

MULTİSİMPLİSEL CEBİRLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Engin SARIKAYA

Kütahya - 2011

MULTİSİMPLESEL CEBİRLER

Engin SARIKAYA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2011

MULTİSİMPLESEL CEBİRLER

Engin SARIKAYA

Dumlupınar Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca  
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Doç. Dr. Erdal ULUALAN

Ocak 2011

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simgeler</u>       | <u>Açıklama</u>    |
|-----------------------|--------------------|
| $\partial$            | Çaprazlanmış Modül |
| $\cap$                | Kesişim            |
| $\Delta[n]$           | Oppozit Kategorisi |
| $F$                   | Funktor            |
| $E$                   | Simplisel Cebir    |
| $X$                   | Çaprazlanmış Kare  |
| $E_{\bullet,\bullet}$ | Bisimplisel Cebir  |

| <u>Kısaltmalar</u>  | <u>Açıklama</u>                               |
|---------------------|-----------------------------------------------|
| $CMod$              | Çaprazlanmış modüllerin oluşturduğu kategori. |
| $\mathfrak{SimCeb}$ | Simplisel Cebir.                              |
| $X_2Mod$            | Obje ve Morfizmlerin oluşturduğu kategori.    |
| $Crs^2$             | Tüm çaprazlanmış karelerin kategorisi.        |

## İÇİNDEKİLER

|                                                             | <u>Sayfa</u> |
|-------------------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET.....                                                   | v            |
| SUMMARY.....                                                | vi           |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....                        | vii          |
| <br>                                                        |              |
| 1. Temel Kavramlar .....                                    | 1            |
| 1.1. Giriş .....                                            | 1            |
| 1.2. Çaprazlanmış Modüller Ve Simplisel Cebirler .....      | 1            |
| 1.2.3 Simplisel Cebirler .....                              | 2            |
| 1.3 Bisimplisel Cebirler.....                               | 4            |
| 1.3.1 Bir simplisel Cebirin Moore Kompleksi.....            | 5            |
| 1.3.3 Bir Bisimplisel Cebirin Moore Kompleksi.....          | 6            |
| 2. Bisimplisel Cebirler ve Çaprazlanmış Modüller.....       | 8            |
| 2.1 Bisimplisel Cebirlerden Çaprazlanmış Modüllere .....    | 8            |
| 3. Çaprazlanmış Modüllerden Bisimplisel Cebirlere.....      | 15           |
| 4. Bisimplisel Cebirler ve Çaprazlanmış Kareler .....       | 17           |
| 4.2. Bisimplisel Cebirlerden Çaprazlanmış Karelere.....     | 18           |
| 4.3. Çaprazlanmış Karelerden Bisimplisel Cebirlere.....     | 24           |
| 5. Bisimplisel Cebirler ve 2-Çaprazlanmış Modüller.....     | 35           |
| 5.2. Bisimplisel Cebirlerden 2-Çaprazlanmış Modüllere ..... | 36           |
| 5.3 2-Çaprazlanmış Modüllerden Bisimplisel Cebirlere.....   | 39           |
| KAYNAKLAR DİZİNİ .....                                      | 44           |

## Bölüm 1

### Temel Kavramlar

#### 1.1 Giriş

Bu bölümde tezde kullanılacak olan, simplisel cebir, Moore kompleksi, çaprazlanmış modül, bisimplisel cebir ve bir bisimplisel cebirin Moore bikompleksi kavramları tanıtılacaktır.

#### 1.2. Çaprazlanmış Modüller ve Simplisel Cebirler

**Tanım 1.2.1.**  $\mathbf{k}$  birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere  $\mathcal{R}$  ve  $\mathcal{S}$  de  $\mathbf{k}$ -cebirlere olsun.  $\mathcal{S}$  nin  $\mathcal{R}$  üzerindeki cebir etkisi,

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (r, s) &\longrightarrow r \bullet s\end{aligned}$$

ile gösterilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur.

1.  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  ve  $s \in \mathcal{S}$  için,  
 $(r_1 + r_2) \bullet s = r_1 \bullet s + r_2 \bullet s$
2.  $r \in \mathcal{R}$  ve  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  için  
 $r \bullet (s_1 + s_2) = r \bullet s_1 + r \bullet s_2$
3.  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  ve  $s \in \mathcal{S}$  için,  
 $(r_1 r_2) \bullet s = r_1 \bullet (r_2 \bullet s)$
4.  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  ve  $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$  için,  
 $r \bullet (s_1 s_2) = (r \bullet s_1) \bullet s_2$
5.  $k \in \mathbf{k}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathcal{S}$  için  
 $k(r \bullet s) = (kr) \bullet s = r \bullet (sk)$

dir.

Bu etkiyle birlikte  $\mathcal{R}$  bir **S- cebir** olur.

**Tanım 1.2.2.**  $\mathcal{R}$  ve  $\mathcal{S}$  birer  $k$ -cebir ve  $\mathcal{S}$  nin  $\mathcal{R}$  üzerine cebir etkisi var olsun.

$\partial: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$  bir cebir homomorfizması olsun.

Eğer her  $r \in \mathcal{R}$  ve  $s \in \mathcal{S}$  için,

**CM1)**  $\partial(r \bullet s) = \partial(r)s$  oluyorsa  $\partial$  ya **Ön-Çaprazlanmış Modül** adı verilir.

Eğer ek olarak her  $r, r' \in \mathcal{R}$  için

**CM2)**  $r \bullet \partial(r') = rr'$  oluyorsa  $\mathfrak{d}$  ya **Çaprazlanmış Modül** denir.

Şimdi objeleri  $\partial_1: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$  ve  $\partial_2: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$  gibi çaprazlanmış modüller olan çaprazlanmış modüller kategorisini oluşturalım.

Bu kategorinin  $(\partial_1: \mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1)$  den  $(\partial_2: \mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2)$  ye giden morfizmleri,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\partial_1} & \mathcal{S}_1 \\
 \alpha_2 \downarrow \cdots & & \downarrow \cdots \alpha_1 \\
 \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\partial_2} & \mathcal{S}_2
 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan (yani  $\alpha_1 \partial_1 = \partial_2 \alpha_2$ ),  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  şeklindeki cebir homomorfizmleridir.

Ayrıca şu özellik sağlanır.

$r_1 \in \mathcal{R}_1, r_2 \in \mathcal{R}_2, s_1 \in \mathcal{S}_1$  için

$$\alpha_2(r_1 \bullet s_1) = \alpha_2(r_1) \bullet \alpha_1(s_1)$$

olmalıdır.

Çaprazlanmış modüllerin oluşturduğu bu kategoriyi **CMod** ile göstereceğiz. Aslında çaprazlanmış modüller ilk olarak J.H.C Whitehead [2] tarafından homotopi tipi 2-tip olan bağlantılı topolojik uzaylara karşılık gelen bir cebirsel yapı olarak tanımlanmıştır. Bu tanım bir  $X$  basit bağlantılı topolojik uzayının  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  1.homotopi ve 2.homotopi gruplarına karşılık gelmektedir.

Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül ise T.Porter [3] tarafından tanımlanmıştır.

### 1.2.3. Simplisel Cebirler

$n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $[n] = \{0 < 1 < 2 \dots < n\}$  sıralı kümesini göz önüne alalım. Objeleri  $[n]$  sıralı kümeleri, morfizmleri ise  $n, m \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $f: [n] \rightarrow [m]$  sıra koruyan yani  $i \leq j$  olduğunda  $f(i) \leq f(j)$  olan adi fonksiyonlar olan  $\Delta[n]$  kategorisini göz önüne alalım.

Bilindiği gibi objeler aynı kalmak şartıyla morfizmlerin yönünü değiştirerek oluşturduğumuz yeni kategoriye, başlangıçta alınan kategorinin **Oppozit Kategorisi** denir.

**Tanım 1.2.4.**  $\mathcal{C}$  ve  $\mathcal{D}$  herhangi iki kategori olmak üzere  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

1.  $\forall A, B \in Ob(\mathcal{C})$  için  $F(A), F(B) \in Ob(\mathcal{D})$
2.  $\forall f: A \rightarrow B \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$  için  $F(f): F(A) \rightarrow F(B) \in Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$
3.  $f, g \in Mor_{\mathcal{C}}$  için  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  ve  $F(\dot{I}d_x) = \dot{I}d_{F(x)}$

özellikleri sağlanır. Bu veriler sağlanırsa **F** ye  $\mathcal{C}$  den  $\mathcal{D}$  ye bir **Funktor** denir.

$\mathcal{C}$  herhangi bir kategori olsun.  $\Delta^{op}[n]$  kategorisinin  $\mathcal{C}$  kategorisine bir  $F: \Delta^{op}[n] \rightarrow \mathcal{C}$  funktorunun var olduğunu kabul edelim. Bu funktoru aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Her bir  $[n] \in Ob(\Delta^{op}[n])$  için  $F([n]) = F_n \in Ob(\mathcal{C})$  olmak üzere  $\mathcal{C}$  kategorisindeki simplisel obje  $(F_i, d_i, s_j)$  şeklinde bir üçlüdür ve  $d_i$  ve  $s_j$  ler bilinen simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

**Tanım 1.2.5.** **Ceb**, değişmeli k-cebirler kategorisi olsun.  $\Delta^{op}[n]$  den **Ceb**'e tanımlı bir **E** funktörüne **Simplisel Cebir** denir. Bu **E** simplisel cebirini,

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{d_o^2} & & \xrightarrow{d_o^1} & \\
 & \xrightarrow{d_1^2} & & \xrightarrow{d_1^1} & \\
 \mathbf{E}: \dots E_2 & \xrightarrow{d_2^2} & E_1 & \xrightarrow{d_1^1} & E_0 \\
 & \xleftarrow{s_o^1} & & \xleftarrow{s_o^0} & \\
 & \xleftarrow{s_1^1} & & & 
 \end{array}$$

diyagramı ile gösterebiliriz. Burada  $d_i$  ve  $s_j$  ler birer cebir homomorfizmi  $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$  lerde birer k- cebirdir. Ayrıca  $d_i$  ve  $s_j$  ler bilinen simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

Bu özdeşlikler,

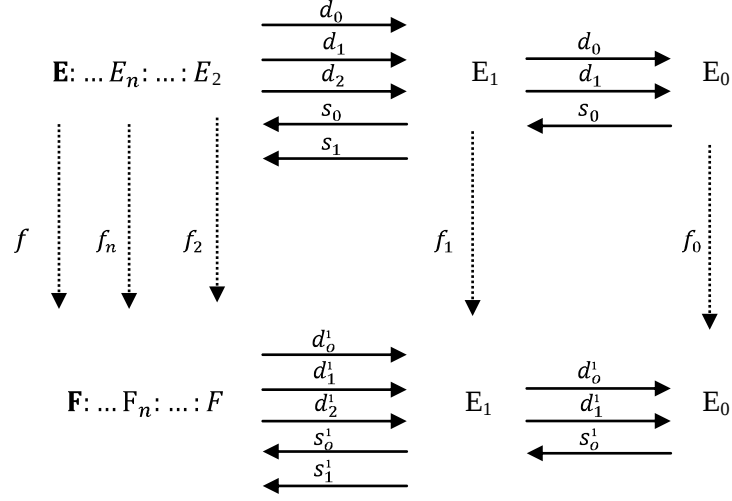
- 1)  $d_i^{n+1} \circ d_j^n = d_{j+1}^{n+1} \circ d_i^n$  ,  $i \leq j \leq n$  ise
- 2)  $s_j^n \circ s_i^{n+1} = s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}$  ,  $i \leq j \leq n$  ise
- 3)  $d_i^{n+1} \circ s_j^n = id_{[n]}$  ,  $i = j$  veya  $i = j + 1$  ise
- 4)  $d_i^n \circ s_j^n = d_{j-1}^{n-1} \circ s_i^n$  ,  $i < j < n$  ise
- 5)  $d_i^n \circ s_j^n = s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n$  ,  $j + 1 < i \leq n$  ise

şeklindedir.

Şimdi objeleri **E** ve **F** gibi simplisel cebirler olan kategoriye oluşturalım. Bu kategorinin

$$f = (f_0, f_1, \dots) : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$$

şeklinde morfizmleri ise,



diyagramını değişmeli yapacak şekildeki

$$f_i : E_i \rightarrow F_i$$

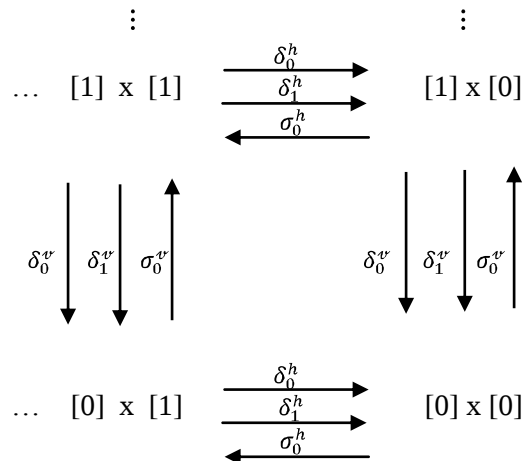
cebiri homomorfizmleri ile tanımlıdır. Oluřturulan bu kategoriye **SimCeb** ile göstereceğiz.

### 1.3. Bisimplisel Cebirler

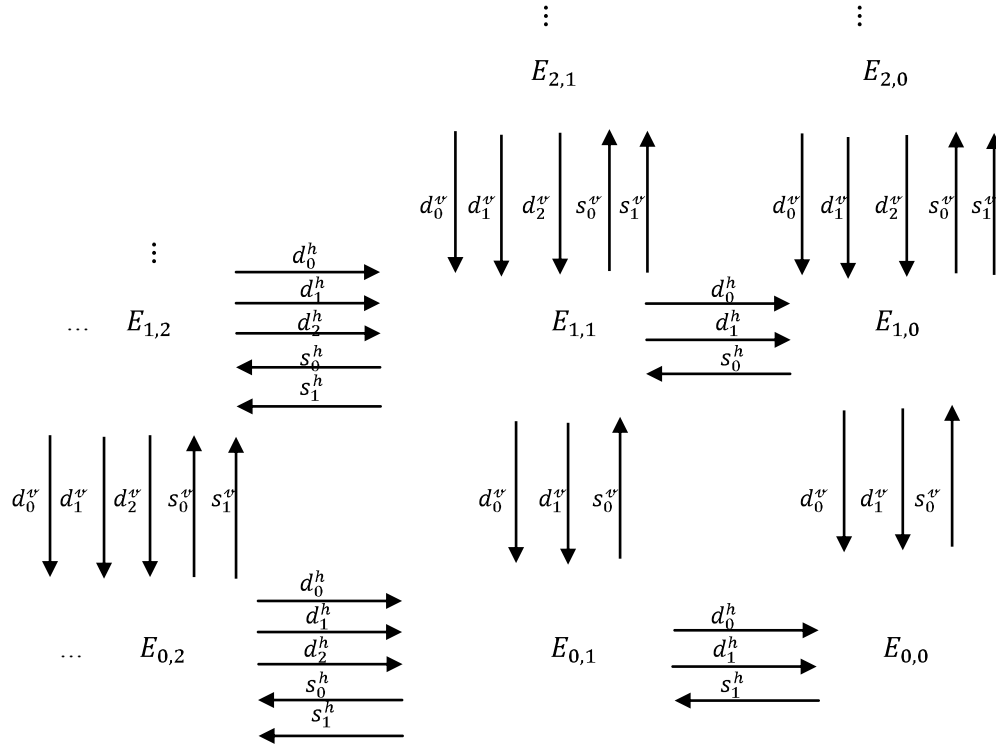
Bir bisimplisel cebir  $E_{\bullet, \bullet} : \Delta^{op}[n] \times \Delta^{op}[n] \rightarrow \mathbf{Ceb}$  ile gösterilen bir funktordur. Burada  $([n], [m]) \in \Delta^{op}[n] \times \Delta^{op}[n]$  objesinin bu funktor altındaki görüntüsünü,

$$E_{\bullet, \bullet}([n], [m]) = E_{n, m}$$

ile gösterelim. Burada  $\Delta^{op}[n] \times \Delta^{op}[n]$  yi aşağıdaki diyagramla ifade edebiliriz.



O halde bu yapıya karşılık gelen bisimplisel cebir,



şeklinde olur.

Burada her bir **n**. kolon ve her bir **m**. satır birer simplisel cebirdir. Örneğin,

$$E_{n,1}: \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} E_{n,1} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} E_{n,1}$$

bir simplisel cebirdir.

### 1.3.1. Bir simplisel Cebirin Moore Kompleksi

**Tanım 1.3.2**  $E = ((E_i)_{i \in \mathbb{N}}, d_i, s_j)$  bir simplisel cebir olsun.

$$NE_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \text{Çek} d_i^n$$

ve her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\partial_n : NE_n \rightarrow NE_{n-1}$  olmak üzere,  $d_n^n : E_n \rightarrow E_{n-1}$  ile homomorfizmin kısıtlanması olarak tanımlansın.

Bu durumda,

$$(\mathbf{NE}, \partial): \dots \xrightarrow{\partial_3} NE_2 \xrightarrow{\partial_2} NE_1 \xrightarrow{\partial_1} NE_0$$

şeklinde k-cebirlerin bir kompleksi elde edilir. Yani  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  dır.

Burada  $NE_0 = E_0$  ,  $NE_1 = \text{Çek}d_0^1$  ,  $\partial_1 = d_1^1 : NE_1 \rightarrow NE_0$  ,  $NE_1 = \text{Çek}d_0^2 \cap \text{Çek}d_1^2 \dots\dots$  şeklindedir.

Eğer  $k \geq n + 1$  için  $NE_k = 0$  oluyorsa bu simplisel cebire Moore kompleksin boyu  $\leq n$  olan **Simplisel Cebir** denir.

### 1.3.3. Bir Bisimplisel Cebirin Moore Bikompleksi

$E_{\bullet,\bullet}$  bisimplisel cebir olsun. Bu bisimplisel cebirin Moore bikompleksi,

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 NE_{2,2} & \xrightarrow{\partial_2^h} & NE_{2,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{2,0} \\
 \downarrow \partial_2^v & & \downarrow \partial_2^v & & \downarrow \partial_2^v \\
 NE_{1,2} & \xrightarrow{\partial_2^h} & NE_{1,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{1,0} \\
 \downarrow \partial_1^v & & \downarrow \partial_1^v & & \downarrow \partial_1^v \\
 NE_{0,2} & \xrightarrow{\partial_2^h} & NE_{0,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{0,0}
 \end{array}$$

şeklindedir. Burada,

$$NE_{n,m} = \bigcap_{(i,j)=(0,0)}^{(n-1,m-1)} (\text{Çek}d_i^h \cap \text{Çek}d_j^v)$$

şeklinde tanımlı olup,

$$\partial_{i,j}^h : NE_{i,j} \rightarrow NE_{i,j-1}$$

$d_j^h$  operatörü ile ve

$$\partial_{i,j}^v : NE_{i,j} \rightarrow NE_{i-1,j}$$

$d_i^v$  operatörü ile tanımlanan dönüşümlerdir. Buna göre düşük boyutlarda,

$$\begin{aligned} NE_{0,0} &= E_{0,0} \quad , \quad NE_{1,0} = \mathbb{C}ekd_0^v \quad , \quad NE_{1,0} = \mathbb{C}ekd_0^h \quad , \quad NE_{1,1} = \mathbb{C}ekd_0^h \cap \mathbb{C}ekd_0^v \\ NE_{2,0} &= \mathbb{C}ekd_0^v \cap \mathbb{C}ekd_1^v \quad , \quad NE_{0,2} = \mathbb{C}ekd_0^h \cap \mathbb{C}ekd_1^h \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

## Bölüm 2

### 2. BİSİMLİSEL CEBİRLER VE ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modüller kategorisi ile Moore kompleksin boyutu  $\leq 1$  olan simplisel cebirler kategorisinin denk olduğu bilinmektedir. Bu denklik için [4] 'e bakınız.

Bu bölümde bir  $E_{\bullet,\bullet}$  bisimplisel cebiri ile çaprazlanmış modül arasındaki ilişkiyi vereceğiz.

E bir simplisel cebir olduğunda eğer  $n \geq 2$  için  $NE_n = \{0\}$  ise  $\partial_1: NE_1 \rightarrow NE_0$  homomorfizmi  $NE_0$  in  $NE_1$  üzerine  $x \in NE_0$  ve  $y \in NE_1$  olmak üzere  $x \bullet y = s_0(x)y$  etkisiyle birlikte bir çaprazlanmış modüldür.

#### 2.1. Bisimplisel Cebirlerden Çaprazlanmış Modüllere

Bisimplisel cebirler kategorisinden simplisel cebirler kategorisine tanımlı iki fonktor vardır. Bunlardan biri köşegen fonktoru, diğeri ise Artin-Mazur[5] tarafından tanımlanan bileşik köşegen fonktordur. Aslında bir  $E_{\bullet,\bullet}$  bisimplisel cebirinin Moore bikompleksinde çok az sıfırdan farklı terim vardır.  $p$  veya  $q$  dan biri 1 den büyük olduğunda,  $E_{\bullet,\bullet}$  bisimplisel cebirine karşılık gelen  $NE_{p,q}$  bikompleksi sıfır olacaktır. Eğer köşegen fonktoru kullanılırsa elde edilen simplisel cebirin terimleri oldukça uzun ve yüz ve dejenere operatörlerinin tanımlanması ise çok karmaşık olur. Biz burada, ilk olarak Arvasi tarafından kullanılan, bisimplisel cebirlerden simplisel cebirlere, Artin-Mazur bileşik köşegen fonktörünü kullanarak simplisel cebir elde edeceğiz.

$E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir olsun. Her bir  $n$  için,

$$E_{(n)} = \bigoplus_{p+q=n} E_{p,q}$$

şeklinde cebirlerin direkt toplamı olan bir cebir tanımlayalım. Şimdi  $E_{(n)}$  içinde bir  $\mathcal{V}(E_{(n)})$  idealini tanımlayalım.

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in E_{(n)}$$

ve

$$x_p \in E_{p,n-p}$$

olsun.

Bu durumda  $\underline{x} \in \mathcal{V}(E_{(n)})$  olması için gerek ve yeter şart her bir  $p = 0, 1, \dots, n-1$  için

$$d_0^v x_p = d_{p+1}^h x_{p+1}$$

olmasıdır.

Bu  $\nabla(E_{(n)})$  idealleri ,  $\nabla(\mathbf{E})$  şeklinde bir simplisel cebir oluşturur. Bu simplisel cebirin yüz operatörleri

$$d_j = d_j^\nabla : \nabla(E)_n \longrightarrow \nabla(E)_{n-1} ,$$

$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  ve  $d_0^v x_p = d_{p+1}^h x_{p+1}$  olmak üzere  $0 < j < n$  için,

$$d_j^\nabla(\underline{x}) := (d_j^v x_0, d_{j-1}^v x_1, \dots, d_1^v x_j, d_1^h x_{j+1}, \dots, d_j^h x_n)$$

$$d_0^\nabla(\underline{x}) := (d_0^h x_1, d_0^h x_2, \dots, d_0^h x_n) ,$$

ve

$$d_n^\nabla(\underline{x}) := (d_n^v x_0, d_{n-1}^v x_1, \dots, d_1^v x_{n-1})$$

şeklinde olup, dejenere ise,  $0 \leq i \leq n$  için

$$s_i^\nabla(\underline{x}) := (s_i^v x_0, s_{i-1}^v x_1, \dots, s_0^v x_i, s_i^h x_i, \dots, s_i^h x_n)$$

şeklindedir.

**Önerme 2.1.1.** [6]  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir olsun. Herhangi bir  $p$  için  $q \geq 2$  iken  $N(E_{p,\bullet})_q = 0$  ve yine herhangi bir  $q$  için  $p \geq 2$  iken  $N(E_{\bullet,q})_p = 0$  ise  $n \geq 3$  için  $N(\nabla(E))_n = 0$  olur.

**İspat:**  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebirinin Moore bikompleksinin boyutunun  $\leq 2$  olduğunu gösterelim.  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir ve herhangi bir  $p$  için  $E_{p,\bullet}$  in Moore kompleksinin boyutu  $\leq 1$  ve herhangi bir  $q$  için  $E_{\bullet,q}$  nun Moore kompleksinin boyutu  $\leq 1$  olsun. Bu halde,  $N(\nabla(E))_n$  nin boyutunun  $\leq 2$  olduğunu göstereceğiz.

$n \geq 3$  için  $\underline{x} \in N(\nabla(E))_n$  elemanını inceleyelim.  $d_0(\underline{x}) = 0$  olduğundan  $p > 0$  için

$$x_p = \zeta e k d_0^h$$

elde ederiz.

Her bir  $0 < j < n$  için  $d_j^\nabla(\underline{x}) = 0$  olur. Dolayısıyla ,

$$d_j^v x_0 = d_{j-1}^v x_1 = \dots = d_1^v x_{j-1} = 0$$

ve buradan

$$d_1^h x_{j+1} = \cdots = d_j^h x_n = 0$$

elde edilir. Diğer yandan  $j = 0, 1, \dots, n-1$  için  $d_j^h x_n = 0$  olduğundan  $x_n \in N(E_{*,0})_n$  olur. Eğer  $n \geq 2$  ise bu cebir sıfır cebiri olup  $x_n = 0$  bulunur.

Aynı zamanda,

$$d_n^h x_n = d_0^v x_{n-1}$$

olduğundan  $d_0^v x_{n-1} = 0$  bulunur.

Diğer yandan,  $x_{n-1} \in E_{n-1,0}$  olduğundan  $d_0^h x_{n-1} = 0$  olur.  $d_j^v$  tanımından  $j = 0, 1, \dots, n-2$  için  $d_j^h(x_{n-1}) = 0$  bulunur.

Yani,

$$x_{n-1} \in N(E_{*,1})_{n-1}$$

olur.  $n \geq 3$  için  $n-1 \geq 2$  olacağından  $N(E_{*,1})_{n-1} = 0$  yani  $x_{n-1} = 0$  ve dolayısıyla  $d_0^v x_{n-1} = 0$  bulunur.

Bu şekilde devam edilerek  $k \geq 2$  için  $x_k = 0$  olduğu görülür.

Ayrıca  $j \leq k-1$  için ve  $k \geq 2$  için,

$$d_j^h x_k = 0$$

Yani  $x_k \in N(E_{*,n-k})_k$  olduğunu biliyoruz. O halde  $x_0$  ve  $x_1$  elemanları için

$$d_0^v x_1 = d_2^h x_2 = 0$$

ve buradan  $d_j^v x_1 = 0$  bulunur.

Benzer şekilde  $d_{j+1}^v(\underline{x}) = 0$  tanımından tekrar  $x_1 \in N(E_{1,*})_{n-1}$  olur ki  $n-1 \geq 2$  için sıfırdır. Yani  $x_1 = 0$  ve dolayısıyla  $d_0^v x_0 = 0$  olur. Sonuç olarak bütün  $0 < j < n$  için  $d_0^v(\underline{x}) = 0$  olduğundan  $d_j^v x_0 = 0$  olur ve  $x_0 \in N(E_{0,*})_n = 0$  bulunur. Eğer  $E_{*,*}$  önermedeki şartları sağlayan bir bisimplisel cebir ise  $\underline{x} = (x_0, x_1, x_2) \in N(\nabla(E))_2$  için  $x_2 \in N(E_{*,0}) = 0$  olduğun-

dan  $x_2 = 0$  olur. Yani  $E_{\bullet, \bullet}$  bisimplisel cebirinin Moore bikompleksi için  $N(\nabla(E))_2 = 0$  bulunur ki, bu da Moore bikompleksin boyutunun 2 olması demektir.

Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz.

**Teorem 2.1.2.**  $E_{\bullet, \bullet}$  bir bisimplisel cebir olsun. Eğer  $p = q$  ve  $p, q \geq 1$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $p \neq q$  ve  $p, q \geq 2$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  ise bu durumda birbirine izomorf iki farklı

$$\partial_1^v: NE_{1,0} \rightarrow NE_{0,0}$$

ve

$$\partial_1^h: NE_{0,1} \rightarrow NE_{0,0}$$

şeklinde çaprazlanmış modül elde edilir ve ayrıca bir önceki önermeye göre

$$N(\nabla(E_{(1)})) \xrightarrow{d_1^v} N(\nabla(E_{(0)}))$$

da bir çaprazlanmış modüldür.

**İspat:** Önce  $\partial_1^v: NE_{1,0} = \text{Çek}d_0^v \rightarrow NE_{0,0}$  bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.  $x \in NE_{0,0}$  in bir  $a \in \text{Çek}d_0^v$  üzerine olan cebir etkisini  $x \cdot a = s_0^v(x)a$  ile tanımlayalım. Bu etki cebir etkisidir. Bu durumda

$$\partial_1^v(x \cdot a) = d_1^v(s_0^v(x)a) = x d_1^v(a) = x \partial_1^v(a)$$

olup  $\partial_1^v$  ön-çaprazlanmış modül aksiyomunu sağlar.  $a, a' \in \text{Çek}d_0^v$  alalım.

Bu durumda,

$$\partial_1^v(a) \cdot a' = s_0^v d_1^v(a) a'$$

şeklinde olur. Şimdi  $a \cdot a' - s_0^v d_1^v(a) a' \in \text{Çek}d_0^v$  elemanını göz önüne alalım.

Burada  $s_1^v a s_1^v a' - s_0^v a s_1^v a' \in NE_{2,0}$  olur.

$NE_{2,0} = \text{Çek}d_0^v \cap \text{Çek}d_1^h$  olup,

$$d_1^v(s_1^v a s_1^v a' - s_0^v a s_1^v a') = a \cdot a' - (s_0^v d_1^v(a)) a'$$

ve  $NE_{2,0} = \{0\}$  olduğundan  $s_1^v a s_1^v a' - s_0^v a s_1^v a' = 0$  olur.

Yani,

$$d_1^v(s_1^v a s_1^v a' - s_0^v a s_1^v a') = 0 = a \cdot a' - (s_0^v d_1^v(a)) a'$$

bulunur. Buradan da  $\partial_1^v(a) \cdot a' = s_0^v d_1^v(a) a' = a a'$  bulunur. Bu da çaprazlanmış modülün 2. aksiyomudur. Yani  $\partial_1^v: NE_{1,0} \rightarrow NE_{0,0}$  bir çaprazlanmış modül olur.

Benzer şekilde  $\partial_1^h: NE_{0,1} \rightarrow NE_{0,0}$  da bir çaprazlanmış modüldür. Burada da  $x \in NE_{0,0}$  in  $a \in NE_{0,1}$  üzerine etkisi  $x \cdot a = (s_0^h x)a$  şeklinde tanımlıdır.

Şimdi  $N(\nabla(E_{(1)})) \xrightarrow{d_1^\nabla} N(\nabla(E_{(0)}))$  ın bir çaprazlanmış modül olduğunu gösterelim.  $p = q$  ve  $p, q \geq 1$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  olduğundan  $p \neq q$  ve  $p, q \geq 2$  olduğunda  $NE_{p,q} = \{0\}$  olduğundan Ulualan [6] tarafından ispatlanan ve yukarıda verdiğimiz **Önerme 2.1.1** gereğince  $n \geq 2$  için  $N(\nabla(E_{(n)})) = \{0\}$  olacaktır. Burada Artin-Mazur eş diagonal fonktora göre,

$$\nabla(E_{(0)}) = \{(x_0, x_1) \in E_{1,0} \times E_{0,1} : d_0^v(x_0) = d_1^h(x_1)\}$$

olup

$$d_0^\nabla : \nabla(E_{(1)}) \rightarrow \nabla(E_{(0)}) = E_{0,0}$$

$$d_0^\nabla(x_0, x_1) = d_0^v(x_0)$$

$$d_1^\nabla(x_0, x_1) = d_1^v(x_0)$$

$$s_0^\nabla(x_0) = (s_0^v x_0, s_0^h x_0)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^\nabla} \\ \text{Şimdi } \nabla(E_{(1)}) \xrightarrow{d_1^\nabla} \nabla(E_{(\bullet)}) \text{ nın More Kompleksine bakalım.} \\ \xleftarrow{s_0^\nabla} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \nabla(E_{(\bullet)})_1 &= \text{Çek} d_0^\nabla = \{(x_0, x_1) : d_0^v(x_0) = \{0\}\} \\ &= \{(x_0, x_1) : x_0 \in \text{Çek} d_0^\nabla = NE_{1,0}\} \\ &= \{(x_0, x_1) : x_0 \in NE_{1,0}\} \end{aligned}$$

olur. Burada Artin-Mazur eş diagonal fonktoru tanımından  $d_0^v(x_0) = d_1^h(x_1)$  olur ve  $x_0 \in \text{Çek} d_0^\nabla$  olduğundan  $d_0^v(x_0) = \{0\}$  ve buradan  $d_1^h(x_1) = \{0\}$  bulunur.

Yani  $x_1 \in NE_{0,1}$  olur. O halde

$$\begin{aligned} N(\nabla E_{(\bullet)})_1 &= \{(x_0, x_1) : x_0 \in NE_{1,0}, x_1 \in NE_{0,1}\} \\ &\cong NE_{1,0} \times NE_{0,1} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi  $N(\nabla E_{(0)}) = E_{0,0}$  ın  $NE_{1,0} \times NE_{0,1}$  üzerine olan etkisini tanımlayalım.

$x_0 \in E_{0,0}$  ve  $(x_0, x_1) \in NE_{1,0} \times NE_{0,1}$  olmak üzere  $x. (x_0, x_1) = (s_0^v(x)x_0, s_0^h(x)x_1)$  etki tanımlanabilir.

$$\partial_1^\nabla : NE_{1,0} \times NE_{0,1} \rightarrow NE_{0,0}$$

$$(x_0, x_1) \rightarrow \partial_1^v(x_0) + \partial_1^h(x_1)$$

olsun.

$$\partial_1^\nabla(x. (x_0, x_1)) = \partial_1^v(s_0^v(x)x_0, s_0^h(x)x_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_1^v s_0^v(x) \partial_1^v(x_0) + \partial_1^v s_0^h(x) \partial_1^h(x_1) \\
&= x \partial_1^v(x_0) + x \partial_1^h(x_1) \\
&= x(\partial_1^v(x_0) + \partial_1^h(x_1)) \\
&= x(\partial_1^v(x_0, x_1))
\end{aligned}$$

olup  $\partial_1^v$  bir ön çaprazlanmış olur.

Şimdi çaprazlanmış modül olma şartına bakalım. **Teorem 2.1.2** deki kabulümüze göre,  $NE_{1,1} = NE_{0,2} = NE_{2,0} = \{0\}$  olur.  $(x_0, x_1), (x'_0, x'_1) \in NE_{1,0} \times NE_{0,1}$  alalım.

$$\begin{aligned}
\partial_1^v(x_0, x_1), (x'_0, x'_1) &= (\partial_1^v(x_0) + \partial_1^h(x_1)) \cdot (x'_0, x'_1) \\
&= (s_0^v \partial_1^v(x_0).x'_0 + s_0^v \partial_1^h(x_1).x'_0, s_0^h \partial_1^v(x_0).x'_1 + s_0^h \partial_1^h(x_1).x'_1) \\
&= (x_0 x'_0, x_1 x'_1) = (x_0, x_1), (x'_0, x'_1)
\end{aligned}$$

dir.

$x_0 \in NE_{0,1}$  ve  $x_1 \in NE_{1,0}$  olmak üzere  $s_0^h x_0. s_0^v x_1 \in NE_{1,1}$  dir.  $NE_{1,1} = \{0\}$  olduğundan

$$s_0^h x_0. s_0^v x_1 = 0$$

olmalıdır.

$\partial_1^h$  ve  $\partial_1^v$  homomorfizmleri göz önüne alınırsa,

$$\partial_1^h(s_0^h x_0. s_0^v x_1) = 0$$

ve

$$\partial_1^v(s_0^h x_0. s_0^v x_1) = 0$$

olmalıdır.

O halde,

$$x_0. s_0^v \partial_1^h x_1 = 0$$

ve

$$s_0^h \partial_1^v x_0. x_1 = 0$$

olacaktır.

Burada  $\partial_1^v$  bir çaprazlanmış modül olduğundan  $s_0^v \partial_1^v(x_0).x'_0 = x_0 x'_0$  ve yine  $\partial_1^h$  bir çaprazlanmış modül olduğundan  $s_0^h \partial_1^h(x_0).x'_1 = x_1 x'_1$  dir. Burada Artin-Mazur eş diagonal fonktörüne göre yeniden düzenleyecek olursak;  $(x_0, x_1) \in NE_{1,0} \times NE_{0,1}$  dir. Fakat

$x_0 \in NE_{1,0} \Rightarrow d_0^v(x_0) = \{0\}, x_1 \in NE_{0,1} \Rightarrow d_0^h(x_1) = \{0\}$  dır. Ancak Artin-Mazura göre  $d_0^v(x_0) = d_1^h(x_1)$  olduğundan  $d_1^h(x_1) = \{0\}$  dır.

Yani

$$\partial_1^V: NE_{1,0} \times NE_{0,1} \rightarrow NE_{0,0}$$

$$\partial_1^V(x_0, x_1) = \partial_1^v(x_0) + \underbrace{\partial_1^h(x_1)}_0 = \partial_1^v(x_0)$$

şeklinde olmaktadır. Buna göre,

$$s_0^v \partial_1^h(x_1).x'_0 = 0 \text{ ve } s_0^h \partial_1^v(x_0).x'_1 = 0$$

olmalıdır. Sonuç olarak  $\partial_1^V$  bir çaprazlanmış modül olur.

### Bölüm 3

#### 3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERDEN BİSİMPLESEL CEBİRLERE

Bu bölümde verilen bir çaprazlanmış modülünden bir bisimplisel cebir elde edeceğiz.

$\partial_1: M \rightarrow N$  bir çaprazlanmış modül olsun.  $N$  nin  $M$  üzerindeki cebir etkisini kullanarak  $M \rtimes N$  yarı direk çarpım cebirini tanımlayalım.  $E_{0,1} = M \rtimes P$  olsun.

Buradan  $E_{0,0} = N$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\partial_0^v(m, n) &= n \\ \partial_1^v(m, n) &= \partial_1 m + n \\ s_0^v(n) &= (0, n)\end{aligned}$$

olarak alalım.

$$\bar{M} = \{(m_1, * \partial_1(m_1)): m_1 \in M\}$$

olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}\partial: \bar{M} &\rightarrow N \\ (m, n) &\rightarrow \partial_1 m\end{aligned}$$

dönüşümü de bir çaprazlanmış modül olur. Burada  $N$  nin  $\bar{M}$  üzerindeki cebir etkisi,

$$n' \bullet (m, n) = (n' \bullet m, n'n')$$

şeklinde tanımlanabilir.  $\bar{M}$  kümesi,

$$(m, n)(m', n') = (mm', nn')$$

direk çarpıma göre  $N$ -cebirdir.

Bu etkiye göre,

$$\begin{aligned}\partial((m, n) \bullet n') &= \partial(m \bullet n', nn') \\ &= \partial_1(m \bullet n') \\ &= \partial_1(m).n \\ &= \partial_1(m, n).n'\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
 (m, n) \bullet \partial_1(m', n') &= (m, n) \bullet \partial_1(m') \\
 &= (m \bullet \partial_1(m'), \partial_1(m')n) \\
 &= (mm', \partial_1(m')n) \\
 &= (mm', +n'n) \\
 &= (m, n)(m', n')
 \end{aligned}$$

olup  $\partial$  bir çaprazlanmış modül olur.

N nin

$$\bar{M} = \{(m, \partial_1 m) : m \in M\}$$

kümesine olan cebir etkisine göre  $E_{0,1} = \bar{M} \rtimes N$  yarı-direk çarpım cebirini tanımlarsak,

$$\begin{aligned}
 d_0^h((m, \partial_1 m), n) &= n \\
 d_1^h((m, \partial_1 m), n) &= \partial_1 m + n \\
 s_0^h(n) &= (0, 0, n)
 \end{aligned}$$

buluruz. Bu tanımlamalara göre  $NE_{0,1} \cong \bar{M}$  ve  $NE_{1,0} \cong M$  bulunur.

O halde  $NE_{2,0} = M \rtimes (M \rtimes N)$  ve  $NE_{2,0} = \bar{M} \rtimes (\bar{M} \rtimes N)$  dersek  $NE_{2,0} = NE_{2,0} = \{0\}$  bulunur. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.**  $p = q$  ve  $p, q \geq 1$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $p \neq q$  ve  $p, q \geq 2$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  olan bisimplisel cebirler kategorisi ile çaprazlanmış modüller kategorisi denktir.

**İspat:** Yukarıda  $\mathbf{XMod} \rightarrow \mathbf{BisimpliselCeb}_{\leq 1}$  şeklinde çaprazlanmış modüllerden bisimplisel cebirlere fonktor tanımladık. Ayrıca Teorem 2.1.2. de tersini tanımladık. Böylece her iki funktordan ispat tamamlanmış olur.

#### 4.Bölüm

#### 4. BİSİMLİSEL CEBİRLER VE ÇAPRAZLANMIŞ KARELER

Çaprazlanmış kareler gruplar üzerinde 3-tip cebirsel model olarak Loday [7] tarafından tanımlanmıştır. Değişmeli cebirler üzerinde ise Ellis [8] tarafından tanımlanmıştır. Aşağıdaki tanım Ellis [8] den alınmıştır.

**4.1. Tanım:** Değişmeli cebirlerin,

$$X = \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda} & M \\ \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\ N & \xrightarrow{\vartheta} & R \end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım.

$R$  nin  $L$ ,  $M$  ve  $N$  üzerine olan etkisiyle birlikte,  $M$  nin  $L$  ve  $N$  üzerine  $\mu$  vasıtasıyla ve  $N$  ninde  $L$  ve  $M$  üzerine  $\vartheta$  vasıtasıyla olan etkileri vardır. Ayrıca  $h$ -dönüşüm olarak adlandırılan  $h: M \times N \rightarrow L$  ve aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir dönüşüm vardır. Bu  $X$  karesine  $h$ -dönüşüm ile birlikte **Çaprazlanmış Kare** denir.

1.  $\lambda, \lambda', \mu$  ve  $\vartheta$  nin her biri birer çaprazlanmış modüldür.
2.  $\lambda$  ve  $\lambda'$  dönüşümleri  $R$  nin etkilerini korurlar.
3.  $k \in \mathbf{k}$  olmak üzere

$$kh(m, n) = h(km, n) = h(m, kn)$$

eşitliği her  $(m, n) \in M \times N$  için doğrudur.

4.  $m, m' \in M$  ve  $n \in N$  için

$$h(m + m', n) = h(m, n) + h(m', n)$$

dir.

5.  $m \in M$  ve  $n, n' \in N$  için

$$h(m, n + n') = h(m, n) + h(m, n')$$

dir.

6.  $r \bullet h(m, n) = h(r \bullet m, n) = h(m, r \bullet n)$  eşitliği her  $r \in R$  için doğrudur.

7.  $m \in M$  ve  $n \in N$  için,

$$\lambda h(m, n) = m \bullet n = m \bullet \vartheta(n) \text{ dir.}$$

8.  $\lambda' h(m, n) = n \bullet m = n \bullet \mu(m)$  dir.

9.  $l \in L$  ve  $m \in M$  için  $h(m, \lambda' l) = m \bullet l$

10.  $h(\lambda l, n) = n \bullet l$  dir.

Tüm çaprazlanmış karelerin kategorisini  $\mathbf{Crs}^2$  ile göstereceğiz. Bu bölümde bisimplisel cebirler ile çaprazlanmış kareler arasındaki ilişki verilecektir.

#### 4.2. Bisimplisel Cebirlerden Çaprazlanmış Karelere

Bu bölümde bisimplisel cebirlerden çaprazlanmış karelere bir fonktor tanımlayacağız.

**4.2.1. Teorem:**  $E_{*,*}$  bir bisimplisel cebir ve Moore kompleksi  $p \geq 2$  için  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{ccc} NE_{1,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{1,0} \\ \partial_1^v \downarrow & & \downarrow \partial_1^v \\ NE_{1,0} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{0,0} \end{array}$$

Yapısı aşağıda tanımlı h-dönüşümle birlikte bir çaprazlanmış kare olur.

$y \in NE_{1,0}$ ,  $x \in NE_{0,1}$  olmak üzere,

$$h: NE_{0,1} \times NE_{1,0} \rightarrow NE_{1,1}$$

$$(x, y) \rightarrow s_0^h(x) \cdot s_0^v(y) \text{ dir.}$$

**İspat:** Çaprazlanmış kare aksiyomlarını sağlayacağız.

1. Önceki bölümlerde,

$$NE_{0,1} \xrightarrow{\partial_1^v} NE_{0,0} \text{ ve } NE_{1,0} \xrightarrow{\partial_1^h} NE_{0,0}$$

yapılarının her ikisinin de birer çaprazlanmış modül olduklarını gösterdik.

Şimdi  $\partial_1^h: NE_{1,1} \rightarrow NE_{1,0}$  ve  $\partial_1^v: NE_{1,1} \rightarrow NE_{1,0}$  yapılarının çaprazlanmış modül olduklarını gösterelim.

$$x \in NE_{0,1} \text{ ve } a \in NE_{1,1} \text{ için } x \bullet a = s_0^h(x)a$$

ve

$$y \in NE_{1,0} \text{ ve } a \in NE_{1,1} \text{ için } y \bullet a = s_0^v(y)a$$

şeklinde etkileri tanımlıdır. Bu etkilere göre,

$$\partial_1^h(x \bullet a) = \partial_1^h(s_0^h(x)a) = x\partial_1^h(a)$$

ve benzer şekilde

$$\partial_1^v(y \bullet a) = \partial_1^v(s_0^v(y)a) = y\partial_1^v(a)$$

olarak bulunur. Yani  $\partial_1^h$  ve  $\partial_1^v$  birer ön-çaprazlanmış modüldür. Ayrıca;  $a, a' \in NE_{1,1}$  için  $\partial_1^h(a) \bullet a' = s_0^h(\partial_1^h(a))a'$  bulunur.

$a, a' \in NE_{1,1}$  için  $s_1^h(a)(s_0^h(a') - s_1^h(a')) \in NE_{2,1}$  dir. O halde bu elemanın  $\partial_2^h$  altındaki görüntüsü  $NE_{1,1}$  dir.

Kabule göre  $NE_{2,1} = \{0\}$  olduğundan  $s_1^h(a)(s_0^h(a') - s_1^h(a')) = 0$  ve bu elemanın  $\partial_2^h$  altındaki görüntüsü de sıfır olur.

Yani,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_2^h \left( s_1^h(a) (s_0^h(a') - s_1^h(a')) \right) \\ &= a \bullet (s_0^h \partial_1^h(a') - a') \end{aligned}$$

Yani,

$$a \bullet s_0^h \partial_1^h(a') = aa'$$

bulunur. Yani  $a, a' \in NE_{1,1}$  için

$$a \bullet \partial_1^h(a') = as_0^h \partial_1^h(a') = aa'$$

veya

$$\partial_1^h(a) \bullet a' = s_0^h \partial_1^h(a)a' = aa'$$

bulunur. Yani  $\partial_1^h: NE_{1,1} \rightarrow NE_{0,1}$  bir çaprazlanmış modül olur.

Benzer şekilde  $x, y \in NE_{1,1}$  ve  $s_1^v(x)(s_0^v(y) - s_1^v(y)) \in NE_{1,2}$  olur.  $NE_{1,2} = \{0\}$  olduğundan bu eleman 0'a eşit ve  $\partial_2^v$  altındaki görüntüsü yine 0 olur. Bu sebeple,

$$\partial_2^v \left( s_1^v(x)(s_0^v(y) - s_1^v(y)) \right) = x(s_0^v \partial_1^v(y) - y) = 0$$

olup  $x(s_0^v \partial_1^v(y)) = xy$  bulunur.

O halde  $x, y \in NE_{1,1}$  için,

$$x \bullet \partial_1^v(y) = x.(s_0^v \partial_1^v(y)) = xy$$

bulunur.

Yani  $\partial_1^v: NE_{1,1} \rightarrow NE_{1,0}$  da bir çaprazlanmış modül olur.

$NE_{0,0}$  in  $NE_{1,1}$  üzerine etkisi  $x \in NE_{0,0}$  ve  $a \in NE_{1,1}$  olmak üzere

$$x \bullet a = (s_0^h s_0^v(x)).a$$

veya

$$x \bullet a = s_0^v(s_0^h(x)).a$$

şeklinde tanımlanabilir.  $NE_{0,1}$  in  $NE_{1,1}$  ve  $NE_{1,0}$  üzerine olan etkileri  $\partial_1^v$  vasıtasıyla ve  $NE_{1,0}$  ında  $NE_{1,1}$  ve  $NE_{0,1}$  üzerine olan etkileri  $\partial_1^h$  vasıtasıyla olur. Böylece 1.aksiyom sağlamış olur.

**2.**  $\partial_1^h$  ve  $\partial_1^v$  dönüşümleri  $NE_{0,0}$  in  $NE_{1,1}$  üzerine olan etkilerini koruduğunu göstermeliyiz.

$x \in NE_{0,0}$  ve  $a \in NE_{1,1}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \partial_1^h(x \bullet a) &= \partial_1^h(s_0^h(s_0^v(x))a) \\ &= s_0^v(x) \partial_1^h(a) \\ &= x \bullet \partial_1^h(a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \partial_1^v(x \bullet a) &= \partial_1^v(s_0^v(s_0^h(x))a) \\ &= s_0^h(x) \partial_1^v(a) \\ &= x \bullet \partial_1^v(a) \end{aligned}$$

bulunur.

**3.**  $h(x, y) = s_0^h(x).s_0^v(y)$  olup  $k \in \mathbf{k}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} kh(x, y) &= k(s_0^h(x).s_0^v(y)) \\ &= s_0^h(kx).s_0^v(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h(kx, y) \\
&= s_0^h(x).s_0^v(ky) \\
&= h(x, ky)
\end{aligned}$$

bulunur.

4.  $x, x' \in NE_{0,1}$  ve  $y \in NE_{1,0}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
h(x + x', y) &= s_0^h(x + x').s_0^v(y) \\
&= (s_0^h(x) + s_0^h(x')).s_0^v(y) \\
&= (s_0^h(x)s_0^v(y) + s_0^h(x').s_0^v(y)) \\
&= h(x, y) + h(x', y)
\end{aligned}$$

olur.

5.  $x \in NE_{0,1}$  ve  $y, y' \in NE_{1,0}$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
h(x, y + y') &= s_0^h(x).s_0^v(y + y') \\
&= s_0^h(x)(s_0^v(y) + s_0^v(y')) \\
&= (s_0^h(x)s_0^v(y) + s_0^h(x).s_0^v(y')) \\
&= h(x, y) + h(x, y')
\end{aligned}$$

bulunur.

6.  $r \in NE_{0,0}$  için

$$\begin{aligned}
r \bullet h(x, y) &= r \bullet (s_0^h(x).s_0^v(y)) \\
&= s_0^h(s_0^v(r))s_0^h(x)s_0^v(y) \\
&= s_0^h(s_0^v(r)x)s_0^v(y) \\
&= s_0^h(r \bullet x).s_0^v(y) \\
&= h(r \bullet x, y)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
r \bullet h(x, y) &= r \bullet (s_0^h(x).s_0^v(y)) \\
&= s_0^v(s_0^h(r))s_0^h(x)s_0^v(y) \\
&= s_0^h(x).s_0^v(s_0^h(r)y) \\
&= s_0^h(x).s_0^v(r \bullet y)
\end{aligned}$$

$$= h(x, r \bullet y)$$

olur.

Sonuç olarak,

$$r \bullet h(x, y) = h(r \bullet x, y) = h(x, r \bullet y)$$

bulunur.

7.  $x \in NE_{0,1}$  ve  $y \in NE_{1,0}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \partial_1^h(h(x, y)) &= \partial_1^h(s_0^h(x).s_0^v(y)) \\ &= xs_0^v(\partial_1^h(y)) \\ &= x \bullet \partial_1^h(y) \\ &= (x) \bullet y \end{aligned}$$

olur.

8.  $\lambda' h(m, n) = n \bullet m$  olmalıdır.

$\lambda' = \partial_1^v$  olup:  $x \in NE_{0,1}$  ve  $y \in NE_{1,0}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} \partial_1^v(h(x, y)) &= \partial_1^v(s_0^h(x).s_0^v(y)) \\ &= s_0^h(\partial_1^v(x))y \\ &= \partial_1^v(x) \bullet y \\ &= x \bullet (y) \end{aligned}$$

olur.

9.  $\ell \in NE_{1,1}$  ve  $x \in NE_{0,1}$  için

$$s_1^h s_0^h(x). (s_0^h \ell - s_1^h \ell) \in NE_{2,1}$$

olup  $NE_{2,1} = \{0\}$  olduğundan bu elemanın  $\partial_2^h$  altındaki görüntüsü  $NE_{1,1}$  de sıfırdır.

Yani,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_2^h(s_1^h s_0^h(x). (s_0^h \ell - s_1^h \ell)) \\ &= s_0^h(x)(s_0^v d_1^v \ell - \ell) \\ &= s_0^h(x)s_0^v d_1^v \ell - (s_0^h(x))\ell \end{aligned}$$

olup

$$h(x, \lambda' \ell) = h(x, \partial_1^v(\ell))$$

$$\begin{aligned}
&= s_0^h(x) \cdot s_0^v(\partial_1^v(\ell)) \\
&= s_0^h(x) \ell \\
&= s_0^h(s_0^v(\partial_1^v(x))) \bullet \ell \\
&= x \bullet \ell
\end{aligned}$$

olur.

10.  $\ell \in NE_{1,1}$  ve  $y \in NE_{1,0}$  için

$$s_1^v s_0^v y (s_0^v \ell - s_1^v \ell) \in NE_{1,2}$$

olup  $NE_{1,2} = \{0\}$  olduğundan bu elemanın  $\partial_2^v$  altındaki görüntüsü de  $NE_{1,1}$  de sıfırdır.

Yani,

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_2^v (s_1^v s_0^v y \cdot (s_0^v \ell - s_1^v \ell)) \\
&= s_0^v(y) (s_0^h d_1^h \ell - \ell) \\
&= (s_0^v y) \ell - s_0^v y s_0 (\partial_1^h \ell)
\end{aligned}$$

olup  $s_0^v y s_0 (\partial_1^h \ell) = (s_0^v y) \ell$  bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}
h(\lambda \ell, y) &= h(\partial_1^h(\ell), y) \\
&= s_0^h(\partial_1^h(\ell)) \cdot s_0^v(y) \\
&= (s_0^v y) \ell \\
&= s_0^v (s_0^h(\partial_1^h(y))) \bullet \ell \\
&= y \bullet \ell
\end{aligned}$$

Sonuç olarak Moore Bikompleksi  $p \geq 2$  için  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  iken  $NE_{p,q} = \{0\}$  olan herhangi bir bisimplisel cebirden bir çaprazlanmış kare elde etmiş oluruz.

Yani,

$$\Delta: \mathbf{BisimpCeb}_{\leq 1} \longrightarrow \mathbf{Crs}^2$$

şeklinde bir fonktor tanımlamış oluruz.

### 4.3. Çaprazlanmış Karelerden Bisimplisel Cebirlere

Önceki bölümde  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir ve  $p \geq 2$  olduğunda  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  olduğunda  $NE_{p,q} = \{0\}$ , ( $p, q \neq 1$  şartı dışında) yapısından bir bisimplisel cebir elde ettik. Bu bölümde verilen bir çaprazlanmış kareden bisimplisel cebir elde ederek aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

**4.3.1. Teorem:**  $p \geq 2$  olduğunda Moore bikompleksi  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  olduğunda yine Moore bikompleksi  $NE_{p,q} = \{0\}$  olan bisimplisel cebirler kategorisi ile çaprazlanmış kareler kategorisi denktir.

**İspat:** Teorem 2.1.2. de  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir ve  $p \geq 2$ ,  $q \geq 2$  olduğunda ayrı ayrı  $NE_{p,q} = \{0\}$  olan bir yapıdan,

$$\begin{array}{ccc}
 NE_{1,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{1,0} \\
 \partial_1^v \downarrow & & \downarrow \partial_1^v \\
 NE_{1,0} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{0,0}
 \end{array}$$

yapısının bir çaprazlanmış kare olduğunu gördük.

$$\Delta: \mathbf{BisimpCeb}_{\leq 1} \rightarrow \mathbf{Crs}^2$$

şeklinde bir funktor tanımlamıştık.

Tersine  $h: M \times N \rightarrow L$  dönüşümü ile birlikte,

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\lambda} & M \\
 \lambda' \downarrow & & \downarrow \mu \\
 N & \xrightarrow{\vartheta} & P
 \end{array}$$

$X : \lambda' \downarrow$

bir çaprazlanmış kare olsun.  $\lambda, \lambda', \mu$  ve  $\vartheta$  nin her biri birer çaprazlanmış modül olduklarını biliyoruz. Bu yapıdan bir bisimplisel cebir elde edeceğiz.  $E_{0,0} = P$  diyelim.

$P$  nin  $M$  üzerindeki cebir etkisini kullanarak  $m, m' \in M$  ve  $p, p' \in P$  olmak üzere,

$$(m, p) + (m', p') = (m + m', p + p')$$

ve

$$(m, p) \cdot (m', p') = (mm' + m \bullet p' + p' \bullet m, pp')$$

işlemine göre  $M \rtimes P$  kümesi bir P-cebir olur. Bu P-cebire **Yarı-Direk Cebiri** denir.

Buradan  $E_{0,1} = M \rtimes P$  diyelim.

Şimdi  $d_0^v, d_1^v: E_{0,1} \rightarrow E_{0,0}$  ve  $s_0^v: E_{0,0} \rightarrow E_{0,1}$  yüz ve dejenere operatörlerini tanımlayalım.

$(m, p) \in M \rtimes P$  için

$$d_0^v(m, p) = p$$

$$d_1^v(m, p) = \mu(m) + p$$

$$s_0^v(p) = (0, p)$$

olarak alalım. Bu durumda,

$$d_0^v s_0^v(p) = d_0^v(0, p) = p$$

yani

$$d_0^v s_0^v = id$$

$$d_1^v s_0^v(p) = d_1^v(0, p) = \mu(m) + p = p$$

Yani

$$d_1^v s_0^v = id$$

olup simplisel özdeşlikler sağlanır.

Ayrıca  $M \rtimes P$  yarı-direk çarpım cebirinin,  $M$  cebiri üzerine  $(m, p) \in M \rtimes P$  ve  $m' \in M$  olmak üzere  $(m, p) \bullet m' = (\mu(m) + p) \cdot m'$  şeklinde bir etkisi vardır. Bu etkiden yararlanarak  $M \rtimes (M \rtimes P)$  yarı-direk çarpım cebirini tanımlayabiliriz.

Buradaki işlemler,

$$m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in M \text{ ve } p_2, p'_2 \in P$$

olmak üzere,

$$(m_1, (m_2, p_2)) + (m'_1, (m'_2, p'_2)) = (m_1 + m'_1, (m_2 + m'_2, p_2 + p'_2))$$

ve

$$\begin{aligned}
 (m_1, (m_2, p_2)).(m'_1, (m'_2, p'_2)) &= (m_1 m'_1 + (m_2, p_2) \bullet m'_1 + (m'_2, p'_2) \bullet m_1, (m_2, p_2).(m'_2, p'_2)) \\
 &= (m_1 m'_1 + (\mu(m_2) + p_2)m'_1 + (\mu(m'_2) + p'_2).m_1, (m_2 m'_2 + p_2 \bullet m'_2 + p'_2 \bullet m_2, p_2 p'_2)) \\
 &= (m_1 m'_1 + \mu(m_2)m'_1 + p_2 m'_1 + \mu(m'_2)m_1 + p'_2 m_1, (m_2 m'_2 + p_2 \bullet m'_2 + p'_2 \bullet m_2, p_2 p'_2))
 \end{aligned}$$

şeklindedirler.

$E_{0,2} = M \rtimes (M \rtimes P)$  diyelim. Şimdi  $E_{0,2}$  ve  $E_{0,1}$  arasındaki yüz ve dejenere operatörlerini tanımlayalım. Bunlar

$$\begin{aligned}
 d_0^v: E_{0,2} &\rightarrow E_{0,1} & , & \quad d_0^v(m_2, (m_1, p)) = (m_2, \mu(m_1) + p) \\
 d_1^v: E_{0,2} &\rightarrow E_{0,1} & , & \quad d_1^v(m_2, (m_1, p)) = (m_2 + m_1, p) \\
 d_2^v: E_{0,2} &\rightarrow E_{0,1} & , & \quad d_2^v(m_2, (m_1, p)) = (m_1, p) \\
 s_0^v: E_{0,1} &\rightarrow E_{0,2} & , & \quad s_0^v(m, p) = (m, 0, p) \\
 s_1^v: E_{0,1} &\rightarrow E_{0,2} & , & \quad s_1^v(m, p) = (0, m, p)
 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlamalara göre  $d_0^v, d_1^v, d_2^v, s_0^v, s_1^v$  operatörleri birer cebir homomorfizmleri olup, simplitel özdeşlikleri sağlarlar.

Gerçekten de,

$$d_0^v s_0^v(m, p) = d_0^v(m, 0, p) = (m, \mu(0) + p) = (m, p)$$

olup

$$d_0^v s_0^v = id$$

ve yine

$$d_1^v s_0^v(m, p) = d_1^v(m, 0, p) = (m + 0, p) = (m, p)$$

yani

$$d_1^v s_0^v = id$$

olur.

Burada  $E_{0,2} = M \rtimes (M \rtimes P)$  elde edeceğimiz olan bisimplisel cebirin bir terimi olduğunda,  $NE_{0,2} = \text{Çek} d_0^v \cap \text{Çek} d_1^v$  yapısını inceleyelim.

$(m_2, (m_1, p)) \in E_{0,2}$  olsun.

$$d_0^v(m_2, (m_1, p)) = (m_2, \mu(m_1) + p)$$

olduğundan bu elemanın  $\check{Cek}d_0^v$  da olması için gerek ve yeter şart,

$$(m_2, \mu(m_1) + p) = (0, 0)$$

olması yani

$$m_2 = 0, \mu(m_1) = -p$$

olmasıdır.

Ayrıca aynı elemanın  $\check{Cek}d_1^v$  da olması için gerek ve yeter şart

$$d_1^v(m_2, (m_1, p)) = (m_2 + m_1, p) = (0, 0)$$

yani

$$m_2 + m_1 = 0, p = 0$$

olmasıdır.

Buradan  $(m_2, (m_1, p))$  nin  $\check{Cek}d_0^v \cap \check{Cek}d_1^v$  da olması için,

$$m_2 = 0, \mu(m_1) = -p, m_2 + m_1 = 0, p = 0$$

Yani  $m_2 = 0, m_1 = 0, p = 0$  olur. O halde

$$\check{Cek}d_0^v \cap \check{Cek}d_1^v = NE_{0,2} = \{(0, 0, 0)\} = 0$$

bulunur.

Dolayısıyla elde edeceğimiz bisimplisel cebirin Moore bikompleksinde  $q \geq 2$  için  $NE_{0,q} = \{0\}$

bulunur. Ayrıca  $E_{0,1} = M \rtimes P$  olduğundan,

$$d_0^v(m, p) = p$$

olup

$$\begin{aligned} NE_{0,1} &= \check{Cek}d_0^v = \{(m, p): d_0^v(m, p) = p = 0\} \\ &= \{(m, 0): m \in M\} \end{aligned}$$

$$\cong M$$

olur.

Benzer şekilde  $P$  nin  $N$  üzerindeki etkisini kullanarak  $E_{1,0} = N \rtimes P$  yi tanımlayalım.

Burada

$$\begin{aligned} d_0^h(n, p) &= p \\ d_1^h(n, p) &= \vartheta(n) + p \\ s_0^h(p) &= (0, p) \end{aligned}$$

alabiliriz.

$N \rtimes P$  nin  $N$  üzerindeki etkisi de;  $(n, p) \in N \rtimes P$  ve  $p' \in P$  olmak üzere

$$(n, p) \bullet p' = (\vartheta(n) + p)p'$$

olarak tanımlanabilir. Bu etkiye göre de  $E_{2,0} = N \rtimes (N \rtimes P)$  yi tanımlayalım.  $E_{2,0}$  ile  $E_{1,0}$  arasındaki yüz ve dejenere operatörleri  $(n_2, (n_1, p)) \in E_{2,0}$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_0^h: E_{2,0} &\rightarrow E_{1,0} & , & \quad d_0^h(n_2, (n_1, p)) = (n_2, \vartheta(n_1) + p) \\ d_1^h: E_{2,0} &\rightarrow E_{1,0} & , & \quad d_1^h(n_2, (n_1, p)) = (n_2 + n_1, p) \\ d_2^h: E_{2,0} &\rightarrow E_{1,0} & , & \quad d_2^h(n_2, (n_1, p)) = (n_1, p) \\ s_0^h: E_{1,0} &\rightarrow E_{2,0} & , & \quad s_0^h(n, p) = (n, 0, p) \\ s_1^h: E_{1,0} &\rightarrow E_{2,0} & , & \quad s_1^h(n, p) = (0, n, p) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Yine bu tanımlamaya göre;

$$\begin{aligned} NE_{2,0} &= \text{Çek}d_0^h \cap \text{Çek}d_1^h = \{(n_2, (n_1, p)): d_0^h(n_2, (n_1, p)) = (0, 0) = d_1^h(n_2, (n_1, p))\} \\ &= \{(n_2, (n_1, p)): (n_2, \vartheta(n_1) + p) = (0, 0) = (n_2 + n_1, p)\} \\ &= \{(n_2, (n_1, p)): n_2 = 0, \vartheta(n_1) = -p, n_2 = -n_1, p = 0\} \\ &= \{(n_2, (n_1, p)): n_2 = 0, n_1 = 0, p = 0\} \\ &= \{(0, 0, 0)\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} NE_{1,0} &= \{(n, p): d_0^h(n, p) = p = 0\} \\ &= \{(n, 0): n \in N\} \\ &\cong N \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla  $q \geq 2$  için  $NE_{p,q} = \{0\}$  olmalıdır.

Şimdi  $E_{1,1}$  i tanımlayalım.  $N$  nin  $L$  üzerindeki etkisini kullanarak  $\lambda': L \rightarrow N$  çaprazlanmış modül olduğundan  $L \rtimes N$  yarı-direk çarpım cebirini tanımlayabiliriz. Ayrıca  $M \rtimes P$  kümesi  $L \rtimes N$  üzeri-ne  $(m, p) \in M \rtimes P$  ve  $(\ell, n) \in L \rtimes N$  olmak üzere,

$$(m, p) \cdot (\ell, n) = (p \bullet \ell + \mu(m) \bullet \ell + h(m, n), p \bullet n + \mu(m) \bullet n)$$

şeklinde bir etki eder.

Bu etkiye göre,

$$E_{1,1} = (L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P)$$

yarı-direk çarpım cebirini tanımlayalım. Önce  $d_0^h, d_1^h: E_{1,1} \rightarrow E_{0,1}$  operatörünü tanımlayalım.

Burada,

$$\begin{aligned} d_0^h(\ell, n, m, p) &= (m, p) \\ d_1^h(\ell, n, m, p) &= (\lambda\ell + m, \vartheta(n) + p) \\ s_0^h(\ell, n, m, p) &= (0, 0, m, p) \end{aligned}$$

olur.

Bu tanımlamalara göre,

$$\begin{aligned} d_1^h s_0^h(m, p) &= d_1^h(0, 0, m, p) = (\lambda(0) + m, \vartheta(0) + p) \\ &= (m, p) \end{aligned}$$

olup

$$d_1^h s_0^h = id$$

ve

$$d_0^h s_0^h(m, p) = d_0^h(0, 0, m, p) = (m, p)$$

olup

$$d_0^h s_0^h = id$$

bulunur. Yani bu homomorfizmler simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

Şimdi  $E_{1,1}$  ve  $E_{1,0}$  arasında dikey operatörleri yani  $d_0^v, d_1^v, s_0^v$  homomorfizmlerini tanımlayalım.

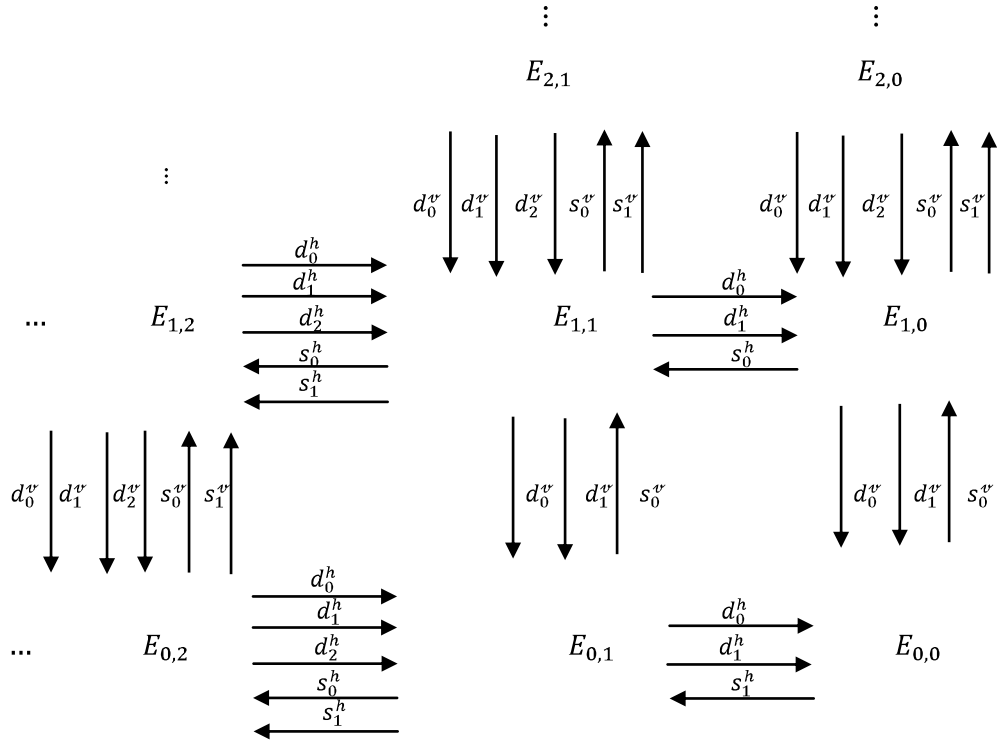
$$\begin{aligned} d_0^v(\ell, n, m, p) &= (n, p) \\ d_1^v(\ell, n, m, p) &= (\lambda'\ell + n, \mu(m) + p) \\ s_0^v(n, p) &= (0, n, 0, p) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde bu operatörler de simplisel özdeşlikleri sağlarlar.

Yani

$$d_0^v s_0^v = id \text{ ve } d_1^v s_0^v = id$$

olur. Böylece



diyagramını elde etmiş oluruz.

Burada,

$$E_{0,n} = M^n \rtimes P$$

yani

$$E_{0,1} = M \rtimes P$$

$$E_{0,2} = M \rtimes (M \rtimes P)$$

$$E_{0,3} = M \rtimes (M \rtimes (M \rtimes P))$$

⋮

şeklindedir.

Benzer olarak,

$$E_{n,0} = N^n \rtimes P$$

yani

$$\begin{aligned}
E_{1,0} &= N \rtimes P \\
E_{2,0} &= N \rtimes (N \rtimes P) \\
E_{3,0} &= N \rtimes (N \rtimes (N \rtimes P)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Ayrıca

$$E_{1,2} = (L \rtimes N) \rtimes ((L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P))$$

ve

$$E_{2,1} = ((L \rtimes L) \rtimes N) \rtimes (M \rtimes (M \rtimes P)) \text{ dir.}$$

Daha genel olarak

$$E_{p,q} = (L^{(p)} \rtimes N)^{(q)} \rtimes (M^{(p)} \rtimes P)$$

dir.

Burada  $p \geq 2$  için  $NE_{p,0} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  için  $NE_{0,q} = \{0\}$  olduğunu gösterdik. Benzer şekilde  $NE_{1,2} = \{0\}$  ve  $NE_{2,1} = \{0\}$  oldukları da görülebilir.

Sonuçta aşağıdaki gibi bir bisimplisel cebir elde etmiş oluruz.

$$\begin{array}{ccccc}
& E_{2,1} = (L^L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) & & E_{2,0} = N \rtimes (N \rtimes P) & \\
& \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \downarrow d_2^v \\ \downarrow s_0^v \\ \uparrow s_1^v \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \downarrow d_2^v \\ \downarrow s_0^v \\ \uparrow s_1^v \end{array} & \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_2^h} \\ \xleftarrow{s_0^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} & E_{1,1} = (L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_0^h} \end{array} & E_{1,0} = (M \rtimes P) & \\
& \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \downarrow s_0^v \\ \uparrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \downarrow s_0^v \\ \uparrow \end{array} & \\
& E_{0,2} = N \rtimes (N \rtimes P) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xrightarrow{d_2^h} \\ \xleftarrow{s_0^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} & E_{0,1} = (N \rtimes P) & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} & E_{0,0} = P
\end{array}$$

Burada  $L^N = L \rtimes N$ ,  $L^L = L \rtimes L$  dir. Yukarıdaki hesaplamalara bu bisimplisel cebirin Moore bikompleksi,

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & 0 & \longrightarrow & 0 & \\
 & \dots & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & & NE_{1,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{1,0} & \\
 \dots & 0 & \longrightarrow & \downarrow \partial_1^v & & \downarrow \partial_1^v & \\
 & & & NE_{0,1} & \xrightarrow{\partial_1^h} & NE_{0,0} & \\
 \dots & 0 & \longrightarrow & & & & 
 \end{array}$$

şeklinde olduğunu gördük.

Ayrıca

$$NE_{0,0} \cong P, \quad NE_{0,1} \cong M, \quad NE_{1,0} \cong N$$

olduklarını gösterdik.

Şimdi  $NE_{1,1}$  yapısını inceleyelim.

$$E_{1,1} = (L \rtimes N) \rtimes (M \rtimes P)$$

olup

$$NE_{1,1} = \text{Çek}d_0^h \cap \text{Çek}d_0^v$$

olduğundan

$$d_0^v(\ell, n, m, p) = (n, p)$$

$$d_0^h(\ell, n, m, p) = (m, p)$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned}
 NE_{1,1} = \text{Çek}d_0^h \cap \text{Çek}d_0^v = \{(\ell, n, m, p): & \quad d_0^v(\ell, n, m, p) = (n, p) = (0,0) \text{ ve} \\
 & \quad d_0^h(\ell, n, m, p) = (m, p) = (0,0) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(\ell, n, m, p): p = 0, m = 0, n = 0\} \\
&= \{(\ell, 0, 0, 0): \ell \in L\} \\
&\cong L
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak elde ettiğimiz bisimplisel cebirin Moore bikompleksi aşağıdaki diyagrama izomorf olur.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & \vdots & & \vdots & \\
& & \dots & 0 & \longrightarrow & 0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{\partial_1^h} & M & \\
& \downarrow & & \downarrow \partial_1^v & & \downarrow \partial_1^v & \\
\dots & 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\partial_1^h} & P &
\end{array}$$

Yani başta ele aldığımız çaprazlanmış kareye izomorftur.

$$NE_{1,1} \cong L, \quad NE_{0,1} \cong M, \quad NE_{1,0} \cong N$$

izomorfı altında,

$$\partial_1^v: NE_{0,1} \rightarrow NE_{1,0}; \partial_1^v(m, 0) = \mu(m)$$

olduğundan,

$$\begin{array}{ccc}
NE_{1,0} & \xrightarrow{\cong} & N \\
\downarrow \partial_1^v & \swarrow \mu & \\
NE_{0,0} & &
\end{array}$$

diyagramından  $\partial_1^v = \mu$  ve yine  $\partial_1^h: NE_{1,0} \rightarrow NE_{0,0}$  ;  $\partial_1^h(n, p) = \vartheta(n)$  olarak alınır. Benzer şekilde,  $\partial_1^h: L \rightarrow M$  ;  $\partial_1^h(\ell) = \lambda(\ell)$  ve  $\partial_1^v: L \rightarrow N$  ;  $\partial_1^v(\ell) = \lambda'(\ell)$  olur.

Böylece  $N: \mathbf{Crs}^2 \rightarrow \mathbf{BisimpCeb}_{\leq 1}$  şeklinde bir fonktor tanımlamış oluruz.

Yukarıda,

$$\Delta \left( N \begin{pmatrix} L & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \rightarrow & P \end{pmatrix} \right) \cong \begin{pmatrix} L & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \rightarrow & P \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterdik. Benzer şekilde  $N\Delta(E_{\bullet,\bullet}) \cong E_{\bullet,\bullet}$  olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak bu iki kategori denktir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

## 5. BÖLÜM

### 5. Bisimplisel Cebirler ve 2- Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde 2-çaprazlanmış modüller ile bisimplisel cebirler arasındaki ilişki verilecektir. Gruplar üzerinde 2-çaprazlanmış modül yapısı Conduché [9] tarafından 3-tip bağlantılı homotopi uzaylarına cebirsel model olarak 1987 yılında tanımlanmıştır. Conduché[9] çalışmasında 2-çaprazlanmış modüller ile Moore kompleksinin boyu  $\leq 2$  olan simplisel grupların denk olduğunu göstermiştir. Bu denklik daha sonra Mutlu ve Porter[10] tarafından  $F_{\alpha,\beta}$  fonksiyonların kullanımı ile yeniden gösterilmiştir. Bu fonksiyonlara ilk olarak, değişmeli cebirler üzerinde simplisel cebirler için Z. Arvasi doktora tezinde incelemiş olup makale olarak Z.Arvasi ve T.Porter tarafından [11] yayınlanmıştır.

Değişmeli cebirler üzerinde 2-çaprazlanmış modüller Grandjean ve Vale[12] tarafından tanımlanmıştır. Z.Arvasi ve T.Porter değişmeli cebirler için  $C_{\alpha,\beta}$  fonksiyonları kullanarak 2-çaprazlanmış modüller ile Moore kompleksinin boyu  $\leq 2$  olan simplisel değişmeli cebirlerin denk olduğunu göstermişlerdir. İlk önce [12]'den 2-çaprazlanmış modül tanımı verelim.

**5.1.Tanım:**  $C_0$  cebirlerin aşağıdaki gibi bir kompleksini ( $\partial_1\partial_2 = 0$ ) göz önüne alalım.

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Burada  $\partial_1$  ve  $\partial_2$  birer  $C_0$  –cebir homomorfizmi ve  $C_0$  kendisi üzerine kendi çarpım işlemi ile etki eder.  $C_1$  ise  $C_2$  üzerine  $C_0$  vasıtasıyla etki eder ve ayrıca Peiffer dönüşümü diye adlandırılan  $\{- \otimes -\}: C_1 \otimes C_1 \rightarrow C_2$  şeklinde bir  $C_0$  –bilineer dönüşümü vardır ve aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\text{PL1: } \partial_2\{y_0 \otimes y_1\} = y_0 y_1 - y_0 \bullet (\partial_1 y_1)$$

$$\text{PL2: } \{\partial_1 x_1 \otimes \partial_2 x_2\} = x_1 x_2$$

$$\text{PL3: } \{y_0 \otimes y_1 y_2\} = \{y_0 y_1 \otimes y_2\} + \partial_1 y_2 \bullet \{y_0 \otimes y_1\}$$

$$\text{PL4: a) } \{\partial_2 x \otimes y\} = y \bullet x - (\partial_1 y_1) \bullet x$$

$$\text{b) } \{y \otimes \partial_2 x\} = y \bullet x$$

$$\text{PL5: } \{y_0 \otimes y_1\} \bullet z = \{y_0 \bullet z \otimes y_1\} = \{y_0 \otimes y_1 \bullet z\}$$

Burada  $y_0, y_1, y_2, y \in C_1$  ,  $x, x_1, x_2 \in C_2$  ve  $z \in C_0$  olur. Bu 2-çaprazlanmış modül kısaca  $(C_2, C_1, C_0, \partial_1, \partial_2)$  ile gösterelim.

$(C_2, C_1, C_0, \partial_1, \partial_2)$  ve  $(C_2', C_1', C_0', \partial_1', \partial_2')$  2-çaprazlanmış modülleri arasındaki morfizmi  $f = (f_2, f_1, f_0)$  şeklinde olup,

$$\begin{array}{ccccc}
 C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \\
 f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow \\
 C_2' & \xrightarrow{\partial_2'} & C_1' & \xrightarrow{\partial_1'} & C_0'
 \end{array}$$

Diyagramı değişmeli yapar. Yani  $f \cdot \partial_1 = \partial_1' f_1$  ve  $f_1 \partial_2 = \partial_2' f_2$  dir. Ayrıca bu  $f_2, f_1, f_0$  homomorfizmleri  $C_0$ 'ın etkilerini korurlar ve Peiffer dönüşümleri ile uyumludurlar.

Yani  $c_0 \in C_0$  ,  $c_1 \in C_1$  ve  $c_2 \in C_2$  için

$$f_1(c_0 \cdot c_1) = f_0(c_0) \cdot f_1(c_1)$$

ve

$$f_2(c_0 \cdot c_2) = f_0(c_0) \cdot f_2(c_2)$$

dir. Ayrıca

$$\{- \otimes -\} : (f_1 \otimes f_1) \rightarrow f_2 \{- \otimes -\}$$

dir.

Bu obje ve morfizmlerin oluşturduğu kategoriye  $\mathbf{X_2Mod}$  ile göstereceğiz. Bu kategoriye 2-çaprazlanmış modüller kategorisi denir.

## 5.2. Bisimplisel Cebirlerden 2- Çaprazlanmış Modüllere

Bu bölümde Moore bikompleksinin özelliklerini kullanarak ve Z.Arvasi'nin [13] de yaptığı çaprazlanmış kareler ve 2-çaprazlanmış modüller arasındaki ilişkiyi veren sonucunu kullanarak direk olarak bisimplisel cebirlerden 2-çaprazlanmış modüllere bir fonktor oluşturacağız.

**Önerme 5.2.1.**  $E_{\bullet, \bullet}$  Moore bikompleksi  $NE_{m,n}$  olan bir bisimplisel cebir olsun.  $p = q = 1$  durumu hariç olmak üzere  $p \geq 1$  olduğunda  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 1$  olduğunda  $NE_{p,q} = \{0\}$  ise bu bisimplisel cebirden 2-çaprazlanmış modül elde edilebilir.

**İspat:**  $E_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir olsun.

$NE_{0,1} = \text{\textit{Çek}}d_0^v$  ,  $NE_{1,0} = \text{\textit{Çek}}d_0^h$  olduğunu biliyoruz.  $NE_{0,1}$  kümesi  $NE_{1,0}$  üzerine  $\partial_1^v$  ile etki eder. Bu etkiyi kullanarak  $C_1 = NE_{0,1} \rtimes NE_{1,0}$  yarı direk çarpım cebirini oluşturabiliriz.  $C_0 = NE_{0,0}$  olsun.  $C_0$  ın  $C_1$  üzerine etkisi  $(s_0^v, s_0^h)$  vasıtasıyla olur. Yani  $c_0 \in C_0$  ,  $(x, y) \in C_1$  için

$$C_0 \bullet (x, y) = (s_0^v(c_0)x, s_0^h(c_0)y)$$

şeklindedir. Bu etkiye göre,

$$\partial_1: C_1 \rightarrow C_0$$

$$\partial_1(x, y) = d_1^v(x) + d_1^h(y)$$

dönüşümü bir ön çaprazlanmış modül olur.

Gerçekten de,

$$\begin{aligned} \partial_1(c_0 \bullet (x, y)) &= \partial_1(s_0^v(c_0)x, s_0^h(c_0)y) \\ &= d_1^v(s_0^v(c_0)x) + d_1^h(s_0^h(c_0)y) \\ &= c_0 d_1^v(x) + c_0 d_1^h(y) \\ &= c_0 (d_1^v(x) + d_1^h(y)) \\ &= c_0 \bullet \partial_1(x, y) \end{aligned}$$

olur.

Şimdi  $C_2$  ve  $\partial_2: C_2 \rightarrow C_1$  homomorfizmi tanımlayalım.

$C_2 = NE_{1,1} = \text{\textit{Çek}}d_0^h \cap \text{\textit{Çek}}d_0^v$  olsun.

$\partial_2: NE_{1,1} \rightarrow NE_{0,1} \rtimes NE_{1,0}$  dönüşümünü  $\ell \in NE_{1,1}$  için,

$$\partial_2(\ell) = (-d_1^h(\ell), d_1^v(\ell))$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanımlamaya göre,

$$\begin{aligned} \partial_1 \partial_2(\ell) &= \partial_1(-d_1^h(\ell), d_1^v(\ell)) \\ &= -(d_1^v d_1^h(\ell)) + (d_1^h d_1^v(\ell)) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

olup,

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

şeklinde  $C_0$  –cebirlerin bir kompleksini elde ederiz ve burada  $\partial_1: C_1 \rightarrow C_0$  yapısı bir pre-çaprazlanmış modüldür. Geriye  $\{- \otimes -\}: C_1 \otimes C_1 \rightarrow C_2$  şeklinde bir  $C_0$  –bilineer Peiffer dönüşümü tanımlamak kalır. Bu dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$(x, y), (x', y') \in C_1 = NE_{0,1} \times NE_{1,0}$  olsun.

$$\{(x, y) \otimes (x', y')\} = s_0^h(x) \cdot s_0^v(yy')$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu tanımlamalara göre  $C_1$  deki  $(m, n)$  ve  $(c, a)$  gibi iki elemanın Peiffer çarpımı,

$$\langle (m, n), (c, a) \rangle = (-\partial_1^h(na) \bullet m, \partial_1^v(m) \bullet na)$$

şeklindedir. Buna göre 2-çaprazlanmış modül yapısını elde etmiş oluruz. Şimdi 2-çaprazlanmış modülün birkaç aksiyomunun sağlandığını gösterelim. Burada  $C_1$  deki çarpım  $m, c \in NE_{0,1}$  ve  $n, a \in NE_{1,0}$  olmak üzere,

$$(m, n) \bullet (c, a) = (\partial_1^h(n) \bullet c + \partial_1^h(a) \bullet m + mc, na)$$

şeklindedir. Buna göre,

PL1:  $(m, n) \in C_1$  ve  $(c, a) \in C_1$  için

$$\begin{aligned} \partial_2\{(m, n) \otimes (c, a)\} &= \partial_2(s_0^h(m) \cdot s_0^v(na)) \\ &= (-\partial_1^h(s_0^h(m) \cdot s_0^v(na)), \partial_1^v(s_0^h(m) \cdot s_0^v(na))) \\ &= (-m \bullet \partial_1^h(s_0^v(na)), \partial_1^v(s_0^h(m) \bullet (na))) \\ &= (-\partial_1^h(na) \bullet m, \partial_1^v(m) \bullet na) \\ &= \langle (m, n), (c, a) \rangle \end{aligned}$$

PL2:  $\ell_1, \ell_2 \in NE_{1,1}$  olsun.

$$\begin{aligned} \{\partial_2\ell_1 \otimes \partial_2\ell_2\} &= \{(-\partial_1^h\ell_1, \partial_1^v\ell_1) \otimes (-\partial_1^h\ell_2, \partial_1^v\ell_2)\} \\ &= (-s_0^h(\partial_1^h\ell_1)) \bullet s_0^v(\partial_1^v(\ell_1\ell_2)) \end{aligned}$$

olup,  $p \geq 1$  ve  $q \geq 1$  için  $NE_{p,q} = \{0\}$  olduğunu kullanacağız.

$$\begin{aligned} (-s_0^h(\partial_1^h\ell_1)) \bullet s_0^v(\partial_1^v(\ell_1\ell_2)) &= -\partial_1^h(\ell_1) \bullet (\ell_1\ell_2) \\ &= \ell_1\ell_2 \end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$\{\partial_2 \ell_1 \otimes \partial_2 \ell_2\} = \ell_1 \ell_2$$

bulunur.

Diğer Peiffer lifting aksiyomları da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece  $\mathbf{E}_{\bullet,\bullet}$  bir bisimplisel cebir olduğunda  $p \geq 1$  ve  $q \geq 1$  için  $p = q = 1$  durumu hariç  $NE_{p,q} = \{0\}$  olduğunda

$$NE_{1,1} \xrightarrow{(-\partial_1^h, \partial_1^v)} NE_{0,1} \rtimes NE_{1,0} \xrightarrow{\partial_1^v + \partial_1^h} NE_{0,0}$$

yapısı bir 2-çaprazlanmış modül olur.

Sonuç olarak

$$\Delta: \mathbf{BisimpCeb}_{\leq 1} \rightarrow \mathbf{X}_2 \mathbf{Mod}$$

şeklinde bir fonktor tanımlamış oluruz.

Bu fonktor,  $\Delta(E_{0,0}) = NE_{0,0}$ ,  $\Delta(E_{1,0}) = NE_{0,1} \rtimes NE_{1,0}$ ,  $\Delta(E_{0,1}) = NE_{0,1} \rtimes NE_{1,0}$  ve  $\Delta(E_{1,1}) = NE_{1,1}$  şeklinde tanımlanmış olur.

### 5.3. 2-Çaprazlanmış Modüllerden Bisimplisel Cebirler

Bu bölümde verilen bir 2-çaprazlanmış modülden bir bisimplisel cebir elde edeceğiz ve bu bisimplisel cebirin Moore bikompleksinde  $NE_{1,2}$  ve  $NE_{2,1}$  bileşenlerinin sıfır olduğunu göstereceğiz.

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

yapısı  $\{- \otimes -\}: M \otimes M \rightarrow L$  Peiffer Lifting dönüşümü ile 2-çaprazlanmış modül olsun. Bu yapıdan  $\mathbf{E}_{\bullet,\bullet}$  şeklinde bir bisimplisel cebir elde edelim.

Bu 2-çaprazlanmış modüle karşılık gelen 2-parçalanmış simplisel cebir,

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{d_0^2} & \\ & \xrightarrow{d_1^2} & \\ & \xrightarrow{d_2^2} & \\ (L \rtimes M) \rtimes (M \rtimes N) & \xrightarrow{d_2^2} & (M \rtimes N) \xrightarrow{d_1^1} N \\ & \xleftarrow{s_0^1} & \\ & \xleftarrow{s_1^1} & \end{array}$$

şeklinde olup burada

$$\begin{aligned}\partial_0^1(m, n) &= n \\ \partial_1^1(m, n) &= \partial_1 m + n \\ s_0^0(n) &= (0, n)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}d_0^2(\ell, m', m, n) &= (m, n) \\ d_1^2(\ell, m', m, n) &= (m' + m, n) \\ d_2^2(\ell, m', m, n) &= (m', \partial_1 m + n) \\ s_0^1(m, n) &= (0, 0, m, n) \\ s_1^1(m, n) &= (0, m, 0, n)\end{aligned}$$

dir.

Arvasi ve Porter'in [11] de yaptığı ispata göre bu simplisel cebir için Moore kompleksin boyutu  $\leq 2$  olur.

Şimdi bu simplisel cebire bir çaprazlanmış kare elde etmek için Arvasi [13] nin tanımladığı  $M(-, 2)$  fonktörünü uygulayalım.

Bu fonktor altında,

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\partial_2} & M \\ \partial'_2 \downarrow & & \downarrow \partial' \\ \bar{M} & \xrightarrow{\partial} & M \rtimes N \end{array}$$

yapısı bir çaprazlanmış karedir. Burada,

$$\bar{M} = \{(m, n) \in M \rtimes N : \partial_1 m + n = 0\}$$

ve

$$\begin{aligned}\partial(m, n) &= (m, n) \\ \partial'(m) &= (m, 0) \\ \partial'_2(\ell) &= (\partial_1 \ell, 0)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Şimdi bu elde ettiğimiz çaprazlanmış kareden bir bisimplisel cebir elde edeceğiz.

$E_{0,0} = M \rtimes N$  olsun.  $M \rtimes N$  kümesi bir N-cebirdir.  $E_{0,1} = M \rtimes (M \rtimes N)$  diyelim. Burada,

$$\begin{aligned} d_0^v(m, m', n) &= (m', n) \\ d_1^v(m, m', n) &= (\partial'(m), 0) + (m', n) \\ &= (m + m', n) \\ s_o^v(m, n) &= (0, m, n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanımlamaya göre,

$$\begin{aligned} NE_{0,1} &= \text{Çek} d_0^v = \{(m, m', n): d_0^v(m, m', n) = (m', n) = (0, 0)\} \\ &= \{(m, 0, 0): m \in M\} \\ &\cong M \end{aligned}$$

olur.

$$E_{0,2} = M \rtimes (M \rtimes (M \rtimes N))$$

olarak alırsak geçtiğimiz bölümlerde gösterdiğimiz gibi  $NE_{0,2} = \{0\}$  olacaktır.

$\bar{M} = \{(m, -\partial_1 m): m \in M\}$  olduğunda  $M \rtimes N$  nin  $\bar{M}$  üzerindeki etkisini kullanarak,

$$E_{1,0} = \bar{M} \rtimes (M \rtimes N)$$

diyelim. Burada,

$$\begin{aligned} d_0^h(m', n_1, (m, n)) &= (m, n) \\ d_1^h(m', n_1, (m, n)) &= (m', n_1) + (m, n) \\ &= (m + m', n_1 + n) \\ s_o^h((m, n)) &= (0, 0, m, n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım.

Buradan,

$$d_0^h s_o^h(m, n) = d_0^h(0, 0, m, n) = (m, n)$$

yani

$$d_0^h s_o^h = id$$

ve

$$d_1^h s_o^h(m, n) = d_1^h(0, 0, m, n) = (0 + m, 0 + n) = (m + n)$$

yani

$$d_1^h s_o^h = id$$

bulunur.

O halde bu operatörler simplisel özdeşlikleri sağlarlar. Bu tanımlamaya göre,

$$\begin{aligned} NE_{1,0} &= \text{Çek} d_0^h = \{(m', n_1, (m, n)): d_0^h((m', n_1, (m, n))) = (m, n) = (0, 0), n_1 = -\partial_1 m'\} \\ &= \{(m', n_1, 0, 0): n_1 = -\partial_1 m'\} \\ &= \bar{M} \times \{0\} \times \{0\} \\ &\cong \bar{M} \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde  $E_{2,0} = \bar{M} \rtimes (\bar{M} \rtimes (\bar{M} \rtimes N))$  olarak alınırsa  $NE_{2,0} = \{0\}$  olduğu görülebilir.

$E_{1,1} = (L \rtimes \bar{M}) \rtimes (M \rtimes (M \rtimes N))$  diyelim.

$$\begin{aligned} d_0^h(\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2)) &= (m_2, m'_2, n_2) \\ d_1^h((\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2))) &= (\partial_2 \ell + m_2, m_1 + m'_2, n_1 + n_2) \\ s_0^h(m_2, m'_2, n_2) &= (0, (0, 0), (m_2, m'_2, n_2)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d_0^v(\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2)) &= (m_1, n_1, m_2, m'_2) \\ d_1^v(\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2)) &= (\partial_2 \ell, 0) + (m_2, n_1), \partial(m_2) + (m'_2, n_2) \\ &= (\partial_2 \ell, m_2, n_1, m_2 + m'_2, n_2) \end{aligned}$$

ve

$$s_0^v((m_2, n_1), (m'_2, n_2)) = (0, (m_2, n_1), (m'_2, n_2))$$

olur.

Bu tanımlamaya göre,

$$\begin{aligned} NE_{1,1} &= \text{Çek} d_0^v \cap \text{Çek} d_0^h \\ &= \{(\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2)): (m_2, m'_2, n_2) = (0, 0, 0) \text{ ve } (m_1, n_1, m'_2, n_2) = (0, 0, 0, 0)\} \\ &= \{(\ell, (m_1, n_1), (m_2, m'_2, n_2)): m_2 = 0, m'_2 = 0, n_2 = 0, n_1 = 0, m_1 = 0\} \end{aligned}$$

$$= \{(\ell, (0,0)), (0,0,0) : \ell \in L\}$$

$$\cong L$$

bulunur.

Böylece

$$\begin{array}{ccc}
 E_{1,1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_0^h} \end{array} & E_{1,0} \\
 \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \uparrow s_0^v \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow d_0^v \\ \downarrow d_1^v \\ \uparrow s_0^v \end{array} \\
 E_{0,1} & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0^h} \\ \xrightarrow{d_1^h} \\ \xleftarrow{s_1^h} \end{array} & E_{0,0}
 \end{array}$$

şeklinde bisimplisel cebir elde ederiz ve burada

$NE_{0,0} = M \rtimes N$  ,  $NE_{0,1} = M$  ,  $NE_{1,0} = \bar{M}$  ,  $NE_{1,1} = L$  olup  $p \geq 2$  için  $NE_{p,0} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  için  $NE_{0,q} = \{0\}$  bulunur.

Böylece

$$X_2Mod \rightarrow BisimpCeb$$

şeklinde bir fonktor tanımlamış oluruz. Buraya kadar yaptıklarımız aşağıdaki teoremin ispatıdır.

**5.4. Teorem:**  $p \geq 2$  olduğunda Moore bikompleksi  $NE_{p,q} = \{0\}$  ve  $q \geq 2$  olduğunda yine Moore bikompleksi  $NE_{p,q} = \{0\}$  olan  $p \neq 1$  ,  $q \neq 1$  olmak üzere bisimplisel cebirler kategorisi ile 2-çaprazlanmış modüller kategorisi denktirler.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] D.CONDUCHÉ, Modules Croisés Généralisés de Longueur 2 J. Pure and Applied Algebra,34,155-178,(1984).
- [2] A.P.TONKS, Theory and Applications of crossed complexes, Ph.D.Thesis,Universty of Wales,(1993).
- [3] T.PORTER, Some Categorical Results in the theory of Crossed Modules in Commutative Algebras,J.Algebra 109,415-429,(1987).
- [4] Z. ARVASI, Applications in Commutative Algebra of The Moore Complex of a Simplicial Algebra, Ph.D.Thesis,University of Wales,Bangor,(1994).
- [5] M.ARTIN and B.MAZUR, Etale Homotopy, Springer Lecture Notes in Math.,100,(1968).
- [6] E.ULUALAN, Değişmeli Cebirler Üzerinde Kuadratik Modüller, Doktora tezi,Eskişehir Osmangazi Üniversitesi,(2004).
- [7] J.L.LODAY, Spaces with Finitely Many Non-Trivial Homotopy Groups, J.Pure and Applied Algebra, 24, 179-202,(1982).
- [8] G.J.ELLIS , Crossed Modules and Their Higher Dimensional Analogues, Ph.D. Thesis,U.C.N.W.,(1984).
- [9] D.CONDUCHÉ, Simplicial Crossed Modules and Mapping Cones, Georgian Mathematical Journal Voll.10,2003, No:4, 623-636.
- [10] A.MUTLU and T.PORTER, Applications of peiffer pairings in the moore complex of simplicial group. Theory and Applications of Categories, Vol.4,No.8,pp.174-194,(1998).
- [11] Z.Arvasi and T.Porter , Higher Dimensional Peiffer Elements in simplicial Commutative Algebras,Theory and Applications of Categories,Vol.3,No.1,pp.1-23,(1997).
- [12] A.R.GRANDJEÁN and M.J. VALE, 2-Modulos Cruzados an la Cohomologia de André-Quillen.Memorias de la Reai Academia de Ciencias,22,(1986).
- [13] Z.Arvasi ,Crossed Squares and 2-Crossed modules of Commutative algebras,Theorey and Applicitions of Categories; (Vol.3,No.7,pp.160-181,(1997).
- [14] R.BROWN, From Groups to Groupoids, Bull.London Math.Soc.,19,113-134,(1987)
- [15] R.BROWN and J-L LODAY, Van Kampen Theorems for Diagram of Spaces, Topology 26,311-335,(1987)
- [16] R.BROWN and N.D.GILBERT, Algebraic Models of 3-Types and Automorfizm Structures for Crossed Modules, Proc.London Math.Soc.(3) 59,51-73,(1989).

### KAYNAKLAR DİZİNİ DEVAMI

- [17] P.CARRASCO and A.M.CEGARRA, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, Jour.Pure Aplied Algebra,75,195-235,(1991).
- [18] E.B.CURTIS, Simplicial Homotopy Theory, adv in Math Vol.6,107-209,(1971).
- [19] R.BROWN, From Groups to Groupoids, Bull.London Math.Soc.,19,113-134,(1987)
- [20] R.BROWN and J-L LODAY, Van Kampen Theorems for Diagram of Spaces, Topology 26,311-335,(1987)
- [21] R.BROWN and N.D.GILBERT, Algebraic Models of 3-Types and Automorfizm Structures for Crossed Modules, Proc.London Math.Soc.(3) 59,51-73,(1989).
- [22] P.CARRASCO and A.M.CEGARRA, Group-theoretic Algebraic Models for Homotopy Types, Jour.Pure Aplied Algebra,75,195-235,(1991).
- [23] E.B.CURTIS Simplicial Homotopy Theory, Adv in Math Vol.6,107-209,(1971).
- [24] J.DUSKIN, Simplicial Methods and the interpretation of Triple Cohomology, Memoirs A.M.S, Vol.3,163,(1975).
- [25] G.J.ELLIS and R.STEINER, Higher Dimensional Crossed Modules an the Homotopy groups of  $(n+1)$ -ads.,J.Pure and Applied Algebra, 46,117-136,(1987).
- [26] B. MICTHELL, Rings with Several Objects, Advances Math.8,1-161,(1972).
- [27] T.PORTER, n-Type of Simplicial Groups and Crossed n-Cubes,Topology 32,5-24,(1993).
- [28] T.PORTER, Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconceles,J.Algebra 99,458-465,(1986).
- [29] J.H.C.WHITEHEAD,Combinatorial Homotopy II,Bull.Amer.Math.Soc.55,453-496,(1949).