 1998). PBC tekniğinin temel ilkesi; sistemin enerji fonksiyonunu istenen biçime getiren kontrol kuralını ve bu fonksiyonun minimum olduğu değerinde sistemi asimptotik kararlı kılan – sönüm atama- kontrol kuralını, birbirlerinden bağımsız olarak türetmek olarak özetlenebilir. Literatürde, sürekli Hamiltonian sistemler için enerji biçimlendirme ve sönüm atama ilkelerine dayanan kontrol yöntemleri üzerine çeşitli çalışmalar bulunmaktadır (Ortega ve Spong, 2000; Gomez-Estern, 2001; Ortega ve diğ., 2002a; Ortega ve diğ., 2002b; Ortega ve diğ., 2004; Acosta ve diğ., 2005; Viola ve diğ., 2007; Sandoval ve diğ., 2008).

Günümüzde, sayısal işlemci teknolojilerindeki gelişmeler sonucu, bilgisayarlı kontrol sistemleri mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle, doğrusal olmayan sistemler için ayrık zamanlı modelleme, analiz ve kontrol yöntemlerinin geliştirilmesi önemli olmuştur. Ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemler ile ilgili çeşitli çalışmalar bulunmaktadır; Bunlardan bazıları, kayıpsız olma

(losslessness), geribesleme eşdeğerliği (feedback equivalence) kavramlarına dayanan, ayrık zamanlı sistemlerin global kararlılığı üzerine yöntemler içermektedir (Byrnes ve Lin, 1994; Lin ve Byrnes, 1995b; Sengör, 1995; Gökner ve Sengör, 1998; Navarro-López, 2002a; Navarro-López ve diğ., 2002b). Bazıları ise, sistemlerin tam (exact) ayrık zaman modelleri kullanılarak, sürekli sistemler için geliştirilmiş H_∞ kontrol tekniklerinin ayrık zamanlı eşdeğerlerinin türetilmesine ilişkindir (Lin ve Byrnes, 1994; Lin ve Byrnes, 1995c; Lin ve Byrnes, 1996). Doğrusal olmayan örneklenmiş-veri sistemlerinin kararlılık problemleri üzerine kapsamlı çalışmalar ve bu sistemlerin yaklaşık modelleri kullanılarak elde edilen sonuçlar literatürde yer almaktadır (Nesic ve diğ., 1999; Teel ve Kokotovic, 1999; Nesic ve Angeli, 2002; Nesic ve Teel, 2004).

İdeal olarak, sürekli bir Hamiltonian sisteme ilişkin ayrık zamanlı modelin Hamiltonian sistemlerin belirleyici özellikleri olan enerji korunumlu ve simplektik olma özelliğini koruması beklenir (Shibberu, 1997). Matematik literatürde çeşitli amaçlar için ayrık Hamiltonian sistemler üzerine çalışılmıştır. Bu çalışmaların bir bölümünde, ayrık Hamiltonian sistemler, *simplektik fark sistemleri* (*symplectic difference systems*) ya da *ayrık simplektik sistemler* (*discrete symplectic systems*) başlığı altında değerlendirilmiş ve çeşitli incelemeler yapılmıştır (Kratz, 2003; Hilscher ve Zeidan, 2003; Shi, 2006; Bohner, 1996). Bu konu ile ilgili çalışmaların diğer bölümü ise, standart entegrasyon yöntemlerinin yetersiz kalması nedeni ile Hamiltonian sistemlere uygun sayısal entegrasyon yöntemleri geliştirme üzerinedir. Bu entegrasyon yöntemlerinin incelemesinin yapıldığı, en kapsamlı çalışmalardan biri olarak (McLachlan ve diğ., 1998) verilebilir. Ayrıca, Hamiltonian sistemlerin dinamiklerini yüksek doğrulukta betimleyen, işlemsel olarak dayanıklı algoritmalar geliştirme konusunda da çeşitli çalışmalar vardır (Gonzalez, 1996; Marsden ve West, 2001; Sanz-Serna ve Calvo, 1994; Stuart ve Humphries, 1996). Bu algoritmaları temel alarak elde edilen ayrık zamanlı modellerin çoğu, kontrolör tasarımı kullanılamayacak kadar karmaşıktır.

Kontrol literatüründe ise, Hamiltonian sistemlerin yaklaşık ayrık zamanlı bir modelini kullanarak, doğrudan ayrık zamanlı PBC (Passivity Based Control) kontrol yöntemi sunan, bilindiği kadarı ile, yegane çalışma Astolfi ve Laila tarafından yapılmıştır (Laila ve Astolfi, 2005; Laila ve Astolfi, 2006a; Laila ve Astolfi, 2006b). Bu çalışmalarda kullanılan ayrık zamanlı model, ileri Euler yöntemi

ile elde edilmiş çok yaklaşık bir modeldir. Hamiltonian sistemlerin değişmezleri olan, *enerji korunumlu olma* ve *simplektik olma* özelliklerine sahip değildir (Laila, 2004; Laila ve Astolfi, 2006a). Kapı kontrollü Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı modellenin elde edilmesi için bir başka yaklaşım ise, modellemeyi doğrudan ayrık seviyede ele alan, Talasila ve diğ. (2006) tarafından sunulmuş çalışmadır.

Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemler için önemli kontrol mühendisliği problemlerinden olan, bozucu bastırma ve belirsizlikler altında dayanıklı kontrolör tasarımı problemlerinin çözümünde, H_∞ kontrol yaklaşımı kullanılmaktadır (Astolfi 1993; Isidori, 1994; Isidori ve Astolfi, 1992; Isidori ve Kang, 1995; Isidori ve Lin, 1998; Van der Schaft, 1991; Van der Schaft, 1992a; Van der Schaft 1992b; Lu ve Doyle, 1994a; Pavel ve Fairman, 1997; Yung ve diğ., 1996; Yung ve diğ., 1997; Yung ve diğ., 1998; Lu ve diğ., 1996; Lu ve diğ., 2000; Lee ve Smith, 2000; Ezal ve diğ., 2001; Djoudi ve Zames, 2002; Ito ve Jiang, 2004; Wu ve Lee, 2004; Saengdejing ve Qu, 2005; Wu ve diğ., 2006; Fu ve diğ., 2006). Doğrusal sistemler için H_∞ kontrol problemlerinin hemen hemen tümünün matematiksel olarak çözülmüş olduğu söylenebilir, çözülmemiş olanların büyük bir çoğunluğu endüstriyel uygulamalardan gelen gereksinimleri karşılamak üzerinedir; örneğin düşük mertebeli kontrolör tasarımı, var olan çözümlerin zaman gecikmeli sistemlere uyarlanması problemleri gibi. Sürekli doğrusal olmayan sistemlerin H_∞ amaç ölçütü ile yerel bozucu bastırma problemi ayrıntılı olarak incelenmiştir ve bu konuda Isidori ve Astolfi (1992), Isidori ve Kang (1995), Shen ve Tamura (1995), Lu ve diğ. (2000) kaynaklarına başvurulabilir. Sürekli Hamiltonian sistemler için bazı H_∞ kontrol problemleri Xi ve Cheng, (2000), Mei ve diğ. (2005) gibi çalışmalarda tanımlanmış ve bu problemlerin çözümünün varlığının yeter koşulları verilmiştir. Bozucu bastırma problemi, genel olarak sistemin L_2 kazancı ile karakterize edilir ve genel doğrusal olmayan sistemler için problemin çözümüne ilişkin varlık koşulları, çözümleri hayli zor olan, Hamilton-Jacobs-Issacs (HJI) kısmi diferansiyel eşitsizliği ile verilir. Oysa sistem, Hamiltonian sistem olarak modellenabiliyorsa, aynı problemin çözümünün varlık koşulları, çözümleri daha kolay olan, cebirsel HJI eşitsizliği olarak elde edilebilmektedir.

Ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemlerde bozucu bastırma problemleri ile ilgili temel çalışmalar, Lin ve Brynes (1994), Lin ve Brynes (1995c), Lin ve Brynes

(1996)'a aittir. Lin ve Brynes'in (1996)'da verdiği durum geri beslemesi ile bozucu bastırma probleminin çözümünün varlık koşulunun kullanılabilmesi için, iki adet kısmi diferansiyel eşitlikleri ile birlikte ayrık zamanlı bir Hamiltonian-Jacobi-Isaacs eşitliğinin çözülmesi gerekir. Bu varlık probleminin tam çözümünü elde etmek oldukça güç olduğundan, Lin ve Brynes (1996), literatürde çeşitli yaklaşık çözümler önerilmiştir (Huang, 1999; Deng ve Huang, 2003). Literatürde, bilindiği kadarı ile, ayrık zamanlı Hamiltonian sistemler için bozucu bastırma problemine ve herhangi bir çözüm önerisine rastlanmamıştır.

Bu doktora çalışmasında yapılanlar ve elde edilen sonuçların sunulmasında izlenen yol şöyle özetlenebilir;

Bölüm 2'de doğrusal olmayan sistemlerin kararlılığı ve kontrolü için kullanılan kayıplı olma, pasif olma, kayıpsız olma gibi tanımlar ile H_∞ optimal kontrolör tasarımında yararlanılmış olan temel kavramlar ve Hamilton sistemlerin özellikleri verilmiştir.

Bölüm 3'de, sürekli modeli ve enerji fonksiyonu verilen Hamiltonian sistemlerin doğrudan sayısal kontrol tasarımına uygun ayrık zamanlı bir modelinin elde edilmesi için bir yöntem önerilmiştir. Geliştirilen yöntem, gradyan temelli olup, yine bu tez çalışmasında önerilen üç ayrı ayrık-gradyan ifadesi ve türev operatörü için ileri Euler ayrıklaştırması kullanılarak türetilmiştir (Yalçın ve Gören-Sümer, 2007; Gören-Sümer ve Yalçın, 2008). Bu yöntem kullanılarak elde edilen modelin, hangi koşullar altında bir simplektik fark sistemi tanımladığı ve enerji korunumlu olduğu üzerine bir analiz yapılmıştır. Önerilen üç ayrık-gradyandan biri, Quadratic Approximation Lemma, Diewert (1976), kullanılarak türetilmiştir ve herhangi bir kısıt olmaksızın tüm enerji fonksiyonları için kullanılabilme özelliğindedir. Önerilen üç ayrık-gradyan kullanılarak, Hamiltonian sistemler için üç ayrı ayrık zamanlı model elde edilmiştir. Önerilen modellerin *sınanması* amacıyla, kayıplı ve kayıpsız iyi bilinen çeşitli Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı modelleri türetilmiş, benzetimler yapılmış ve benzetim sonuçları karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Bölüm 4'de, kapı kontrollü sürekli Hamiltonian sistemler için geliştirilmiş olan iç bağlantı ve sönüm atama ile pasif olma temelli kontrol (IDA-PBC) tekniğinin, ayrık zamanlı karşılığı türetilmiştir (Gören-Sümer ve Yalçın, 2008; Yalçın, ve Gören-Sümer, 2009a). Enerji biçimlendirme ve sönüm atama işlemlerine karşı düşen

kontrol kuralları, açık çevrimli sistemin ve istenen kapalı çevrimli sistemin bu tez çalışmasında önerilen ayrık zaman modelleri kullanılarak elde edilmiştir.

Bölüm 5’de, doğrusal olmayan H_∞ optimal kontrol yaklaşımına ilişkin bir literatür özeti verildikten sonra, önce belirsizlik içermeyen Hamiltonian-sistemlerin ayrık zamanlı kontrol kuralı ile bozucu bastırma probleminin çözümüne ilişkin varlık koşulları, arkasından belirsizlik içeren Hamiltonian sistemler için ayrık zamanlı dayanıklı bozucu bastırma probleminin çözümüne ilişkin varlık koşulları türetilmiştir (Yalçın ve Gören-Sümer, 2008; Yalçın ve Gören-Sümer, 2009b).

Bölüm 6’de, genel doğrusal olmayan sistemler için Navarro-Lopez (2002a)’da önerilen kararlı kılma yönteminin, Hamiltonian sistemlerin ayrık modelleri kullanılarak yeniden yazılmasıyla elde edilen sonuçlar incelenmiş, Bölüm 4’de elde edilenler ile karşılaştırılmıştır. Bu süreç sırasında, aynı yol izlenerek bozucu bastırma problemi için de bir çözüm elde edilebileceği görülmüş ve bozucu bastırma problemi için Bölüm 5’de verilen çözüme katkı yapan ek bir sonuç da elde edilmiştir.

Bölüm 7’de ise, gezer köprülü vinçler için yükün doğru konumlandırılması ve köprü hareketinden kaynaklanan salınımın azaltılması sorunu için bu çalışmada önerilen ayrık zamanlı PBC yöntemi ile doğrudan ayrık kontrolör tasarımı ve bu çalışma kapsamında gerçeğine uygun inşa edilmiş bir gezer vinç düzeneği üzerinde, ulaşılabilir ticari endüstriyel donanımlar ile yapılan uygulamanın sonuçları sunulmuştur.

2. ÖN BİLGİ

2.1 Temel Tanım ve Kavramlar

2.1.1 Sürekli zaman tanım bölgesinde tanım ve kavramlar

Durum uzayı gösterilimi,

$$\Sigma_t: \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), & u &\in U \\ y &= h(x, u), & y &\in Y \end{aligned} \quad (2.1)$$

biçiminde olan sistem ele alınsın. Burada, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$ sistemin yerel koordinatları ve U ile Y sırasıyla m ve p boyutlu lineer uzaylar olmak üzere u giriş ve y ise çıkış vektörüdür. $s: U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ katkı fonksiyonu (supply rate) olarak adlandırılan gerçek değerli bir fonksiyon olsun. Bu sistemin kayıplı (dissipative) olma özelliği aşağıdaki tanım ile verilir.

Tanım 2.1: $x(t_1)$, $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulundan $u(\cdot)$ kontrol kuralı ile ulaşılan sistem durumunun t_1 anındaki değeri olmak üzere, tüm $x_0 \in X$, tüm $t_1 \geq t_0$ ve tüm u giriş fonksiyonları için,

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t)) dt \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan ve depo fonksiyonu (storage function) olarak adlandırılan $V(0) = 0$ özelliğinde bir $V: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa, durum uzayı sistemi Σ_t , katkı fonksiyonu s 'ye göre kayıplıdır (dissipative) denir. Burada $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ biçimindedir (Van der Schaft, 2000). □

İlişki (2.2)'de verilen eşitsizliğe kayıplı olma eşitsizliği (dissipation inequality) adı verilir (Willems, 1972). Bu eşitsizliğin sağlanması, t_1 anında sistemde depolanan enerjinin, sistemin başlangıçtaki (t_0 anındaki) enerjisi ile, $[t_0, t_1]$ aralığında sisteme dışarıdan verilen enerjinin toplamına en fazla eşit olabileceği - bir enerji üretiminin

olmadığı, sadece bir enerji tüketiminin olduğu- anlamına gelir (Van der Schaft, 2000).

Aşağıda *kayıpsız olma (lossless)* ve *pasif (passive) olma* tanımları verilmiştir.

Tanım 2.2: Eger (2.2) tüm $x_0, t_1 \geq t_0$ ve tüm $u(\cdot)$ kontrol girişleri için eşitlik biçiminde sağlanıyorsa Σ_t sistemi s 'ye göre *kayıpsızdır (lossless)* denir (Van der Schaft, 2000).

Tanım 2.3: $U = Y = \mathbb{R}^m$ olmak üzere, Σ_t durum uzayı sistemine,

- $s(u, y) = u^T y$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı ise *pasiftir (passive)*,
- $s(u, y) = u^T y - \delta \|u\|^2$ 'e göre kayıplı yapan $\delta > 0$ varsa *kesin giriş pasiftir (strictly input passive)*
- $s(u, y) = u^T y - \varepsilon \|y\|^2$ 'e göre kayıplı yapan $\varepsilon > 0$ varsa *kesin çıkış pasiftir (strictly output passive)*
- $s(u, y) = u^T y$ 'ye göre kayıpsız ise *enerji korunumludur (conservative)*,

denir (Van der Schaft, 2000). $\square$

Tanım 2.4: Belirli bir $\gamma \in \mathbb{R}^+$ verilmiş olsun. Denklemleri (2.1) ile verilen sistemin $x(0) = 0$ başlangıç koşulundan başlayan çıkış yörüngeleri, eğer $\forall u \in L_2[0, T]$, $0 \leq T < \infty$ için,

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \quad (2.3)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, giriş u 'dan çıkış y 'ye sistemin L_2 kazancı, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 'dan küçük ya da eşittir denir (Isidori ve Astolfi, 1992, Van der Schaft, 2000). $\square$

Sistemin L_2 kazancının $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 'dan küçük ya da eşit olması, belirli bir katkı fonksiyonuna göre kayıplı olması ile ilişkilendirilebilmektedir. Isidori ve Kang (1995) bu ilişkiyi şu şekilde vermiştir; doğrusal olmayan (2.1) sistemi, ($x = 0$ denge noktasında) yerel asimptotik kararlı ise ve $s(u, y) = \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı ise yeterince küçük tüm girişler için $x(0) = 0$ başlangıç koşulundan başlayan sistem çıkışları tüm $t > 0$ için,

$$0 \leq V(x(t)) \leq \int_0^T (\gamma^2 \|u(s)\|^2 - \|y(s)\|^2) ds \quad (2.4)$$

ilişkisini sağlar. Bu sonuç, sistemin L_2 kazancının $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ 'dan küçük ya da eşit olduğu anlamına gelir.

Aşağıda ise doğrusal olmayan sürekli sistemler için sıfır-durum sezilebilir olma tanımı verilmiştir.

Tanım 2.5: Verilen bir $\dot{x} = f(x)$, $y = h(x)$ sistemi için, sistem çıkışı $h(x(t)) = 0$ olduğunda, $x(t)$ durum yörüngesi $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ özelliğinde ise *sıfır-durum sezilebilirdir* (zero-state detectable) denir (Isidori ve Kang, 1995). $\square$

2.1.2 Ayırık zaman tanım bölgesinde tanım ve kavramlar

Dinamik denklemleri,

$$\sum_k: \quad \begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), & x \in X \subset \mathfrak{R}^n, u \in U \subset \mathfrak{R}^m \\ y(k) &= h(x(k), u(k)), & y \in Y \subset \mathfrak{R}^p \end{aligned} \quad (2.5)$$

ile verilmiş doğrusal olmayan ayırık zamanlı sistem ele alınsın. Burada, $x \in X \subset \mathfrak{R}^n$ sistemin yerel koordinatları ve U ile Y sırasıyla m ve p boyutlu lineer uzaylar olmak üzere u giriş ve y ise çıkış vektörüdür. $s: U \times Y \rightarrow \mathfrak{R}$ katkı fonksiyonu (supply rate) olarak adlandırılan bir gerçek değerli bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.6: Σ_k sistemi için, eğer tüm $x(0)$, tüm $u \in \mathfrak{R}^m$ ve tüm $k \in Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ için,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq s(y(k), u(k)) \quad (2.6)$$

koşulunu sağlayan *depo fonksiyonu* olarak adlandırılan $V(0) = 0$ özelliğinde pozitif bir $V: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^+$ fonksiyonu varsa, katkı fonksiyonu s 'e göre *kayıplıdır* (dissipative) denir (Byrnes ve Lin, 1994; Lin ve Byrnes, 1995c; Lin ve Byrnes, 1996; Sengör, 1995; Navarro-Lopez, 2002a). $\square$

Eşitsizlik (2.6), ancak ve ancak, ayırık zamanda *kayıplı olma eşitsizliği* (dissipation inequality) olarak adlandırılan,

$$V(x(k+1)) - V(x(0)) \leq \sum_{i=0}^k s(y(i), u(i)), \quad \forall k, \forall u(k) \text{ ve } \forall x(0) \quad (2.7)$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda sağlanır (Byrnes ve Lin, 1994). $\square$

Ayrık zamanlı doğrusal olmayan bir sisteme - Σ_k sistemine- ilişkin pasif olma tanımı ise şu biçimdedir.

Tanım 2.7: Σ_k sistemi, eğer $V(0) = 0$ özelliğini sağlayan depo fonksiyonu V ile, katkı fonksiyonu $s(y(k), u(k)) = y^T(k)u(k)$ 'e göre kayıplı ise yani eğer ,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq y^T(k)u(k), \quad \forall u(k) \in \mathfrak{R}^m \text{ ve } \forall k \quad (2.8)$$

koşulunu sağlayan $V(0) = 0$ özelliğinde pozitif bir $V : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ fonksiyonu varsa, *pasiftir* denir (Byrnes ve Lin, 1994). $\square$

Eşitsizlik (2.8)'in,

$$V(x(k+1)) - V(x(0)) \leq \sum_{i=0}^k y(i)^T u(i), \quad \forall u(k), \forall x(0) \text{ ve } \forall k \quad (2.9)$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğu gösterilmiştir (Byrnes ve Lin, 1994).

Tanım 2.8: Pasif bir Σ_k sisteminin depo fonksiyonu $V(x)$,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < y^T(k)u(k), \quad \forall u(k), k \in \mathbb{Z}_+ \quad (2.10)$$

eşitsizliğini, $x(k)$ sıfıra eşit olmadığı sürece sağlıyorsa, Σ_k sistemi *kesin pasiftir* denir, ya da eşdeğer olarak,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq y^T(k)u(k) - S(x(k)), \quad \forall u(k) \text{ ve } \forall k \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir kesin pozitif $S : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ varsa Σ_k *kesin pasiftir* denir (Byrnes ve Lin, 1994). $\square$

Tanım 2.9: Pasif bir Σ_k sisteminin depo fonksiyonu $V(x)$,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = y^T(k)u(k) \quad \forall u(k) \text{ ve } \forall k \quad (2.12)$$

ilişkisini sağlıyorsa sistem *kayıpsızdır* (lossless) denir (Byrnes ve Lin, 1994). $\square$

Depo fonksiyonu V olan bir Σ_k sistemi, ancak ve ancak,

$$V(x(k+1)) - V(x(0)) = \sum_{i=0}^k y^T(i)u(i), \quad \forall u \in \mathfrak{R}^m, \forall x(0) \text{ ve } \forall k \quad (2.13)$$

ise kayıpsız olacaktır (Byrnes ve Lin, 1994).

Ayrık zamanlı doğrusal olmayan bir sistemin Σ_k sisteminin sonlu bir L_2 kazancına sahip olmasına ilişkin tanım aşağıda verilmiştir

Tanım 2.10 : Belirli bir $\gamma \in \mathbb{R}^+$ verilmiş olsun. Denklemleri (2.5)'de verilen ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemin Σ_k - çıkış yörüngeleri, eğer $\forall N \in \mathbb{Z}_+$ ve $\forall u_k \in L_2[0, N]$ için,

$$\sum_{k=0}^N \|y_k\|^2 \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N \|u_k\|^2 \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, giriş u_k 'dan çıkış y_k 'ya sistemin L_2 kazancı γ 'dan küçük ya da eşittir denir (Lin ve Byrnes, 1994; Lin ve Byrnes, 1995c; Lin ve Byrnes, 1996).

□

Ayrık zamanlı bir sistemin L_2 kazancı ile sistemin $\frac{1}{2}(\gamma^2 \|y_k\|^2 - \|u_k\|^2)$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı olma özelliği arasındaki ilişki Sınırlı Reel Lemma ile verilir.

Lemma 2.1 (Sınırlı Reel Lemma) :

Denklemleri (2.5)'da verilen ayrık zamanlı sistemin depo fonksiyonu V olsun ve sistem $x=0$ 'da yerel asimptotik kararlı bir denge noktasına sahip olsun. Sistem

(2.5) - Σ_k -, katkı fonksiyonu $\frac{1}{2}(\gamma^2 \|y_k\|^2 - \|u_k\|^2)$ 'ye göre kayıplı ise, sistemin L_2

kazancı γ 'dan küçük ya da eşittir. Tersine, eğer sistem $x=0$ ' dan erişilebilir ve sistemin L_2 kazancı, γ 'dan küçük ya da eşit ise sistem katkı fonksiyonu

$\frac{1}{2}(\gamma^2 \|u_k\|^2 - \|y_k\|^2)$ 'ye göre kayıplıdır (Lin ve Byrnes, 1994; Lin ve Byrnes, 1995c;

Lin ve Byrnes, 1996). □

Tanım 2.11: $x_{k+1} = f(x_k)$, $y_k = h(x_k)$ biçiminde verilen bir doğrusal olmayan sistem için,

$$y_k = h(x_k) = h(f^k(x)) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x = 0 \quad (2.15)$$

ilişkisi sağlanıyorsa *sıfır durum sezilebilirdir (zero-state detectable)* denir (Lin ve Byrnes, 1995c; Lin ve Byrnes, 1996). □

2.2 Hamiltonian Sistemler

Dış kuvvetlerin etkisinde olmayan, kayıpsız (enerji korunumlu) toplu parametrelili bir sistem için genelleştirilmiş koordinatlarda tanımlanmış Hamiltonian sistem, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\end{aligned}\quad (2.16)$$

biçimindedir (Van der Schaft, 2000). Burada, $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n)^T$ genelleştirilmiş konumlar ve $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^T(\mathbf{q}) > 0$ genelleştirilmiş eylemsizlik matrisi olmak üzere, $\mathbf{p} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ genelleştirilmiş momentumlardır. Açık ifadesi aşağıda verilen, $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ise sisteminin toplam enerji fonksiyonudur.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{P}(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{P}(\mathbf{q})\end{aligned}\quad (2.17)$$

Burada, $\mathcal{P}(\mathbf{q})$ sistemin potansiyel enerjisidir.

Hamiltonian sistemin (2.16) denklemleri matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \end{bmatrix}\quad (2.18)$$

elde edilir.

Sistem (2.18)'e, giriş ve çıkış değişkenleri eklenerek, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ giriş, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ çıkış ve $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ kuvvet girişi matrisi (input force matrix) - kapı matrisi - olmak üzere,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} &= \mathbf{J} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}^T(\mathbf{q}) \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\end{aligned}\quad (2.19)$$

biçiminde elde edilen sistem, *kapı-kontrollü Hamiltonian sistem* (port-controlled Hamiltonian (PCH) system) olarak adlandırılır (Van der Schaft, 2000). $G(q)u$ terimi, u girişi sonucunda sisteme uygulanan genelleştirilmiş dış kuvvetleri temsil etmektedir. J matrisi, (2.20)'de verilen standart *ters-simetrik* (*skew-symmetric*) matristir.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$\nabla_{(\bullet)} \mathcal{H}$, enerji fonksiyonu $\mathcal{H}(q, p)$ 'nın $(\bullet)$ değişkenlerine göre gradyan vektörünü göstermektedir.

Kayıplı bir sisteme ilişkin kapı kontrollü Hamiltonian sistem ise,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q, p)) \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}(q, p) \\ \nabla_p \mathcal{H}(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (2.21)$$

$$y(t) = G^T(q) \nabla_p \mathcal{H}(q, p)$$

biçiminde verilir. Burada, $R(q, p) = R^T(q, p) \geq 0$ özelliğindedir ve sistemin kayıp yapısını temsil etmektedir.

Genelleştirilmiş koordinatlarda tanımlanmış, (2.19-2.20)'da verilen Hamiltonian sistem, yerel koordinatlar kullanılarak daha genel bir biçime getirilebilir. Bu genelleştirme, $x = (x_1, \dots, x_n)$, n boyutlu durum uzayı X 'de yerel koordinatlar, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ giriş ve $y(t) \in \mathbb{R}^m$ çıkış vektörleri ve $G(x)$ kuvvet girişi matrisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(x) \nabla \mathcal{H}(x) + G(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y &= G^T(x) \nabla \mathcal{H}(x), \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (2.22)$$

biçimindedir. Burada $J(x)$, $n \times n$ boyutlu,

$$J(x) = -J^T(x) \quad (2.23)$$

özelliğinde ters-simetrik bir matrisdir. $J(x)$ iç bağlantı matrisi olarak adlandırılır ve $\mathcal{H}(x)$, sistemin toplam enerjisini göstermek üzere, sistemin Hamiltonian fonksiyonudur (Van der Schaft, 2000).

Kayıplı bir sisteme ilişkin kapı kontrollü Hamiltonian sistem ise, $R(x) = R^T(x) \geq 0$ sistemin kayıp yapısı olmak üzere, yerel koordinatlarda,

$$\begin{aligned} \frac{d x(t)}{d t} &= [J(x) - R(x)] \nabla \mathcal{H}(x) + G(x) u(t) \\ y(t) &= G^T(x) \nabla \mathcal{H}(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

biçiminde verilir (Van der Schaft, 2000).

2.2.1 Ayırık Hamiltonian sistemler

Ayrık Hamiltonian sistemler, *simplektik fark sistemleri* (simplectic difference systems) veya *ayırık simplektik sistemler* (discrete-simplektik sistemler) başlığı altında incelenirler. Bu sistemler aşağıdaki gibi tanımlanır (Bohner, 1996; Hilscher ve Zeidan, 2003).

Tanım 2.12: $(2n \times 2n)$ boyutlu simplektik fark sistemi;

$$z(k+1) = S_k z(k), \quad k \in I \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır, burada S_k simplektik bir matristir yani tüm k değerleri için,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

şeklinde $J = -J^T$ özelliğinde bir matris olmak üzere,

$$S_k^T J S_k = J \quad \text{ya da eşdeğer olarak} \quad S_k J S_k^T = J \quad (2.27)$$

ilişkisini sağlar. $\square$

Simplektik sistemlerin özelliklerine ilişkin bilgiler için Ahlbrandt ve Peterson, (1996) kaynağına başvurulabilir. Bazı önemli özellikleri şunlardır; her S simplektik matrisinin $S^{-1} = J S^T J^T$ biçiminde bir tersi vardır ve ayrıca, S^T ile S^{-1} matrisleri de simplektik matrislerdir.

3. HAMILTONIAN SİSTEMLERİN AYRIK ZAMANLI MODELİ

3.1 Giriş

Bu bölümde, Hamiltonian sistemlerin ayrik zamanlı modellenmesi problemi ele alınmış, sistemin sürekli modellenin bilindiği varsayımı altında doğrudan sayısal kontrol tasarım yöntemleri geliştirilmeye elverişli gradyan temelli bir ayrik zamanlı modelleme yöntemi verilmiş, bu yöntemde kullanılan ayrik-gradyan ifadeleri için üç farklı öneri yapılmış, bu ayrik-gradyanlar kullanılarak elde edilen modeller sunulmuştur.

Hamiltonian sistem yapısının belirleyici özellikleri enerji korunumlu ve simplektik olmasıdır (Shibberu, 1997; Marsden, 1992; Meyer ve Glen, 1992; Ahlbrandt ve Peterson, 1996; Bohner, 1996; Hilscher ve Zeidan, 2003). İdeal olarak bir *sürekli Hamiltonian sistemin* ayrik zamanlı modellenin de bu özellikleri taşıyor olması beklenir. Bu tezin Giriş bölümünde söz edildiği gibi matematik literatürde çeşitli amaçlar için ayrik zamanlı Hamiltonian sistemler konusu ele alınmıştır. Hamiltonian yapısının değişmezleri olan simplektik ve enerji korunumlu olma özelliğinin aynı anda sağlanmasının güçlüğü ve var olan sayısal entegrasyon yöntemlerinin yetersiz kalması nedeni ile çalışmaların önemli bir bölümü Hamiltonian sistemlerin sayısal entegrasyona ilişkindir. Ancak, bu modellerin çoğu ayrik zamanlı kontrolör tasarımında kullanılamayacak kadar karmaşıktır. Bu nedenle bu çalışmada öncelikle Hamiltonian sistemler için ayrik zamanlı kontrol kuralları geliştirmeye elverişli ayrik zamanlı model elde etme sorunu ele alınmıştır.

Öte yandan, kontrol literatüründe, Hamiltonian sistemler için ayrik zamanlı bir model kullanan sınırlı sayıda çalışma Laila ve Astolfi (2005a), Laila ve Astolfi (2006a), Laila ve Astolfi (2006b) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda, sistemin ayrik modelini elde etmek için türev öpetarörünün ayrik karşılığı olarak Euler yöntemi kullanılmıştır. Laila ve Astolfi (2006a), Laila ve Astolfi (2006b), tarafından da değinildiği gibi bu yöntem, sürekli sisteme ilişkin diferansiyel denklem yapısını koruyan, basit ancak çok yaklaşık bir modeldir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen

ayrık zamanlı model, Hamiltonian sistemlerin değişmezleri olan, *enerji korunumlu* olma ve *simplektik* olma özelliklerini taşımaktan uzaktır. Örneğin, ileri Euler yöntemi orjinal faz uzayı hacmini önemli ölçüde artırırken, geri Euler yöntemi bu hacmi önemli ölçüde azaltmaktadır yani ayrıklaştırma sistemin simplektik olma özelliğini bozmaktadır (Ascher, 2006).

Bu tez çalışmasında önerilen yöntemde ise türev operatörü için *ileri Euler* ayrıklaştırması seçilmekle birlikte, gradyan terimi için de ayrık-gradyan kavramı kullanılmıştır. Bu kapsamda, değişik ayrık zamanlı modeller önerebilmek için, üç farklı yeni ayrık-gradyan önerisi yapılmıştır. Ayrıca, bazı koşullar altında bu çalışmada önerilen yöntemle elde edilen modellerin *simplektik fark sistemi* (*symplectic difference system*) tanımladığı ve enerji korunumlu olma özelliğini taşıdığı gösterilmiştir. Önerilen yöntem kayıplı ve kayıpsız çeşitli iyi-bilinen Hamiltonian sistemlere uygulanarak, burada sunulmuş olan her yeni ayrık-gradyan için ayrık zamanlı modeller elde edilmiş, benzetim yoluyla sınanmış ve benzetim sonuçları karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

3.2. Ayrık Zamanlı Modelleme Yöntemi

Aşağıdaki sürekli-zamanlı Hamiltonian sistem ele alınsın,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

burada $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ durum değişkenleri vektörü ve $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \geq 0$ özelliğinde matrisler olsunlar. Bu ifadede, $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x})$ vektörü skaler fonksiyon $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ 'in $\mathbf{x}$ 'e göre gradyan vektörünü temsil etmektedir.

Sistem (3.1)'e ilişkin gradyan temelli bir ayrık zamanlı model elde etmek için sürekli gradyan vektörü yerine ayrık gradyan vektörü kullanılması düşünüldüğünden genel bir ayrık-gradyan vektörünün sağlaması gereken koşulları belirten Gonzales, (1996b), tarafından yapılmış olan tanım aşağıda alıntılanmıştır.

Tanım 3.1: $\mathcal{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ 'e göre türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\bar{\nabla}H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1))$ sürekli ise ve,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^T H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1)) [\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)] \\ = \mathcal{H}(\mathbf{x}(k+1)) - \mathcal{H}(\mathbf{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\bar{\nabla}H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k)) = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}(k)) \quad (3.3)$$

ilişkilerini sağlıyorsa bir *ayrık-gradyan*dır. Burada,

$$\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) := \text{grad } \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^n} \right]^T, \quad \mathbf{x} = [x^1, \dots, x^n] \quad (3.4)$$

biçiminde bir vektör, yani $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ 'in (sürekli) gradyanıdır $\square$.

Sistem (3.1)'in durum değişkenlerinin türevlerine ileri Euler yöntemi ile,

$$\dot{\mathbf{x}} \cong \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{T} \quad (3.5)$$

yaklaşıklık yapıldığında ve $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x})$ yerine ayrık-gradyan notasyonu $\bar{\nabla}H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k+1))$ kullanıldığında, T örnekleme periyodu olmak üzere, sisteme ilişkin bir ayrık zamanlı model,

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = T [\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)] \bar{\nabla}H \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir.

$\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$ için, eğer $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ 'in ayrık-gradyanı $\bar{\nabla}H$ Tanım 3.1'de verilen ayrık gradyan olma koşullarını tam olarak sağlıyorsa sistem (3.6) enerji korunumlu olma özelliğinde olacak ve sisteme ilişkin iç bağlantı matrisi (2.20)'de verilmiş olan standart *ters-simetrik* (*skew-simetrik*) matris, yani $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{J}$, ise ve kullanılan ayrık gradyan da belirli bir özel yapıya sahipse *simplektik fark sistemi* (*symplectic difference system*) tanımlayacaktır. Bu özellikler aşağıda iki ayrı teorem ile verilmiştir. Önerme 3.1 sistem (3.6)'nın simplektik olma özelliği üzerine olan Teorem 3.1'in ispatında kullanılacaktır.

Önerme 3.1: Bir F matrisi, J (2.20)'de verilen standart ters-simetrik matris ve P bir simetrik matris, yani $P = P^T$, olmak üzere,

$$F = [I - JP]^{-1} [I + JP] \quad (3.7)$$

biçiminde yazılabiliyorsa, bir *simplektik* matristir.

İspat: F matrisinin (2.27)'de verilen $F J F^T = J$ ilişkisini sağladığı kolayca gösterilebilir. Şöyle ki;

$$[I + JP] J [I - PJ] = J - JPJPJ = [I - JP] J [I + PJ] \quad (3.8)$$

olduğuna göre,

$$F J F^T = [I - JP]^{-1} [I + JP] J [I + JP]^T [I - JP]^{-T} = J \quad (3.9)$$

ilişkisinin doğruluğu, bu ifadenin aşağıdaki gibi yeniden düzenlenmesi,

$$\begin{aligned} [I - JP]^{-1} [I + JP] J [I - PJ] [I + PJ]^{-1} &= J \\ [I + JP] J [I - PJ] &= [I - JP] J [I + PJ] \end{aligned}$$

ve ifade (3.8) ile birlikte gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 3.1: $\dot{x} = J \nabla \mathcal{H}(x)$ Hamiltonian sistemi ele alınsın. $\mathcal{H}(x)$ 'in ayrık-gradyanı, Φ_k simetrik bir matris olmak üzere,

$$\bar{\nabla} H(x) = \Phi_k [x_{k+1} + x_k] \quad (3.10)$$

yapısında ise, Hamiltonian sistemin ayrık zamanlı modeli,

$$F_k = [I - TJ\Phi_k]^{-1} [I + TJ\Phi_k] \quad (3.11a)$$

olmak üzere,

$$x_{k+1} = F_k x_k \quad (3.11b)$$

biçiminde elde edilir ve bu ayrık sistem bir *simplektik fark sistemi* tanımlar. Burada T örnekleme periyodudur.

İspat: (3.10)'de verilen ayrık gradyan, (3.6)'de verilen ayrık zamanlı modelde yerine konulduğunda $R(x_k) = 0$ için aşağıdaki ifade kolayca yazılır.

$$x_{k+1} = T J \Phi_k [x_{k+1} + x_k] + x_k \quad (3.12)$$

Yukarıdaki ifadededen, bir kaç cebrik işlemten sonra (3.11) fark denklemi elde edilir. Bu sonuç sistem (3.2)'nin simplektik fark sistemi tanımladığını, Önerme 3.1 ile beraber kanıtlar. $\square$

Aşağıda verilen teorem ise, $R(x_k)=0$ için (3.6)'de verilen ayrık zamanlı modelin enerji korunumlu olma özelliği üzerinedir.

Teorem 3.2: $\dot{x} = J(x)\nabla\mathcal{H}(x)$ Hamiltonian sistemi ele alınsın ve $\mathcal{H}(x)$ enerji fonksiyonun ayrık-gradyanı $\bar{\nabla}H$ 'in, Tanım 3.1'de verilen koşulları *tam* olarak sağladığı kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki ayrık zamanlı sistem enerji korunumludur.

$$x_{k+1} - x_k = T J(x_k) \bar{\nabla}H \quad (3.13)$$

Burada T örnekleme peryodudur.

İspat: Eşitlik (3.13) soldan $\bar{\nabla}^T H$ ile çarpılırsa,

$$\bar{\nabla}^T H [x_{k+1} - x_k] = T \bar{\nabla}^T H J(x_k) \bar{\nabla}H \quad (3.14)$$

elde edilir ve Tanım 3.1'in ilk koşulu kullanılarak,

$$\frac{\mathcal{H}(x_{k+1}) - \mathcal{H}(x_k)}{T} = \bar{\nabla}^T H J(x_k) \bar{\nabla}H = 0 \quad (3.15)$$

ilişkisi elde edilir, $J(x_k)$ matrisinin ters-simetrik olması savı kanıtlar. $\square$

Teorem 3.1 ve Teorem 3.2'den aşağıdaki sonuç doğrudan elde edilir.

Sonuç 3.1: Bu çalışmada önerilen yöntemle elde edilen ayrık zamanlı model, sürekli sisteme ilişkin yapı matrisi (2.20)'de verilmiş olan standart *ters-simetrik matris* - $J(x_k) = J$ - ise ve $\mathcal{H}(x)$ enerji fonksiyonun ayrık gradyanı (3.10)'de verilen yapıda ise *simplektik fark sistemi* tanımlayacaktır. Aynı zamanda, $\mathcal{H}(x)$ fonksiyonun ayrık gradyanı Tanım 3.1'de verilen koşulları sağladığı sürece elde edilen ayrık zamanlı model her zaman enerji korunumlu olacaktır. $\square$

Sönümlü - (3.6)'da $R(x_k) \neq 0$ olması durumu - Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı modellerinin (3.10)'da verilen yapıda bir ayrık gradyan tanımı kullanılarak bu çalışmada geliştirilen yöntem ile,

$$\mathbf{x}_{k+1} = [\mathbf{I} - \mathbf{T}(\mathbf{J}_k - \mathbf{R}_k)\Phi_k]^{-1} [\mathbf{I} + \mathbf{T}(\mathbf{J}_k - \mathbf{R}_k)\Phi_k] \mathbf{x}_k \quad (3.16)$$

biçiminde elde edilebileceği de kolayca görülebilir. Bu ifadedeki $\mathbf{J}_k = \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ ve $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ 'dir.

Birazdan, $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$ - (3.11) - ya da $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0}$ - (3.16) - için verilen yapıda ayrık zamanlı modellerin türetilmesi sağlayan (3.10)'deki yapıya sahip iki farklı yeni ayrık-gradyan önerisi yapılacaktır. Bu ayrık-gradyan ifadelerinin, sadece sürekli gradyanı $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ biçiminde yazılabilen enerji fonksiyonları için kullanılabileceğini vurgulamak yerinde olur.

Ortalama Değer Teoremi (Mean value theorem)'den (Thomas ve Finney, 1998) ve Tanım 3.1'de verilen ayrık-gradyan koşullarının ilkinden esinlenerek (3.10)'daki yapıya sahip, kontrolör tasarımına uygun bir ayrık zamanlı model veren, birbirinden çok az farklı iki ayrık-gradyan ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.2: $\mathcal{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ 'e göre türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve gradyanı $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ biçiminde yazılabilir olsun. $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonun ayrık gradyanı $\bar{\nabla} \mathcal{H}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ olarak,

$$\bar{\nabla} \mathcal{H}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \Phi_k [\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k] \quad (3.17)$$

şeklinde tanımlansın, bu ifadede,

$$\Phi_k = \frac{1}{4} [\mathbf{Q}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}_k)] \quad (3.18)$$

biçimindedir. $\square$

Tanım 3.3: $\mathcal{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ 'e göre türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve gradyanı $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ biçiminde yazılabilir olsun, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonun ayrık gradyanı $\bar{\nabla} \mathcal{H}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ olarak,

$$\bar{\nabla} \mathcal{H}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \Phi_k [\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k] \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlansın, bu ifadede,

$$\Phi_k = \frac{1}{2} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \Big|_{\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}} \quad (3.20)$$

biçimindedir. $\square$

Tanım 3.3’de verilen ayrık-gradyan, *orta nokta* (middpoint) kavramına dayanan Gonzalez (1996b) tarafından sunulan ayrık-gradyandan biraz farklıdır.

Bu iki ayrık-gradyanın Tanım 3.1’de verilen ayrık-gradyan koşullarını sağlayıp sağlamadığını belirlemek amacıyla aşağıdaki incelemeyi yapmak yararlı olacaktır.

$Z(x) = Z^T(x)$ ve $Q(x) = Q^T(x)$ olmak üzere enerji fonksiyonu $\mathcal{H}(x)$ ve gradyanı $\nabla \mathcal{H}(x)$ aşağıdaki biçimde tanımlanmış fonksiyonlar olsun.

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} x^T Z(x) x, \quad \nabla \mathcal{H}(x) = Q(x) x \quad (3.21)$$

Bu durumda, enerji fonksiyonunun zamana göre türevi,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \dot{x}^T \Delta \mathcal{H} = \dot{x}^T Q(x) x \quad (3.22)$$

biçiminde yazılabilir. Enerji fonksiyonunun, yörünge üzerindeki iki ayrı noktada aldığı değerler arasındaki fark ise aşağıda gösterildiği gibi iki ayrı biçimde yazılabilir;

$$\mathcal{H}(x_2) - \mathcal{H}(x_1) = \frac{1}{2} x_2^T Z(x_2) x_2 - \frac{1}{2} x_1^T Z(x_1) x_1 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_2) - \mathcal{H}(x_1) &= (x_2^T - x_1^T) \hat{Q}(x_1, x_2) (x_2 + x_1) / 2 \\ &= \frac{1}{2} x_2^T \hat{Q}(x_1, x_2) x_2 - \frac{1}{2} x_1^T \hat{Q}(x_1, x_2) x_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Birinci ilişkinin doğrudan enerji fonksiyonu ifadesi kullanılarak, diğerinin ise (3.22)’den hareketle enerji fonksiyonunun gradyanından yararlanılarak elde edildiği kolaylıkla görülebilir. İkinci ilişkinin doğruluğu x_1, x_2 noktalarının birbirine yakınlığı ve $\hat{Q}(x_1, x_2)$ matris değerli fonksiyonun uygun seçimi ile ilişkilidir. Ancak, sonsuz küçük farklar için iki ilişki birbirine eşdeğerdir.

Şimdi, (3.10) yapısına sahip herhangi bir ayrık-gradyan için Tanım 3.1’de verilen (3.2) koşulunun sol tarafını yazalım.

$$[x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H(x_{k+1}, x_k) = [x_{k+1}^T - x_k^T] \Phi_k [x_{k+1} + x_k] \quad (3.25)$$

Bu ifadede,

$$\Phi_k = \frac{1}{2} \hat{Q}_k(x_{k+1}, x_k) \quad (3.26)$$

notasyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H(x_{k+1}, x_k) &= [x_{k+1}^T - x_k^T] \hat{Q}(x_{k+1}, x_k) \left[\frac{x_{k+1} + x_k}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} x_{k+1}^T \hat{Q}(x_{k+1}, x_k) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T \hat{Q}(x_{k+1}, x_k) x_k \\ &= \mathcal{H}(x_{k+1}) - \mathcal{H}(x_k) \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir. Bu ilişkinin doğruluğu, (3.24) eşitliği göz önüne alındığında seçilen $\hat{Q}_k(x_k, x_{k+1})$ matrisine bağlıdır.

Yukarıdaki incelemeden, Tanım 3.2 ve Tanım 3.3’de verilen ayrık gradyanların (3.2) koşulunu sağlama durumlarına ilişkin bir öngörü yapılabilir. Bu konuyla ilgili daha ayrıntılı sonuçlar ise, (3.3) koşulunun her zaman sağlandığını gösteren sonuçlarla birlikte, şimdi sunulacak olan Önerme 3.2 ve Önerme 3.3’de yer almaktadır.

Önerme 3.2: Özellikleri (3.21)’de verilen enerji fonksiyonunu ele alalım. Tanım 3.2’de (3.17) ve (3.18) ilişkileri ile verilen ayrık-gradyan, Tanım 3.1’de verilen koşulları $Z(x) = Z$ özel durumu için tam sağlar, genel durumda ise ilk koşulu sağlamaz.

İspat: (3.2) koşulunun sağ tarafı, yani ardışık k anlarında enerji fonksiyonun aldığı değerler arasındaki fark,

$$\mathcal{H}(x_{k+1}) - \mathcal{H}(x_k) = \frac{1}{2} x_{k+1}^T Z(x_{k+1}) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T Z(x_k) x_k \quad (3.28)$$

biçiminde yazılabilir. (3.2) koşulunun sol tarafı ise Tanım 3.2’de verilen ayrık-gradyan kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H(x_{k+1}, x_k) &= \frac{1}{4} x_{k+1}^T [Q(x_{k+1}) + Q(x_k)] x_{k+1} - \\ &\quad - \frac{1}{4} x_k^T [Q(x_{k+1}) + Q(x_k)] x_k \end{aligned} \quad (3.29)$$

biçiminde elde edilecektir. Burada,

$$\nabla \mathcal{H} = Q(x)x = Z(x)x + \begin{bmatrix} x^T \frac{\partial Z(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ x^T \frac{\partial Z(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} x = Z(x)x + S(x)x$$

ilişkisi göz önüne alınarak (3.29)'da $Q(x)$ için,

$$Q(x) = Z(x) + S(x) \quad (3.30)$$

yazılır ve (3.29) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} [x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{4} x_{k+1}^T (Z(x_{k+1}) + S(x_{k+1}) + Z(x_k) + S(x_k)) x_{k+1} - \\ &\quad - \frac{1}{4} x_k^T (Z(x_{k+1}) + S(x_{k+1}) + Z(x_k) + S(x_k)) x_k \\ &= \frac{1}{4} x_{k+1}^T (Z(x_{k+1}) + Z(x_k)) x_{k+1} - \frac{1}{4} x_k^T (Z(x_{k+1}) + Z(x_k)) x_k \\ &\quad + \frac{1}{4} x_{k+1}^T (S(x_{k+1}) + S(x_k)) x_{k+1} - \frac{1}{4} x_k^T (S(x_{k+1}) + S(x_k)) x_k \\ [x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{2} x_{k+1}^T \left(\frac{Z(x_{k+1}) + Z(x_k)}{2} \right) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T \left(\frac{Z(x_{k+1}) + Z(x_k)}{2} \right) x_k \\ &\quad + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} x_{k+1}^T (S(x_{k+1}) + S(x_k)) x_{k+1} - \frac{1}{4} x_k^T (S(x_{k+1}) + S(x_k)) x_k \quad (3.32)$$

fark ifadesidir. İlişki (3.31), aşağıdaki gibi yeni bir düzenleme ile,

$$\begin{aligned} [x_{k+1}^T - x_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{2} x_{k+1}^T Z(x_{k+1}) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T Z(x_k) x_k - \\ &\quad - \frac{1}{4} x_{k+1}^T (Z(x_{k+1}) - Z(x_k)) x_{k+1} - \\ &\quad - \frac{1}{4} x_k^T (Z(x_{k+1}) - Z(x_k)) x_k + \varepsilon_1 \\ &= \frac{1}{2} x_{k+1}^T Z(x_{k+1}) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T Z(x_k) x_k + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &= \frac{1}{2} x_{k+1}^T Z(x_{k+1}) x_{k+1} - \frac{1}{2} x_k^T Z(x_k) x_k + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.33)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \mathbf{x}_{k+1}^T (\mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{x}_{k+1} + \frac{1}{4} \mathbf{x}_k^T (\mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k)) \mathbf{x}_k \quad (3.34)$$

olmak üzere $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ biçiminde tanımlanmıştır. (3.33) ifadesi ile (3.28) enerji ifadesi arasında ε kadar fark olduğu açıkça görülmektedir. $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$ özel durumu için $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 = 0$ olacağı hemen söylenebilir. Yani bu durumda (3.2) koşulu tam olarak sağlanmaktadır. Öte yandan, genel durumda (3.2) koşulunun sağlanmadığı görülmektedir. Tanım 3.1'de verilen ayrık-gradyan olma koşullarından ikincisinin sağlandığına ilişkin doğrulama şu biçimde verilebilir. Tanım 3.1'in ikinci koşulu, (3.3) ifadesinin sol tarafı, (3.17) ve (3.18) ile verilen ayrık-gradyan için yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k)) &= \Phi_k [\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k] = \frac{[Q(\mathbf{x}_k) + Q(\mathbf{x}_{k+1})]}{2} \left[\frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k+1}}{2} \right] = \\ &= Q(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k = Q(\mathbf{x}) \mathbf{x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

şeklinde doğrulanmış olur. $\square$

Önerme 3.3: Özellikleri (3.21)'de verilen enerji fonksiyonunu ele alalım. Tanım 3.3'de (3.19) ve (3.20) ilişkileri ile verilen ayrık-gradyan tanımı Tanım 3.1'de verilen koşulları $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$ özel durumu için tam sağlar, genel durumda ise ilk koşulu sağlamaz.

İspat: Önerme 3.2'in ispatına benzer biçimde (3.2) koşulunun sol tarafında Tanım 3.3'de verilen ayrık-gradyan kullanılırsa,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^T - \mathbf{x}_k^T] \bar{\nabla} H(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T Q\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_{k+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T Q\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

ve bu ifadede $Q(\mathbf{x})$ için (3.30) ilişkisi yazılırsa,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^T - \mathbf{x}_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \left(\mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \right) \mathbf{x}_{k+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \left(\mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) + \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \right) \mathbf{x}_k \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_k \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^T - \mathbf{x}_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \left(\mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \right) \mathbf{x}_{k+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \left(\mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k) \right) \mathbf{x}_k + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

yazılabilir. Burada,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{S}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \mathbf{x}_k \quad (3.36)$$

terimlerine karşı düşmektedir. (3.35) ilişkisi,

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \left(\mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) \right) \mathbf{x}_{k+1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \left(\mathbf{Z}\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}\right) - \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k) \right) \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (3.37)$$

tanımlaması ile,

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}_{k+1}^T - \mathbf{x}_k^T] \bar{\nabla} H &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1}^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_{k+1}) \mathbf{x}_{k+1} + \frac{1}{2} \mathbf{x}_k^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k + \varepsilon \end{aligned} \quad (3.38)$$

biçiminde yazılabilir. Bu noktada, (3.38) ifadesinde Önerme 3.2'nin ispatında verilmiş olan (3.28) gerçek enerji farkından $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ kadar sapma olduğu görülmektedir. $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$ özel durumu için $\varepsilon_1 = 0$ ve $\varepsilon_2 = 0$ olacağı doğrudan söylenebilir. Öyleyse, bu durumda (3.2) koşulu tam olarak sağlanmaktadır. Ancak, genel durumda (3.2) koşulu sağlanmaz. Yine Önerme 3.2'dekine benzer biçimde ayrık-gradyan ikinci koşulunun sağlandığına ilişkin doğrulama aşağıdaki gibi verilebilir. Tanım 3.1'de verilen (3.3) ikinci koşulu (3.19) ve (3.20) ile verilen ayrık-gradyan için yazılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} H(\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k)) &= \Phi_k [\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k] = Q\left(\frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k}{2}\right) \left[\frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_k}{2} \right] = \\ &= Q(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k = Q(\mathbf{x}) \mathbf{x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k} = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

şeklinde bu koşulun sağlandığı doğrulanmış olur. $\square$

Sonuç 3.2: Sisteme ilişkin enerji fonksiyonu $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ ve özel olarak $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$, yani bir $n \times n$ sabit matris, olduğunda Tanım 3.2 ve Tanım 3.3’de verilen ayrık-gradyanlar Tanım 3.1’de verilen her iki ayrık-gradyan koşulunu da sağlar. Bu durum karesel potansiyel enerjili *seperable* mekanik sistemlere karşı düşmektedir. Öte yandan, genel olarak, bu ayrık-gradyanlar Tanım 3.1 de verilen ilk koşulu sağlamamaktadır. Bunun için, bu tanımları kullanarak elde edilen modeller genel durum için enerji korunumlu olmamaktadırlar ancak söz konusu enerji sapması örnekleme periyodu küçüldükçe giderek azalacaktır. $\square$

Yukarıda tanımlanan ve özellikleri incelenen iki ayrık-gradyan önerisinin temel eksikliği, enerji fonksiyonunun ve/veya gradyanın özel yapıda olması zorunluluğu olarak özetlenebilir. Sürekli olan -ki bu enerji fonksiyonlarının genel bir özelliğidir- tüm enerji fonksiyonları için kullanılabilecek bir ayrık-gradyan ifadesi elde edebilmek amacıyla aşağıda Karesel Yaklaşıklık Lemması (Quadratic Approximation Lemma, QAL) verilmiştir.

Lemma 3.1 (Karesel yaklaşıklık):

$\mathbf{z}^r$ noktasında sisteme ilişkin gradyan $\nabla f(\mathbf{z}^r)$ olmak üzere,

$$f(\mathbf{z}^1) - f(\mathbf{z}^0) = \frac{1}{2} \left[\nabla f(\mathbf{z}^1) + \nabla f(\mathbf{z}^0) \right]^T (\mathbf{z}^1 - \mathbf{z}^0) \quad (3.39)$$

ilişkisinin sağlanmasının gerek ve yeter koşulu $f(\mathbf{z})$ ’in,

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{z} + \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z}, \quad \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad (3.40)$$

biçiminde bir karesel fonksiyon olmasıdır (Diewert,1976). $\square$

Tanım 3.1’in ilk koşulu, yani (3.2), ile Karesel Yaklaşıklık Lemması’ndaki (3.39) ilişkisi arasındaki eşdeğerlikten yola çıkarak, eğer enerji fonksiyonu $\mathcal{H}(\mathbf{x})$, (3.40)’deki genel karesel yapıya sahipse, bu enerji fonksiyonu için Tanım 3.1’in ilk koşulunu tam olarak sağlayan bir ayrık-gradyanın var olduğu söylenebilir. Bu durumda ayrık-gradyan ifadesi elde etmek için, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ yerine $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x})$ ’in ikinci dereceden Taylor seri açılımı kullanmak uygun olacaktır. $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x})$ fonksiyonu

$\mathcal{H}(\mathbf{x})$ 'in ikinci dereceden Taylor seri açılımı ile edilen yaklaşıklığı olmak üzere, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ in ayrık-gradyanı,

$$\bar{\nabla}H = \frac{1}{2} \left[\nabla \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_{k+1}) + \nabla \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}_k) \right] \quad (3.41)$$

şeklinde önerilebilir. Burada $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_k \leq \mathbf{x} < \mathbf{x}_{k+1}$ için, $\mathcal{H}_{Hess}(\mathbf{x})$, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonun Hessian matrisi olmak üzere,

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) + \nabla^T \mathcal{H}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \mathcal{H}_{Hess}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (3.42)$$

ilişkisi ile verilir. Bu analizin bir sonucu olarak aşağıdaki gibi yeni bir ayrık-gradyan ifadesi verilebilir.

Tanım 3.4: $\mathcal{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ 'e göre türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonu için,

$$\bar{\nabla}H(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{Hess}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) \quad (3.43)$$

ifadeleri ile verilen $\bar{\nabla}H(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ fonksiyonu bir ayrık-gradyan olarak tanımlansın.

Burada $\mathcal{H}_{Hess}(\mathbf{x})$, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonun Hessian matrisidir. $\square$

(3.43) ile verilen ayrık-gradyan, (3.3)'de yerine yazıldığında bir kaç cebrik işlem sonunda aşağıdaki ayrık zamanlı model elde edilir.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T \left[I - \frac{T}{2} (\mathbf{J}_k - \mathbf{R}_k) \mathcal{H}_{Hess}(\mathbf{x}_k) \right]^{-1} (\mathbf{J}_k - \mathbf{R}_k) \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) \quad (3.44)$$

Burada $\mathbf{J}_k = \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ ve $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)$ 'dir.

Bu noktada, (3.44)'de verilen ayrık zamanlı modelin enerji fonksiyonun $\tilde{H}(\mathbf{x}_k)$ olduğu ve bu enerjinin $\mathbf{R}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$ için korunacağı, *Karesel yaklaşıklık lemmasından* (Lemma 3.1) doğrudan görülebilir. Ayrıca, (3.44)'de verilen model genel olarak bir simplektik fark sistemi tanımlamasa da, özel olarak $\mathbf{J}(\mathbf{x}_k)$ ters-simetrik matrisi (2.20)'deki standart yapıda olduğu ve enerji fonksiyonun $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$, yani $n \times n$ sabit matris, olmak üzere $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Z}(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ özel yapısına sahip olduğu durum için simplektik fark sistemi tanımladığı kolayca gösterilebilir. Bu bölümde son olarak, önerilen ayrık-gradyanlar kullanılarak elde edilen tüm modellerin başarımları iyi-

bilinen Hamiltonian sistemler için sınanması ve karşılaştırılması yapılacaktır. Bu tez çalışmasında ayrık zamanlı modeller, Hamiltonian sistemler için ayrık zamanlı kontrol algoritmaları geliştirmek amacıyla türetildiği için bu aşamadan sonra kapı kontrollü Hamiltonian sistemler üzerinde çalışılacaktır.

Kapı kontrollü Hamiltonian sistemlere ilişkin ayrık zamanlı modeller, $\bar{\nabla}H(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ herhangi bir ayrık-gradyanı göstermek üzere,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k &= T [J(\mathbf{x}) - R(\mathbf{x})] \bar{\nabla}H(\mathbf{x}) + T G(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}_k &= G^T(\mathbf{x}) \bar{\nabla}H(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (3.45)$$

biçiminde elde edilir.

3.3 Sayısal Deneyler

Bu alt bölüm, tez çalışmasında önerilen yöntemle elde edilen modellerin başarımını sınamak için yapılan benzetimlere ayrılmıştır. Bütünlüğü sağlamak amacıyla, elde edilen modeller topluca aşağıda verilmiştir.

- $\nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}) \mathbf{x}$ varsayımı altında Tanım 3.2 ve Tanım 3.3 kullanılarak elde edilen ilk iki model,

$$\mathbf{x}_{k+1} = [I - T(J_k - R_k)\Phi_k]^{-1} [I + T(J_k - R_k)\Phi_k] \mathbf{x}_k \quad (3.46)$$

ortak biçimindedir. Burada Φ_k sırasıyla,

$$\text{i.} \quad \Phi_k = \frac{1}{4} [Q(\mathbf{x}_{k+1}) + Q(\mathbf{x}_k)]$$

$$\text{ii.} \quad \Phi_k = \frac{1}{2} Q(\mathbf{x}) \Big|_{\frac{\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{x}_k}{2}}$$

- Tanım 3.4 kullanılarak elde edilen model ise aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T \left[I - \frac{T}{2} (J_k - R_k) \mathcal{H}_{\text{Hess}}(\mathbf{x}_k) \right]^{-1} (J_k - R_k) \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}_k) \quad (3.47)$$

Burada $\mathcal{H}_{\text{Hess}}(\mathbf{x})$, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonun Hessian matrisidir. $\square$

Örneklerde ilk iki modelde $\Phi_k = \Phi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \cong \Phi(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$ 'nin hesabında $\mathbf{x}_{k+1}$ için

$$\mathbf{x}_{k+1} \cong \hat{\mathbf{x}}_{k+1} = F(\mathbf{x}_{k-1}) \mathbf{x}_k \quad (3.48)$$

yaklaşıklığı kullanılmıştır.

Örnek 1 (Van der Pol osilatörü):

Bilindiği gibi Van der Pol osilatörünün dinamik denklemleri,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1\end{aligned}\quad (3.49)$$

şeklinde verilir. Sistemin Hamiltonian modeli, enerji fonksiyonu,

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} x^T I_2 x \quad \text{ve sönüm yapısı } R(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu(1 - x_1^2) \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

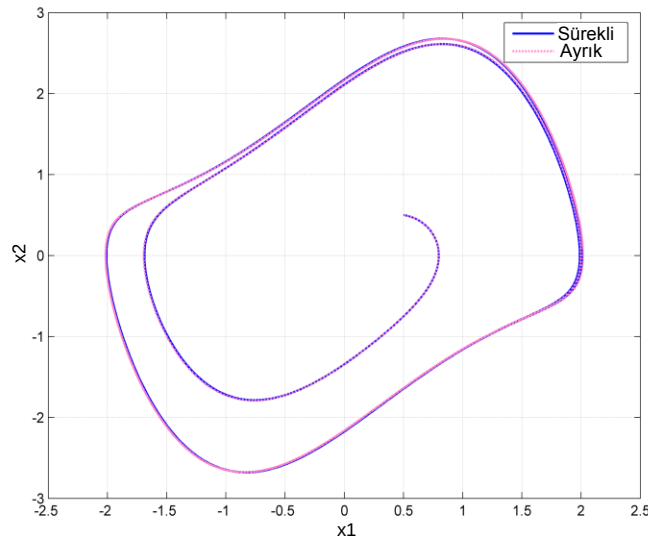
$$\dot{x} = [J - R(x)] \nabla \mathcal{H} \quad (3.50)$$

şeklindedir. Enerji fonksiyonunun gradyanı,

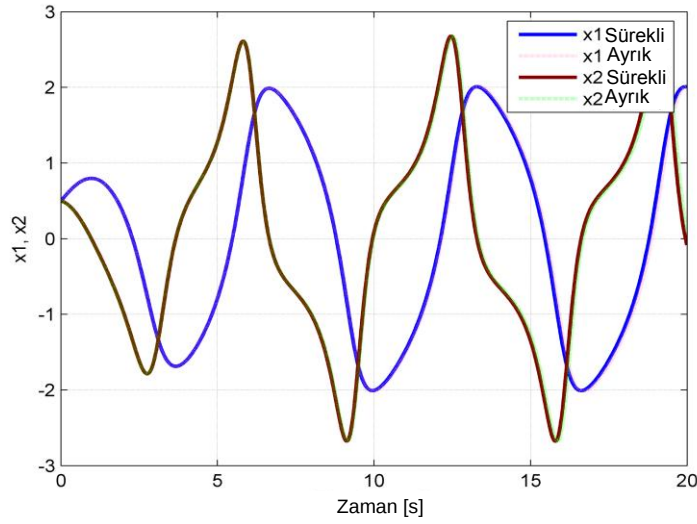
$$\nabla \mathcal{H} = Q(x)x, \quad Q(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

biçiminde yani $Q(x)$ matrisi sabit bir matristir. Bilindiği gibi bu durumda tanımlanan üç ayrık-gradyan birbirine eşdeğer olacağından elde edilen modeller de aynı olacaktır.

Başlangıç koşulu $x_0 = [0.5 \ 0.5]$ ve $T = 0.01$ s örnekleme periyodu ile $\mu = 1$ için elde edilen benzetim sonuçları, faz portresi ve durum değişkenlerinin zamana göre değişimi karşılaştırmalı olarak, sırasıyla Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 'de verilmiştir.



Şekil 3.1 : Van der Pol osilatörünün sürekli ve ayrık faz portresi.



Şekil 3.2 : Van der Pol osilatörünün sürekli ve ayrik değişkenlerinin zamana göre değişimi.

Örnek 2 (Henon-Heiles sistemi):

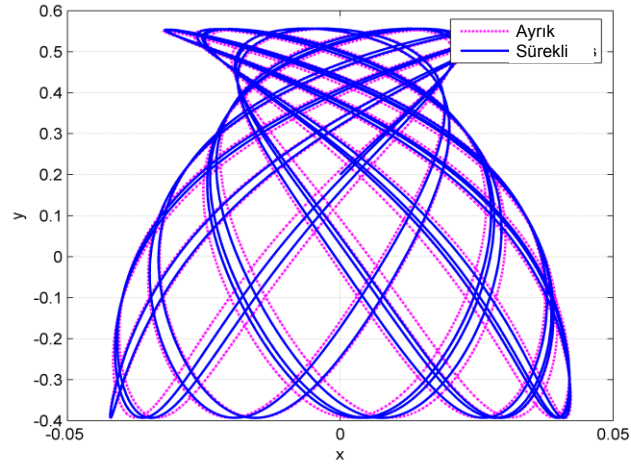
Henon-Heiles sisteminin dinamik denklemleri,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2\end{aligned}\tag{3.52}$$

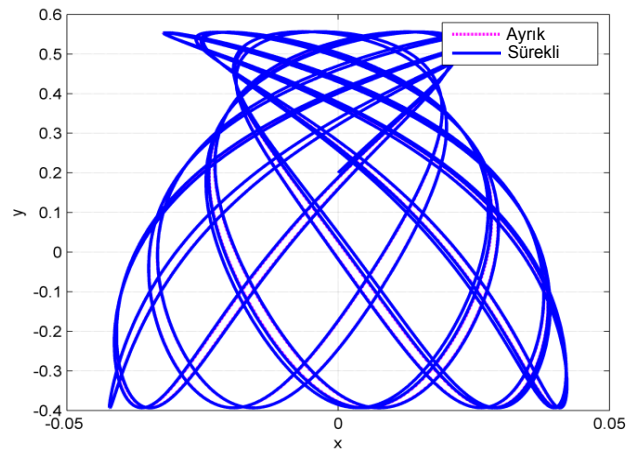
biçimindedir. Bu sisteme ilişkin enerji fonksiyonu ise $p_x = \dot{x}$, $p_y = \dot{y}$ olmak üzere aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \mathcal{P}(x, y), \quad \mathcal{P}(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3\tag{3.53}$$

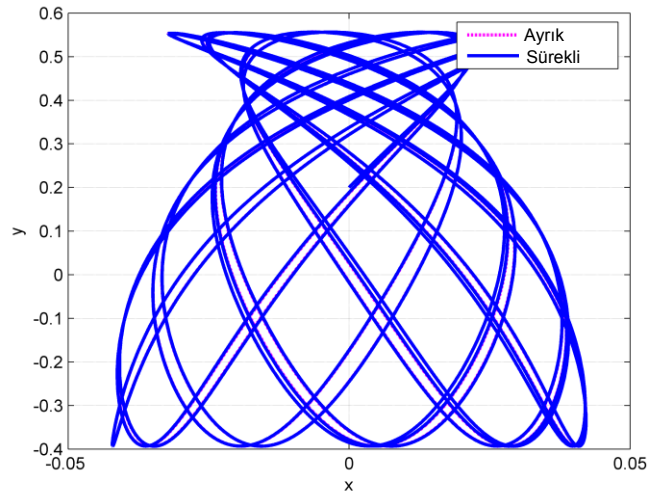
Benzetimler $x_0 = [0.0 \ 0.2 \ 0.03 \ 0.4]$ ilk koşulu, yani enerji seviyesi $\mathcal{H} = 0.0778$, ve $T = 0.002$ s örnekleme periyodu ile yürütülmüştür. Sonuçlar, Şekil 3.3-3.5’de verilmiştir.



(a)

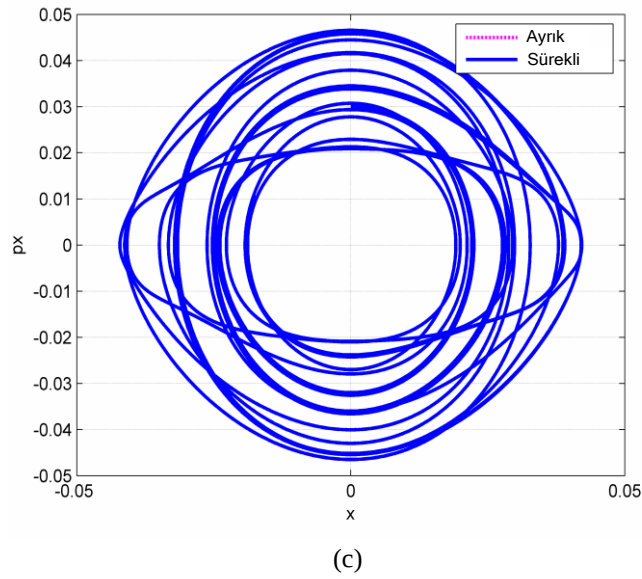
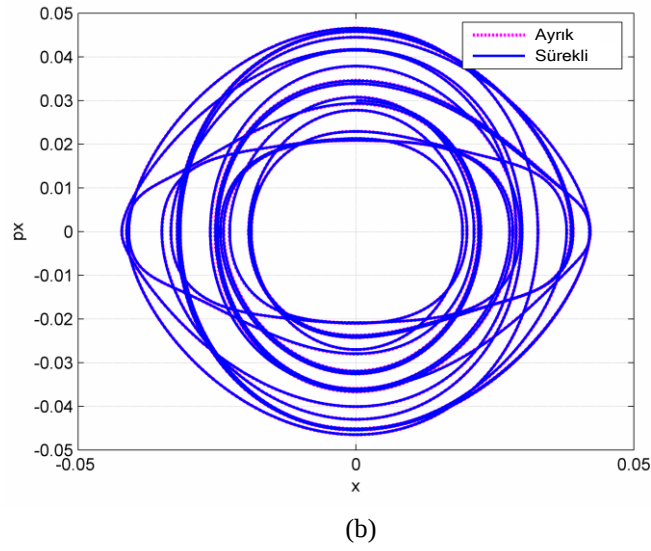
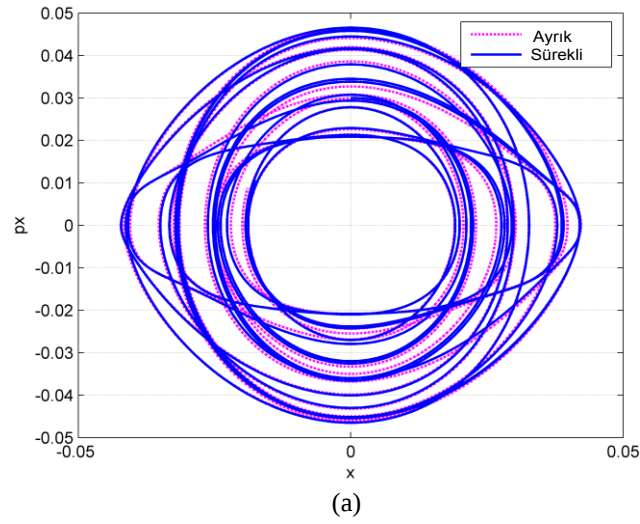


(b)

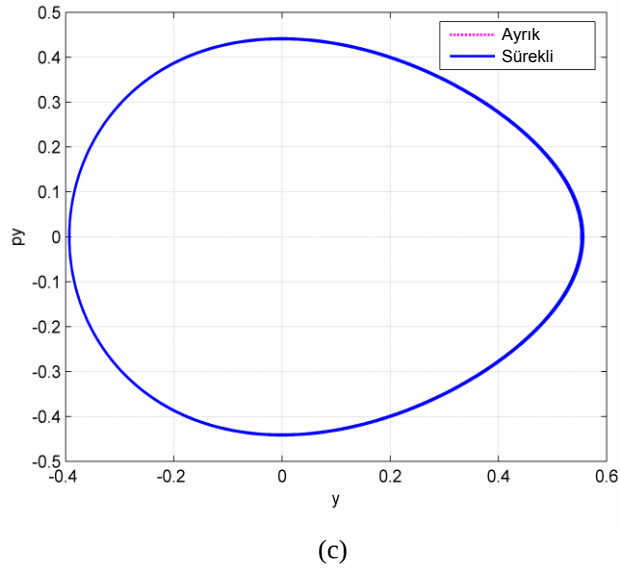
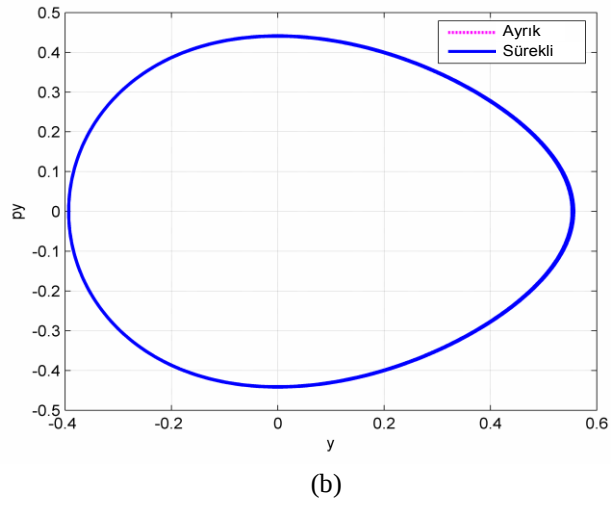
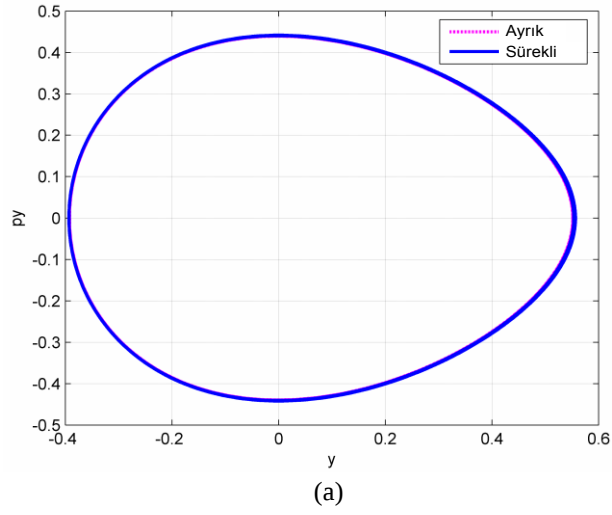


(c)

Şekil 3.3 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)' de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin x ve y değişkenlerinin faz portreleri.



Şekil 3.4 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)'de verilen ayırık-gradyanlar için elde edilen ayırık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin x ve p_x değişkenlerinin faz portreleri.



Şekil 3.5 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli Henon Heiles sisteminin y ve p_y değişkenlerinin faz portreleri.

Örnek 3 (Çift sarkaç sistemi):

Şekil 3.6’da verilen çift sarkaç sisteminin Hamiltonian gösterilimi eylemsizlik matrisi,

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

ve potansiyel enerji fonksiyonu,

$$\mathcal{P}(q) = -(m_2 l_1 l_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1) \quad (3.55)$$

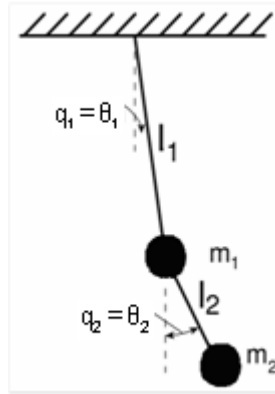
olmak üzere,

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + \mathcal{P}(q)$$

biçimindeki toplam enerji fonksiyonu ile ve kayıp matrisi,

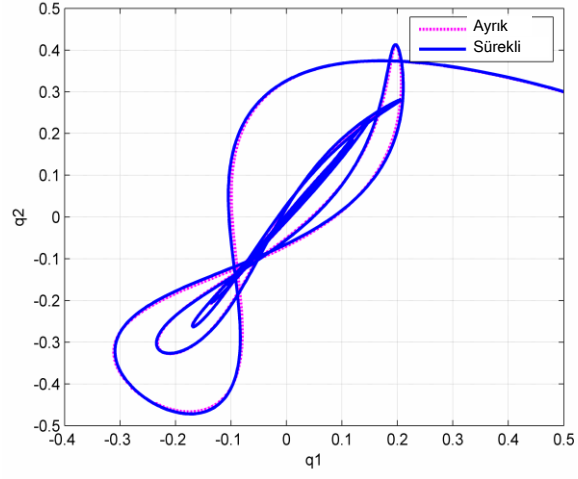
$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 I_2 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

alınarak elde edilmiştir.

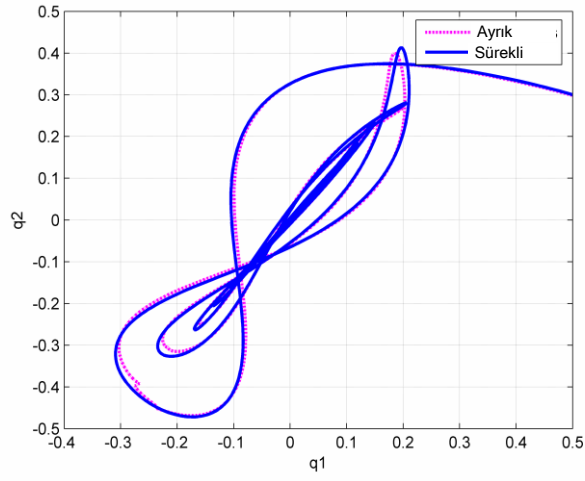


Şekil 3.6 : Çift sarkaç sistemi.

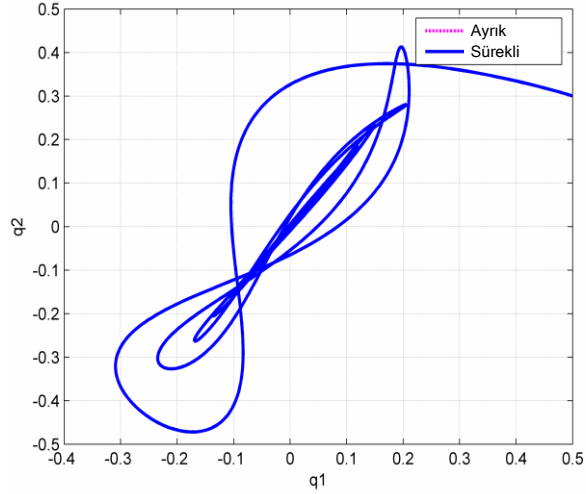
Sisteme ilişkin parametreler $m_1 = m_2 = 1$ kg, $l_1 = 0.2$ m, $l_2 = 0.3$ m, $g = 0.98$ ms⁻² alınmış ve genelleştirilmiş konum değişkenleri $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ biçiminde tanımlanmıştır. Benzetimler $x_0 = [0.5 \ 0.3 \ 0.005 \ 0.005]$ ilk koşulu ve $T = 0.005$ s örnekleme periyodu için yürütülmüştür. Sonuçlar Şekil 3.7, Şekil 3.8 ve Şekil 3.9’da gösterilmiştir.



(a)

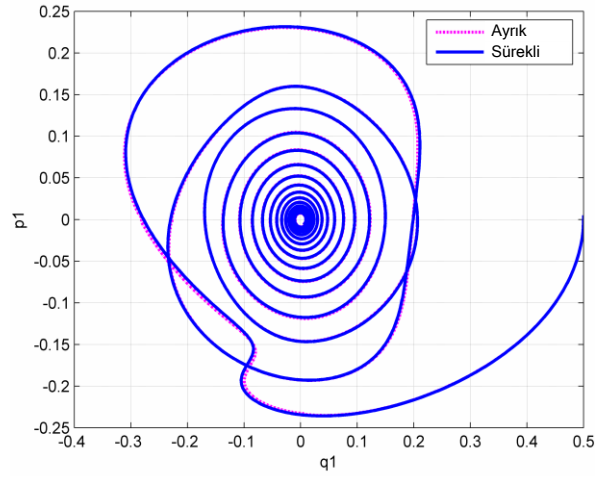


(b)

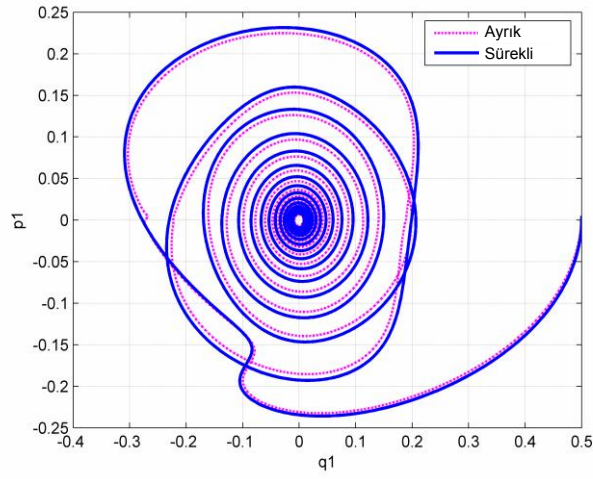


(c)

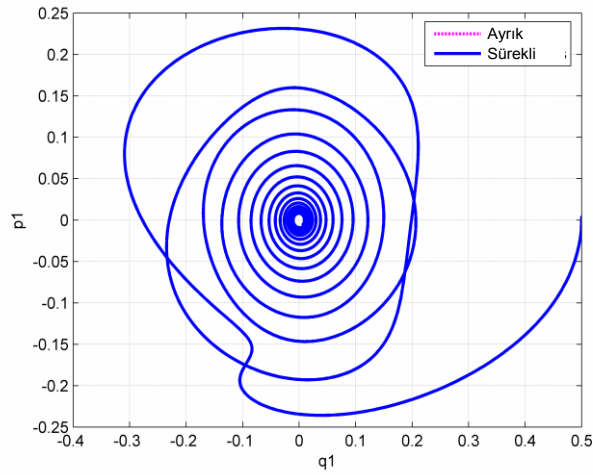
Şekil 3.7 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c)' de verilen ayrik-gradyanlar için elde edilen ayrik modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_1 ve q_2 değişkenlerinin faz portreleri.



(a)

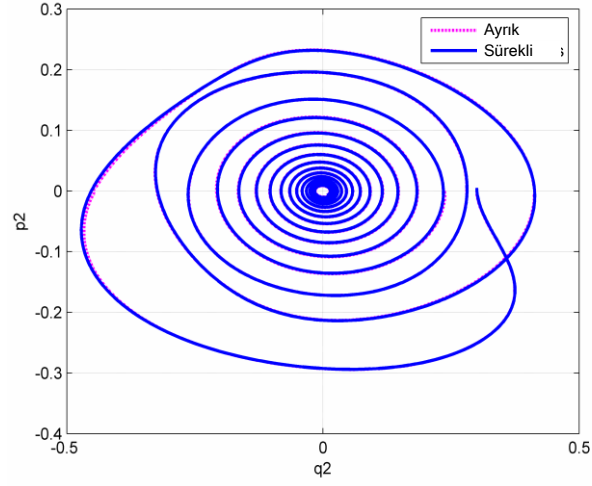


(b)

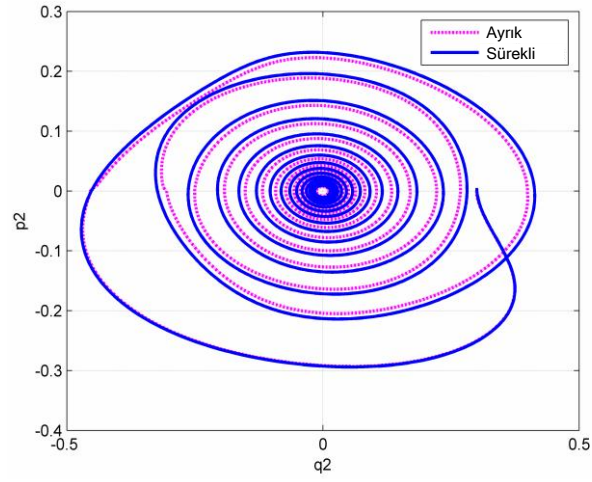


(c)

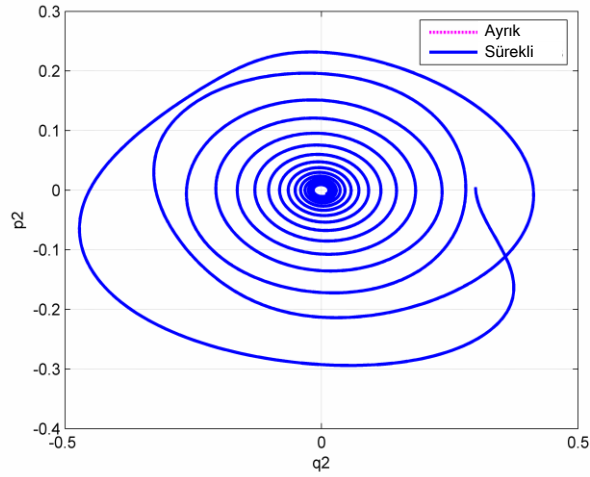
Şekil 3.8 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrik-gradyanlar için elde edilen ayrik modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_1 ve p_1 değişkenlerinin faz portreleri.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.9 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) 'de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli çift sarkaç sisteminin q_2 ve p_2 değişkenlerinin faz portreleri.

Örnek 4 (Araba-sarkaç sistemi):

Bu örnekte Şekil 3.10’da gösterilmiş olan araba-sarkaç sistemi ele alınmıştır (Bloch ve diğ., 1997). Sistemin enerji fonksiyonu,

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + \mathcal{P}(q)$$

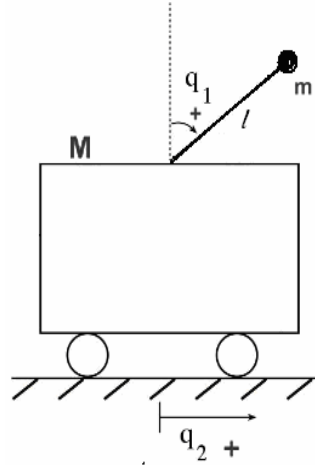
$$M = \begin{bmatrix} ml^2 & ml\cos(q_1) \\ ml\cos(q_1) & M_s + m \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathcal{P}(q) = mgl\cos(q_1) \quad (3.58)$$

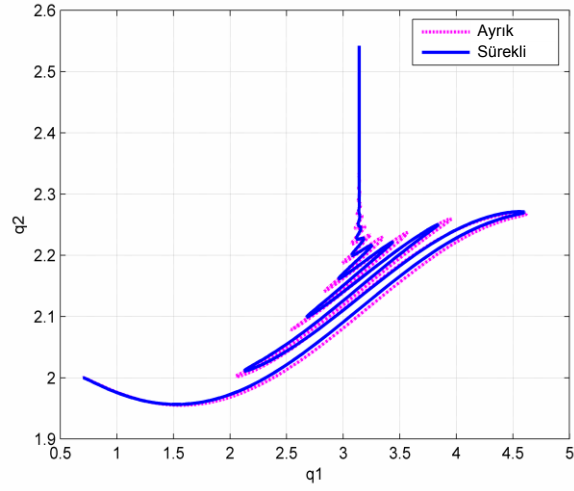
biçimindedir. Burada, $q_1 = \theta$ yukarı duruşa göre sarkaç açısı ve $q_2 = s$ ise arabanın konumudur. Sistemin aşağıdaki gibi bir kayıp yapısının olduğu kabul edilmiştir.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

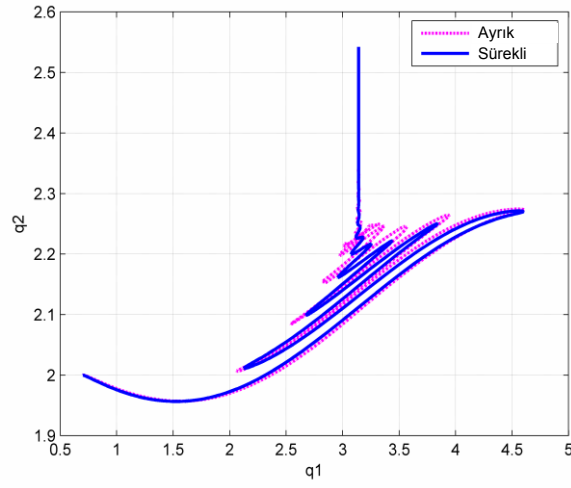
$L = 0.2$ m, $M_s = 0.15$ kg, $m = 0.45$ kg, $g = 9.8$ ms⁻¹, $K_1 = 0.02$, $K_2 = 0.01$ sistem parametreleri, $x_0 = [0.7 \ 2.0 \ 0.005 \ 0.03]$ başlangıç koşulu ve $T = 0.005$ s örnekleme periyodu için benzetim sonuçları Şekil 3.11-3.13’de verilmiştir.



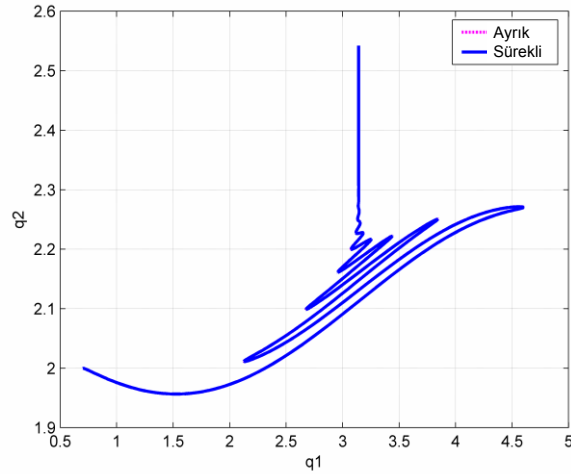
Şekil 3.10 : Araba-sarkaç sistemi.



(a)

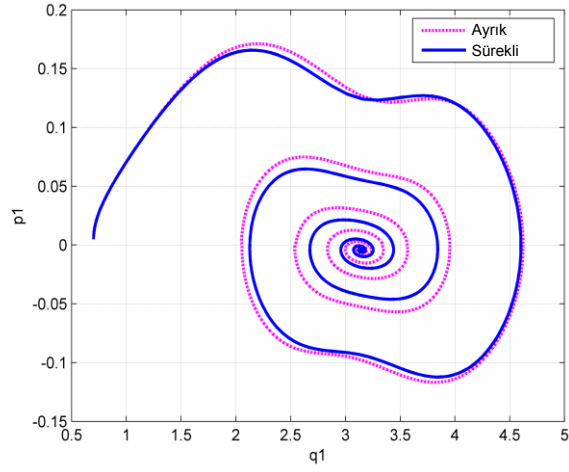


(b)

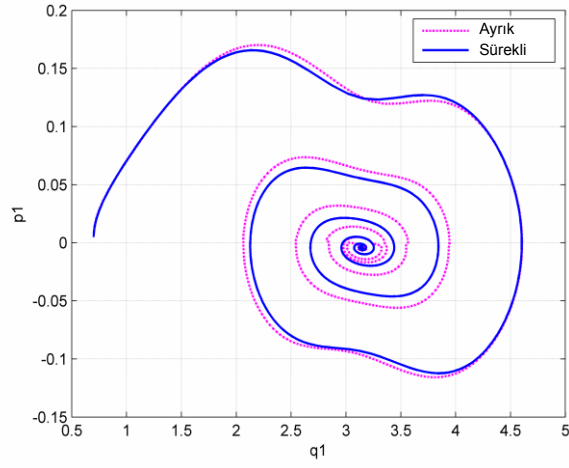


(c)

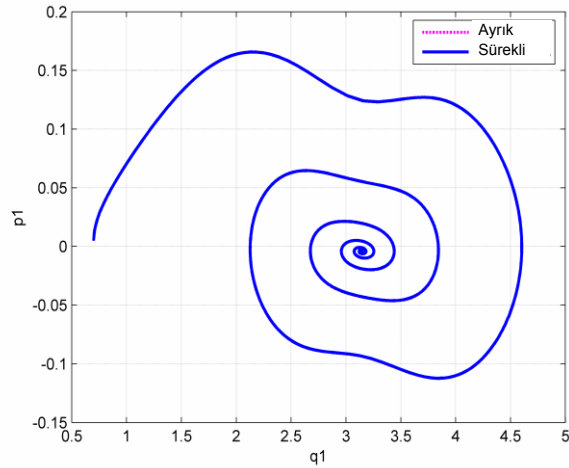
Şekil 3.11 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) ‘de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_1 ve q_2 değişkenlerinin faz portreleri.



(a)

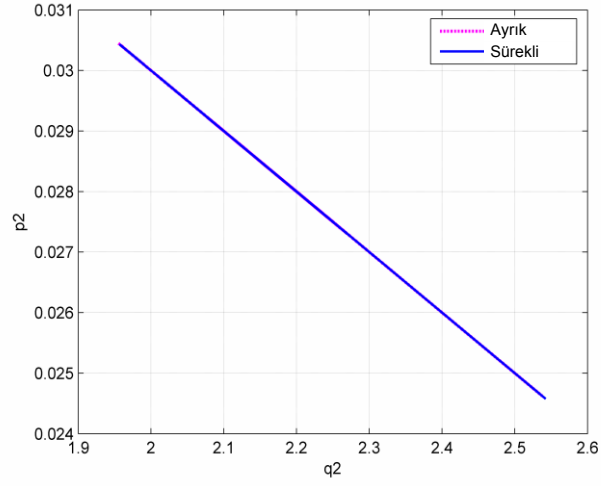


(b)

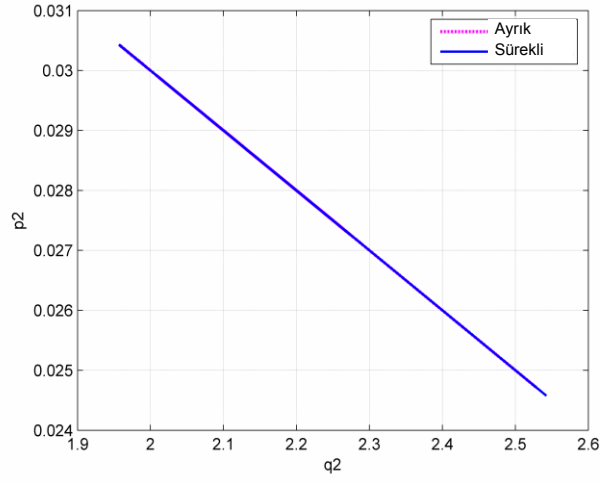


(c)

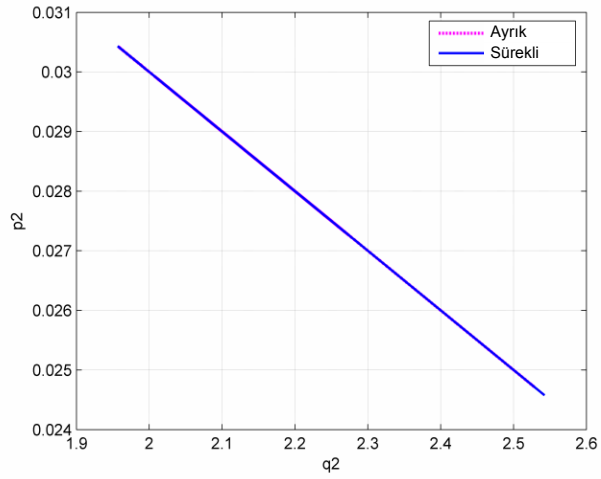
Şekil 3.12 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) ‘de verilen ayrik-gradyanlar için elde edilen ayrik modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_1 ve p_1 değişkenlerinin faz portreleri.



(a)



(b)



(c)

Şekil 3.13 : Tanım 3.2 (a), Tanım 3.3 (b) ve Tanım 3.4 (c) ‘de verilen ayrık-gradyanlar için elde edilen ayrık modellerin ve sürekli araba-sarkaç sisteminin q_2 ve p_2 değişkenlerinin faz portreleri.

3.4 Sonuçlar

Bu bölümde önerilmiş olan yöntem toplu-parametrelili Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı modellenmesini sağlamaktadır. Elde edilen modeller, $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ fonksiyonunun ayrık-gradyanı, yani $\bar{\nabla}\mathcal{H}$, Tanım 3.1’de verilen koşulları tam olarak sağladığı sürece enerji korunumlu olma özelliğine sahiptirler. Ek olarak, sisteme ilişkin yapı matrisi standart ters-simetrik matris ve kullanılan ayrık gradyanlar da (3.10)’de verilen özel yapıda ise elde edilen modeller *simplektik fark sistemi* tanımlamaktadırlar. Simplektik yapıyı ve enerji korunumlu olma özelliğini aynı anda sağlayan ayrık zamanlı bir modelin elde edilmesinin imkansız olduğu (McLachlan ve diğ., 1998)’de vurgulanmıştır. Bu bölümde sunulan ilk iki gradyan –Tanım 3.2 ve 3.3- $\nabla\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ kısıtlaması ile tanımlanmıştır. Aynı yapıda modeller veren - (3.11) - bu birbirinden çok az farklı ayrık-gradyanlar Ortalama Değer Teoreminden (Mean Value Theorem) ve orta nokta kavramından esinlenerek verilmiştir. Bu modellerin özellikleri Sonuç 3.2’de özetlenmiştir. Bu bölümde, Karesel Yaklaşıklık Lemma’sından hareketle yeni bir ayrık-gradyan daha önerilmiştir. Bu ayrık-gradyan ifadesi kullanılarak elde edilen modelin özelliklerine ilişkin analizler yapılmıştır. Sisteme ilişkin enerji fonksiyonu $\mathcal{Z}(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}$, yani $n \times n$ boyutlu sabit matris, olmak üzere $\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Z}(\mathbf{x})\mathbf{x}$ biçiminde ise önerilen üç model eşdeğerdir. Bu çalışmada önerilen modellerin geçerliliğini göstermek için, yöntem çeşitli doğrusal olmayan sistemlere uygulanarak sayısal sınamalar yapılmıştır.

4. KAPI KONTROLLÜ HAMILTONIAN SİSTEMLERİN DOĞRUDAN AYRIK ZAMANLI KONTROLÜ

4.1 Giriş

Bu bölümde, Kapı-kontrollü sürekli Hamiltonian (Port-controlled Hamiltonian (PCH)) sistemlerin kararlı kılınması ve konum kontrolü için literatürde bulunan pasif olma temelli kontrol (Passivity-based Control (PBC)) tekniğinin n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için doğrudan ayrik tasarımı sunulacaktır. PBC, hem Euler-Lagrange ve hem de PCH sistemlerin kararlı kılınması ve konum kontrolü için geliştirilmiş güçlü bir tasarım tekniğidir (Ortega ve diğ., 1998). Kapı-kontrollü Hamiltonian sistem gösterilimi ise karmaşık doğrusal olmayan sistemler - özellikle elektrik ve mekanik alt sistemlerin birlikte bulunduğu doğrusal olmayan sistemler için önerilmiş önemli kontrol modellerinden biridir. Son yıllarda, literatürde bu konuda çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu modelin tercih edilmesinin en önemli nedeni, sisteme ilişkin Hamiltonian fonksiyonun, sistem için bir Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılabilmesi ve bu yaklaşımın kontrol kuralı tasarımında bazı kolaylıklar sağlamasıdır (Van der Schaft, 2000; Ortega ve diğ., 2002a; Ortega ve Garcia-Canseco, 2004).

Bunun yanısıra mühendislik uygulamalarında, gerçekleştirme kolaylıkları ve esneklikleri nedeni ile endüstriyel işlemcileri kullanan bilgisayar kontrollü sistemler yeğlenmektedir. Bu durum, doğrusal olmayan ayrik zamanlı sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için yöntemler geliştirmenin önemini giderek artırmaktadır.

Bilgisayar kontrollü sistemler olarak da adlandırılan örneklenmiş veri-sistemleri, örnekleme ve tutucu elemanlar ile bir araya getirilmiş sürekli sistem ve sayısal kontrolörden oluşurlar. Doğrusal olmayan örneklenmiş-veri sistemlerine kontrolör tasarlamak için üç farklı yaklaşım bulunmaktadır (Laila ve diğ., 2005; Laila ve Astolfi, 2006a).

Emülator Tasarımı (Emulation design): Bu yaklaşımda kontrolör tasarımı sürekli zamanda sürekli sistem modeli üzerinde çalışılarak yapılır ve sayısal gerçekleştirme için

elde edilen sürekli-zamanlı bu kontrolör ayrıklaştırılır (Khalil, 1996; Laila ve diğ., 2002). Çeşitli sürekli kontrol kuralı tasarım tekniklerinin varlığı nedeni ile bu yöntem sıklıkla başvurulur. Ancak, bu yöntemde ayrıklaştırma işleminde kontrolöre bir yaklaşıklık yapılması söz konusudur. Bu nedenle, elde edilen ayrık zamanlı kontrolör, sadece küçük örnekleme periyodları için, sürekli-zamanlı kontrol altındaki sistem davranışına yakın bir davranış elde edilebilmektedir. Bazen bu gereksinim elde edilen donanım sınırlarını aşmaktadır. Diğer taraftan büyük örnekleme zamanları çoğunlukla sistemin kararsızlaşmasına neden olmaktadır (Laila ve diğ., 2005; Laila ve Astolfi, 2006a).

Doğrudan ayrık zamanlı tasarım (Direct discrete-time design): Sisteme ilişkin bir ayrık zamanlı (tam ya da yaklaşık) model kullanılarak kontrolör tasarımının doğrudan ayrık zamanda yapılmasıdır (Nesic ve Laila, 2002; Nesic ve Teel, 2004). Bu yaklaşımda sistemin örnek anları arasındaki davranışı ihmal edilir. Bu yöntemde ise çoğunlukla modelde bir yaklaşıklık bulunmaktadır ancak kararlılığı korumak için hızlı örnekleme gereklidir. Bununla birlikte, örnek-arası davranış tasarımı göz önünde bulundurulmadığından sistemin davranışı beklendiği gibi olmayabilir (Laila ve diğ., 2005; Laila ve Astolfi, 2006a).

Örneklenmiş-veri tasarımı: Sistemin tam örneklenmiş-veri modeli kullanılarak yapılan ayrık zamanlı tasarım yöntemidir. Bu yöntemde modelde bir yaklaşıklık yapılmamaktadır. Sistemin tam örneklenmiş-veri modeli kullanılarak hem kararlılığı hem de istenen performansı garantilemek mümkün olmaktadır. Yöntemin hata içermemesine karşın kullanılan doğrusal olmayan örneklenmiş-veri modellerinin karmaşıklığı bu yöntemle kontrol tasarımı yapmayı zorlaştırmaktadır (Laila ve diğ., 2005; Laila ve Astolfi, 2006a).

Yukarıda belirtilen nedenlerle örneklenmiş-veri kontrol sistemlerinde ikinci yaklaşımın kullanılması uygun gözükmemektedir. Bir doğrusal olmayan örneklenmiş-veri kontrol sisteminde doğrudan ayrık zamanlı tasarım yönteminin başarısı tasarımda kullanılacak iyi bir ayrık zamanlı modelin bulunmasına bağlıdır. Ne yazık ki, sistemin sürekli modeli bilinse de genellikle doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin açık (explicit) analitik çözümünü gerektirdiğinden sistemin ayrık zamanlı tam modeli hesaplanamamaktadır. Bu nedenle kontrol tasarımına elverişli yaklaşık modeller kullanılır (Laila ve diğ., 2005).

Doğrusal olmayan örneklenmiş-veri sistemlerinin, bu sistemlerin yaklaşık modelleri kullanılarak kararlı kılınması problemine ilişkin bazı genel inceleme ve sonuçlar Nesic ve diğ. (1999), Nesic ve Angeli (2002), Nesic ve Laila (2002), Nesic ve Teel (2004) çalışmalarında bulunabilir. Literatürde “Runge-Kutta” ve “multistep methods” gibi numerik algoritmalar yaklaşık modeller elde etmek için kullanılmaktadır (Stuart ve Humphries, 1996; Laila ve diğ., 2005).

Ayrıca, eksik-sürülmüş mekanik sistemlerin kararlı kılınması önemli kontrol problemlerindendir (Spong, 1997; Fantoni ve Lozano, 2002; Auckly ve diğ., 2000; Auckly ve Kapitanski, 2002) ve son yıllarda bu sistemlerin enerji fonksiyonlarını biçimlendirme yoluyla kararlı kılınması tekniği (PBC) kontrol araştırmacıları tarafından geliştirilmiştir. Tam sürülmüş sistemlere geribesleme yolu ile herhangi bir istenen potansiyel enerji fonksiyonunu kazandırmak mümkün olduğundan sistem istenilen her denge noktasında kararlı kılınabilmektedir. Ancak, eksik-sürülmüş sistemlerde genel olarak bu her zaman olanaklı olmamakla birlikte, bazı özel durumlarda kinetik enerji fonksiyonu da değiştirilerek bu sorunun üstesinden gelmek mümkün olabilmektedir. Bu yöntem, Ailon ve Ortega (1993)’de sunulan toplam enerji fonksiyonunu değiştirme yöntemi olarak bilinir. Toplam enerji fonksiyonunun değiştirilmesinde iki ana yaklaşım vardır; “*Controlled Lagrangians*” (Bloch ve diğ., 1999; Bloch ve diğ., 2000; Blankenstein ve diğ., 2002; Chang ve diğ., 2002; Chang, 2005) yöntemi ve *iç bağlantı ve sönüm atama ile pasif olma temelli kontrol* “*Interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC)*” tür (Ortega ve Spong, 2000; Fujimoto ve Sugie, 2001; Gomez-Estern ve diğ., 2001; Ortega ve diğ., 2002a; Ortega ve diğ., 2002b). Her iki yöntemde de istenen bir denge noktasının kararlı kılınması geribesleme yolu ile elde edilebilecek sistem sınıfının belirlenmesi ile – ilk yöntemde Lagrangian, IDA-PBC’de ise Hamiltonian - başarılmaktadır. Böyle bir geribesleme kuralının varlığına ilişkin koşullara eşleşme koşulları (matching conditions) adı verilir (Viola ve diğ., 2007). Bu koşullar bir dizi doğrusal olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemden (PDE) oluşmaktadır (Ortega ve Spong, 2000; Gomez-Estern ve diğ., 2001; Auckly ve Kapitanski, 2002). Bu denklemler çözülebiliyorsa özgün kontrol sistemi ile hedef dinamik sistem eşleşlenebilir denir. Bloch ve diğ. (2000), Ortega ve diğ. (2002a), Ortega ve diğ. (2002b), Ortega ve Garcia-Canseco (2004), Acosta ve diğ., (2005), Viola ve diğ. (2007) çalışmalarında IDA-PBC tasarımında ortaya çıkan PDE’lerin çözülebilir

olduğu sistemler ve atanabilir eylemsizlik matrisleri hakkında bazı bilgiler vermişlerdir. Ayrıca, PDE'leri çözmeye ilişkin bazı teknikler Auckly ve diğ., (2000) ve Blankenstein ve diğ., (2002) yayınlarında anlatılmıştır. Ek olarak, bu denklemlerin bazı geometrik özellikleri Bullo ve Lewis (2004), tarafından incelenmiştir. Bu problem, sürülme mertebesi sadece bir eksik olan sistemler için Auckly ve Kapitanski (2002) ve Ortega ve diğ. (2004), Acosta ve diğ. (2005) çalışmalarında ayrıntılı incelenmiştir. Son çalışmada, bazı özelliklere sahip eksik sürülmüş sistemlerde ortaya çıkan PDE'lerin çözülebilirliği gösterilmiştir. Bu özellikler ise; sürülme mertebesi bir eksik olma, genelleştirilmiş eylemsizlik matrisinin ve potansiyel enerji tarafından oluşturan kuvvetin, sürülmeyen koordinattan bağımsız olması şeklindedir.

Viola ve diğ. (2007)'da ise, tasarım sırasında ortaya çıkan PDE'lerin çözümlerini veren bir yöntem sunulmuştur. IDA-PBC tasarımında elde edilen denklemler, doğrusal ve homojen değildir, ayrıca çözüm olan eylemsizlik matrisinin kesin pozitif olması gerekmektedir. Sözü edilen çalışmada, problemin çözümünde ortaya çıkan PDE'leri homojen hale getiren ve eylemsizlik matrisi üzerindeki kesin pozitiflik koşulunu kaldıran koordinat dönüşüm sınıfı ve bu homojen PDE'lerin çözümüne ilişkin bir yöntem verilmiştir.

Eksik sürülmüş sürekli sistemlerin kararlı kılınması problemine ilişkin yukarıda söz edilen pasif olma temelli kontrol tekniğinin yanı sıra Lyapunov teorisi, geribesleme yolu ile lineerleştirme, kayan-kipli kontrol gibi farklı yaklaşımlara dayanarak tasarlanan çeşitli kontrol kuralları bulunmaktadır. Eksik-sürülmüş sistemler her zaman *geribesleme ile doğrusallaştırılamazlar* (Fantoni ve Lozano, 2002). Ayrıca, geribesleme ile doğrusallaştırmaya dayanan kontrol yöntemleri pasiflik temelli kontrol tekniklerine göre çok daha karmaşıktır.

Eksik sürülmüş Hamiltonian sistemler için IDA-PBC tasarım yönteminin ayrık zamanlı karşılığı üzerine ise literatürde az sayıda çalışma bulunmaktadır. Hamiltonian sistemin yaklaşık bir ayrık zamanlı modelini kullanarak bir doğrudan ayrık zaman PBC kontrol yöntemi Laila ve Astolfi (2005, 2006a, 2006b) tarafından geliştirilmiştir. Kontrol literatüründe bildiğimiz kadarı ile Hamiltonian sistemlerin ayrık zamanlı modellerini kontrol uygulamaları için kullanan yegane çalışmalar yine bu araştırmacıların belirtilen çalışmalarıdır. Laila ve Astolfi, (2005)'de, sadece “seperable” Hamiltonian sistemleri ele alırken, Laila ve Astolfi (2006b)

alışmalarında yöntemlerinin “non-separable” sistemlere de genelleştirmişlerdir. Laila ve Astolfi (2006b)’de ayrık zamanlı kontrolörü elde etmek için Euler yaklaşık modelleri kullanılmıştır. Bu modeller yazarlarının da belirttiğı çok yaklaşık modellerdir, enerji korunumlu ve simplektik fark sistemi olma özelliğinde değillerdir. Kontrolörün inşaasında ise matematik literatürde bulunan “coordinate discrete-gradient” ayrık-gradyanı kullanılmıştır. Bu yaklaşımda elde edilen kontrolör sürekli zamanlı kontrollörün emülatöründe basit bir düzeltme olarak görülebilir. Ayrıca, Laila ve Astolfi’nin çalışmalarında denge noktası civarında dar bir aralıkta kontrol yapılmış ve sistem durumlarının ilgilenilen denge noktasına ayrı bir kontrol kuralı ile sürüldüğü varsayılmıştır.

Daha önce belirtildiğı gibi Ortega ve diğ., (1998) tarafından Hamiltonian sistemlerin istenen bir izole denge noktasında kararlı kılınması problemi için geliştirilmiş olan PBC tasarımı sürekli zamanda iki aşamada yapılır; önce enerji şekillendirmeye ilişkin kontrol kuralı $\mathbf{u}_{es}(\mathbf{t})$ yani istenen enerji fonksiyonunu sisteme kazandıran kontrol kuralı tasarlanır, daha sonra istenen denge noktasında sistemi asimptotik kararlı kılacak kayıp fonksiyonunu sisteme atayan kontrol kuralı $\mathbf{u}_{di}(\mathbf{t})$ tasarlanır. İstenen denge noktası sisteme atanan enerji fonksiyonunun kesin ve izole minimum noktasıdır. Bu konuya ilişkin ayrıntılı bilgi Van der Schaft (2000), Ortega ve diğ. (1998) ve Ortega ve Garcia-Canseco (2004)’de bulunabilir. Bu tez çalışmasında, enerji biçimlendirme ve sönüm atamaya karşı düşen $\mathbf{u}_{es}(\mathbf{k})$ and $\mathbf{u}_{di}(\mathbf{k})$ ayrık zamanlı kontrol kuralları açık çevrim ve istenen kapalı çevrim sistemin ayrık zamanlı modelleri kullanılarak türetilmiş, sadece eksik-sürülmüş sistemler için istenen kapalı çevrim sistemin sürekli zamanlı modelinin bilindiğı varsayılmıştır. Geliştirilen tasarım yönteminin etkinliğini göstermek için, yöntem iki iyi bilinen eksik-sürülmüş sistemler olan araba-sarkaç ile top-çubuk sistemleri ve tam sürülmüş çift-sarkaç sistemi için uygulanmış ve benzetim yolu ile sınanmıştır. Elde edilen sonuçlar, sürekli kontrol kuralı ve emülatör kontrol kuralı-sürekli kontrol kuralının örnek anlarındaki değelerinin sisteme uygulanması- ile elde edilen yanıtlar ile karşılaştırılmıştır.

4.2 Ön Bilgi

N -serbestlik dereceli mekanik sistemler için bilinen sürekli PBC tasarım tekniğinin burada özetlenmesinde yarar olacaktır. Bir Kapı-kontrollü Hamiltonian sistem standart koordinatlarda (4.1)'de gösterildiği gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}(q, p) \\ \nabla_p \mathcal{H}(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

$$y(t) = G^T(q) \nabla_p \mathcal{H}(q, p)$$

Burada $(q, p) \in X \subset \mathfrak{R}^{2n}$ sistemin genelleştirilmiş koordinatları, $u \in \mathfrak{R}^m$ kontrol giriş vektörü, $y \in \mathfrak{R}^m$ sistem çıkış vektörü, $G(q) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ kuvvet girişi matrisi (input force matrix) ve J iç bağlantı matrisi (4.2)'de verilmiş olan standart ters-simetrik yapıdadır.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ayrıca, $\nabla_{(\bullet)} \mathcal{H}$ notasyonu $\mathcal{H}(q, p)$ skaler fonksiyonun $(\bullet)$ değişkenlerine göre gradyan vektörünü göstermektedir. Hamiltonian fonksiyonu $\mathcal{H} : \mathfrak{R}^{2n} \rightarrow \mathfrak{R}$ sistemin toplam enerji fonksiyonu olup,

$$\mathcal{H}(q, p) = \mathcal{K}(q, p) + \mathcal{P}(q) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + \mathcal{P}(q) \quad (4.3)$$

biçiminde ifade edilir. Bu ifadede $\mathcal{K}(q, p)$ kinetik enerji ve $\mathcal{P}(q)$ potansiyel enerji fonksiyonlarıdır. Bu ilişkide $M(q)$ matrisi simetrik ve pozitif olma özelliğinde, $M(q) = M(q)^T > 0$, sistemin genelleştirilmiş eylemsizlik matrisidir. Eğer $M(q) = M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ise sisteme *doğrusal (seperable) Hamiltonian sistem* adı verilir. (4.2) sisteminde $m = n$ ve $\text{rank } G(q) = n$ ise sisteme *tam sürülmüş* (fully-actuated), $\text{rank } G(q) \leq n$ ise sisteme *eksik sürülmüş* (under-actuated) adı verilir.

IDA-PBC tekniğinin temel fikri, $(q^*, 0)$ noktasında minimumu olan,

$$\mathcal{H}_d(q, p) = \mathcal{K}_d(q, p) + \mathcal{P}_d(q) = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q) p + \mathcal{P}_d(q) \quad (4.4)$$

yapıda bir istenen enerji fonksiyonunu kapalı çevrim sisteme kazandıran ve kararlı kılan bir kontrolör tasarlamaktır.

Tam sürülmüş sistemler için bu problem sadece potansiyel enerji ataması ve sönüm ataması ile çözülebilmektedir. Eksik sürülmüş Hamiltonian sistemleri kararlı kılma problemi ise çok zor bir problem olarak bilinir (Ortega ve Spong, 2000; Fujimoto ve Sugie, 2001; Gomez-Estern ve diğ., 2001; Ortega ve diğ., 2002a, Ortega ve diğ., 2002b). Bu problemin çözümü potansiyel enerji fonksiyonunun değiştirilmesine ek olarak kinetik enerji fonksiyonunun ve sistemin yapı matrisinin de değiştirilmesini gerektirmektedir. Problemin çözüm koşulları, istenen enerji fonksiyonuna sahip sistemin Hamiltonian formülasyonunu elde edip, kapalı çevrim sistem ile bu sistem arasında model eşleme yapılarak elde edilir. Literatürde çoğunlukla, istenen enerji fonksiyonuna sahip kapalı çevrimli sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J_d - R_d) \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}_d \\ \nabla_p \mathcal{H}_d \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_d(q, p) = \frac{1}{2} p^T M_d(q)^{-1} p + \mathcal{P}_d(q) \quad (4.5)$$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_v G^T \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ifadeleri ile verilir ve sürekli IDA-PBC tasarımında istenen sistem olarak alınır (Ortega ve Spong, 2000; Ortega ve diğ., 2002a; Ortega ve diğ., 2002b; Ortega ve Garcia-Canseco, 2004; Acosta ve diğ., 2005; Viola ve diğ., 2007). Burada $J_2(q, p) = -J_2^T(q, p)$, $R_d(q, p) = R_d^T(q, p)$, $K_v = K_v^T \geq 0$ özelliklerinde uygun boyutlu matrislerdir. Problemin çözümü, M_d ve J_2 'nin uygun seçimi ile sağlanmaktadır. Ancak, eşleşme koşullarını (PDE'ler) sağlayan M_d ve J_2 matrislerinin tasarımı oldukça zor bir problem olarak bilinir.

Enerji biçimlendirme kontrol kuralı u_{es} , açık çevrim sistem dinamiklerine ilişkin (4.1) ifadesinin sağ tarafı ile istenen sistem ifadelerinin (4.5-4.6) sağ tarafları birbirine eşitlenerek elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H} \\ \nabla_p \mathcal{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}_d \\ \nabla_p \mathcal{H}_d \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Doğrusal Hamiltonian sistemler için J_2 matrisi sıfır alınabilir (Ortega ve diğ., 2002a; Ortega ve diğ., 2002b). $G(q)$ matrisinin rankı sütün sayısından az -yani eksik

sürümlü-Doğrusal olmayan Hamiltonian sistemler için ise, enerji biçimlendirme kontrol kuralı u_{es} , ancak,

$$G^\perp \left\{ \nabla_q \mathcal{H} - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q \mathcal{H}_d + J_2(q, p) M_d^{-1}(q) p \right\} = 0 \quad (4.8)$$

ilişisini sağlayan $M_d(q)$ matrisi ve $\mathcal{P}_d(q)$ fonksiyonu var olması koşulu altında bulunabilir. Bu koşul,

$$G^\perp(q) \left\{ \nabla \mathcal{P} - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla \mathcal{P}_d \right\} = 0 \quad (4.9)$$

potansiyel enerji koşulu ve,

$$G^\perp(q) \left\{ \nabla_q (p^T M^{-1}(q) p) - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q (p^T M_d^{-1} p) + \right. \\ \left. + 2J_2(q, p) M_d^{-1}(q) p \right\} = 0 \quad (4.10)$$

kinetik enerji koşulu olmak üzere ikiye ayrıştırılarak da yazılabilir. Bu ifadelerde bulunan $G^\perp$ matrisi G 'nin bir tam ranklı *sol yokedicisidir (annihilator)*. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin sağlayan M_d ve J_2 matrisleri varsa enerji biçimlendirme kontrol kuralı,

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \left\{ \nabla_q \mathcal{H} - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q \mathcal{H}_d + J_2(q, p) \nabla_p \mathcal{H}_d \right\} \quad (4.11)$$

biçiminde inşaa edilebilir. Bu kontrol kuralı altında elde edilen sistem de bir Hamiltonian sistem olduğundan kapalı çevrim sistemi asimptotik kararlı kılan sönüm atama kontrol kuralı,

$$u_{di} = -K_v G^T \nabla_p \mathcal{H}_d, \quad K_v > 0 \quad (4.12)$$

şeklinde elde edilir.

4.3 IDA-PBC Tasarımının Ayırık Zaman Karşılığı

Bu alt bölümde, ön bilgi bölümünde kısaca özetlenen IDA-PBC tekniğinin doğrudan ayırık zamanlı eşdeğeri geliştirilecektir. Bunun için önce, ele alınan açık çevrimli ve istenen kapalı çevrimli sistemlerin ayırık zamanlı modelleri elde edilmelidir. Bu amaçla, Bölüm 3'de önerilen yöntem kullanılacaktır. Sistem (4.1)'e ilişkin ayırık zamanlı model, sistemin durum değişkenlerinin türevleri yerine,

$$\dot{q} = \frac{q_{k+1} - q_k}{T}, \quad \dot{p} = \frac{p_{k+1} - p_k}{T} \quad (4.13)$$

yaklaşık ifadeleri ve gradyan ifadeleri yerine de herhangi bir ayrık-gradyan $\bar{\nabla}H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in \mathbb{R}^{2n}$ kullanılarak bu sisteme ilişkin ayrık zamanlı model,

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T J \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ G(q_k) \end{bmatrix} u, \quad (4.14)$$

biçiminde (3.46)'daki yapıda elde edilir. Ayrıca, istenen sisteme ilişkin ayrık zamanlı model ise aynı yöntemle,

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T(J_d - R_d) \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H_d \\ \bar{\nabla}_p H_d \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1}M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GK_v G^T \end{bmatrix}$$

gibi yazılır. Eğer (4.14)'nin sağ tarafı ile (4.15)'ün sağ tarafı birbirine eşitlenirse enerji biçimlendirmeden sorumlu kontrol kuralı,

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_q H - M_d(q_k) M^{-1}(q_k) \bar{\nabla}_q H_d \\ + J_2(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p H_d \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

biçiminde elde edilir ve sönüm atama kontrol kuralı ise (4.12)'daki yapıda ancak gradyan terimi yerine ayrık-gradyan gelmiş olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_{di} = -K_v G^T \bar{\nabla}_p H_d \quad (4.17)$$

Elde edilen ayrık zamanlı kontrol kuralları (4.16) ve (4.17), istenen kapalı çevrim sistemin sürekli-zamanlı modelinin bulunduğu varsayımı altında türetilmiştir. Bu kontrol kurallarının inşası için $\mathcal{H}(q, p)$ enerji fonksiyonunun herhangi bir ayrık-gradyanının $-\bar{\nabla}H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in \mathbb{R}^{2n}$ - kullanılması gereklidir. Bölüm 3'de verildiği gibi bazı özel durumlarda ayrık-gradyan koşullarını tam sağlayan ama genel durum için yaklaşık sağlayan ayrık-gradyanlardan biri kullanılacaksa aşağıda verilecek olan kararlılık incelemesi göz önünde bulundurulmalıdır.

Ayrık-gradyan olmanın ilk koşulu (3.2)'nin yaklaşık sağlandığı durum için kararlılık analizi vermek üzere aşağıdaki sönümlü ve girişli Hamiltonian sistemi ele alalım,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (4.18)$$

burada $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ yerel durum değişkenlerini $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ kontrol girişlerini ve $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\mathbf{J}^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, özellikte matrisler ise sırasıyla sistemin iç-bağlantı ve kayıp yapı matrislerini göstermektedir.

Bu tezde önerilen ve Bölüm 3 de sunulan yöntemle, sistemin ayrık zamanlı modeli aşağıdaki gibi inşa edilir,

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k = T [\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)] \bar{\nabla} \mathbf{H} + T \mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(k) \quad (4.19)$$

burada T örnekleme periyodudur.

$\mathcal{H}(\mathbf{x})$ enerji fonksiyonu $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ 'de yerel (global) kesin minimuma sahipse (4.1) sistemi $\mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ ve $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ için $\mathbf{x}^*$ noktasında bir yerel (global) denge noktasına sahip olacaktır (Van der Shaft, 2000) ve aşağıdaki ilişki geçerli olacaktır.

$$\dot{\mathcal{H}}(t) = \nabla^T \mathcal{H}(\mathbf{x}) [\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mathbf{R}(\mathbf{x})] \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) < 0 \quad (4.20)$$

Diğer taraftan sürekli ve ayrık durum arasındaki benzerlikten ayrık zamanlı modele ilişkin enerji ilişkisi (4.19) ifadesi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{\nabla}^T \mathbf{H} [\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k] = T \bar{\nabla}^T \mathbf{H}(\mathbf{x}) [\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)] \bar{\nabla} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (4.21)$$

Bazı cebirsel işlemlerden sonra, önerilen ayrık zamanlı model için,

$$\frac{\mathcal{H}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_k)}{T} = \bar{\nabla}^T \mathbf{H} [\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{R}(\mathbf{x}_k)] \bar{\nabla} \mathbf{H} + \varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \quad (4.22)$$

şeklinde bir enerji ilişkisi elde edilebilir.

Tanım 3.2 ve Tanım 3.3 kullanıldığında elde edilen (4.22)'de bulunan $\varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \in \mathfrak{R}$ 'ye karşı düşen ifadeler Bölüm 3'de verilmiştir. (4.22) ilişkisi bize, $\varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \in \mathfrak{R}$ teriminin işaretine göre, ya ayrık zamanlı modelin sürekli sistemin sahip olduğu enerjiden daha fazla bir enerjiye, ya da daha fazla bir kayba sahip olduğunu söyler. Aşikâr olarak $T \rightarrow 0$ için bu fazladan terim sıfıra yakınsar ($\varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) \rightarrow 0$). Bu analizin bir sonucu olarak, sürekli Hamiltonian sistemlerin

doğrudan ayrık zaman modeli kullanılarak geliştirilecek kararlı kılan kontrol kuralının türetilmesinde dikkat edilmesi gereken özellikler aşağıdaki Uyarı'da özetlenmiştir.

Uyarı 4.1: Sürekli-zamanlı lineer olmayan Hamiltonian bir sistemin kararlı kılınması amacıyla (4.19)'de verilen ayrık zamanlı model bir ayrık kontrol kuralı türetilmesinde kullanılacaksa, ek terim eğer $\varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) < 0$ ise - yani ayrık model sürekli sistemden daha fazla enerjiye sahip ise- bu model kullanılarak elde edilen kontrolör sürekli sistemi kesinlikle kararlı kılacaktır. Öte yandan, eğer ayrık model sürekli sistemden daha fazla kayba sahip ise - $\varepsilon(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k) > 0$ -. Bu durumda, tasarımda kullanılan istenen kayıp yapısı sürekli sistemi kararlı kılmak için yeterli olmayabilir, bu nedenle istenen kayıp yapısı olası eksikliği giderecek şekilde seçilmelidir. Bu durumun genellikle yavaş örnekleme durumunda ortaya çıkacağı aşikârdır. Ayrıca, (4.11) ve (4.12) ile verilen $\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{u}_{es}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}_{di}(\mathbf{t})$ kontrol kuralı sürekli-zamanlı *asimptotik kararlı kılan* -AS (Asymptotically Stabilizing)- bir kontrolör olduğu bilindiğine göre (Ortega ve Spong, 2000) ve ayrık zamanlı kontrol kuralları (4.16) ile (4.17),

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{u}_{es}(kT) \rightarrow \mathbf{u}_{es}(\mathbf{t}), \quad \lim_{T \rightarrow 0} \mathbf{u}_{di}(kT) \rightarrow \mathbf{u}_{di}(\mathbf{t}) \quad (4.23)$$

özelliğinde olduğundan (4.16) ile (4.17) ayrık zamanlı kontrol kurallarının *uygulamada asimptotik kararlı kılan* (Practically AS property) özelliğinde olması garantilenmiş olur (Nesic ve diğ., 2004). □

(4.16) ile (4.17) ayrık-kontrol kurallarını elde etmek için $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ fonksiyonun ayrık-gradyanının inşası gereklidir. $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 'nin Bölüm 3'de verilen Tanım 3.2 ve Tanım 3.3 biçimindeki ayrık-gradyanlarını elde etmek için öncelikle $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ fonksiyonun,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{P}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{P}(\mathbf{q}) \quad (4.24)$$

biçiminde olduğu bilindiğine ve $\mathcal{P}_{gr}(\mathbf{q})$ matrisi ise,

$$\nabla \mathcal{P}(\mathbf{q}) = \mathcal{P}_{gr}(\mathbf{q}) \mathbf{q} \quad (4.25)$$

biçiminde tanımlandığına göre, $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ fonksiyonun gradyanı,

$$\nabla H(q, p) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{gr}(q) & S(q, p) \\ 0 & M^{-1}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = Q(q, p) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$S(q, p) = \begin{bmatrix} \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_1} \right] \\ \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_2} \right] \\ \vdots \\ \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_n} \right] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $\mathcal{H}(q, p)$ 'nin ayrık-gradyan ifadeleri $Q(q, p)$ matrisi (4.26) ve (4.27)'den elde edilerek Tanım 3.2 için,

$$\Phi_k = \frac{1}{4} (Q(q_k, p_k) + Q(q_{k+1}, p_{k+1})) \quad (4.28)$$

ve Tanım 3.3 içinse,

$$\Phi_k = \frac{1}{2} Q\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{p_{k+1} + p_k}{2}\right) \quad (4.29)$$

olmak üzere,

$$\bar{\nabla} H(q_{k+1}, q_k, p_{k+1}, p_k) = \Phi_k(k+1, k) \begin{bmatrix} q_{k+1} + q_k \\ p_{k+1} + p_k \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

biçiminde inşaa edilebilir.

Ayrıca, Tanım 3.4 kullanılarak,

$$\bar{\nabla} H(q_{k+1}, q_k, p_{k+1}, p_k) = \nabla \mathcal{H}(q_k, p_k) + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{\text{Hess}}(q_k, p_k) \begin{bmatrix} q_{k+1} + q_k \\ p_{k+1} + p_k \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

biçiminde inşaa edilebilir.

İstenen kapalı çevrimli sisteme ilişkin enerji fonksiyonu da (4.24)'teki yapıda olduğundan, bu fonksiyona ilişkin ayrık-gradyan ifadeleri de benzer biçimde Tanım 3.2 için,

$$\Phi_d(k+1, k) = \frac{1}{4} (Q_d(q_k, p_k) + Q_d(q_{k+1}, p_{k+1})) \quad (4.32)$$

ve Tanım 3.3 içinse,

$$\Phi_d(k+1, k) = \frac{1}{2} Q_d \left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{p_{k+1} + p_k}{2} \right) \quad (4.33)$$

ve $\nabla \mathcal{H}_d(q, p) = Q_d(q, p) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla} H_d(q_{k+1}, q_k, p_{k+1}, p_k) = \Phi_d(k+1, k) \begin{bmatrix} q_{k+1} + q_k \\ p_{k+1} + p_k \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

biçiminde inşaa edilebilir.

Kapalı çevrimli sistemin enerji fonksiyonuna ilişkin ayrık-gradyan ifadesini elde etmek için Tanım 3.4 kullanıldığında ise,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} H_d(q_{k+1}, q_k, p_{k+1}, p_k) &= \nabla \mathcal{H}_d(q_k, p_k) \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{H}_{d\text{Hess}}(q_k, p_k) \begin{bmatrix} q_{k+1} + q_k \\ p_{k+1} + p_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece ayrık zamanlı kontrol kuralları, $u_{es}(k)$ ve $u_{di}(k)$ sırasıyla enerji biçimlendirme ve sönüm atama kontrol kuralları, açık çevrim sistemin ve istenilen sistemin doğrudan ayrık zaman modeli kullanılarak, (4.16) ile (4.17)'den inşaa edilir.

Daha önce de vurgulandığı gibi, (4.16) ile (4.17) kontrol kuralları sadece eksik sürülmüş sistemler için istenilen sürekli sistemin bilindiği varsayımı ile türetilmiştir. Tam sürülmüş sistemler için enerji biçimlendirme kontrol kuralı (4.16) sadece potansiyel enerji ataması yapılarak elde edilebilir. Bu durumda $M_d = M$ ve $J_2 = 0$ olmaktadır ve bu durumda enerji biçimlendirme kontrol kuralı (4.16) özgün sistem ve istenen sistemin potansiyel enerji fonksiyonlarının ayrık-gradyanları kullanılarak inşaa edilebileceği gösterilebilir. Bu amaçla,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_q H &= \bar{\nabla}_q K + \bar{\nabla}_q P(q) \\ \bar{\nabla}_p H &= \bar{\nabla}_p K \end{aligned} \quad (4.36)$$

ifadeleri göz önüne alınarak (4.14) sistem denklemleri,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ G(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\
&= T \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_p K \\ -\bar{\nabla}_q K - \bar{\nabla}_q P(\mathbf{q}) \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ G(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

biçiminde tekrar yazılsın. Hamiltonian sistem (4.37)'yi $\mathbf{q}^*$ noktasında bir kararlı denge noktasına sahip hale getirebilmek için uygun bir kapalı çevrim enerji fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{P}_d(\mathbf{q}) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)^T K_p (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) \right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklindedir; burada $K_p = K_p^T > 0$ özelliğinde bir matristir. Böylece kapalı çevrimli sistem için öngörülen yani istenen Hamiltonian sistem aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}_d \\ \nabla_p \mathcal{H}_d \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Sonuç olarak kapalı çevrimli sistemin gradyan temelli ayrık modeli için,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H_d \\ \bar{\nabla}_p H_d \end{bmatrix} \\
&= T \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_p K \\ -\bar{\nabla}_q K - \bar{\nabla}_q P_d(\mathbf{q}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Eğer (4.37) eşitliğinin sağ tarafı (4.40) eşitliğinin sağ tarafına eşitlenirse enerji biçimlendirme işlevini yapacak olan ayrık kontrol kuralı $\mathbf{u}_{es}(\mathbf{k})$, doğrudan açık çevrimli ve kapalı çevrimli sistemin ayrık zamanlı modelinin parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\mathbf{u}_{es}(\mathbf{k}) = -G^{-1}(\mathbf{q}_k) \left(\bar{\nabla}_q P_d - \bar{\nabla}_q P \right) \tag{4.41}$$

Bu ifadelerdeki ayrık gradyanların elde edilmesi işlemleri yapılırsa; Tanım 3.2'de önerilen ayrık-gradyan ifadesi kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\nabla_q \mathcal{P}(\mathbf{q}) &= \mathcal{P}_{gr}(\mathbf{q}) \mathbf{q} \\
\Phi_p(\mathbf{q}_{k+1}, \mathbf{q}_k) &= \frac{1}{4} \left(\mathcal{P}_{gr}(\mathbf{q}_{k+1}) + \mathcal{P}_{gr}(\mathbf{q}_k) \right)
\end{aligned} \tag{4.43}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_q P &= \Phi_p(q_{k+1}, q_k)(q_{k+1} + q_k) \\ \bar{\nabla}_q P_d &= K_p \left(\frac{1}{2}(q_{k+1} + q_k) - q^* \right)\end{aligned}\quad (4.44)$$

ilişkileri ile verilebilir. Bu ifadelerdeki q_{k+1} terimi $y(k)$ değerleri,

$$y(k) = G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H = G^T(q_k) \frac{(q_{k+1} - q_k)}{T} \quad (4.45)$$

kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir,

$$q_{k+1} = T G^{-T}(q_k) y(k) + q_k \quad (4.46)$$

Bu ilişki göz önüne alınarak, (4.44) ayrık-gradyan ifadeleri (4.41) ifadesinde yerlerine yazılırsa enerji biçimlendirme işleminden sorumlu ayrık zamanlı kontrol kuralı,

$$\begin{aligned}u_{es}(k) = & -G^{-1}(q_k) \left[T \left(\frac{K_p}{2} - \Phi_p(q_{k+1}, q_k) \right) G^{-T}(q_k) y_k + \right. \\ & \left. + \left(\frac{K_p}{2} - \Phi_p(q_{k+1}, q_k) \right) q_k - K_p q^* \right]\end{aligned}\quad (4.47)$$

biçiminde verilebilir. Ayrıca, sönüm atama işlemini yapacak olan $u_{di}(k)$ kontrol kuralı, istenen sönüm $R_d = G(q) K_v G^T(q)$ olmak üzere, kapalı çevrimli sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_d \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}_d \\ \nabla_p \mathcal{H}_d \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

şeklinde seçilerek ve sistemin $y(k)$ çıkış değişkeni (4.45) kullanılarak,

$$u_{di}(k) = -K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H_d = -K_v y(k) \quad (4.49)$$

biçiminde elde edilebilir. Tam sürülmüş sistemler için kullanılabilecek, bu - enerji biçimlendirme (4.47) ve sönüm atama (4.49) - kontrol kuralları izleyen sayısal deneyler bölümünde çift-sarkaç sisteminin ayrık zamanlı kontrolü için uygulanmış ve sınanmıştır.

4.4 Sayısal Deneyler

Literatürde eksik sürülmüş sistemlerin IDA-PBC tekniği ile kontrolü üzerine çeşitli çalışmalar vardır ve bu çalışmalarda teknik çeşitli doğrusal olmayan sistemlere uygulanmıştır (Ortega ve diğ., 2002a, 2002b, Ortega ve Garcia-Conseco, 2004, Gordillo, ve diğ., 2002, Viola ve diğ., 2007, Acosta ve diğ., 2005, Mahindrakar ve diğ., 2006, Sandoval ve diğ., 2008, Morillo ve diğ., 2008). Belirtilen çalışmalarda ele alınan Hamiltonian sistemlerin sürekli-zamanlı IDA-BPC kontrolü için (4.9) ve (4.10)'da verilen kısmi differansiyel eşitlik koşullarını sağlayan bazı istenilen sistem sınıfları verilmiştir. Bu tez çalışmasında araba- sarkaç ve top-çubuk gibi iyi bilinen iki eksik-sürülmüş ve tam sürülmüş olduğu varsayımı ile çift sarkaç sistemlerinin doğrudan ayırık zamanlı kontrolü ele alınmıştır. Örneklerde nedenselliği sağlamak için aşağıdaki yaklaşıklıklar kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}H(q_{k+1}, p_{k+1}, q_k, p_k) &\approx \bar{\nabla}H(q_k, p_k, q_{k-1}, p_{k-1}) \\ \bar{\nabla}H_d(q_{k+1}, p_{k+1}, q_k, p_k) &\approx \bar{\nabla}H_d(q_k, p_k, q_{k-1}, p_{k-1})\end{aligned}\quad (4.50)$$

Ayrık-gradyan kullanılarak elde edilen ayırık zamanlı kontrol kuralının hesap karmaşıklığı emulatörün hesap karmaşıklığı ile aynı mertebededir. Bu özellik endüstriyel uygulamalar için önemlidir. Örneklerde kullanılan örnekleme periyodları için ayırık-kontrol kuralı ile kontrol edilen sistemin başarımı çok iyi olduğu halde emülatör ayırık kontrol kuralı ile kontrol edilen sistemin kararsız olduğu gözlenmiştir.

Örnek 1 (Araba-Sarkaç):

Araba-sarkaç sistemin enerji fonksiyonu,

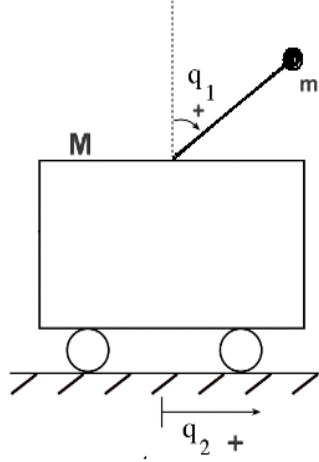
$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q) \quad (4.51)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & b \cos(q_1) \\ b \cos(q_1) & c \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P}(q) = a \cos(q_1) \quad (4.52)$$

$$a = \frac{g}{l}, \quad b = \frac{1}{l}, \quad c = \frac{M + m}{ml^2}$$

ve kapı matrisi $G = e_2$ biçimindedir (Viola ve diğ., 2007). Burada q_1 sarkaçın dikey ile yaptığı açı, q_2 araba konumu, m sarkaçın kütlesi, l sarkacın boyu, M arabanın kütlesi ve g yer çekimi ivmesidir. Bu örnekte kontrolün amacı arabayı istenilen bir

konuma götürmek ve aynı zamanda sarkacı dikey olarak dengede tutmaktır. Yani kararlı kılınmak istenilen denge noktası $q_{1*} = 0$ ve herhangi bir q_{2*} değeridir.



Şekil 4.1 : Araba-sarkaç sistemi

Bu çalışmada önerilen yöntemde ayrık zamanlı enerji biçimlendirme ve sönüm atama kontrol kuralları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$u_{es} = (G^T G)^{-1} G^T \left\{ \begin{array}{l} \bar{\nabla}_q H - M_d(q_k) M^{-1}(q_k) \bar{\nabla}_q H_d \\ + J_2(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p H_d \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

$$u_{di} = -K_v G^T \bar{\nabla}_p H_d$$

Bu kontrol kurallarındaki ayrık-gradyan terimi için Tanım 3.3’de verilen ayrık-gradyan tanımı kullanılmıştır. Öte yandan, bu örnekte $\mathcal{H}_d(q, p)$ ve $J_2(q_k, p_k)$ literatürde verilen ve aşağıda kısaca özetlenmiş olan bir sürekli-zamanlı tasarım yönteminin Viola ve diğ., (2007) çözümünden alınmıştır. Söz edilen çalışmada M_d , p_d ve J_2 ’nin tasarımı bir koordinat dönüşümü kullanılarak yapılmaktadır. Eski ve yeni koordinatlar arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} T &= M, \quad S = \nabla_q (T \tilde{p}), \quad p = T(q) \tilde{p} \\ M_d &= T \tilde{M}_d T^T, \quad p_d = \tilde{p} \\ J_2(q, p) &= T \tilde{J}_2(q, T^{-1} p) T^T + S(q, T^{-1} p) M^{-1} T \tilde{M}_d T^T \\ &\quad - T \tilde{M}_d T^T M^{-1} S^T(q, T^{-1} p) \end{aligned} \quad (4.54)$$

burada T koordinat dönüşüm matrisidir ve $T = M$ alınmıştır ve $\tilde{M}_d$, $\tilde{p}_d$ ve $\tilde{J}_2$ yeni koordinat takımındaki tasarım parametreleridir. $m_{22}^0 \geq 0$ serbest parametre olmak üzere $\tilde{M}_d$ ve $\tilde{J}_2$,

$$\tilde{M}_d = \begin{bmatrix} \frac{kb^2}{3} \cos^3(q_1) & -\frac{kb}{2} \cos^2(q_1) \\ -\frac{kb}{2} \cos^2(q_1) & k \cos q_1 + m_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\tilde{J}_2 = \left(\tilde{p}^T \tilde{M}_d^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1(q) \\ \alpha_2(q) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

biçiminde alınmıştır. M_d ve J_2 matrisleri (4.54 - 4.56)'de verilen ilişkiler kullanılarak elde edilmiştir. Skaler $k > 0$ serbest parametre olmak üzere $\alpha_1(q)$ ve $\alpha_2(q)$ fonksiyonları Viola ve diğ. (2007)'deki gibi,

$$\alpha_1 = -k^2 b^3 \cos^4(q_1) \sin(q_1) / 12, \alpha_2 = k^2 b^2 \cos^3(q_1) \sin(q_1) / 12 \quad (4.57)$$

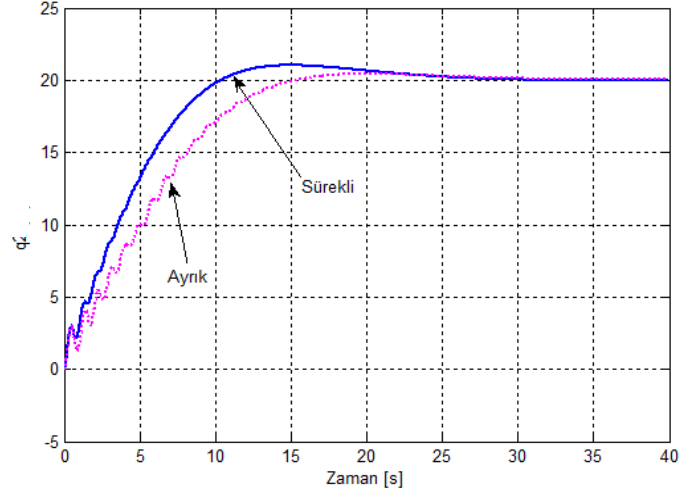
biçiminde alınmıştır. Böylece $\tilde{M}_d$ 'nin $q_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ aralığında pozitifliği garantilenmiştir (Acosta ve diğ., 2005; Viola ve diğ., 2007). İstenen potansiyel enerji fonksiyonu ise $\tilde{P}_d$,

$$\tilde{p}_d = \frac{3a}{kb^2 \cos^2 q_1} + \frac{K_p}{2} \left[\begin{aligned} & q_2 - q_{2*} + \frac{3}{b} \ln(\sec q_1 + \tan q_1) \\ & + \frac{6m_{22}^0}{kb} \tan q_1 \end{aligned} \right]^2 \quad (4.58)$$

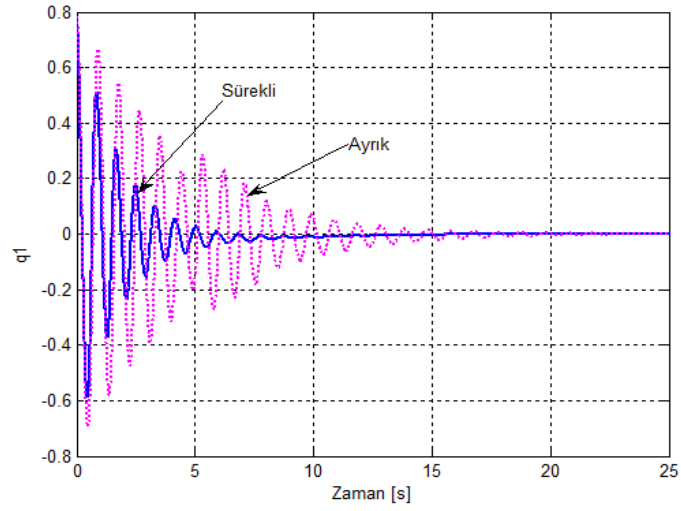
biçimindedir (Viola ve diğ., 2007). $K_p > 0$ ve q_{2*} kararlı kılınmak istenen araba konumudur.

Benzetimlerde sistem parametreleri $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $l = 1 \text{ m}$, $M = 5 \text{ kg}$, $m = 1 \text{ kg}$ biçiminde alınmış ve ayrık zamanlı kontrolör tasarım parametreleri olarak $K_v = 0.5$, $K_p = 1.0$, $k = 0.1$, $m_{22}^0 = 0.002$ seçilmiştir. Benzetimler istenen araba konumu $q_{2*} = 20$ olmak üzere $T = 0.01 \text{ s}$ örnekleme periyodu ve $(q(0), p(0)) = (\pi/4, -0.1, 0.1, 0.5)$ ilk koşulu ile yürütülmüştür. Benzetim sonuçları doğrudan ayrık zamanlı ve sürekli zamanlı kontrol altındaki kapalı çevrim sistemin

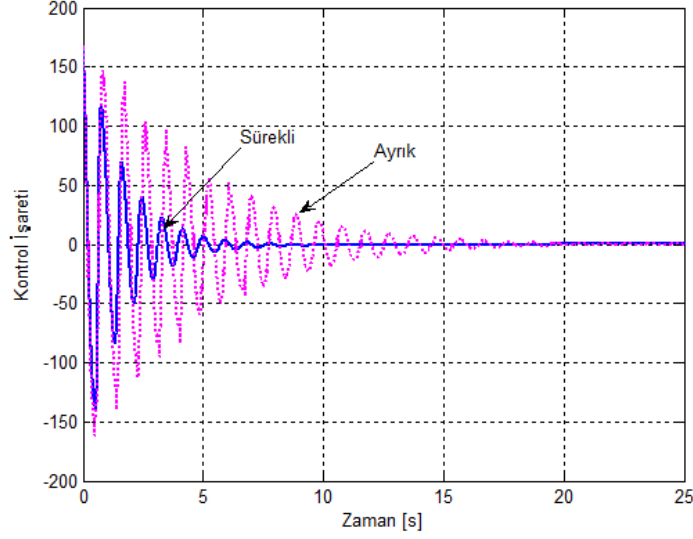
değişkenlerinin zamana göre değişimi karşılaştırma amacı ile Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de birlikte verilmişlerdir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5’de ise sırasıyla kontrol işaretinin zamanla değişimi ve sistemin faz portresi gösterilmiştir.



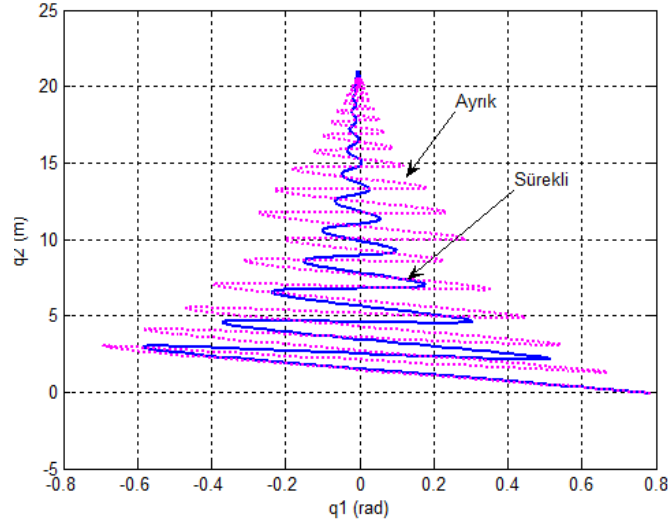
Şekil 4.2 : Araba konumunun zamana bağlı değişimi.



Şekil 4.3 : Sarkaç açısının zamana bağlı değişimi.



Şekil 4.4 : Sürekli ve ayrık kontrol kuralları.



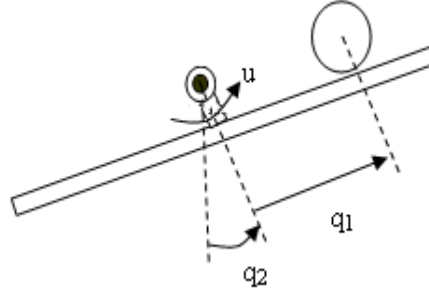
Şekil 4.5 : q_1 ve q_2 değişkenlerine faz portresi.

Örnek 2 (Top-Çubuk):

Bu örnekte q_1 top konumu, q_2 çubuk açısı ve çubuk boyu olmak üzere Hamiltonian modeli

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^2 + q_1^2 \end{bmatrix}, p(q) = gq_1 \sin(q_2), G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.59)$$

biçiminde verilen top ve çubuk sistemi ele alınmıştır (Ortega ve diğ., 2002b).



Şekil 4.6: Top-çubuk sistemi.

Top ve çubuk sistemini $q_{1*} = q_{2*} = 0$ noktasında kararlı kılmak istenmektedir. Ayırık zamanlı kontrol kuralının tasarımında literatürde bulunan Ortega ve diğ., (2002b) çalışmasında verilen sürekli-zamanlı sistem kullanılmıştır. Eylemsizlik matrisi M_d ve sistem bağlantı yapı matrisi J_d ve potansiyel enerji fonksiyonu $\mathcal{P}_d$ kapalı çevrim sisteme ilişkin dinamikleri

$$\dot{j} = q_1 \left(p_1 - \sqrt{\frac{2}{L^2 + q_1^2}} p_2 \right), \quad \Phi(z) = \frac{K_p}{2} z^2 \quad (4.60)$$

ve $z(q) = q_2 - \arcsin h\left(\frac{q_1}{L}\right) / \sqrt{2}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$M_d = (L^2 + q_1^2) \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{L^2 + q_1^2}} & 1 \\ 1 & \sqrt{2(L^2 + q_1^2)} \end{bmatrix}$$

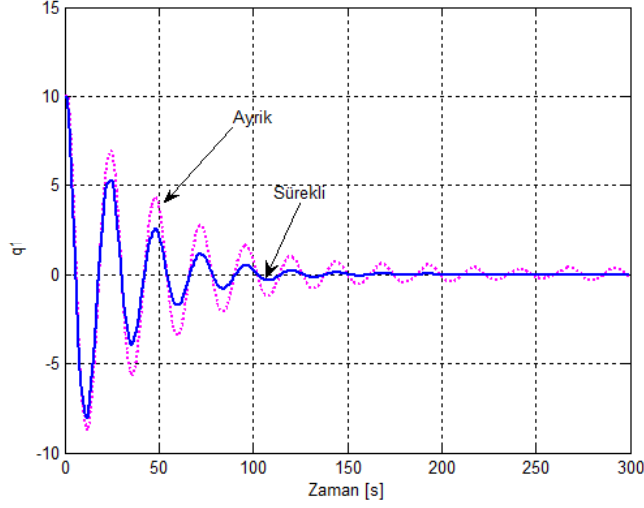
$$J_2(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & j(p, q) \\ -j(p, q) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathcal{P}_d(q) = g(1 - \cos(q_2)) + \Phi(z(q))$$

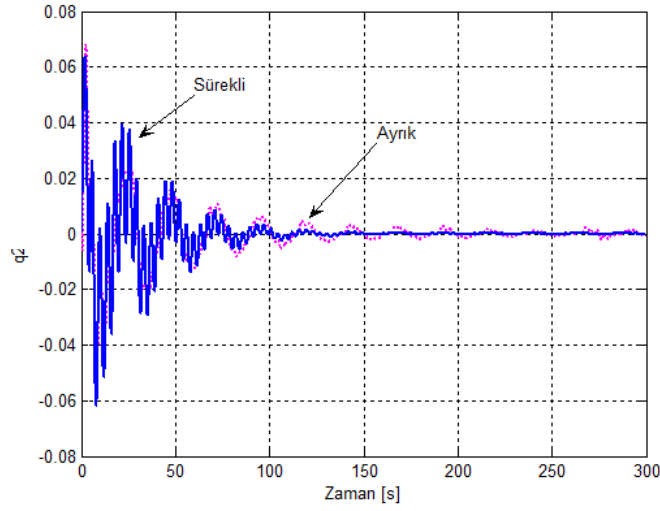
Benzetimlerde $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$, $L = 10 \text{ m}$ sistem parametreleri için kontrolör tasarım parametreleri $K_v = 50$, $K_p = 1.0$, $k = 0.1$ olarak seçilmiştir.

$(q(0), p(0)) = (10.0, 0.0, 0.0, 0.0)$ ilk koşulu, $T = 0.01 \text{ s}$ örnekleme periyodu ve $q_{1*} = 0$ istenen top konumu ile yürütülen benzetime ilişkin sonuçlar Şekil 4.7-4.10'da verilmiştir. Ayırık zamanlı ve sürekli-zamanlı kontrol kuralları altındaki kapalı çevrim sisteme ilişkin zaman-tanım bölgesi yanıtları karşılaştırma amacıyla

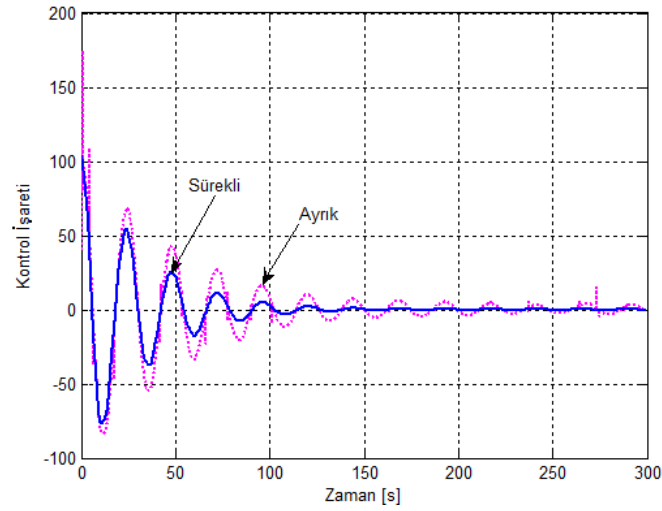
Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de birlikte verilmiştir. Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’da sırasıyla kontrol işaretinin zamanla değişimi ve sisteme ilişkin faz portresi verilmiştir.



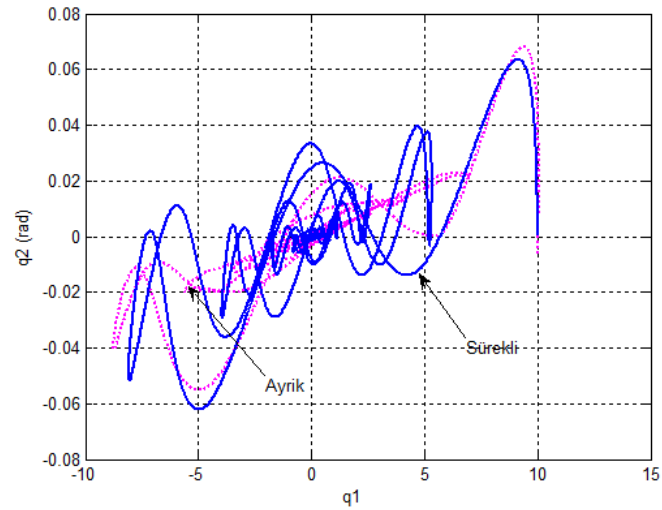
Şekil 4.7: Top konumunun zamanla değişimi.



Şekil 4.8: Çubuk açısının zamanla değişimi.



Şekil 4.9: Sürekli ve ayırık kontrol işaretleri.



Şekil 4.10: q_1 ve q_2 değişkenlerine ilişkin sürekli ve ayırık faz diyagramları.

Burada ele alınan her iki örnek için elde edilen sonuçlar - eksik-sürülmüş duruma ilişkin- bu tez çalışmasında önerilen yöntemle elde edilen ayırık zamanlı kontrol kuralının, sürekli kontrol kuralı yerine kullanılabileceğini göstermiştir. Öte yandan, her iki örnek için sürekli kontrol işaretinin ayırık anlardaki değerleri -emülasyon yolu ile ayırık kontrol kuralı- uygulanmış, ancak seçilen örnekleme periyotları için kapalı çevrimli sistemler kararsız olmuşlardır.

Aşağıdaki örnekte ise çift-sarkaç sistemi tam sürülmüş bir sistem olarak değerlendirilmiş ve (4.47) ve (4.49) kontrol kurallarının başarımı bu sistem üzerinde sınanmıştır.

Örnek 4.3 (Çift sarkaç):

Dinamik denklemleri aşağıda verilen çift sarkaç sistemini ele alalım,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = J \nabla \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q) \quad (4.62)$$

burada,

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

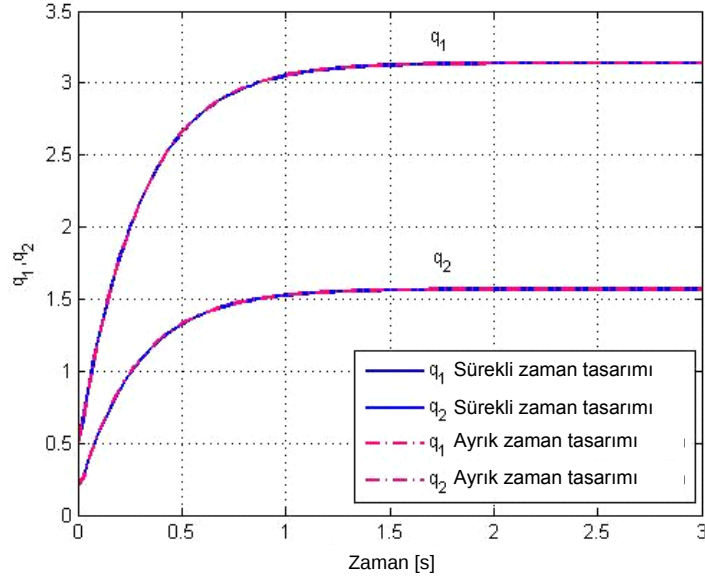
$$\mathcal{P}(q) = -[m_2 g l_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1]$$

şeklinde elde edilir. Benzetim için sistem parametreleri $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$,

$l_1 = 0.2 \text{ m}$, $l_2 = 0.3 \text{ m}$, $g = 0.98 \text{ ms}^{-2}$, örnekleme periyodu ise $T = 0.025 \text{ s}$ alınmıştır.

Kontrol amacı olarak sistemin $\begin{bmatrix} q_1^* & q_2^* & p_1^* & p_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.14 & 1.57 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ noktasında asimptotik kararlı kılınması alınmıştır. Tasarım parametreleri olarak $K_p = 50I_2$, $R_d = 15I_2$ seçilmiştir.

Şekil 4.11'de $\begin{bmatrix} q_{10} & q_{20} & p_{10} & p_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$ başlangıç durumunda bulunan sistemin ayrık kontrol kuralı ve sürekli kontrol kuralı ile elde edilmiş yörüngeleri karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Görüldüğü gibi elde edilen ayrık zamanlı kontrol kuralı sürekli kontrol kuralı ile hemen hemen aynı başarıma sahiptir ve bu örnekte de emülatör, seçilen örnekleme periyodu için, kapalı çevrim sistemi kararsız yapmıştır.



Şekil 4.11 : Çift sarkaç sisteminin sürekli ve doğrudan ayrik kontrol kuralı altında cevapları.

4.5 Sonuçlar

PBC tekniğinin n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için ayrik zamanlı eşdeğeri geliştirilmiştir. Enerji biçimlendirme ve sönüm atama kontrol kuralları ele alınan açık çevrim sistem ile istenen kapalı çevrim sistemlerin doğrudan ayrik zamanlı modelleri kullanılarak elde edilmiştir. Önerilen yöntemin kararlılık incelemesi enerji ilişkileri üzerinden yapılmıştır. Yöntemin etkinliğini sınamak için eksik-sürülmüş araba-çubuk ile top-çubuk sistemleri ve tam sürülmüş çift-sarkaç sistemine uygulanmış ve benzetimleri yapılmıştır. Her üç örnek için elde edilen benzetim sonuçları, bu çalışmada geliştirilen doğrudan ayrik zamanlı PBC tekniğinin başarılı olduğunu göstermiştir. Ayrik kontrolör sürekli kontrolöre yakın bir başarımla gösterirken sürekli kontrolörün emülatörü her üç örnekte de kapalı çevrim sistemi kararsız yapmıştır.

5. HAMILTONIAN SİSTEMLERDE AYRIK ZAMANLI H_∞ OPTIMAL KONTROL

5.1 Giriş

Bu bölümde, Hamiltonian sistemlerin bir sınıfı olan n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için, bozucu bastırma ve dayanıklı bozucu bastırma problemleri ele alınmış ve ayrık zamanlı statik durum geribeslemesi kullanıldığında problemin çözümünü veren doğrudan ayrık zamanlı bir tasarım yöntemi sunulmuştur.

Hamiltonian sistemler, enerji fonksiyonu üzerinden tanımlanan bir model olduğu için, Hamiltonian fonksiyonu sistem için bir Lyapunov fonksiyonu olarak kullanılabilir. Ayrıca, iç bağlantı matrisi $J(\mathbf{x})$ ve kayıp matrisi $R(\mathbf{x})$ 'in özel yapılara sahip olması, Hamiltonian sistemlerin H_∞ optimal kontrol probleminin çözümünün elde edilmesi, genel doğrusal olmayan sistemlere göre daha kolay ve yalın olmaktadır (Van der Schaft, 2000; Mei ve diğ., 2005). L_2 kazancı üzerinden tanımlanan bozucu bastırma probleminin çözümü genel doğrusal olmayan sistemler için Hamilton-Jacobi-Isacs (HJI) kısmi diferansiyel eşitsizliğin çözümünü gerektirirken, aynı problemin Hamiltonian sistemler için çözümü sadece cebirsel bir HJI denkleminin çözümüne indirgenebilmektedir. Xi ve Cheng, (2000), Shen ve diğ., (2000), Mei ve diğ., (2005) gibi çalışmalarda sürekli Hamiltonian sistemler için bazı H_∞ kontrol problemleri ele alınmış ve bu problemlerin çözümü sürekli-zamanlı çözümü üzerine bazı sonuçlar sunulmuştur. Ancak ayrık zamanlı Hamiltonian sistemler için bilindiği kadarı ile literatürde tanımlanmış bozucu bastırma problemi ve ilişkin çözüm önerisi bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasında, ayrık zamanlı Hamiltonian sistemler için bozucu bastırma ve dayanıklı bozucu bastırma problemleri ele alınmıştır. Bölüm 4'de sunulan IDA-BPC tasarımının doğrudan ayrık zaman karşılığı ile veya başka bir kontrol işlemi ile kararlı kılınmış olduğu kabul edilmiştir.

Bu bölümün içeriği şöyle özetlenebilir; Bölüm 5.2'de doğrusal olmayan H_∞ optimal kontrol yaklaşımına ilişkin literatür özetine yer verilmiştir. Bölüm 5.3'de n-serbestlik

dereceli mekanik sistemler için bozucu bastırma problemi ele alınmış ve problem ayrık zamanda ifade edilmiştir. Ele alınan sistemin ayrık zamanlı modeli Bölüm 3’de verilen yöntemle türetilmiştir. Tanımlanan problemin statik durum geribeslemesi ile çözümünün varlık koşulu, yeter koşul olarak elde edilmiş ve sonuçlar bir teorem ile sunulmuştur. Önerilen doğrudan ayrık tasarım yöntemi, çift sarkaç sisteminin bozucu bastırma probleminin çözümünde kullanılmış ve benzetim yoluyla başarımı sınanmıştır. Ardından, Bölüm 5.4’de ele alınan Hamiltonian sistemin parametrelerinde - kütle, uzunluk v.d. - belirsizlik bulunduğu durum için ayrık zamanlı dayanıklı bozucu bastırma problemi ele alınmıştır. Bu amaçla, önce n -serbestlik dereceli sürekli Hamiltonian sistemlerin dayanıklı kontrol probleminin, özel bir kontrol yapısı kullanıldığında bir bozucu bastırma problemine indirgenebildiği gösterilmiştir. Elde edilen bu sonuç kullanılarak, dayanıklı bozucu bastırma probleminin doğrudan ayrık tasarımı verilmiştir. Geliştirilen bu doğrudan ayrık zamanlı tasarım yöntemi çift sarkaç sistemine uygulanarak sınanmıştır ve benzetim sonuçları üzerinden irdelenmiştir. Benzetimlerde kontrol kuralları gerçekleştirirken gerekli olan ayrık-gradyan inşaaı için Tanım 3.2 ve Tanım 3.3 ‘de sunulmuş olan ayrık-gradyan tanımları kullanılmıştır.

5.2 Doğrusal Olmayan H_∞ Optimal Kontrol Literatür Özeti

Bozucu bastırma problemi ve özellikle belirsizlikler (parametrik ve/veya yapısal) altında problemi çözen kontrol kuralının tasarımı hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemler için önemli kontrol mühendisliği problemlerinden biri olarak bilinir. H_∞ optimal kontrol kuramı ve teknikleri, belirsizliklere sahip sistemlere ilişkin çeşitli kontrol problemlerinin çözümü için geliştirilmiştir ve özellikle doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için önerilmiş yöntemler, yaygın olarak kullanılmaktadır. İlgili literatürde, bir çok kontrol probleminin bozucu bastırma problemine eşdeğer kılınabildiği gösterildiği için, bozucu bastırma problemi kontrol kuramı içinde önemli bir yere sahiptir (Doyle ve diğ., 1989; Gahinet ve Apkarian, 1994). Doğrusal olmayan sistemlerin dayanıklı bozucu bastırma probleminin çözümünde H_∞ kuramı ve tekniklerini kullanan oldukça fazla sayıda çalışma vardır. Astolfi, (1993), Isidori, (1994), Isidori ve Astolfi, (1992), Isidori ve Kang, (1995), Isidori ve Lin, (1998), Van der Schaft, (1991), Van der Schaft, (1992a), Van der Schaft, (1992b), Lu ve Doyle, (1994a), Pavel ve Fairman, (1997), Yung ve diğ.

(1996), Yung, ve diğ., (1997), Yung ve diğ., (1998), Lu ve diğ., (1996), Lu ve diğ., (2000), Lee ve Smith, (2000), Ezal ve diğ., (2001), Djoudi ve Zames, (2002) , Ito ve Jiang, (2004), Wu ve Lee, (2004), Saengdejing ve Qu, (2005), Wu, ve diğ., (2006), Fu ve diğ., (2006) gibi yayınlarda sürekli doğrusal olmayan sistemler için H_∞ optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. Özel olarak, sürekli-zamanlı doğrusal olmayan sistemlerin yerel bozucu bastırma problemi Ball ve Helton, (1989), Isidori, (1991), Isidori ve Astolif, (1992), Van der Schaft, (1991), Van der Schaft, (1992a), Isidori, (1993), Lai ve Hauser, (1993), Ball ve diğ., (1993), Isidori ve Kang, (1995) çalışmalarında kapsamlı olarak ele alınmıştır. Belirsizlik içeren sistemler için standart durum uzayı yapısı kullanılarak durum geri beslemesi ve çıkış geribeslemesi ile H_∞ optimal kontrol problemine ilişkin çözümler için, Shen ve Tamura, (1995), Lu ve diğ., (2000), Djouadi ve Zames, (2002), Wu ve Lee, (2004), Zheng ve Lu, (2005), yayınlarına başvurulabilir. Belirsizlikler içeren sürekli Hamiltonian sistemler için ise Mei ve diğ., (2005) tarafından, durum geribeslemesi ile dayanıklı bozucu bastırma problemi üzerinde çalışılmıştır. Doğrusal olmayan sistemlerin ele alındığı yukarıda sözü edilen çalışmaların çoğu, ele aldıkları H_∞ optimal kontrol problemlerinin çözümü üzerine yeter koşullar sunmaktadır ve bu koşullar Hamilton-Jacobi eşitliği ya da eşitsizliği biçimindedir.

Ayrıca, Lin ve Xie, (1998) yılındaki çalışmalarında, “affine” ayrık zamanlı sistemlerin, doğrusal olmayan H_∞ kontrolü ile, bu tür sistemlerin bir nokta civarında doğrusallaştırılması ile elde edilen sistemlerin, doğrusal H_∞ kontrolü arasındaki ilişkiler incelemiştir. Söz konusu çalışmada, sistemin bir nokta civarındaki doğrusal modelini temel alarak, sistemin L_2 kazancını herhangi pozitif gerçek bir sayıdan daha küçük yapacak şekilde tasarlanan kontrol kuralının, doğrusal olmayan sistemin L_2 kazancını da yerel olarak aynı yapacağı gösterilmiştir.

Sürekli-zamanda, doğrusal olmayan H_∞ kontrol problemi üzerine bir çok çalışma olmasına karşın, ayrık zamanlı H_∞ kontrol probleminin çözümüne ilişkin araştırmalar Lin ve Brynes, (1994), Lin ve Brynes, (1995c), Lin ve Brynes, (1996) çalışmaları ile başlamıştır. Lin ve Brynes, (1995c) ve Lin ve Brynes, (1996) çalışmalarında ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemlerin, doğrusal olmayan çıkış geribeslemesi ile H_∞ kontrol probleminin çözümünün de bir Hamilton-Jacobi kısmi

diferansiyel eşitsizliğinin çözümünden elde edilebileceğini göstermiştir. Lin ve Brynes, (1996)'daki çalışmalarında ayrık zamanlı bozucu bastırma probleminin çözümünü, (i) tam bilgi geribeslemesi (full information feedback, i.e. hem bozucu hem durum), (ii) durum geribeslemesi ve (iii) dinamik çıkış geribeslemesi için sunmuşlardır. Belirsizlikler içeren ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemlerin H_∞ kontrolüne ilişkin az sayıda çalışma vardır (Haddad ve diğ., 2000; Ibrir, 2000; Coutinho ve diğ., 2004; Wu ve diğ., 2006). Hamiltonian sistemler için ise, ayrık zamanlı bozucu bastırma probleminin ele alındığı herhangi bir çalışmaya literatürde rastlanmamıştır.

Bu literatür özet alt bölümünün izleyen kısmında, genel doğrusal olmayan sistemler için sürekli-zamanlı H_∞ optimal kontrol probleminin literatürde var olan tanımı, belirsizlik içermeyen ve belirsizlik içeren sistemler için durum geribeslemesi ile bozucu bastırma probleminin çözümlerinin bulunduğu temel çalışmalarda elde edilen sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, bu doktora çalışmasında ayrık karşılığı ele alınan ve türetilen, belirsizlik içeren sürekli Hamiltonian sistemler için durum geribeslemesi ile bozucu bastırma probleminin çözümü, ilgili literatürden özetle aktarılmıştır. Son olarak, ayrık-zamanlı doğrusal olmayan sistemlerde bozucu bastırma probleminin genel tanımı ve durum geribeslemesi ile çözümüne ilişkin temel çalışmalarda verilen sonuçlar kısaca özetlenmiştir.

5.2.1 Sürekli zamanlı H_∞ optimal bozucu bastırma problemi

Dinamik denklemleri,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, w, u) \\ z &= Z(x, u, w) \\ y &= Y(x, w)\end{aligned}\tag{5.1}$$

biçiminde verilen doğrusal olmayan sistem ele alınsın. Burada, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^r$, $z \in \mathbb{R}^s$, $y \in \mathbb{R}^p$ boyutlu vektörler ve $F(x, w, u)$, $Y(x, w)$, $Z(x, u, w)$ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$ sıfır civarında tanımlanmış, $F(0, 0, 0) = 0$, $Z(0, 0, 0) = 0$, $Y(0, 0) = 0$ özelliğinde fonksiyonlardır. Bu gösterilimde, w dış bozucuları ve izlenmesi istenilen işaretleri de içerebilen dış girişlere, z ise ceza değişkenine (penalty signal) karşı düşer. Kontrolün iki amacı vardır; kapalı çevrimli sistemin iç kararlılığını sağlamak ve w girişinin, z çıkışı üzerindeki etkisini azaltmaktır. Bir başka söyleyişle; H_∞

optimal bozucu bastırma problemi, sistemin w 'dan z 'ye L_2 kazancını, bozucu bastırma seviyesi olarak adlandırılan pozitif skaler gerçekte bir γ sayısından küçük yapan, yani,

$$\int_0^T z^T(s)z(s)ds \leq \gamma^2 \int_0^T w^T(s)w(s)ds \quad (5.2)$$

ilişkisini sağlayan bir kontrol kuralını tasarlamak olarak tanımlanır (Isidori ve Kang, 1995). Bölüm 2'de söz edildiği gibi, kapalı çevrimli sistemin, (5.2)'de verilen L_2 kazanç koşulunu sağlaması, $s(u, y) = \gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı olması ile ilişkilendirilebilir ve bu ilişki doğrusal olmayan sistemler için H_∞ optimal bozucu bastırma probleminin çözümünde anahtar rol oynamaktadır.

5.2.1.1 Durum geribeslemesi ile çözüm

Denklemleri (5.1)'de verilen doğrusal olmayan sisteme, $\alpha(x)$ biçiminde bir durum geribeslemesi uygulandığında,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, w, \alpha(x)) \\ z &= Z(x, w, \alpha(x)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

şeklinde bir kapalı çevrimli sistem elde edilir. Isidori ve Astolfi, (1992), Isidori ve Kang, (1995) tarafından, (5.3)'de verilen kapalı çevrim sisteminin durum geribeslemesi ile bozucu bastırma problemi, sistemi $s(w, z) = \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı (dissipative) kılan, $u = \alpha(x)$ kontrol kuralını bulma problemine eşdeğer olduğu gösterilmiş ve çözülmüştür. Kontrol kuralı $\alpha(x)$, doğrusal olmayan statik bir durum geribeslemesidir. Bu tezin izleyen bölümlerinde *durum geribeslemesi* sözü ile *statik durum geribeslemesi* kastedilmektedir. Isidori ve Astolfi, (1992) çalışmalarında doğrusal olmayan “affine” sistemler için bozucu bastırma probleminin, durum geribeslemesi kullanılarak çözülmesi konusunu incelemişlerdir. Söz edilen çalışmada,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ z &= h_1(x) + k_{11}(x)w + k_{12}(x)u \\ y &= h_2(x) + k_{21}(x)w \end{aligned} \quad (5.4)$$

denklemleri ile verilen sistem ele alınmıştır ve bazı varsayımlar altında, eğer,

$$\begin{aligned}
V_x f(x) + h_1^T(x)h_1(x) + \frac{1}{4\gamma^2} V_x g_1(x)g_1^T(x)V_x^T \\
- \frac{1}{4} V_x g_2(x)g_2^T(x)V_x^T \leq 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Hamilton-Jacobi kısmi diferansiyel eşitsizliğini sağlayan yarı kesin pozitif bir $V(x)$ fonksiyonu varsa,

$$u = \alpha(x) = -\frac{1}{2} g_2^T(x)V_x^T \tag{5.6}$$

kontrol kuralının, (5.4) sistemi için H_∞ optimal bozucu bastırma problemini, bozucu bastırma seviyesi γ olacak şekilde çözdüğü gösterilmiştir. Yukardaki ifadelerde $V_x(x)$, $V(x)$ fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevlerinin yer aldığı bir satır vektördür.

5.2.1.2 Belirsizlik içeren sistemler için durum geribeslemesi ile çözüm

Shen ve Tamura, (1995) ise,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f(x) + \Delta f(x) + g_1(x)d + g_2(x)u \\
z &= h_1(x) + k_{12}(x)u
\end{aligned} \tag{5.7}$$

biçiminde verilen belirsizlik içeren sistemin, dayanıklı H_∞ bozucu bastırma probleminin durum geribeslemesi ile çözümüne ilişkin bir yöntem önermişlerdir. Bu gösterilimde, $x \in \mathfrak{R}^n$ durum vektörü, $u \in \mathfrak{R}^m$ kontrol girişi, $d \in \mathfrak{R}^n$ bozucu girişi, $z \in \mathfrak{R}^n$ ceza değişken vektörü ve f, g_1, g_2, h_1, k_{12} , $f(0)=0$ ile $h_1(0)=0$ özelliğinde, türevlenebilir bilinen dönüşümler ve son olarak $\Delta f(x)$ türevlenebilir ancak bilinmeyen – sistem belirsizliklerine karşı düşen- bir dönüşümdür.

Söz edilen çalışmada; $\Delta f(x)$ belirsiz dönüşümünün, $e: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{n \times q_1}$ türevlenebilir bilinen bir dönüşüm ve $\delta: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{q_1}$ türevlenebilir bilinmeyen bir dönüşüm olmak üzere, $\Delta f(x) = e(x)\delta(x)$ biçiminde olduğu ve $w: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^{q_2}$ verilen bir ağırlık dönüşümü olmak üzere,

$$\Omega := \{ \Delta f(x) \mid \delta(0)=0, \|\delta(x)\|^2 \leq \|w(x)\|^2 \forall x \in X \} \tag{5.8}$$

biçiminde tanımlanmış sınırlı bir kümenin içinde kaldığı kabul edilmiştir. Bu ve başka bazı varsayımlar altında,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}(x) \left\{ \begin{array}{c} g_1(x) g_1^T(x) + \lambda^2(x) e(x) e^T(x) \\ -g_2(x) g_2^T(x) \end{array} \right\} \frac{\partial^T V}{\partial x}(x) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ h_1^T(x) h_1(x) + \frac{1}{\lambda^2(x)} w^T(x) w(x) \right\} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Hamilton Jacobi eşitsizliğinin $V(x) \geq 0$ ($V(0)=0$) biçimde bir çözüme sahip olmasını sağlayan, bir $\lambda(x) > 0$ ölçek fonksiyonu varsa,

$$\alpha(x) = -g_2^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x}(x) \quad (5.10)$$

kontrol kuralının, ele alınan H_∞ kontrol probleminin - dayanıklı H_∞ bozucu bastırma probleminin durum geribeslemesi ile - bir çözümü olduğu gösterilmiştir.

5.2.1.3 Belirsizlik içeren sürekli Hamiltonian sistemler için durum geribeslemesi ile çözüm

Belirsizlik içeren sürekli Hamiltonian sistemlerin dayanıklı H_∞ bozucu bastırma problemi üzerine ise literatürde Mei, ve diğ., (2005) tarafından yapılan çalışma bulunmaktadır. Mei ve diğ., (2005) çalışmalarında Hamiltonian modeli verilen doğrusal olmayan bir sistem sınıfı için söz konusu problemin çözümünün Hamiltonian Jacobi kısmi diferansiyel eşitsizliğinin çözümüne gerek olmadan elde edilebileceğini göstermişlerdir. Söz edilen çalışmada belirsizlikler içeren doğrusal olmayan sistemin modeli,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [J(x) - R(x)] \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \Delta f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \\ y &= g_1^T(x) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.11)$$

biçiminde alınmıştır. Burada, w bozucu girişi ve y sistem çıkışı, $J(x)$ ters-simetrik iç bağlantı matrisi, $R(x)$ yarı-kesin pozitif kayıp matrisi ve $\mathcal{H}(x)$ sistemin enerji fonksiyonudur (Mei ve diğ., 2005). $\Delta f(x)$ ise $J(x)$ ve $R(x)$ 'deki parametre belirsizliklerini ve modelleme hatalarını temsil etmektedir. $\Delta f(x)$ fonksiyonunun,

$$\Omega = \left\{ \Delta f(x) = e(x)\delta(x) \mid \delta(0)=0, \|\delta(x)\| \leq \left\| m(x) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right\|, \forall x \in X \right\} \quad (5.12)$$

kümesi içinde kaldığı kabul edilmiştir. Bu tanımda yer alan $e(x)$ ve $m(x)$ bilinen düzgün dönüşümler, $\delta(x)$ bilinmeyen bir dönüşümdür (Mei ve diğ., 2005).

Bozucu bastırma başarım ölçütü olarak,

$$\sup_{\Delta f \in \Omega, x_0=0} \int_0^T \{y^T y + u^T M(x)u\} dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt \quad (5.13)$$

alınmıştır. Burada, $M(x)$ matrisi, $d(x)$ tam ranklı bir matris olmak üzere $M(x) = d^T(x)d(x)$ özelliğinde bilindiği varsayılan bir ağırlık matrisi ve $\gamma > 0$ ise bozucu bastırma seviyesidir (Mei ve diğ., 2005).

Ceza değişkeni z ,

$$z = \begin{bmatrix} y \\ d(x)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d(x) \end{bmatrix} u \quad (5.14)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Problemin çözümü (Mei ve diğ., 2005) çalışmalarında bir teorem ile sunulmuştur, bu teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.1: (5.11)-(5.14) ilişkileri ile tanımlanan sistemin,

- a) Herhangi $\Delta f \in \Omega$ için, (5.11) sisteminin, y çıkışına göre sıfır-durum sezilebilir olduğu,
- b) $d(x)$ matrisi tam sütun ranklı olduğu,
- c) $\mathcal{H}(x)$ enerji fonksiyonu, $x = 0$ 'da kesin bir yerel minimuma sahip olduğu,

varsayalım. Bu varsayımlar altında, eğer $\forall x \in X$ için,

$$\alpha^2 T(x, \lambda(x), \gamma) - 2\alpha R(x) + S(x, \lambda(x)) \leq 0 \quad (5.15)$$

koşulunu sağlayan pozitif bir α sayısı ve $\lambda(x) > 0$ özelliğinde bir ölçek fonksiyonu varsa,

$$u = c(x) = -\alpha \{d^T(x)d(x)\}^{-1} g_2^T(x) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \quad (5.16)$$

şeklinde inşaa edilen kontrol kuralı, ele alınan H_∞ optimal kontrol probleminin - hamiltonian sistemlerde dayanıklı H_∞ bozucu bastırma probleminin- bir çözümüdür. Burada,

$$T(x, \lambda(x), \gamma) = \gamma^{-2} g_1(x) g_1^T(x) + \lambda^2(x) e(x) e^T(x) - g_2(x) \{d^T(x) d(x)\}^{-1} g_2^T(x) \quad (5.17)$$

$$S(x, \lambda(x)) = g_1(x) g_1^T(x) + \frac{1}{\lambda^2(x)} m^T(x) m(x) \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanmış matrislerdir (Mei ve diğ., 2005). $\square$

Kolayca görülebildiği gibi Shen ve Tamura, (1995)'nin genel doğrusal olmayan sistemler için sundukları çözümde elde edilen yeter koşul (5.9), genel olarak çözüm yöntemi olmayan bir HJI kısmi diferansiyel eşitsizliği iken, Hamiltonian sistemler özelinde problemi ele alan Mei ve diğ., tarafından elde edilen (5.15) yeter koşulu cebirsel bir HJI eşitsizliğidir.

5.2.2 Ayırık zamanlı H_∞ optimal bozucu bastırma problemi

Ayrık zamanlı doğrusal olmayan bir sistem,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k, w_k) \\ z_k &= z(x_k, u_k, w_k) \\ y_k &= y(x_k, w_k) \end{aligned} \quad (5.19)$$

ile verilsin, burada $x_k \in \mathfrak{R}^n$ durum vektörü, $y_k \in \mathfrak{R}^p$ çıkış vektörü, $z_k \in \mathfrak{R}^s$ ceza değişkeni ve $w_k \in \mathfrak{R}^r, u_k \in \mathfrak{R}^m$ sırasıyla bozucu ve kontrol girişleridir ve $f(0,0,0) = 0, z(0,0,0) = 0, y(0,0) = 0$ özelliğindedir (Lin ve Brynes, 1996)

Ayrık zamanlı bozucu bastırma problemi, sürekli-zamanda olduğu gibi, kapalı çevrim sistemin L_2 kazancını bir bozucu bastırma seviyesi $\gamma \in \mathfrak{R}^+$ 'ne eşit ya da küçük yapan (Tanım 2.10) bir kontrol kuralı bulma problemi olarak tanımlanır (Lin ve Brynes, 1995c, Lin ve Brynes, 1996). Ayrıca, ayırık zamanda da, bozucu bastırma problemi, kapalı çevrimli sistemin belirli bir $s = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|w_k\|^2 - \|z_k\|^2)$ - katkı fonksiyonuna göre kayıplı olma özelliği ile ifade edilebilmektedir ve bu ilişki Lemma 2.1'de (Sınırlı Reel Lemma) verilmiştir.

5.2.2.1 Durum geribeslemesi ile çözüm

Ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistemlerde bozucu bastırma problemi ile ilgili temel çalışmalar, Lin ve Brynes (1994, 1995c, 1996)'a aittir. Lin ve Brynes (1996)'da durum geri beslemesi ile bozucu bastırma probleminin çözümünü

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(x_k) + B(x_k)u_k + E(x_k)w_k \\z_k &= C(x_k) + D_1(x_k)u_k + D_2(x_k)w_k \\y_k &= H(x_k) + Q(x_k)w_k\end{aligned}\quad (5.20)$$

sistemi için vermişlerdir. Burada $x_k \in \mathfrak{R}^n$ durum vektörü, $y_k \in \mathfrak{R}^p$ sistem çıkışı, $z_k \in \mathfrak{R}^s$ dış girişleri ve bozucuları da içerebilen ceza değişkenleri ve $w_k \in \mathfrak{R}^r, u_k \in \mathfrak{R}^m$ sırasıyla, bozucu ve kontrol girişleridir. Ayrıca, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $E(x)$, $D_1(x)$, $D_2(x)$, $H(x)$, $Q(x)$ fonksiyonları, sıfır civarında türevlenebilir uygun boyutlu fonksiyonlar ve $A(0) = 0$, $C(0) = 0$, $H(0) = 0$ özelliğindedir.

Lin ve Brynes, eğer,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=A(x)+B(x)u+E(x)w} B(x) + (C(x) + D_1(x)u + D_2(x)w)^T D_1(x) = 0 \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial V}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=A(x)+B(x)u+E(x)w} & E(x) + (C(x) + D_1(x)u + \\ & + D_2(x)w)^T D_2(x) - \gamma^2 w^T = 0\end{aligned}\quad (5.22)$$

şeklindeki denklemlerin çözümleri olan $u^*(x)$ ve $w^*(x)$ fonksiyonları ile yazılmış,

$$\begin{aligned}H &= V(A(x) + B(x)u^*(x) + E(x)w^*(x)) - V(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\|C(x) + D_1(x)u^*(x) + D_2(x)w^*(x)\|^2 - \gamma^2 \|w^*(x)\|^2 \right) = 0\end{aligned}\quad (5.23)$$

biçimindeki ayrık zamanlı Hamilton-Jacobi-Isaacs denklemini sağlayan pozitif tanımlı bir $V(x)$ fonksiyonu - $x = 0$ civarında yerel tanımlı türevlenebilir- varsa,

$$\begin{aligned}u &= k(x_k, w_k) = u^*(x_k) + H_{uu}^{-1}(x_k, u^*(x_k), w^*(x_k)) \\ &\times H_{wu}(x_k, u^*(x_k), w^*(x_k))w^*(x_k)\end{aligned}\quad (5.24)$$

biçimindeki bir geribesleme kontrol kuralının, kapalı çevrimli sistemin w_k 'dan z_k 'ya L_2 kazancını γ 'dan küçük ya da eşit kıldığını göstermiştir. Kontrol kuralı (5.24)'de, H_{wu} ve H_{uu} matrisleri, Hamiltonian fonksiyonun H 'nın, u ve w değişkenlerine göre kısmi türevler matrislerini göstermektedir. Problemin çözümünün varlığını belirlemek için (5.21) ve (5.22) kısmi diferansiyel eşitlikleri ile birlikte (5.23) ayrık zamanlı Hamiltonian-Jacobi-Isaacs eşitliğinin çözümü gereklidir. Bu varlık probleminin tam çözümünü elde etmek oldukça güç olduğundan (Lin ve Brynes, 1996), literatürde çeşitli yaklaşık çözümler önerilmiştir (Huang, 1999; Deng ve Huang, 2003).

Sürekli Hamiltonian sistemler için, bozucu bastırma probleminin çözümü için literatürde verilen varlık koşulu, genel doğrusal olmayan sistemler için aynı probleminin çözümü için verilen varlık koşulundan daha kullanışlı olduğu belirtilmişti. Benzer özelliğin, ayrık zamanlı sistemler için tanımlanmış aynı problem için de var olabileceği düşünülerek, Hamiltonian sistemler için ayrık zamanlı bozucu bastırma ve dayanıklı bozucu bastırma problemleri bu tez çalışmasında ele alınmıştır

5.3. Hamiltonian Sistemlerde Doğrudan Ayrık Tasarım ile Bozucu Bastırma

Dinamik denklemleri,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q, p))\nabla \mathcal{H}(q, p) + G_1(q)w + G_2(q)u \quad (5.25)$$

$$y(t) = G_1^T(q)\nabla \mathcal{H}(q, p)$$

şeklinde verilen Hamiltonian sistemi ele alalım. Burada $(q, p) \in X \subset \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ genelleştirilmiş koordinatlar, $y, w \in \mathcal{R}^{m_1}$ sırası ile bozucu girişi ve sistem çıkışı, $u \in \mathcal{R}^{m_2}$ kontrol girişi, J standart ters-simetrik iç bağlantı matrisi ve $R(q, p) \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ yarı kesin pozitif simetrik bir matristir. Bu matrisler,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad R(q, p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1(q, p) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$R_1(q, p) \in \mathcal{R}^{n \times n} \geq 0$$

biçimindedir. $g_1(q) \in \mathcal{R}^{n \times m_1}$, $g_2(q) \in \mathcal{R}^{n \times m_2}$ olmak üzere, bozucu ve kontrol giriş matrisleri – kapı yapıları- ise,

$$G_1(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(q) \end{bmatrix}, G_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

ile tanımlanır. Bu sistem genelleştirilmiş koordinatlarda tanımlanmış, bozucu altında bir Kapı-kontrollü Hamiltonian sistemdir. Bilindiği gibi (5.25) sisteminin enerji fonksiyonu $\mathcal{H}: \mathcal{R}^{2n} \rightarrow \mathcal{R}$, -Hamiltonian fonksiyonu- $M(q) = M(q)^T > 0$ genelleştirilmiş kütle matrisi olmak üzere,

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q) \quad (5.28)$$

ile belirlenir. Bozucu bastırma probleminin çözümü, sürekli sistemin gradyan temelli ayrık zamanlı modeli kullanılarak elde edilecektir. Çözüm koşulları, ayrık zamanlı modelde kullanılan ayrık-gradyanın $-\bar{\nabla}H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ - Tanım 3.1’de verilen koşulları tam olarak sağladığı varsayımı altında türetilmiştir. Bu koşulların sağlanmaması durumu için enerji ilişkileri üzerinden bir irdeleme de yapılmıştır.

Bölüm 3’de önerilen yöntem kullanılırsa (5.25-5.27) sisteminin ayrık zamanlı modeli T örnekleme periyodu olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T (J - R(q_k, p_k)) \bar{\nabla}H + T G_1(q_k) w + T G_2(q_k) u \quad (5.29)$$

$$y_k = G_1^T(q_k) \bar{\nabla}H$$

şeklinde elde edilir. Sistem için bir ceza değişkeni (penalty signal),

$$z(q_k, p_k) = \begin{bmatrix} y_k \\ d_k(q_k, p_k) u_k \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

şeklinde tanımlansın ve bozucu bastırma ölçütü ise

$$\sum_{k=0}^N \{y_k^T y_k + u_k^T D(q_k, p_k) u_k\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 \quad (5.31)$$

seçilsin. Burada $d(q_k, p_k)$ tam ranklı bir matris olmak üzere $D(q_k, p_k) = d^T(q_k, p_k) d(q_k, p_k)$ verilmiş bir ağırlık matrisidir ve γ bozucu bastırma seviyesine karşı düşen gerçek değerli pozitif bir skalerdir. Bozucu bastırma problemi, sistem (5.29)’u asimptotik kararlı bırakan ve bozucu giriş w ’nın, z ceza değişkeni

üzerindeki etkisini, L_2 anlamında en azlayacak $u_k = c(q_k, p_k)$ şeklinde bir geribesleme kontrol kuralı inşaa etmektir. Yukarıdaki (5.29-5.31) ilişkileri ile tanımlanan bozucu bastırma probleminin çözümüne ilişkin, bu doktora çalışmasında türetilen koşullar, Teorem 5.2 de verilmiştir.

Teorem 5.2: (5.29) ile verilen ayrık zamanlı kapı kontrollü Hamiltonian sistemi ve (5.29-5.31) ile tanımlanan bozucu bastırma problemi ele alınsın. Aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılınsın,

- I. Sistem, y_k çıkışına göre sıfır-durum sezilebilirdir.
- II. Ağırlık matrisi $d(q_k, p_k)$ tam sütun ranklıdır.
- III. Denge noktası $x^* = 0$, $\mathcal{H}(x)$ 'in bir kesin yerel minimumudur.
- IV. Tanım 3.1'deki koşulları tam olarak sağlayan bir ayrık-gradyan $\bar{\nabla}H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in R^{2n \times 2n}$ vardır.

Önceden verilmiş bir bozucu bastırma seviyesi γ için, eğer,

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \gamma^{-2} T^2 g_1(q_k) g_1^T(q_k) - \alpha^2 T^2 g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \\ & - 2\alpha T R_1(q_k, p_k) + g_1(q_k) g_1^T(q_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

biçimindeki Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI) eşitsizliğini sağlayan bir pozitif gerçektek α sayısı var ise, giriş w 'dan, çıkış z 'ye L_2 kazancını en fazla γ yapan bir statik geribesleme kontrol kuralı vardır ve bu kontrol kuralı $u_k = c(q_k, p_k)$;

$$u_k = -\alpha T \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \quad (5.33)$$

biçimindedir. $\square$

İspat: Buradaki ispat (5.33) kontrol kuralının kapalı çevrimli sistemi $\frac{1}{2}(\gamma^2 \|y_k\|^2 - \|u_k\|^2)$ katkı fonksiyonuna göre kayıplı kıldığı yani kapalı çevrim sistemin Tanım 2.6'da verilen kayıplı olma özelliğinde olduğu gösterilerek verilecektir. Bu durumda, Lemma 2.1 gereği (5.31) bozucu başarımlı ölçütü sağlanmış olmaktadır.

(5.32)'de verilen HJI eşitsizliğini sağlayan bir α var olsun. (5.29) ifadesi soldan $\bar{\nabla}^T H$ ile çarpılır ve ayrık-gradyan tanımının ilk koşulu kullanılırsa aşağıdaki ilişki elde edilebilir,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(k+1) - \mathcal{H}(k) &= \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q^T H \\ \bar{\nabla}_p^T H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} \\ &= -\bar{\nabla}_p^T H T R_1(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p^T H + \bar{\nabla}_p^T H T g_1(q_k) w_k \\ &\quad + \bar{\nabla}_p^T H T g_2(q_k) u_k\end{aligned}\quad (5.34)$$

J ters-simetrik bir matris olduğundan $\bar{\nabla}^T H J \bar{\nabla} H = 0$ 'dır. Kesin pozitif bir $V(k)$ fonksiyonu,

$$V(k) = \alpha \mathcal{H}(k) \quad (5.35)$$

tanımlandığında, (5.34)'den,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) &= -\alpha \bar{\nabla}_p^T H T R_1(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p^T H \\ &\quad + \alpha \bar{\nabla}_p^T H T g_1(q_k) w_k + \alpha \bar{\nabla}_p^T H T g_2(q_k) u_k\end{aligned}\quad (5.36)$$

ilişkisi yazılabilir. Eşitsizlik (5.32)'den R_1 terimi çekildiğinde elde edilen eşitsizlik, (5.36) ilişkisi ile birlikte değerlendirildiğinde,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) &\leq -\frac{\alpha^2 \gamma^{-2} T^2}{2} \bar{\nabla}_p^T H g_1(q_k) g_1^T(q_k) \bar{\nabla}_p^T H \\ &\quad + \frac{\alpha^2 T^2}{2} \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p^T H \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\nabla}_p^T H g_1(q_k) g_1^T(q_k) \bar{\nabla}_p^T H + \alpha \bar{\nabla}_p^T H T g_1(q_k) w_k \\ &\quad + \alpha T \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) u_k\end{aligned}\quad (5.37)$$

yazılabilir ve bazı cebir işlemlerden sonra,

$$\begin{aligned}V(k+1) - V(k) &\leq -\frac{1}{2} \left\| \frac{\alpha T}{\gamma} g_1^T(q_k) \bar{\nabla}_p^T H - \gamma w_k \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| \alpha T \{d_k^T d_k\}^{-\frac{1}{2}} g_2^T(q_k) \times \bar{\nabla}_p^T H + \{d_k^T d_k\}^{-\frac{1}{2}} u_k \right\|^2 \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{2} \|w_k\|^2 - \frac{1}{2} \{y_k^T y_k + u_k^T d_k^T d_k u_k\}\end{aligned}\quad (5.38)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ilişkinin sağ tarafındaki ilk terim her zaman negatiftir ve kontrol kuralı (5.33) ikinci terimde yerine yazıldığında bu terim sıfır olmaktadır. Sonuç olarak, bu eşitsizlikten,

$$V(k+1) - V(k) \leq \frac{\gamma^2}{2} \|w_k\|^2 - \frac{1}{2} \{y_k^T y_k + u_k^T d_k^T d_k u_k\} \quad (5.39)$$

kayıplı olma eşitsizliği elde edilir. Burada, (5.30)'da verilen z_k tanımı kullanılırsa, bu eşitsizliğin,

$$V(k+1) - V(k) \leq \frac{\gamma^2}{2} \|w_k\|^2 - \frac{1}{2} \|z_k\|^2 \quad (5.40)$$

eşitsizliğine eşdeğer olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece, (5.29-5.30) ile verilen sistem, (5.33) ile verilen kontrol kuralı kullanılarak elde edilen kapalı çevrimli sistemin, belirli bir bozucu bastırma seviyesi γ 'yı, $-L_2$ kazancı anlamında bozucu bastırma ölçütünü - sağlandığı gösterilmiş olur. $\square$

Daha önce değinildiği gibi, Teorem 5.2'nin Tanım 3.1 koşullarını tam sağlayan bir ayrık-gradyanın var olduğu varsayımı ile verildiğine dikkat edilmelidir. Bu koşulların tam olarak sağlanmaması durumu Uyarı 5.1'de irdelenmiştir.

Uyarı 5.1: Teorem 5.2'de kullanılan, $\bar{\nabla} H(x(k), x(k+1))$, $x = \{q, p\} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, ayrık-gradyanın Tanım 3.1 ile verilen koşulların ikincisini tam olarak sağladığını ancak birinci koşulu tam olarak sağlamadığı durum ele alınsın Bu durumda, ayrık enerji fonksiyonu sürekli sistemin enerji fonksiyonundan farklı olacaktır. Ayrık enerji fonksiyonu $\hat{H}(x_k)$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla}^T H[J - R(x_k)] \bar{\nabla} H = -\bar{\nabla}^T H R(x_k) \bar{\nabla} H = \frac{\hat{H}(x_{k+1}) - \hat{H}(x_k)}{T} \quad (5.41)$$

ilişkisi yazabilir. Eğer (5.41)'in sağ tarafı - enerji farkı- sürekli sisteme ilişkin enerji fonksiyonu cinsinden,

$$\frac{\hat{H}(x_{k+1}) - \hat{H}(x_k)}{T} = \frac{\mathcal{H}(x_{k+1}) - \mathcal{H}(x_k)}{T} + \varepsilon(x_{k+1}, x_k) \quad (5.42)$$

biçiminde ifade edilebilirse,

$$\bar{\nabla}^T H[J - \hat{R}(x_k)] \bar{\nabla} H = \frac{\mathcal{H}(x_{k+1}) - \mathcal{H}(x_k)}{T} \quad (5.43)$$

eşitliğini sağlayan bir $\hat{R}(x_k)$ 'in var olduğu söylenebilir. Sonuç olarak, özellikle düşük örnekleme periyodu ile çalışıldığında, Teorem 5.2'deki HJI koşulu kullanılırken, bu irdelene göz önünde bulundurulmalıdır. $T \rightarrow 0$ için (5.42) ilişkisindeki fazla terimin sıfıra gideceği açıktır- $\varepsilon(x_{k+1}, x_k) \rightarrow 0$ - .□

Ayrık kontrol kuralı (5.33)'ü elde etmek için $\mathcal{H}(q, p)$ fonksiyonun ayrık-gradyanının inşası yapılmalıdır. Sürekli sistemin (5.28)'de verilen enerji fonksiyonu $\mathcal{H}(q, p)$ 'nın Tanım 3.3'de verilen ayrık-gradyanının, aşağıdaki gibi inşaa edildiği Bölüm 4'de sunulmuştur;

$$\nabla \mathcal{P}(q) = \mathcal{P}_{gr}(q)q \quad (5.44)$$

$$\nabla \mathcal{H}(x_k)(q, p) = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{gr}(q) & S(q, p) \\ 0 & M^{-1}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = Q(q, p) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

$$S(q, p) = \begin{bmatrix} \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_1} \right] \\ \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_2} \right] \\ \vdots \\ \left[p^T \frac{\partial M^{-1}(q)}{\partial q_n} \right] \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

biçiminde tanımlanmış olmak üzere,

$$\Phi(k+1, k) = \frac{1}{2} Q\left(\frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \frac{p_{k+1} + p_k}{2}\right) \quad (5.47)$$

$$\bar{\nabla} H(q_{k+1}, q_k, p_{k+1}, p_k) = \Phi(k+1, k) \begin{bmatrix} q_{k+1} + q_k \\ p_{k+1} + p_k \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler,

$$\bar{q}_{k,k+1} = \frac{q_{k+1} + q_k}{2}, \bar{p}_{k,k+1} = \frac{p_{k+1} + p_k}{2} \quad (5.49)$$

tanımlamalar ile,

$$\bar{\nabla} H = Q(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \begin{bmatrix} \bar{q}_{k,k+1} \\ \bar{p}_{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

biçiminde de yazılabilir.

Kontrol kuralı ifadesinde - (5.33) - sadece $\bar{\nabla}_p H$ terimi bulunduğu için, ayrık-gradyan $\bar{\nabla} H$ ifadesini,

$$\bar{\nabla} H = \begin{bmatrix} p_{qr}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) & S(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \\ 0 & M^{-1}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{q}_{k,k+1} \\ \bar{p}_{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\bar{\nabla}_q H = \bar{\nabla}_q K + \bar{\nabla}_q P = p_{qr}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \bar{q}_{k,k+1} + S(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \bar{p}_{k,k+1} \quad (5.52)$$

$$\bar{\nabla}_p H = \bar{\nabla}_p K = M^{-1}(\bar{q}_{k,k+1}, \bar{p}_{k,k+1}) \bar{p}_{k,k+1} \quad (5.53)$$

şeklinde ayrıştırmak uygun olacaktır. Elde edilen bu ifadelerdeki q_{k+1} ve p_{k+1} 'ların hesabında,

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k + (p_k - p_{k-1}) = 2p_k - p_{k-1} \\ q_{k+1} &= q_k + (q_k - q_{k-1}) = 2q_k - q_{k-1} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\bar{p}_{k,k+1} = \frac{3p_k - p_{k-1}}{2}, \quad \bar{q}_{k,k+1} = \frac{3q_k - q_{k-1}}{2} \quad (5.55)$$

yaklaşıklıklar kullanılırsa, (5.53) ifadesi,

$$\bar{\nabla}_p H = M^{-1}\left(\frac{3q_k - q_{k-1}}{2}, \frac{3p_k - p_{k-1}}{2}\right) \left(\frac{3p_k - p_{k-1}}{2}\right) \quad (5.56)$$

şeklinde yazılabilir. Kontrol kuralı (5.33)'ün hesabında, $\bar{\nabla}_p H$ terimi için (5.56) ifadesi kullanılırsa, bu kuralın hesap karmaşıklığı, emülatör kontrolörü ile yaklaşık aynı olacağından, endüstriyel uygulamalar için uygundur.

5.3.1 Sayısal deney

Önerilen doğrudan ayrık tasarım yönteminin başarımını inceleyebilmek için kapı kontrollü sürekli Hamiltonian modeli aşağıdaki gibi olan çift sarkaç sistemi ele alınmıştır.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q, p)) \nabla \mathcal{H}(q, p) + \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(q) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2(q) \end{bmatrix} u \quad (5.57)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & g_1^T(q) \end{bmatrix} \nabla \mathcal{H}(q, p)$$

$$g_1(q) = I_2, \quad g_2(q) = I_2, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 I_2 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Bu sisteme ilişkin Hamiltonian fonksiyonu,

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q)$$

(5.59) eylemsizlik matrisi ve (5.60) sistemin potansiyel enerjisi olmak üzere,

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

$$\mathcal{P}(q) = -[m_2 g l_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1] \quad (5.60)$$

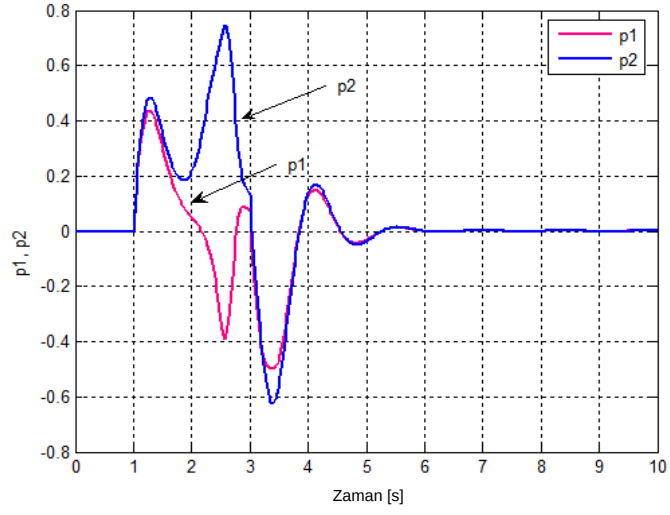
ifadeleri ile verilir. Sistemin parametreleri, $m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}$, $l_1 = 0.2 \text{ m}$, $l_2 = 0.3 \text{ m}$ ve $g = 0.98 \text{ ms}$ olarak alınmıştır. Ceza değişkenindeki (z) ağırlık katsayıları $d_k = I_2$ ve $T = 0.04$ seçilmiştir, bu koşullarda (5.32)'deki HJI'yi sağlayan $\alpha = 28$ olarak bulunmuştur. Son olarak kontrol kuralı,

$$u_k = -1.12 \bar{\nabla}_p H \quad (5.61)$$

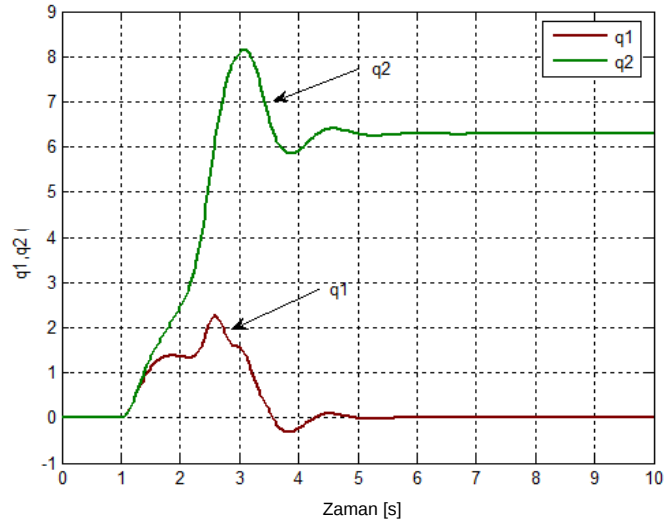
biçiminde elde edilmiştir.

Benzetimlerde sistem denge durumunda iken 1-3 sn aralıklarında bozucu olarak $w = 3.5 \text{ N}$ genlikli basamak işareti uygulanmıştır. Açık çevrimli sistemin momentum ve konum değişkenlerinin bozucu atındaki zamana göre değişimi, Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'de verilmiştir.

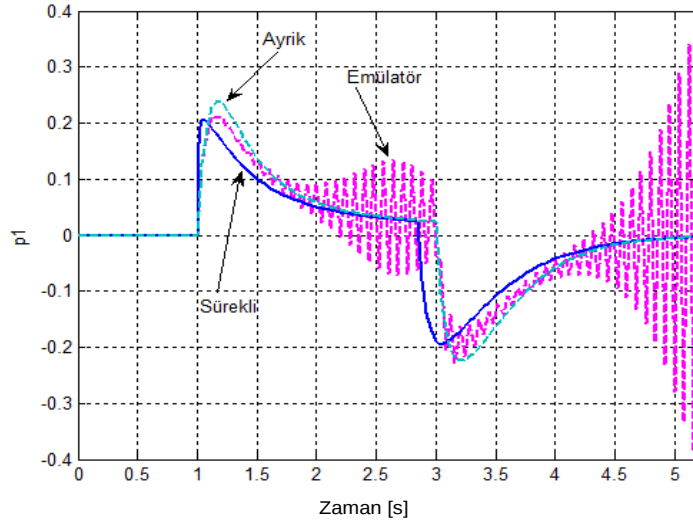
Doğrudan ayırık tasarımla elde edilen kontrol kuralı, sürekli kontrol kuralı ve emülator kontrol kuralı kullanılarak elde edilen kapalı çevrimli sistemin değişkenlerinin zamana göre değişimi, Şekil 5.3-Şekil 5.6 ile verilmiştir.



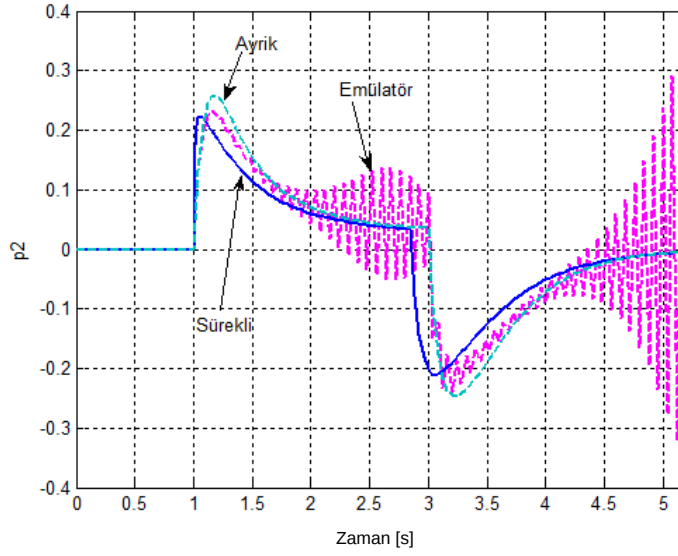
Şekil 5.1 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin momentum değişkenlerindeki etkisi.



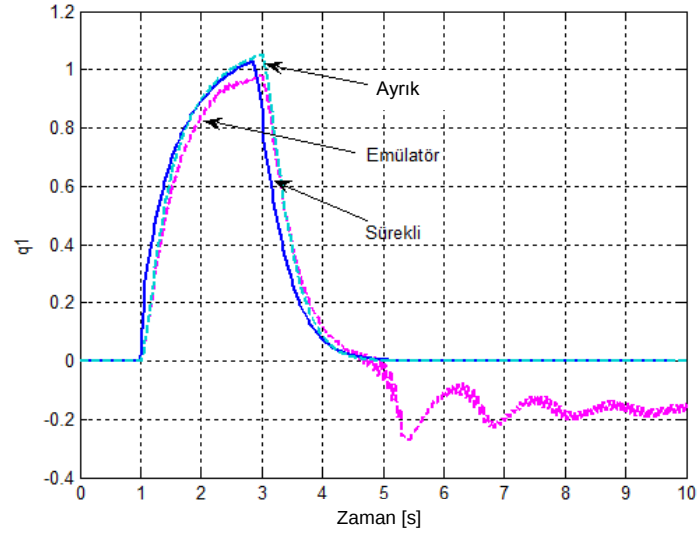
Şekil 5.2 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin konum değişkenlerindeki etkisi.



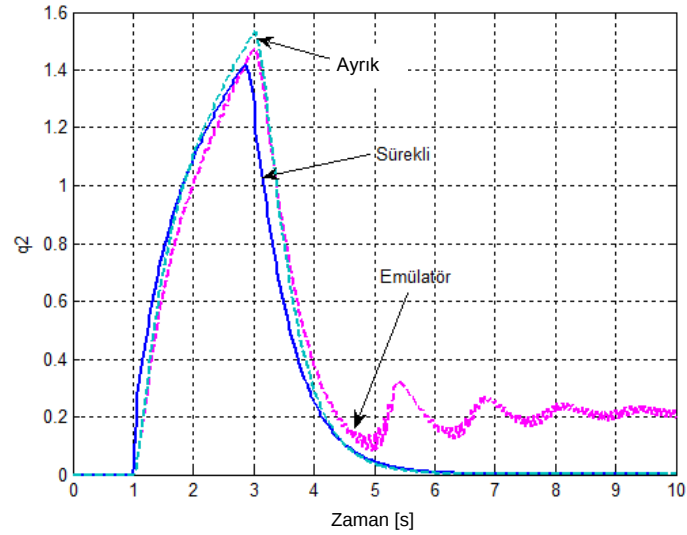
Şekil 5.3 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi.



Şekil 5.4 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi.

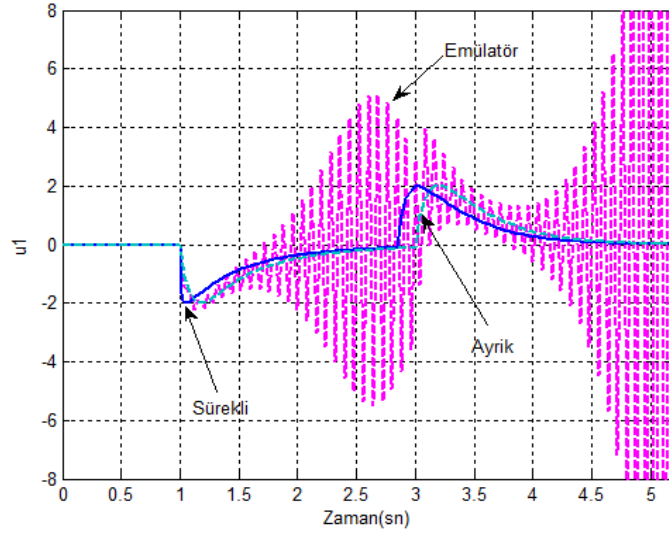


Şekil 5.5 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_1 durum değişkeninin zamana göre değişimi.

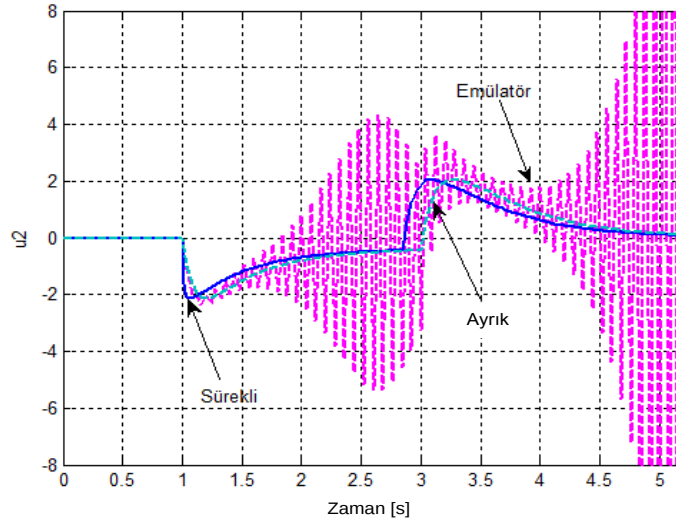


Şekil 5.6 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_2 durum değişkeninin zamana göre değişimi.

Kontrol işaretlerinin zamana göre değişimi ise, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8’de görülebilir. Bu sonuçlar, bu tezde geliştirilen yöntem kullanılarak elde edilen kontrolörün emülatör kontrolöre göre daha yüksek başarıma sahip olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.7 : Kontrol işareti u_1 'in zamana göre değişimi.



Şekil 5.8 : Kontrol girişi u_2 'nin zaman göre değişimi.

5.4. Hamiltonian Sistemlerde Doğrudan Ayrık Tasarım ile Dayanıklı Bozucu Bastırma Problemi

Bölüm 5.3’de n-serbestlik dereceli Hamiltonian sistemler için bozucu bastırma problemi ele alınmıştır, bu bölümde ise parametrelerinde belirsizlik içeren n-serbestlik dereceli mekanik sistemler için ayrık zamanlı bozucu bastırma problemi üzerinde çalışılacaktır. Parametrelerinde - kütle, uzunluk v.d. - belirsizlik bulunan bozucu girişe sahip Kapı-kontrollü sürekli Hamiltonian sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = T(J - R(q, p))\nabla \tilde{\mathcal{H}} + G_1(q)w(t) + G_2(q)u(t) \quad (5.62)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{G}_1^T(\mathbf{q}) \nabla \tilde{\mathcal{H}},$$

şeklinde verilir. Burada $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in X \subset \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ genelleştirilmiş koordinatlar, $\mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathfrak{R}^{m_1}$ sırası ile bozucu girişi ve sistem çıkışı, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{m_2}$ kontrol girişi, $\mathbf{J}$ standart ters-simetrik iç bağlantı matrisi ve $\mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ yarı kesin pozitif simetrik bir matristir. Bu matrisler,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix}, \quad (5.63)$$

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \geq \mathbf{0}$$

biçimindedir. $\mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times m_1}$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times m_2}$ olmak üzere, bozucu ve kontrol giriş matrisileri – kapı yapıları- ise,

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \mathbf{G}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

ile tanımlanır. Bu sistemin belirsizlikleri içermeyen enerji fonksiyonu, $\mathcal{H} : \mathfrak{R}^{2n} \rightarrow \mathfrak{R}$ $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}(\mathbf{q})^T > \mathbf{0}$ olmak üzere,

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{P}(\mathbf{q})$$

biçimindedir. Belirsizlikler içeren sistemin enerji fonksiyonu ise $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \Delta \mathcal{H}$ ifadesi ile temsil edilmiş olsun. Burada $\Delta \mathcal{H}$ sistem parametrelerindeki belirsizliğin enerji fonksiyonundaki etkisini göstermek üzere,

$$\Delta \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \Delta \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \Delta \mathcal{P}(\mathbf{q}) \quad (5.65)$$

gibi yazılabilir. Bozucu girişi olmayan ancak belirsizliklere sahip,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = (\mathbf{J} - \mathbf{R}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \nabla \tilde{\mathcal{H}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \mathbf{u}(t) \quad (5.66)$$

sistemini ele alalım ve bu sistem için belirsizlikleri içermeyen enerji fonksiyonu cinsinden,

$$\mathbf{u}(t) = \beta(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \nabla_p \mathcal{H} \quad (5.67)$$

biçiminde bir statik geribesleme kontrol kuralı tasarlanmış olsun. Bu kontrol kuralı ile elde edilen kapalı çevrimli sistem,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= (J - R(q, p)) \nabla \tilde{\mathcal{H}} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(q) \beta \end{bmatrix} \nabla (\tilde{\mathcal{H}} + \Delta \mathcal{H}) \\ &= (J - R(q, p)) \nabla \tilde{\mathcal{H}} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(q) \end{bmatrix} w_{\Delta}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ g(q) \end{bmatrix} \tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (5.68)$$

biçiminde olacaktır. Burada,

$$w_{\Delta}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta(q, p) \end{bmatrix} \nabla (\Delta \mathcal{H}), \quad \tilde{u}(t) = \beta(q, p) \nabla_p \tilde{\mathcal{H}} \quad (5.69)$$

$w_{\Delta}(t)$ bozucu girişi olarak, $\tilde{u}(t)$ ise $\tilde{\mathcal{H}}$ - gerçek sistemin enerji fonksiyonu- kullanılarak inşaa edilmiş kontrol girişi olarak değerlendirilir. Bozucu giriş $w(t)$ 'nin, $\nabla(\Delta \mathcal{H}) \in L_2$ olduğu göz önünde bulundurulursa sonlu enerjili bir bozucu işaret karşı düşürülmüş olur. Bu inceleme sistem parametrelerindeki belirsizliklerin sisteme olan etkisinin, bozucu etkisi ile modellenebileceğini göstermiştir.

Parametrelerinde belirsizlik bulunan bozucu girişe sahip Kapı-kontrollü sürekli Hamiltonian sistem,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} &= (J - R(q, p)) \nabla \mathcal{H} + G_u(q) w_{\Delta}(t) + \\ &+ T G_w(q) w_e(t) + T G_u(q) u(t) \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$y(t) = [G_u(q) \quad G_w(q)]^T \nabla \mathcal{H}$$

şeklinde, belirsizliklerin sisteme olan etkisi, bozucu etkisi ile modellenmiş olarak ifade edilsin. Burada $w_{\Delta}(t)$ ve $w_e(t)$, sırasıyla, belirsizliklere karşı düşen bozucu ve dış bozucu girişidir. $G_u(q)$ ve $G_w(q)$ yapısı aşağıda verilmiş olan matrislerdir.

$$G_u(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_u(q) \end{bmatrix}, \quad G_w(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_w(q) \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

ve $\mathcal{H}(q, p)$ gerçek sistemin - belirsizliklere sahip sistemin - enerji fonksiyonudur. Aşağıdaki tanımlarla,

$$G_1(q) = [G_u(q) \quad G_w(q)], \quad G_2(q) = G_u(q), \quad w(t) = [w_{\Delta}(t) \quad w_e(t)]^T \quad (5.72)$$

(6.48)'de verilen sistem,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q, p)) \nabla \mathcal{H} + G_1(q) w(t) + G_2(q) u(t) \quad (5.73)$$

$$y(t) = G_1^T(q) \nabla \mathcal{H}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Bu sistemin ayrık zamanlı modeli ise,

$$G_1(q_k) = \begin{bmatrix} G_u(q_k) & G_w(q_k) \end{bmatrix}, \quad G_2(q_k) = G_u(q_k)$$

$$G_u(q_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_u(q_k) \end{bmatrix}, \quad G_w(q_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_w(q_k) \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T(J - R(q_k, p_k)) \bar{\nabla} H + T G_1(q_k) w_k + G_2(q_k) u_k \quad (5.75)$$

$$y_k = G_1^T(q_k) \bar{\nabla} H$$

biçiminde elde edilir. Görüldüğü gibi (5.73) sistemi Teorem 5.2'de ele alınan sistem ile aynı yapıdadır. (5.74)'de verilen notasyonlar (5.32) ve (5.33)'de yerlerine yazıldığında, dayanıklı bozucu bastırma probleminin

$$u_k = -\alpha T \{d_k^T d_k\}^{-1} g_u^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \quad (5.76)$$

biçiminde bir statik geribesleme kontrol kuralı ile çözümünün varlığına ilişkin yeter koşul,

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \gamma^{-2} T^2 (g_u(q_k) g_u^T(q_k) + g_w(q_k) g_w^T(q_k)) - \\ & \quad - \alpha^2 T^2 g_u(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_u^T(q_k) - \\ & \quad - 2\alpha T R_1(q_k, p_k) + g_u(q_k) g_u^T(q_k) + g_w(q_k) g_w^T(q_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

elde edilir.

Teorem 5.2'de verilen eşitsizlik, $g_1 = g_w$ ve $g_2 = g_u$ alınarak yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \gamma^{-2} T^2 g_w(q_k) g_w^T(q_k) - \alpha^2 T^2 g_u(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_u^T(q_k) - \\ & \quad - 2\alpha T R_1(q_k, p_k) + g_w(q_k) g_w^T(q_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.78)$$

elde edilir. Bu koşul ile (5.77) koşulu karşılaştırıldığında, (5.77) koşulunda (5.78)'de olmayan, pozitif işaretli $\alpha^2 \gamma^{-2} T^2 g_u(q_k) g_u^T(q_k)$ ve $g_u(q_k) g_u^T(q_k)$ terimlerinin var

olduğu görülür. Beklendiği gibi, (5.77) koşulu, (5.78)'den daha sıkı bir koşuldur, başka bir deyişle, (5.78) koşulunu sağlayan bazı α değerleri, (5.77)'i sağlamayabilecektir.

Önerilen yöntemin başarısı bozucu bastırma probleminin ele alındığı çift sarkaç sistemi üzerinde sınanmıştır. Sonuçlar sayısal deneyler bölümünde sunulmuştur.

5.4.1. Sayısal deney

Dayanıklı bozucu bastırma problemini çözümü olarak, bu çalışmada önerilen doğrudan ayırık tasarım yönteminin başarımını inceleyebilmek için dış bozucuları olan ve sarkaç kütlelerinde belirsizliklere sahip çift sarkaç sistemi ele alınmıştır.

Ele alınan çift sarkaç sisteminin modeli,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = (J - R(q, p)) \nabla \tilde{\mathcal{H}}(q, p) + \begin{bmatrix} 0 \\ g_w(q) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ g_u(q) \end{bmatrix} u \quad (5.79)$$

$$g_1(q) = I_2, g_2(q) = I_2, R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5 I_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde, burada $\tilde{M}(q) = M(q) + \Delta M(q)$ ile $\tilde{p}(q) = p(q) + \Delta p(q)$ olmak üzere,

$$\tilde{\mathcal{H}}(q, p) = \frac{1}{2} p^T \tilde{M}(q)^{-1} p + \tilde{p}(q) \quad (5.80)$$

belirsizliklere sahip sistemin enerji fonksiyonudur. Yani,

$$\tilde{\mathcal{H}}(q, p) = \mathcal{H}(q, p) + \Delta \mathcal{H}(q, p) \quad \text{ve} \quad \Delta \mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T \Delta M(q)^{-1} p + \Delta p(q) \quad (5.81)$$

biçimindedir.

Sisteme ilişkin genelleştirilmiş kütle matrisi ve potansiyel enerji fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$M = \begin{bmatrix} l_1^2(m_1 + m_2) & m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 m_2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

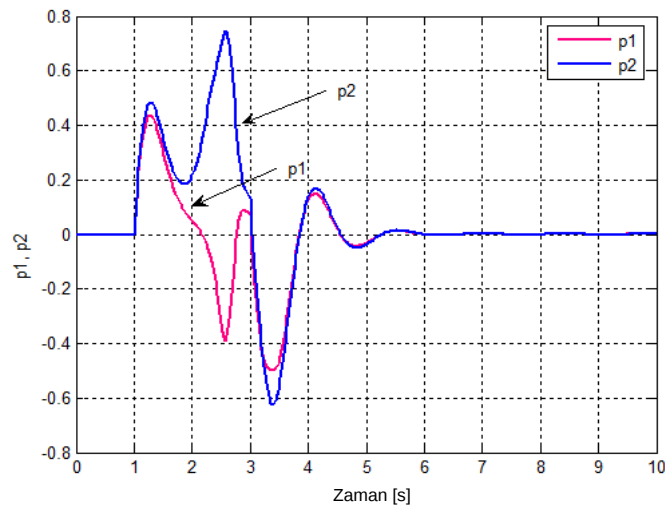
$$\tilde{p}(q) = -[m_2 g l_2 \cos q_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos q_1]$$

Sistem kütlelerindeki belirsizliğin bu ifadelerdeki karşılıkları,

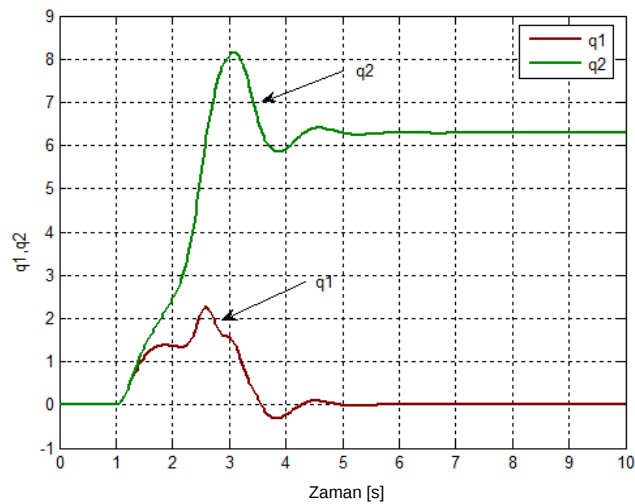
$$\Delta M = \begin{bmatrix} l_1^2 (\Delta m_1 + \Delta m_2) & \Delta m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) \\ \Delta m_2 l_1 l_2 \cos(q_1 - q_2) & l_2^2 \Delta m_2 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$$\Delta p(q) = -(\Delta m_2 g l_2 \cos q_2 + (\Delta m_1 + \Delta m_2) g l_1 \cos q_1)$$

biçiminde olacaktır. Sistem parametrelerinin nominal değerleri $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, $l_1 = 0.2\text{m}$, $l_2 = 0.3\text{m}$ ve $g = 0.98\text{m/s}^2$ olarak alınmıştır. Kütlelerde en fazla $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 1\text{kg}$ büyüklüğünde belirsizliklerin bulunabileceği kabul edilmiştir. Şekil 5.9-Şekil 5.10'da kontrol edilmemiş çift sarkaç sisteminin $w = 3.5\text{N}$ büyüklüğündeki bozucuya karşı verdiği yanıtlar görülmektedir.

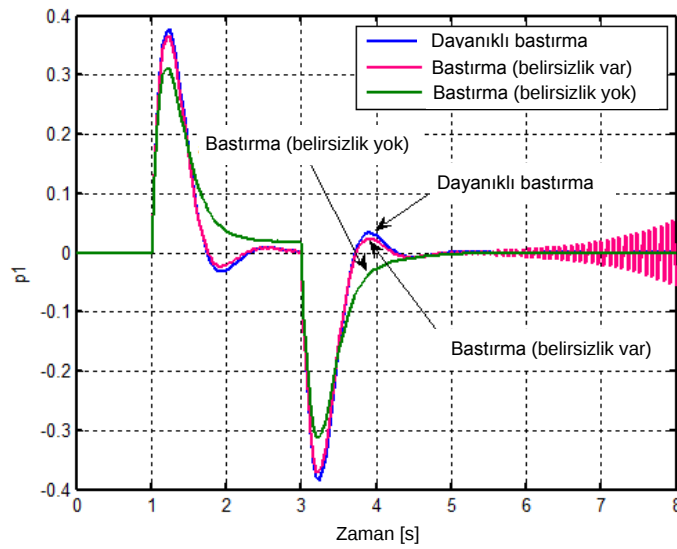


Şekil 5.9 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin momentum değişkenlerindeki etkisi.

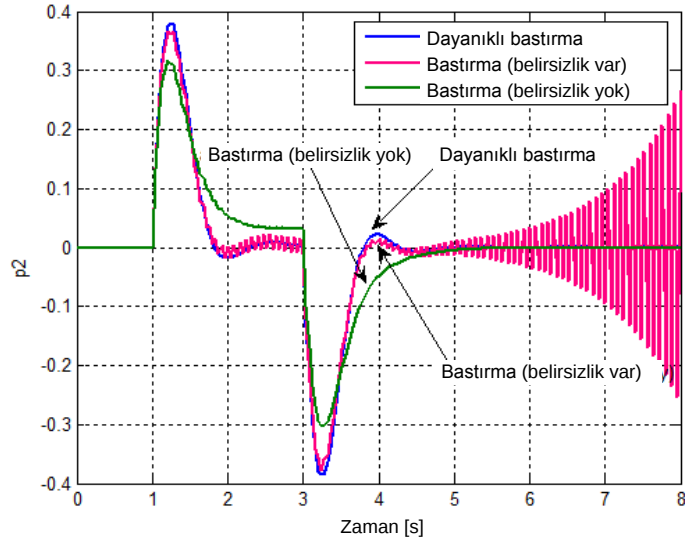


Şekil 5.10 : Bozucunun, açık çevrimli çift sarkaç sisteminin konum değişkenlerindeki etkisi.

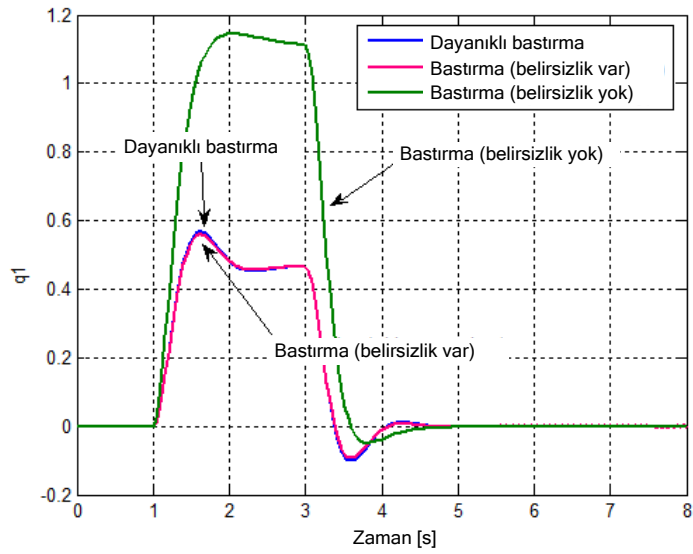
Şekil 5.11-5.14’de verilen şekillerde yeşil eğrilerle, belirsizlik içermeyen sistem için bozucu bastırma tasarımı ile elde edilen kontrol kuralının uygulandığı kapalı çevrimli sistemin konum ve momentum değişkenlerinin zamanla değişimi gösterilmektedir. Aynı şekillerdeki pembe eğriler, belirsizlik içeren sisteme bozucu bastırma tasarımı ile elde edilen kontrol kuralının uygulanması elde edilen kapalı çevrimli sistemin konum ve momentum değişkenlerinin zamanla değişimi göstermektedir. Bu şekillerdeki mavi eğriler ise, ‘dayanıklı’ bozucu bastırma tasarımı ile elde edilen kontrol kuralının uygulandığı kapalı çevrimli sistemin konum ve momentum değişkenlerinin zamanla değişimi göstermektedir. Uygulanan bozucu kuvvetler belirsizlik bölgesindeki farklı kütleler için farklı yer değiştirmelere neden olacaktır. Ancak momentum değişkenleri üzerindeki etkileri aynı olacaktır. Bu nedenle Şekil 5.11 ve Şekil 5.12’de verilen momentum değişkenleri incelenerek başarımların karşılaştırılması daha kolay yapılabilir. Şekil 5.15 ve 5.16’da ise söz konusu üç durum için kontrol işaretleri görülebilir ve karşılaştırılabilir.



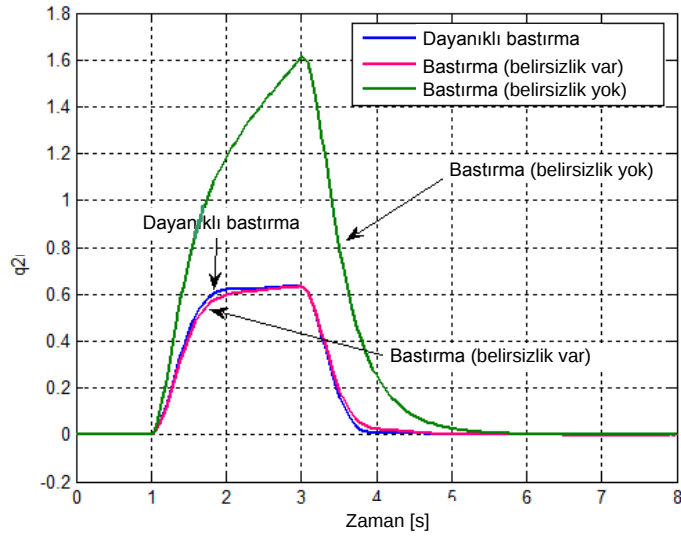
Şekil 5.11 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_1 momentum değişkeninin zamana göre değişimi.



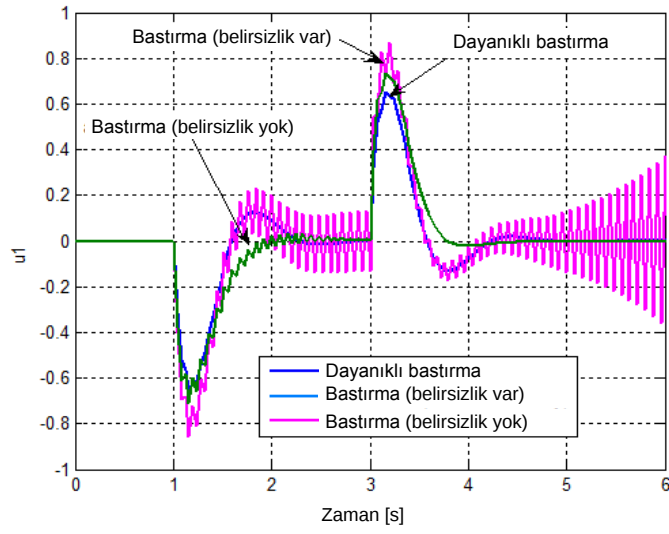
Şekil 5.12 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin p_2 momentum değişkeninin zamana göre değişimi.



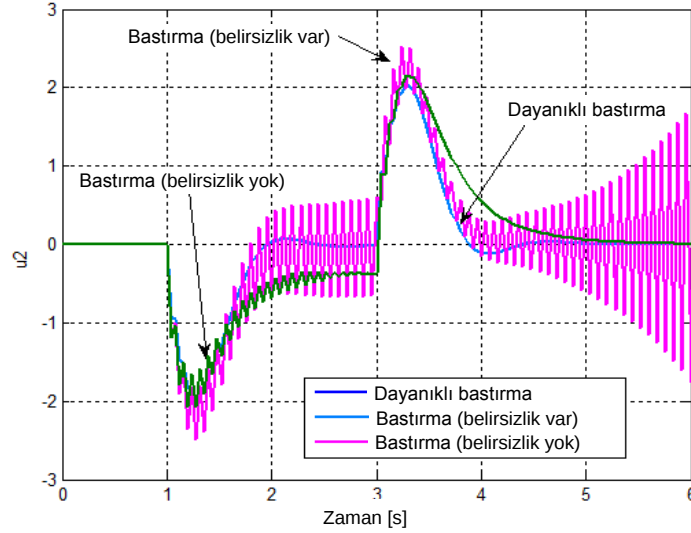
Şekil 5.13 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_1 konum değişkeninin zamana göre değişimi.



Şekil 5.14 : Kontrol altındaki çift sarkaç sisteminin q_2 konum değişkeninin zamana göre değişimi.



Şekil 5.15 : u_1 kontrol işaretinin zamana göre değişimi.



Şekil 5.16 : u_2 kontrol işareti zamana göre değişimi.

5.5 Sonuçlar

N-serbestlik dereceli mekanik sistemler için bozucu bastırma ve sistem parametrelerinde belirsizlik bulunması durumu için dayanıklı bozucu bastırma problemleri ele alınmıştır. Her iki problemin de ayrık zamanlı statik durum geribesleme kontrol kuralı kullanıldığında çözümlerinin varlığına ilişkin yeter koşullar verilmiştir. Kontrol kuralları çift sarkaç sistemine uygulanarak benzetim yoluyla başarımları sınanmıştır. Benzetim sonuçları, bu çalışmada önerilen doğrudan ayrık tasarım ile elde edilen ayrık zamanlı bozucu bastırma kontrol kuralının emulatör kontrol kuralına göre daha yüksek başarıma sahip olduğunu göstermektedir. Ayrıca önerilen kontrol kuralının hesap karmaşıklığı, emulatör kontrolün karmaşıklığı ile hemen hemen aynıdır. Bu özellik önerilen yöntemin endüstriyel uygulamalarda kullanımı açısından önemlidir. Dayanıklı bozucu bastırma kontrol kuralının sınanması için yapılan benzetimlerde belirsizlikler göz ardı edilerek yapılan kontrolör tasarımı sonucu elde edilen kontrol kuralının kapalı çevrim sistemin kararsız olmasına neden olduğu görülmüştür. Bu durum, daha önce yapılan teorik incelemeler gereği beklenen bir sonuçtur. Böylece, önerilen dayanıklı kontrol tasarım yönteminin gerekliliği ve başarımlı sayısal deneyle de kanıtlanmıştır.

6. KARŞILAŞTIRMALAR

6.1 Giriş

Bu bölümde, ayırık zamanlı genel doğrusal olmayan sistemler için Navarro-Lopez, (2002a)'de sunulan, *kayıplı olma* kavramı ve ilgili tanımlar - Bölüm 2 de verilenlerden biraz daha farklı olan - kullanılarak, ayırık zamanlı Hamiltonian sistemlerin sadece kararlı kılma ve bozucu bastırma problemlerinin doğrudan bir kontrol kuralı ile çözümü, bu doktora çalışmasında elde edilen sonuçların karşılaştırılması amacıyla tekrar ele alınmıştır. Doğrusal olmayan sistemlerin kayıplı olma özelliği ile ilgili -bir çoğu çok-giriş çok-çıkışlı sistemleri de kapsayacak biçimde - bazı tanımlar Navarro-Lopez (2002a)'de sunulmuştur. Ancak, önerilen kontrol yöntemleri tek-giriş tek-çıkışlı sistemler içindir. Hatırlanacağı gibi, Hamiltonian sistemlerin istenen bir denge noktasında kararlı kılma probleminin, doğrudan ayırık tasarım ile çözümü Bölüm 4'de verilmişti. Sunulan bu çözüm yöntemi, kısaca PBC tekniğinin ayırık zamanlı karşılığı olarak değerlendirilebilir ve temel olarak enerji şekillendirme ve kayıp atama işlemlerini yerine getiren ayırık kontrol kurallarını, açık çevrimli ve istenen kapalı çevrimli sistemin ayırık modellerini kullanarak elde etme ilkesine dayanır.

Bu bölümde, genel doğrusal olmayan sistemler için Navarro-Lopez (2002a)'de önerilen yöntem, Hamiltonian sistemlerin ayırık modelleri kullanılarak yeniden yazıldığında elde edilen sonuçlar incelenmiş ve Bölüm 4'de elde edilenler ile karşılaştırılmış ve aynı sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür.

Bu süreç sırasında, aynı yol izlenerek bozucu bastırma problemi için de bir çözüm elde edilebileceği görülmüş ve bozucu bastırma problemi için Bölüm 6'da verilen çözüme katkı yapan ek bir sonuç da elde edilmiştir. Bu sonuç bir teorem ile sunulmuştur.

6.2 Ön Bilgi

Aşağıdaki tüm tanımlar,

$$\Sigma: \begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k)), & x \in X \subset \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m \\ y(k) &= h(x(k), u(k)), & y \in Y \subset \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (6.1)$$

şeklinde verilmiş olan genel doğrusal olmayan sistem için verilmiştir.

Kayıplı sistemler için Lin ve Byrnes, (1994) tarafından sunulan tanımdan - Bölüm 2 Tanım 2.10 -başka bir tanım, (Lopez, 2002a) da kayıplı olma eşitsizliği bir eşitlikle değiştirilerek elde edilmiştir.

Tanım 6.1: Σ dinamik denklemleri ile verilen bir sisteme, tüm $x(0)$ başlangıç koşulları, tüm $(x(k), u(k)) \in X \times U$ ve tüm $k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ için,

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = s(y(k), u(k)) - \phi(x(k), u(k)) \quad (6.2)$$

koşulunu sağlayan depo fonksiyonu olarak adlandırılan $V(0) = 0$ özelliğinde pozitif bir $V: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ve her $u \in U$ için $\phi(., u)$ pozitif olan bir sürekli $\phi: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa s katkı fonksiyonuna göre *kayıplıdır* (*dissipative*) denir (Navarro-Lopez, 2002a). $\square$

Burada her $u \in U$ için $\phi(., u)$ (kesin) pozitif ve $\phi(0, 0) = 0$ özelliğinde olan $\phi: X \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu (*kesin*) *kayıp oranı* ((strict) *dissipation rate*) fonksiyonu olarak Hill ve Moylan tarafından tanımlanmıştır (Navarro-Lopez, 2002a).

Aşağıda, kayıplı olmaya ilişkin Navarro-Lopez'de sunulmuş yeni bir tanım olan (V, s) - kayıplı olma ((V, s)-dissipative) tanımı verilmiştir.

Tanım 6.2: Σ dinamik denklemleri ile verilen bir sisteme ilişkin depo fonksiyonu $V(x)$ ve katkı fonksiyonu $s(y(k), u(k))$ bilinsin. Bu sisteme,

$$V(f(x, u)) - V(x) = s(h(x, u), u) - \phi(x, u), \forall (x, u) \in X \times U \quad (6.3)$$

koşulu sağlanacak biçimde bir ϕ (*kesin*) *kayıp oranı* ((strict) *dissipation rate*) fonksiyonu varsa (*kesin*) (V, s) - *kayıplıdır* ((strictly) (V, s) - *dissipative*) denir (Navarro-Lopez, 2002a). $\square$

$u = \alpha(x, v)$, $v \in U$ biçiminde bir doğrusal olmayan durum geribesleme kontrol kuralı ele alınsın. $\alpha : X \times U \rightarrow U$ türevlenebilir ve $\alpha(0, 0) = 0$ olsun.

$$x(k+1) = f(x(k), \alpha(x(k), v(k))) \quad (6.4)$$

sistemi, *geribesleme ile dönüştürülmüş sistem* (feedback transformed system) olarak adlandırılır. Bu sistem $x(k+1) = \bar{f}(x(k), v(k))$ biçiminde de yazılabilir. Ayrıca, $\bar{h}(x, v)$ fonksiyonu $h(x, \alpha(x, v))$ *dönüştürülmüş* (transformed) çıkış ifadesini göstermektedir (Navarro-Lopez, 2002a). $\square$

Aşağıda bir doğrusal olmayan sistemin durum geribeslemesi ile kayıplı kılınabilirliğine ilişkin *geribesleme-ile-kayıplı* (feedback-dissipative) olma tanımı verilmiştir.

Tanım 6.3: Σ dinamik denklemleri ile verilen bir sistem ve iki skaler fonksiyon $V(x)$ ve $s(y, v)$, sırasıyla bir depo fonksiyonu ve bir katkı fonksiyonu, ele alınsın. *Geribesleme ile dönüştürülmüş sistemi* (V, s) -kayıplı (kesin (V, s) -kayıplı) kılacak, $u = \alpha(x, v)$ biçiminde bir statik durum geribesleme kontrol kuralı varsa, Σ sistemi için, V ve s fonksiyonları ile (kesin) *geribesleme-ile-kayıplıdır* (feedback-dissipative (strictly feedback-dissipative)) denir. Burada, v yeni girişdir (Navarro-Lopez, 2002a). $\square$

Navarro-Lopez, (2002a), kapalı çevrimli sistemi (V, s) -kayıplı kılacak, $u = \alpha(x, v)$ biçiminde bir kontrol kuralının varlığının yeter koşulunun,

$$V(f(x, u)) - V(x) = s(h(x, u), v) - \phi(x, u) \quad (6.5)$$

eşitliğini sağlayan bir kontrol girişi u 'nın var olması olduğunu söylemiştir. Aynı çalışmada, s katkı fonksiyonu Tanım 6.4'de verilen özellikte olmak üzere, kapalı çevrimli sistemi (kesin) (V, s) -kayıplı kılan (v yeni giriş olmak üzere, $x = 0$ civarında tanımlı $u = \alpha(x, v)$) bir geribesleme kontrol kuralı var ise, $u = \alpha(x, 0)$ kontrol kuralının sistemi $x = 0$ noktasında kararlı (asimptotik) kılacağı da gösterilmiştir.

Tanım 6.4: Katkı fonksiyonu $s(y, u)$ için,

$$s(0, u) = 0 \quad \forall u \in U \quad \text{ve} \quad s(y, 0) = 0 \quad \forall y \in Y \quad (6.6)$$

koşulları sağlanıyorsa *sıfır-giriş-çıkış* (zero-input-output (ZIO)) özelliğini sağlıyor denir. $\square$

Ayrıca, Navarro-Lopez, (2002a)'de genel (tek giriş-tek çıkış) doğrusal olmayan sistemleri kararlı kılma problemini,

$$V(f(x, \alpha(x(k), 0))) - V(x) = -\varphi(x, \alpha(x(k), 0)) \quad (6.7)$$

koşulunu sağlayacak bir $u = \alpha(x, 0)$ kontrol kuralını arama problemi olarak değerlendirilmiştir. Verilen bu sonuçtan, bu tez çalışmasında Hamiltonian sistemlerin doğrudan ayrık tasarım ile kararlı kılınması probleminin çözümü için yararlanılacaktır.

6.3 Kararlı Kılma

Aşağıda verilen kapı-kontrollü Hamiltonian sistemin, sadece kararlı kılınma problemi ele alınsın.

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T J \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ G(q_k) \end{bmatrix} u, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$y_k = G^T \bar{\nabla}_p H, \quad \mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q)$$

Kayıplı olma eşitliği (6.7)'yi herhangi bir φ için sağlayacak kontrol kuralı aranmaktadır. Lyapunov fonksiyonu olarak sistemin enerji fonksiyonu kullanıldığında ve $\varphi(x, u)$ 'nin bir özel seçimi için problemin çözümü şu teoremlerle verilebilir.

Teorem 6.1: (6.8)'da verilen kapı kontrollü Hamiltonian sistemi ele alalım. $K_v \geq 0$ bir matris olmak üzere,

$$u = -K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \quad (6.9)$$

kontrol kuralı sistemi sıfır civarında yerel asimptotik kararlı kılar. $\square$

İspat: (6.7) eşitliği, $V = \mathcal{H}$ alınıp, Tanım 2.1'de verilen ayrık-gradyan koşullarının ilki kullanılarak (6.8) sistemi için yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(k+1) - \mathcal{H}(k) &= -\phi((q_k, p_k), u_k) \\
\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} &= -\phi((q_k, p_k), u_k) \\
\begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix}^T \left(T J \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 \\ G(q_k) \end{bmatrix} u_k \right) &= -\phi((q_k, p_k), u_k) \\
T \bar{\nabla}_p^T H G(q_k) u_k &= -\phi((q_k, p_k), u_k)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilir. Burada,

$$\phi((q_k, p_k), u_k) = T \bar{\nabla}_p^T H G(q_k) K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \tag{6.11}$$

alınır ve

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_p^T H G(q_k) u_k &= -\bar{\nabla}_p^T H G(q_k) K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \\
\bar{\nabla}_p^T H G(q_k) (u_k + K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H) &= 0
\end{aligned}$$

biçiminde düzenlenirse $u_k = -K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H$ kontrol kuralının (6.10)'u – geribesleme ile kayıplı olma ilişkisini– sağladığı açıkça görülür. $\square$

Uyarı 6.1: Kontrol kuralı (6.9)'un, Bölüm 4'de sunulan sönüm atama kontrol kuralı $u_{di} = -K_v G^T(q_k) \bar{\nabla}_p H$ ile aynı olduğu kolaylıkla görülebilir. Bölüm 4'de, u_{di} kontrol kuralı, açık çevrim sistem ile, istenen sönüme sahip kapalı çevrim sistemin modelleri eşlenerek elde edilmişti, bu bölümde ise, kapalı çevrim sistemi kayıplı kılacak kontrol kuralı aranarak elde edilmiştir. $\square$

6.4 Bozucu Bastırma

Bu tez çalışmasının 6. bölümünde, n-serbestlik dereceli Hamiltonian sistemler için ayrık zamanlı bozucu bastırma problemi ele alınmış, problemin çözümünün varlığına ilişkin yeter koşul Lin ve Byrnes, (1995c), Lin ve Byrnes, (1996), tarafından sunulan kayıplı olma tanımı (Tanım 2.10) kullanılarak bir cebirsel HJI eşitsizliği olarak türetilmiş ve elde edilen sonuç Teorem 6.1'de sunulmuştu. Bu bölümde ise kapalı çevrim sistemin kayıplı olma özelliğine ilişkin Navarro-Lopez, (2002a)'da sunulan tanım kullanıldığında, aynı problem için hangi sonuçların türetilbileceği araştırılırken elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Bu araştırma sırasında, önce Tanım 6.4'de verilen eşitlik (6.2)'de yer alan serbest seçilebilen bir $\varphi(x, u)$

“dissipation rate” fonksiyonunun varlığının probleme çözüm üretme sırasında bir esneklik sağlayacağı kanısına varılmıştır. Daha sonra ise, $\phi(x, u)$ ’nin belirli bir seçimi ile Teorem 6.1’de eşitsizlik olarak verilen yeter koşulun, eşitlik olarak elde edilebileceği görülmüştür. Bu süreç birazdan ayrıntılarıyla sunulacaktır. Buna ek olarak, Teorem 6.1’de verilen eşitsizlikten daha kullanışlı bir koşul verecek $\phi(x, u)$ ’nin varlığı araştırılmış, uygun bir $\phi(x, u)$ seçimi ile bunun mümkün olduğu görülmüş ve elde edilen bu yeni sonuç Teorem 6.1’de verilmiştir.

Hatırlanacağı gibi Bölüm 6’da ele alınan sistem,

$$\begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} = T (J - R(q_k, p_k)) \bar{\nabla} H + T G_1(q_k) w + T G_2(q_k) u \quad (6.12)$$

$$y_k = G_1^T(q_k) \bar{\nabla} H$$

şeklinde idi, problem tanımındaki ceza değişkeni,

$$z(q_k, p_k) = \begin{bmatrix} y_k \\ d_k(q_k, p_k) u_k \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

olarak seçilmişti ve bozucu bastırma başarımı ise,

$$\sum_{k=0}^N \{y_k^T y_k + u_k^T D(q_k, p_k) u_k\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^N \|w_k\|^2 \quad (6.14)$$

biçiminde tanımlanmıştı. Bölüm 6’da bu problemin çözümü için $u_k = -\alpha T \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H$ statik durum geribeslemesi önerilmiş ve çözüme ilişkin yeter koşul aşağıdaki cebirsel HJI eşitsizliği ile verilmişti.

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \gamma^{-2} T^2 g_1(q_k) g_1^T(q_k) - \alpha^2 T^2 g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \\ & - 2\alpha T R_1(q_k, p_k) + g_1(q_k) g_1^T(q_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Aynı problemin çözümü için, Tanım 6.1’de eşitlik biçiminde verilen kayıplı olma tanımı kullanılırsa ve ϕ kayıp oranı fonksiyonu,

$$\phi = \|\gamma^{-1} \alpha T \bar{\nabla}^T H G_1 - \gamma w\|^2 \quad (6.16)$$

biçiminde seçilirse, (6.15)’in eşitlik haline ulaşılacağı hemen görülür.

Bozucu bastırma problemi için, Tanım 6.1’de verilen kayıplı olma tanımından yararlanılarak elde edilen yeni sonuç ise aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 6.2: Ayırık zamanlı kapı kontrollü Hamiltonian sistem - (6.12) ile verilen - ve (6.12-6.14) ile tanımlanan bozucu bastırma problemi ele alınsın. Aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılınsın,

- I. Sistem, y_k çıkışına göre sıfır-durum sezilebilirdir.
- II. Ağırlık matrisi $d(q_k, p_k)$ tam sütun ranklıdır.
- III. Denge noktası $x^* = 0$, $\mathcal{H}(x)$ 'in bir kesin yerel minimumudur.
- IV. Tanım 3.1'deki koşulları tam olarak sağlayan bir ayırık-gradyan $\bar{\nabla}H(x(k), x(k+1))$ $x = \{q, p\} \in R^{2n \times 2n}$ vardır.

Önceden verilmiş bir γ bozucu bastırma seviyesi için bozucu bastırma problemini çözümünün varlığının bir yeter koşulu,

$$\sup \|g_1(q_k)g_1^T(q_k)R^{-1}(q_k, p_k)\|_\infty < \frac{2T}{(1 + \gamma^{-2}T^2)} \quad (6.17)$$

şeklinde dir. Eğer (6.17) koşulu sağlanıyorsa, verilmiş bir γ bozucu bastırma seviyesini veren kontrol kuralı $u_k = -T \beta \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H$ şeklinde olacaktır. Burada,

$$\beta = \left\{ \frac{\bar{\nabla}_p^T H \left(2T R(q_k, p_k) - (1 + \gamma^{-2}T^2) g_1(q_k)g_1^T(q_k) \right) \bar{\nabla}_p H}{T^2 \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H} \right\}^{1/2} \quad (6.18)$$

ilişkisinden elde edilir. $\square$

İspat: Sisteme ilişkin Lyapunov fonksiyonu olarak sistemin enerji fonksiyonu alınsın. (6.2) kayıplı olma eşitliği, $V = \mathcal{H}$ ve $s = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|w_k\|^2 - \|z_k\|^2)$ için,

$$\mathcal{H}(k+1) - \mathcal{H}(k) = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|w_k\|^2 - \|z_k\|^2) - \varphi(x(k), u(k), w(k)) \quad (6.19)$$

biçiminde yazılınsın. Sistem (6.12) için (6.19) eşitliği yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(k+1) - \mathcal{H}(k) &= \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H \\ \bar{\nabla}_p H \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_{k+1} - q_k \\ p_{k+1} - p_k \end{bmatrix} \\
&= -T \bar{\nabla}_p^T H R(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p H - \\
&\quad + T \bar{\nabla}_p^T H g_1(q_k) w_k + T \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) u_k \\
&= \frac{1}{2} (\gamma^2 w^T w - y^T y - u^T d^T du) - \phi((q_k, p_k), u_k, w_k)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir ve kayıplı olma fonksiyonu olarak,

$$\varphi = \|\gamma^{-1} T \bar{\nabla}_p^T H G_1 - \gamma w\|^2 + 2\beta T^2 \bar{\nabla}_p^T H g_2 \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T \bar{\nabla}_p H \tag{6.21}$$

seçilir ardından, bu fonksiyon (6.20)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&-2T \bar{\nabla}_p^T H R(q_k, p_k) \bar{\nabla}_p H + \beta^2 T^2 \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H + \\
&\quad + \gamma^{-2} T^2 \bar{\nabla}_p^T H g_1(q_k) g_1^T(q_k) \bar{\nabla}_p H + \bar{\nabla}_p^T H g_1(q_k) g_1^T(q_k) \bar{\nabla}_p H = 0
\end{aligned} \tag{6.22}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik β 'lı terimlerin katsayıları gruplanarak,

$$a\beta^2 + c = 0 \tag{6.23}$$

gibi düzenlenebilir. Burada,

$$a = T^2 \bar{\nabla}_p^T H g_2(q_k) \{d_k^T d_k\}^{-1} g_2^T(q_k) \bar{\nabla}_p H \tag{6.24}$$

$$c = \bar{\nabla}_p^T H \left\{ -2T R(q_k, p_k) + \gamma^{-2} T^2 g_1(q_k) g_1^T(q_k) + g_1(q_k) g_1^T(q_k) \right\} \bar{\nabla}_p H \tag{6.25}$$

biçiminde tanımlanmış parametrelerdir.

Şimdi, (6.17) ile verilen yeter koşul,

$$\sup \|g_1(q_k) g_1^T(q_k) R^{-1}(q_k, p_k)\|_{\infty} \leq \frac{2T}{(1 + \gamma^{-2} T^2)}$$

sağlansın, bu durumda,

$$I - \frac{(1 + \gamma^{-2} T^2)}{2T} g_1(q_k) g_1^T(q_k) R^{-1}(q_k, p_k) \geq 0 \tag{6.26}$$

ilişkisi de sağlanacaktır. Bu eşitsizlik,

$$-2T R(q_k, p_k) + (1 + \gamma^{-2} T^2) g_1(q_k) g_1^T(q_k) \leq 0 \tag{6.27}$$

biçiminde düzenlenir ve soldan $\bar{\nabla}_p^T H$ ve sağdan $\bar{\nabla}_p H$ ile çarpılırsa,

$$\bar{\nabla}_p^T H \left\{ -2T R(q_k, p_k) + \gamma^{-2} T^2 g_1(q_k) g_1^T(q_k) + g_1(q_k) g_1^T(q_k) \right\} \bar{\nabla}_p H \leq 0 \tag{6.28}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi, (6.28)'in sol tarafı (6.25) ile tanımlanan c parametresine eşittir. Yani teoremin iddiası olan yeter koşul (6.17) sağlandığında, c parametresi $c \leq 0$ özelliğinde olacaktır. Ayrıca, her zaman $a \geq 0$ özelliğinde olduğu bilindiğine göre, (6.23) eşitliğinin pozitif bir β çözümü olduğu ve bunun (6.18)'e eşit olacağı aşıkardır. $\square$

Uyarı 6.1 : İstenilen herhangi bir bozucu bastırma seviyesi γ yı veren kontrol kuralının sisteme uygun bir sönüm $R(q_k, p_k)$ - Bölüm 4'de türetilen sönüm atama kontrol kuralı ile- ataması yapılarak başarılabileceği Teorem 6.2'den görülebilir. $\square$

6.5 Sonuçlar

Genel doğrusal olmayan sistemlerin yerel kararlılık probleminin çözümü için Navarro-Lopez (2002a) tarafından sunulmuş olan yöntem, Hamiltonian sistemlerin ayrık modelleri kullanılarak yeniden yazıldığında elde edilen sonuçlar incelenmiş ve Bölüm 4'de elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Geribesleme ile kayıplı olma tanımında yer alan kayıp oranı fonksiyonu $\varphi(x, u)$ 'nin belirli bir seçimi kullanılarak elde edilen kontrol kuralının, Bölüm 4'de sunulan sönüm atama kontrol kuralı ile aynı olduğu gösterilmiştir.

Aynı yol izlenerek bozucu bastırma problemi için de bir çözüm elde edilebileceği görülmüş ve Teorem 5.2'de verilen eşitsizlikten daha kullanışlı bir koşul verecek $\varphi(x, u)$ 'nin varlığı araştırılmış, uygun bir $\varphi(x, u)$ seçimi ile Bölüm 5'de verilen çözüme katkı yapan ek bir sonuç da elde edilmiştir.

7. UYGULAMA SONUÇLARI

7.1 Giriş

Bu bölümde, gezer köprülü vinçler için yükün en az hatayla konumlandırılması ve köprü hareketi nedeniyle oluşan salınımın azaltılması sorunun çözümü için Bölüm 4’de önerilen ayrık zamanlı pasif olma temelli kontrol (PBC) tekniği kullanılmıştır. Bu amaçla gerçeğine uygun olarak **1/20** oranında inşa edilmiş olan İ.T.Ü. Endüstriyel Otomasyon Laboratuvarında bulunan gezer vinç düzeneği üzerinde çalışılmıştır. Hareketi servo sürücülerle sağlanan bu sistem için elde edilen kontrol kuralları bir programlanabilir lojik kontrolör (PLC) üzerinde gerçekleştirilmiş ve elde edilen gerçek zamanlı deney sonuçları sunulmuştur.

Vinçler dünyada binlerce limanda, inşaat alanlarında, ambarlarda ve süreç otomasyonunda kullanılmaktadır. Bu yapıların güvenli ve süreçte verimliliği sağlayacak biçimde hareketi endüstriyel üretkenlik bakımından önemlidir. Vinçlerde yükün keskin bir doğrulukla istenilen konuma götürülmesi zordur. Bu sistemlerde köprünün veya taşıyıcının hareketi ile ya da dış etkenler nedeni ile büyük salınımlar oluşabilmektedir. Köprü istenilen hedef noktaya ulaştıktan sonra da askıdaki yük salınmaya devam etmektedir. Ayrıca, rüzgar gibi dış bozucular da önemli salınımlara neden olmaktadır. Vinçler genellikle vinç operatörleri tarafından kumanda edilmektedir. Bu şekilde yükün doğru biçimde konumlandırılması zaman alıcı olup, deneyim ve beceri gerektiren bir iştir. Öte yandan, yükün salınımı önemli bir güvenlik tehlikesi oluşturmaktadır. Vinçlerin yaygın olarak kullanımı bu istenmeyen salınımların azaltılması yönünde çok sayıda araştırmaya konu olmuştur (Sorensen ve diğ., 2007a; Sorensen ve diğ.,2007b; Kim ve diğ., 2004; Abdel-Rahman ve diğ., 2003; Gustafsson ve Heidenback, 2002; Cho ve Lee, 2002; Fang ve diğ., 2001; Moustafa, 2001; Park ve diğ., 2000; Méndez ve diğ., 1999; Park ve Chang, 1998; Singer ve diğ., 1997; Noakes ve Jansen, 1992; Butler ve diğ., 1991; Singer ve Seering, 1990; Auernig ve Troger, 1987; Sakawa ve Shindo, 1982; Besston, 1969). Literatürde bu konu ile ilgili zaman-optimal kontrol (time-optimal control) teknikleri, giriş biçimlendirme (input shaping) ve geribeslemeli kontrol teknikler ile çözümler

önerilmiştir. Ancak, bu kontrol tekniklerinin çoğunun varolan endüstriyel teknolojik donanımlarla gerçekleştirilmesi güçtür. Örneğin, zaman-optimal kontrol tekniklerinin ticari sistemlerde bilinen bir uygulaması yoktur (Gustafsson ve Heidenback, 2002). Giriş biçimlendirme tekniği, referans işaretinin salınımı azaltacak yönde uygun biçimde değiştirilmesi işlemidir ve gerçek-zamanda uygulanabilir (Singer ve Seering, 1990). Ancak, giriş biçimlendirme işlemi bir geribesleme mekanizmasına sahip değildir, bu nedenle bir geribesleme kontrol kuralı ile birlikte kullanılması gerekmektedir. Bununla birlikte, geleneksel ve modern kontrol teknikleri ile sorunu çözmeye çalışan çok sayıda araştırmada, yükün doğru konumlandırılması için uygun çözümler sunulmakla birlikte, salınımı azaltma konusunda sunulan çözümlerde kontrol tasarımı çok karmaşıktır (Gustafsson ve Heidenback, 2002).



Şekil 7.1 : Gezer köprülü vinç.

Bu çalışmada Şekil 7.1’de bir örneği görülen gezer köprülü vinçlerin konum kontrolü ve köprü ya da taşıyıcı hareketi ile oluşan salınımı azaltma problemi ele alınmıştır. Gezer köprülü vinç 2-serbestlik dereceli eksik sürülmüş bir sistemdir. Kontrolör tasarımında sistemin matematik modeli olarak PCH modeli, sistemin kararlı kılınması ve konum kontrolü için PBC tekniğinin Bölüm 4’de önerilen ayrık zamanlı karşılığı kullanılmıştır.

7.2 Gezer Köprülü Vinç Sisteminin Ayrık Zamanlı PBC Yöntemi ile Kontrolü

İlkesel şeması Şekil 7.2’de görülen 2-serbestlik dereceli eksik sürülmüş bir sistem olan gezer köprülü vinç sisteminin enerji fonksiyonu,

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2} p^T M(q)^{-1} p + \mathcal{P}(q) \quad (7.1)$$

$$M = \begin{bmatrix} M_y L^2 & M_y L \cos(q_1) \\ M_y L \cos(q_1) & M_T + M_y \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$\mathcal{P}(q) = -M_y g L \cos(q_1)$$

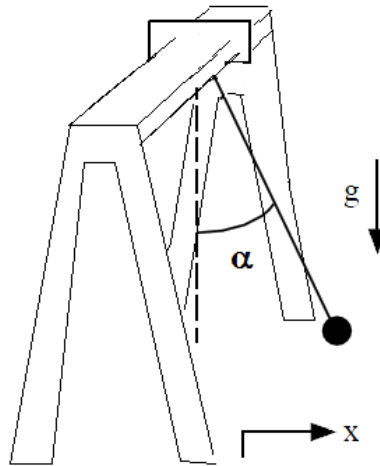
ve $G = [0 \ 1] e_2$ biçiminde yazılabilir. Burada $q_1 = \alpha$ yükün dikey ile yaptığı açı, q_2 köprü konumu, M_y yükün kütlesi, L halatın boyu, M_T köprünün (taşıyıcının) kütlesi ve g yer çekimi ivmesidir. Tasarlanacak kontrol sisteminin amacı, olabildiğince kısa sürede ve az salınım ile yükü istenilen konuma taşımaktır. Bu bilgilerle sistemin Hamiltonian modelinin,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q \mathcal{H}(q, p) \\ \nabla_p \mathcal{H}(q, p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G(q) \end{bmatrix} u \quad (7.3)$$

$$y(t) = G^T(q) \nabla_p \mathcal{H}(q, p)$$

biçiminde elde edildiği bilinmektedir.

Kontrol tasarımında, sürücü ve motorun doğrusal olmayan dinamikleri ihmal edilmiştir. Köprü hareketinde kaymanın olmadığı varsayılmıştır. Yük noktasal bir kütle olarak değerlendirilmiş, halatın kütlesinin önemsiz olduğu ve esnek olmadığı kabul edilmiştir.



Şekil 7.2 : Gezer köprülü vinç sistemi ilkesel şeması.

Sistemin salınımsız olarak yerleşmesi istenen nokta olan $q_1^* = 0$, sistemin kararlı denge noktasıdır. Bu nedenle, kinetik enerji fonksiyonunun biçimlendirilmesine

gerek yoktur. Yükün taşınmak istediği konum $\mathbf{X}^*$ olmak üzere, yükü bu konuma götürmek için; kapalı çevrimli sistemin $\mathbf{q}_2$ dinamiğine ilişkin denge noktası $\mathbf{q}_2^* = \mathbf{X}^*$ olacak biçimde sistemin potansiyel enerjisini, PBC tekniği ile değiştirmek yeterli olmaktadır. Buna göre tasarım parametreleri, $\mathbf{M}_d = \mathbf{M}$ ve $\mathbf{J}_2 = \mathbf{0}$ alınabilir (Banavar ve diğ., 2006) ve kapalı $\mathbf{q}_2$ çevrimli sisteme ilişkin uygun bir enerji fonksiyonu,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_d(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathcal{K}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathcal{P}_d(\mathbf{q}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} + \mathcal{P}(\mathbf{q}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^*)^T \mathbf{K}_p (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^*)\end{aligned}\tag{7.4}$$

biçiminde seçilebilir. Burada $\mathbf{K}_p$ pozitif bir sayıdır. Böylece kapalı çevrimli sistem için öngörülen, yani istenen Hamiltonian sistem, aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}_d \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}_d \end{bmatrix}\tag{7.5}$$

Ayrıca, enerji biçimlendirme kontrol kuralının, açık çevrimli sistemin ve istenen kapalı çevrimli sistemin potansiyel enerji fonksiyonlarının ayrık-gradyanları kullanılarak inşaa edilebileceği aşağıdaki gibi gösterilebilir. Bu amaçla, önce,

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{H} &= \bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{K} + \bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{P}(\mathbf{q}) \\ \bar{\nabla}_{\mathbf{p}} \mathbf{H} &= \bar{\nabla}_{\mathbf{p}} \mathbf{K}\end{aligned}\tag{7.6}$$

ifadeleri göz önüne alınarak Bölüm 3’de önerilen yöntemle (7.3) sisteminin ayrık modeli,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{H} \\ \bar{\nabla}_{\mathbf{p}} \mathbf{H} \end{bmatrix} + \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{T} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_{\mathbf{p}} \mathbf{K} \\ -\bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{K} - \bar{\nabla}_{\mathbf{q}} \mathbf{P}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} + \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}_k) \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)\end{aligned}\tag{7.7}$$

biçiminde ve kapalı çevrimli sistemin gradyan temelli ayrık modeli ise,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_q H_d \\ \bar{\nabla}_p H_d \end{bmatrix} \\
&= T \begin{bmatrix} \bar{\nabla}_p K \\ -\bar{\nabla}_q K - \bar{\nabla}_q P_d(\mathbf{q}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

biçiminde yazılır. Sonra, enerji biçimlendirme işlevini yapacak olan ayırık kontrol kuralı, (7.7) eşitliğinin sağ tarafı ile (7.8) eşitliğinin sağ tarafı eşitlenerek, doğrudan açık çevrimli ve kapalı çevrimli sistemin ayırık zamanlı modellerinin (7.1), (7.2) ve (7.4) ile verilen parametreleri cinsinden,

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}) = -M_y g L \cos(q_1) \tag{7.9}$$

$$\mathcal{P}_d(\mathbf{q}) = -M_y g L \cos(q_1) + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^*)^T K_p (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^*) \tag{7.10}$$

$$\mathbf{u}_{es}(\mathbf{k}) = -G^{-1}(\mathbf{q}_k) (\bar{\nabla}_q P_d - \bar{\nabla}_q P) \tag{7.11}$$

biçiminde elde edilir. Burada $G = \mathbf{e}_2$ olduğundan,

$$\mathbf{u}_{es}(\mathbf{k}) = -(\bar{\nabla}_{q_2} P_d - \bar{\nabla}_{q_2} P) = K_p (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^*) \tag{7.12}$$

ifadesi yazılabilir ve sönüm atama kontrol kuralı (4.12) ise,

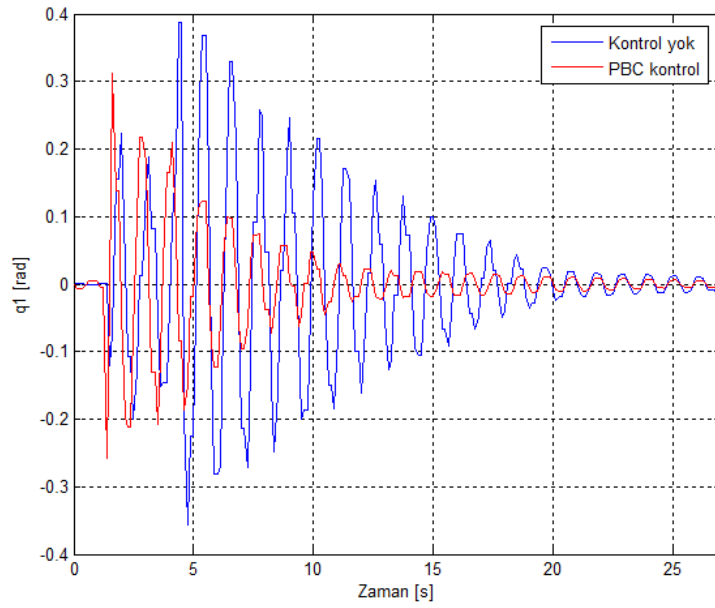
$$\mathbf{u}_{di} = -K_v G^T \bar{\nabla}_p H_d = -K_v \bar{\nabla}_{p_2} \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}^T M^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{p} \right) \tag{7.13}$$

biçiminde ifade edilebilir.

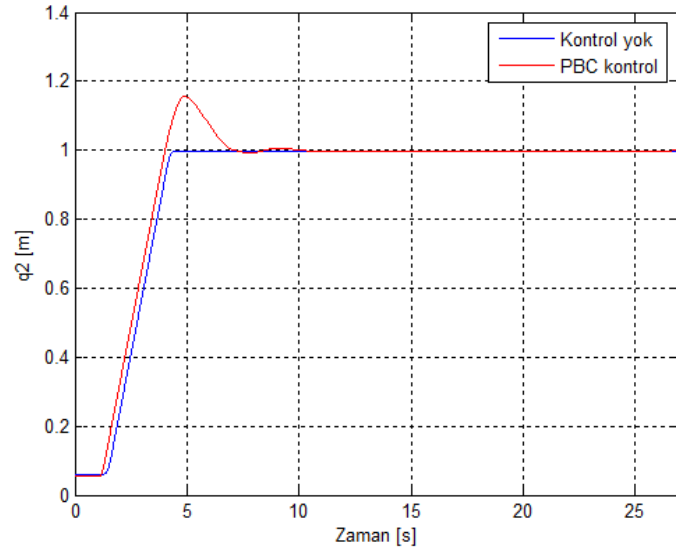
Bu kontrol kuralları, Şekil 7.3’de görülen İ.T.Ü. Endüstriyel Otomasyon Laboratuvar’ında bulunan gezer vinç düzeneği üzerinde sınanmıştır. Düzenek gerçeğine uygun olarak **1/20** oranında küçülmüş olarak inşa edi biçiminde seçilmiştir. Düzenek üzerinde yapılan deneylere ilişkin sonuçlar Şekil 7.4-7.7’de verilmiştir. Bu sonuçlardan görüldüğü gibi kontrol altındaki sistem yükü hızlı bir biçimde hedefe ulaştırmakta ve bu noktadaki salınımları büyük oranda zayıflatmaktadır. Ayrıca, salınımı azaltmak üzere tasarlanan kontrol kuralının sistem $K_p = 0.19$ hızını azaltmadığı görülmektedir.



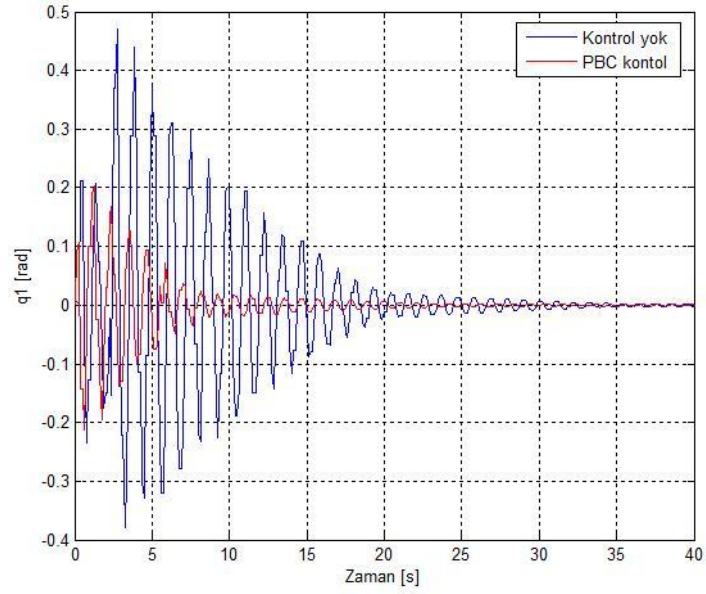
Şekil 7.3 : İTÜ Endüstriyel Otomasyon Laboratuvarı'nda bulunan gezer köprülü vinç düzeneği.



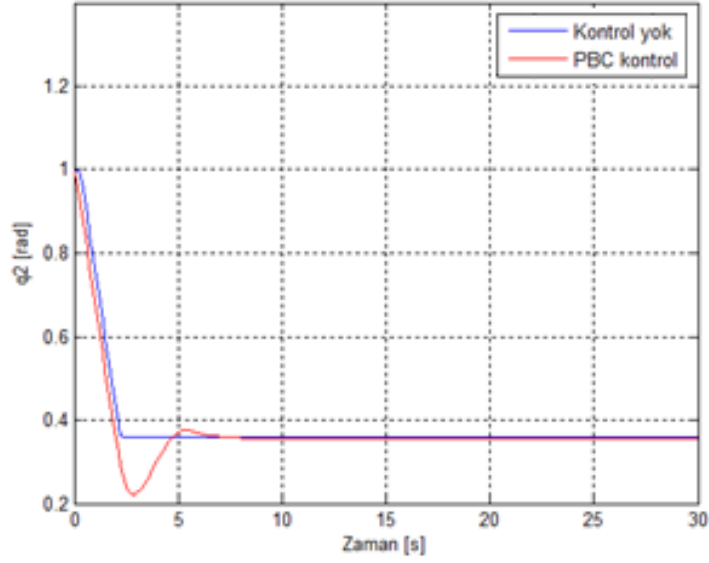
Şekil 7.4: Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 0.06m konumundan 1.0m konumuna hareketi nedeniyle oluşan salınım eğrileri.



Şekil 7.5: Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 0.06m konumundan 1.0m konumuna götürülmesi.



Şekil 7.6: Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 1m konumundan 0.35m konumuna hareketi nedeniyle oluşan salınım eğrileri



Şekil 7.7: Kontrolsüz olarak ve PBC kontrolü ile köprünün 1m konumundan 0.35m konumuna götürülmesi.

7.3 Sonuçlar

Gezer köprülü vinçler için yükün keskin bir doğrulukta konumlandırılması ve köprü hareketinden kaynaklanan salınımın azaltılması problemi için PBC tekniği kullanılarak doğrudan ayırık zamanlı kontrolör tasarımı yapılmıştır. Uygulama, gerçeğine uygun inşa edilmiş bir gezer vinç düzeneği üzerinde, ulaşılabilir ticari endüstriyel donanımlar ile yapılmıştır. Deney sonuçları, önerilen kontrol kuralının, yükü hedef noktaya kontrolsüz duruma göre sistem hızını azaltmadan götürüp, hedef noktaya ulaştıktan sonra oluşan salınımları önemli ölçüde azalttığını göstermiştir.

8. SONUÇLAR

Toplu-parametrelili Hamiltonian sistemlerin doğrudan sayısal kontrol tasarımına uygun bir ayrık zamanlı modellenin elde edilmesi için bu tezde önerilen yöntem, sistemin sürekli modellenin bilindiği varsayımı altında geliştirilmiştir. Önerilen yöntem, gradyan temellidir ve elde edilen modeller, kullanılan ayrık-gradyan ifadesi ayrık-gradyan olma koşullarını tam olarak sağladığı sürece enerji korunumlu olma özelliğini taşır. Ayrıca, sisteme ilişkin iç bağlantı matrisi standart ters-simetrik matris ve kullanılan ayrık-gradyan ifadeleri özel bir yapıda ise elde edilen modeller *simplektik fark sistemi* tanımlamaktadır. İlgili literatürde, Hamiltonian sistemlerin ayrık modellerinin, hem simplektik ve enerji korunumlu olma özelliğini aynı anda sağlayacak biçimde elde etmenin olanaksız olduğu vurgulanmıştır (McLachlan ve diğ., 1998).

Hamiltonian sistemlerin gradyan temelli ayrık zamanlı modellenin oluşturmak için bu tezde önerilen ayrık-gradyan ifadelerinden ikisi -Tanım 3.2 ve 3.3- modeli elde edilecek sistemin enerji fonksiyonu üzerinde bir kısıtın sağlanmasını gerektirir. Bu ayrık-gradyan ifadeleri kullanılarak elde edilen ayrık modellerin birbirlerinden farkı çok azdır. Karesel Yaklaşıklık Lemma'sına dayanan üçüncü ayrık-gradyan ifadesi ise, enerji fonksiyonları üzerine herhangi bir kısıt getirmeyen, elde edilmesi kolay ve kullanışlı bir yapıya sahiptir. Sisteme ilişkin enerji fonksiyonu karesel ve ağırlık -genelleştirilmiş eylemsizlik matrisi- sabit ise elde edilen üç model eşdeğerdir. İlk iki ayrık-gradyan ifadesi, Ortalama Değer Teoreminden (Mean Value Theorem) ve orta nokta kavramından esinlenerek, son ayrık-gradyan ise, Diewert (1976)'da verilen Karasel Yaklaşıklık Lemma'sı yardımıyla, sürekli Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor seri yaklaşıklığı kullanılarak türetilmiştir. Sisteme ilişkin enerji fonksiyonu karesel ve ağırlık matrisi sabit ise, önerilen tüm ayrık-gradyan ifadeleri ayrık-gradyan olma koşullarının her ikisini de sağladığı halde, bu özelliğe sahip olmayan enerji fonksiyonları için, bu ifadeler sadece ikinci koşulu tam olarak sağlamakta, fakat birinci koşulu sağlamamaktadır. Ayrıca, ilk iki ayrık-gradyan ifadesi kullanılarak elde edilen ayrık zamanlı modellerin enerji fonksiyonları

sürekli sisteminki ile aynı olmadığı gibi modelin enerji fonksiyonun ifadesine ulaşmak da her zaman mümkün değildir. Ancak sürekli sistemin ve modelin enerji fonksiyonları arasındaki farkın hesabı mümkün olmakla birlikte, ilgili bölümde sunulan ifadelerden de görülebileceği gibi, bu enerji farkının hesaplanması karmaşık ve güç işlemleri gerektirmektedir. Öte yandan, örnekleme periyodu küçüldükçe, enerjiler arasındaki fark azalmakta ve periyod sıfıra yakınsadığında, fark da sıfır olmaktadır. Sürekli Hamiltonian sistemin enerji fonksiyonunun yaklaşık ifadesini kullanan, üçüncü ayırık-gradyan ifadesi, enerji fonksiyonu bilinen bir ayırık zamanlı model elde etme olanağı sağlamıştır. Elde edilen ayırık zaman modelin ve sistemin enerji fonksiyonları arasındaki fark bilinmekte ve sürekli enerji fonksiyonunun ikinci dereceden Taylor açılımındaki 2. dereceden büyük dereceli terimlerin toplamı olarak hesaplanabilmektedir. Yapılan benzetimlerde, kayıp fonksiyonu sıfır olmadıkça, her üç ayırık-gradyan ifadesi kullanılarak elde edilen modellerin hatalarının kabul edilebilir sınırlar içinde kaldığı gözlemlendiği için, bu modellerin doğrudan ayırık kontrolör tasarım yöntemleri geliştirmeye uygun olduğu kararına varılmıştır.

Hamiltonian sistemlere kontrollör tasarlamak amacı ile kullanılan tek ayırık zamanlı model, Laila ve Astolfi (2005a), Laila ve Astolfi, (2006) çalışmalarında bulunan modeldir. Bu çalışmada kullanılan ayırık zamanlı model bu tez çalışmasında önerilen modele göre çok daha yaklaşık bir model olup, kendilerinin de ifade ettiği gibi faz uzayında önemli bozulmalara neden olmaktadır. Laila ve Astolfi, bu modeli IDA-PBC tekniğinin ayırık karşılığını türetirken önermiş ve kullanmış olmalarına rağmen, sistemi sadece denge noktası civarında - yani doğrusal bir Hamiltonian sistem modelinin geçerli olduğu - dar bir aralıkta kontrol edebilen bir kontrol kuralı üretebilmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, enerji biçimlendirme ve sönüm atama işlemlerini yapan kontrol kuralları, ele alınan açık çevrim ve istenen kapalı çevrim sistemlerin doğrudan ayırık zamanlı modelleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu modeller bu tezde önerilen modelleme yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Sürekli Hamiltonian sistemler için önerilmiş olan IDA-PBC tekniğinde, eğer sistem eksik sürülmüş ise, istenen özelliklere sahip kapalı çevrimli sistemin tasarımı önemli ve genel çözümü çok zor bir problemdir. Bu nedenle, bu tezde, sadece eksik-sürülmüş sistemler için kontrol kuralları türetilirken, istenen kapalı çevrimli sistemin sürekli modelinin bulunduğu

varsayılmıştır. Modelleme hatalarının kararlılık üzerine etkisi enerji ilişkileri kullanılarak incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında türetilen, enerji şekillendirme ve sönüm atama ile sistemi istenen noktada kararlı kılan ayırık kontrol kurallarının başarımını sınamak için, eksik sürülmüş sistemler olarak araba-sarkaç ve top-çubuk sistemi, tam sürülmüş sistem olarak da çift sarkaç sistemi seçilmiş ve bu sistemler için benzetim yolu ile kontrol uygulamaları yapılmıştır. Bu sayısal deneylerde kullanılan örnekleme periyotları için, ayırık kontrolör sürekli kontrolöre çok yakın bir başarım gösterirken sürekli kontrolörün emülatörü kapalı çevrim sistemi kararsız yapmıştır. Bir başka deyişle, çalışmada önerilen yöntemle elde edilen ayırık zamanlı kontrol kuralının sürekli kontrol kuralının yerine kullanılabileceği görülmüştür. Ayırık kontrol kurallarının hesap karmaşıklığının hemen hemen emülatörünki ile aynı mertebede olduğunu ve bu nedenle endüstriyel uygulamalar için de önerilen yöntemin kullanışlılığını vurgulamak gerekir. Bilindiği kadarı, IDA-PBC tekniğinin ayırık zamanlı karşılığının önerildiği tek çalışma olan Laila ve Astolfi, (2006a)'da türetilen kontrol kuralı, top-çubuk sistemi'ne denge noktası civarında uygulanabilmiş, kendilerin de ifade ettiği gibi, sistem denge noktasına başka bir kontrol kuralı ile getirilmiştir. Oysa, bu tez çalışmasında önerilen kontrol kuralı, aynı parametrelere sahip top-çubuk sistemine -90 ile +90 derece aralığındaki başlangıç koşulları için uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Hamiltonian sistemlerin – n serbestlik dereceli mekanik sistemler- bozucu bastırma probleminin ayırık zamanlı statik durum geribeslemesi ile çözümüne ilişkin varlık koşulu bir cebirsel HJI eşitsizliği olarak elde edilmiştir. Bu tezde daha önce de vurgulandığı gibi, genel doğrusal olmayan sistemler için problemin çözümünün varlık koşulu, Hamilton-Jacobi-Issacs (HJI) kısmi diferansiyel eşitsizliği biçiminde verilirken, Hamiltonian sistemler için problemin çözümünün varlık koşulu, daha kullanışlı bir koşul olan cebirsel bir HJI eşitsizliği biçiminde elde edilmiştir. Ayrıca, benzetim sonuçları, bu çalışmada önerilen ayırık kontrol kuralının, emülatör kontrol kuralına göre daha yüksek başarıma sahip olduğunu göstermektedir. Çünkü, seçilen örnekleme zamanı için emülatör kontrol kuralı kapalı çevrimli sistemin kararsız olmasına neden olmuştur.

Parametrelerinde belirsizlik içeren Hamiltonian sistemlerin dayanıklı bozucu bastırma probleminin çözümünün varlık koşulunun türetilmesi için; önce, parametre

belirsizliklerinin etkisinin sisteme gelen ek bir bozucu ile modellenebileceği gösterilmiş, sonra, bozucu bastırma problemi için bu tezde elde edilen sonuçlar dayanıklı bozucu bastırma probleminin çözüm koşulunu elde etmek için kullanılmıştır. Problemin çözümünün varlığına ilişkin yeter koşulun, parametre belirsizlikleri göz ardı edilerek yapılan bozucu bastırma problemi için elde edilen yeter koşuldan daha sıkı olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, dayanıklı kontrol tasarımının gerekliliği ve başarımı sayısal deneyler üzerinde de sınanmıştır. Yapılan benzetimlerde, belirsizlikler göz ardı edilerek yapılan tasarım sonucu elde edilen kontrol kuralının kapalı çevrimli sistemin kararsız yaptığı gözlenmiştir.

Navarro-Lopez (2002a) tarafından, genel doğrusal olmayan sistemlerin yerel kararlılık probleminin çözümü için sunulmuş olan, kayıplı olma kuramına dayanan yöntem, Hamiltonian sistemlerin, bu tezde önerilen ayrık modelleri kullanılarak yeniden yazılmıştır. Elde edilen sonuç, ayrık zamanlı PBC tasarımı ile elde edilen sonuçla karşılaştırılmıştır. Navarro-Lopez (2002a)'in sunmuş olduğu geribesleme ile kayıplı olma tanımında yer alan kayıp oranı fonksiyonun belirli bir seçimi kullanılarak elde edilen kontrol kuralının, PBC tasarımı ile elde edilen sönüm atama kontrol kuralı ile aynı olduğu görülmüştür.

Navarro-Lopez (2002a)'in sunmuş olduğu kayıplı olma tanımının bozucu bastırma probleminin çözümüne de bir katkı yapabileceği görülmüş ve daha önce Teorem 6.1'de verilen eşitsizlikten daha kullanışlı bir koşul verecek kayıp oranı fonksiyonun varlığı araştırılmıştır. Uygun bir kayıp oranı fonksiyonu seçimi ile bunun mümkün olduğu ve sistemin parametrelerinin bir koşulu sağlaması durumunda basit bir cebirsel hesap ile kontrol kuralının inşasının mümkün olduğu gösterilmiştir.

Son olarak, gezer köprülü vinçlerde yükün en az hatayla konumlandırılması ve köprü hareketi nedeniyle oluşan salınımın azaltılması sorunun çözümü için bu çalışmada önerilen PBC yöntemi ile doğrudan ayrık zamanlı kontrolör tasarımı ve uygulaması yapılmıştır. Uygulama, yine bu çalışma kapsamında gerçeğine uygun inşa edilmiş bir gezer vinç düzeneği üzerinde, ulaşılabilir ticari endüstriyel donanımlar ile gerçekleştirilmiştir. Düzenek üzerinde yapılan deneylere ilişkin sonuçlar, önerilen ayrık zamanlı PBC yöntemi ile elde edilen kontrol kuralı altında, yükün hızlı bir biçimde hedefe ulaştırıldığını ve bu noktadaki salınımların büyük ölçüde azaltıldığını göstermiştir. Burada, salınımı azaltmak üzere tasarlanan kontrol kuralının sistem hızını azaltmadığı vurgulanmalıdır.

KAYNAKLAR

- Abdel-Rahman, E.M., Nayfeh, A.H., and Masoud, Z.N.,** 2003: Dynamics and Control of Cranes: A Review, *Journal of Vibration and Control*, **9**, 7, 863-908.
- Acosta, J.Á., Ortega, R., Astolfi, A., and Mahindrakar, A.D.,** 2005: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of Mechanical Systems with Underactuation Degree One, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, 12, 1936-1954.
- Ahlbrandt, C.D., and Peterson, A.C.,** 1996: Discrete Hamiltonian Systems: Difference Equations, *Continued Fractions and Riccati Equations*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Ailon, A., and Ortega, R.,** 1993: An observer-based controller for robot manipulators with flexible joints, *System and Control Letters*, **21**, 329-335.
- Ascher, U.M.,** 2006: *Numerical Methods for Time-Dependent PDEs*, Chapter 6, Lecture Notes.
- Astolfi, A.,** 1993: Parametrization of output feedback controllers that satisfy an H_∞ norm bound, in *Proc.EuropeanContr.Conf.*, Groningen, 74-78.
- Astolfi, A., and Laila, D. S.,** 2005: Sampled-data control systems, *European Control Training Site*, Fap. 2005, Gif sur Yvette, France.
- Auckly, D., Kapitanski, L., and White, W.,** 2000: Control of nonlinear underactuated systems, *Commun. Pure Appl. Math.*, **3**, 354-369.
- Auckly, D., and Kapitanski, L.,** 2002: On the lambda-equations for matching control laws, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **41**, 5, 1372-1388.
- Auernig, J.W., and Troger, H.,** 1987: Time optimal control of overhead cranes with hoisting of the payload, *Automatica*, **23**, 4, 437-447.
- Ball, J.A., and Helton, J.W.,** 1989: H_∞ optimal control for nonlinear plants: Connection with differential games, *Proc. 28th IEEE Conference on Decision and Control*, **2**, 956-962.
- Ball, J.A., Helton, J.W., and Walker, M.L.,** 1993: H_∞ -control for nonlinear systems with output feedback, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38**, 546-559.
- Banavar, R., Kazi, F., Ortega, R., and Manjarekar, N.S.,** 2006: The IDA-PBC methodology Applied to a Gantry Crane, *MTNS*, Kyoto.

- Basar, T., 1989:** A Dynamic Games Approach to Controller Design: Disturbance Rejection in Discrete Time, *Proceedings of 28th Conference on Decision and Control*, 407- 414.
- Basar, T., and Bernhard, P., 1995:** H_∞ *Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*, Boston, MA: Birkhauser, 263-268.
- Beeston, J.W., 1969:** Closed-loop time optimal control of a suspended payload-a design study, *4th IFAC World Congress*, 85-99, Warsaw, Poland.
- Blankenstein G., Ortega R., and Van der Schaft, A.J., 2002:** The matching conditions of controlled Lagrangians and interconnection assignment passivity based control, *International Journal of Control*, **75**, 9, 645–665.
- Bloch, A.M., Marsden, J.E., and De Alvarez, G.S., 1997:** Feedback stabilization of relative equilibria for mechanical systems with symmetry, *Current and Future Directions in Applied Mathematics*, 43–64.
- Bloch, A.M., Leonard, N.E., and Marsden, J.E., 1999:** Potential shaping and the method of controlled Lagrangians. In: *Proc. CDC.*, **38**, 1653–1658.
- Bloch, A.M., Leonard, N.E., and Marsden, J.E., 2000:** Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems I: The first matching theorem. *IEEE Trans. The first matching theorem. IEEE Trans. Automatic Control*, **45**, 12, 2253–2269.
- Bohner, M., 1996:** Linear Hamiltonian Difference Systems: Disconjugacy and Jacobi-Type Conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **199**, 3, 804-806.
- Bullo, F., and Lewis, A.D., 2004:** *Geometric Control of Mechanical Systems*. New York: Springer-Verlag.
- Butler, H., Honderd, G., and Van Amerongen, J., 1991:** Model reference adaptive control of a gantry crane scale model, *IEEE Contr. Syst. Mag.*, **11**, 57-62.
- Byrnes, C.I., and Lin, W., 1994:** Losslessness, feedback equivalence, and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, **39**, 1, 83–98.
- Chang, D.E., 2005:** The extended lambda-method for controlled Lagrangian systems, *IFAC World Congress 2005*, Prague, Czech Republic.
- Chang, D.E., Bloch, A.M., Leonard, N.E., Marsden, J. E., and Woolsey, C.A., 2002:** The equivalence of controlled Lagrangian and controlled Hamiltonian systems for simple mechanical systems, *ESAIM: Control, Optim. Calculus Variations*, **8**, 393–422.
- Chen, T., and Francis, B.A., 1995:** *Optimal Sampled-Data Control Systems*, London: Springer-Verlag.
- Cho, S.K., and Lee, H.H., 2002:** A fuzzy-logic antishwing controller for threedimensional overhead cranes, *ISA Trans.*, **41**, 2, 235-43.

- Coutinho, D.F., Fub, M., and Trofino, A., 2004:** Robust analysis and control for a class of uncertain nonlinear discrete-time systems, *Systems and Control Letters*, **53**, 377-393
- Diewert, W.E., 1976:** Exact and Superlative Index Numbers, *Journal of Econometrics*, **4**, 2, 115-145.
- Djouadi, S.M., and Zames, G., 2002:** On optimal robust disturbance attenuation, *Systems and Control Letters*, **46**, 343-351.
- Doyle, J., 1982:** Analysis of feedback systems with structured uncertainties, *IEE Proc.*, Part D, **129**, 6, 242-250.
- Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., and Francis, B.A., 1989:** State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34**, 831-846.
- Ezal, K., Kokotovic, P., Teel, A.R., and Basar, T., 2001:** Disturbance attenuating output-feedback control of nonlinear systems with local optimality, *Automatica*, **37**, 805-817.
- Fang, Y., Dixon, W.E., Dawson, D.M., and Zergeroglu, E., 2001:** Nonlinear coupling control laws for a 3-DOF overhead crane system, *In Proceedings of the 40th IEEE conference of decision and control*, Orlando, FL, USA.
- Fantoni, I., and Lozano, R., 2002:** *Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag.
- Fradkov, A.L., 1991:** Speed-gradient laws of control and evolution, *European Control Conference*, 1861-1865.
- Fu, Y., Tian, Z., and Shi, S., 2006:** Robust H_∞ control of uncertain nonlinear systems, *Automatica*, **42**, 1547-1552.
- Fujimoto, K., and Sugie, T., 2001:** Canonical transformations and stabilization of generalized Hamiltonian systems, *System and Control Letters*, **42**, 3, 217-227.
- Gahinet, P., and Apkarian, P., 1994:** A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *International Journal of. Robust and Nonlinear Control*, **4**, 421-448.
- Gomez-Estern, F., Ortega, R., Rubio, F., and Aracil, J., 2001:** Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via total energy shaping, *IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, USA, 4-7.
- Gonzalez, O., 1996b:** *Time Integration and Discrete Hamiltonian Systems*, *Journal of Nonlinear Science*, **6**, 449-467.
- Gonzalez, O., and Simo, J.C., 1996a:** On the stability of symplectic and energy-momentum algorithms for non-linear Hamiltonian systems with symmetry, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **134**, 3-4, 197-222.
- Gordillo, F., Gomez-Estern, F., Ortega, R., and Aracil, J., 2002:** On the ball and beam problem: regulation with guaranteed transient performance and tracking periodic orbits, *15th International Symposium on*

Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS'02, University of Notre Dame.

- Gökner, I.C., and Sengör, N. S.,** 1998: Discrete-time version of Kalman-Yacubovitch-Popov Lemma for Nonlinear Systems, *Proc. ICECS, Lisbon, Portugal*, 1054-1056.
- Gören-Sümer, L., and Yalçın, Y.,** 2008: Gradient Based Discrete-Time Modeling and Control of Hamiltonian Systems, *17th IFAC World Congress*, Korea, Seoul, 2008.
- Gustafsson, T., and Heidenback, C.,** 2002: Automatic Control of Unmanned Cranes at the Pasir Panjang Terminal, 2002 IEEE International Conference on Control Applications, Glasgow, Scotland, U.K.
- Haddad, W.M., Chellaboina, V.-S., and Wu, W.,** 2000: Optimal nonlinear-nonquadratic feedback control for nonlinear discrete-time systems with l_2 and l_∞ disturbances, *Nonlinear Analysis*, **41**, 287-312.
- Hilscher, R., and Zeidan, V.,** 2003: Symplectic difference systems: variable stepsize discretization and discrete quadratic functionals, *Linear Algebra and Its Applications*, **367**, 67–104.
- Huang, J.,** 1999: An algorithm to solve the discrete HJI equation arising in the L_2 gain optimization problem, *International Journal of Control*, **72**, 1, 49-57.
- Ibrir, S.,** 2008: Static output feedback and guaranteed cost control of a class of discrete-time nonlinear systems with partial state measurements, *Nonlinear Analysis*, **68**, 1784-1792.
- Isidori A.,** 1991: Feedback control of nonlinear systems, *Proc. 1st European Control Conf.*, Grenoble, France.
- Isidori A.,** 1993: H_∞ -control via measurement feedback for affine nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **4**, 4, 553 - 574.
- Isidori, A.,** 1994: H_∞ -control via measurement feedback for affine nonlinear systems, *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, **4**, 553- 574.
- Isidori, A., and Astolfi, A.,** 1992: Disturbance Attenuation and H_∞ -Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **37**, 9, 1283-1293.
- Isidori, A. and Kang, W.,** 1995: H_∞ -control via measurement feedback for general nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**, 3, 466-472.
- Isidori, A., and Lin, W.,** 1998: Global L_2 -gain state feedback design for a class of nonlinear systems, *Systems & Control Letters*, **34**, 295-302.
- Ito, H., and Jiang, Z.P.,** 2004: Robust disturbance attenuation of nonlinear systems using output feedback and state-dependent scaling, *Automatica*, **40**, 1621 – 1628.
- Itoh, T., and Abe, K.,** 1988: Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational different quotients, *Journal of Computational Physics*, **76**, 85–102.

- James, M.R., and Baras, J.S.,** 1993: Robust output feedback control for discrete-time nonlinear systems, *32nd IEEE Conference on Decision and Control*, **1**, 51-55.
- Kelly, R., Santibanez, V., and Loria, A.,** 2005: *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London, Springer-Verlag.
- Khalil, H. K.,** 1996: *Nonlinear Control Systems 2nd Ed.*, Prentice Hall.
- Kim, Y.-S., Hong, K.-S., and Sul, S.-K.,** 2004: Anti-sway control of container cranes: Inclinometer, observer, and state feedback. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, **2**, 435–449.
- Kratz, W.,** 2003: Discrete Oscillation, *Journal of Difference Equations and Applications*, **9**, 1, 35-147.
- Lai, M.C., and Hauser, J.,** 1993: Nonlinear H_∞ -Control via Measurement Feedback with Guaranteed Performance, *32nd Conference on Decision and Control*, San Antonio, Texas.
- Laila, D.S.,** 2004: On discretization and discrete-time stabilization of Hamiltonian systems, *ICM, IEEE-CAP*.
- Laila, D.S., and Astolfi, A.,** 2005: Discrete-time IDA-PBC design for separable Hamiltonian systems, *16th IFAC World Congress, Prague*.
- Laila, D.S., and Astolfi, A.,** 2006a: Direct Discrete-time Design for Sampled-data Hamiltonian Control Systems, *3rd IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control*, Nogoya, 57-62.
- Laila, D.S., and Astolfi, A.,** 2006b: Discrete-time IDA-PBC design for underactuated Hamiltonian control systems. *American Control Conference, USA, Minnesota*.
- Laila, D.S., Nesic, D., and Astolfi, A.,** 2005: Advanced topics in control systems theory II: Sampled-Data Control of Nonlinear Systems, A. Loria, F. Lamnabhi-Lagarrigue, E. Panteley Ed., lecture notes from FAP 2005.
- Laila, D.S., Nesic, D., and Teel, A.R.,** 2002: Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation, *European Journal Control*, **18**, 109-125.
- Lee, R.C.H., and Smith, M.C.,** 2000: Nonlinear control for robust rejection of periodic disturbances, *Systems and Control Letters*, **39**, 97-107.
- Lewis, A.,** 2004: Notes on energy shaping, *43rd IEEE Conf. Decision Control*, Paradise Island, Bahamas, 14–17.
- Limeberr, D.J.N., Green, M., and Walker, D.,** 1989: Discrete time H_∞ control, *Proc. CDC*, Tampa, FL, 392-396.
- Lin, W.,** 1993: Synthesis of discrete-time nonlinear systems, *D.Sc. dissertation*, Washington University, St. Louis.
- Lin, W.,** 1995a. Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive system approach, *Systems and Control Letters*, **26**, 41-53.
- Lin, W.,** 1995b: Global stabilization of discrete non-affine systems, *Proceedings of the 34th Conference on Decision and Control*, New Orleans, 510-511.

- Lin, W., and Byrnes, C.I.**, 1994: Dissipativity, L_2 -gain and H_∞ control for discrete-time nonlinear systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Baltimore, Maryland, 2257-2260.
- Lin, W., and Byrnes, C.I.**, 1995c: Discrete-time nonlinear H_∞ control with measurement feedback, *Automatica*, **31**, 3, 419-434.
- Lin, W., and Byrnes, C.I.**, 1995d: Passivity and Absolute Stabilization for a Class of Discrete-time Nonlinear Systems, *Automatica*, **31**, 263-267.
- Lin, W., and Byrnes, C.I.**, 1996: H_∞ Control of Discrete Time Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**, 4, 494-510.
- Lin, W., and Xie, L.**, 1998: A link between H_∞ -control of a discrete-time nonlinear system and its linearization, *Int. J. Control*, **69**, 2, 301-314.
- Lu, W.M., and Doyle, J.C.**, 1994a: H_∞ -control of nonlinear system via output feedback: Controllers parametrization, *IEEE Trans. Automat. Control*, **39**, 2517-2521.
- Lu, W.M., and Doyle, J.C.**, 1994b: A state-space approach to robustness analysis and synthesis of nonlinear uncertain systems, *Caltech CDS Tech. Memo.*, CIT-CDS-94-010,
- Lu, W.M., and Doyle, J.C.**, 1997: Robustness analysis and synthesis for nonlinear uncertain systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **42**, 12, 1654-1662.
- Lu, W.M., Zhou, K., and Doyle, J.C.**, 1996: Stabilization of uncertain linear systems: an LFT approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**, 1, 51-65.
- Lu, G., Zheng, Y., and Ho, D.W.C.**, 2000: Nonlinear robust H_∞ -Control via Dynamic Output Feedback, *Systems and Control Letters*, **39**, 193-202.
- Mahindrakar, A.D., Astolfi, A., Ortega, R., and Viola, G.**, 2006: Further constructive results on interconnection and damping assignment control of mechanical systems: The acrobot example, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 671-685.
- Marsden, J.E.**, 1992: *Lectures on Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press.
- McLachlan, I.R., Quispel, G.R.W., and Robidoux, N.**, 1998: Unified Approach to Hamiltonian Systems, Poisson Systems, Gradient Systems, and Systems with Lyapunov Functions or First Integrals, *Physical Review Letters*, **81**, 32, 2399-2403.
- McLachlan, R.I., Quispel, G.R.W., and Robidoux, N.**, 1999: Geometric integration using discrete gradients, *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **357**, 1021-1045.
- Mei, S., Shen, T., Hu, W., Lu, Q., and Sun, L.**, 2005: Robust H_∞ -Control of a Hamiltonian system with uncertainty and its application to a multi-machine power system, *IEE proc. Control Theory and Application*, **152**, 2, 202-210.

- Méndez, J.A., Acosta, L., Moreno, L., Torres, S., and Marichal, G.N.,**1999: An Application of a Neural Self-Tuning Controller to an Overhead Crane, *Neural Computing and Applications*, **8** (2), 143-150.
- Meyer, K.R., and Glen, R.H.,** 1992: *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag.
- Morillo, Ríos-Bolívar, M., and Acosta, V.,** 2008: Feedback Stabilization of the Tora System via Interconnection and Damping Assignment Control, *17th World Congress*, 3781-3786, Seoul, Korea.
- Moustafa, K.A.F.,** 2001: Reference trajectory tracking of overhead cranes, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control*, **123**, 139–141.
- Navarro-López, E.M.,** 2002a: Dissipativity and Passivity-Related Properties in Nonlinear Discrete-Time Systems, *Ph.D. Thesis*, Institute of Industrial and Control Engineering.
- Navarro-Lopez, E.M.,** 2005: A Speed-Gradient-Based Method to Passify Nonlinear Discrete-Time Systems, *16th IFAC World Congress, Prague*.
- Navarro-López, E.M., Sira-Ramírez, H., and Fossas-Colet, E.,** 2002b: Dissipativity and feedback dissipativity properties of general nonlinear discrete-time systems, *European Journal of Control*, **8**, 3, 265–274.
- Nesic, D., and Angeli, D.,** 2002: Integral versions of ISS for sampled-data nonlinear systems via their approximate discrete-time models, *IEEE Trans. Automatic Control*, **47**, 2033-2038.
- Nesic, D., and Laila, D.S.,** 2002: A note on input-to-state stabilization for nonlinear sampled-data systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **47**, 1153-1158.
- Nesic, D., and Teel, A.R.,** 2004: A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **49**, 7, 1103-1122.
- Nesic, D., Teel, A.R., and Kokotovic, P.V.,** 1999: Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations, *System and Control Letters*, **38**, 4-5, 259-270.
- Noakes, M.W., and Jansen, J.F.,** 1992: Generalized input for damped-vibration control of suspended payloads, *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, **10**, 2, 199-205.
- Ortega, R., and Garcia-Canseco, E.,** 2004: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control: A survey, *European Journal of Control*, **10**, 5, 432-450.
- Ortega, R., and Spong, M.W.,** 2000: Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment, *IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control* Princeton, NJ, 74-79.
- Ortega, R., Loría Perez, J.A., Nicklasson, P.J., and Sira-Ramírez, H.J.** 1998: *Passivity-Based Control of Euler-Lagrange Systems: Mechanical, Electrical and Electromechanical Applications*, Springer-Verlag.

- Ortega, R., Spong, M.W., Gómez-Estern, F., and Blankenstein, G.,** 2002b: Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems Via Interconnection and Damping Assignment, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **47**, 8, 1218-1233.
- Ortega, R., Van der Schaft, A.J., Maschke, B., and Escobar, G.,** 2002a: Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems, *Automatica*, **38**, 4, 585-596.
- Park, J., and Chang, P.H.,** 1998: Learning Input Shaping Technique for Non-LTI Systems, Proceedings of the 1998 American Control Conference, 2652-2656.
- Park, B.J., Hong, K.S., and Huh, C.D.,** 2000: Time-Efficient Input Shaping Control of Container Crane Systems, *IEEE International Conference on Control Applications*, MA4-6, 80-85.
- Pavel, L., and Fairman, F.W.,** 1997: Nonlinear H_∞ -control: a J-dissipative approach, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **42**, 12, 1636-1653.
- Poolla, K., and Tikku, A.,** 1995: Robust performance against time-varying structured performances, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**, 9, 1589-1601.
- Saengdeejing, A., and Qu, Z.,** 2005: Simplified robust control for nonlinear uncertain systems: a method of projection and online estimation, *Automatica*, **41**, 1079-1084.
- Sakawa, Y., and Shindo, Y.,** 1982: Optimal Control of Container Cranes, *Automatica*, **18**, 3, 257-266.
- Sandoval, J., Ortega, R., and Kelly, R.,** 2008: Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control of the Pendubot, *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 7700-7704.
- Sengör, N.S.,** 1995: Energy related concepts in nonlinear systems, *Ph.D. Thesis*. Istanbul Technical University, Institute of Science and Technology.
- Shen, T., and Tamura, K.,** 1995: Robust H_∞ Control Of Uncertain Nonlinear System via State feedback, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**, 4, 766-768.
- Shen, T., Ortega, R., Lu, Q., Mei, S., and Tamura, K.,** 2000: Adaptive L_2 Disturbance Attenuation of Hamiltonian Systems with Parametric Perturbation and Application to Power Systems, *39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia.
- Shi, Y.,** 2006. Weyl–Titchmarsh theory for a class of discrete linear Hamiltonian systems, *Linear Algebra and Its Applications*, **416**, 2-3, 452–519.
- Shibberu, Y.,** 1997: A Discrete-Time Formulation of Hamiltonian Dynamics, *Physica D*, 28.
- Singer, N.C., and Seering, W.P.,** 1990: Preshaping Command Inputs to Reduce System Vibration, *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **112**, 76-82.

- Singer, N., Singhose, W., and Kriikku, E.,** 1997: An input shaping controller enabling cranes to move without sway, *Proceedings of the ANS seventh topical meeting on robotics and remote systems*, Augusta, GA.
- Sorensen, K.L., Singhose, W., and Dickerson, S.,** 2007a: A controller enabling precise positioning and sway reduction in cranes with on-off actuation, *In Proceedings of the 16th international federation of automatic control world congress*, Prague.
- Sorensen, K.L., Singhose, W., and Dickerson, S.,** 2007b: A controller enabling precise positioning and reduction in bridge and gantry cranes, *Control Engineering Practice*, **15**, 825-837.
- Spong, M.W.,** 1997: *Underactuated Mechanical Systems, Control Problems in Robotics and Automation*, B. Siciliano and K.P. Valavanis (Eds), *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 230 Springer-Verlag, London, UK.
- Stuart, A.M., and Humphries, A.R.,** 1996: *Dynamical Systems and Numerical Analysis*. New York: Cambridge Univ. Press.
- Talasila, V., Clemente-Gallardo, J., and Van der Schaft, A.J.,** 2006: Discrete port-Hamiltonian systems, *Systems and Control Letters*, **55**, 6, 478–486.
- Thomas, G. B., and Finney, R.L.,** 1998: *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley.
- Van der Schaft, A.J.,** 1991: A state-space approach to nonlinear H_∞ control, *System and Control Letters*, **16**, 1-8.
- Van der Schaft, A.J.,** 1992a: L_2 -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback H_∞ control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **37**, 770-784.
- Van der Schaft, A.J.,** 1992b: Complements to nonlinear H_∞ -optimal control by state feedback, *IMAJ. Math. Contr. Inf.*, **9**, 245-254.
- Van der Schaft, A.J.,** 2000: *L_2 -Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*, Springer, London.
- Viola, G., Ortega, R., Banavar, R., Acosta, J.A., and Astolfi, A.,** 2007: Total Energy Shaping Control of Mechanical Systems: Simplifying The Matching Equations via Coordinate Changes, *IEEE Transactions On Automatic Control*, **52**, 6, 1093-1099.
- Wu, J.L., and Lee, T.T.,** 2004: Robust H_∞ output feedback control for general nonlinear systems with structured uncertainty, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, **27**, 7, 1069-1075.
- Wu, J.L., Wang, W.Y., and Lee, T.T.,** 2006: Robust H_∞ output feedback control for discrete-time non-affine nonlinear systems with structured uncertainties, *International Mathematical Forum*, **1**, 27, 1297-1312.
- Wu, J.L., and Lee, T.T.,** 2004: Robust H_∞ output feedback control for general nonlinear systems with structured uncertainty, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, **27**, 7, 1069-1075

- Willems, J.C.**, 1972: Dissipative dynamical systems, part I: General theory; part II: Linear systems with quadratic supply rates, *Archive for Rationale mechanics Analysis*, **45**, 321–393.
- Xi, Z., and Cheng, D.**, 2000: Passivity-Based Stabilization and H_∞ Control of the Hamiltonian Control Systems with Dissipation and Its Applications to Power Systems, *International Journal of Control*, **73**, 18,1686-1691.
- Yalçın, Y. ve Gören-Sümer, L.**, 2007: Hamiltonian Sistemlerin Ayrık zamanlı Modellenmesi için Bir Yöntem, *TOK 07 Konferans Kitabı*.
- Yalçın Y., and Gören-Sümer, L.**, 2008: Disturbance Attenuation in Hamiltonian Systems via Direct Discrete Time Design, *IFAC World Congress*, Korea, Seoul.
- Yalçın, Y., and Gören-Sümer, L.**, 2009a: Direct Discrete-Time Control of Port Controlled Hamiltonian Systems, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences (kabul edildi)*.
- Yalçın, Y., and Gören-Sümer, L.**, 2009b: Robust Disturbance Attenuation in Hamiltonian Systems via Direct Digital Control, *European Control Conference*, Budapest.
- Yung, C.F., Lin, Y.P., and Yeh, F.B.**, 1996: A family of nonlinear output feedback controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **41**, 232-236.
- Yung, C.F., Wu, J.L., and Lee, T.T.**, 1997: Parameterization of nonlinear state feedback controllers, *Automatica*, **33**, 8,1587-1590.
- Yung, C.F., Wu, J.L., and Lee, T.T.**, 1998: H_∞ control for more general nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **43**, 12, 1724-1727.

ÖZGEÇMİŞ



- Ad Soyad:** Yaprak YALÇIN
- Doğum Yeri ve Tarihi:** Divriği, 27/11/1979
- Adres:** İ.T.Ü. Kontrol Mühendisliği Bölümü, 34469, Maslak, İstanbul
- Lisans Üniversitesi:** İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği, 2002.
- Yüksek Lisans Üniversitesi:** İstanbul Teknik Üniversitesi, Kontrol ve Bilgisayar Mühendisliği, 2003-2004 güz yarıyılı (1,5 yıl).

Yayın Listesi:

- Bayır, K., **Yalçın, Y.**, Kaya Z., and Yeşil E., 2001: Implementation of Fuzzy Controllers with PLC, *MMYS'2001 Symposium of Modern Methods in Engineering*,
- **Yalçın, Y.**, and Kurtulan S., 2003: Implementation of a PID Neural Network with PLC, *IFAC Workshop DECOM-TT 2003*, Turkey.
- **Yalçın, Y.**, and Gören-Sümer, L., 2007: Hamiltonian Sistemlerin Ayırık zamanlı Modellenmesi için Bir Yöntem, *TOK 07 Konferans Kitabı*.
- **Yalçın Y.**, and Gören-Sümer, L., 2008: Disturbance Attenuation in Hamiltonian Systems via Direct Discrete Time Design, *IFAC World Congress*, Korea, Seoul.
- **Yalçın Y.**, and Gören-Sümer, L., 2008: Doğrudan-Ayrık Tasarım ile Hamiltonian Sistemlerde Bozucu Bastırma, *TOK 08 Konferans Kitabı*.
- Gören-Sümer L., and **Yalçın, Y.**, 2008: Gradient Based Discrete-Time Modeling and Control of Hamiltonian Systems, *17th IFAC World Congress*, Korea, Seoul, 2008.
- Gören-Sümer L., and **Yalçın, Y.**, 2008: Kapı Kontrollü Hamiltonian Sistemlerin Doğrudan Ayrık Zamanlı Kontrolü, *TOK 07 Konferans Kitabı*.
- **Yalçın, Y.**, and Gören-Sümer, L., 2009: Robust Disturbance Attenuation in Hamiltonian Systems via Direct Digital Control, *European Control Conference*, Budapest.
- **Yalçın, Y.**, and Kurtulan S., 2009: A Roof-top Antenna Tracking System Design, Simulation and Implementation, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 51, no. 2.

- **Yalçın, Y.**, and Gören-Sümer, L., 2010: Direct Discrete-Time Control of Port Controlled Hamiltonian Systems, *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences* (accepted).