

ÇOK DEĞERLİ TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Utku GÜRDAL

Danışman:

Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU

Ekim, 2011

BURDUR



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

Utku GÜRDAL tarafından Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU yönetiminde hazırlanan “Çok Değerli Topolojik Yapılar Üzerine” başlıklı tez tarafımızdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 22/09/2011

Prof. Dr. Mustafa Kemal SAĞEL
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU
Akdeniz Üniversitesi
Jüri Üyesi

Yrd. Doç. Dr. Gültekin SOYLU
Akdeniz Üniversitesi
Jüri Üyesi

ONAY

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun tarih ve Sayılı kararı ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ekrem ÇİÇEK

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
2.1 Kafes Teorisi	4
2.1.1 Tam Grupoidler	10
2.1.2 Kuantaller	12
2.1.3 Gelfand Kuantalleri ve Heyting Cebirleri	15
2.1.4 GL-Monoidler ve GL-Kuantaller	20
2.1.5 Kareköklü Kuantaller	23
2.1.6 MV-Cebirler ve Boole Cebirleri	33
2.2 Yakınsaklık	38
2.2.1 $\mathfrak{G}$ -Değerli Süzgeçler	40
2.3 Kategori Teorisi	55
2.3.1 Kategoriler	57
2.3.2 Fonktörler	61
2.3.3 Alt Kategoriler	67
2.3.4 Monadlar	69
3 ÇOK DEĞERLİ TOPOLOJİK YAPILAR	83
3.1 Çok Değerli Topolojik Uzaylar	83
3.1.1 $\mathfrak{G}_*$ -Değerli Topolojik Uzaylar	88
3.2 Bazı Çok Değerli Topolojik Kavramlar	94
3.2.1 Süreklilik	94
3.2.2 Kapalılık ve Yoğunluk	96
3.2.3 Yakınsaklık	99

3.2.4	Ayrırma Belitleri	104
3.2.5	Kompaktlık	108
3.3	Çok Değerli Topolojik Uzayların Kategorisi	110
4	TARTIŞMA VE SONUÇ	121
5	KAYNAKLAR	122
	ÖZGEÇMİŞ	124

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇOK DEĞERLİ TOPOLOJİK YAPILAR ÜZERİNE

Utku GÜRDAL

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışmanın amacı çok değerli topolojik uzaylar teorisi hakkında bir derleme sunmaktır. Giriş bölümünün ardından çeşitli tam grupoid yapıları, süzgeçler, çok değerli süzgeçler ve kategori teorisine ait bazı kavramlar tanıtılmıştır. Son bölüm çok değerli topolojik uzaylara ayrılmış, çok değerli topoloji tanımı çok değerli komşuluk sistemi, kesin eşçekirdek, çok değerli süzgeçler ailesi ve çok değerli süzgeç monadı vasıtasıyla verilmiş ve $\mathcal{G}_*$ -grupoidler için tabakalı çok değerli topolojik uzay tanımı yapılarak bazı topolojik kavramların çok değerli benzerlerine değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Tam grupoid, Kuantal, GL-monoid, Çok değerli topoloji, Tabakalılık, Çok değerli süzgeç, Monad

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Mutlu GÜLOĞLU, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, Topoloji Anabilim Dalı

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON MANY VALUED TOPOLOGICAL STRUCTURES

Utku GÜRDAL

Mehmet Akif Ersoy University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

The purpose of this study is to present a compilation about the theory of many valued topological spaces. After an introduction chapter, various complete groupoid structures, filters, many valued filters and some concepts of category theory are introduced. In the last chapter is devoted to many valued topological spaces. Definition of many valued topology is given via many valued neighborhood system, strict conucleus, family of many valued filters and many valued filter monad. Stratified many valued topological spaces are defined for $\mathfrak{G}_*$ -groupoids and many valued analogues of some topological concepts are developed.

Keywords : Complete groupoid, Quantale, GL-monoid, Many valued topology, Stratified, Many valued filter, Monad

Advisor : Assist. Prof. Mutlu GÜLOĞLU, Akdeniz University, Faculty of Sciences, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanması sürecinde yardım ve desteklerini esirgemeyen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Mutlu Güloğlu, yazım programı konusunda yardımcı olan Yrd. Doç. Dr. Mümin Can ve yüksek lisans eğitimim boyunca maddi olarak destekte bulunan Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na teşekkürü borç bilirim.

Utku GÜRDAL

BURDUR, 2011

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\exists$	Var
$\forall$	Her
$\implies$	Gerektirir
$\iff$	Gerek ve yeter koşul
$\emptyset$	Boş küme
$A \subseteq B$	A, B kümesinin alt kümesidir
$A \cap B$	A ve B kümelerinin arakesiti
$A \cup B$	A ve B kümelerinin birleşimi
$A \times B$	A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$\prod_{i \in I} X_i$	$\{X_i \mid i \in I\}$ küme ailesindeki kümelerin kartezyen çarpımı
(x_n)	$(x_1, x_2, x_3, \dots)$ dizisi
$a \vee b$	$\{a, b\}$ kümesinin en küçük üst sınırı
$a \wedge b$	$\{a, b\}$ kümesinin en büyük alt sınırı
$\bigvee A$	A kümesinin en küçük üst sınırı
$\bigwedge A$	A kümesinin en büyük alt sınırı
$\mathcal{P}(X)$	X kümesinin bütün alt kümelerinin kümesi
A^c	A kümesinin üzerinde çalışılan evrene göre tümleyeni
L^X	X kümesinden L kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi
1_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
a_X	Her öğeyi a değerine taşıyan sabit fonksiyon
$\mathbb{N}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{I}$	$[0, 1]$ kapalı aralığı
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\mathbf{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$	$m, n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $m \times n$ gerçel matrislerin kümesi
$\#(A)$	A kümesinin kardinalitesi
$\aleph_0$	$\mathbb{N}$ kümesinin kardinalitesi
$\mathfrak{G}^X$	$\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ olmak üzere $(L^X, \leq, \otimes)$ üçlüsü
2	$\{0, 1\}$ kümesi
$\mathbf{2}$	$(2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi

$\multimap$	$a * x \leq b$ olacak biçimdeki en büyük x ögesi
$\rightarrow$	$x * a \leq b$ olacak biçimdeki en büyük x ögesi
$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} 1. \multimap = \rightarrow \text{ olması durumunda } \multimap \text{ ve } \rightarrow \text{ işlemlerinden her biri} \\ 2. \text{ Heyting cebiri oku} \end{array} \right.$
$\Lambda_{a,b}$	$a \wedge x \leq b$ olmasını sağlayan x 'lerin kümesi
$S(Q)$	Q 'daki kesin çift yanlı ögelerin oluşturduğu alt kuantal
$a \otimes b$	$\sqrt{a} * \sqrt{b}$
$\mathfrak{G}_*$	$G = (L, \leq, *)$ sıkı karaköklü olmak üzere $(L, \leq, \otimes)$ üçlüsü
$a^\perp$	$a \rightarrow 0$
$\mathfrak{F}_2(X)$	X üzerindeki bütün süzgeçlerin kümesi
$\dot{p}$	p noktasını içeren bütün alt kümelerin oluşturduğu süzgeç
$f^\rightarrow(A)$	A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntüsü
$f^\leftarrow(A)$	A kümesinin f fonksiyonu altındaki ön görüntüsü
$f \langle \mathcal{F} \rangle$	$\mathcal{F}$ süzgecinin f fonksiyonu altındaki görüntü süzgeci
$\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$	X üzerindeki bütün $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeçlerin kümesi
$\varphi(\nu)$	ν $\mathfrak{G}$ -süzgecinin φ fonksiyonu altındaki görüntü $\mathfrak{G}$ -süzgeci
$\varphi^{-1}(\nu)$	ν $\mathfrak{G}$ -süzgecinin φ fonksiyonu altındaki ön görüntü $\mathfrak{G}$ -süzgeci
$\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$	X üzerindeki bütün tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli süzgeçlerin kümesi
$\mathbf{u}$	Bütün kümelerin sınıfı
$\mathbf{I}_X$	X kümesi veya nesnesi için özdeşlik dönüşümü
$ \mathbf{K} $	$\mathbf{K}$ kategorisindeki nesnelerin sınıfı
$\mathbf{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$	$\mathbf{K}$ kategorisinde A 'dan B 'ye tanımlı morfizmlerin kümesi
$\mathbf{End}_{\mathbf{K}}(A)$	A 'nın $\mathbf{K}$ kategorisindeki endomorfizmlerinin kümesi
$f \cdot g$	f ve g morfizmlerinin bileşkesi
$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
AB	Abel gruplar ve grup homomorfizmlerin kategorisi
BAN	Banach uzayları ve lineer daralma dönüşümlerinin kategorisi
CGR	Tam grupoidler ve kesin tam grupoid homomorfizmlerinin kategorisi
CLAT	Tam kafesler ve keyfi ebas ve eküs koruyan fonksiyonlar kategorisi
CONV	Kent yakınsaklık uzayları ve sürekli fonksiyonların kategorisi
$\mathfrak{G}$-TOP	$\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi

GRP	Gruplar ve grup homomorfizmlerinin kategorisi
HAUS	Hausdorff uzayları ve sürekli fonksiyonların kategorisi
LAT	Kafesler ve ikili ebas ve eküsü koruyan fonksiyonların kategorisi
MET	Metrik uzaylar ve daralma dönüşümlerinin kategorisi
POS	Kısmi sıralı kümeler ve sıra koruyan fonksiyonların kategorisi
RNG	Halkalar ve halka homomorfizmlerinin kategorisi
SET	Kümeler ve fonksiyonların kategorisi
$\mathfrak{S}_*$-TOP	Tabakalı $\mathfrak{S}_*$ -topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi
TOP	Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi
TOP_M	Metriklenebilir topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi
UNIF	Düzgün uzaylar ve düzgün sürekli fonksiyonların kategorisi
VEC	Gerçek değerli vektör uzayları ve lineer dönüşümlerin kategorisi
WS$\mathfrak{S}_*$-TOP	Zayıf tabakalı $\mathfrak{S}_*$ -topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi
$\tilde{\mathbf{K}}$	K kategorisinin karşıt kategorisi
$\mathcal{I}_{\mathbf{K}}$	K kategorisine ait birim fonktör
$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$	$\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ fonktörlerinin bileşkesi
$f \bullet g$	f ve g fonksiyonlarının klon bileşkesi
$\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$	K kategorisi üzerindeki T monadına göre Kleisli kategorisi
$\mathbf{F}_2$	SET kategorisi üzerindeki süzgeç monadı
$\mathbf{F}_{\mathfrak{S}}$	SET kategorisi üzerindeki $\mathfrak{S}$ -değerli süzgeç monadı
τ_{ϱ}	ϱ fonksiyon ailesinin ürettiği $\mathfrak{S}$ -değerli topoloji
τ_{ind}	En küçük $\mathfrak{S}$ -değerli topoloji
τ_{dis}	En büyük $\mathfrak{S}$ -değerli topoloji
f_v	Her x için $f_v(x) = [v(x)](f)$ ile tanımlanan fonksiyon
v_{τ}	τ $\mathfrak{S}$ -topolojisine karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -değerli komşuluk sistemi
τ_v	v $\mathfrak{S}$ -komşuluk sistemine karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -değerli topoloji
$v_{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}$ $\mathfrak{S}$ -iç operatörüne karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -komşuluk sistemi
$\mathcal{I}_v$	v $\mathfrak{S}$ -komşuluk sistemine karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -iç operatörü
$\tau_{\mathcal{I}}$	$\mathcal{I}$ $\mathfrak{S}$ -iç operatörüne karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -topoloji
$\mathcal{I}_{\tau}$	τ $\mathfrak{S}$ -topolojisine karşılık gelen $\mathfrak{S}$ -iç operatörü
g°	g fonksiyonunun üzerinde çalışılan çok değerli topolojiye göre içi

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$	X üzerindeki bütün tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojilerin ailesi
$\tau_{\text{ind}}^{(S)}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Sabit fonksiyonların oluşturduğu } \mathfrak{G}\text{-değerli topoloji} \\ 2. \text{ En küçük tabakalı } \mathfrak{G}_*\text{-değerli topoloji} \end{array} \right.$
$\tau^{(S)}$	τ 'nun tabakalı kabuğu
$\tau_{\langle \mathcal{B} \rangle}$	$\mathcal{B}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -tabanının ürettiği tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topoloji
$\bigstar_{i=1}^n a_i$	$a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ sonlu kuantal çarpımı
g^*	$\bigvee \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq 0_X \otimes 1_X\}$ fonksiyonu

1 GİRİŞ

Genelleştirilmiş mantık kuramları üzerindeki çalışlmaların merkezinde yer alan tam grupoidler, en genel olarak üzerinde sırakorur bir ikili işlem bulunan tam kafesler olarak tanımlanırlar. Kuvvet kümesi kafesi ve kesişim işleminin oluşturduğu ikili de bir tam grupoid belirlediğinden tam grupoidleri kümelerin bir genelleştirmesi olarak görmek mümkündür. Zadeh (1965) tarafından tanımlanan belirtisiz kümeler ile Goguen (1967)'in tanımladığı L-belirtisiz kümeler de tam grupoidlerce genelleştirilen yapılar arasındadır.

Chang (1968), belirtisiz kümelerden yola çıkarak tarihsel adıyla belirtisiz topolojik uzayları tanımlamış, Lowen (1976) Chang'ın tanımına bir koşul daha ekleyerek birçok amaç için daha kullanışlı olan düzenli bir yapı elde etmeyi başarmıştır. Bununla birlikte her iki yapıda da alt kümeler belirtisiz alınırken topolojinin kendisi klasik bir küme olarak kalmış, topolojinin belirtisizleştirilmesi ise Šostak (1985) tarafından gerçekleştirilmiştir. Goguen'in L-belirtisiz kümeleri de benzer bir süreçle gelişim göstermiştir.

Tam grupoid değerli fonksiyonlardan yararlanılarak çok değerli topolojik uzayların tanımlanması, belirtisiz kümelerden belirtisiz topolojik uzayların tanımlanması veya L-belirtisiz kümelerden L-belirtisiz topolojik uzayların tanımlanmasıyla temel olarak aynı tarzda yapılır. Lowen (1976)'in yaklaşımı takip edilerek bazı özel çok değerli topolojik uzaylar için tabakalılık kavramı tanımlanabilir. Šostak (1986)'ın izlediği yolun bir benzeri takip edildiğinde ise, bu çalışmanın konusu olmayan çok değerli belirtisiz topolojik uzay kavramına ulaşılır.

Tam grupoid yapısının, sağladığı özellikler bakımından zayıf bir yapı olduğu söylenebilir. Bu nedenle, genel tam grupoidlerden daha iyi özelliklere sahip olmalarıyla kendilerini öne çıkaran bazı özel yapılar, hem tam grupoidlerin kendi teorisinin, hem de çok değerli topolojik uzaylarda kurulabilecek yapıların araştırılmasında önemli bir yer tutmaktadır. Kuantaller, tam Heyting cebirleri, sıkı kareköklü bir GL-monoidin monoidal ortalama operatörünce belirlenen cl-grupoidler, tam MV-cebirler ve doğal olarak tam Boole cebirleri bu özel yapıların en çok öne çıkanlarıdır.

Çok değerli topolojinin çalışılmasında önemli yeri olan yapılardan biri de süzgeçlerdir. Klasik topolojik uzayları yakınsaklık yardımıyla belirleyebildikleri gibi bir çok topolojik özellik için de güzel karakterizasyonlar sağlayan süzgeçler, topolojik uzayların öntopolojik (pretopological) uzaylar, limit yapıları ve Cauchy uzayları gibi bazı genelleştirmelerinin tanımlanmasında temel modeller olarak kullanılmışlardır (Chicourrat, 2010).

İlk olarak Cartan (1937) tarafından tanımlanan süzgeçler, topolojik uzaylarla ilgili çalışmalarda genellikle kuvvet kümesi üzerindeki yapılar biçiminde ortaya çıkmakla birlikte, herhangi bir kısmi sıralı küme veya herhangi bir tam grupoid üzerine de genelleştirilebilirler. Tam grupoid değerli fonksiyonların sağladığı tam grupoid yapısı üzerinde verilen süzgeçler (çok değerli süzgeçler), bazı topolojik kavramların çok değerli topolojideki karşılıklarını tanımlamada oldukça yararlı olabilen araçlardır. Çok değerli topolojik uzaylar, hem bu tür genelleştirilmiş süzgeçlerin, hem de klasik süzgeçlerin yakınsaklık teorisinden bahsetme imkanı sunmaktadır.

Süzgeçler ile topolojik uzaylar arasındaki diğer bir bağlantı ise kategori teorisi üzerinden sağlanır. Bir küme üzerindeki bütün süzgeçlerin ailesi, kümenin her bir ögesi, o ögeyi içeren bütün kümelerden oluşan süzgeçle bir tutularak ve noktayı süzgece taşıyan dönüşümler arasında klon bileşke denen bileşke benzeri bir araç tanımlanarak süzgeç monadı adı verilen bir araca dönüştürülürler. Süzgeç monadının bir örneğini teşkil ettiği monadlar, herhangi bir kategori üzerinde kurulabilen özel bir yapı olup bu yapının her bir örneği Eilenberg-Moore kategorisi ve Kleisli kategorisi adı verilen iki ayrı kategori elde etmek için kullanılabilir. Kümeler kategorisi üzerinde kurulmuş olan süzgeç monadının önemi, bu monad yardımıyla elde edilen Kleisli kategorisinin, topolojik uzaylar kategorisine karşılık gelmesidir.

Süzgeç monadının tanımlanışına benzer olarak kümeler kategorisinde, bir küme üzerindeki bütün çok değerli süzgeçlerin ailesi ele alınarak çok değerli süzgeç monadı adı verilen bir yapı tanımlanabilir ve çok değerli süzgeç monadıyla elde edilen Kleisli kategorisi, çok değerli topolojik uzayların kategorisine karşılık gelir. Bu bakış açısı bir yandan çok değerli topolojinin kategorik araçlarla çalışılmasına olanak verirken, diğer yandan çok değerli topolojik uzaylar kategorisinin incelenmesini kolaylaştırır.

Bir kümenin kuvvet kümesinin özel bir alt kümesi yerine, o kümeden tanımlanan tam grupoid değerli fonksiyonların belirlediği tam grupoidin klasik anlamdaki topoloji aksiyomlarına paralel özellikleri sağlayan bir alt kümesi olarak tanımlanan çok değerli topoloji, yukarıda bahsedildiği biçimde çok değerli süzgeç monadından, klasik iç operatörünün bir benzeri olan çok değerli iç operatöründen veya kümenin öğeleriyle damgalanmış özel bir çok değerli süzgeçler ailesi olan çok değerli komşuluk sisteminden yola çıkılarak belirlenebilir.

Üzerinde çalışılan tam grupoid yapısı, bilinen topolojik yapılara özgü tanımların çok değerli topolojik uzaylara anlamlı biçimde taşınabilir olup olmadığı sorusunun yanıtında çoğu kez belirleyici rol oynar. Örneğin, bir $G = (L, \leq, *)$ sıkı kareköklü GL-monoidinin monoidal ortalama operatörünün belirlediği cl-grupoid yapısı, Lowen anlamındaki belirtisiz topoloji kavramının (Lowen, 1976) çok değerli bir benzerinin tanımlanabilmesinin önünü açmaktadır. Bu çalışma boyunca genel olarak $\mathfrak{G}_*$ ile gösterilen bu tür cl-grupoidler yardımıyla Lowen özelliğinin tabakalılık ve zayıf tabakalılık adı verilen iki farklı genellemesi yapılabilir. “*” işleminin ebas işlemine eşit olması durumunda bu iki genelleme arasındaki fark ortadan kalkar.

Klasik ve belirtisiz topolojilerdeki durumun aksine, çok değerli topolojik uzaylarda kapalılık kavramından bahsetmek genel olarak mümkün olmamaktadır. Üzerinde çalışılan tam grupoidin uygun bir tümleme benzeri yapı barındırmasının gerekmemesi ve tam grupoid işleminin herhangi sayıdaki eleman üzerine tek türlü genelleştirilebilir olmaması bu durumun temel nedenleri olarak görülebilir. MV-cebirlerde yeterince düzgün bir tümleme yapısı bulunmakla birlikte, tümlmeyi ayrıca tanımlayarak teoriyi zenginleştirmek de mümkündür. Belirtisiz kümeler bu tür yapıların bir örneğini oluşturur.

2 TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Kafes Teorisi

Tanım 2.1.1 X herhangi bir küme olmak üzere, X üzerinde verilmiş ve her $x, y, z \in X$ için

$$(P1) \quad x \leq x \quad \text{(Yansıma)}$$

$$(P2) \quad x \leq y \text{ ve } y \leq x \text{ ise } x = y \quad \text{(Ters Simetri)}$$

$$(P3) \quad x \leq y \text{ ve } y \leq z \text{ ise } x \leq z \quad \text{(Geçişme)}$$

özelliklerini sağlayan bir $\leq$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı, $(X, \leq)$ ikilisine de bir kısmi sıralı küme adı verilir (Birkhoff, 1995).

Bir X kümesi üzerinde herhangi bir $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı verildiğinde, her $x, y \in X$ için

$$x < y \iff x \leq y \text{ ve } x \neq y$$

$$x \geq y \iff y \leq x$$

$$x > y \iff x \geq y \text{ ve } x \neq y$$

biçiminde tanımlanan $<$, $\geq$ ve $>$ bağıntılarının da verilmiş olduğu kabul edilir.

Tanım 2.1.2 $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere, her $a \in A$ için $x \leq a$ özelliğine sahip $x \in X$ öğelerinin en büyüğüne A 'nın en büyük alt sınırı (ebas, infimum); her $a \in A$ için $a \leq x$ olmasını sağlayan $x \in X$ öğelerinin en küçüğüne ise A 'nın en küçük üst sınırı (eküs, supremum) adı verilir (Birkhoff, 1995).

Ters simetri özelliği gereği bir kümenin en çok bir en büyük alt sınırı ve en çok bir en küçük üst sınırı bulunabilir. Bununla birlikte herhangi bir alt küme için bir en büyük alt sınırın veya bir en küçük üst sınırın bulunması şart değildir. Bu durum, kısmi sıralı kümeleri sınıflandırmak için önemli bir ölçüt sağlar.

Tanım 2.1.3 İki öğeli her alt kümesinin bir en büyük alt sınırı ve bir en küçük üst sınırı bulunan bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine kafes denir. Bir $(L, \leq)$ kafesinde, bir $\{a, b\} \subseteq L$ iki öğeli alt kümesinin en küçük üst sınırı $a \vee b$, en büyük alt sınırı $a \wedge b$ ile gösterilir (Birkhoff, 1995).

Boş küme ve tek elemanlı bir küme üzerinde de kafes yapısı kurulabilmekle birlikte (Birkhoff, 1995), bu çalışma boyunca ele alınan bütün kafeslerin en az iki farklı öğe içerdiği kabul edilmekte ve genel sonuçlar buna göre kanıtlanmaktadır.

Önerme 2.1.1 Bir $(L, \leq)$ kafesindeki $\vee : L \times L \rightarrow L$ ve $\wedge : L \times L \rightarrow L$ ikili işlemleri, her $a, b, c \in L$ için aşağıdaki özellikleri sağlarlar (Birkhoff, 1995).

$$(L0) \quad a \leq b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b \quad (\text{Tutarlılık})$$

$$(L1) \quad a \wedge a = a, \quad a \vee a = a \quad (\text{Eşgüçlülük})$$

$$(L2) \quad a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a \quad (\text{Değişme})$$

$$(L3) \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c \quad (\text{Birleşme})$$

$$(L4) \quad a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a \quad (\text{Sığurma})$$

Önerme 2.1.2 Bir L kümesi üzerinde $\vee : L \times L \rightarrow L$ ve $\wedge : L \times L \rightarrow L$ ikili işlemleri (L1), (L2), (L3), (L4) koşullarını sağlasınlar ve L üzerinde bir $\leq$ bağıntısı (L0) koşulu yardımıyla tanımlansın. Bu durumda $(L, \leq)$ bir kafestir ve $\vee$ ile $\wedge$ ikili işlemleri bu kafes üzerindeki ikili eküs ve ikili ebas işlemlerine karşılıklı olarak eşit olur (Birkhoff, 1995).

Tanım 2.1.4 Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(L, \leq)$ kafesine sınırlı kafes denir.

$$(LB0) \quad \exists 0 \in L, \forall a \in L, 0 \leq a$$

$$(LB1) \quad \exists 1 \in L, \forall a \in L, a \leq 1$$

$0 \in L$ ve $1 \in L$ öğeleri sırasıyla L 'nin en küçük öğesi ve L 'nin en büyük öğesi olarak adlandırılır (Birkhoff, 1995).

Bir kafesin en az iki farklı öğe içerdiği kabulünün, her sınırlı kafeste $0 \neq 1$ olmasını gerekeceği açıktır.

Tek öğeli kümelerin en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırının her zaman var olacağı da dikkate alındığında, bir $(L, \leq)$ kafesinde boş olmayan her sonlu alt kümenin bir en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırının var olduğu birleşme özelliğinden elde edilir. Bir $A = \{a_i \mid i \in I\}$ alt kümesinin en büyük alt sınırı $\bigwedge A$, $\bigwedge_{a \in A} a$ veya $\bigwedge_{i \in I} a_i$ ile, en küçük üst sınırı $\bigvee A$, $\bigvee_{a \in A} a$ veya $\bigvee_{i \in I} a_i$ ile gösterilir. A 'nın boş olmayan sonlu bir alt küme olmaması durumunda $\bigwedge A$ ve $\bigvee A$ öğelerinden biri veya her ikisi var olmayabilir (Birkhoff, 1995).

Tanım 2.1.5 $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

$$(LC) \quad \text{Her } A \subseteq L \text{ alt kümesi için } \bigvee A \text{ ve } \bigwedge A \text{ vardır.}$$

özelligi geçerliyse $(L, \leq)$ 'e bir tam kafes denir (Birkhoff, 1995).

$\emptyset \subseteq L$ alt kümesi ele alındığında, her $a \in L$ için $\bigvee \emptyset \leq a \leq \bigwedge \emptyset$ eşitsizliği sağlanacağından her tam kafes bir sınırlı kafestir ve bu durumda $\bigvee \emptyset$ ve $\bigwedge \emptyset$

sırasıyla, kafesin en küçük ve en büyük öğeleri olan 0 ve 1 'e eşittir.

Örnek 2.1.1 $2 = \{0, 1\}$ kümesi üzerinde $\preceq = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ kısmi sıralama bağıntısı verilsin, yani $0 \preceq 0, 0 \preceq 1, 1 \preceq 1$ ama $1 \not\preceq 0$ olsun. Bu durumda $(2, \preceq)$ ikilisi bir tam kafestir. Uygunluk açısından, $(2, \preceq)$ kafesi üzerindeki $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri sırasıyla Υ ve $\wedge$ ile gösterilecektir. Bu işlemlerin tablolarının aşağıdaki gibi olacağı kolayca görülür.

Υ	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Teorem 2.1.1 $(L, \leq)$ bir kafes olsun.

(LC*) Her $A \subseteq L$ alt kümesi için $\bigvee A$ mevcuttur.

(LC_{*}) Her $A \subseteq L$ alt kümesi için $\bigwedge A$ mevcuttur.

koşullarından herhangi biri (LC) 'yi gerektirir (Birkhoff, 1995).

Kanıt. $(LC^* \implies LC)$: Eküslerin varlığı kabul edildiğinden yalnızca ebasların varlığının görülmesi yeterlidir. Her $a \in L$ için $\bigvee \emptyset \leq a \leq \bigvee L$ olacağından L sınırlı kafestir. $A \subseteq L$ olsun ve $B_A = \{c \in L \mid c \leq a, \forall a \in A\}$ kümesi tanımlansın. $0 \in A$ olduğundan $B_A \neq \emptyset$ 'dir. Her $c \in B_A, a \in A$ için $c \leq a$ olduğundan her $a \in A$ için $\bigvee B_A \leq a$ olup $\bigvee B_A$ A 'nın bir alt sınırıdır. b, A 'nın başka bir alt sınırı ise $b \in B_A$ olacağından $b \leq \bigvee B_A$ olur. Dolayısıyla $\bigvee B_A = \bigwedge A$ olup, her $A \subseteq L$ için $\bigwedge A$ mevcuttur.

$(LC_* \implies LC)$: Benzer biçimde gösterilir. ■

Tanım 2.1.6 $(L, \leq)$ bir kafes $K \subseteq L$ olsun. L 'deki $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemlerine göre her $a, b \in K$ için $a \vee b \in K, a \wedge b \in K$ olması sağlanıyorsa $(K, \leq)$ ikilisine $(L, \leq)$ kafesinin bir alt kafesi denir (Birkhoff, 1995).

Yukarıdaki tanımda K üzerinde verilmiş olan sıralama, $\leq$ bağıntısının $K \times K$ kümesine kısıtlanması olan $\leq|_{K \times K}$ bağıntısına eşit olmakla birlikte, herhangi bir karışıklığa neden olmayacağından $\leq$ ile gösterilmiş ve ilerleyen bölümlerde de aksi gerekmedikçe benzer kullanıma gidilmiştir.

Uyarı 2.1.1 $(L, \leq)$ bir kafes ve $K \subseteq L$ olmak üzere $(K, \leq)$ 'in, $(L, \leq)$ 'in bir alt kafesi olmayan bir kafes olması mümkündür.

Örnek 2.1.2 $L = \{0, 1, a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\leq$ sıralaması 0 ve 1 en küçük ve

en büyük öğeler olmak üzere, $a \leq c$, $b \leq c$ olacak ve a ile b karşılaştırılamayacak şekilde verilsin ve $K = \{0, 1, a, b\}$ olsun. Bu durumda hem $(L, \leq)$ hem de $(K, \leq)$ bir kafestir ancak L 'deki $\vee$ ikili işlemine göre $a, b \in K$ için $a \vee b = c \notin K$ olduğundan $(K, \leq)$, $(L, \leq)$ 'in bir alt kafesi değildir. L 'de $a \vee b = c$ iken K 'de $a \vee b = 1$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Uyarı 2.1.2 $(L, \leq)$ bir tam kafes, $(K, \leq)$ onun bir tam alt kafesi olsun. Bu durumda $\vee$ ve $\wedge$, K ve L 'de karşılıklı olarak aynı anlamlara gelmekle birlikte, K 'deki $\bigvee$ ve $\bigwedge$, L 'dekilerden farklı olabilir.

Tanım 2.1.7 X herhangi bir küme olmak ve $\mathcal{P}(X)$, X 'in bütün alt kümelerinin kümesini göstermek üzere $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun.

- (i) $X \in \tau$
- (ii) $G, H \in \tau \implies G \cap H \in \tau$
- (iii) $\{G_i \mid i \in I\} \subseteq \tau \implies \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

koşulları gerçekleşiyorsa τ 'ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.(Bourbaki, 1966).

$\bigcup_{i \in \emptyset} G_i = \emptyset$ olduğundan bir (X, τ) topolojik uzayında $\emptyset \in \tau$ olması her zaman sağlanır. Bölüm 2.3'te değinilecek olan kategori teorisinin yaklaşımına uygun olarak, topolojik uzay tanımında $X \neq \emptyset$ olması kısıtlamasına gidilmemiştir.

Örnek 2.1.3 X herhangi bir küme olsun. Bu durumda $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam kafes olur ve bu kafes için $\vee$, $\wedge$, $\bigvee$ ve $\bigwedge$ sırasıyla küme teorisindeki $\cup$, $\cap$, $\bigcup$ ve $\bigcap$ simgelerine karşılık gelir. Ayrıca τ , X üzerinde bir topoloji ise, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmasının yanında her $A, B \in \tau$ için $A \cup B \in \tau$ ve $A \cap B \in \tau$ olup $(\tau, \subseteq)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 'nin bir alt kafesidir. Bunun yanında, her $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ olduğundan $(\tau, \subseteq)$, (LC^*) koşulunu sağlar, yani bir tam kafestir. Ancak τ 'daki $\bigwedge$, $\mathcal{P}(X)$ 'teki $\bigcap$ ile aynı olmak zorunda değildir. τ üzerinde

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i \in I} A_i &= \bigvee_{i \in I} \{C \in \tau \mid C \subseteq A_i, \forall i \in I\} \\
&= \bigcup_{i \in I} \{C \in \tau \mid C \subseteq A_i, \forall i \in I\} \\
&= \bigcup_{i \in I} \left\{ C \in \tau \mid C \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \right\} = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^o
\end{aligned}$$

olup genel anlamda $\bigwedge_{i \in I} A_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^o \neq \bigcap_{i \in I} A_i$ olması mümkündür.

Tanım 2.1.8 Bir $(L, \leq)$ kafesinde

$$(L5) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad \forall a, b, c \in L$$

özellği geçerliyse $(L, \leq)$ 'e bir dağılımlı kafes denir (Birkhoff, 1995).

Önerme 2.1.3 Bir $(L, \leq)$ kafesinde

$$(L5) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad \forall a, b, c \in L$$

$$(L5') \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad \forall a, b, c \in L$$

özelliklerinin biri diğerini gerektirir (Birkhoff, 1995).

Önerme 2.1.4 Bir $(L, \leq)$ dağılımlı kafesinde herhangi sabit bir $c \in L$ için

$$c \wedge a = c \wedge b \quad \text{ve} \quad c \vee a = c \vee b$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $a = b$ 'dir (Birkhoff, 1995).

Tanım 2.1.9 $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $\otimes$, L üzerinde bir ikili işlem olsun.

$$a_1 \leq a_2 \implies a_1 \otimes b \leq a_2 \otimes b, \quad \forall a_1, a_2, b \in L$$

koşulu sağlanıyorsa $\otimes$ ikili işleminin ilk bileşene göre sıra koruduğu,

$$a_1 \leq a_2 \implies a_2 \otimes b \leq a_1 \otimes b, \quad \forall a_1, a_2, b \in L$$

koşulu sağlanıyorsa $\otimes$ ikili işleminin ilk bileşene göre sırayı tersine çevirdiği söylenir.

Benzer şekilde, $b_1 \leq b_2$ olması $a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2$ olmasını gerektiriyorsa $\otimes$ işlemine ikinci

bileşene göre sıra koruyan, $b_1 \leq b_2$ olması $a \otimes b_2 \leq a \otimes b_1$ olmasını gerektiriyorsa

$\otimes$ işlemine ikinci bileşene göre sırayı tersine çeviren denir. $\otimes$ işlemi her iki bileşene

göre de sıra koruyorsa, kısaca sıra koruyan (izoton) olduğu söylenir.

Önerme 2.1.5 Herhangi bir $(L, \leq)$ kafesindeki $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemleri sıra koruyan özelliktedir (Birkhoff, 1995).

Tanım 2.1.10 L ve X herhangi iki küme olsun. L üzerinde bir $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı, bütün $f : X \rightarrow L$ fonksiyonlarının kümesi olan L^X üzerine

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in X, \forall f, g \in L^X$$

biçiminde yükseltilir. Benzer olarak, L üzerindeki bir $\otimes$ ikili işlemi L^X üzerine

$$(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x), \quad \forall x \in X, \forall f, g \in L^X$$

tanımıyla yükseltilir ve özel olarak bir fonksiyonun L 'deki bir a sabitiyle soldan çarpımı

$$(a \otimes f)(x) = a \otimes f(x), \quad \forall x \in X, \forall f \in L^X$$

ile, sağdan çarpımı ise

$$(f \otimes a)(x) = f(x) \otimes a, \quad \forall x \in X, \forall f \in L^X$$

biçiminde tanımlanır. $(L, \leq)$ bir kafes ise $\vee$ ve $\wedge$, L^X 'e ikili işlemler olarak taşınır.

Herhangi bir $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq L^X$ alt kümesi ve her $x \in X$ için L 'de $\bigvee_{i \in I} [f_i(x)]$ ve $\bigwedge_{i \in I} [f_i(x)]$ mevcut ise $\bigvee_{i \in I} f_i$ ve $\bigwedge_{i \in I} f_i$ fonksiyonları

$$\left(\bigvee_{i \in I} f_i \right)(x) = \bigvee_{i \in I} [f_i(x)], \quad \left(\bigwedge_{i \in I} f_i \right)(x) = \bigwedge_{i \in I} [f_i(x)], \quad \forall x \in X$$

ile tanımlanırlar. $a \in L$ olmak üzere her $x \in X$ ögesini a değerine taşıyan sabit fonksiyon a_X ile gösterilir. Ayrıca, L 'nin 1 ile gösterilen bir en büyük ögesi varsa ve $A \subseteq X$ ise, her $x \in A$ için 1 ve X 'teki diğer ögeler için 0 değerini veren fonksiyon 1_A ile gösterilir ve A 'nın karakteristik fonksiyonu adını alır (Höhle ve Šostak, 1999).

L 'nin 0 ile gösterilen bir en küçük ögesi ve 1 ile gösterilen bir en büyük ögesi var olsun. 1_X yazımının hem a_X hem de 1_A gösterim tarzı altında aynı anlama geldiği ve $0_X = 1_\emptyset$ olduğu kolayca görülür. 0_X ve 1_X fonksiyonları L^X 'in sırasıyla en küçük ve en büyük ögeleri olur ve her $a \in L, f \in L^X$ için $a \otimes f = a_X \otimes f, f \otimes a = f \otimes a_X$ eşitlikleri sağlanır. Tanımdaki eşitliklere güvenilerek uygun durumlarda parantezler kaldırılıp $\bigvee_{i \in I} f_i(x)$ ve $\bigwedge_{i \in I} f_i(x)$ sadeleştirilmiş yazımları kullanılabilir.

L üzerindeki sıralama bağıntısının veya cebirsel işlemin belirlediği yapılar ve sağladıkları özellikler çoğu zaman L^X için de geçerlidir. L üzerinde bulunmasına rağmen genel olarak L^X 'e yükseltilemeyen özelliklere örnek olarak, sıralama bağıntıları için tam sıralılık, ikili işlemler için sadeleştirilebilirlik verilebilir. Bununla birlikte, bu çalışma boyunca tanıtılan yapılar için böyle bir olumsuz durum söz konusu değildir.

Önerme 2.1.6 $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme, X ve Y herhangi kümeler, $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $g \in L^Y$ ise $g \circ \varphi \in L^X$ 'tir. Ayrıca $\{g_i\}_{i \in I} \subseteq L^Y$ olmak üzere $\left(\bigvee_{i \in I} g_i \right) \circ \varphi = \bigvee_{i \in I} (g_i \circ \varphi)$ eşitliği vardır.

Kanıt. $g \in L^Y$ olması g 'nin Y 'den L 'ye bir fonksiyon olması anlamına geleceğinden $g \circ \varphi : X \rightarrow L$ olur, yani $g \circ \varphi \in L^X$ 'tir. Ayrıca her $x \in X$ için

$$\left[\left(\bigvee_{i \in I} g_i \right) \circ \varphi \right](x) = \bigvee_{i \in I} g_i(\varphi(x)) = \bigvee_{i \in I} (g_i \circ \varphi)(x)$$

olacağından $\left(\bigvee_{i \in I} g_i\right) \circ \varphi = \bigvee_{i \in I} (g_i \circ \varphi)$ eşitliği vardır. ■

Yukarıda elde edilen sonuçtan, $\left(\bigvee_{i \in I} g_i\right) \circ \varphi$ ve $\bigvee_{i \in I} (g_i \circ \varphi)$ yazımları yerine $\bigvee_{i \in I} g_i \circ \varphi$ ortak yazımının kullanılmasında herhangi bir sakınca olmadığı görülür.

2.1.1 Tam Grupoidler

Tanım 2.1.1.1 $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $\otimes$, L üzerinde sıra koruyan bir ikili işlem olmak üzere $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ üçlüsü bir kısmi sıralı grupoid olarak adlandırılır. $(L, \leq)$ kısmi saralı kümesi aynı zamanda bir tam kafes ise $\mathfrak{G}$ 'ye bir tam grupoid denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 2.1.1.1 $(L, \leq)$ bir kafes ise $\mathfrak{L} = (L, \leq, \wedge)$ üçlüsü bir kısmi sıralı grupoiddir. Özel olarak, Örnek 2.1.1'de tanımlanan gösterimler altında $\mathbf{2} = (2, \preceq, \wedge)$ üçlüsü bir tam grupoid olur.

Tanım 2.1.1.2 $\mathfrak{F} = (M, \leq', \otimes')$ en büyük ögesi $1'$ olan ve $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ en büyük ögesi 1 olan birer tam grupoid olsun.

- (i) $h(1') = 1$
- (ii) $h(m \otimes' n) = h(m) \otimes h(n)$, $\forall m, n \in M$
- (iii) $h\left(\bigvee'_{i \in I} m_i\right) = \bigvee_{i \in I} h(m_i)$, $\forall \{m_i\}_{i \in I} \subseteq M$

koşullarını sağlayan bir $h : M \rightarrow L$ dönüşümüne $\mathfrak{F}$ 'ten $\mathfrak{G}$ 'ye bir kesin tam grupoid homomorfizmi denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 2.1.10'da verilen genelleştirmeler ile birlikte bir $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidine karşılık gelen $\mathfrak{G}^X = (L^X, \leq, \otimes)$ üçlünün de bir tam grupoid olacağı görülebilir. Bu durumun genelliği aşağıdaki uyarı ile ifade edilmiştir.

Uyarı 2.1.1.1 $\mathfrak{G} = (L, \leq, *)$ bu çalışma içerisinde tanımlanacak olan tam grupoid türlerinden herhangi biri (cl-grupoid, sıkı kareköklü kuantal, kesin GL-monoid vb.) olsun. Bu durumda $\mathfrak{G}^X = (L^X, \leq, *)$ üçlüsü de aynı tam grupoid yapısına sahip olur. Bu gerçek, her tam grupoid türü için ayrı ayrı kanıtlanmayacak ve çalışma boyunca ayrıca ifade edilmeden sürekli olarak kullanılacaktır.

Örnek 2.1.1.2 X bir küme olsun ve $\mathbf{2} = (2, \preceq, \wedge)$ tam grupoidi göz önüne alınsın. X 'in her bir A alt kümesi 1_A karakteristik fonksiyonuna özdeş olarak düşündürüldüğünde, $2^X = \{f \mid f : X \rightarrow 2 \text{ fonksiyon}\}$ kümesi, X 'in bütün alt

kümelerinin kümesi olan $\mathcal{P}(X)$ 'e karşılık gelir. Üstelik her $A, B \in 2^X$ için

$$\begin{aligned} A \preceq B &\iff A(x) \preceq B(x), \forall x \in X \\ &\iff (A(x) = 1 \implies B(x) = 1), \forall x \in X \\ &\iff (x \in A \implies x \in B), \forall x \in X \\ &\iff A \subseteq B \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edildiğinde, 2^X üzerine $\mathbf{2}$ 'den gelen $\preceq$ bağıntısının, kuvvet kümesi üzerindeki alt küme olma bağıntısıyla aynı anlama geldiği görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} x \in A \wedge B &\iff (A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x) = 1 \\ &\iff A(x) = B(x) = 1 \\ &\iff x \in A \text{ ve } x \in B \\ &\iff x \in A \cap B \end{aligned}$$

olacağından $\mathbf{2}$ 'den gelen $\wedge$ işlemi de kümeler üzerindeki bilinen kesişim işlemi ile aynıdır. Ayrıca, $\mathbf{2} = (2, \preceq, \wedge)$ bir tam grupoid olduğundan $\mathbf{2}^X = (2^X, \preceq, \wedge)$ de bir tam grupoiddir.

Yukarıdaki örnekte ortaya çıkan eşitlikler dikkate alınarak çalışmanın geri kalanında, $\mathbf{2}$ ve $\mathbf{2}^X$ tam grupoidleri için tanımlanan $\preceq, \wedge$ ve Υ simgelerinin yerine sırasıyla $\subseteq, \cap$ ve $\cup$ simgeleri kullanılacaktır.

Tanım 2.1.1.3 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olmak üzere her $a \in L$ için $a \leq a \otimes 1$ ve $a \leq 1 \otimes a$ olması sağlanıyorsa $\mathfrak{G}$ 'ye bir cqm-kafes denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 2.1.1.3 Tam grupoidlerin her durumda cqm-kafes olan iki önemli türü vardır. $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun.

a) $\otimes$ işlemi için bir $e \in L$ birimi varsa her $a \in L$ için $a \leq a$ ve $e \leq 1$ olduğundan $a = a \otimes e \leq a \otimes 1$ ve $a = e \otimes a \leq 1 \otimes a$ olup $\mathfrak{G}$ bir cqm-kafes olur.

b) $\otimes$ işlemi eşgüçlü ise, yani her $a \in L$ için $a \otimes a = a$ oluyorsa, her $a \in L$ için $a = a \otimes a \leq 1 \otimes a$ ve $a = a \otimes a \leq a \otimes 1$ olması da sağlanacağından $\mathfrak{G}$ yine bir cqm-kafes olur (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 2.1.1.4 $(L, \leq)$ bir tam kafes olsun ve L üzerinde bir $\otimes$ ikili işlemi verilsin.

Her $a \in L$ ve $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, $I \neq \emptyset$ için

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \otimes a_i) \text{ ve } \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \otimes a = \bigvee_{i \in I} (a_i \otimes a)$$

koşulları sağlanıyorsa, yani $\otimes$ ikili işlemi boş olmayan bir küme üzerinden alınan eküs üzerine dağılıyorsa $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ üçlüsüne bir cl-grupoid adı verilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.1.1.1 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ cl-grupoid ise $\otimes$ işlemi sıra koruyandır.

Kanıt. $a, b_1, b_2 \in L$, $b_1 \leq b_2$ olsun. Bu durumda $b_1 \vee b_2 = b_2$ 'dir ve buradan

$$(a \otimes b_1) \vee (a \otimes b_2) = a \otimes (b_1 \vee b_2) = a \otimes b_2$$

elde edileceğinden $a \otimes b_1 \leq a \otimes b_2$ olur. L 'de $a_1 \leq a_2$ olması durumunda ise

$$(a_1 \otimes b) \vee (a_2 \otimes b) = (a_1 \vee a_2) \otimes b = a_2 \otimes b$$

yazılabileceğinden benzer şekilde $a_1 \otimes b \leq a_2 \otimes b$ elde edilir. ■

Sonuç 2.1.1.1 Her cl-gupoid bir tam grupoiddir.

Tanım 2.1.1.5 Aynı zamanda cqm-kafes olan bir cl-grupoide cl-kuasi monoid adı verilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 2.1.1.4 $\leq, \mathbb{I} = [0, 1]$ aralığı üzerindeki bilinen gerçel sayı sıralamasını gösterebilir ve $\oplus : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ ikili işlemi $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ ile verilsin. Bu durumda $(\mathbb{I}, \leq, \oplus)$ üçlününün bir cl-kuasi monoid olacağı görülebilir.

2.1.2 Kuantaller

Bir L kümesi ile bu küme üzerinde tanımlı olan ve

$$\forall x, y, z \in L \text{ için } a * (b * c) = (a * b) * c \quad (\text{Birleşme})$$

özellikliğini sağlayan bir $*$: $L \times L \rightarrow L$ ikili işleminin oluşturduğu $(L, *)$ ikilisine bir yarı grup adı verildiği hatırlanarak aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 2.1.2.1 $(L, \leq)$ bir tam kafes, $(L, *)$ bir yarı grup olsun. Her $a \in L$ ve $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ için

$$a * \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a * a_i) \text{ ve } \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) * a = \bigvee_{i \in I} (a_i * a)$$

koşulu sağlanıyorsa $Q = (L, \leq, *)$ üçlüsüne kuantal (quantale) adı verilir (Höhle, 1998).

Örnek 2.1.1.4 ile verilen $\oplus$ işlemi birleşmeli olmadığından $(\mathbb{I}, \oplus)$ yarı grup değildir. Dolayısıyla bir cl-grupoidin kuantal olması gerekmez.

İkili işlemin birleşmeli olması zorunluluğu dışında kuantallerin cl-grupoidlerden başka bir üstünlüğü, kuantal ikili işleminin cl-grupoidlerdeki dağılma özelliğine ek olarak boş küme üzerinden de dağılımlı olması gerekliliğidir. Böylece her $a \in Q$ için

$$a * 0 = a * \bigvee_{i \in \emptyset} a_i = \bigvee_{i \in \emptyset} (a * a_i) = 0$$

eşitliği yazılabilir. Benzer biçimde $0 * a = 0$ olması gerektiği de görülür (Höhle, 1998). Buna karşın Q 'nun 1 ile gösterilen en büyük öğesinin bir birim eleman gibi davranması gerekmez. Dahası, kuantal ve cqm-kafes tanımları zayıflık-güçlülük bakımından birbirleriyle karşılaştırılabilir değildir. Diğer taraftan her kuantalin aynı zamanda bir cl-grupoid olduğu, tanımların karşılaştırılmasıyla kolayca görülmektedir. Bu nedenle Önerme 2.1.1.1 kuantaller için aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir.

Sonuç 2.1.2.1 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun ise $*$ işlemi sıra koruyandır.

Bir kuantal verildiğinde $*$ işlemi dışında iyi tanımlı ve önemli olan iki tane daha ikili işlem yapı içerisinde kendiliğinden gelmektedir.

Tanım 2.1.2.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun. Her $a, b \in L$ için

$$a \rightarrow_l b = \bigvee \{x \in L \mid x * a \leq b\}$$

biçiminde tanımlanan $\rightarrow_l$ işlemine sol rezidü işlemi,

$$a \rightarrow_r b = \bigvee \{x \in L \mid a * x \leq b\}$$

ile tanımlanan $\rightarrow_r$ işlemine ise sağ rezidü işlemi denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Bu çalışma boyunca sadelik açısından $a \rightarrow_l b$ yerine $a \rightarrow b$, $a \rightarrow_r b$ yerine ise $a \dashv b$ yazılır, sol ve sağ rezidü işlemlerinin birbirine eşit olduğu durumlarda da $a \rightarrow b$ ve $a \dashv b$ 'yi aynı anda belirtmek için $a \rightarrow b$ ortak gösterimi kullanılır ve buradaki işleme çift yanlı rezidü işlemi denir. Kuantal işleminin değişmeli olması halinde rezidü işleminin çift yanlı olacağı açıktır.

Önerme 2.1.2.1 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal ve $a, b, c \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir (Höhle ve Šostak, 1999).

$$a) \ a * b \leq c \iff a \leq b \rightarrow c$$

$$b) \ a * b \leq c \iff b \leq a \dashv c$$

Kanıt. a) $a * b \leq c$ ise $a \in \{x \in L \mid x * b \leq c\}$ olur. Tanım gereği,

$$b \rightarrow c = \bigvee \{x \in L \mid x * b \leq c\}$$

olduğundan $a \leq b \rightarrow c$ 'dir.

$a \leq b \dashv c$ olması durumundaysa, $*$ işleminin sıra koruyanlığı ve eküs üzerine

dağılımlı olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
a * b &\leq (b \rightarrow c) * b \\
&= \bigvee \{x \in L \mid x * b \leq c\} * b \\
&= \bigvee \{x * b \mid x * b \leq c\} \leq c
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

b) Benzer biçimde görülür. ■

Sonuç 2.1.2.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal ise her $a, b \in L$ için $(a \rightarrow b) * a \leq b$ ve $a * (a \rightarrow b) \leq b$ olur.

Önerme 2.1.2.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olmak üzere $\rightarrow$ ve $\dashv$ ilk bileşene göre sırayı tersine çeviren ve ikinci bileşene göre sıra koruyan işlemlerdir.

Kanıt. $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in L$, $a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \leq b_2$ olsun.

Q bir kuantal ve $a_1 \leq a_2$ olduğundan her $x \in L$ için $x * a_1 \leq x * a_2$ olur. Böylece $\{x \in L \mid x * a_2 \leq b\} \subseteq \{x \in L \mid x * a_1 \leq b\}$ ve dolayısıyla $a_2 \rightarrow b \leq a_1 \rightarrow b$ olduğu görülür ve $\rightarrow$ işleminin ilk bileşene göre sırayı tersine çevirdiği sonucuna ulaşılır. Diğer yandan $b_1 \leq b_2$ olması $\{x \in L \mid x * a \leq b_1\} \subseteq \{x \in L \mid x * a \leq b_2\}$ olmasını gerektirdiğinden $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$ olup $\dashv$ ikinci bileşene göre sıra koruyandır.

Aynı sonuçlar $\dashv$ işlemi için de benzer biçimde elde edilir. ■

Tanım 2.1.2.3 $Q = (L, \leq, *)$ ve $R = (M, \leq', *')$ birer kuantal, $\varphi : L \rightarrow M$ bir fonksiyon olsun.

- (i) $\varphi(1) = 1'$
- (ii) $\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b)$, $\forall a, b \in L$
- (iii) $\varphi\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigvee'_{i \in I} \varphi(a_i)$, $\forall \{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$

koşulları sağlanıyorsa φ 'nin Q 'dan R 'ye tanımlı bir kuantal homomorfizmi olduğu söylenir (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 2.1.2.4 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun. Q 'ya

- a) Her $a \in L$ için $a * 1 \leq a$ oluyorsa sağ yanlı,
- b) Her $a \in L$ için $1 * a \leq a$ oluyorsa sol yanlı,
- c) Hem sağ yanlı, hem sol yanlı ise çift yanlı,
- d) Her $a \in L$ için $a * 1 = a$ oluyorsa kesin sağ yanlı,
- e) Her $a \in L$ için $1 * a = a$ oluyorsa kesin sol yanlı,

- f) Hem kesin sağ yanlı, hem kesin sol yanlı ise kesin çift yanlı (veya birimli),
- g) Her $a, b \in L$ için $a \leq b \iff \exists c \in L, a = b * c$ oluyorsa sağ bölünebilir,
- h) Her $a, b \in L$ için $a \leq b \iff \exists c \in L, a = c * b$ oluyorsa sol bölünebilir,
- i) Hem sağ bölünebilir, hem sol bölünebilir ise bölünebilir,
- j) Her $a, b, c \in L$ için $a * b * c = a * c * b$ oluyorsa sağ simetrik,
- k) Her $a, b, c \in L$ için $a * b * c = b * a * c$ oluyorsa sol simetrik,
- l) Her $a, b \in L$ için $a * b = b * a$ oluyorsa değişmeli,
- m) Her $a \in L$ için $a * a = a$ oluyorsa eşgüçlü

kuantal adı verilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.1.2.3 Sağ yanlı ve sağ bölünebilir bir $Q = (L, \leq, *)$ kuantalinde, her $a, b \in L$ için $a \wedge b = a * (a \rightarrow b)$ eşitliği geçerlidir (Höhle, 1998).

Kanıt. Q sağ bölünebilir olduğundan $a * (a \rightarrow b) \leq a$ 'dır. Ayrıca Sonuç 2.1.2.2 gereği $a * (a \rightarrow b) \leq b$ olup, bu ikisinden $a * (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$ eşitsizliği elde edilir.

$a \wedge b \leq a$ olduğundan sağ bölünebilirlik, $a \wedge b = a * c$ olacak biçimde bir $c \in L$ bulunabilmesini gerektirir. Ayrıca $a \wedge b \leq b$ olduğundan

$$\begin{aligned}
a * c \leq b &\implies c \leq a \rightarrow b \\
&\implies a * c \leq a * (a \rightarrow b) \\
&\implies a \wedge b \leq a * (a \rightarrow b)
\end{aligned}$$

yazılabilir ve istenilen eşitlik böylece elde edilmiş olur. ■

2.1.3 Gelfand Kuantalleri ve Heyting Cebirleri

Tanım 2.1.3.1 Sağ yanlı ve eşgüçlü bir kuantal sağ Gelfand kuantali olarak adlandırılır. Değişmeli bir sağ Gelfand kuantaline kısaca değişmeli Gelfand kuantali denir (Höhle, 1998).

Önerme 2.1.3.1 Bir kuantalin bir sağ Gelfand kuantali olması, kesin sağ yanlı ve sağ simetrik olmasını gerektirir (Höhle, 1998).

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ bir sağ Gelfand kuantali olsun.

Q sağ yanlı olduğundan her $a \in L$ için $a * 1 \leq a$ 'dır. Ayrıca eşgüçlülük ve kuantal şleminin sıra koruyanlığından $a = a * a \leq a * 1$ olup kesin sağ yanlılık anlamına gelen $a * 1 = a$ eşitliği görülmüş olur.

$*$ işleminin birleşmeli, eşgüçlü ve sıra koruyan olması ile yukarıda elde edilen kesin sağ yanlılık kullanılırsa, her $a, b, c \in L$ için

$$\begin{aligned} a * b * c &= a * (b * c) * (b * c) \\ &\leq a * 1 * c * b * 1 \\ &= a * c * b \end{aligned}$$

ve benzer şekilde $a * c * b \leq a * b * c$ olduğu görülerek sağ simetriklik tanımındaki eşitliğe ulaşılır. ■

Tanım 2.1.3.2 $(L, \leq)$ bir sınırlı kafes, $\rightarrow L$ üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in L$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $H = (L, \leq, \rightarrow)$ üçlüsüne bir Heyting cebiri denir.

- (H1) $a \rightarrow a = 1$
- (H2) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$
- (H3) $b \wedge (a \rightarrow b) = b$
- (H4) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$

$(L, \leq)$ tam kafes ise H 'ye tam Heyting cebiri denir (Gabbay ve diğ., 2009).

Örnek 2.1.3.1 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda $(\tau, \subseteq, \rightarrow)$ bir tam Heyting cebiri belirler. $G, H \in \tau$ ve $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ olmak üzere bu yapıda

$$G \wedge H = G \cap H, \quad G \vee H = G \cup H, \quad \bigvee_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad \bigwedge_{i \in I} U_i = \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right)^\circ$$

ve $G \rightarrow H = (G^c \cup H)^\circ$ olması gerektiği görülebilir.

Önerme 2.1.3.2 Bir Heyting cebirinin ikili işlemi ikinci bileşene göre sıra koruyandır.

Kanıt. $H = (L, \leq, \rightarrow)$ bir Heyting cebiri, $a, b_1, b_2 \in L$, $b_1 \leq b_2$ olsun. (H4) yardımıyla

$$a \rightarrow b_1 = a \rightarrow (b_1 \wedge b_2) = (a \rightarrow b_1) \wedge (a \rightarrow b_2) \leq a \rightarrow b_2$$

yazılabileceğinden $a \rightarrow b_1 \leq a \rightarrow b_2$ olur. ■

Teorem 2.1.3.1 Bir $(L, \leq)$ sınırlı kafesi üzerinde bir Heyting cebiri yapısı kurulabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $a, b \in L$ için $\Lambda_{a,b} = \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}$ kümesinin bir en büyük elemanının var olmasıdır (Gabbay ve diğ., 2009).

Kanıt. $(\implies) : (L, \leq, \rightarrow)$ bir Heyting cebiri ve $a, b \in L$ olsun. (H2),

$$a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b \leq b$$

olmasını gerektirdiğinden $a \rightarrow b \in \Lambda_{a,b}$ 'dir.

$x \in \Lambda_{a,b}$ olsun. $a \wedge x \leq b$ olduğundan Önerme 2.1.3.2 gereği $a \rightarrow (a \wedge x) \leq a \rightarrow b$ olur. Ayrıca sırasıyla (H4) ve (H1)'den,

$$a \rightarrow (a \wedge x) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow x) = 1 \wedge (a \rightarrow x) = a \rightarrow x$$

bulunacağından $a \rightarrow x \leq a \rightarrow b$ 'dir. Bu eşitsizlik (H3) ve sıra koruma özelliği ile birlikte yorumlandığında $x = x \wedge (a \rightarrow x) \leq x \wedge (a \rightarrow b)$ olur ve buradan $x \leq a \rightarrow b$ olduğu görülür. Sonuç olarak her $x \in \Lambda_{a,b}$ için $x \leq a \rightarrow b \in \Lambda_{a,b}$ olduğundan $\Lambda_{a,b}$ kümesinin en büyük ögesi vardır ve bu öge $a \rightarrow b$ 'ye eşittir.

($\Leftarrow$) : Her $a, b \in L$ için $\Lambda_{a,b}$ kümesinin en büyük ögesi bulunsun. Bu durumda her bir $a, b \in L$ için $a \rightarrow b = \bigvee \Lambda_{a,b}$ ile bir $\rightarrow : L \times L \rightarrow L$ ikili işlemi tanımlanabilir. $(L, \leq, \rightarrow)$ üçlüsünün bir Heyting cebiri olduğu görülürse kanıt tamamlanır.

H1) $a \in A$ olsun. $a \wedge 1 = a$ olacağından $1 \in \Lambda_{a,a}$ 'dır. $1 \in L$ 'nin ve dolayısıyla $\Lambda_{a,a}$ 'nın en büyük ögesi olduğundan $a \rightarrow a = 1$ 'dir.

H2) $a \rightarrow b$ 'nin tanımı gereği $a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$ 'dir. Aynı zamanda $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$ olduğundan $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \wedge b$ olur. Ayrıca $a \wedge b \leq b$ olduğundan $b \in \Lambda_{a,b}$ ve dolayısıyla $b \leq a \rightarrow b$ 'dir. Buradan da $a \wedge b \leq a \wedge (a \rightarrow b)$ elde edeceğinden $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$ eşitliği vardır.

H3) $a \wedge b \leq b$ olduğundan $b \in \Lambda_{a,b}$ olup $b \leq a \rightarrow b$ 'dir. Buradan $b \wedge (a \rightarrow b) = b$ olduğu görülür.

H4) $a \wedge [(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] = [a \wedge (a \rightarrow b)] \wedge (a \rightarrow c) \leq b \wedge (a \rightarrow c)$ ve (L2)'nin kullanımıyla benzer olarak $a \wedge [(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] \leq c \wedge (a \rightarrow b)$ olacağından

$$\begin{aligned} a \wedge [(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] &\leq [b \wedge (a \rightarrow c)] \wedge [c \wedge (a \rightarrow b)] \\ &= [b \wedge (a \rightarrow b)] \wedge [c \wedge (a \rightarrow c)] \\ &\leq b \wedge c \end{aligned}$$

olup $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \in \Lambda_{a,b \wedge c}$ 'dir ve dolayısıyla $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \leq a \rightarrow (b \wedge c)$ olmalıdır. Eşitsizliğin diğer yönü ise

$$a \wedge [a \rightarrow (b \wedge c)] \leq b \wedge c \leq b \implies a \rightarrow (b \wedge c) \leq a \rightarrow b$$

ve benzer biçimde $a \rightarrow (b \wedge c) \leq a \rightarrow c$ olmasından görülür. ■

Yukarıdaki teoremlerle elde edilen sonuç Heyting cebiri tanımının, “her $a, b \in L$ için $\Lambda_{a,b} = \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}$ kümesinin en büyük ögesi bulunan sınırlı kafes”

biçiminde de verilebileceği anlamına gelir. Bunun bir sonucu olarak herhangi bir sınırlı kafes üzerinde birbirinden farklı birden çok Heyting cebiri yapısı bulunamaz. Dolayısıyla bir Heyting cebirinin $\rightarrow$ ikili işlemi kafes yapısıyla belirlenebilir olup, Heyting cebirleri yalnızca özel bir sınırlı kafes türü olarak görülebilir. Aşağıdaki iki önerme tam Heyting cebirleri söz konusu olduğunda bu özel kafes türünün neye karşılık geldiğini kesin olarak anlamının yolunu açmaktadır.

Önerme 2.1.3.3 $H = (L, \leq, \rightarrow)$ bir tam Heyting cebiri olsun. Her $a \in L$ ve her $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ için $a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ 'dir (Gabbay ve diğ., 2009).

Kanıt. $I = \emptyset$ ise, $a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i = a \wedge 0 = 0 = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ eşitliği vardır. $I \neq \emptyset$ olsun. Her $i \in I$ için $a \wedge a_i \leq a$ ve $a \wedge a_i \leq a_i$ olduğundan

$$\bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \leq a \quad \text{ve} \quad \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \leq \bigvee_{i \in I} a_i$$

olur ve buradan

$$\bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \leq a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i$$

eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan, her $i \in I$ için $a \wedge a_i \leq \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ 'dir ve ayrıca $a \rightarrow \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$, Teorem 2.1.3.1 gereği L 'de

$$a \wedge \left(a \rightarrow \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \right) \leq \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$$

koşulunu gerçekleyen en küçük öğedir. Dolayısıyla her $i \in I$ için $a_i \leq a \rightarrow \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ olmalıdır. Buradan $\bigvee_{i \in I} a_i \leq a \rightarrow \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ olup (H2)'den

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i \leq a \wedge \left(a \rightarrow \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \right) = a \wedge \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i) \leq \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$$

elde edilir ve böylece eşitsizliğin diğer yönü de görülmüş olur. ■

Yukarıdaki önermede Heyting cebirinin tamlığı $\bigvee_{i \in I} a_i$ ve $\bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ öğelerinin varlığını garanti altına almak amacıyla öne sürülmüştür. Aynı işlemler tam olan veya olmayan herhangi bir Heyting cebirinde yalnızca bir ve iki elemanlı I kümeleri için tekrarlanırsa, her $a, a_1, a_2 \in L$ için

$$a \wedge (a_1 \vee a_2) = (a \wedge a_1) \vee (a \wedge a_2)$$

olacağı görülür. Dolayısıyla her Heyting cebiri bir dağılımlı kafes üzerinde kuruludur.

$a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$ eşitliğinin geçerli olduğu tam kafeslere çatı (frame) adı verilir. Önerme 2.1.3.3'ten her tam Heyting cebirinin bir çatı olduğu görülür.

Aksine, her çatıda

$$a \wedge \bigvee \{x \in L \mid a \wedge x \leq b\} = \bigvee \{a \wedge x \in L \mid a \wedge x \leq b\}$$

eşitliği sağlanacağından, Teorem 2.1.3.1 her çatının bir Heyting cebiri yapısı vermesini gerektirir. Üstelik bu teoremin kanıtından, bu yapının tek türlü olarak belirlendiği anlaşılmaktadır. Böylece tam Heyting cebirleri ve çatıların denk yapılar olduğu sonucuna varılır. Bu nedenle bazı kaynaklarda tam Heyting cebirleri

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge a_i)$$

eşitliğinin geçerli olduğu tam kafesler olarak tanımlanırlar (Höhle, 2007).

Önerme 2.1.3.4 Bir $Q = (L, \leq, *)$ sağ Gelfand kuantalinin değişmeli olması için gerek ve yeter koşul $* = \wedge$ olmasıdır (Höhle, 1998).

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ bir değişmeli Gelfand kuantali ise her $a, b \in L$ için

$$a * b \leq a * 1 = a \text{ ve } a * b \leq 1 * b = b * 1 = b$$

olacağından $a * b \leq a \wedge b$ olur. $a \wedge b \leq a$ ve $a \wedge b \leq b$ olmasından da

$$a \wedge b = (a \wedge b) * (a \wedge b) \leq a * b$$

elde edilir. Böylece her $a, b \in L$ için $a * b = a \wedge b$ olup $* = \wedge$ 'dir.

Diğer taraftan $Q = (L, \leq, *)$ bir sağ Gelfand kuantali ve $* = \wedge$ iken Q 'nun değişmeli olacağı (L2)'den görülür. ■

Bu önermeye göre değişmeli Gelfand kuantalleri tam olarak $* = \wedge$ olacak biçimdeki Gelfand kuantalleridir. Bu nedenle, bir değişmeli Gelfand kuantalinden bahsederken kafes yapısı tarafından tek türlü olarak belirlendiği bilinen $*$ işlemine ayrıca vurgu yapmaya gerek yoktur.

Teorem 2.1.3.2 $(L, \leq)$ bir kafes olsun. $Q = (L, \leq, \wedge)$ üçlüsünün bir değişmeli Gelfand kuantali olması için gerek ve yeter koşul $(L, \leq)$ 'in bir tam Heyting cebiri yapısı taşımasıdır (Höhle, 1998).

Kanıt. $(\implies)$: $Q = (L, \leq, \wedge)$ değişmeli Gelfand kuantali olsun. Değişmelilikten dolayı Q 'da çift yanlı rezidü işlemi vardır ve bu işlemin tanımı, her $a, b \in L$ için

$$x \in \Lambda_{a,b} \iff a \wedge x \leq b \iff x \leq a \rightarrow b$$

olmasını gerektirir. Böylece $a \rightarrow b = \bigvee \Lambda_{a,b}$ olup $(L, \leq, \rightarrow)$ bir Heyting cebiridir ve kuantaller tam kafes üzerine kurulduklarından bu Heyting cebiri tamdır.

$(\Longleftarrow)$: $H = (L, \leq, \rightarrow)$ bir tam Heyting cebiri olsun. H tam olduğundan $(L, \leq)$ tam kafestir ve (L3)'ten dolayı $(L, \wedge)$ bir yarı gruptur. Böylece $Q = (L, \leq, \wedge)$ 'nin

bir kuantal olması (L2) ve Önerme 2.1.3.3'ten elde edilir. Bu kuantalin sağ yanlı, eşgüçlü ve değişmeli olması $\wedge$ işleminin özelliklerinin anlık bir sonucudur. Dolayısıyla Q bir değişmeli Gelfand kuantalidir. ■

Teorem 2.1.3.1 bir tam kafes üzerinde en çok bir Heyting cebiri yapısı olmasını gerektirir. Buna benzer olarak Önerme 2.1.3.4'ten, bir tam kafes üzerinde en çok bir değişmeli Gelfand kuantali yapısı bulunabileceği sonucuna varılabilir. Buna göre yukarıdaki teoremi tam Heyting cebiri ve değişmeli Gelfand kuantali kavramlarının birbirine denk olduğu biçiminde yorumlamak mümkündür.

2.1.4 GL-Monoidler ve GL-Kuantaller

Tanım 2.1.4.1 Değişmeli, kesin çift yanlı, bölünebilir bir kuantale GL-monoid adı verilir (Pu ve Zhang, 2011).

Her GL-monoidin aynı zamanda bir cl-kuasi monoid olacağı tanımdan kolayca görülür.

Örnek 2.1.4.1 $* = \wedge$ eşitliğinin geçerli olduğu her $Q = (L, \leq, \wedge)$ kuantali bir GL-monoiddir. Bu gerçek, kafes içerisindeki $\wedge$ işleminin $\forall a, b \in L$ için $a \wedge b = b \wedge a$, $\forall a \in L$ için $a \wedge 1 = a$, $1 \wedge a = a$ ve $a \leq b \Leftrightarrow a = b \wedge a$ özelliklerini sağlamasından görülür.

Önerme 2.1.4.1 Her değişmeli Gelfand kuantali (tam Heyting cebiri) aynı zamanda bir GL-monoiddir (Höhle, 1998).

Kanıt. Önerme 2.1.3.4 ve Örnek 2.1.4.1'in açık bir sonucudur. ■

Tanım 2.1.4.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal, $M \subseteq L$, $1 \in M$ olsun. Her $a, b \in M$ için $a * b \in M$ ve her $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq M$ için $\bigvee_{i \in I} a_i \in M$ oluyorsa $R = (M, \leq, *)$ 'a Q 'nun bir alt kuantali denir (Höhle ve Šostak, 1999).

$Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal ve $R = (M, \leq, *)$ Q 'nun bir alt kuantali olsun. Bu durumda M kümesi $*$ ve herhangi sayıdaki $\vee$ işlemlerine göre kapalıdır. Dolayısıyla Teorem 2.1.1 gereği $(M, \leq)$ bir tam kafestir. Ancak L 'deki ebas işlemi $\wedge$ ile, M 'deki ebas işlemi $\wedge^R$ arasında uyumsuzluk olabilir.

Örnek 2.1.4.2 X herhangi bir küme olmak üzere $Q = (\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap)$ bir kuantaldır ve $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, X üzerinde bir topoloji olmak üzere Örnek 2.1.3.1'deki $H = (\tau, \subseteq, \rightarrow)$ Heyting cebirine denk olan $R = (\tau, \subseteq, \cap)$ değişmeli Gelfand kuantali, açık kümelerin

sağladığı özelliklerden dolayı Q 'nun bir alt kuantalidir. Ancak buradaki durum Örnek 2.1.3 ile karşılaştırıldığında, Q ve R üzerindeki herhangi sayıda ebas alma işlemlerinin birbirinden farklı oldukları görülür.

$Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun. Q eşgüçlü veya (kesin) sağ, sol veya çift yanlı olmasa bile L 'de bu özelliklere ait eşitlikleri sağlayan elemanlar bulunabilir. Böylece bir kuantalde tek bir elemanın eşgüçlülüğünden veya (kesin) sağ / sol / çift yanlılığından bahsetmek anlamlı olur.

Önerme 2.1.4.2 $Q = (L, \leq, *)$ kesin sağ yanlı, sağ simetrik bir kuantal olsun. $S(L) = \{1 * x \mid x \in L\}$ ile verilen küme, L 'deki bütün kesin çift yanlı elemanlarının kümesidir ve $S(Q) = (S(L), \leq, *)$, Q 'nun bir alt kuantalidir. Ayrıca, her $a \in L$ için $j(a) = 1 * a$ ile tanımlanan $j : Q \rightarrow S(Q)$ dönüşümü bir kuantal homomorfizmi olur (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $a \in L$ kesin çift yanlı ise $a = 1 * a$ olacağından $a \in S(L)$ 'dir. $a \in S(L)$ olsun. Bu durumda $a = 1 * c$ olacak biçimde bir $c \in L$ vardır. Q kesin sağ yanlı olduğundan a kesin sağ yanlıdır. a 'nın kesin sol yanlılığı ise $1 \in L$ ögesinin kesin sağ yanlılığının kullanılmasıyla

$$1 * a = 1 * (1 * c) = (1 * 1) * c = 1 * c = a$$

biçiminde elde edilir. Dolayısıyla $S(L)$, L 'deki bütün çift yanlı elemanların kümesidir.

Kesin sağ yanlılık $1 * 1 = 1$ olmasını gerektirdiğinden $1 \in S(L)$ 'dir. $a, b \in S(L)$ olsun. $a = 1 * c$, $b = 1 * d$ olacak biçimde $c, d \in L$ vardır. Buradan

$$1 * (a * b) = 1 * [(1 * c) * (1 * d)] = [(1 * 1) * c] * (1 * d) = a * b$$

olduğu görülebilir olup $a * b \in S(L)$ 'dir. $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq S(L)$ olsun. $I = \emptyset$ durumu açıktır. $I \neq \emptyset$ ise her bir $i \in I$ için $a_i = 1 * c_i$ olacak biçimde birer $c_i \in L$ bulunabilir. Kuantale özgü dağılma kuralı ve $*$ işleminin birleşmeliliği kullanılırsa buradan

$$1 * \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee_{i \in I} (1 * a_i) = \bigvee_{i \in I} (1 * 1 * c_i) = \bigvee_{i \in I} (1 * c_i) = \bigvee_{i \in I} a_i$$

elde edilir. Sonuç olarak $S(Q)$, Q 'nun bir alt kuantalidir.

j 'nin kuantal homomorfizmi olması, $S(Q)$ 'nun alt kuantal olmasına oldukça benzer bir biçimde gösterilir. ■

Bundan sonra bir $Q = (L, \leq, *)$ kuantali verildiğinde $S(Q)$, Önerme 2.1.4.2'nin

ifadesinde tanıtılan $(S(L), \leq, *)$ alt kuantalini gösterecektir.

Tanım 2.1.4.3 Aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $Q = (L, \leq, *)$ kesin sağ yanlı, sağ simetrik kuantaline bir sağ genelleştirilmiş mantık kuantali veya kısaca bir sağ GL-kuantal denir (Höhle, 1998).

$$(GL1) \quad \text{Her } a \in L \text{ için } (a \rightarrow a) * a = a \text{ 'dır.}$$

$$(GL2) \quad S(Q) \text{ alt kuantali bir GL-monoiddir.}$$

Önerme 2.1.4.3 Her GL-monoid bir sağ GL-kuantaldır (Höhle, 1998).

Kanıt. $G = (L, \leq, *)$ bir GL-monoid, yani değişmeli, kesin çift yanlı, bölünebilir bir kuantal olsun. G 'nin kesin sağ yanlılığı, kesin çift yanlılıktan, sağ simetrikliği de değişmeli olmasından gelir. Ayrıca G kesin çift yanlı olduğundan $S(G) = G$ olup (GL2) de hemen görülür.

$a \in L$ olsun. Kesin çift yanlılıktan $1 * a = a$ olup $1 \in \{x \in L \mid x * a \leq a\}$ 'dır. Böylece

$$(a \rightarrow a) * a = \bigvee \{x \in L \mid x * a \leq a\} * a = 1 * a = a$$

elde edilir ve istenen gösterilmiş olur. ■

Önerme 2.1.4.4 Her sağ Gelfand kuantali bir sağ GL-kuantaldır (Höhle, 1998).

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ bir sağ Gelfand kuantali olsun. Q 'nun kesin sağ yanlılığı ve sağ simetrikliği Önerme 2.1.3.1'den görülür.

$a \in L$ olsun. Bu durumda,

$$(a \rightarrow a) * a = \bigvee \{x \in L \mid x * a \leq a\} * a \leq a$$

olması kuantale özgü dağılma özelliğinin sonucudur. Ayrıca sağ Gelfand kuantalının eşgüçlülüğünden dolayı $a \in \{x \in L \mid x * a \leq a\}$ olacağından

$$a = a * a \leq \bigvee \{x \in L \mid x * a \leq a\} * a = (a \rightarrow a) * a$$

'dır. Böylece (GL1) elde edilmiş olur.

Q 'nun sağ yanlılık ve eşgüçlülük özelliklerinin $S(Q)$ alt kuantaline de kalacağına dikkat edilirse, $S(Q)$ 'nun da bir sağ Gelfand kuantali olduğu görülür. $S(Q)$ tanımı gereği kesin çift yanlı olduğundan simetriklikten her $a, b \in S(L)$ için

$$a * b = 1 * a * b = 1 * b * a = b * a$$

olduğu görülür. Böylece $S(Q)$ bir değişmeli Gelfand kuantalidir ve istenen sonuç Önerme 2.1.4.1 ve Önerme 2.1.4.3'ten elde edilir. ■

2.1.5 Kareköklü Kuantaller

Bir $Q = (L, \leq, *)$ kuantalinde her bir $a \in L$ için $a^1 = a$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ olmak üzere $a^n = a^{n-1} * a$ kısaltmaları kullanılır.

Tanım 2.1.5.1 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun.

$$(S1) \quad \text{Her } a \in L \text{ için } [S(a)]^2 = a$$

$$(S2) \quad a, b \in L \text{ ve } b^2 \leq a \text{ ise } b \leq S(a)$$

koşulları sağlanacak biçimde bir $S : L \rightarrow L$ dönüşümü varsa Q 'ya bir kareköklü kuantal denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.1.5.1 $Q = (L, \leq, *)$ bir kareköklü kuantal ise (S1) ve (S2) koşullarını gerçekleyen bir tek $S : L \rightarrow L$ fonksiyonu vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. Q kareköklü bir kuantal olduğundan böyle bir fonksiyon vardır.

$S_1 : L \rightarrow L$ ve $S_2 : L \rightarrow L$ (S1) ve (S2) koşulunu gerçekleyen iki fonksiyon olsun. S_1 için (S1), S_2 için (S2) koşulu ele alınırsa, her $a \in L$ için $[S_1(a)]^2 = a \leq a$ olmasından $S_1(a) \leq S_2(a)$ elde edilir. Benzer şekilde S_2 için (S1), S_1 için (S2) ele alınarak eşitsizliğin diğer yönü de elde edilir ve $S_1 = S_2$ olduğu bulunur. ■

Bu önermeye göre kareköklülük varsa, kuantal yapısının içinden tek türlü olarak gelen bir nitelik olup karekökleri veren S dönüşümünün kuantal yapısına eklenmesi gereksizdir. Bu nedenle, herhangi bir kareköklü kuantal verildiğinde S dönüşümüne ayrıca vurgu yapılmaz ve bir $a \in L$ ögesinin karekökü olarak adlandırılan $S(a) \in L$ ögesi çoğu zaman $a^{1/2}$ veya $\sqrt{a}$ ile gösterilir. Gerekli durumlarda

$$a^{2^{-0}} = a \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a^{2^{-(n+1)}} = \sqrt{a^{2^{-n}}}$$

kısaltmaları kullanılır.

Örnek 2.1.5.1 Her eşgüçlü kuantal, $b^2 = a \iff b = a$ eşitliği geçerli olacağından dolayı kareköklüdür ve kafesin her a ögesi için $\sqrt{a} = a$ 'dır. Özel olarak bu durum, tanım gereği eşgüçlü olan sağ Gelfand kuantallerinin tümü için geçerlidir.

Örnek 2.1.5.2 $\mathbb{I} = [0, 1]$ aralığı üzerinde tanımlı, birimi 1 olan birleşmeli, değişmeli ve bileşenlerine göre artan bir işleme üçgensel norm veya kısaca t-norm adı verilir. $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ 'dan $\mathbb{I}$ 'ya tanımlı sürekli bir fonksiyona karşılık gelen t-normlar ise sürekli t-norm adını alır (Lai ve Zhang, 2006). Her sürekli t-norm $\mathbb{I}$ aralığı üzerinde, alışılmış sıralamayla birlikte verilen bir kareköklü kuantal yapısı belirler. Aşağıda, bu biçimde ortaya çıkan üç temel kuantal, kendilerine karşılık gelen karekök formülleriyle

birlikte verilmektedir (Höhle ve Šostak, 1999).

a) $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ olsun. Bu durumda Q bir eşgüçlü kuantal olacağından $\mathbb{I}$ 'daki her bir öğenin karekökü kendisine eşit olur.

b) $\cdot$ adi çarpma işlemini göstermek üzere $P = (\mathbb{I}, \leq, \cdot)$ olsun. Bu durumda P 'ye göre kuantal karekökü $\mathbb{I}$ üzerindeki adi cebirsel kareköke denk düşer.

c) $*$ işlemi her $a, b \in \mathbb{I}$ için $a * b = (a + b - 1) \vee 0$ biçiminde verilsin. Bu durumda $T = (\mathbb{I}, \leq, *)$ kuantalindeki karekök dönüşümü her $a \in \mathbb{I}$ için $\sqrt{a} = \frac{a+1}{2}$ biçiminde tanımlı olur.

Önerme 2.1.5.2 Bir kareköklü kuantalde $a \leq b$ ise $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ 'dir.

Kanıt. $a \leq b$ olsun. Bu durumda (S1) $(\sqrt{a})^2 = a \leq b$ olmasını gerektirir ve (S2)'den $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ elde edilir. ■

Önerme 2.1.5.3 $Q = (L, \leq, *)$ bir kuantal olsun. Q 'nun kareköklü olması için gerek ve yeter şart

- (i) Her $a \in L$ için $a = b^2$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.
- (ii) Her $a, b \in L$ için $a * b \leq a^2 \vee b^2$

koşullarının sağlanmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: Q kareköklü olsun. Her bir $a \in L$ için $b = \sqrt{a}$ seçilerek (i) koşulu sağlanmış olur.

$a, b \in L$ olsun. $a^2 \leq a^2 \vee b^2$ olduğundan $a \leq \sqrt{a^2 \vee b^2}$ 'dir. Benzer şekilde $b \leq \sqrt{a^2 \vee b^2}$ olur. Bu ikisinden

$$a * b \leq \sqrt{a^2 \vee b^2} * \sqrt{a^2 \vee b^2} = a^2 \vee b^2$$

elde edilir.

$(\Longleftarrow)$: Her $a \in L$ için $R_a = \{x \in L \mid x^2 \leq a\}$ kümesi tanımlansın ve $S : L \rightarrow L$ dönüşümü $S(a) = \bigvee_{x \in R_a} x$ ile verilsin. Bu durumda $b^2 \leq a$ olması $b \in R_a$ olmasını, $b \in R_a$ olması da $b \leq S(a)$ olmasını gerektireceğinden (S2) hemen görülür.

$a \in L$ olsun. (i) koşulu $b^2 = a$ olacak biçimde bir $b \in L$ öğesinin varlığını gerektirir. Daha önce elde edilen (S2) gereği $b \leq S(a)$ olacağından $a = b^2 \leq S(a)^2$ 'dir. Diğer taraftan (kısalık için dağılmalarla ilgili gereksiz parantezler yazılmadan) aşağıdaki işlemler yapılırsa eşitsizliğin diğer yönü de elde edilir:

$$S(a)^2 = S(a) * \bigvee_{x \in R_a} x = \bigvee_{x \in R_a} S(a) * x = \bigvee_{x \in R_a} \bigvee_{y \in R_a} y * x$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{x \in R_a} \bigvee_{y \in R_a} y^2 \vee x^2 = \bigvee_{x \in R_a} \left(\bigvee_{y \in R_a} y^2 \right) \vee x^2 \\
&\leq \bigvee_{x \in R_a} a \vee x^2 = a \vee \bigvee_{x \in R_a} x^2 \leq a \vee a = a
\end{aligned}$$

Böylece (S1) de görülmüş olur. ■

Tanım 2.1.5.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir kareköklü kuantal olsun.

$$(S3) \quad \text{Her } a, b \in L \text{ için } \sqrt{a * b} = \left(\sqrt{a} * \sqrt{b} \right) \vee \sqrt{0}$$

oluyorsa Q 'ya bir sıkı (tight) kareköklü kuantal denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 2.1.5.3 Örnek 2.1.5.2'de verilen kuantallerin hepsi sıkı kareköklüdür.

Örnek 2.1.5.4 $\mathbb{I}$ üzerindeki $*$ işlemi

$$a * b = \begin{cases} (a + b - 1) \vee \frac{1}{2}, & a, b \geq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ (a + b - \frac{1}{2}) \vee 0, & a, b \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \\ a \wedge b, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda $Q = (\mathbb{I}, \leq, *)$, kareköklerin

$$\sqrt{a} = \begin{cases} \frac{a+1}{2}, & \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{a+\frac{1}{2}}{2}, & 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ ise} \end{cases}$$

kuralına göre ortaya çıktığı bir kareköklü kuantal olur. Ancak, örneğin $a = \frac{5}{8}, b = \frac{3}{4}$ öğeleri için (S3) sağlanmadığından Q sıkı kareköklü değildir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.1.5.4 $Q = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü kuantal, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir (Höhle ve Šostak, 1999).

- a) $\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} * \dots * \sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_1 * a_2 * \dots * a_n}$
- b) $(a_1 * \dots * a_{n-1})^{2^{-n}} * (a_n)^{2^{-n}} \leq (a_1 * \dots * a_{n-1} * a_n)^{2^{-n}}$

Kanıt. a) $n = 2$ için eşitsizlik (S3)'ten direkt olarak

$$\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} \leq (\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2}) \vee \sqrt{0} = \sqrt{a_1 * a_2}$$

biçiminde görülür.

$\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} * \dots * \sqrt{a_n} \leq \sqrt{a_1 * a_2 * \dots * a_n}$ olduğu varsayalım. $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$ olmak üzere bu varsayıma $n = 2$ için elde edilen sonucun uygulanmasıyla, kuantal işleminin birleşmeliliği ve sıra koruyanlılığından

$$\begin{aligned}
\sqrt{a_1} * \dots * \sqrt{a_n} * \sqrt{a_{n+1}} &\leq \sqrt{a_1 * a_2 * \dots * a_n} * \sqrt{a_{n+1}} \\
&\leq \sqrt{a_1 * a_2 * \dots * a_n * a_{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

b) $n = 2$ durumundaki $\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} \leq \sqrt{a_1 * a_2}$ eşitsizliği (a)'dan görülür.

$n \geq 2$ ve her $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ için

$$(a_1 * \dots * a_{n-1})^{2^{-n}} * (a_n)^{2^{-n}} \leq (a_1 * \dots * a_{n-1} * a_n)^{2^{-n}}$$

olduğu varsayalım.

$a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in L$ $n = 2$ için elde edilen sonucun, tümevarım varsayımının ve karekökün sıra korumasının sonucu olarak

$$\begin{aligned} (a_1 * \dots * a_n)^{2^{-(n+1)}} * (a_{n+1})^{2^{-(n+1)}} &= \sqrt{(a_1 * \dots * a_n)^{2^{-n}} * (a_{n+1})^{2^{-n}}} \\ &= \sqrt{(a_1 * \dots * a_n)^{2^{-n}} * (a_{n+1})^{2^{-n}}} \\ &= \sqrt{((a_1 * a_2) * \dots * a_n)^{2^{-n}} * (a_{n+1})^{2^{-n}}} \\ &\leq \sqrt{((a_1 * a_2) * \dots * a_n * a_{n+1})^{2^{-n}}} \\ &= (a_1 * \dots * a_n * a_{n+1})^{2^{-n}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Önerme 2.1.5.5 $Q = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü kuantal ise her $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, $I \neq \emptyset$ için $\sqrt{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}$ 'dir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ sıkı kareköklü kuantal, $I \neq \emptyset$, $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ olsun. $c = \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}$ olmak üzere Önerme 2.1.5.3'teki (ii) özelliğinin de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} c^2 &= c * \left(\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \right) = \bigvee_{i \in I} (c * \sqrt{a_i}) \\ &= \bigvee_{i \in I} \left(\left(\bigvee_{j \in I} \sqrt{a_j} \right) * \sqrt{a_i} \right) = \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} (\sqrt{a_j} * \sqrt{a_i}) \right) \\ &\leq \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} (\sqrt{a_j}^2 \vee \sqrt{a_i}^2) \right) = \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} (a_j \vee a_i) \right) \\ &= \bigvee_{i \in I} \left(\left(\bigvee_{j \in I} a_j \right) \vee a_i \right) = \left(\bigvee_{j \in I} a_j \right) \vee \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) = \bigvee_{i \in I} a_i \end{aligned}$$

olup $\bigvee_{i \in I} a_i = \left(\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \right) * \left(\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \right)$ eşitliği vardır. Her iki tarafın karekökünün alınıp (S3)'ün uygulanmasıyla

$$\sqrt{\bigvee_{i \in I} a_i} = \left(\sqrt{\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}} * \sqrt{\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}} \right) \vee \sqrt{0} = \left(\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \right) \vee \sqrt{0}$$

elde edilir. Ancak her $i \in I$ için $0 \leq a_i$ olduğundan $\sqrt{0} \leq \sqrt{a_i}$ 'dir ve $I \neq \emptyset$ olmasından $\sqrt{0} \leq \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \implies \sqrt{\bigvee_{i \in I} a_i} = \left(\bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} \right) \vee \sqrt{0} = \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}$ bulunur. ■

Önerme 2.1.5.6 $Q = (L, \leq, *)$ sıkı kareköklü ve değişmeli bir kuantal olsun. Bu durumda her $a, b \in L$ için $\sqrt{a \rightarrow b} = \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}$ 'dir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $a, b \in L$ olsun.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right)^2 * a &= \left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right) * \left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right) * \sqrt{a} * \sqrt{a} \\ &= \left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right) * \sqrt{a} * \left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right) * \sqrt{a} \\ &\leq \sqrt{b} * \sqrt{b} = b \end{aligned}$$

olduğundan $\left(\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \right)^2 \leq a \rightarrow b$ 'dir. Bu eşitsizliğe (S2)'nin uygulanmasıyla $\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b} \leq \sqrt{a \rightarrow b}$ elde edilir.

$(a \rightarrow b) * a \leq b$ olduğundan Önerme 2.1.5.2 gereği $\sqrt{(a \rightarrow b) * a} \leq \sqrt{b}$ olur. (S3)

$\sqrt{(a \rightarrow b) * a} = \left(\sqrt{a \rightarrow b} * \sqrt{a} \right) \vee \sqrt{0}$ olmasını gerektirdiğinden

$$\sqrt{a \rightarrow b} * \sqrt{a} \leq \left(\sqrt{a \rightarrow b} * \sqrt{a} \right) \vee \sqrt{0} \leq \sqrt{b}$$

'dir. Bu ise $\sqrt{a \rightarrow b} \leq \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{b}$ olması anlamına gelir. ■

Tanım 2.1.5.3 $Q = (L, \leq, *)$ bir kareköklü kuantal olmak üzere her $a, b \in L$ için $a \otimes b = \sqrt{a} * \sqrt{b}$ biçiminde tanımlanan L üzerindeki $\otimes$ işlemine monoid ortalama operatörü adı verilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Monoid ortalama operatörü aşağıdaki önermede sıralanan koşullar yardımıyla aksiyomatik olarak belirlenebilir.

Önerme 2.1.5.7 (a) ve (b) koşulları birbirine denktir (Höhle ve Šostak, 1999).

a) Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) $(L, \leq, \otimes)$ bir cqm-kafestir.
- (ii) $(L, \leq, *)$ bir kuantaldır.
- (iii) Her $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ için $(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) \leq (a_1 * a_2) \otimes (b_1 * b_2)$
- (iv) Her $a, b \in L$ için $(1 \otimes a) * (1 \otimes b) = a \otimes b$
- (v) Her $a \in L$ için $(1 \otimes a) * 1 = 1 \otimes a$
- (vi) Her $a \in L$ için $a \otimes a = a$

b) $(L, \leq, *)$ bir kesin çift yanlı, değişmeli, kareköklü kuantaldır ve $\otimes = \circledast$ 'dir.

Kanıt. (a $\implies$ b) : $a \in L$ olsun. (vi) ve (iv)'ün kullanılmasıyla

$$1 * (1 \otimes a) = (1 \otimes 1) * (1 \otimes a) = (1 \otimes a)$$

olduğu görülür. Ayrıca (v)'ten $(1 \otimes a) * 1 = 1 \otimes a$ olduğundan $1 \otimes a$ ögesi kesin çift yanlıdır. Bundan yararlanılarak her $a \in L$ için,

$$a * 1 = (a \otimes a) * 1 = (1 \otimes a) * (1 \otimes a) * 1 = (1 \otimes a) * (1 \otimes a) = a \otimes a = a,$$

$$1 * a = 1 * (a \otimes a) = 1 * (1 \otimes a) * (1 \otimes a) = (1 \otimes a) * (1 \otimes a) = a \otimes a = a$$

elde edilir. Dolayısıyla $(L, \leq, *)$ kuantali kesin çift yanlıdır.

Her $a \in L$ için $a \otimes 1 = (1 \otimes a) * (1 \otimes 1) = (1 \otimes a) * 1 = 1 \otimes a$ olduğu, $(L, \leq, *)$ kuantalinin kesin çift yanlılığı ve (i) – (vi) arasındaki özelliklerin kullanılmasıyla her $a, b \in L$ için

$$\begin{aligned} a * b &= (a \otimes a) * (b \otimes b) \\ &= (1 \otimes a) * (1 \otimes a) * (1 \otimes b) * (1 \otimes b) = (1 \otimes a) * (1 \otimes a) * (b \otimes 1) * (1 \otimes b) \\ &\leq (1 \otimes a) * [(1 * b) \otimes (a * 1)] * (1 \otimes b) = (1 \otimes a) * (b \otimes a) * (1 \otimes b) \\ &= (1 \otimes a) * (1 \otimes b) * (1 \otimes a) * (1 \otimes b) = (1 \otimes a) * (b \otimes 1) * (1 \otimes a) * (b \otimes 1) \\ &\leq [(1 * b) \otimes (a * 1)] * [(1 * b) \otimes (a * 1)] = (b \otimes a) * (b \otimes a) \\ &= (1 \otimes b) * (1 \otimes a) * (1 \otimes b) * (1 \otimes a) = (1 \otimes b) * (1 \otimes a) * (b \otimes 1) * (1 \otimes a) \\ &\leq (1 \otimes b) * [(1 * b) \otimes (a * 1)] * (1 \otimes a) = (1 \otimes b) * (b \otimes a) * (1 \otimes a) \\ &= (1 \otimes b) * (1 \otimes b) * (1 \otimes a) * (1 \otimes a) = (b \otimes b) * (a \otimes a) \\ &= b * a \end{aligned}$$

olduğu görülür. a ile b 'nin yeri değiştirilerek aynı işlemlerin tekrarıyla $b * a \leq a * b$ olduğu da elde edilir ve buradan $(L, \leq, *)$ kuantalinin değişmeli olduğu sonucuna varılır.

$S : L \rightarrow L$ fonksiyonu her $a \in L$ için $S(a) = 1 \otimes a$ olacak biçimde tanımlansın.

Her $a \in L$ için

$$S(a)^2 = (1 \otimes a) * (1 \otimes a) = a \otimes a = a$$

olup (S1) koşulu sağlanır. $a, b \in L$ ve $b^2 \leq a$ olması durumunda ise,

$$b = b \otimes b = (1 \otimes b) * (1 \otimes b) \leq (1 * 1) \otimes (b * b) = 1 \otimes b^2 \leq 1 \otimes a = S(a)$$

olup (S2) de sağlanır, yani $(L, \leq, *)$ kuantali kareköklüdür ve her bir $a \in L$ ögesi için $\sqrt{a} = 1 \otimes a$ şeklindedir. Ayrıca her $a, b \in L$ için

$$a \otimes b = \sqrt{a} * \sqrt{b} = (1 \otimes a) * (1 \otimes b) = a \otimes b$$

eşitliği geçerli olduğundan $\otimes = *$ olur.

$(b \implies a) : (L, \leq, *)$ kesin çift yanlı, değişmeli ve kareköklü bir kuantal ve $\otimes = \circledast$ olsun.

i) $(L, \leq, *)$ bir kuantal olduğundan $(L, \leq)$ bir tam kafestir. $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ olmak üzere $a_1 \leq b_1$ ve $a_2 \leq b_2$ ise, Sonuç 2.1.2.1 ve Önerme 2.1.5.2 yardımıyla

$$a_1 \otimes a_2 = a_1 \circledast a_2 = \sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} \leq \sqrt{b_1} * \sqrt{b_2} = b_1 \circledast b_2 = b_1 \otimes b_2$$

elde edilir ve $(L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olur.

$a \in L$ olsun. $(L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid ve $a \leq 1$ olduğundan $a \otimes a \leq 1 \otimes a$ ve $a \otimes a \leq a \otimes 1$ 'dir ve $a \otimes a = a \circledast a = \sqrt{a} * \sqrt{a} = a$ olmasından $a \leq 1 \circledast a$ ve $a \leq a \circledast 1$ elde edilir. Böylece $(L, \leq, \otimes)$ üçlüsü bir cqm-kafes olur.

ii) $(L, \leq, *)$ 'ın bir kuantal olduğu (b)'de verilmiştir.

iii) $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$ olsun. $(L, \leq, *)$ 'ın değişmeliliği

$$(\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2})^2 = \sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} * \sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} = \sqrt{a_1} * \sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} * \sqrt{a_2} = a_1 * a_2$$

olmasını gerektirdiğinden (S2)'den $\sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} \leq \sqrt{a_1 * a_2}$ elde edilir. Benzer şekilde $\sqrt{b_1} * \sqrt{b_2} \leq \sqrt{b_1 * b_2}$ olacağı da kullanılırsa

$$\begin{aligned} (a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) &= (a_1 \circledast b_1) * (a_2 \circledast b_2) \\ &= \sqrt{a_1} * \sqrt{b_1} * \sqrt{a_2} * \sqrt{b_2} = \sqrt{a_1} * \sqrt{a_2} * \sqrt{b_1} * \sqrt{b_2} \\ &\leq \sqrt{a_1 * a_2} * \sqrt{b_1 * b_2} = (a_1 * a_2) \circledast (b_1 * b_2) \\ &= (a_1 * a_2) \otimes (b_1 * b_2) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

iv) $a, b \in L$ olsun. $(L, \leq, *)$ 'ın kesin çift yanlılığına ve $\sqrt{1} = 1$ olacağına dikkat edilirse istenen eşitlik

$$\begin{aligned} (1 \otimes a) * (1 \otimes b) &= (1 \circledast a) * (1 \circledast b) \\ &= \sqrt{1} * \sqrt{a} * \sqrt{1} * \sqrt{b} = 1 * \sqrt{a} * 1 * \sqrt{b} \\ &= \sqrt{a} * \sqrt{b} = a \circledast b = a \otimes b \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

v) $(L, \leq, *)$ kuantalının kesin çift yanlılığının sonucudur.

vi) Her $a \in L$ için $a \otimes a = a \circledast a = \sqrt{a} * \sqrt{a} = a$ olur. ■

Önerme 2.1.5.8 $Q = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü kuantal olsun. Bu durumda $(L, \leq, \otimes)$ bir cl-kuasi monoiddir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(L, \leq, \otimes)$ 'ın bir cqm-kafes olması Önerme 2.1.5.7'den görülür.

$I \neq \emptyset$, $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$, $a \in L$ olsun. Önerme 2.1.5.5 gereği $\sqrt{\bigvee_{i \in I} a_i} = \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i}$ 'dir ve buradan

$$a \otimes \bigvee_{i \in I} a_i = \sqrt{a} * \sqrt{\bigvee_{i \in I} a_i} = \sqrt{a} * \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i} = \bigvee_{i \in I} (\sqrt{a} * \sqrt{a_i}) = \bigvee_{i \in I} (a \otimes a_i)$$

bulunur. Dağılmanın diğer yönü benzer şekilde görülerek istenen sonuca ulaşılır. ■

Önceki iki önerme göz önüne alınarak, özellikle çok değerli topolojik uzayların çalışılmasında büyük bir öneme sahip olan özel bir tam grupoidler sınıfı aşağıdaki gösterim yardımıyla belirlenmektedir.

Gösterim 2.1.5.1 $G = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü GL-monoid olsun. Bu durumda $(L, \leq, \otimes)$ tam grupoidi $\mathfrak{G}_*$ ile gösterilir.

Bu ve sonraki bölümlerde $\mathfrak{G}_* = (L, \leq, \otimes)$ biçiminde herhangi bir tam grupoid verildiğinde, $G = (L, \leq, *)$ üçlünün bir sıkı kareköklü GL-monoid olduğu ve $\otimes = \otimes$ eşitliğinin sağlandığı ifade edilmeksizin bilinecektir. $\mathfrak{G}_*$ üzerinde çalışılırken kullanılacak kareköklerin $\mathfrak{G}_*$ 'a (yani $\otimes$ işlemine) göre değil G 'ye (yani $*$ işlemine) göre alındığı kabul edilecektir.

Gösterim 2.1.5.2 $Q = (L, \leq, *)$ bir değişmeli kuantal ve $a \in L$ olmak üzere $a \rightarrow 0$ yerine kısaca $a^\perp$ yazılır.

Bu gösterim altında her zaman $0^\perp = 1$ ve Q 'nun kesin çift yanlı olması ek koşulu altında $1^\perp = 0$ eşitliklerin var olacağını görmek kolaydır.

Önerme 2.1.5.9 Gösterim 2.1.5.2 ile tanımlanan $^\perp$ dönüşümü sırayı tersine çevirir.

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ bir değişmeli kuantal, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun.

$$a * (b \rightarrow 0) \leq b * (b \rightarrow 0) = 0$$

olacağından $b \rightarrow 0 \leq a \rightarrow 0$, yani $b^\perp \leq a^\perp$ olur. Dolayısıyla $^\perp$ operatörü eşitsizliğin yönünü değiştirir. ■

Yukarıdaki önermede verilen özelliğin karşıt yönü genel olarak doğru değildir. Örneğin, $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ kuantalinde $(\frac{1}{2})^\perp = 0 \leq 0 = 1^\perp$ olmasına karşın $1 \leq \frac{1}{2}$ eşitsizliği doğru değildir.

Önerme 2.1.5.10 $Q = (L, \leq, *)$ bir değişmeli kuantal olmak üzere her $a \in L$ için $a \leq (a^\perp)^\perp$ eşitsizliği geçerlidir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $a * a^\perp = a * (a \rightarrow 0) = 0$ olduğundan $a \leq a^\perp \rightarrow 0 = (a^\perp)^\perp$ 'dir. ■

Önerme 2.1.5.11 Bir $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidinde $\left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp = \sqrt{0}$ eşitliği her zaman sağlanır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $\sqrt{0} \leq \left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp$ eşitsizliği önceki önermenin bir sonucudur. $\sqrt{0} * \sqrt{0} = 0$ olduğundan $\sqrt{0} \leq \sqrt{0} \rightarrow 0 = (\sqrt{0})^\perp$ 'dir. Önerme 2.1.5.9'dan $\left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp \leq (\sqrt{0})^\perp$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} \left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp * \left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp &\leq (\sqrt{0})^\perp * \left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp \\ &= (\sqrt{0})^\perp * \left[(\sqrt{0}) \rightarrow 0\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizliğe (S2)'nin uygulanmasıyla $\left[(\sqrt{0})^\perp\right]^\perp \leq \sqrt{0}$ olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Yukarıdaki önermeyi, 0 'ın ardı ardına alınan karekökleri için genelleştirmek mümkündür.

Önerme 2.1.5.12 $\mathfrak{G}_* = (L, \leq, \otimes)$ biçimindeki her tam grupoidde her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\left[(0^{2^{-n}})^\perp\right]^\perp = 0^{2^{-n}}$ eşitliği vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $n = 0$ için $(0^\perp)^\perp = 0$ olduğu $G = (L, \leq, *)$ kuantalının kesin çift yanlılığından kolayca görülür.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $\left[(0^{2^{-n}})^\perp\right]^\perp = 0^{2^{-n}}$ eşitliğinin doğruluğu varsayalım.

$0^{2^{-(n+1)}} \leq \left[(0^{2^{-(n+1)}})^\perp\right]^\perp$ olduğu açıktır. Önceki önerme ve Önerme 2.1.5.6'ten

$$\begin{aligned} \left[(0^{2^{-(n+1)}})^\perp\right]^\perp &= \left[(\sqrt{0^{2^{-n}}}) \rightarrow 0\right] \rightarrow 0 \\ &= \sqrt{(0^{2^{-n}} \rightarrow 0) \rightarrow 0} \\ &= \sqrt{\left[(0^{2^{-n}})^\perp\right]^\perp} = \sqrt{0^{2^{-n}}} = 0^{2^{-(n+1)}} \end{aligned}$$

biçiminde eşitsizliğin öbür yönü de elde edilir. ■

En azından sağ veya sol yanlı olduğu bilinen bir kareköklü kuantalde $\sqrt{1} = 1$ eşitliği her zaman geçerli olmasına karşın, $\sqrt{0}$ çok gelişmiş kuantal yapılarında bile 0 'dan farklı bir değer alabilir. Bu durum kuantaller için başka bir sınıflandırma ölçütü daha sağlar.

$Q = (L, \leq, *)$ değişmeli bir kareköklü kuantal olsun. $\sqrt{0} * \sqrt{0} = 0$ olduğundan $\sqrt{0} \leq (\sqrt{0})^\perp$ olması her zaman sağlanır. Buna göre, bir kuantalde $\sqrt{0}$ 'ın alabileceği en büyük değer, varsa $a^\perp = a$ eşitliğini sağlayan $a \in L$ öğelerinden biri olmalıdır. Ayrıca $a^\perp = a$ olması $a * a \leq 0$ olmasını gerektirdiğinden, böyle bir durumda $\sqrt{0}$ bu tür a öğelerinin en büyüğüne eşit olur. Diğer taraftan $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ gibi $\sqrt{0} = 0$ eşitliğinin sağlandığı kuantaller de bulunduğundan 0, $\sqrt{0}$ 'ın alabildiğı bir değerdir. Dolayısıyla $\sqrt{0}$ 'ın değeri için sabit bir alt sınır ve değişken bir üst sınır vardır. $\sqrt{0}$ 'ın bu iki uç değerden birini aldığı kareköklü kuantalleri diğerlerinden ayırarak bunların kendilerine özgü yapılarını incelemek mümkündür. Bu çalışmanın kapsamı dışında bırakılmakla birlikte, Tanım 2.1.5.5'te tanıtılacak olan dengeli GL-monoidlerin bu iki tür yapıdan biri veya bunların bir çarpımı olarak karakterize edilebileceğı iyi bilinen bir gerçektir (Höhle ve Šostak, 1999). Bu nedenle bu kuantal yapıları herhangi değişmeli kuantallerden ziyade GL-monoidler için tanımlanır ve özellikleri GL-monoidlerin sağladığı ek olanaklar altında araştırılır.

Aynı zamanda bir GL-monoid olan (sıkı) kareköklü bir kuantale (sıkı) kareköklü GL-monoid adı verilir.

Tanım 2.1.5.4 $G = (L, \leq, *)$ bir kareköklü GL-monoid olsun.

- a) $\sqrt{0} = 0$ ise G 'ye pürüzsüz (smooth) GL-monoid,
- b) $(\sqrt{0})^\perp = \sqrt{0}$ oluyorsa G 'nin kesin (strict) GL-monoid

denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Pürüzsüz GL-monoid ve kesin GL-monoid kavramları, hem pürüzsüz hem kesin bir kareköklü GL-monoid bulunmaması bakımından ayrık kavramlardır. Gerçekten, her kuantalde $0^\perp = 0 \rightarrow 0 = \bigvee \{x \in L \mid x * 0 \leq 0\} = 1$ olacağına dikkat edilirse, G bir pürüzsüz GL-monoid iken $(\sqrt{0})^\perp = 0^\perp = 1 \neq 0 = \sqrt{0}$ olacağından bir kesin GL-monoid olmaz. G 'nin bir kesin GL-monoid olması durumunda ise $(\sqrt{0})^\perp = \sqrt{0}$ ama $0^\perp = 1 \neq 0$ olacağından $\sqrt{0} \neq 0$ olup G bir pürüzsüz GL-monoid değildir.

Örnek 2.1.5.5 Örnek 2.1.5.2'de tanıtılan $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ ve $P = (\mathbb{I}, \leq, \cdot)$ kuantaları birer pürüzsüz GL-monoid iken $T = (\mathbb{I}, \leq, *)$ kuantalı bir kesin GL-monoiddir (Höhle ve Šostak, 1999).

Aşağıda bazı durumlarda kareköklü kuantallerin sağlaması beklenen kullanışlı ek özelliklerden bir başkası tanıtılmaktadır.

Tanım 2.1.5.5 $G = (L, \leq, *)$ bir kareköklü GL-monoid olsun. Q üzerinde

$$(S4) \quad \left[(\sqrt{0})^\perp \right]^2 \vee \left(\left[(\sqrt{0})^\perp \right]^2 \right)^\perp = 1$$

özelligi sağlamıyorsa G 'ye dengeli (balanced) denir (Höhle, 2001).

Örnek 2.1.5.6 Pürüzsüz GL-monoidlerde $\left[(\sqrt{0})^\perp \right]^2 = 1$ ve kesin GL-monoidlerde $\left(\left[(\sqrt{0})^\perp \right]^2 \right)^\perp = 1$ eşitlikleri her zaman bulunacağından, her pürüzsüz GL-monoid ve her kesin GL-monoid aynı zamanda bir dengeli GL-monoiddir.

2.1.6 MV-Cebirler ve Boole Cebirleri

Tanımı gereği $a^\perp = a \rightarrow 0$ ögesi a ile işleme girdiğinde 0 sonucunu veren L öğelerinin en büyüğüdür. Bu açıdan bakıldığında, $^\perp : L \rightarrow L$ dönüşümü kuantal işlemine göre bir çeşit tümlene olarak düşünülebilir. Bu dönüşüm genel olarak tümlenmenin sağlaması beklenen bir çok özellikten yoksun olmakla birlikte, kuantalleri bu dönüşümün sağladığı bazı tümlene benzeri özelliklere göre sınıflandırmak mümkündür.

Tanım 2.1.6.1 $Q = (L, \leq, *)$ bir GL-monoid olsun. Her $a \in L$ için $(a^\perp)^\perp = a$ ise Q 'ya bir tam MV-cebir denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Tam MV-cebir kavramı, MV-cebir adı verilen ve tam olması gerekmeyen daha ilkel bir yapıya dayanmakla birlikte (Belluce, 1992), çok değerli topolojik yapıların çalışılmasında pratik bir yarar sağlamadığından bu çalışmada bu yapının ayrıca tanımlanmasına gerek görülmemiştir.

Aynı zamanda (sıkı) kareköklü bir kuantal olan bir tam MV-cebire (sıkı) kareköklü MV-cebir, pürüzsüz GL-monoid olan bir tam MV-cebire pürüzsüz MV-cebir, kesin GL-monoid olan bir tam MV-cebire ise kesin MV-cebir adı verilir. Kısalık açısından bu adlandırmalarda MV-cebirin tamlığına vurgu yapılmamıştır.

Örnek 2.1.6.1 $T = (\mathbb{I}, \leq, *)$ bir tam MV-cebirdir. Gerçekten her $a \in \mathbb{I}$ için

$$\begin{aligned} a^\perp = a \rightarrow 0 &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid x * a \leq 0\} \\ &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid (x + a - 1) \vee 0 = 0\} \\ &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid x + a - 1 \leq 0\} \\ &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid x \leq 1 - a\} = 1 - a \end{aligned}$$

olup

$$(a^\perp)^\perp = 1 - a^\perp = 1 - (1 - a) = a$$

'dır. Ayrıca Örnek 2.1.5.5'ten T 'nin bir kesin MV-cebir olduğu anlaşılır. Pürüzsüz MV-cebir örneği elde etmek için, daha sonra verilecek olan Örnek 2.1.6.4'ü Sonuç 2.1.6.1 ışığı altında incelemek yeterli olacaktır.

Örnek 2.1.6.2 $P = (\mathbb{I}, \leq, \cdot)$, MV-cebir olmayan bir GL-monoid örneğidir. P 'nin MV-cebir olmadığı $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^\perp\right)^\perp = 1$ eşitliğinden görülür.

X bir küme olsun. Bir $\mu_A : X \rightarrow \mathbb{I}$ fonksiyonuna X üzerinde bir belirtisiz küme adı verilir (Zadeh, 1965).

Bir belirtisiz kümeler ailesi üzerindeki “kapsama” bağıntısı ile “birleşim” ve “arakesit” işlemleri tanımlanırken $(\mathbb{I}, \leq)$ kafesi temel alınır. Yalnız bu açıdan bakıldığında, belirtisiz kümeler teorisinin $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ GL-monoidi ile belirlendiği düşünülebilirse de bu iki yapı arasında önemli bir ayrım vardır. Belirtisiz kümeler için tümlene tanımı, $(\mathbb{I}, \leq)$ kafesinde $a' = 1 - a$ olduğu ön kabulüne bağlı olarak yapılır. Halbuki, aksini gerektiren bir ek yapı tanımlanmadıkça bir değişmeli kuantalde gerçek anlamda bir tümlene yapısı bulunmaz. Bunun ilginç bir sonucu, belirtisiz kümeler için yapılan tanım altında açık olarak $(a')' = a$ eşitliğinin var olmasına rağmen, aşağıdaki örnekte de ifade edileceği gibi $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ GL-monoidinin bir MV-cebir olmamasıdır.

Örnek 2.1.6.3 $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ GL-monoidi bir MV-cebir değildir. $a \in \mathbb{I}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a^\perp &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid x \wedge a \leq 0\} \\ &= \bigvee \{0\} = 0ve0^\perp = 0 \rightarrow 0 \\ &= \bigvee \{x \in \mathbb{I} \mid x \wedge 0 \leq 0\} \\ &= \bigvee \mathbb{I} = 1 \end{aligned}$$

olacağına dikkat edilirse, her $a \in \mathbb{I}$, $a \neq 0$ için $(a^\perp)^\perp = 1$ olup genel anlamda $(a^\perp)^\perp = a$ eşitliği sağlanmaz.

Önerme 2.1.6.1 Bir MV-cebirde $^\perp$ dönüşümü

$$(a \vee b)^\perp = a^\perp \wedge b^\perp \text{ ve } (a \wedge b)^\perp = a^\perp \vee b^\perp$$

ile verilen De Morgan eşitliklerini sağlar (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $Q = (L, \leq, *)$ bir MV-cebir, $a, b \in Q$ olsun. $\rightarrow$ işlemi ilk bileşene göre sırayı tersine çevirdiğinden

$$\begin{aligned} a \leq a \vee b \text{ ve } b \leq a \vee b &\implies (a \vee b) \rightarrow 0 \leq a \rightarrow 0 \text{ ve } (a \vee b) \rightarrow 0 \leq b \rightarrow 0 \\ &\implies (a \vee b)^\perp \leq a^\perp \text{ ve } (a \vee b)^\perp \leq b^\perp \\ &\implies (a \vee b)^\perp \leq a^\perp \wedge b^\perp \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan benzer biçimde

$$\begin{aligned} a^\perp \wedge b^\perp \leq a^\perp \text{ ve } a^\perp \wedge b^\perp \leq b^\perp &\implies (a^\perp)^\perp \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \text{ ve } (b^\perp)^\perp \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \\ &\implies a \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \text{ ve } b \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \\ &\implies a \vee b \leq (a^\perp \wedge b^\perp)^\perp \\ &\implies a^\perp \wedge b^\perp \leq (a \vee b)^\perp \end{aligned}$$

olacağından $(a \vee b)^\perp = a^\perp \wedge b^\perp$ 'dir. $(a \wedge b)^\perp = a^\perp \vee b^\perp$ olması da elde edilen bu eşitlik kullanılarak doğrulanabilir. ■

Tanım 2.1.6.2 $(L, \leq)$ bir sınırlı, dağılımlı kafes olmak ve $' : L \rightarrow L$ dönüşümü $\forall a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olması koşulunu gerçeklemek üzere $(L, \leq, ')$ üçlüsüne bir Boole cebiri adı verilir. Bir tam kafes üzerine kurulu Boole cebiri, tam Boole cebiri adını alır (Birkhoff, 1995).

Örnek 2.1.6.4 Herhangi bir X kümesinin alt kümelerince oluşturulan $(\mathcal{P}(X), \subseteq, ^c)$ üçlüsü en iyi bilinen tam Boole cebiri örneklerinden biridir. Özel olarak $\mathbf{2} = (2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi ele alınırsa, $0' = 1$ ve $1' = 0$ olmak üzere $(2, \subseteq, ')$ üçlüsü bir tam Boole cebiri olur ve $(\mathcal{P}(X), \subseteq, ^c)$ üçlüsünün $(2, \subseteq, ')$ 'nin 2^X 'e yükseltilmesi olarak yorumlanabileceği görülebilir. $B_4 = \{0, a, b, 1\}$ kümesi üzerinde

$$\leq = \{(0, 0), (0, a), (0, b), (0, 1), (a, a), (a, 1), (b, b), (b, 1), (1, 1)\} \subseteq B_4 \times B_4$$

sıralama bağıntısıyla birlikte $0' = 1$, $a' = b$, $b' = a$ ve $1' = 0$ olduğu verilirse $(B_4, \leq, ')$ üçlüsü bir tam Boole cebiri olur. Tam Boole cebirlerinin başka bir örneği ise, H bir kompleks Hilbert uzayı olmak üzere H 'nin bütün kapalı alt uzaylarının kümesi olan $\mathcal{L}(H)$, $\mathcal{P}(H)$ üzerindeki $\subseteq$ sıralama bağıntısı ve her $A \in \mathcal{L}(H)$ için

$$A^\perp = \{x \in H \mid \text{her } a \in A \text{ için } \langle x, a \rangle = 0\}$$

ile verilen $^\perp$ ortogonal tümleyen (veya dikey) operatörünün oluşturduğu

$(\mathcal{L}(H), \subseteq, {}^\perp)$ üçlüsüdür (Höhle, 2001).

Aşağıdaki önerme yardımıyla $(\mathcal{P}(X), \subseteq, {}^c)$, $(2, \subseteq, ')$, $(B_4, \leq, ')$ ve $(\mathcal{L}(H), \subseteq, {}^\perp)$ yerine sırasıyla kısaca $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(2, \subseteq)$, $(B_4, \leq)$ ve $(\mathcal{L}(H), \subseteq)$ yazılabilir.

Önerme 2.1.6.2 $B_1 = (L, \leq, {}'^1)$ ve $B_2 = (L, \leq, {}'^2)$ aynı kafes üzerine kurulmuş iki Boole cebiri olsun. Bu durumda $B_1 = B_2$ 'dir (Çoker ve diğ., 2008).

Kanıt. $a \in L$ olsun. Boole cebiri tanımından

$$a \wedge a'^1 = 0 = a \wedge a'^2 \text{ ve } a \vee a'^1 = 1 = a \vee a'^2$$

elde edilir. Ayrıca yine Boole cebiri tanımı gereği $(L, \leq)$ bir dağılımlı kafestir ve böylece Önerme 2.1.4 uygulanarak $a'^1 = a'^2$ elde edilir. Her $a \in L$ için $a'^1 = a'^2$ olduğundan $'^1 = '^2$ ve dolayısıyla $B_1 = B_2$ 'dir. ■

Önerme 2.1.6.2'ye göre bir $(L, \leq)$ kafesinin üzerinde, $(L, \leq, ')$ üçlüsünü bir Boole cebiri yapacak bir $' : L \rightarrow L$ dönüşümü varsa, tek türlü belirlidir. Dolayısıyla bir Boole cebirini belirlemek için yalnızca kafes yapısını vermek yeterlidir. Bu ise Boole cebiri adlı yapının özel bir kafes türü olarak düşümlenebileceği anlamına gelir. Boole cebirleri bu özellikleriyle Heyting cebirlerine benzerler. Bunun yanında, bu iki yapı türü arasında bir zayıflık-güçlülük ilişkisi de vardır.

Önerme 2.1.6.3 Boole cebiri yapısı taşıyan her kafes aynı zamanda bir Heyting cebiri yapısı taşır (Borceux, 1994).

Kanıt. $(L, \leq)$ Boole cebiri yapısı taşıyan bir kafes olsun ve L üzerindeki tümleme dönüşümü $' : L \rightarrow L$ ile verilsin. $a, b, c \in L$ olsun ve $\rightarrow : L \times L \rightarrow L$ ikili işlemi her $a, b \in L$ için $a \rightarrow b = a' \vee b$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(L, \leq, \rightarrow)$ üçlüsünün bir Heyting cebiri olduğu,

$$(H1) \quad a \rightarrow a = a' \vee a = 1$$

$$(H2) \quad a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge (a' \vee b) = (a \wedge a') \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

$$(H3) \quad b \wedge (a \rightarrow b) = b \wedge (a' \vee b) = (b \wedge a') \vee (b \wedge b) = (b \wedge a') \vee b = b$$

$$(H4) \quad a \rightarrow (b \wedge c) = a' \vee (b \wedge c) = (a' \vee b) \wedge (a' \vee c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$$

eşitliklerinden görülür. ■

Önerme 2.1.6.4 $(L, \leq)$ bir tam Boole cebiri yapısı taşıyorsa $B = (L, \leq, \wedge)$ bir pürüzsüz MV-cebirdir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. B 'nin bir kuantal olduğu Önerme 2.1.6.3 ve Teorem 2.1.3.2'nin bir sonucudur. B 'nin pürüzsüz GL-monoid olması ise Örnek 2.1.4.1 ve Örnek 2.1.5.1'in

sonucu olarak görülebilir ve geriye B 'nin MV-cebir olduğunun gösterilmesi kalır.

$(L, \leq)$ kafesi üzerindeki tümleme $' : L \rightarrow L$ ile verilsin ve $a \in L$ olsun. $a \wedge a' = 0$ olduğundan $a' \in \{x \in L \mid x \wedge a \leq 0\}$ olup $a^\perp = \bigvee \{x \in L \mid x \wedge a \leq 0\} \geq a'$ bulunur. Diğer yandan $a \vee a' = 1$ ve $a' \leq a^\perp$ olduğundan $a \vee a^\perp = 1$ olmak zorundadır ve böylece Önerme 2.1.4'ten $a' = a^\perp$ olduğu görülür. Ayrıca bu durumda $(a^\perp)^\perp \vee a^\perp = (a')' \vee a' = 1$ ve $(a^\perp)^\perp \wedge a^\perp = (a')' \wedge a' = 0$ olacağından, yine Önerme 2.1.4'ün bir sonucu olarak $(a^\perp)^\perp = a$ eşitliği elde edilir. ■

Önerme 2.1.6.5 $Q = (L, \leq, *)$ bir pürüzsüz MV-cebir olsun. Bu durumda $(L, \leq)$ bir tam Boole cebiri yapısı taşır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(L, \leq)$ bir tam kafes olduğundan aynı zamanda bir sınırlı kafestir.

Her MV-cebir bir GL-monoid ve her GL-monoid kesin çift yanlı ve bölünebilir olduğundan Önerme 2.1.2.3 gereği her $a, b \in L$ için $a \wedge b = a * (a \rightarrow b)$ eşitliği vardır. Bu durumda her $a, b, c \in L$ için

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (b \vee c) \wedge a \\ &= (b \vee c) * ((b \vee c) \rightarrow a) \\ &= [b * ((b \vee c) \rightarrow a)] \vee [c * ((b \vee c) \rightarrow a)] \\ &\leq [b * (b \rightarrow a)] \vee [c * (c \rightarrow a)] \\ &= (b \wedge a) \vee (c \wedge a) \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

olur ve $a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$, $a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$ olmasından da

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

elde edilir. Buradan $(L, \leq)$ kafesinin aynı zamanda dağılımlı olduğu görülür. Dolayısıyla her bir $a \in L$ için $a \wedge a' = 0$ ve $a \vee a' = 1$ olacak biçimde bir $a' \in L$ bulmak $(L, \leq)$ kafesinin bir Boole cebiri yapısı taşıdığını göstermek için yeterlidir.

Q 'daki $*$ işlemine göre $a^\perp = a \rightarrow 0$ biçiminde tanımlanan $^\perp : L \times L \rightarrow L$ dönüşümü ele alınsın. Her $a \in L$ için

$$(a \wedge a^\perp) * (a \wedge a^\perp) \leq a * a^\perp = a * (a \rightarrow 0) = a \wedge 0$$

olduğundan $(a \wedge a^\perp)^2 \leq 0$ 'dır. Diğer taraftan Q pürüzsüz MV-cebir olduğu için kareköklüdür ve $\sqrt{0} = 0$ 'dır. Böylece (S2)'nin $(a \wedge a^\perp)^2 \leq 0$ eşitsizliğine

uygulanmasıyla $a \wedge a^\perp \leq \sqrt{0}$, yani $a \wedge a^\perp = 0$ elde edilir. $a \vee a^\perp = 1$ eşitliği ise Önerme 2.1.6.1 yardımıyla görülür. Dolayısıyla $B = (L, \leq, ^\perp)$ bir tam Boole cebiridir. ■

Sonuç 2.1.6.1 Tam Boole cebiri ve pürüzsüz MV-cebir kavramları yapısal açıdan birbirine denk kavramlardır (Höhle ve Šostak, 1999).

2.2 Yakınsaklık

Tanım 2.2.1 X bir küme olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ küme takımına X üzerinde bir süzgeç denir (Willard, 2004).

- ($\mathcal{F}0$) $X \in \mathcal{F}$
- ($\mathcal{F}1$) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B \subseteq X \implies B \in \mathcal{F}$
- ($\mathcal{F}2$) $A \in \mathcal{F}$ ve $B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- ($\mathcal{F}3$) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

Bir X kümesi üzerinde tanımlanabilen bütün süzgeçlerin kümesi $\mathfrak{F}_2(X)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.1 X bir küme ve $p \in X$ ise $\{A \subseteq X \mid p \in A\}$ küme ailesi X üzerinde bir süzgeçtir. Bu süzgece X 'te bir esas süzgeç denir ve $p \in X$ noktasına karşılık gelen esas süzgeç $\dot{p}$ ile gösterilir (Willard, 2004).

Örnek 2.2.2 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her bir $x \in X$ için, x 'in bütün komşuluklarının kümesi olan $\mathbb{N}_x = \{A \subseteq X \mid \exists G \in \tau, G \subseteq A\}$ X üzerinde bir süzgeçtir. $\mathbb{N}_x$ 'e, τ topolojisine göre x 'in komşuluklar süzgeci denir (Willard, 2004).

Tanım 2.2.2 X bir küme, $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ olmak üzere

- ($\mathcal{FB}1$) $\emptyset \notin \mathcal{B} \neq \emptyset$
- ($\mathcal{FB}2$) $A \in \mathcal{B}$ ve $B \in \mathcal{B} \implies \exists C \in \mathcal{B}, C \subseteq A \cap B$

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ 'ye X için bir süzgeç tabanı denir (Willard, 2004).

Tanım 2.2.3 $\mathcal{B}$ bir X kümesi için bir süzgeç tabanı olsun.

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \exists C \in \mathcal{B}, C \subseteq A\}$$

kümesine $\mathcal{B}$ süzgeç tabanının ürettiği süzgeç adı verilir (Willard, 2004).

Bir süzgeç tabanının ürettiği süzgeçin, gerçekten bir süzgeç olacağı açıktır.

Örnek 2.2.3 $(x_n) = (x_1, x_2, \dots)$ bir X kümesi üzerinde bir dizi olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için $X_n = \{x_k \mid n \leq k \in \mathbb{N}\}$ kümeleri tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{B} = \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$,

X üzerinde bir süzgeç tabanı olur. $\mathcal{B}$ 'nin ürettiği süzgece (x_n) dizisinin bileşen süzgeci adı verilir (Ashm, 2004).

X ve Y iki küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f aynı zamanda X 'in her bir A alt kümesini Y 'nin bir $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ alt kümesine dönüştürür. Ancak bir fonksiyonun birden çok tanım ve değer kümesi olamayacağından bu yeni dönüşümü belirtmek için ayrı bir gösterim kullanılması uygun olacaktır. Benzer durum f 'in sağladığı $f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$ ön görüntüleri için de geçerlidir.

Tanım 2.2.4 X ve Y iki küme olsun. $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere $f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ve $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ fonksiyonları

$$f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}, \quad \forall A \subseteq X$$

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \quad \forall B \subseteq Y$$

biçiminde tanımlanır (Rodabaugh, 1999).

X ve Y kümeler, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{B}$ X üzerinde bir süzgeç tabanı (veya süzgeç) ise $f^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{B}) = \{f^{\rightarrow}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ kümesinin Y üzerinde bir süzgeç tabanı olacağını görmek kolaydır (Willard, 2004).

Tanım 2.2.5 X ve Y kümeler, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\mathcal{F}$ X kümesi üzerinde bir süzgeç (veya süzgeç tabanı) olsun. Y üzerindeki $f^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{F})$ süzgeç tabanının ürettiği süzgece $\mathcal{F}$ 'in f altındaki görüntü süzgeci denir ve Y üzerindeki bu süzgeç $f\langle\mathcal{F}\rangle$ ile gösterilir (Willard, 2004).

Tanım 2.2.6 X bir küme ve $\mathcal{T} \subseteq \mathfrak{F}_2(X) \times X$ olsun.

$$(C1) \quad (\dot{x}, x) \in \mathcal{T}, \quad \forall x \in X$$

$$(C2) \quad \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_2(X), \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, (\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T} \implies (\mathcal{G}, x) \in \mathcal{T}$$

$$(C3) \quad \mathcal{F} \in \mathfrak{F}_2(X), (\mathcal{F}, p) \in \mathcal{T} \implies (\mathcal{F} \cap \dot{x}, x) \in \mathcal{T}$$

koşullarını sağlayan bir $\mathcal{T}$ kümesine X üzerinde bir (Kent anlamında) yakınsaklık yapısı, bu şekildeki bir $(X, \mathcal{T})$ ikilisine ise (Kent anlamında) bir yakınsaklık uzayı adı verilir (Chicourrat, 2010).

Bir X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{T}$ yakınsaklık yapısı için $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}$ ise $\mathcal{F}$ süzgecinin $\mathcal{T}$ 'ye göre $x \in X$ noktasına yakınsadığı söylenir.

Tanım 2.2.7 $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ yakınsaklık uzayları, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}_1$ olması $(f\langle\mathcal{F}\rangle, f(x)) \in \mathcal{T}_2$ olmasını gerektiriyorsa f fonksiyonunun $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ yakınsaklık yapılarına göre sürekli olduğu söylenir (Höhle, 2001).

Teorem 2.2.1 $(X, \mathcal{T}_1), (Y, \mathcal{T}_2), (Z, \mathcal{T}_3)$ yakınsaklık uzayları, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ fonksiyonlar olsun. $f, \mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_2$ 'ye; $g, \mathcal{T}_2$ ve $\mathcal{T}_3$ 'e göre sürekli ise $g \circ f : X \rightarrow Z$ fonksiyonu da $\mathcal{T}_1$ ve $\mathcal{T}_3$ 'e göre sürekli dir.

Kanıt. X üzerinde $\mathcal{T}_1$ 'e göre bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\mathcal{F}$ süzgeci verilsin. Yükseltilmiş fonksiyon tanımından $(g \circ f)^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{F}) = g^{\rightarrow\rightarrow}(f^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{F}))$ olup $(g \circ f)^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{F})$ ve $g^{\rightarrow\rightarrow}(f^{\rightarrow\rightarrow}(\mathcal{F}))$ süzgeç tabanları eşittir. Eşit süzgeç tabanları aynı süzgeci üreteceklerinden $(g \circ f)\langle \mathcal{F} \rangle = g\langle f\langle \mathcal{F} \rangle \rangle$ olur ve f ve g 'nin ilgili yakınsaklık yapılarına göre sürekliliklerinden

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}_1 &\implies (f\langle \mathcal{F} \rangle, f(x)) \in \mathcal{T}_2 \\ &\implies (g\langle f\langle \mathcal{F} \rangle \rangle, g(f(x))) \in \mathcal{T}_3 \\ &\implies ((g \circ f)\langle \mathcal{F} \rangle, (g \circ f)(x)) \in \mathcal{T}_3 \end{aligned}$$

bulunur. ■

2.2.1 $\mathfrak{G}$ -Değerli Süzgeçler

X bir küme ve $\mathcal{F}, X$ üzerinde bir süzgeç olsun. Örnek 2.1.1.2'de yapılarına benzer biçimde $\mathbf{2} = (2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidinden yola çıkılarak $\mathbf{2}^X = (2^X, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi oluşturulur ve X 'in her alt kümesi, 2^X 'te kendisine tek türlü karşılık gelen karakteristik fonksiyona özdeş olarak düşünülürse her bir $A \subseteq X$ kümesi bir $A : X \rightarrow 2$ fonksiyonu gibi görülebilir. Özel olarak X 'in kendisi, her noktada $1 \in 2$ değerini alan $1_X : X \rightarrow 2$ sabit fonksiyonuna, $\emptyset$ ise her noktada $0 \in 2$ değerini alan $0_X : X \rightarrow 2$ sabit fonksiyonuna karşılık gelir. Bunun yanında bir de 2^X 'in bir küme olarak ele alınmasıyla $\mathbf{2}^{(2^X)} = (2^{(2^X)}, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi elde edilebilir ve süzgeç tanımı gereği $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ olduğundan $\mathcal{F} : 2^X \rightarrow 2$ bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Bu gösterimler altında $\mathcal{F}0, \mathcal{F}1, \mathcal{F}2$ ve $\mathcal{F}3$ koşullarının aşağıdaki dört koşula karşılıklı olarak denk olacağını görmek zor değildir:

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}0') \quad & \mathcal{F}(1_X) = 1 \\ (\mathcal{F}1') \quad & A \subseteq B \implies \mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}(B), \quad \forall A, B \in 2^X \\ (\mathcal{F}2') \quad & \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A \cap B), \quad \forall A, B \in 2^X \\ (\mathcal{F}3') \quad & \mathcal{F}(0_X) = 0 \end{aligned}$$

Süzgeç tanımının, yalnızca $\mathbf{2} = (2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidinin sağladığı imkanlardan

yararlanılarak verilebildiği bu yeni yazım tarzıyla net olarak görülebilmektedir. Bir adım daha ileri giderek herhangi bir tam grupoid üzerinde buna benzer bir tanım yapmak mümkündür.

Tanım 2.2.1.1 X herhangi bir küme, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\nu : L^X \rightarrow L$ dönüşümüne X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeç (veya kısaca $\mathfrak{G}$ -süzgeç) adı verilir.

$$(F0) \quad \nu(1_X) = 1$$

$$(F1) \quad f \leq g \implies \nu(f) \leq \nu(g), \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(F2) \quad \nu(f) \otimes \nu(g) \leq \nu(f \otimes g), \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(F3) \quad \nu(0_X) = 0$$

Bir X kümesi üzerinde tanımlanabilen bütün $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeçlerin kümesi $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ ile gösterilir. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ olduğu kabul edilir (Höhle, 2001).

$\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X) \subseteq L^{(L^X)}$ olduğundan, L 'den $L^{(L^X)}$ üzerine yükseltile $\leq$ bağıntısı, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ üzerinde de mevcuttur.

Tanım 2.2.1 ile verilen klasik süzgeçler ile, $\mathbf{2} = (2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi üzerinde tanımlanan $\mathbf{2}$ -değerli süzgeçler birbirine denk kavramlardır.

Önerme 2.2.1.1 $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $\nu : L^X \rightarrow L$, X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç ise her $g \in L^Y$ için $[\varphi(\nu)](g) = \nu(g \circ \varphi)$ ile tanımlanan $\varphi(\nu) : L^Y \rightarrow L$ dönüşümü Y üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeçtir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. (F0) $[\varphi(\nu)](1_Y) = \nu(1_Y \circ \varphi) = \nu(1_X) = 1$

(F1) $f, g \in L^Y$, $f \leq g$ olsun. Her $x \in X$ için $[f \circ \varphi](x) \leq [g \circ \varphi](x)$ olduğuna dikkat edilirse $[\varphi(\nu)](f) = \nu(f \circ \varphi) \leq \nu(g \circ \varphi) = [\varphi(\nu)](g)$ elde edilir.

(F2) $f, g \in L^Y$ olsun. Tanım 2.1.10'a göre her $x \in X$ için

$$[(f \circ \varphi) \otimes (g \circ \varphi)](x) = f(\varphi(x)) \otimes g(\varphi(x)) = [(f \otimes g) \circ \varphi](x)$$

yazılabileceğinden aranan eşitlik aşağıdaki biçimde elde edilebilir.

$$\begin{aligned} [\varphi(\nu)](f) \otimes [\varphi(\nu)](g) &= \nu(f \circ \varphi) \otimes \nu(g \circ \varphi) \\ &\leq \nu[(f \circ \varphi) \otimes (g \circ \varphi)] \\ &= \nu[(f \otimes g) \circ \varphi] \\ &= [\varphi(\nu)](f \otimes g) \end{aligned}$$

(F3) $[\varphi(\nu)](0_Y) = \nu(0_Y \circ \varphi) = \nu(0_X) = 0$ ■

Önerme 2.2.1.2 $\varphi : X \rightarrow Y$ bir örten fonksiyon ve $\nu : L^Y \rightarrow L$, Y üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olsun. Her $f \in L^X$ için $[\varphi^{-1}(\nu)](f) = \bigvee \{\nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f\}$ ile tanımlanan $\varphi^{-1}(\nu) : L^X \rightarrow L$ dönüşümü X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeçtir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. (F0) Her $g \in L^Y$ için $g \circ \varphi \in L^X$ olur ve dolayısıyla $g \circ \varphi \leq 1_X$ koşulu sağlanır. Ayrıca ν (F1) koşulu gereği artan olduğundan

$$\begin{aligned} [\varphi^{-1}(\nu)](1_X) &= \bigvee \{\nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq 1_X\} \\ &= \bigvee \{\nu(g) \mid g \in L^Y\} = \nu(1_Y) = 1 \end{aligned}$$

yazılabilir.

(F1) $f_1, f_2 \in L^X$, $f_1 \leq f_2$ olsun. Bu durumda

$$\{\nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f_1\} \subseteq \{\nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f_2\}$$

olacağından $[\varphi^{-1}(\nu)](f_1) \leq [\varphi^{-1}(\nu)](f_2)$ olur.

(F2) $f_1, f_2 \in L^X$ olsun. Tam grupoid işlemi sıra koruduğundan $g_1 \circ \varphi \leq f_1$ ve $g_2 \circ \varphi \leq f_2$ olması durumunda $(g_1 \otimes g_2) \circ \varphi = (g_1 \circ \varphi) \otimes (g_2 \circ \varphi) \leq f_1 \otimes f_2$ eşitsizliği vardır. ν için (F1) ve (F2)'nin de kullanılmasıyla

$$[\varphi^{-1}(\nu)](f_1) \otimes [\varphi^{-1}(\nu)](f_2) \leq [\varphi^{-1}(\nu)](f_1 \otimes f_2)$$

eşitsizliği birkaç adımda elde edilir.

(F3) $g \in L^Y$ ve $g \circ \varphi \leq 0_X$ olsun. $y \in Y$ ise $\varphi(x) = y$ olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. Buradan $g(y) = g(\varphi(x)) \leq 0$ elde edilerek $g = 0_X$ olduğu görülür. Böylece $\{\nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq 0_X\} = \{\nu(0_X)\}$ olur ve buradan $[\varphi^{-1}(\nu)](0_X) = 0$ olduğu görülür. ■

Yukarıdaki önermelerde kullanılan $\varphi(\nu)$ ve $\varphi^{-1}(\nu)$ gösterimlerinin, bilinen fonksiyon gösteriminden farklı anlamlarda kullanıldıklarına dikkat edilmelidir. İkinci önermedeki φ 'nin örten olma koşulu (F3)'ün sağlanmasını gerektirmek amacıyla şart koşulmuştur.

Tanım 2.2.1.2 a) $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $\nu : L^X \rightarrow L$, X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olmak üzere ν 'nin φ altındaki görüntüsü her $g \in L^Y$ için

$$[\varphi(\nu)](g) = \nu(g \circ \varphi)$$

ile tanımlanır (Höhle ve Šostak, 1999).

b) $\varphi : X \rightarrow Y$ bir örten fonksiyon ve $\nu : L^Y \rightarrow L$, Y üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olmak

üzere ν 'nün φ altındaki ön görüntüsü her $f \in L^X$ için

$$[\varphi^{-1}(\nu)](f) = \bigvee \{ \nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f \}$$

ile tanımlanır (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.2.1.3 $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ ve $\nu_1 \leq \nu_2$ ise $\varphi(\nu_1) \leq \varphi(\nu_2)$ olur.

Kanıt. Her $g \in L^Y$ için $[\varphi(\nu_1)](g) = \nu_1(g \circ \varphi) \leq \nu_2(g \circ \varphi) = [\varphi(\nu_2)](g)$ olmasından görülür. ■

Önerme 2.2.1.4 $\varphi : X \rightarrow Y$ bir örten fonksiyon ve $\nu : L^Y \rightarrow L$, Y üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olsun. Bu durumda $\varphi(\varphi^{-1}(\nu)) = \nu$ eşitliği vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $g \in L^Y$ olsun. $h \in L^Y$ ve $h \circ \varphi \leq g \circ \varphi$ ise, φ 'nin örtenliğinden dolayı her bir $y \in Y$ için $\varphi(x) = y$ olacak biçimde bir $x_y \in X$ bulunabildiğinden, her $y \in Y$ için $h(y) = (h \circ \varphi)(x_y) \leq (g \circ \varphi)(x_y) = g(y)$ yazılabilir. Buradan $h \leq g$ ve dolayısıyla $\nu(h) \leq \nu(g)$ olduğu elde edilir ve böylece

$$[\varphi(\varphi^{-1}(\nu))](g) = [\varphi^{-1}(\nu)](g \circ \varphi) = \bigvee \{ \nu(h) \mid h \in L^Y, h \circ \varphi \leq g \circ \varphi \} = \nu(g)$$

eşitliğine ulaşılır. ■

Tanım 2.2.1.3 $G = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü GL-monoid ve $\mathfrak{G}_* = (L, \leq, \otimes)$ olmak üzere X üzerinde bir $\nu : L^X \rightarrow L$ $\mathfrak{G}_*$ -değerli süzgeci verilsin.

a) Her $f \in L^X$ için $\bigwedge_{x \in X} f(x) \leq \nu(f)$ oluyorsa ν 'ye zayıf tabakalı (weakly stratified) $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç,

b) Her $a \in L$ ve her $f \in L^X$ için $a * \nu(f) \leq \nu(a * f)$ oluyorsa ν 'ye tabakalı (stratified) $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç denir. Bir X kümesi üzerindeki bütün tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli süzgeçlerin kümesi $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ ile gösterilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 2.2.1.5 a) Bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin görüntüsü de tabakalıdır.

b) Bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin ön görüntüsü de tabakalıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. a) ν bir X kümesi üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç, $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon, $a \in L$ ve $g \in L^Y$ olsun. Bu durumda $\varphi(\nu)$ 'nin tabakalılığı

$$a * [\varphi(\nu)](g) = a * \nu(g \circ \varphi) = \nu(a * (g \circ \varphi)) = \nu((a * g) \circ \varphi) = [\varphi(\nu)](a * g)$$

eşitliklerinden görülür.

b) $\varphi : X \rightarrow Y$ bir örten fonksiyon olsun ve Y üzerinde tabakalı bir ν $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci verilsin. Ayrıca $a \in L$ ve $f \in L^X$ olsun.

$g \in L^Y$ ve $g \circ \varphi \leq f$ ise $a * g \in L^Y$ ve $(a * g) \circ \varphi = a * (g \circ \varphi) \leq a * f$ olacağı

açıktır. $a * g = h$ yazılmasıyla buradan $h \in L^Y$ ve $h \circ \varphi \leq a * f$ olduğu elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
a * [\varphi^{-1}(\nu)](f) &= a * \bigvee \{ \nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f \} \\
&= \bigvee \{ a * \nu(g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f \} \\
&\leq \bigvee \{ \nu(a * g) \mid g \in L^Y, g \circ \varphi \leq f \} \\
&\leq \bigvee \{ \nu(a * g) \mid a * g \in L^Y, (a * g) \circ \varphi \leq a * f \} \\
&\leq \bigvee \{ \nu(h) \mid h \in L^Y, h \circ \varphi \leq a * f \} \\
&= [\varphi^{-1}(\nu)](a * f)
\end{aligned}$$

bulunur. ■

Önerme 2.2.1.6 ν bir X kümesi üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ise her $f \in L^X$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Höhle ve Šostak, 1999).

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) \leq \nu(f) \leq \left[\left(\bigvee_{x \in X} f(x) \right) \rightarrow 0 \right] \rightarrow 0$$

Kanıt. $\bigwedge_{x \in X} f(x) = a$ olsun. Bu durumda $a_X \leq f$ olacağından

$$a = a * 1 = a * \nu(1_X) \leq \nu(a * 1_X) = \nu(a_X) \leq \nu(f)$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde, $\bigvee_{x \in X} f(x) = b$ denirse $f \leq b_X$ ve dolayısıyla $b_X \rightarrow 0 \leq f \rightarrow 0_X$ olacağından

$$\begin{aligned}
(b \rightarrow 0) * \nu(f) &\leq (b \rightarrow 0) * \nu(f) \leq \nu((b \rightarrow 0) * f) \\
&= \nu((b \rightarrow 0)_X * f) = \nu((b_X \rightarrow 0_X) * f) \\
&\leq \nu((f \rightarrow 0_X) * f) = \nu(0_X) = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\nu(f) \leq (b \rightarrow 0) \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. ■

Önerme 2.2.1.7 Bir X kümesi üzerindeki her bir ν tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci $\nu[(\sqrt{0})_X] \leq \sqrt{0}$ eşitsizliğini sağlar (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. ν 'nün tabakalılığı, G 'deki birleşme, değişme, kesin çift yanlılık ve (F3)

$$\begin{aligned}
\nu((\sqrt{0})_X) * \nu((\sqrt{0})_X) &\leq \nu[\nu((\sqrt{0})_X) * (\sqrt{0})_X] \\
&= \nu[\nu((\sqrt{0})_X) * \sqrt{0} * 1_X] \\
&\leq \nu[\nu((\sqrt{0})_X * \sqrt{0}) * 1_X] \\
&= \nu[\nu(0_X) * 1_X] = \nu(0 * 1_X) = \nu(0_X) = 0
\end{aligned}$$

yazılabilmesini sağlar. Kareköklü kuantaller için (S2)'nin uygulanmasıyla da $\nu((\sqrt{0})_X) \leq \sqrt{0}$ olduğu görülür. ■

Önerme 2.2.1.8 ν bir X kümesi üzerinde $\nu[(\sqrt{0})_X] \leq \sqrt{0}$ koşulunu sağlayan bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olsun. $f, g \in L^X$ olmak üzere $f * g = 0_X$ ise $\nu(f) * \nu(g) = 0$ 'dır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. Önerme 2.1.5.4 gereği $f \otimes g \leq \sqrt{f * g}$ olduğuna dikkat edilerek sırasıyla (S1), $G = (L, \leq, *)$ 'ın değişmeliliği, (F2), (F1), $f * g = 0_X$ ve $\nu[(\sqrt{0})_X] \leq \sqrt{0}$ olması kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nu(f) * \nu(g) &= \sqrt{\nu(f)} * \sqrt{\nu(f)} * \sqrt{\nu(g)} * \sqrt{\nu(g)} \\ &= [\nu(f) \otimes \nu(g)] * [\nu(f) \otimes \nu(g)] \\ &\leq [\nu(f \otimes g)] * [\nu(f \otimes g)] \\ &\leq \left[\nu(\sqrt{f * g}) \right] * \left[\nu(\sqrt{f * g}) \right] \\ &= \left[\nu((\sqrt{0})_X) \right] * \left[\nu((\sqrt{0})_X) \right] \\ &\leq \sqrt{0} * \sqrt{0} = 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan $\nu(f) * \nu(g) = 0$ olduğu görülür. ■

Yukarıdaki özellik sonlu sayıdaki fonksiyon için genelleştirilebilir.

Önerme 2.2.1.9 Bir X kümesi üzerinde $\nu[(\sqrt{0})_X] \leq \sqrt{0}$ koşulunu sağlayan bir ν $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci verilsin ve $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^X$ olsun.

a) $[\nu(f_1)]^{2^{-n}} * \dots * [\nu(f_n)]^{2^{-n}} \leq \nu((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}})$ eşitsizliği geçerlidir.

b) $f_1 * f_2 * \dots * f_n = 0_X$ ise $\nu(f_1) * \nu(f_2) * \dots * \nu(f_n) = 0$ 'dır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. a) G ve dolayısıyla G^X kesin çift yanlı bir kuantal olduğundan her $f_1 \in L^X$ için

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu(f_1)} &= \sqrt{\nu(f_1)} * 1 = \sqrt{\nu(f_1)} * \sqrt{1} \\ &= \nu(f_1) \otimes 1 = \nu(f_1) \otimes \nu(1_X) \\ &\leq \nu(f_1 \otimes 1_X) = \nu(\sqrt{f_1} * \sqrt{1_X}) \\ &= \nu(\sqrt{f_1} * 1_X) = \nu(\sqrt{f_1}) \end{aligned}$$

olması sağlanır. Dolayısıyla $n = 1$ için istenen $[\nu(f_1)]^{2^{-1}} \leq \nu((f_1)^{2^{-1}})$ eşitsizliği elde edilmiş olur.

$[\nu(f_1)]^{2^{-n}} * \dots * [\nu(f_n)]^{2^{-n}} \leq \nu\left((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}\right)$ eşitsizliğinin sağlandığı varsayalım. Önerme 2.1.5.4'ten

$$\sqrt{(f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}} * \sqrt{(f_{n+1})^{2^{-n}}} \leq \sqrt{(f_1 * \dots * f_n * f_{n+1})^{2^{-n}}}$$

olduğu görülür. Buradan istenen eşitlik aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} [\nu(f_1)]^{2^{-(n+1)}} * \dots * [\nu(f_{n+1})]^{2^{-(n+1)}} &= \sqrt{[\nu(f_1)]^{2^{-n}} * \dots * [\nu(f_{n+1})]^{2^{-n}}} \\ &\leq \sqrt{[\nu(f_1)]^{2^{-n}} * \dots * [\nu(f_n)]^{2^{-n}}} * \sqrt{[\nu(f_{n+1})]^{2^{-n}}} \\ &\leq \sqrt{\nu\left((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}\right)} * \sqrt{\nu\left((f_{n+1})^{2^{-n}}\right)} \\ &= \nu\left((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}\right) \otimes \nu\left((f_{n+1})^{2^{-n}}\right) \\ &\leq \nu\left((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}} \otimes (f_{n+1})^{2^{-n}}\right) \\ &= \nu\left(\sqrt{(f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}} * \sqrt{(f_{n+1})^{2^{-n}}}\right) \\ &\leq \nu\left(\sqrt{(f_1 * \dots * f_n * f_{n+1})^{2^{-n}}}\right) \\ &= \nu\left((f_1 * \dots * f_n * f_{n+1})^{2^{-(n+1)}}\right) \end{aligned}$$

b) (a)'da elde edilen sonucun Önerme 2.2.1.6 ve Önerme 2.1.5.12 ile birlikte kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \nu(f_1) * \dots * \nu(f_n) &= \left[[\nu(f_1)]^{2^{-n}} \right]^{2^n} * \dots * \left[[\nu(f_n)]^{2^{-n}} \right]^{2^n} \\ &= \left[[\nu(f_1)]^{2^{-n}} * \dots * [\nu(f_n)]^{2^{-n}} \right]^{2^n} \\ &\leq \left[\nu\left((f_1 * \dots * f_n)^{2^{-n}}\right) \right]^{2^n} \\ &= \left[\nu\left((0_X)^{2^{-n}}\right) \right]^{2^n} \\ &\leq \left[\left(\left(\bigvee_{x \in X} (0_X)^{2^{-n}}(x) \right) \rightarrow 0 \right) \rightarrow 0 \right]^{2^n} \\ &= \left[(0^{2^{-n}} \rightarrow 0) \rightarrow 0 \right]^{2^n} = (0^{2^{-n}})^{2^n} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. ■

Önerme 2.2.1.10 Bir X kümesi üzerinde ν_1 ve ν_2 gibi iki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç verilsin. $\nu_1 \leq \nu_3$ ve $\nu_2 \leq \nu_3$ olacak biçimde bir ν_3 tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin var olması için gerek ve yeter koşul

$$f * g = 0_X \implies \nu_1(f) * \nu_2(g) = 0, \quad \forall f, g \in L^X$$

gerektirmesinin sağlanmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: Böyle bir ν_3 tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci varsa Önerme 2.2.1.7 ve Önerme 2.2.1.8'in bir sonucu olarak $f * g = 0_X$ olması $\nu_3(f) * \nu_3(g) = 0$ olmasını gerektirir. $\nu_1 \leq \nu_3$ ve $\nu_2 \leq \nu_3$ olduğundan $\nu_1(f) * \nu_2(g) = 0$ olması da sağlanır.

$(\impliedby)$: İstenen koşulun gerçekleştiği varsayalım ve $\nu_3 : L^X \rightarrow L$ dönüşümü $\nu_3(h) = \bigvee \{ \nu_1(f) * \nu_2(g) \mid f * g \leq h \}$ ile tanımlansın.

Her $h \in L^X$ için $h * 1_X = h$ ve $\nu_1(h) * \nu_2(1_X) = \nu_1(h) * 1 = \nu_1(h)$ olduğundan $\nu_1(h) \in \{ \nu_1(f) * \nu_2(g) \mid f * g \leq h \}$ olur ve buradan $\nu_1 \leq \nu_3$ elde edilir. $\nu_2 \leq \nu_3$ olduğu da benzer şekilde görülür ve geriye ν_3 'ün bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olduğunu göstermek kalır.

ν_3 'ün (F0) ve (F1)'i gerçeklediğini görmek kolaydır. $h_1, h_2 \in L^X$ ve $f_1 * g_1 \leq h_1$, $f_2 * g_2 \leq h_2$ olsun. (S3) gereği

$$[(\sqrt{0})_X \vee (\sqrt{f_1} * \sqrt{g_1})]^2 = (\sqrt{f_1 * g_1})^2 = f_1 * g_1 \leq h_1$$

olduğundan $(\sqrt{0})_X \vee (\sqrt{f_1} * \sqrt{g_1}) \leq \sqrt{h_1}$ 'dir. Benzer şekilde

$$(\sqrt{0})_X \vee (\sqrt{f_2} * \sqrt{g_2}) \leq \sqrt{h_2}$$

elde edilir. İki eşitsizliğin taraf tarafa çarpılmasıyla

$$[(f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2)] \vee [(f_1 \otimes 1_X) * (g_1 \otimes 0_X)] \vee [(1_X \otimes f_2) * (0_X \otimes g_2)] \leq h_1 \otimes h_2$$

bulunur ve ν_3 'ün tanımına dikkat edilerek (S3)'ün tekrar kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} [\nu_1(f_1) * \nu_2(g_1)] \otimes [\nu_1(f_2) * \nu_2(g_2)] &= \sqrt{\nu_1(f_1) * \nu_2(g_1)} * \sqrt{\nu_1(f_2) * \nu_2(g_2)} \\ &= \left[\left(\sqrt{\nu_1(f_1)} * \sqrt{\nu_2(g_1)} \right) \vee \sqrt{0} \right] * \left[\left(\sqrt{\nu_1(f_2)} * \sqrt{\nu_2(g_2)} \right) \vee \sqrt{0} \right] \\ &= \left[\sqrt{\nu_1(f_1)} * \sqrt{\nu_2(g_1)} * \sqrt{\nu_1(f_2)} * \sqrt{\nu_2(g_2)} \right] \vee \left[\sqrt{\nu_1(f_1)} * \sqrt{\nu_2(g_1)} * \sqrt{0} \right] \\ &\quad \vee \left[\sqrt{0} * \sqrt{\nu_1(f_2)} * \sqrt{\nu_2(g_2)} \right] \vee 0 \\ &= [(\nu_1(f_1) \otimes \nu_1(f_2)) * (\nu_2(g_1) \otimes \nu_2(g_2))] \vee [(\nu_1(f_1) \otimes \nu_1(1_X)) * (\nu_2(g_1) \otimes \nu_2(0_X))] \\ &\quad \vee [(\nu_1(1_X) \otimes \nu_1(f_2)) * (\nu_2(0_X) \otimes \nu_2(g_2))] \\ &\leq [\nu_1(f_1 \otimes f_2) * \nu_2(g_1 \otimes g_2)] \vee [\nu_1(f_1 \otimes 1_X) * \nu_2(g_1 \otimes 0_X)] \\ &\quad \vee [\nu_1(1_X \otimes f_2) * \nu_2(0_X \otimes g_2)] \\ &\leq \nu_3(h_1 \otimes h_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Önerme 2.1.5.5 kullanılarak bu eşitsizliğin sol tarafında gerekli olan eküslerin alınmasıyla (F2)'ye ulaşılır. $f * g \leq 0_X$ olmasını sağlayan her $f, g \in L^X$ için $f * g = 0_X$ olduğundan kabul gereği $\nu_1(f) * \nu_2(g) = 0$ olur. Bu ise $\nu_3(0_X) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece (F3) de gerçekleşir ve ν_3 bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olur.

$a \in L, h \in L^X$ olsun.

$$f, g \in L^X, f * g \leq h \implies (a * f) * g \leq a * h$$

yazılabileceğinden, kuantal işleminin eküse dağılması ve ν_1 ile ν_2 'nin tabakalılığı kullanılarak $a * \nu_3(h) \leq \nu_3(a * h)$ eşitsizliği elde edilir ve buradan ν_3 $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin tabakalı olduğu sonucuna ulaşılır. ■

Önerme 2.2.1.11 Bir X kümesi üzerinde $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ gibi n tane tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç verildiğinde,

$$\nu_1 \leq \bar{\nu}_{n+1}, \nu_2 \leq \bar{\nu}_{n+1}, \dots, \nu_n \leq \bar{\nu}_{n+1}$$

olacak biçimde bir $\bar{\nu}_{n+1}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin var olması için gerek ve yeter koşul her $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^X$ için

$$f_1 * f_2 * \dots * f_n = 0_X \implies \nu_1(f_1) * \nu_2(f_2) * \dots * \nu_n(f_n) = 0$$

gerektirmesinin sağlanmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. ($\implies$) : Önerme 2.2.1.10'un kanıtında Önerme 2.2.1.8'in kullanımına benzer şekilde, Önerme 2.2.1.9 (b)'nin kullanılmasıyla kolayca görülür.

($\Leftarrow$) : $\bar{\nu}_{n+1}(h) = \bigvee \{\nu_1(f_1) * \dots * \nu_n(f_n) \mid f_1 * \dots * f_n \leq h\}$ tanımı yapılsın. İstenen sonucu elde etmek için $\bar{\nu}_{n+1}$ 'in bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olduğunu göstermek yeterlidir. $n = 1$ için $\bar{\nu}_2 = \nu_1$ olduğu, $n = 2$ olması durumunda ise bu şekilde tanımlanacak $\bar{\nu}_3$ 'ün Önerme 2.2.1.10'un kanıtında varlığı ispatlanan ν_3 tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecine eşit olacağı görülür.

Şimdi, istenen gerektirmeyi sağlayan $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{n-1}$ gibi $n-1$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç verildiğinde,

$$\bar{\nu}_n(h) = \bigvee \{\nu_1(f_1) * \dots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) \mid f_1 * \dots * f_{n-1} \leq h\}$$

ile tanımlanan $\bar{\nu}_n$ 'in bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olduğu varsayalım.

X üzerinde $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçleri verilsin. Tümevarım varsayımı gereği,

$$\bar{\nu}_n(h) = \bigvee \{\nu_1(f_1) * \dots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) \mid f_1 * \dots * f_{n-1} \leq h\}$$

ile tanımlanan $\bar{\nu}_n$ bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçtir. Önerme 2.2.1.10 $\bar{\nu}_n$ ve ν_n için uygulanırsa

$$\nu_{n+1}(h) = \bigvee \{\bar{\nu}_n(f) * \nu_n(g) \mid f * g \leq h\}$$

dönüşümünün X üzerinde tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç belirlediği görülür ve ν_{n+1} 'in başta tanımlanan $\bar{\nu}_{n+1}$ 'e eşit olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. Bu eşitliği

gerektiren eşitsizliklerin bir yönü

$$\begin{aligned}
\nu_{n+1}(h) &= \bigvee \{ \bar{\nu}_n(f) * \nu_n(g) \mid f * g \leq h \} \\
&= \bigvee \{ \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) \mid f_1 * \cdots * f_{n-1} \leq f \} * \nu_n(g) \mid f * g \leq h \} \\
&= \bigvee \{ \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) * \nu_n(g) \mid f_1 * \cdots * f_{n-1} \leq f \} \mid f * g \leq h \} \\
&\leq \bigvee \{ \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) * \nu_n(g) \mid f_1 * \cdots * f_{n-1} * g \leq f * g \} \mid f * g \leq h \} \\
&\leq \bigvee \{ \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) * \nu_n(g) \mid f_1 * \cdots * f_{n-1} * g \leq h \} \} \\
&= \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) * \nu_n(f_n) \mid f_1 * \cdots * f_{n-1} * f_n \leq h \} \\
&= \bar{\nu}_{n+1}(h)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Diğer eşitsizlik ise $\bar{\nu}_n$ 'in tanımının

$$\nu_1(f_1) * \cdots * \nu_{n-1}(f_{n-1}) \leq \bar{\nu}_n(f_1 * \cdots * f_{n-1})$$

olmasını gerektirdiğine dikkat edilerek

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_{n+1}(h) &= \bigvee \{ \nu_1(f_1) * \cdots * \nu_n(f_n) \mid f_1 * \cdots * f_n \leq h \} \\
&\leq \bigvee \{ \bar{\nu}_n(f_1 * \cdots * f_{n-1}) * \nu_n(f_n) \mid (f_1 * \cdots * f_{n-1}) * f_n \leq h \} \\
&\leq \bigvee \{ \bar{\nu}_n(f) * \nu_n(g) \mid f * g \leq h \} \\
&= \nu_{n+1}(h)
\end{aligned}$$

biçiminde çıkar. ■

Bir A kümesinin $\#(A)$ ile gösterilen kardinalitesi, A 'dan birebir örten bir fonksiyon tanımlanabilen bütün kümelerin oluşturduğu sınıf olarak tanımlanır (sınıf kavramına Bölüm 2.3'te değinilecektir). A kümesinden B kümesine tanımlı birebir örten bir fonksiyon varsa $\#(A) = \#(B)$ olacağını görmek kolaydır. A 'dan B 'nin bir alt kümesine tanımlı birebir örten bir fonksiyon varsa $\#(A) \leq \#(B)$ yazılır. $\#(A) \leq \#(B)$ ve $\#(A) \neq \#(B)$ durumlarını bir arada belirtmek için $\#(A) < \#(B)$ kısaltması kullanılır.

$\mathbb{N}$ kümesinin elemanları ile sonlu kümelerin belirttikleri kardinalite sınıfları doğal bir şekilde birbirine karşılık gelir. Bu nedenle her bir $n \in \mathbb{N}$ sayısını, n elemanlı bir kümenin kardinalitesiyle eş tutmak mümkündür. Böylece $\#(\emptyset) = 0$, $\#(\{0\}) = 1$, $\#(\{0, 1\}) = 2$ ve genel olarak $\#(\{0, 1, \dots, n-1\}) = n$ gösterimleri kullanılabilir. Bunun yanında $\#(\mathbb{N})$, $\aleph_0$ ile gösterilir. Bir A kümesinin sonlu olması için gerek ve yeter koşul $\#(A) < \aleph_0$ olmasıdır (Willard, 2004).

Aşağıdaki teorem, Önerme 2.2.1.10 ve Önerme 2.2.1.11'i, herhangi sayıda eleman içeren tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ailelerine genellemektedir.

Teorem 2.2.1.1 $\{\nu_i \mid i \in I\}$ bir X kümesi üzerindeki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçlerin bir ailesi olsun. Bu tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ailesinin bir tabakalı üst sınırı bulunması için gerek ve yeter şart, I 'nın boş olmayan her sonlu $\{i_1, \dots, i_n\}$ alt kümesi için

$$f_{i_1} * \dots * f_{i_n} = 0_X \implies \nu_{i_1}(f_{i_1}) * \dots * \nu_{i_n}(f_{i_n}) = 0, \quad \forall f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \in L^X$$

koşulunun sağlanmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: Böyle bir üst sınır varsa, bu üst sınıra Önerme 2.2.1.9 (b)'nin uygulanmasıyla bu gerektirmenin doğruluğu kolayca görülür.

$(\impliedby)$: Önerme 2.2.1.11 gereği I 'nın boş olmayan her bir sonlu J alt kümesine karşılık, her $j \in J$ için $\nu_j \leq \bar{\nu}_J$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}_J$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci bulunabilir. $\bar{\nu}_J$, J kümesinin öğelerince damgalanan tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçlerin bir üst sınırı olduğundan, I 'nın boş olmayan alt kümeleri için $J \subseteq K$ olması $\bar{\nu}_J \leq \bar{\nu}_K$ olmasını gerektirir.

I 'nın boş olmayan sonlu alt kümelerinin

$$\mathcal{S}_1(I) = \{J \mid J \subseteq I, J \neq \emptyset, J \text{ sonlu}\}$$

ailesi ve en az iki öğeli sonlu alt kümelerinden oluşan

$$\mathcal{S}_2(I) = \{J \mid J \subseteq I, 2 \leq \#(J) < \aleph_0\}$$

ailesi verilsin. $\bar{\nu}_\infty = \bigvee \{\bar{\nu}_J \mid J \in \mathcal{S}(I)\}$ tanımı yapılsın. $\bar{\nu}_\infty$ 'un (F0), (F1) ve (F3)'ü gerçekleştiği her bir $\bar{\nu}_J$ 'nin bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olmasından hemen görülür. Ayrıca

$$\bigvee \{\bar{\nu}_J \mid J \in \mathcal{S}(I)\} = \bigvee \{\bar{\nu}_J \mid J \in \mathcal{S}_2(I)\}$$

olduğuna dikkat edilip Önerme 2.1.5.5'un kullanılmasıyla her $f, g \in L^X$ için

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_\infty(f) \otimes \bar{\nu}_\infty(g) &= \sqrt{\bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \bar{\nu}_J(f)} * \sqrt{\bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \bar{\nu}_J(g)} \\ &= \left(\bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \sqrt{\bar{\nu}_J(f)} \right) * \left(\bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \sqrt{\bar{\nu}_J(g)} \right) \\ &= \bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \left(\bigvee_{K \in \mathcal{S}_1(I)} \left(\sqrt{\bar{\nu}_J(f)} * \sqrt{\bar{\nu}_K(g)} \right) \right) \\ &= \bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \left(\bigvee_{K \in \mathcal{S}_1(I)} \bar{\nu}_J(f) \otimes \bar{\nu}_K(g) \right) \\ &\leq \bigvee_{J \in \mathcal{S}(I)} \left(\bigvee_{K \in \mathcal{S}(I)} \bar{\nu}_{J \cup K}(f) \otimes \bar{\nu}_{J \cup K}(g) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bigvee_{J \in \mathcal{S}_1(I)} \left(\bigvee_{K \in \mathcal{S}_1(I)} \bar{\nu}_{J \cup K} (f \otimes g) \right) \\
&= \bigvee_{J \in \mathcal{S}_2(I)} \bar{\nu}_J (f \otimes g) \\
&= \bar{\nu}_\infty (f \otimes g)
\end{aligned}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece (F2) gösterilip $\bar{\nu}_\infty$ 'un bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olduğu görülmüş olur. $\bar{\nu}_\infty$ 'un tabakalılığı ise kuantal işleminin eküs üzerine dağılmasının olağan bir sonucudur. ■

Önerme 2.2.1.12 ν bir X kümesi üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ise,

$$\bar{\nu}(f_1) * \cdots * \bar{\nu}(f_n) \leq \bar{\nu}(f_1 * \cdots * f_n) \quad , \quad \forall f_{i_1}, \dots, f_{i_n} \in L^X$$

koşulunu sağlayan $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci bulunabilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. Önerme 2.2.1.9 (b) gereği, her $i \in I$ için $\nu_i = \nu$ olacak biçimde verilen $\{\nu \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ailesi, I 'nın boş olmayan her sonlu alt kümesi için Teorem 2.2.1.1'in ifadesinde verilen koşulu sağlar. Özel olarak, I 'nın n elemanlı bir J alt kümesi için, $\{\nu \mid i \in J\}$ kümesine üst sınır olarak ν 'nün kendisi yerine, Önerme 2.2.1.11'in kanıtında tanımlanan $\bar{\nu}_n$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci alınırsa, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\bar{\nu}_{n+1}(h) = \bigvee \{\nu(f_1) * \cdots * \nu(f_n) \mid f_1 * \cdots * f_n \leq h\}$, $\forall h \in L^X$ ile tanımlı bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç elde edilmiş olur.

$n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_{n+1}(h) &= \bigvee \{\nu(f_1) * \cdots * \nu(f_n) \mid f_1 * \cdots * f_n \leq h\} \\
&= \bigvee \{\nu(f_1) * \cdots * \nu(f_n) * \nu(1_X) \mid f_1 * \cdots * f_n * 1_X \leq h\} \\
&\leq \bigvee \{\nu(f_1) * \cdots * \nu(f_n) * \nu(f_{n+1}) \mid f_1 * \cdots * f_n * f_{n+1} \leq h\} \\
&\leq \bar{\nu}_{n+2}(h)
\end{aligned}$$

yazılabileceğinden $(\bar{\nu}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^+}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçlerin artan bir dizisidir. Özel olarak $\bar{\nu}_2 = \nu$ olacağından, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\nu \leq \bar{\nu}_{n+1}$ 'dir.

$\bar{\nu} = \bigvee \{\bar{\nu}_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^+\} \in L^{(L^X)}$ fonksiyonu tanımlansın. $\bar{\nu}$, Teorem 2.2.1.1'in kanıtında tanımlanan $\bar{\nu}_\infty$ 'a karşılık geldiğinden bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçtir ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\nu \leq \bar{\nu}_{n+1}$ olduğundan $\nu \leq \bar{\nu}$ olması sağlanır.

$\bar{\nu}_2(f) * \bar{\nu}_2(g) = \nu(f) * \nu(g) \leq \bigvee \{\nu(f_1) * \nu(f_2) \mid f_1 * f_2 \leq f * g\} = \bar{\nu}_3(f * g)$ olduğundan $n = 1$ için $\bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(f) * \bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(g) \leq \bar{\nu}_{2^n+1}(f * g)$ eşitsizliği doğrudur.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $\bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(f) * \bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(g) \leq \bar{\nu}_{2^n+1}(f * g)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_{2^n+1}(f) * \bar{\nu}_{2^n+1}(g) &= \bigvee_{f_1 * \dots * f_{2^n} \leq f} \{\nu(f_1) * \dots * \nu(f_{2^n})\} * \bigvee_{g_1 * \dots * g_{2^n} \leq g} \{\nu(g_1) * \dots * \nu(g_{2^n})\} \\
&= \bigvee_{\substack{f_1 * \dots * f_{2^n} \leq f \\ g_1 * \dots * g_{2^n} \leq g}} \{\nu(f_1) * \dots * \nu(f_{2^n}) * \nu(g_1) * \dots * \nu(g_{2^n})\} \\
&\leq \bigvee_{h_1 * \dots * h_{2^{n+1}} \leq f * g} \{\nu(h_1) * \dots * \nu(h_{2^{n+1}})\} \\
&= \bar{\nu}_{2^{n+1}+1}(f * g)
\end{aligned}$$

eşitsizliği de geçerli olur. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\nu_{n+1} \leq \bar{\nu}$ olduğundan, tümevarımla elde edilen yukarıdaki eşitsizlikten, her $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(f) * \bar{\nu}_{2^{n-1}+1}(g) \leq \bar{\nu}(f * g)$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $(\bar{\nu}_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^+}$ dizisi artan olduğundan

$$\bigvee \{\bar{\nu}_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}^+\} = \bigvee \{\bar{\nu}_{2^{n-1}+1} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$$

yazılabilir. Böylece yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafındaki ifadelerin eküsü alınarak

$$\bar{\nu}(f) * \bar{\nu}(g) \leq \bar{\nu}(f * g)$$

elde edilir. Herhangi $n \in \mathbb{N}^+$ için

$$\bar{\nu}(f_1) * \dots * \bar{\nu}(f_n) \leq \bar{\nu}(f_1 * \dots * f_n)$$

eşitsizliği ise, ikili eşitsizlikten, $*$ işleminin birleşmeliliği tekrar tekrar kullanılarak elde edilir. ■

$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme $a \in L$ olsun. $a < b$ olacak biçimde bir $b \in L$ yoksa a 'ya L 'nin bir maksimal (büyükçe) ögesi, $c < a$ olacak biçimde $c \in L$ yoksa a 'ya L 'nin bir minimal (küçükçe) ögesi denir (Willard, 2004).

Tanım 2.2.1.4 a) $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X), \leq)$ kısmi sıralı kümesinin maksimal bir ögesine X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -ultrasüzgeç denir.

b) $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X), \leq)$ kısmi kümesinin maksimal bir ögesine X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Uyarı 2.2.1.1 ν bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç ise $\nu < \bar{\nu}$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci yoktur. Ancak bu, $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak (tabakalı olması gerekmeyen) bir $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin bulunmaması anlamına gelmez. Dolayısıyla bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgecin, bir $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç olması gerekmez. Diğer taraftan, aynı zamanda tabakalı olan bir $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgecin bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç olacağı açıktır.

Tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç tanımıyla Önerme 2.2.1.12 karşılaştırılarak aşağıdaki sonuca varılabilir.

Sonuç 2.2.1.1 Her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç

$$\nu(f_1) * \cdots * \nu(f_n) \leq \nu(f_1 * \cdots * f_n)$$

eşitsizliğini sağlar (Höhle ve Šostak, 1999).

$(L, \leq)$ bir kısmi sıralı kümeysen ve her $a, b \in L$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ durumlarından en az biri geçerliyse $\leq$ bağıntısına L üzerinde bir tam sıralama bağıntısı, $(L, \leq)$ ikilisine de bir tam sıralı küme denir. $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme, $M \subseteq L$ ise ve L üzerindeki $\leq$ bağıntısının M üzerine kısıtlanması M üzerinde bir tam sıralama bağıntısı veriyorsa, M 'nin L 'de (veya L içerisinde) bir zincir olduğu söylenir. Boş olmayan bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi içerisindeki boş olmayan her zincirin L 'de bir üst sınırı var olduğunda, L 'nin en az bir maksimal ögesinin bulunacağını ifade eden Zorn Lemmasının, boş olmayan kümelerden oluşan ve kendisi de boş olmayan bir küme ailesindeki kümelerin kartezyen çarpımının hiçbir zaman boş kümeyi vermeyeceğini öne süren Seçme Aksiyomuna denk olduğu gösterilebilir (Willard, 2004). Bu çalışmada Seçme Aksiyomunun doğru olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 2.2.1.2 a) $\mathfrak{G}$ bir cl-grupoid olmak üzere, X üzerindeki her bir ν $\mathfrak{G}$ -süzgeci için $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde en az bir $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}$ -ultrasüzgeci vardır.

b) X üzerindeki her bir ν tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci için $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde en az bir tabakalı $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeci vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. a) ν X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olsun ve $\mathfrak{E} = \{\nu' \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X) \mid \nu \leq \nu'\}$ kümesi tanımlansın. $\mathfrak{E} = \{\nu_i \mid i \in I\}$, $\mathfrak{E}$ içinde boş olmayan bir zincir ($\leq$ bağıntısının kısıtlamasına göre tam sıralı alt küme) olsun ve $\nu_{\infty} : L^X \rightarrow L$ dönüşümü

$$\nu_{\infty}(f) = \bigvee_{i \in I} \nu_i(f)$$

ile tanımlansın.

$\nu \leq \nu_{\infty}$ olduğu ve ν_{∞} 'un (F0), (F1) ve (F3) koşullarını sağladığı açıktır. Ayrıca $\mathfrak{E}$ tam sıralı olduğundan her $i, j \in I$ için $\nu_i \leq \nu_j$ veya $\nu_j \leq \nu_i$ 'dir ve böylece $\otimes$ işleminin sıra korurluğu ve (F1)'den her $i, j \in I, f, g \in L^X$ için ya

$$\nu_i(f) \otimes \nu_j(g) \leq \nu_j(f) \otimes \nu_j(g)$$

ya da

$$\nu_i(f) \otimes \nu_j(g) \leq \nu_i(f) \otimes \nu_i(g)$$

olur. Dolayısıyla

$$\nu_i(f) \otimes \nu_j(g) \leq (\nu_i(f) \otimes \nu_i(g)) \vee (\nu_j(f) \otimes \nu_j(g))$$

eşitsizliği her durumda sağlanır ve cl-grupoid işleminin etküs üzerine dağılımlılığı da kullanılarak

$$\begin{aligned} \nu_\infty(f) \otimes \nu_\infty(g) &= \left(\bigvee_{i \in I} \nu_i(f) \right) \otimes \left(\bigvee_{j \in I} \nu_j(g) \right) \\ &= \bigvee_{i \in I} \left(\nu_i(f) \otimes \left(\bigvee_{j \in I} \nu_j(g) \right) \right) \\ &= \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} (\nu_i(f) \otimes \nu_j(g)) \right) \\ &\leq \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} [(\nu_i(f) \otimes \nu_i(g)) \vee (\nu_j(f) \otimes \nu_j(g))] \right) \\ &\leq \bigvee_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in I} [\nu_i(f \otimes g) \vee \nu_j(f \otimes g)] \right) \\ &= \bigvee_{i \in I} \left(\nu_i(f \otimes g) \vee \bigvee_{j \in I} \nu_j(f \otimes g) \right) \\ &= \left(\bigvee_{i \in I} \nu_i(f \otimes g) \right) \vee \left(\bigvee_{j \in I} \nu_j(f \otimes g) \right) \\ &= \nu_\infty(f \otimes g) \vee \nu_\infty(f \otimes g) = \nu_\infty(f \otimes g) \end{aligned}$$

eşitsizliği görülür. Sonuç olarak $\nu_\infty \in \mathfrak{E}$ olduğu elde edilerek $\mathfrak{E}$ için $\mathfrak{E}$ 'de bir üst sınır bulunmuş olur. $\mathfrak{E}$ içindeki boş olmayan her zincirin $\mathfrak{E}$ içinde bir üst sınırı bulunduğundan Zorn Lemması gereği $\mathfrak{E}$ 'nin bir $\bar{\nu}$ maksimal ögesi vardır. Ayrıca $\mathfrak{E}$ 'nin tanımı gereği $\bar{\nu}$ 'nin $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ 'te de bir maksimal öge, yani bir $\mathfrak{G}$ -ultrasüzgeç olduğu açıktır.

b) $\mathfrak{E} = \left\{ \nu' \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X) \mid \nu \leq \nu' \right\}$ tanımı yapıp $\mathfrak{E}$ içinde boş olmayan bir $\mathfrak{C} = \{\nu_i \mid i \in I\}$ zincirinin alınmasıyla (a)'dakine benzer şekilde tanımlanan ν_∞ dönüşümünün bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olduğu elde edilir. Ayrıca $\mathfrak{E}$ 'deki $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçlerin tabakalılığından her $a \in L$, $f \in L^X$ için

$$a * \nu_\infty(f) = a * \bigvee_{i \in I} \nu_i(f) = \bigvee_{i \in I} [a * \nu_i(f)] \leq \bigvee_{i \in I} [\nu_i(a * f)] = \nu_\infty(a * f)$$

olup $\nu_\infty \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ ve özel olarak $\nu_\infty \in \mathfrak{E}$ olduğu görülür. Zorn Lemmasının uygulanmasıyla ν 'yü kapsayan bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeci elde edilir. ■

Teorem 2.2.1.3 $G = (L, \leq, *)$ bir dengeli sıkı kareköklü GL-monoid ise bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgecin görüntüsü de tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeçtir (Höhle ve Šostak, 1999).

GL-monoidler teorisinin burada amaçlanandan çok daha kapsamlı olarak çalışılmasını gerektirdiğinden bu teoremin kanıtı burada ele alınmamıştır. Kanıtı giden yoldaki tanım ve teorem zincirinin takip edilebileceği referanslar Höhle ve Šostak (1999)’ta bulunabilir.

2.3 Kategori Teorisi

Matematiğin birçok farklı dalında farklı tanımlarla ortaya çıkan ancak benzer nitelikler gösteren yapılar bulunur. Örneğin, tanımları farklı olmasına karşın topolojik uzaylar için homeomorfizmler, gruplar için grup izomorfizmleri, vektör uzayları için lineer izomorfizmler ve kümeler için birebir-örten fonksiyonlar birbirlerine benzer olarak birer eşyapı dönüşümü rolü üstlenirler. Topolojik uzaylar için sürekli fonksiyonlar, halkalar için halka homomorfizmleri, metrik uzaylar için daralma dönüşümleri ve kısmi sıralı kümeler için sıra koruyan dönüşümler ise yapıyı tam olarak korumamakla birlikte farklı nesneler arasında anlamlı bir geçiş yapmak için uygun birer araç olarak görülürler. Topolojik uzayların, grupların, vektör uzaylarının ve kümelerin (direkt) çarpımları da farklı biçimlerde tanımlı olmalarına karşın benzer özellikler gösterirler. Matematiksel yapılar tanımlamaya devam edildikçe, yeni yapılarda yukarıdakilerine benzer kavramların bir karşılığının bulunup bulunmadığının araştırılması ve varsa bu kavramların tanımlarının yapılması gereksinimi doğmaktadır. Bu tanımlama sürecinin ve tanımların bir standarda kavuşturulabilmesi ise yeteri derecede genel bir matematiksel yapı tanımının verilmesi ve bu tanımın bilinen yapılar içerisinde karşılaşılan benzer kavramların uygun birer genellemesine giden uzantılarının sunulmasına bağlıdır. Kategori teorisi yukarıda bahsedilen gereksinimleri karşılayacak bir genel bakış açısını, herhangi bir matematiksel yapı çeşidinin bütün örneklerini ve bu yapı birimleri arasındaki geçiş yollarını belirli kurallara bağlı kalan bir “kategori” içerisinde ele alarak sunarken, farklı yapı türleri arasında güvenilir bir geçişin yapılmasını da olanaklı kılmaktadır.

Uygulamada en sık karşılaşılan kategoriler kümeler üzerinde tanımlanmış matematiksel yapılarla ilgili olanlardır. Bu tür kategoriler genel olarak ilgili

matematiksel yapının bütün örneklerini bir arada ele aldıklarından küme olamayacak derecede geniş parçalar içermek zorundadırlar. Örneğin kümelerin kategorisi üzerinde çalışmak için bütün kümelerin topluluğundan bahsedilmesi gerekmekte, ancak böyle bir topluluğun küme olarak kabul edilmesi çeşitli çelişkilere neden olmaktadır. Cantor ve Russell paradoksları bu tür çelişkilere basit birer örnek teşkil eder. Böyle tehlikeli derecede kapsamlı genelliklerde çalışılırken, olası çelişkilerden kaçınmayı mümkün kılmak için sınıf kavramı ortaya atılmıştır. Burada küme ve sınıf kavramlarının aksiyomatik altyapılarına ayrıntılı olarak değinilmeyecek, yalnızca sınıf kavramından kısaca ve sezgisel bir yaklaşımla bahsedilecektir. Bu kavramların matematiksel tanımları için Devlin (1993) veya herhangi bir diğer aksiyomatik kümeler kuramı kitabına başvurulabilir.

Genel olarak bir sınıf, kümelerin herhangi bir topluluğu olarak düşünülebilir. Küme teorisindeki $\in$, $\notin$, $\{\}$, $|$ ve $\subseteq$ benzeri simgeler, sınıflar için de benzer anlamlara gelirler. α bir sınıf ve $X \in \alpha$ ise X bir küme olmak zorundadır. $p(x)$ bir açık önerme, α bir sınıf olmak üzere $\{X \in \alpha \mid p(X)\}$ sınıfı her zaman iyi tanımlıdır. α ve $\mathfrak{b}$ sınıfları verildiğinde küme teorisindekilere benzer biçimde $\alpha \cup \mathfrak{b}$, $\alpha \cap \mathfrak{b}$ ve $\alpha \times \mathfrak{b}$ sınıfları oluşturulabilir. Dolayısıyla sınıflar arasında bağıntılar ve fonksiyonlar tanımlamakta herhangi bir sıkıntı yoktur. Bir küme ile damgalanmış küme ailelerine benzer olarak, sınıf ile damgalanmış küme aileleri tanımlanabilir. α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sınıflar olmak üzere $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ sıralısının da bir sınıf olduğu kabul edilir. Her ne kadar uygulamalarda çoğu zaman ihmal edilse de, teknik nedenlerden dolayı bir kümenin bütün öğelerinin yine birer küme olduğu varsayılır. Bu bakımdan her küme aynı zamanda bir sınıftır, ancak her sınıfın bir küme olması gerekmez. Bir kümeden küme olmayan bir sınıfa örten fonksiyon tanımlamak olası değildir. Kapsama bağıntısına göre genel anlamda bir en büyük küme bulunmamasına karşın bir en büyük sınıf vardır ve u ile gösterilen bu sınıf, bütün kümelerin sınıfıdır (Adámek ve diğ., 2004).

Büyük küme topluluklarının küme olduğunun kabulünden kaynaklanan bazı çelişkilerin sınıfların kullanımıyla nasıl önlendikleri Russell Paradoksu üzerinde örneklenebilir. u bütün kümelerin sınıfı olmak üzere $\mathfrak{v} = \{X \mid X \in u \text{ ve } X \notin X\}$ olduğu kabul edilsin. Hiçbir X kümesi için $X \in X$ olmayacağı düzenlilik aksiyomu gibi küme aksiyomları ile garanti altına alındığından ve her küme u 'nun öğesi

olduğundan $\mathfrak{v}$ bütün kümeleri içerir, yani $\mathfrak{v} = \mathfrak{u}$ olup $\mathfrak{v}$ bir küme değildir. Buradan “ $\mathfrak{v} \in \mathfrak{u}$ ” ve onun “ve” bağlacıyla güçlendirilmiş olan “ $\mathfrak{v} \in \mathfrak{u}$ ve $\mathfrak{v} \notin \mathfrak{v}$ ” önermesinin yanlış olduğu ortaya çıkar. Böylece $\mathfrak{v}$ ’nin tanımlayıcı özelliğinden dolayı $\mathfrak{v} \notin \mathfrak{v}$ olduğu görülür ve bu durum “bütün kümelerin kümesi” üzerinde görülen çelişkinin bir benzerinin bütün kümelerin sınıfı üzerinde görülmesini engeller.

2.3.1 Kategoriler

Kategoriler çok genel yapılar olabildiklerinden kategori teorisindeki bazı kavramların sınıflar üzerinden tanımlanmaları gerekir. Bu sınıflar aynı zamanda birer küme olduklarında, ilgili kavramdan “küçük” sıfatıyla birlikte söz edilebilir. Bazı kavramlar ise geleneksel olarak kümeler üzerinde tanımlanageldiğinden, bunların küme olmayan bir sınıf üzerinde de tanımlanmış olabileceklerinin vurgulanması gerektiğinde “geniş” sözcüğü kullanılır.

Tanım 2.3.1.1 Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathbf{K} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, I, \cdot)$ dörtlüsüne bir kategori denir (Adámek ve diğ., 2004).

- (i) $|\mathbf{K}|$ bir sınıftır.
- (ii) Her $A, B \in |\mathbf{K}|$ ikilisi için $\text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ bir kümedir.
- (iii) $(A, B) \neq (C, D)$ ise $\text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B) \cap \text{hom}_{\mathbf{K}}(C, D) = \emptyset, \forall A, B, C, D \in |\mathbf{K}|$
- (iv) Her $A, B, C \in |\mathbf{K}|$ için $\cdot_{ABC} : \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, C) \times \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, C)$,
 $(g, f) \mapsto \cdot_{ABC}(g, f) = g \cdot_{ABC} f$ bir dönüşümdür.
- (v) Her $A, B, C, D \in |\mathbf{K}|$, $f \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$, $g \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, C)$, $h \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(C, D)$ için $h \cdot_{ACD}(g \cdot_{ABC} f) = (h \cdot_{BCD} g) \cdot_{ABD} f$
- (vi) Her $B \in |\mathbf{K}|$ için bir $I_B \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, B)$ vardır öyle ki, $\forall f \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ için $I_B \cdot_{ABB} f = f$ ve her $g \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, C)$ için $g \cdot_{BBC} I_B = g$

$\mathbf{K} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, I, \cdot)$ bir kategori olmak üzere $|\mathbf{K}|$ sınıfının öğelerine $\mathbf{K}$ -nesne (veya kısaca nesne) denir. $\text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ kümesi $\mathbf{K}$ kategorisinde A ’dan B ’ye morfizmlerin kümesi olarak adlandırılır. Kategoriyeye vurgu yapılmasına gerek olmadığında $\text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ yerine $\text{hom}(A, B)$ yazılabilir. $f \in \text{hom}(A, B)$ ise f ’in A ’dan B ’ye bir $\mathbf{K}$ -morfizm (veya kısaca morfizm) olduğu söylenir ve bu durum $f : A \xrightarrow{\mathbf{K}} B$, $A \xrightarrow{\mathbf{K}} B$ veya kategoriye vurgu yapılmadan $f : A \rightarrow B$, $A \xrightarrow{f} B$

gösterimlerinden biri ile ifade edilir. $A \xrightarrow{f} B$ olması durumunda A 'ya f 'in tanım nesnesi, B 'ye f 'in değer nesnesi denir. (iii) koşulu her bir morfizmin tam olarak birer tane tanım ve değer nesnesinin bulunduğunu ifade eder. Genel olarak herhangi bir karışıklığa sebep olmayacağından bileşke sembolünün altına nesne adları yazılmaz, böylece $\cdot_{ABC}$, $\circ_{ABC}$, $\bullet_{ABC}$ gibi gösterimlerin yerine $\cdot$, $\circ$, $\bullet$ basitleştirilmiş simgeleri kullanılır. I_B morfizmine B için birim morfizm adı verilir. Her ne kadar morfizmler ile kategorik bileşke, fonksiyonlar ile klasik bileşkenin bir benzeri olarak tasarlanmışsa da, bir morfizmin her zaman bir fonksiyon olması, böyle olduğunda da bileşkenin bilinen bileşkeyle aynı olması gerekmez (Adámek ve diğ., 2004).

Belirli durumlarda birden çok morfizmin gösterilmesinde diyagram adı verilen gösterim biçimi kullanılabilir. Genelde doğrusal bir diyagram yalnızca morfizmlerin tanım ve değer nesneleri hakkında bilgi verirken, içerisinde döngüler veya dallanmalar olan diyagramlar morfizmler arasındaki ilişkileri de açıklar. Örneğin

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

doğrusal diyagramı yalnızca $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ve $h : C \rightarrow D$ morfizmlerinin varlığını belirtirken

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{k} & D \end{array}$$

diyagramı $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow C$, $h : B \rightarrow D$ ve $k : C \rightarrow D$ morfizmlerinin varlığını bildirirken yanında $h \cdot f = k \cdot g$ eşitliğinin var olduğunu da söyler. Diyagram üzerinde birim morfizmleri belirtmek için çift çizgi kullanılır. Buna göre

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ f_2 \downarrow & & \parallel \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

diyagramından $I_B \cdot f_1 = I_B \cdot f_2$ yani $f_1 = f_2$,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g} & C \\ j_A \downarrow & & \uparrow j_B & & \parallel \\ A' & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g'} & C \end{array}$$

diyagramından ise $f' = j_B \cdot f \cdot j_A$ ve $g' = g \cdot j_B$ olduğu anlaşılır. Aynı nesne çiftleri arasında ok yönündeki herhangi iki yolun eşit olduğu anlamı taşıyan bu tür diyagramlara değişimli diyagram denir. Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe her diyagramın değişimli olduğu kabul edilecektir (Adámek ve diğ., 2004).

Herhangi bir kategoriye belirtmek için **J**, **K**, **L** gibi harfler kullanılabilir. Bununla birlikte, bazı önemli kategoriler için birden çok harften oluşan özel gösterimler atanmıştır.

Örnek 2.3.1.1 En temel kategorilerden biri olan **SET** $(\mathbf{u}, \text{hom}_{\mathbf{SET}}, \text{I}, \circ)$ kategorisi kümeler ve fonksiyonların kategorisi adını alır. Burada $|\mathbf{SET}| = \mathbf{u}$ bütün kümelerin sınıfıdır, yani **SET** kategorisinin nesneleri kümelerdir. Herhangi A ve B kümeleri için $\text{hom}_{\mathbf{SET}}(A, B)$, A 'dan B 'ye bütün fonksiyonların kümesidir. Başka bir deyişle **SET**-morfizm ve fonksiyon denk kavramlardır. Bir B kümesi için $\text{I}_B : B \rightarrow B$ birim morfizmi özdeşlik fonksiyonu olarak alınır ve $\circ$ bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkesidir (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.1.2 Topolojik uzaylar ve sürekli fonksiyonların kategorisi **TOP** ile gösterilir. **TOP**-nesneler topolojik uzaylardır ve herhangi $(X, \tau), (Y, \nu) \in |\mathbf{TOP}|$ için $\text{hom}_{\mathbf{TOP}}((X, \tau), (Y, \nu))$ kümesi X 'ten Y 'ye tanımlı ve τ ile ν topolojileri altında sürekli $((f^-)^{\rightarrow}(\nu) \subseteq \tau$ özelliğine sahip) fonksiyonlardan oluşur, yani **TOP**-morfizm ve sürekli fonksiyon kavramları birbirine denktir. **TOP** kategorisindeki birim morfizmler özdeşlik fonksiyonları, kategorik bileşke ise fonksiyon bileşkesidir (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.1.3 İlgili yapılara göre birim dönüşümlerin de sürekli olacaklarına dikkat edilerek, (Kent anlamındaki) yakınsaklık uzayları ve bu uzaylar altında tanımlanan sürekli fonksiyonların bir kategori belirlediği Teorem 2.2.1 ışığı altında kolayca görülebilir. Bu kategori **CONV** ile gösterilir (Adámek ve diğ., 2004).

Bu çalışma boyunca kullanılan veya genel anlamda önemli olan kategorilerden bazıları gösterimleriyle birlikte aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1.2 Gruplar ve grup homomorfizmlerinin kategorisi **GRP**, değişmeli gruplar ve grup homomorfizmlerinin kategorisi **AB**, halkalar ve halka homomorfizmlerinin kategorisi **RNG**, gerçel vektör uzayları ve lineer dönüşümlerin kategorisi **VEC**, metrik uzaylar ve daralma dönüşümlerinin

$(d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ özelliğine sahip fonksiyonlar) kategorisi **MET**, Banach uzayları ve lineer daralma dönüşümlerinin kategorisi **BAN**, düzgün uzaylar ve düzgün sürekli fonksiyonların kategorisi **UNIF**, kısmi sıralı kümeler ve sıra koruyan fonksiyonların kategorisi **POS**, kafesler ve kafes homomorfizmlerinin ($\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemlerini koruyan fonksiyonların) kategorisi **LAT**, tam kafesler ve herhangi sayıda öge üzerinden alınan ebas ve eküsü koruyan dönüşümlerin kategorisi **CLAT**, tam grupoidler ve kesin tam grupoid homomorfizmlerinin kategorisi **CGR** ile gösterilir. Bu kategorilerin tümünde birim morfizmler özdeşlik fonksiyonlarına, kategorik bileşke fonksiyon bileşkesine karşılık gelir (Adámek ve diğ., 2004).

Bir kategoride morfizmlerin fonksiyon biçiminde olması gerekmez. Aşağıda bu tür kategorilerin iki örneği verilmiştir.

Örnek 2.3.1.4 Pozitif tamsayılar ve gerçel matrislerin kategorisi olarak adlandırılan $\mathbf{MAT} = (\mathbb{N}, \mathbf{M}_{\mathbb{R}}, I, *)$ kategorisinin nesneleri pozitif tamsayılardır. Her $m, n \in \mathbb{N}^+$ için m 'den n 'ye bir $\mathbf{MAT}$ -morfizm, $m \times n$ tipindeki bir gerçel matris olarak tanımlanır. Böylece $\text{hom}_{\mathbf{MAT}}(m, n) = \mathbf{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ olur. $n \in \mathbb{N}^+$ nesnesine karşılık gelen I_n birim morfizmi $n \times n$ tipindeki birim matristir ve $\cdot$ matris çarpımını göstermek üzere uygun iki morfizmin bileşkesi $g * f = f \cdot g$ biçiminde tanımlıdır (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.1.5 Bir $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine $\mathbf{L} = (L, \leq \cap \{_ \}, \delta, \cdot)$ biçimindeki bir kategori gözüyle bakılabilir. Burada kategorinin nesneleri L kümesinin öğeleridir. $\leq$ bağıntısı $\leq = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ biçimindeki küme olarak ele alınmak üzere her $a, b \in L$ için a 'dan b 'ye tanımlı $\mathbf{L}$ -morfizmlerin kümesi $\leq \cap \{(a, b)\}$ olarak tanımlanır. Buna göre,

$$\text{hom}_{\mathbf{L}}(a, b) = \begin{cases} \{(a, b)\}, & a \leq b \text{ ise} \\ \emptyset, & a \not\leq b \text{ ise} \end{cases}$$

olup iki nesne arasında en çok bir morfizm bulunabilir. Birim morfizimler $\delta_a = (a, a)$ biçimindedir ve $a \leq b, b \leq c$ olduğu durumlarda bileşke işlemi $(b, c) \cdot (a, b) = (a, c)$ kuralıyla verilir (Adámek ve diğ., 2004).

Tanım 2.3.1.3 $\mathbf{K}$ bir kategori ve $A \in |\mathbf{K}|$ olsun. Bir $A \xrightarrow{f} A$ morfizmine A 'nın bir endomorfizmi denir. A 'nın bütün endomorfizmlerinin kümesi $\text{End}_{\mathbf{K}}(A)$ veya kısaca $\text{End}(A)$ ile gösterilir (Adámek ve diğ., 2004).

Bu tanıma göre $\text{End}(A) = \text{hom}(A, A)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.3.1.4 $\mathbf{K} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, I, \cdot)$ bir kategori olsun. Her $A, B \in |\mathbf{K}|$ için $\text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B) = \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, A)$ ve her $A, B, C \in |\mathbf{K}|$, her $f \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$, her $g \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, C)$ için $g \circ f = f \cdot g$ olarak tanımlanmak üzere $\widetilde{\mathbf{K}} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, i, \circ)$ kategorisine $\mathbf{K}$ kategorisinin karşıtı (duali) denir (Adámek ve diğ., 2004).

Tanımdan görüleceği gibi bir kategorinin karşıtının nesneleri kategorinin kendi nesneleriyle aynıdır, yani $|\widetilde{\mathbf{K}}| = |\mathbf{K}|$ 'dir. Karşıt kategoriye geçildiğinde morfizmlerin tanım ve değer nesneleri birbiriyle yer değiştirir. Bu durum kısaca

$$A \xrightarrow[\mathbf{K}]{f} B \iff B \xrightarrow[\widetilde{\mathbf{K}}]{f} A$$

şeklinde ifade edilebilir. Yeni bileşkenin her durumda tanımlı olabilmesi için tanım ve değer nesnelerindeki değişikliğin işlem sırasında da yapılması gerekir. Herhangi bir $\mathbf{K}$ kategorisi için $\widetilde{\widetilde{\mathbf{K}}} = \mathbf{K}$ olacağı açıktır.

Örnek 2.3.1.6 $\widetilde{\mathbf{SET}} = (\mathbf{u}, \text{hom}_{\mathbf{SET}}, I, \circ)$ kategorisinin nesneleri yine bütün kümeler olmakla birlikte, A kümesinden B kümesine bir $f \in \widetilde{\mathbf{SET}}$ -morfizmi, bir $f : B \rightarrow A$ fonksiyonuna karşılık gelir. $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$ olmak üzere iki farklı $A \xrightarrow[\mathbf{SET}]{f} B$ morfizmi bulunmasına karşın, yalnızca bir tek $A \xrightarrow[\widetilde{\mathbf{SET}}]{f} B$ morfizmi vardır.

2.3.2 Fonktörler

İki kategori arasında anlamlı bir geçiş yapılabilmesini sağlayan temel araçlar fonktör adını alır. Bir fonktör bir kategorinin nesnelerini diğer kategorinin nesnelerine, morfizmlerini diğer kategorinin morfizmlerine dönüştürürken aynı zamanda tanım ve değer nesnelerini, birim morfizmleri ve bileşke işlemini de yeterince koruyacak biçimde tanımlanır.

Tanım 2.3.2.1 $\mathbf{K} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, I, \cdot)$ ve $\mathbf{L} = (|\mathbf{L}|, \text{hom}_{\mathbf{L}}, I, \circ)$ iki kategori olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{F}$ kuralına $\mathbf{K}$ 'den $\mathbf{L}$ 'ye bir fonktör denir ve bu durum $\mathcal{F} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{L}$ biçiminde belirtilir (Adámek ve diğ., 2004).

- (i) $A \in |\mathbf{K}| \implies \mathcal{F}(A) \in |\mathbf{L}|$
- (ii) $f : A \xrightarrow[\mathbf{K}]{} B \implies \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \xrightarrow[\mathbf{L}]{} \mathcal{F}(B)$
- (iii) $\mathcal{F}(g \cdot f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f), \forall f \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B); g \in \text{hom}_{\mathbf{K}}(B, C); A, B, C \in |\mathbf{K}|$
- (iv) $\mathcal{F}(I_A) = I_{\mathcal{F}(A)}, \forall A \in |\mathbf{K}|$

Örnek 2.3.2.1 Her $(X, \tau) \in |\mathbf{TOP}|$ için $\mathcal{U}(X, \tau) = X$ ve her $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, v)$ $\mathbf{TOP}$ -morfizmi (sürekli fonksiyonu) için $\mathcal{U}(f) : X \rightarrow Y$, $(\mathcal{U}(f))(x) = f(x)$, $\forall x \in X$ biçiminde tanımlanırsa $\mathcal{U} : \mathbf{TOP} \longrightarrow \mathbf{SET}$ bir fonktör olur. Bu fonktör vasıtasıyla topolojik uzaylar, üzerinde kurulu oldukları kümeye döntüşürken, sürekli fonksiyonlar formülleri aynı olan sıradan fonksiyonlar halini alır (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.2.2 $\mathbf{K}$ bir kategori olmak üzere her $A \in |\mathbf{K}|$ için $\mathcal{I}_{\mathbf{K}}(A) = A$ ve her $f : A \rightarrow B$ $\mathbf{K}$ -morfizmi için $\mathcal{I}_{\mathbf{K}}(f) = f$ kuralı ile bir $\mathcal{I}_{\mathbf{K}} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörü tanımlanır. $\mathcal{I}_{\mathbf{K}}$ 'ye $\mathbf{K}$ için birim fonktör adı verilir (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.2.3 Her bir X kümesi için $\mathcal{P}(X)$ X 'in bütün alt kümelerinin kümesini gösterebilir ve her bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için $\mathcal{P}(f) = f^{\rightarrow}$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \longrightarrow \mathbf{SET}$ bir fonktördür. Gerçekten, her $X \in |\mathbf{SET}|$ için $\mathcal{P}(X) \in |\mathbf{SET}|$ ve her $f : X \xrightarrow{\mathbf{SET}} Y$ fonksiyonu için $\mathcal{P}(f) = f^{\rightarrow} : \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\mathbf{SET}} \mathcal{P}(Y)$ olur. Ayrıca $\mathbf{SET}$ kategorisindeki her $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ durumu ve $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ için

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{\rightarrow}(A) &= \{(g \circ f)(x) \mid x \in A\} \\ &= \{g(f(x)) \mid x \in A\} \\ &= \{g(y) \mid y \in f^{\rightarrow}(A)\} \\ &= g^{\rightarrow}(f^{\rightarrow}(A)) \\ &= (g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow})(A) \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{P}(g \circ f) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)$ eşitliği geçerlidir. Son olarak, herhangi bir $X \in |\mathbf{SET}|$ ve $A \in \mathcal{P}(X)$ için

$$[\mathcal{P}(\mathcal{I}_X)](A) = \mathcal{I}_X^{\rightarrow}(A) = \{\mathcal{I}_X(x) \mid x \in A\} = A = \mathcal{I}_{\mathcal{P}(X)}(A)$$

olduğundan $\mathcal{P}(\mathcal{I}_X) = \mathcal{I}_{\mathcal{P}(X)}$ olur (Adámek ve diğ., 2004).

Yukarıdaki örneklerle tanımlanan $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \longrightarrow \mathbf{SET}$ fonktörüne (kovaryant) kuvvet küme fonktörü adı verilir.

Tanım ve değer kategorileri karşılıklı olarak aynı olan ve nesne ve morfizmleri karşılıklı olarak aynı nesne ve morfizmlere taşıyan iki fonktörün birbirine eşit olduğu söylenir.

Önerme 2.3.2.1 $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$ ve $\mathbf{M}$ kategoriler, $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ ve $\mathcal{G} : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ birer fonktör olsun. Bu durumda her $A \in |\mathbf{K}|$ için $(\mathcal{G} \cdot \mathcal{F})(A) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(A))$ ve her $f : A \rightarrow B$

$\mathbf{K}$ -morfizmi için $(\mathcal{G} \cdot \mathcal{F})(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$ kuralı ile verilen $\mathcal{G} \cdot \mathcal{F}, \mathbf{K}$ 'den $\mathbf{M}$ 'ye tanımlı bir fonktördür (Adámek ve diğ., 2004).

Önerme 2.3.2.2 $\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ kategoriler, $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}, \mathcal{G} : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}, \mathcal{H} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ fonktörler olsunlar. $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathcal{F}) : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{N}$ ve $(\mathcal{H} \cdot \mathcal{G}) \cdot \mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{N}$ fonktörleri birbirine eşittir (Adámek ve diğ., 2004).

Yukarıdaki iki önermenin kanıtı fonktör tanımı yardımıyla zorlanmadan elde edilir. Buradaki $\mathcal{G} \cdot \mathcal{F}$ fonktörüne $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{F}$ fonktörlerinin bileşkesi adı verilir. $\mathcal{H} \cdot (\mathcal{G} \cdot \mathcal{F})$ ve $(\mathcal{H} \cdot \mathcal{G}) \cdot \mathcal{F}$ yerine $\mathcal{H} \cdot \mathcal{G} \cdot \mathcal{F}$ yazılabilir. $\mathbf{K}$ bir kategori, $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ bir fonktör olmak üzere $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörü $\mathcal{F}^2$, $\mathcal{F}^2 \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^2$ fonktörü ise $\mathcal{F}^3$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2.2 $\mathbf{K}$ ve $\mathbf{L}$ kategoriler, $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ ve $\mathcal{G} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ iki fonktör olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir $j = \{j_A \mid A \in |\mathbf{K}|\}$ sınıfına $\mathcal{F}$ 'den $\mathcal{G}$ 'ye bir doğal dönüşüm denir ve bu durum $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ile gösterilir (Adámek ve diğ., 2004).

- (i) Her $A \in |\mathbf{K}|$ için $j_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ bir $\mathbf{L}$ -morfizmdir.
- (ii) Her $f : A \rightarrow B$ $\mathbf{K}$ -morfizmi için $j_B \cdot \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \cdot j_A$ 'dır.

Bu tanıma göre, $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ olması her $A \xrightarrow[\mathbf{K}]{f} B$ morfizmi için $\mathbf{L}$ 'de

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{j_A} & \mathcal{G}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{j_B} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

olması anlamına gelmektedir.

Örnek 2.3.2.4 $\mathcal{I}_{\mathbf{VEC}} : \mathbf{VEC} \rightarrow \mathbf{VEC}$ gerçel vektör uzayları ve lineer dönüşümler kategorisinin birim fonktörü olsun. $\mathbb{R}$ kendi üzerindeki vektör uzayı olarak düşünülmek üzere herhangi bir V gerçel değerli vektör uzayı için $V^* = \text{hom}(V, \mathbb{R})$ ve her bir $\varphi \in \text{hom}(V, W), g \in W^*$ için $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\varphi^* \in \text{hom}(W^*, V^*)$ olacağı gösterilebilir ve

$$\mathcal{D}(V) = (V^*)^*, \forall V \in |\mathbf{VEC}|; \quad \mathcal{D}(\varphi) = (\varphi^*)^*, \forall \varphi \in \text{hom}(V, W)$$

kuralı bir $\mathcal{D} : \mathbf{VEC} \rightarrow \mathbf{VEC}$ fonktörü belirler. Bu koşullar altında her $V \in |\mathbf{VEC}|$ için $j_V : \mathcal{I}_{\mathbf{VEC}}(V) = V \rightarrow \mathcal{D}(V)$ dönüşümü

$$[j_V(x)](f) = f(x), \forall x \in X, \forall f \in V^*$$

biçiminde tanımlanırsa her bir $V \in |\mathbf{VEC}|$ için $j_V \in \text{hom}(V, \mathcal{D}(V))$ ve her bir $\varphi \in \text{hom}(V, W)$ için

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j_V} & \mathcal{D}(V) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(\varphi) \\ W & \xrightarrow{j_W} & \mathcal{D}(W) \end{array}$$

olur. Dolayısıyla $j : \mathcal{I}_{\mathbf{VEC}} \rightarrow \mathcal{D}$ bir doğal dönüşümdür (Adámek ve diğ., 2004).

Tanım 2.3.2.3 $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir fonktör, $X \in |\mathbf{L}|$ olsun.

a) $U \in |\mathbf{K}|$ ve $u : X \rightarrow \mathcal{F}(U)$ bir $\mathbf{L}$ -morfizm olmak üzere, her bir $A \in |\mathbf{K}|$ ve $f : X \rightarrow \mathcal{F}(A)$ $\mathbf{L}$ -morfizmi için

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}(U) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(f_*) \\ X & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(A) \end{array}$$

olacak biçimde bir ve yalnızca bir $f_* : U \rightarrow A$ $\mathbf{K}$ -morfizmi varsa u 'ya X 'ten $\mathcal{F}$ 'e bir başlangıç morfizmi denir.

b) $U \in |\mathbf{K}|$ ve $u : \mathcal{F}(U) \rightarrow X$ bir $\mathbf{L}$ -morfizm olmak üzere

$$\forall A \in |\mathbf{K}|, \forall \mathcal{F}(A) \xrightarrow[\mathbf{L}]{f} X, \exists! A \xrightarrow[\mathbf{K}]{f^*} U, \mathcal{F}(f^*) \downarrow \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{f} & X \\ & & \parallel \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

koşulu gerçekleşiyorsa u morfizmine $\mathcal{F}$ 'den X 'e bir sonuç morfizmi adı verilir (Adámek ve diğ., 2004).

Tanım 2.3.2.4 $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir fonktör olsun. Her bir $X \in |\mathbf{L}|$ nesnesine karşılık bir $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X_*)$ başlangıç morfizmi bulunabiliyorsa $\mathcal{F}$ 'e bir sağ adjoint fonktör denir. Her $X \in |\mathbf{L}|$ için bir $\varepsilon_X : \mathcal{F}(X^*) \rightarrow X$ sonuç morfizminin var olması durumunda ise $\mathcal{F}$ 'e bir sol adjoint fonktör denir (Adámek ve diğ., 2004).

Sağ ve sol adjoint fonktör kavramları birbirinden bağımsız değildir. Gerçekten, verilen her bir sağ (sol) adjoint fonktöre, tek türlü olarak belirlenen bir sol (sağ) adjoint fonktör bağlanabilir.

Teorem 2.3.2.1 a) $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sağ adjoint fonktör olsun ve her bir $X \in |\mathbf{L}|$ için bir $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X_*)$ başlangıç morfizmi seçilsin. Her $X \in |\mathbf{L}|$ için, $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{L}} \rightarrow \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_*$ bir doğal dönüşüm ve $\mathcal{F}_*(X) = X_*$ olacak biçimde bir tek $\mathcal{F}_* : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörü vardır.

b) $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sol adjoint fonktör olsun ve her bir $X \in |\mathbf{L}|$ nesnesi için bir $\varepsilon_X : \mathcal{F}(X^*) \rightarrow X$ sonuç morfizmi seçilsin. Her $X \in |\mathbf{L}|$ için, $\varepsilon : \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{I}_{\mathbf{K}}$ doğal dönüşüm ve $\mathcal{F}^*(X) = X^*$ olacak biçimde bir tek $\mathcal{F}^* : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörü vardır (Adámek ve diğ., 2004).

Kanıt. a) $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sağ adjoint fonktör olsun, her bir $X \in |\mathbf{L}|$ için bir $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{F}(X_*)$ başlangıç morfizmi seçilsin ve bir $f : X \xrightarrow[\mathbf{L}]{} Y$ morfizmi verilsin. Bu durumda $\eta_Y : Y \rightarrow \mathcal{F}(Y_*)$ olacağından

$$\eta_Y \cdot f : X \rightarrow \mathcal{F}(Y_*)$$

olur ve η_X başlangıç morfizmi olduğundan $h = (\eta_Y \cdot f)_* : X_* \xrightarrow[\mathbf{K}]{} Y_*$ morfizmi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{F}(X_*) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(h) \\ X & \xrightarrow[\eta_Y \cdot f]{} & \mathcal{F}(Y_*) \end{array}$$

diyagramını değişimli yapacak tek morfizmdir. Bu koşullar altında,

$$\mathcal{F}_*(X) = X_*, \quad \forall X \in |\mathbf{L}|, \quad \mathcal{F}_*(f) = (\eta_Y \cdot f)_*, \quad \forall f \in \text{hom}_{\mathbf{L}}(X, Y), \quad \forall X, Y \in |\mathbf{L}|$$

ile iyi tanımlı bir tek $\mathcal{F}_*$ kuralı verilebilir. $\mathbf{L}$ kategorisindeki birim morfizmleri ve bileşkeyi koruduğu gösterilirse $\mathcal{F}_*$ 'ın fonktör olduğu görülmüş olur.

$X \in |\mathbf{L}|$ ve $I_X : X \rightarrow X$ birim morfizm olsun.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{F}(X_*) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(h) \\ X & \xrightarrow[\eta_X \cdot I_X]{} & \mathcal{F}(X_*) \end{array}$$

diyagramını değişimli yapan tek bir $h = (\eta_X \cdot I_X)_* : X_* \xrightarrow[\mathbf{K}]{} X_*$ morfizmi vardır ve $\mathcal{F}_*$ 'ın tanımı gereği $h = \mathcal{F}_*(I_X)$ 'tır. Diğer yandan, yalnızca $\eta_X = \eta_X$ olduğunu göstermesinden dolayı

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{F}(X_*) \\ \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow[\eta_X \cdot I_X]{} & \mathcal{F}(X_*) \end{array}$$

diyagramı da değişimlidir. $\mathcal{F}$ fonktör olduğundan $I_{\mathcal{F}(X_*)} = \mathcal{F}(I_{X_*})$ olur ve h 'nin tekliğinden dolayı $h = I_{X_*}$ olmalıdır. Böylece $\mathcal{F}_*(I_X) = I_{\mathcal{F}_*(X)}$ olduğu görülmüş olur.

$\mathbf{L}$ 'de $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ morfizmleri verilsin ve $h : X_* \xrightarrow{\mathbf{K}} Y_*$, $k : Y_* \xrightarrow{\mathbf{K}} Z_*$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{F}(X_*) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(h) \\ X & \xrightarrow{\eta_Y \cdot f} & \mathcal{F}(Y_*) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathcal{F}(Y_*) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(k) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Z \cdot g} & \mathcal{F}(Z_*) \end{array}$$

diyagramlarını değişimli yapan morfizmler olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}_*(f) = h, \mathcal{F}_*(g) = k$$

olur ve $\mathcal{F}(h) \cdot \eta_X = \eta_Y \cdot f$, $\mathcal{F}(k) \cdot \eta_Y = \eta_Z \cdot g$ eşitlikleri sağlar. Buradan

$$\mathcal{F}(k \cdot h) \cdot \eta_X = \mathcal{F}(k) \cdot \mathcal{F}(h) \cdot \eta_X = \mathcal{F}(k) \cdot \eta_Y \cdot f = \eta_Z \cdot g \cdot f$$

elde edileceğinden

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{F}(X_*) \\ \parallel & & \downarrow \mathcal{F}(k \cdot h) \\ X & \xrightarrow{\eta_Z \cdot (g \cdot f)} & \mathcal{F}(Z_*) \end{array}$$

diyagramı da değişimli olur ve böylece $\mathcal{F}_*(g \cdot f) = k \cdot h = \mathcal{F}_*(g) \cdot \mathcal{F}_*(f)$ olduğu göröölür. Dolayısıyla $\mathcal{F}_* : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}$ bir fonktördür. Diğer yandan her bir $X \xrightarrow{\mathbf{L}} Y$ için $\eta_Y \cdot f = \mathcal{F}(\mathcal{F}_*(f)) \cdot \eta_X$ olduğundan

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(X) & \xrightarrow{\eta_X} & (\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_*)(X) \\ \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(f) \downarrow & & \downarrow (\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_*)(f) \\ \mathcal{I}_{\mathbf{L}}(Y) & \xrightarrow{\eta_Y} & (\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}_*)(Y) \end{array}$$

diyagramı değişimli olur.

b) (a)'da yapıłana benzer olarak

$$\mathcal{F}^*(X) = X^*, \forall X \in |\mathbf{L}|, \mathcal{F}^*(f) = (f \cdot \varepsilon_X)^*, \forall f \in \text{hom}_{\mathbf{L}}(X, Y), \forall X, Y \in |\mathbf{L}|$$

ile tanımlı bir $\mathcal{F}^* : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörünün alınmasıyla istenilen sonuçlar elde edilir. ■

Bundan sonra $\mathcal{F}$ bir sağ adjoint fonktör olduğunda $\mathcal{F}_*$, sol adjoint fonktör olduğunda ise $\mathcal{F}^*$ gösterimi, Teorem 2.3.2.1 ile elde edilen fonktörleri belirtmek için kullanılacaktır.

Teorem 2.3.2.2 a) $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sağ adjoint fonktör ise, $\mathcal{F}_* : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sol adjoint fonktördür.

b) $\mathcal{F} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ bir sol adjoint fonktör ise, $\mathcal{F}^* : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ sağ adjoint fonktördür (Adámek ve diğ., 2004).

2.3.3 Alt Kategoriler

Tanım 2.3.3.1 $\mathbf{J} = (|\mathbf{J}|, \text{hom}_{\mathbf{J}}, I, \cdot)$ ve $\mathbf{K} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}}, I, \cdot)$ kategorileri verilsin. $|\mathbf{J}| \subseteq |\mathbf{K}|$ ve her $A, B \in |\mathbf{J}|$ için $\text{hom}_{\mathbf{J}}(A, B) \subseteq \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ ise $\mathbf{J}$ 'ye $\mathbf{K}$ 'nin bir alt kategorisi denir. Her $A, B \in |\mathbf{J}|$ için $\text{hom}_{\mathbf{J}}(A, B) = \text{hom}_{\mathbf{K}}(A, B)$ eşitliği varsa $\mathbf{J}$ 'nin $\mathbf{K}$ 'nin bir eksiksiz alt kategorisi (full subcategory) olduğu söylenir (Adámek ve diğ., 2004).

Alt kategori tanımı, alt kategoride bulunan nesneler için birim morfizm ve bileşke işlemlerinin üst kategoridekilerle aynı olmasını gerektirir. Ana kategorideki morfizm kavramına dokunulmaksızın yalnızca nesne sınıfı daraltılarak elde edilen alt kategoriler eksiksizdir. Eksiksiz olmayan bir alt kategori elde etmek için alt kategoriye ait olacak nesneler arasındaki morfizmlerin sayısında da eksiltmeye gidilmesi gerekir.

Örnek 2.3.3.1 Her Hausdorff uzayı bir topolojik uzay olduğundan ve Hausdorff uzayları arasındaki sürekli fonksiyon kavramı, topolojik uzaylar arasındakile aynı olduğundan, nesneleri Hausdorff uzayları morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan **HAUS** kategorisi, nesneleri topolojik uzaylar morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan **TOP** kategorisinin bir eksiksiz alt kategorisidir (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.3.2 **POS** nesneleri kısmi sıralı kümeler ve morfizmleri sıra koruyan fonksiyonlar olan kategori, **LAT** kafesler ve kafes homomorfizmlerinin ($\wedge$ ve $\vee$ ikili işlemlerini koruyan fonksiyonların) kategorisi olsun. Her kafes bir kısmi sıralı küme olduğundan $|\mathbf{LAT}| \subseteq |\mathbf{POS}|$ olur. $(L, \leq), (M, \preceq) \in |\mathbf{LAT}|$ ve $f : (L, \leq) \rightarrow (M, \preceq)$ bir **LAT**-morfizm olsun. Bu durumda her $x, y \in L$ için

$$\begin{aligned} x \leq y &\implies x = x \wedge y \\ &\implies f(x) = f(x \wedge y) \\ &\implies f(x) = f(x) \wedge f(y) \\ &\implies f(x) \preceq f(y) \end{aligned}$$

yazılabileceğinden f bir **POS** morfizm olur. Buradan

$$\text{hom}_{\mathbf{LAT}}((L, \leq), (M, \preceq)) \subseteq \text{hom}_{\mathbf{POS}}((L, \leq), (M, \preceq))$$

olduğu görülür. Diğer yandan $X = \{a, b\}$ olsun. $\subseteq$ ve $\leq$ gösterimleri alışılmış anlamlarında kullanılmak üzere $f : (\mathcal{P}(X), \subseteq) \rightarrow ([0, 1], \leq)$ fonksiyonu $f(\emptyset) = 0$,

$f(\{a\}) = \frac{1}{2}$, $f(\{b\}) = \frac{1}{2}$, $f(X) = 1$ ile tanımlansın. Her $C, D \in \mathcal{P}(X)$ için, $C \subseteq D \implies f(C) \leq f(D)$ önermesi sağlandığından f bir **POS**-morfizmdir ancak $f(\{a\} \cap \{b\}) = 0 \neq \frac{1}{2} = f(\{a\}) \wedge f(\{b\})$ olduğundan bir **LAT**-morfizm değildir. Sonuç olarak, **LAT** kategorisi **POS** kategorisinin bir alt kategorisi olmakla birlikte eksiksiz bir alt kategorisi değildir (Adámek ve diğ., 2004).

Örnek 2.3.3.3 Nesneleri metrik uzaylar, morfizmleri daralma dönüşümleri (seçilen her bir nokta ikilisinin görüntüleri arasındaki uzaklığın, kendi aralarındaki uzaklıktan büyük olmamasını sağlayan fonksiyonlar) olan **MET**, **TOP** kategorisinin bir alt kategorisi değildir, çünkü aynı topolojik uzaya karşılık gelen bir çok farklı metrik uzay bulunduğundan $|\mathbf{MET}| \subseteq |\mathbf{TOP}|$ olması sağlanmaz. Diğer yandan, nesneleri metriklenebilir topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan **TOP_M** kategorisi, **TOP** kategorisinin bir eksiksiz alt kategorisi olur (Adámek ve diğ., 2004).

Tanım 2.3.3.2 $\mathbf{K}$ bir kategori, $\mathbf{J}$ $\mathbf{K}$ 'nin bir alt kategorisi, $A \in |\mathbf{K}|$ olsun. $\hat{A} \in |\mathbf{J}|$ ve $r_A : A \xrightarrow[\mathbf{K}]{} \hat{A}$ olmak üzere her $B \in |\mathbf{J}|$ ve $f : A \xrightarrow[\mathbf{K}]{} B$ için

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r_A} & \hat{A} \\ \parallel & & \downarrow \hat{f} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

diyagramını değişimli yapacak bir $\hat{f} : \hat{A} \xrightarrow[\mathbf{J}]{} B$ morfizmi varsa r_A 'ya A için bir **J**-yansıma adı verilir. Her $A \in |\mathbf{K}|$ için bir **J**-yansıma varsa $\mathbf{J}$ 'ye $\mathbf{K}$ 'nin bir yansımali alt kategorisi denir (Adámek ve diğ., 2004).

Tanım 2.3.3.3 $\mathbf{K}$ bir kategori, $\mathbf{J}$ $\mathbf{K}$ 'nin bir alt kategorisi, $A \in |\mathbf{K}|$ olsun. $\check{A} \in |\mathbf{J}|$ ve $c_A : \check{A} \xrightarrow[\mathbf{K}]{} A$ olmak üzere her $B \in |\mathbf{J}|$ ve $f : B \xrightarrow[\mathbf{K}]{} A$ için

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \check{f} \downarrow & & \parallel \\ \check{A} & \xrightarrow{c_A} & A \end{array}$$

diyagramını değişimli yapacak bir $\check{f} : B \xrightarrow[\mathbf{J}]{} \check{A}$ morfizmi varsa c_A 'ya A için bir **J**-eşyansıma adı verilir. Her $A \in |\mathbf{K}|$ için bir **J**-eşyansıma varsa $\mathbf{J}$ 'ye $\mathbf{K}$ 'nin eşyansımali alt kategorisi denir (Adámek ve diğ., 2004).

2.3.4 Monadlar

Tanım 2.3.4.1 $\mathbf{K}$ bir kategori, $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ bir fonktör, $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathcal{T}$ ve $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ birer doğal dönüşüm olsun.

$$\text{Her } A \in |\mathbf{K}| \text{ için } \mu_A \cdot \eta_{\mathcal{T}(A)} = \mu_A \cdot \mathcal{T}(\eta_A) = \text{I}_{\mathcal{T}(A)} \quad (\text{Birimlilik})$$

$$\text{Her } A \in |\mathbf{K}| \text{ için } \mu_A \cdot \mu_{\mathcal{T}(A)} = \mu_A \cdot \mathcal{T}(\mu_A) \quad (\text{Birleşme})$$

koşulları sağlanıyorsa $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ üçlününün $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde bir monad olduğu söylenir (Höhle, 2001).

Birimlilik ve birleşme koşulları aşağıdaki iki diyagramla ifade edilebilir:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{T}(A) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{T}(A)}} & \mathcal{T}^2(A) & \xleftarrow{\mathcal{T}(\eta_A)} & \mathcal{T}(A) & & \mathcal{T}^3(A) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{T}(A)}} & \mathcal{T}^2(A) \\ \parallel & & \downarrow \mu_A & & \parallel & & \mathcal{T}(\mu_A) \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ \mathcal{T}(A) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{T}(A) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{T}(A) & & \mathcal{T}^2(A) & \xrightarrow[\mu_A]{} & \mathcal{T}(A) \end{array}$$

Bir $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadında η 'ya birim doğal dönüşümü, μ 'ye çarpım doğal dönüşümü denir (Höhle, 2001).

Örnek 2.3.4.1 $\mathcal{I}_{\mathbf{SET}} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ birim fonktör ve $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ Örnek 2.3.2.3 ile verilen kuvvet küme fonktörü olsun ve her bir $A \in |\mathbf{SET}|$ için bir

$$\begin{aligned} \eta_A : A &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ x &\mapsto \eta_A(x) = \{x\} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda her $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu ve her $x \in A$ için

$$(\mathcal{P}(f) \circ \eta_A)(x) = \mathcal{P}(f)(\eta_A(x)) = f^{\rightarrow}(\{x\}) = \{f(x)\} = \eta_B(f(x)) = (\eta_B \circ f)(x)$$

olduğundan

$$\begin{array}{ccc} A = \mathcal{I}_{\mathbf{SET}}(A) & \xrightarrow{\eta_A} & \mathcal{P}(A) \\ f = \mathcal{I}_{\mathbf{SET}}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f) \\ B = \mathcal{I}_{\mathbf{SET}}(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & \mathcal{P}(B) \end{array}$$

diyagramı değişimlidir ve $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{SET}} \rightarrow \mathcal{P}$ bir doğal dönüşüm olur. Benzer olarak her bir $A \in |\mathbf{SET}|$ için bir

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathcal{P}^2(A) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ \mathcal{A} &\mapsto \mu_A(x) = \bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda yine her $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu ve her bir $\mathcal{X} \in$

$\mathcal{P}^2(A)$ küme ailesi için bilinen görüntü kümesi özellikleri de kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\mu_B \circ \mathcal{P}^2(f))(\mathcal{X}) &= \mu_B((\mathcal{P}^2(f))(\mathcal{X})) \\
&= \mu_B((\mathcal{P}(f))^{\rightarrow}(\mathcal{X})) \\
&= \mu_B((f^{\rightarrow})^{\rightarrow}(\mathcal{X})) \\
&= \mu_B(\{f^{\rightarrow}(X) \mid X \in \mathcal{X}\}) \\
&= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} f^{\rightarrow}(X) \\
&= f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) \\
&= (\mathcal{P}(f))\left(\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\right) \\
&= (\mathcal{P}(f))(\mu_A(\mathcal{X})) \\
&= (\mathcal{P}(f) \circ \mu_A)(\mathcal{X})
\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & \mathcal{P}(A) \\
\mathcal{P}^2(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(f) \\
\mathcal{P}^2(B) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathcal{P}(B)
\end{array}$$

diyagramı değişimlidir ve $\mu : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}$ bir doğal dönüşüm olur. Verilen η ve μ doğal dönüşümleri ile birlikte $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$ üçlüsü **SET** kategorisi üzerinde bir monaddır.

Gerçekten her bir $A \in |\mathbf{SET}|$ ve $X \in \mathcal{P}(A)$ için

$$(\mu_A \circ \eta_{\mathcal{P}(A)})(X) = \mu_A(\eta_{\mathcal{P}(A)}(X)) = \mu_A(\{X\}) = \bigcup \{X\} = X = 1_{\mathcal{P}(A)}(X)$$

ve

$$\begin{aligned}
(\mu_A \circ \mathcal{P}(\eta_A))(X) &= \mu_A((\mathcal{P}(\eta_A))(X)) \\
&= \mu_A(\eta_A^{\rightarrow}(X)) \\
&= \mu_A(\{\eta_A(x) \mid x \in X\}) \\
&= \mu_A(\{\{x\} \mid x \in X\}) \\
&= \bigcup \{\{x\} \mid x \in X\} \\
&= X \\
&= 1_{\mathcal{P}(A)}(X)
\end{aligned}$$

olacağından $\mu_A \circ \eta_{T(A)} = \mu_A \circ \mathcal{P}(\eta_A) = \mathbf{I}_{\mathcal{P}(A)}$ olup birimlilik sağlanır. Birleşme koşulu ise, her $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}^3(A)$ için

$$\begin{aligned}
(\mu_A \circ \mathcal{P}(\mu_A))(\mathfrak{X}) &= \mu_A(\mu_A^\rightarrow(\mathfrak{X})) \\
&= \mu_A(\{\mu_A(\mathcal{X}) \mid \mathcal{X} \in \mathfrak{X}\}) \\
&= \bigcup_{\mathcal{X} \in \mathfrak{X}} \mu_A(\mathcal{X}) \\
&= \mu_A\left(\bigcup_{\mathcal{X} \in \mathfrak{X}} \mathcal{X}\right) \\
&= \mu_A(\mu_{\mathcal{P}(A)}(\mathfrak{X})) \\
&= (\mu_A \circ \mu_{\mathcal{P}(A)})(\mathfrak{X})
\end{aligned}$$

olmasından elde edilir (Höhle, 2001).

Yukarıdaki örnekte ele alınan, **SET** kategorisi üzerindeki $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$ monadına kuvvet küme monadı adı verilir (Höhle, 2001).

Tanım 2.3.4.2 (Klon Bileşke) $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ bir **K** kategorisi üzerinde bir monad olsun. Her $A, B, C \in |\mathbf{K}|$ ve her $f : A \rightarrow \mathcal{T}(B)$, $g : B \rightarrow \mathcal{T}(C)$ **K**-morfizmleri için $g \bullet f = \mu_C \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f$ ile tanımlanan $g \bullet f : A \rightarrow \mathcal{T}(C)$ **K**-morfizmine g ve f 'in $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadına göre klon bileşkesi denir (Höhle, 2001).

Örnek 2.3.4.2 SET üzerindeki $(\mathcal{P}, \eta, \mu)$ kuvvet küme monadı ele alınsın. $A, B, C \in |\mathbf{SET}|$ olmak üzere $A \xrightarrow{f} \mathcal{P}(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{P}(C)$ fonksiyonlarının $g \bullet f : A \rightarrow \mathcal{P}(C)$ klon bileşkesinin her bir $x \in A$ için

$$\begin{aligned}
(g \bullet f)(x) &= (\mu_C \circ \mathcal{P}(g) \circ f)(x) \\
&= \mu_C(g^\rightarrow(f(x))) \\
&= \mu_C(\{g(y) \mid y \in f(x)\}) \\
&= \bigcup_{y \in f(x)} g(y)
\end{aligned}$$

değerini aldığı görülür (Höhle, 2001).

Önerme 2.3.4.1 $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ bir **K** kategorisi üzerinde bir monad ve $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}(C)$, $C \xrightarrow{h} \mathcal{T}(D)$, $A \xrightarrow{\varphi} B$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Höhle, 2001).

$$(M1) \quad h \bullet (g \bullet f) = (h \bullet g) \bullet f$$

$$(M2) \quad \eta_B \bullet f = f$$

$$(M3) \quad g \bullet (\eta_B \cdot \varphi) = g \cdot \varphi$$

Kanıt. $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olduğundan $C \xrightarrow{h} \mathcal{T}(D)$ için

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^2(C) & \xrightarrow{\mu_C} & \mathcal{T}(C) \\ \mathcal{T}^2(h) \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}(h) \\ \mathcal{T}^2(\mathcal{T}(D)) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{T}(D)}} & \mathcal{T}(\mathcal{T}(D)) \end{array}$$

diyagramı değişimlidir, yani $\mathcal{T}(h) \cdot \mu_C = \mu_{\mathcal{T}(D)} \cdot \mathcal{T}^2(h)$ eşitliği vardır. Buradan, klon bileşke tanımının yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} h \bullet (g \bullet f) &= h \bullet (\mu_C \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f) \\ &= \mu_D \cdot \mathcal{T}(h) \cdot (\mu_C \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f) \\ &= \mu_D \cdot \mu_{\mathcal{T}(D)} \cdot \mathcal{T}^2(h) \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan birleşme koşulu $\mu_D \cdot \mu_{\mathcal{T}(D)} = \mu_D \cdot \mathcal{T}(\mu_D)$ olmasını gerektireceğinden, $\mu_D \cdot \mathcal{T}(h) \cdot g : B \rightarrow \mathcal{T}(D)$ olduğuna dikkat edilerek

$$\begin{aligned} (h \bullet g) \bullet f &= (\mu_D \cdot \mathcal{T}(h) \cdot g) \bullet f \\ &= \mu_D \cdot \mathcal{T}(\mu_D \cdot \mathcal{T}(h) \cdot g) \cdot f \\ &= \mu_D \cdot \mathcal{T}(\mu_D) \cdot \mathcal{T}(\mathcal{T}(h)) \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f \\ &= \mu_D \cdot \mu_{\mathcal{T}(D)} \cdot \mathcal{T}^2(h) \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f \end{aligned}$$

bulunur ve böylece (M1) eşitliği elde edilmiş olur.

(M2) eşitliği, birim koşulunun B nesnesi için yazılmasıyla

$$\eta_B \bullet f = \mu_B \cdot \mathcal{T}(\eta_B) \cdot f = \mathbf{I}_{\mathcal{T}(B)} \cdot f = f$$

biçiminde görülür.

$\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olduğundan,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & \mathcal{T}(B) \\ g \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}(g) \\ \mathcal{T}(C) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{T}(C)}} & \mathcal{T}(\mathcal{T}(C)) \end{array}$$

diyagramı değişmeli olup

$$\mathcal{T}(g) \cdot \eta_B = \eta_{\mathcal{T}(C)} \cdot g$$

eşitliği vardır. C nesnesi için birim koşulu da kullanılırsa

$$g \bullet (\eta_B \cdot \varphi) = \mu_C \cdot \mathcal{T}(g) \cdot (\eta_B \cdot \varphi) = \mu_C \cdot \eta_{\mathcal{T}(C)} \cdot g \cdot \varphi = \mathbf{I}_{\mathcal{T}(C)} \cdot g \cdot \varphi = g \cdot \varphi$$

biçiminde (M3) eşitliği de görülmüş olur. ■

Tanım 2.3.4.3 $\mathbf{K}$ bir kategori, $\mathcal{T} : |\mathbf{K}| \rightarrow |\mathbf{K}|$ $\mathbf{K}$ kategorisinin nesneler sınıfı üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her bir $A \in |\mathbf{K}|$ için bir $\eta_A : A \rightarrow \mathcal{T}(A)$ $\mathbf{K}$ -morfizmi verilsin ve “ $\bullet$ ”, $\mathbf{K}$ ’de $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}(C)$ biçimindeki her morfizm ikilisine karşılık bir $A \xrightarrow{g \bullet f} \mathcal{T}(C)$ morfizmi versin.

$$(M1) \quad h \bullet (g \bullet f) = (h \bullet g) \bullet f$$

$$(M2) \quad \eta_B \bullet f = f$$

$$(M3) \quad g \bullet (\eta_B \cdot \varphi) = g \cdot \varphi$$

koşulları sağlanıyorsa $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ üçlününün $\mathbf{K}$ üzerinde klon biçimli bir monad olduğu söylenir (Höhle, 2001).

Önerme 2.3.4.2 (Üçlü Çarpım Kuralı) Bir $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde bir $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadı veya bir $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ klon biçimli monadı verilmiş olsun. $\mathbf{K}$ ’de $A \xrightarrow{\varphi} B$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}(C)$ ve $C \xrightarrow{h} \mathcal{T}(D)$ olmak üzere

$$h \bullet (g \cdot \varphi) = (h \bullet g) \cdot \varphi$$

eşitliği vardır (Höhle, 2001).

Kanıt. Sırasıyla (M3), (M1) ve (M3) kullanılırsa

$$h \bullet (g \cdot \varphi) = h \bullet (g \bullet (\eta_B \cdot \varphi)) = (h \bullet g) \bullet (\eta_B \cdot \varphi) = (h \bullet g) \cdot \varphi$$

bulunur. ■

Önerme 2.3.4.3 (Fonktöre Tamamlama) $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ bir $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde bir klon biçimli monad olsun ve $\mathcal{T}$ nesne fonksiyonunun tanımı her $X \xrightarrow{f} Y$ $\mathbf{K}$ -morfizmi için $\mathcal{T}(f) = (\eta_Y \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(X)}$ olacak biçimde genişletilsin. Bu durumda $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ bir fonktör, $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olur (Höhle, 2001).

Kanıt. (M1), (M3) ve üçlü çarpım kuralının uygulanmasıyla $\mathbf{K}$ ’deki her $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ durumu için

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(g \cdot f) &= (\eta_Z \cdot (g \cdot f)) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(X)} \\ &= (\eta_Z \cdot g) \bullet (\eta_Y \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(X)} \\ &= (\eta_Z \cdot g) \bullet (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)} \cdot ((\eta_Y \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(X)})) \\ &= ((\eta_Z \cdot g) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)}) \bullet ((\eta_Y \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(X)}) \\ &= \mathcal{T}(g) \cdot \mathcal{T}(f) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (M2) yardımıyla, her $A \in |\mathbf{K}|$ için

$$\mathcal{T}(\mathbf{I}_A) = (\eta_A \cdot \mathbf{I}_A) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} = \eta_A \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} = \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)}$$

olacağından $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ bir fonktör olur ve her $X \xrightarrow{f} Y$ $\mathbf{K}$ -morfizmi için

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(f) \cdot \eta_X &= ((\eta_Y \cdot f) \bullet I_{\mathcal{T}(X)}) \cdot \eta_X \\
&= (\eta_Y \cdot f) \bullet (I_{\mathcal{T}(X)} \cdot \eta_X) \\
&= (\eta_Y \cdot f) \bullet (\eta_X \cdot I_X) \\
&= (\eta_Y \cdot f) \cdot I_X \\
&= \eta_Y \cdot f
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathcal{T}(X) \\
f \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}(f) \\
Y & \xrightarrow{\eta_Y} & \mathcal{T}(Y)
\end{array}$$

diagramı değişimlidir. Dolayısıyla $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olur. ■

Bu önerme herhangi bir $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ klon biçimli monadındaki $\mathcal{T}$ nesne fonksiyonunu, $\eta : \mathcal{I}_{\mathbf{K}} \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olacak biçimde bir $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörüne tamamlamak için bir yol sunmaktadır. Buna ek olarak bir $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ klon biçimli monadı yardımıyla, $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ bir monad olacak biçimde bir $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ doğal dönüşümü tanımlamak mümkündür.

Önerme 2.3.4.4 $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ bir $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde bir klon biçimli monad olsun ve $\mathcal{T}$ nesne fonksiyonu Önerme 2.3.4.3'teki tarzda bir $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörüne tamamlanmış olarak ele alınsın. Her bir $A \in |\mathbf{K}|$ için $\mu_A = I_{\mathcal{T}(A)} \bullet I_{\mathcal{T}^2(A)}$ yazılırsa $\mu : \mathcal{T}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ bir doğal dönüşüm olur (Höhle, 2001).

Kanıt. $A \xrightarrow[\mathbf{K}]{f} B$ olsun. $I_{\mathcal{T}^2(A)} : \mathcal{T}^2(A) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{T}(A))$ ve $I_{\mathcal{T}(A)} : \mathcal{T}(A) \rightarrow \mathcal{T}(A)$ olduğundan $\mu_A : \mathcal{T}^2(A) \rightarrow \mathcal{T}(A)$ bir $\mathbf{K}$ -morfizmdir. Aynı zamanda buna benzer olarak $\mathcal{T}^2(B) \xrightarrow[\mathbf{K}]{\mu_B} \mathcal{T}(B)$ olur ve tanımlarla birlikte (M1), (M3) ve üçlü çarpım kuralının uygulanmasıyla görülen

$$\begin{aligned}
\mu_B \cdot \mathcal{T}(\mathcal{T}(f)) &= (I_{\mathcal{T}(B)} \bullet I_{\mathcal{T}^2(B)}) \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(B)} \cdot \mathcal{T}(f)) \bullet I_{\mathcal{T}(\mathcal{T}(A))}) \\
&= I_{\mathcal{T}(B)} \bullet (I_{\mathcal{T}^2(B)} \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(B)} \cdot \mathcal{T}(f)) \bullet I_{\mathcal{T}^2(A)})) \\
&= I_{\mathcal{T}(B)} \bullet (\eta_{\mathcal{T}(B)} \cdot \mathcal{T}(f)) \bullet I_{\mathcal{T}^2(A)} \\
&= I_{\mathcal{T}(B)} \cdot \mathcal{T}(f) \bullet I_{\mathcal{T}^2(A)} \\
&= \mathcal{T}(f) \bullet I_{\mathcal{T}^2(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((\eta_B \cdot f) \bullet I_{T(A)}) \bullet I_{T^2(A)} \\
&= (\eta_B \cdot f) \bullet (I_{T(A)} \cdot (I_{T(A)} \bullet I_{T^2(A)})) \\
&= ((\eta_B \cdot f) \bullet I_{T(A)}) \cdot (I_{T(A)} \bullet I_{T^2(A)}) \\
&= \mathcal{T}(f) \cdot \mu_A
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\mu : T^2 \rightarrow T$ olduğunu gösteren

$$\begin{array}{ccc}
T^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \\
\mathcal{T}^2(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}(f) \\
T^2(B) & \xrightarrow{\mu_B} & T(B)
\end{array}$$

diyagramı elde edilir. ■

Teorem 2.3.4.1 $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$, $\mathbf{K}$ üzerinde klon biçimli monad ve $\mathcal{T}$ Önerme 2.3.4.3'teki, μ Önerme 2.3.4.4'teki gibi tanımlıysa $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$, $\mathbf{K}$ üzerinde monaddır (Höhle, 2001).

Kanıt. $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ için birimlilik ve birleşme koşullarının doğrulanması yeterlidir.

Verilen herhangi bir $A \in |\mathbf{K}|$ nesnesi için birimlilik koşulunu gerektiren

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{T}(A) & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{T}(A)}} & T^2(A) & \xleftarrow{\mathcal{T}(\eta_A)} & \mathcal{T}(A) \\
\parallel & & \downarrow \mu_A & & \parallel \\
\mathcal{T}(A) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{T}(A) & \xlongequal{\quad} & \mathcal{T}(A)
\end{array}$$

diyagramı,

$$\begin{aligned}
\mu_A \cdot \eta_{\mathcal{T}(A)} &= (I_{\mathcal{T}(A)} \bullet I_{T^2(A)}) \cdot \eta_{\mathcal{T}(A)} \\
&= I_{\mathcal{T}(A)} \bullet (I_{T^2(A)} \cdot \eta_{\mathcal{T}(A)}) \\
&= I_{\mathcal{T}(A)} \bullet (\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot I_{\mathcal{T}(A)}) \\
&= I_{\mathcal{T}(A)} \cdot I_{\mathcal{T}(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_A \cdot \mathcal{T}(\eta_A) &= (I_{\mathcal{T}(A)} \bullet I_{T^2(A)}) \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \eta_A) \bullet I_{\mathcal{T}(A)}) \\
&= I_{\mathcal{T}(A)} \bullet (I_{T^2(A)} \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \eta_A) \bullet I_{\mathcal{T}(A)})) \\
&= I_{\mathcal{T}(A)} \bullet ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \eta_A) \bullet I_{\mathcal{T}(A)}) \\
&= (I_{\mathcal{T}(A)} \bullet (\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \eta_A)) \bullet I_{\mathcal{T}(A)} \\
&= (I_{\mathcal{T}(A)} \cdot \eta_A) \bullet I_{\mathcal{T}(A)} \\
&= \eta_A \bullet I_{\mathcal{T}(A)} \\
&= I_{\mathcal{T}(A)}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden, birleşme koşulunu belirten

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^3(A) & \xrightarrow{\mu_{\mathcal{T}(A)}} & \mathcal{T}^2(A) \\ \mathcal{T}(\mu_A) \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ \mathcal{T}^2(A) & \xrightarrow{\mu_A} & \mathcal{T}(A) \end{array}$$

diyagramının değişimliliği ise,

$$\begin{aligned} \mu_A \cdot \mu_{\mathcal{T}(A)} &= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)}) \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(\mathcal{T}(A))} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(\mathcal{T}(A))}) \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet (\mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)} \cdot (\mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)})) \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)} \\ &= \mu_A \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)} \\ &= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \cdot \mu_A) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)} \\ &= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet (\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \mu_A)) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)} \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \mu_A) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)}) \\ &= \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet (\mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)} \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \mu_A) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^3(A)})) \\ &= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)}) \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(A)} \cdot \mu_A) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(\mathcal{T}(A))}) \\ &= \mu_A \cdot \mathcal{T}(\mu_A) \end{aligned}$$

eşitliklerinden elde edilir. ■

Teorem 2.3.4.1, her klon biçimli monadın Tanım 2.3.4.1 anlamında bir monad ürettiği sonucunu verir. Aksine Önerme 2.3.4.1, her bir $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadına bir klon biçimli monad olarak bakılabileceğini söyler. Sıradaki teorem ise, tekrar eden geçişlerin ilgili yapıları bozmayacağını ifade eder ve böylece monadlar ile klon biçimli monadların denk kavramlar oldukları sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.3.4.2 $\mathbf{K}$ bir kategori olsun.

a) $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ $\mathbf{K}$ üzerinde bir monad ve $\bullet$ bu monad üzerindeki klon bileşke olmak üzere $\mathcal{T} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}$ fonktörünün nesnelere kısıtlanmasıyla elde edilen nesne fonksiyonu $\mathcal{T}^* : |\mathbf{K}| \rightarrow |\mathbf{K}|$ ile gösterilsin. $(\mathcal{T}^*, \eta, \bullet)$ klon biçimli monadının ürettiği $(\mathcal{T}^*, \eta, \mu^*)$ monadı başlangıçtaki $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadına eşittir.

b) $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde bir klon biçimli monad olsun ve ürettiği monad $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$, bu monadın klon bileşkesi ise $*$ ile gösterilsin. $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ 'ye karşılık gelen $(\mathcal{T}, \eta, *)$ klon biçimli monadı başlangıçtaki klon biçimli monada eşittir (Höhle, 2001).

Kanıt. a) Tanımlar arasındaki geçişler, fonktör özellikleri ve birimlilik koşulunun kullanılmasıyla her bir $f : X \rightarrow Y$ $\mathbf{K}$ -morfizmi için

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^*(f) &= (\eta_Y \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^*(X)} \\
&= \mu_Y \cdot \mathcal{T}(\eta_Y \cdot f) \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{T}^*(X)} \\
&= \mu_Y \cdot \mathcal{T}(\eta_Y) \cdot \mathcal{T}(f) \\
&= \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)} \cdot \mathcal{T}(f) \\
&= \mathcal{T}(f)
\end{aligned}$$

ve her $X \in |\mathbf{K}|$ için

$$\begin{aligned}
\mu_X^* &= \mathbf{I}_{\mathcal{T}^*(X)} \bullet \mathbf{I}_{(\mathcal{T}^*)^2(X)} \\
&= \mu_X \cdot \mathcal{T}(\mathbf{I}_{\mathcal{T}^*(X)}) \cdot \mathbf{I}_{(\mathcal{T}^*)^2(X)} \\
&= \mu_X \cdot \mathbf{I}_{\mathcal{T}(\mathcal{T}^*(X))} \\
&= \mu_X
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece birer sıralı üçlü oldukları dikkate alındığında $(\mathcal{T}^*, \eta, \mu^*)$ ve $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadlarının birbirlerine eşit oldukları görülür.

b) $\mathcal{T}$ fonktörü $\mathcal{T}$ nesne fonksiyonunun bir genişlemesi olduğundan, sonuçta elde edilen nesne fonksiyonunun ilkiyle aynı olacağı açıktır. Ayrıca $\mathbf{K}$ kategorisindeki her bir $X \xrightarrow{f} \mathcal{T}(Y)$, $Y \xrightarrow{g} \mathcal{T}(Z)$ durumu için

$$\begin{aligned}
g * f &= \mu_Z \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f \\
&= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(Z)}) \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)}) \cdot f \\
&= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \bullet (\mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(Z)} \cdot ((\eta_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)}))) \cdot f \\
&= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \bullet ((\eta_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)})) \cdot f \\
&= ((\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \bullet (\eta_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g)) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)}) \cdot f \\
&= ((\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)}) \cdot f \\
&= (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Z)} \cdot g) \bullet (\mathbf{I}_{\mathcal{T}(Y)} \cdot f) \\
&= g \bullet f
\end{aligned}$$

elde edileceğinden bu iki klon biçimli monad eşittir. ■

Sonuç 2.3.4.1 Monad ve klon biçimli monad kavramları birbirine denktir. Verilen bir $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadı, her bir $X \xrightarrow{f} \mathcal{T}(Y)$, $Y \xrightarrow{g} \mathcal{T}(Z)$ durumu için

$$g \bullet f = \mu_Z \cdot \mathcal{T}(g) \cdot f$$

tanımıyla verilen klon bileşke kullanılarak bir klon biçimli monad olarak ele alınabilir. Tersine her bir $(\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ klon biçimli monadı, $\mathcal{T}$ nesne fonksiyonunun her $A \xrightarrow{f} B$ morfizmi için

$$\mathcal{T}(f) = (\eta_B \cdot f) \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)}$$

değerini verecek bir fonktöre genişletilmesi ve her A nesnesi için

$$\mu_A = \mathbf{I}_{\mathcal{T}(A)} \bullet \mathbf{I}_{\mathcal{T}^2(A)}$$

tanımının yapılmasıyla bir $(\mathcal{T}, \eta, \mu)$ monadı olarak düşünülebilir.

Bu aşamadan sonra monad ve klon biçimli monad kavramları arasında adlandırma dışında bir ayrım yapılmayacak ve gerekli durumlarda iki tanımın bileşenleri birbiri yerine kullanılabilir.

Aşağıdaki gösterimler kümeler ve fonksiyonlar kategorisi üzerindeki önemli monadlardan biri olan çifte küme monadının daha kolay bir biçimde tanıtılmasına yardımcı olur.

Gösterim 2.3.4.1 a) A , B ve C kümeler olmak üzere, A^{B^C} gösterimi $A^{(B^C)}$ kümesini belirtmek için kullanılır.

b) $f : X \rightarrow B \subseteq Y^Z$ bir fonksiyon ve $z \in Z$ sabit bir öge olsun. Bu durumda $[f(-)](z) : X \rightarrow Y$ fonksiyonu

$$([f(-)](z))(x) = [f(x)](z), \forall x \in X$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki örnekte, çifte kuvvet küme monadı adıyla bilinen yapı klon biçimli olarak tanıtılır.

Örnek 2.3.4.3 (Çifte Kuvvet Küme Monadı) $2 = \{0, 1\}$ olmak üzere **SET** üzerinde $\mathcal{T}_2 : |\mathbf{SET}| \rightarrow |\mathbf{SET}|$ nesne fonksiyonu her bir $A \in |\mathbf{SET}|$ kümesi için $\mathcal{T}_2(A) = 2^{2^A}$ olarak tanımlansın. Ayrıca

$$[\eta_A(a)](\alpha) = \alpha(a), \forall A \in |\mathbf{SET}|, \forall a \in A, \forall \alpha \in 2^A$$

olsun. Bu durumda $\alpha : A \rightarrow 2$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olduğundan her $\alpha \in 2^A$ için $[\eta_A(a)](\alpha) = \alpha(a) \in 2$ olup $\eta_A(a) : 2^A \rightarrow 2$ bir fonksiyon veya diğer bir yazıyla $\eta_A(a) \in 2^{2^A}$ olur. Dolayısıyla her A kümesi için $\eta_A : A \rightarrow 2^{2^A}$ bir fonksiyondur. **SET** kategorisinde her fonksiyon bir morfizm olduğundan, her bir $A \in |\mathbf{SET}|$ kümesi

için bir $\eta_A : A \rightarrow \mathcal{T}_2(A)$ morfizmi bulunmuş olur. **SET** kategorisindeki her bir $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}_2(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}_2(C)$ durumu için

$$[(g \bullet f)(a)](\gamma) = [f(a)]([g(-)](\gamma)), \forall a \in A, \forall \gamma \in 2^C$$

tanımı yapılsın. Burada, $g : B \rightarrow 2^{2^C}$ ve $\gamma \in 2^C$ olduğundan $[g(-)](\gamma) : B \rightarrow 2$, yani $[g(-)](\gamma) \in 2^B$ olur. $f : A \rightarrow 2^{2^B}$ ve $a \in A$ olmasından $f(a) : 2^B \rightarrow 2$ ve $[(g \bullet f)(a)](\gamma) = [f(a)]([g(-)](\gamma)) \in 2$ olduğu elde edilir. Böylece her $a \in A$ için $(g \bullet f)(a) : 2^C \rightarrow 2$ bir fonksiyon olur ve buradan da $g \bullet f : A \rightarrow 2^{2^C}$, yani $A \xrightarrow{g \bullet f} \mathcal{T}_2(C)$ olduğu görülür. Bu tanımlar ile verilen $(\mathcal{T}_2, \eta, \bullet)$ üçlütünün **SET** kategorisi üzerinde bir (klon biçimli) monad olduğunun görülmesi için (M1), (M2) ve (M3) koşullarının sağlatılması gereklidir. Kullanılan fonksiyonların tanım ve değer kümelerinin uyumuna dikkat edilmek üzere, (M1) koşulu **SET** kategorisindeki her $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}_2(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}_2(C)$, $C \xrightarrow{h} \mathcal{T}_2(D)$ durumu ve her $a \in A$, $\delta \in 2^D$ için

$$\begin{aligned} [(h \bullet (g \bullet f))(a)](\delta) &= [(g \bullet f)(a)]([h(-)](\delta)) \\ &= [f(a)]([g(-)]([h(-)](\delta))) \\ &= [f(a)]([(h \bullet g)(-)](\delta)) \\ &= [((h \bullet g) \bullet f)(a)](\delta) \end{aligned}$$

olmasından, (M2) her $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}_2(B)$ durumu ve her $a \in A$, $b \in B$, $\beta \in 2^B$ için

$$[\eta_B(b)](\beta) = \beta(b) \implies [\eta_B(-)](\beta) = \beta$$

ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} [(\eta_B \bullet f)(a)](\beta) &= [f(a)]([\eta_B(-)](\beta)) \\ &= [f(a)](\beta) \end{aligned}$$

olmasından, (M3) ise her $A \xrightarrow{\varphi} B$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}_2(C)$ durumu ve her $a \in A$, $\gamma \in 2^C$ için

$$\begin{aligned} [(g \bullet (\eta_B \circ \varphi))(a)](\gamma) &= [(\eta_B \circ \varphi)(a)]([g(-)](\gamma)) \\ &= [\eta_B(\varphi(a))]([g(-)](\gamma)) \\ &= ([g(-)](\gamma))(\varphi(a)) \\ &= [g(\varphi(a))](\gamma) \\ &= [(g \circ \varphi)(a)](\gamma) \end{aligned}$$

olmasından elde edilir. Böylece $(\mathcal{T}_2, \eta, \bullet)$ **SET** üzerinde bir klon biçimli monad

olur. Bu monada çiftte kuvvet küme monadı adı verilir. Çifte kuvvet küme monadı klon biçimli olmayan bir monad biçiminde yazılmak istendiğinde gerekli geçişler yapılarak, $\mathcal{T}_2$ nesne fonksiyonunun her bir $A \xrightarrow{f} B$ morfizmine karşılık

$$([\mathcal{T}_2(f)](F))(\beta) = F(\beta \circ f), \quad \forall F \in 2^{2^A}, \quad \forall \beta \in 2^B$$

biçiminde tanımlı bir $\mathcal{T}_2(A) \xrightarrow{\mathcal{T}_2(f)} \mathcal{T}_2(B)$ morfizm veren bir fonktöre tamamlandığı ve çarpım doğal dönüşümünün her bir A kümesi için

$$[\mu_A(\Phi)](\alpha) = \Phi([\mathbf{I}_{\mathcal{T}_2(A)}(-)](\alpha)), \quad \forall \Phi \in 2^{2^{2^A}}, \quad \forall \alpha \in 2^A$$

ile tanımlı $\mu_A : \mathcal{T}_2^2(A) \rightarrow \mathcal{T}_2(A)$ morfizmleri ile belirlendiği görülebilir (Höhle, 2001).

Çifte kuvvet küme monadı tanımında $2 = \{0, 1\}$ kümesi yerine boş olmayan herhangi bir L kümesi alınırsa yine **SET** kategorisi üzerinde bir monad elde edilmiş olur.

Örnek 2.3.4.4 $L \neq \emptyset$ sabit bir küme olmak üzere. $\mathcal{T}_L : |\mathbf{SET}| \rightarrow |\mathbf{SET}|$ nesne fonksiyonu

$$\mathcal{T}_L(A) = L^{L^A}, \quad \forall A \in |\mathbf{SET}|$$

biçiminde tanımlansın ve

$$[\eta_A(a)](\alpha) = \alpha(a), \quad \forall A \in |\mathbf{SET}|, \quad \forall a \in A, \quad \forall \alpha \in L^A$$

olsun. Ayrıca **SET** kategorisindeki her bir $A \xrightarrow{f} \mathcal{T}_L(B)$, $B \xrightarrow{g} \mathcal{T}_L(C)$ durumu için $A \xrightarrow{g \bullet f} \mathcal{T}_L(C)$ klon bileşke morfizmi

$$[(g \bullet f)(a)](\gamma) = [f(a)]([g(-)](\gamma)), \quad \forall a \in A, \quad \forall \gamma \in L^C$$

ile tanımlansın. Bu durumda $(\mathcal{T}_L, \eta, \bullet)$ üçlüsünün **SET** kategorisi üzerinde bir (klon biçimli) monad olacağı görülebilir. Bu monad **SET** üzerinde çiftte L -kuvvet küme monadı adını alır (Höhle, 2001).

Aşağıda, topolojik uzay kavramının monadlar yardımı ile tanımlanmasında önemli bir rolü bulunan süzgeç monadı tanıtılmaktadır.

Örnek 2.3.4.5 (Süzgeç Monadı) $\mathfrak{F}_2 : |\mathbf{SET}| \rightarrow |\mathbf{SET}|$ nesne fonksiyonu her bir X kümesini, X üzerinde tanımlanabilen bütün süzgeçlerin kümesi olan $\mathfrak{F}_2(X)$ 'e taşınsın ve her $X \in |\mathbf{SET}|$ için $\eta_X : X \rightarrow \mathfrak{F}_2(X)$ fonksiyonu

$$\eta_X(x) = \dot{x} = \{A \subseteq X \mid x \in A\} \in \mathfrak{F}_2(X), \quad \forall x \in X$$

biçiminde tanımlansın. Ayrıca her bir $f : X \rightarrow \mathfrak{F}_2(Y)$, $g : Y \rightarrow \mathfrak{F}_2(Z)$ fonksiyon ikilisi için $g \bullet f : X \rightarrow \mathfrak{F}_2(Z)$ klon bileşkesi

$$(g \bullet f)(x) = \{C \subseteq Z \mid \{y \in Y \mid C \in g(y)\} \in f(x)\}, \forall x \in X$$

ile verilsin. Bu durumda $(\mathfrak{F}_2, \eta, \bullet)$ üçlütünün **SET** kategorisi üzerinde bir klon biçimli monad olduğu gösterilebilir. Bu monada süzgeç monadı adı verilir (Höhle, 2001).

Herhangi bir kategori ve onun üzerinde verilmiş bir monad yardımıyla Kleisli kategorisi adı verilen yeni bir kategori oluşturmak mümkündür.

Tanım 2.3.4.4 $\mathbf{T} = (\mathcal{T}, \eta, \bullet)$, bir $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde (klon biçimli) bir monad olsun. $\text{hom}_{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}}$, her $X, Y \in |\mathbf{K}|$ için $\text{hom}_{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}}(X, Y) = \text{hom}_{\mathbf{K}}(X, \mathcal{T}(Y))$ olacak biçimde tanımlanırsa $\mathbf{K}_{\mathbf{T}} = (|\mathbf{K}|, \text{hom}_{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}}, \eta, \bullet)$ dördlüsü de bir kategori olur. Bu kategoriye $\mathbf{K}$ kategorisi üzerinde $\mathbf{T}$ monadıyla üretilen Kleisli kategorisi denir (Höhle, 2001).

Bu tanıma göre $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ kategorisinin nesneleri $\mathbf{K}$ kategorisinin nesneleriyle aynı olup iki kategori arasındaki temel fark morfizmlerde ortaya çıkmaktadır. $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ Kleisli kategorisinde $f : A \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} B$ olmasının anlamı, $\mathbf{K}$ kategorisinde $f : A \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{T}(B)$ olmasıdır. $A \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} B$ ve $B \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} C$, yani $A \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{T}(B)$ ve $B \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{T}(C)$ olması durumunda klon bileşke tanımı gereği $A \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{T}(C)$ ve dolayısıyla $A \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} C$ olur. Böylece klon bileşke, Kleisli kategorisinde normal bileşke olarak anlam kazanır. (M1) koşulu bu bileşkenin birleşmeliliğini garanti eder. Her $A \in |\mathbf{K}|$ için $\eta_A : A \xrightarrow{\mathbf{K}} \mathcal{T}(A)$ olduğundan Kleisli kategorisinde $\eta_A : A \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} A$ 'dır. Üstelik her $A \xrightarrow{\mathbf{K}_{\mathbf{T}}} B$ için (M2) koşulu gereği $\eta_B \bullet f = f$ olur ve (M3) 'ün de kullanılmasıyla

$$f \bullet \eta_A = f \bullet (\eta_A \cdot \text{I}_A) = f \cdot \text{I}_A = f$$

elde edilir. Dolayısıyla η_A , $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ kategorisinde A nesnesinin birim morfizmine karşılık gelir.

Kleisli kategorileri topoloji benzeri yapıların tanımlanmasında kullanışlıdır. Aşağıdaki örnekte klasik topolojik uzay yapısı, özel bir Kleisli kategorisi yardımıyla yeniden verilmektedir.

Örnek 2.3.4.6 $\mathbf{F}_2 = (\mathfrak{F}_2, \eta, \bullet)$, **SET** üzerindeki süzgeç monadını gösterebilir. Bir X kümesi verilsin ve $u \in X$ 'in $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_2}$ Kleisli kategorisine göre bir endomorfizmi, yani $u \in \text{End}_{\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_2}}(X) = \text{hom}_{\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_2}}(X, X) = \text{hom}_{\mathbf{SET}}(X, \mathfrak{F}_2(X))$ olsun. Ayrıca $\mathfrak{F}_2(X)$ üzerindeki $\subseteq$ sıralamasından yararlanılarak $\text{End}_{\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_2}}(X)$ üzerinde

$$f \subseteq g \iff f(x) \subseteq g(x), \forall x \in X$$

bağıntısı tanımlansın. Bu durumda,

$$(i) \quad u \subseteq \eta_X$$

$$(ii) \quad u \bullet u \subseteq u$$

koşulları sağlanıyorsa u , X için klasik anlamda bir komşuluk sitemi olur. Gerçekten X üzerindeki bir komşuluk sisteminin, her bir $x \in X$ için

$$(N0) \quad X \in \mathcal{N}(x)$$

$$(N1) \quad A \in \mathcal{N}(x) \implies x \in A$$

$$(N2) \quad A \in \mathcal{N}(x) \text{ ve } A \subseteq B \implies B \in \mathcal{N}(x)$$

$$(N3) \quad A, B \in \mathcal{N}(x) \implies A \cap B \in \mathcal{N}(x)$$

$$(N4) \quad A \in \mathcal{N}(x) \implies \exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ öyle ki } U \subseteq A \text{ ve } \forall y \in U \text{ için } U \in \mathcal{N}(y)$$

koşullarını gerçekleyen bir $\{\mathcal{N}(x)\}_{x \in X} \subseteq \mathcal{P}^2(X)$ ailesi olduğu hatırlanarak $\{u(x)\}_{x \in X}$ ailesinin de X üzerinde bir komşuluk sistemine karşılık geldiği gösterilebilir. (Daha genel bir durum Teorem 3.3.1 altında kanıtlanmaktadır).

Ayrıca X üzerindeki komşuluk sistemleri ve topolojiler arasında bire bir örten bir eşleme bulunduğundan, yukarıdaki iki koşulu sağlayan her bir u **SET**_{F₂}-endomorfizmi, tanımlı olduğu küme üzerinde bir topoloji belirler ve koşulları gerçekleyen herhangi iki $X \xrightarrow[\mathbf{SET}_{F_2}]{u} X$ ve $Y \xrightarrow[\mathbf{SET}_{F_2}]{v} Y$ endomorfizminin belirlediği topolojilere göre bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşulun

$$(v \circ f)(x) \subseteq [(\eta_Y \circ f) \bullet u](x), \quad \forall x \in X$$

olması olduğu görülebilir (Höhle, 2001).

3 ÇOK DEĞERLİ TOPOLOJİK YAPILAR

3.1 Çok Değerli Topolojik Uzaylar

Tanım 3.1.1 X herhangi bir küme, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid ve $\tau \subseteq L^X$ olsun.

$$(O1) \quad 1_X \in \tau$$

$$(O2) \quad f, g \in \tau \implies f \otimes g \in \tau$$

$$(O3) \quad \{f_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \implies \bigvee_{i \in I} f_i \in \tau$$

koşulları sağlanıyorsa τ 'ya X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli topoloji (veya kısaca $\mathfrak{G}$ -topoloji), (X, τ) ikilisine bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzay (veya kısaca $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay) denir. Belirli bir tam grupoid adı verilmek istenmediğinde bu tür yapılar sırasıyla çok değerli topoloji (many valued topology) ve çok değerli topolojik uzay biçiminde adlandırılır (Höhle ve Šostak, 1999).

Boş küme $\emptyset : \emptyset \rightarrow L$ boş fonksiyonu olarak da ele alınabildiğinden $X = \emptyset$ olması durumunda $L^\emptyset = \{\emptyset\}$ eşitliği vardır. Özel olarak, $\forall x \in \emptyset, \emptyset(x) = 1$ önermesi $1_\emptyset = \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden $\tau = \{\emptyset\} \subseteq L^\emptyset$ için (O1) geçerlidir. Benzer olarak $\emptyset \otimes \emptyset = \emptyset$ eşitliği elde edilebilir. $L^\emptyset$ tek öğeli olduğundan (O3)'ün sağlandığı da açıktır. Böylece $X = \emptyset$ olması durumunda X üzerindeki tek $\mathfrak{G}$ -topoloji $\tau = \{\emptyset\}$ $\mathfrak{G}$ -topolojisi olur (Höhle ve Šostak, 1999). (O2)'de kullanılan $\otimes$ işlemi, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidindeki işlemin Tanım 2.1.10'a göre yapılan genişlemesidir. (O3)'teki eküs alımı da L^X kafesi içerisinde gerçekleşmektedir. X üzerinde verilen herhangi bir τ $\mathfrak{G}$ -topolojisi için $\emptyset \subseteq \tau$ ve $\bigvee_{i \in \emptyset} f_i = 0_X$ olacağından $0_X \in \tau$ olması her zaman sağlanır (Höhle ve Šostak, 1999). Tanım 3.1.1'de özel olarak $\mathfrak{G} = \mathbf{2} = (2, \subseteq, \cap)$ tam grupoidi alınır, elde edilecek yapının bir klasik topolojiye karşılık geleceği görülebilir. Aksine, bir küme üzerindeki klasik anlamdaki her bir topoloji, bir $\mathbf{2}$ -değerli topoloji olarak düşünülebilir. Bir X kümesi üzerindeki bütün $\mathfrak{G}$ -topolojilerin ailesi $\mathfrak{T}_\mathfrak{G}(X)$ ile gösterilir. $\mathfrak{T}_\mathfrak{G}(X)$ ailesinin herhangi sayıdaki kesişim altında kapalı olduğunu görmek kolaydır (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 3.1.2 X bir küme, $\mathfrak{G}$ bir tam grupoid, $\varrho \neq \emptyset$ ve $\varrho \subseteq L^X$ olsun. X üzerindeki $\tau_\varrho = \bigcap \{\tau \in \mathfrak{T}_\mathfrak{G}(X) \mid \varrho \subseteq \tau\}$ $\mathfrak{G}$ -topolojisine ϱ 'nun X üzerinde ürettiği $\mathfrak{G}$ -topoloji denir ve ϱ 'nun τ_ϱ için bir alt taban olduğu söylenir (Höhle ve Šostak, 1999).

Belirli bir X kümesi ve $\mathfrak{G}$ -tam grupoidi için $\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X)$ ailesinin $\subseteq$ bağıntısına göre bir kafes olacağı açıktır. X üzerindeki τ_1 ve τ_2 gibi iki $\mathfrak{G}$ -topolojinin kesişimi X üzerinde yine bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olacağından bu kafeste $\tau_1 \wedge \tau_2 = \tau_1 \cap \tau_2$ 'dir. Kafesin eküs işlemi ise Tanım 3.1.2'deki gösterim altında $\tau_1 \vee \tau_2 = \tau_{\tau_1 \cup \tau_2}$ biçiminde gelir. Ayrıca, herhangi sayıda $\mathfrak{G}$ -topolojinin kesişimi yine bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olduğundan Teorem 2.1.1'deki (LC_*) koşulu sağlanır ve $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X), \subseteq)$ bir tam kafes olur (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 3.1.1 Her $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidi ve her X kümesi için L^X 'in X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olacağı görülebilir. Bu $\mathfrak{G}$ -topoloji τ_{dis} ile gösterilir ve $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X), \subseteq)$ kafesinin en büyük ögesidir. Tam grupoid işlemi $1_X \otimes 0_X \in \{0_X, 1_X\}$ olmasını gerektirmediğinden $\{0_X, 1_X\}$ kümesi X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olmayabilir. Ancak bu küme Tanım 3.1.2'deki şekilde bir $\mathfrak{G}$ -topoloji üretir. $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X), \subseteq)$ kafesinin en küçük ögesi olan bu $\mathfrak{G}$ -topoloji τ_{ind} ile gösterilir (Höhle ve Šostak, 1999).

Örnek 3.1.2 $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X), \subseteq)$ kafesinin özel öğelerinden biri de $\tau_{\text{ind}}^{(S)} = \{a_X \mid a \in L\}$ kümesidir. Tanım 2.1.10 gösterimleri altında her $a, b \in L$ için $a_X \otimes b_X = (a \otimes b)_X$ ve her $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq L$ için $\bigvee_{i \in I} (a_i)_X = \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right)_X$ olacağına dikkat edilirse gerçekten $\tau_{\text{ind}}^{(S)} \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X)$ olduğu görülür (Höhle ve Šostak, 1999).

Genel olarak $\tau_{\text{ind}} = \{0_X, 1_X\}$ olması gerekmemekle birlikte $\tau_{\text{ind}} \subseteq \tau_{\text{ind}}^{(S)}$ olması her zaman sağlanır. Ayrıca X 'in en az iki farklı ögesi bulunması durumunda herhangi bir $x_0 \in X$ için $f(x) = \begin{cases} 1, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$ ile tanımlanan $f \in L^X$ için $f \notin \tau_{\text{ind}}^{(S)}$ olacağından $\tau_{\text{ind}}^{(S)} \subsetneq \tau_{\text{dis}}$ olur. Dolayısıyla iki veya daha çok elemanı bulunan bir küme üzerinde τ_{ind} ve τ_{dis} $\mathfrak{G}$ -topolojileri her zaman birbirinden farklıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 3.1.3 X herhangi bir küme, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ dönüşümüne X için bir $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemi (veya kısaca $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi) denir (Höhle, 2001).

- (U0) $[v(x)](1_X) = 1, \quad \forall x \in X$
- (U1) $f \leq g \implies [v(x)](f) \leq [v(x)](g), \quad \forall f, g \in L^X, \forall x \in X$
- (U2) $[v(x)](f) \otimes [v(x)](g) \leq [v(x)](f \otimes g), \quad \forall f, g \in L^X, \forall x \in X$
- (U3) $[v(x)](f) \leq f(x), \quad \forall x \in X$
- (U4) $[v(x)](f) \leq \bigvee \{[v(x)](h) \mid h \in L^X, h(y) \leq [v(y)](f), \forall y \in X\},$
 $\forall f \in L^X, \forall x \in X$

Önerme 3.1.1 $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ dönüşümü bir X kümesi için bir $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemi ise, her bir $x \in X$ için $v(x) : L^X \rightarrow L$ dönüşümü bir $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeçtir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. (U3) $0_X \in L^X$ için uygulanırsa $[v(x)](0_X) \leq 0_X(x) = 0$ elde edileceğinden, her $x \in X$ için $v(x) \in L^{(L^X)}$ ögesi (F3) belitini sağlar. (U0), (U1) ve (U2)'nin de sırasıyla (F0), (F1) ve (F2)'ye karşılık geldikleri hemen görülür. ■

Bir X kümesi için bir v $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi verildiğinde her bir $f \in L^X$ ögesi için $f_v(x) = [v(x)](f)$, $\forall x \in X$ biçiminde bir $f_v \in L^X$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu gösterim yardımıyla $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemi belitlerini aşağıdaki gibi daha sade bir biçimde ifade etmek mümkündür:

$$(U0) \quad (1_X)_v = 1$$

$$(U1) \quad f \leq g \implies f_v \leq g_v, \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(U2) \quad f_v \otimes g_v \leq (f \otimes g)_v, \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(U3) \quad f_v \leq f, \quad \forall f \in L^X$$

$$(U4) \quad f_v \leq \bigvee \{h_v \mid h \in L^X, h \leq f_v\}, \quad \forall f \in L^X$$

Gösterim 2.3.4.1 altında $f_v = [v(-)](f)$ olduğuna dikkat edilebilir.

Teorem 3.1.1 Bir $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidi ve bir X kümesi verilsin. X üzerinde bir τ $\mathfrak{G}$ -topolojisi verildiğinde, her $f \in L^X$ için $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\}$ olacak biçimde tanımlanan v_τ , X için bir $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemidir. Benzer şekilde, herhangi bir $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi için $\tau_v = \{f \in L^X \mid f \leq f_v\}$ kümesi X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olur. Bunun yanında her bir τ $\mathfrak{G}$ -topolojisi için $\tau_{v_\tau} = \tau$ ve her v $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi için $v_{\tau_v} = v$ eşitlikleri vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. X üzerinde bir τ $\mathfrak{G}$ -topolojisi verilsin ve v_τ , $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\}$ biçiminde tanımlansın. v_τ için (U0)'ın sağlandığı (O1)'den, (U1)'in sağlandığı eküstün sıra korurluğundan, (U3)'ün sağlandığı v_τ 'nun tanımından görülür.

Yukarıda geçerliliği elde edilen (U3)'ten, herhangi $f, g \in L^X$ fonksiyonları için $f_{v_\tau} \leq f$, $g_{v_\tau} \leq g$ olduğu görülür. Ayrıca (O3)'ten dolayı $f_{v_\tau}, g_{v_\tau} \in \tau$, (O2)'den dolayı $f_{v_\tau} \otimes g_{v_\tau} \in \tau$ ve $\otimes$ işleminin sıra korurluğundan dolayı da $f_{v_\tau} \otimes g_{v_\tau} \leq f \otimes g$ olur ve buradan $f_{v_\tau} \otimes g_{v_\tau} \in \{h \in \tau \mid h \leq f \otimes g\}$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$f_{v_\tau} \otimes g_{v_\tau} \leq \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f \otimes g\} = (f \otimes g)_{v_\tau}$$

olup (U2) elde edilir.

$f \in L^X$ olsun. Bu durumda $(f_{v_\tau})_{v_\tau} \in \{h_{v_\tau} \mid h \in L^X, h \leq f_{v_\tau}\}$ olur. Ancak (O3) $f_{v_\tau} \in \tau$ olmasını gerektirdiğinden $f_{v_\tau} \in \{h \in \tau \mid h \leq f_{v_\tau}\}$ 'dir. Buradan $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f_{v_\tau}\} = (f_{v_\tau})_{v_\tau}$ eşitliği ve $f_{v_\tau} \in \{h_{v_\tau} \mid h \in L^X, h \leq f_{v_\tau}\}$ olduğu görülür. Böylece $f_v \leq \bigvee \{h_{v_\tau} \mid h \in L^X, h \leq f_v\}$ olup (U4) de elde edilir.

Diğer taraftan X için herhangi bir $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi verilsin ve $\tau_v = \{f \in L^X \mid f \leq f_v\}$ kümesi tanımlansın. Bu durumda τ_v 'nun (O1)'i sağladığı (U0)'dan, (O2)'yi sağladığı (U2)'den ve $\otimes$ işleminin sıra korurluğundan görülür.

$\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_v$ olsun. $I = \emptyset$ ise $\bigvee_{i \in I} f_i = 0_X$ olup (U3)'ten dolayı $\bigvee_{i \in I} f_i \in \tau_v$ 'dur. $I \neq \emptyset$ ve her $i \in I$ için $f_i \in \tau_v$ ise τ_v 'nun tanımı yanında, (U1) gereği her $i \in I$ için

$$(f_i)_v \leq \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right)_v$$

olacağı kullanılırsa

$$\bigvee_{i \in I} f_i \leq \bigvee_{i \in I} (f_i)_v \leq \left(\bigvee_{i \in I} f_i \right)_v$$

eşitizliğine ulaşılır. Böylece $\bigvee_{i \in I} f_i \in \tau_v$ olup τ_v (O3)'ü de sağlar.

τ X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olsun. Her $f \in L^X$ ve her $x \in X$ için

$$\bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \leq f$$

olacağına dikkat edilip (O3) kullanılırsa

$$\begin{aligned} f \in \tau_{v_\tau} &\iff f \leq f_{v_\tau} \\ &\iff f \leq \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \\ &\iff f = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \\ &\iff f \in \tau \end{aligned}$$

elde edileceğinden $\tau_{v_\tau} = \tau$ 'dur.

Son olarak, X için bir v $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi verilsin. Her $f \in L^X$ için

$$f_{v_{\tau_v}} = \bigvee \{h \in \tau_v \mid h \leq f\} = \bigvee \{h \in L^X \mid h \leq h_v, h \leq f\}$$

olur. (U4) ve (U1)'den $f_v \leq \bigvee \{h_v \mid h \in L^X, h \leq f_v\} \leq (f_v)_v$ olduğu görülür. Ayrıca (U3)'ten dolayı $f_v \leq f$ 'tir. Böylece $f_v \in \{h \in L^X \mid h \leq h_v, h \leq f\}$ olur ve $f_v \leq f_{v_{\tau_v}}$ eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan her $h \in \{h \in L^X \mid h \leq h_v, h \leq f\}$ için (U1) yardımıyla $h \leq h_v \leq f_v$ olacağı görülür ve

$$\bigvee \{h \in L^X \mid h \leq h_v, h \leq f\} \leq f_v$$

bulunur. Her $f \in L^X$ için $f_{v_{\tau_v}} = f_v$ olmasından $v_{\tau_v} = v$ eşitliğine ulaşılır. ■

Yukarıdaki teoremden elde edilen sonuçlara dayanılarak, bir X kümesi üzerindeki bir $\mathfrak{G}$ -topoloji ile bu $\mathfrak{G}$ -topolojiye karşılık gelen $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi bir tutulabilir.

Tanım 3.1.4 X bir küme, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir $\mathcal{I} : L^X \rightarrow L^X$ dönüşümüne X üzerinde $\mathfrak{G}$ 'ye göre bir kesin eşçekirdek (*strict conucleus*) veya bir $\mathfrak{G}$ -iç operatörü adı verilir (Höhle, 2001).

$$(I0) \quad \mathcal{I}(1_X) = 1$$

$$(I1) \quad f \leq g \implies \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g), \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(I2) \quad \mathcal{I}(f) \otimes \mathcal{I}(g) \leq \mathcal{I}(f \otimes g), \quad \forall f, g \in L^X$$

$$(I3) \quad \mathcal{I}(f) \leq f, \quad \forall f \in L^X$$

$$(I4) \quad \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(f)), \quad \forall f \in L^X$$

Teorem 3.1.2 Bir $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidi ve bir X kümesi verilsin. X üzerinde $\mathfrak{G}$ 'ye göre bir $\mathcal{I}$ kesin eşçekirdeği verildiğinde, her $f \in L^X$ için $f_{v_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}(f)$ olacak biçimde tanımlanan $v_{\mathcal{I}}$, X için bir $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemidir. Aksine, X için bir v $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemine karşılık, her $f \in L^X$ için $\mathcal{I}_v(f) = f_v$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{I}$ dönüşümü X üzerinde bir kesin eşçekirdektir. Ayrıca her $\mathcal{I}$ kesin eşçekirdeği için $\mathcal{I}_{v_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$, her v $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi için $v_{\mathcal{I}_v} = v$ olur (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. Verilen geçişler altında $\mathcal{I}_{v_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$, $v_{\mathcal{I}_v} = v$ eşitliklerinin varlığı ve (I0), (I1), (I2), (I3)'ün sırasıyla (U0), (U1), (U2), (U3)'e eşdeğer olması kolayca görülür.

Her $f \in L^X$ için $f_v \leq \bigvee \{h_v \mid h \in L^X, h \leq f_v\}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{I}_v(f) \leq \bigvee \{\mathcal{I}_v(h) \mid h \in L^X, h \leq \mathcal{I}_v(f)\}$$

olduğundan ve $h \leq \mathcal{I}_v(f)$ olması $\mathcal{I}_v(h) \leq \mathcal{I}_v(\mathcal{I}_v(h))$ olmasını gerektirdiğinden $\mathcal{I}_v(f) \leq \mathcal{I}_v(\mathcal{I}_v(h))$ elde edilir ve (U4)'ün (I4)'ü gerektirdiği görülür.

Tersine, her $f \in L^X$ için $\mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(\mathcal{I}(f))$ olduğu kabul edilirse $f_{v_{\mathcal{I}}} \leq (f_{v_{\mathcal{I}}})_{v_{\mathcal{I}}}$ ve $(f_{v_{\mathcal{I}}})_{v_{\mathcal{I}}} \in \{h_{v_{\mathcal{I}}} \mid h \in L^X, h \leq f_{v_{\mathcal{I}}}\}$ olduğundan $f_{v_{\mathcal{I}}} \leq \bigvee \{h_{v_{\mathcal{I}}} \mid h \in L^X, h \leq f_{v_{\mathcal{I}}}\}$ olur. Dolayısıyla (I4) de (U4)'ü gerektirir. ■

Teorem 3.1.1 ve yukarıdaki teorem ışığında $\mathfrak{G}$ 'ye göre kesin eşçekirdek ve $\mathfrak{G}$ -değerli topoloji kavramlarının birbirlerine denk olduğu söylenebilir. Bunlar arasındaki geçiş $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemleri vasıtasıyla yapılır ve gerektiğinde $\tau_{v_{\mathcal{I}}}$ yerine $\tau_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{I}_{v_{\tau}}$ yerine de $\mathcal{I}_{\tau}$ yazılır. Ayrıca τ bir X kümesi üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzay ve $g \in L^X$ ise $\mathcal{I}_{\tau}(g)$ yerine, g 'nin içi olarak okunan g° yazımı da kullanılır. $g^{\circ} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq g\}$ olduğunu görmek kolaydır.

3.1.1 $\mathfrak{G}_*$ -Değerli Topolojik Uzaylar

$G = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü GL-monoid olsun. Bu durumda Gösterim 2.1.5.1 ile tanımlanan $\mathfrak{G}_* = (L, \leq, \otimes)$ üçlünün bir cl-kuasi monoid belirlediği Önerme 2.1.5.8'den bilinmektedir. Bu bölümün amacı, bu biçimde ortaya çıkan tam grupoidler üzerinde kurulan çok değerli topolojilerin daha gelişmiş bir sınıflandırmasını yapmak ve bunların genele üstün özelliklerinin araştırılmasına zemin hazırlamaktır.

Herhangi çok değerli topolojik uzaylar üzerinde çalışıldığında sabit fonksiyonların sürekli olmaları gerekmez. Bu durumun bir örneği, çok değerli topolojik uzaylar arasındaki fonksiyonlar için süreklilik kavramı tanımlandıktan sonra Örnek 3.2.1.1 ile verilecektir. Genelde istenmeyen bu durumun üstesinden gelmenin yollarından biri aşağıdaki tanımlamalara gitmektir.

Tanım 3.1.1.1 X bir küme, τ X üzerinde bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji olsun ve her bir $a \in L$ için, $a_X : X \rightarrow L$ ile her noktada a değerini alan sabit fonksiyon gösterilsin.

- a) Her $a \in L$ için $a_X \in \tau$ oluyorsa τ 'nun zayıf tabakalı olduğu söylenir.
- b) Her $g \in \tau$ ve her $a \in L$ için $a * g \in \tau$ ise τ 'ya tabakalı denir (Höhle, 2001).

$\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayın (zayıf) tabakalı olması, uzayı belirleyen $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojinin (zayıf) tabakalı olması biçiminde tanımlanır. Bir X kümesi üzerindeki bütün tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojilerin kümesi $\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ ile gösterilir (Höhle, 2001).

Önerme 3.1.1.1 Her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topoloji zayıf tabakalıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. (X, τ) tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olsun. $G = (L, \leq, *)$ bir GL-monoid olduğundan kesin çift yanlı olup her bir $a \in L$ için $a * 1_X = a_X$ 'tir. Böylece τ 'nun zayıf tabakalı olması Tanım 3.1.1'in (O1) koşulundan elde edilir. ■

Sıkı kareköklü GL-monoidin ikili işlemi, içerisindeki kafes yapısından gelen ebas işlemine eşit olsun, yani $G = (L, \leq, \wedge)$ olarak verilsin ve $\mathfrak{G}_\wedge = (L, \leq, \otimes)$ olarak tanımlansın. G eşgüçlü olduğundan her $a \in L$ için $\sqrt{a} = a$ olup $\otimes = \wedge$ 'dir. Dolayısıyla $\mathfrak{G}_\wedge = (L, \leq, \wedge)$ yazılmasında herhangi bir sakınca yoktur. Böyle bir tam grupoid üzerinde verilen topolojilerde tabakalılık ve zayıf tabakalılık kavramları birbirine denktir.

Önerme 3.1.1.2 (X, τ) bir $\mathfrak{G}_\wedge$ -değerli topolojik uzay olmak üzere, τ 'nun tabakalı olması için gerek ve yeter koşul τ 'nun zayıf tabakalı olmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. Birinci yön Teorem 3.1.1.1'e karşılık gelir.

τ zayıf tabakalı, $g \in \tau$, $a \in L$ olsun. Bu durumda $a_X \in \tau$ olacağından (O2)'den $a \wedge g = a_X \wedge g \in \tau$ elde edilir. Dolayısıyla τ tabakalıdır. ■

Örnek 3.1.1.1 Bir $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidi üzerinde çalışılıyor olsun ve bir X kümesi verilsin. Bu durumda Örnek 3.1.2'de tanımlanan $\tau_{\text{ind}}^{(S)}$ 'in X üzerinde bir tabakalı (ve dolayısıyla zayıf tabakalı) $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji olacağı görülebilir. Üstelik $\tau_{\text{ind}}^{(S)}$, X üzerindeki her (zayıf) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojinin bir alt kümesidir. Dolayısıyla bir X kümesi üzerindeki (zayıf) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojilerin en küçüğü vardır ve $\tau_{\text{ind}}^{(S)}$ 'e eşittir. Ayrıca $\tau_{\text{dis}} = L^X$ $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojisi de tabakalı olacağından X üzerindeki (zayıf) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojilerin en büyüğü de vardır ve τ_{dis} 'e eşittir (Höhle, 2001).

Bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayın tabakalı veya zayıf tabakalı olmasını Tanım 2.2.1.3'te verilen özel $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç türleri yardımıyla belirlemek de mümkündür.

Önerme 3.1.1.3 (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -topoloji, v_τ τ 'ya karşılık gelen $\mathfrak{G}_*$ -komşuluk sistemi olsun. τ 'nın (zayıf) tabakalı olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için $v_\tau(x)$ $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin (zayıf) tabakalı olmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. $(\implies)$: Teorem 3.1.1'e göre, her bir $f \in L^X$ ve her bir $x \in X$ için $f_{v_\tau}(x) = [v_\tau(x)](f)$ gösterimi altında v_τ , her $f \in L^X$ için $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\}$ olacak biçimde tanımlıdır.

(X, τ) zayıf tabakalı olsun ve bir $f \in L^X$ fonksiyonu verilsin. $a \in L$ ögesi $a = \bigwedge_{x \in X} f(x)$ biçiminde tanımlansın. τ zayıf tabakalı olduğundan $a_X \in \tau$ 'dur. Böylece,

$$\bigwedge_{x \in X} f(x) = a_X(x) \leq \left(\bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \right)(x) = f_{v_\tau}(x) = [v_\tau(x)](f)$$

olup her $x \in X$ için $v_\tau(x)$ $\mathfrak{G}_*$ -değerli süzgecinin zayıf tabakalı olduğu görülür.

(X, τ) tabakalı olsun. Bu durumda her $x \in X$, $f \in L^X$ için

$$\begin{aligned} a * [v_\tau(x)](f) &= a * \left(\bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \right)(x) \\ &= \bigvee \{a * h(x) \mid h \in \tau, h \leq f\} \\ &\leq \bigvee \{(a * h)(x) \mid h \in \tau, a * h \leq a * f\} \\ &\leq \bigvee \{k(x) \mid k \in \tau, k \leq a * f\} \\ &= [v_\tau(x)](a * f) \end{aligned}$$

olacağından her $x \in X$ için $v_\tau(x)$ bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçtir.

($\Leftarrow$) : Teorem 3.1.1'den $\tau = \tau_{v_\tau} = \{f \in L^X \mid f \leq f_{v_\tau}\}$ olduğu görülür.

Her $x \in X$ için $v_\tau(x)$ $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci zayıf tabakalı olsun. Bu durumda her $f \in L^X$ için $\bigwedge_{x \in X} f(x) \leq [v_\tau(x)](f) = f_{v_\tau}(x)$ 'tir ve her bir $a \in L$, $x \in X$ için

$$a_X(x) = a \leq \bigwedge_{x \in X} a = \bigwedge_{x \in X} a_X(x) \leq (a_X)_{v_\tau}(x)$$

olmasından $a_X \in \tau$ olduğu çıkar.

$a \in L$, $g \in \tau$ olsun. Her $x \in X$ için $v_\tau(x)$ $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci tabakalı ise her $x \in X$ için $a * [v_\tau(x)](g) \leq [v_\tau(x)](a * g)$, yani $a * g_{v_\tau} \leq (a * g)_{v_\tau}$ olur. Ayrıca $g \in \tau$ olduğundan $g \leq g_{v_\tau}$ 'dur ve böylece $a * g \leq a * g_{v_\tau} \leq (a * g)_{v_\tau}$ elde edilerek $a * g \in \tau$ olduğu görülür. ■

Kanıtı açık olan aşağıdaki önerme bir $\mathfrak{G}_*$ -topolojinin tabakalılaştırılmasından bahsedilmesini olanaklı kılar.

Önerme 3.1.1.4 Belirli bir X kümesi üzerinde verilen herhangi sayıdaki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojinin kesişimi de yine bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojidir (Höhle, 2001).

Bir X kümesi üzerindeki τ_{dis} $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojisi, X üzerinde verilen her bir $\mathfrak{G}_*$ -topolojiyi kapsayan bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topoloji olduğundan, aşağıdaki tanımda arakesiti alınacak olan küme boş değildir.

Tanım 3.1.1.2 τ bir X kümesi üzerinde bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji olsun. Bu durumda $\tau^{(S)} = \bigcap \left\{ \tau' \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X) \mid \tau \subseteq \tau' \right\}$ $\mathfrak{G}_*$ -topolojisine τ 'nın tabakalı kabuğu (stratified hull) adı verilir (Höhle, 2001).

τ tabakalı ise $\tau^{(S)} = \tau$ olduğunu ve τ_{ind} 'in tabakalı kabuğunun gerçekten $\tau_{\text{ind}}^{(S)}$ 'e eşit olduğunu görmek kolaydır.

Tanım 3.1.1.3 Bir $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidi verilsin ve $\mathcal{B} \subseteq L^X$ olsun.

$$(B1) \quad 1_X, 0_X \in \mathcal{B}$$

$$(B2) \quad f_1, f_2 \in \mathcal{B} \implies f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{B}$$

koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{B}$ 'ye X için bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -taban denir (Höhle, 2001).

Önerme 3.1.1.5 X bir küme ve $\mathcal{B}$, X için bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -taban olsun. Bu durumda,

$$\tau_{\langle \mathcal{B} \rangle} = \left\{ \bigvee_{i \in I} (a_i * g_i) \mid \exists I \in |\mathbf{SET}|, \forall i \in I, a_i \in L, g_i \in \mathcal{B} \right\}$$

kümesi X üzerinde tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -topolojidir (Höhle, 2001).

Kanıt. (O1) koşulu (B1)'den ve her GL-monoidin kesin çift yanlı olmasından gelir.

$0_X \in \mathcal{B}$ olduğundan $I_0 = \{0\}$, $a_0 = 0$, $g_0 = 0_X$ alımp $0_X = 0 * 0_X = \bigvee_{i \in I_0} (a_i * g_i)$ yazılabilir. Dolayısıyla τ 'nun her bir ögesi $\forall i \in I$ için $a_i \in L$, $g_i \in \mathcal{B}$ olmasını gerçekleyen bir $I \neq \emptyset$ damga kümesi üzerinden $a_i * g_i$ 'lere göre alınan bir eküs işleminin sonucu olarak elde edilebilir.

$f, h \in \tau$ olsun. $\forall i \in I$, $a_i \in L$, $g_i \in \mathcal{B}$, $\forall j \in J$, $b_j \in L$, $k_j \in \mathcal{B}$ ve $f = \bigvee_{i \in I} (a_i * g_i)$, $h = \bigvee_{j \in J} (b_j * k_j)$ olacak biçimde $I, J \neq \emptyset$ damga kümeleri vardır. Böylece (O2)

koşulu, Önerme 2.1.5.5, (S3) ve (B2) kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}
f \otimes g &= \sqrt{\bigvee_{i \in I} (a_i * g_i)} * \sqrt{\bigvee_{j \in J} (b_j * k_j)} \\
&= \bigvee_{i \in I} \sqrt{a_i * g_i} * \bigvee_{j \in J} \sqrt{b_j * k_j} \\
&= \bigvee_{i \in I} \left((\sqrt{a_i} * \sqrt{g_i}) \vee \sqrt{0} \right) * \bigvee_{j \in J} \left((\sqrt{b_j} * \sqrt{k_j}) \vee \sqrt{0} \right) \\
&= \bigvee_{(i,j) \in I \times J} \left(\left((\sqrt{a_i} * \sqrt{g_i}) \vee \sqrt{0} \right) * \left((\sqrt{b_j} * \sqrt{k_j}) \vee \sqrt{0} \right) \right) \\
&= \bigvee_{(i,j) \in I \times J} \left(\sqrt{a_i} * \sqrt{b_j} * \sqrt{g_i} * \sqrt{k_j} \right) \vee \bigvee_{i \in I} \left(\sqrt{a_i} * \sqrt{g_i} * \sqrt{0} \right) \vee \bigvee_{j \in J} \left(\sqrt{b_j} * \sqrt{k_j} * \sqrt{0} \right) \\
&= \bigvee_{(i,j) \in I \times J} \left((\sqrt{a_i} * \sqrt{b_j}) * (g_i \otimes k_j) \right) \vee \bigvee_{i \in I} (\sqrt{a_i} * (g_i \otimes 0_X)) \vee \bigvee_{j \in J} (\sqrt{b_j} * (k_j \otimes 0_X))
\end{aligned}$$

(O3) koşulu ve τ 'nun tabakalılığı ise τ 'nın tanımının direkt sonucudur. ■

Tanım 3.1.1.4 X bir küme, $\mathcal{B}$ X için bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -taban olmak üzere Önerme 3.1.1.5'te verilen $\tau_{\langle \mathcal{B} \rangle}$ topolojisine $\mathcal{B}$ 'nin ürettiği tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topoloji denir. Herhangi bir τ $\mathfrak{G}_*$ -topolojisi için $\tau = \tau_{\langle \mathcal{B} \rangle}$ ise $\mathcal{B}$ 'nin τ için bir taban olduğu söylenir (Höhle, 2001).

Önerme 3.1.1.6 (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay ise τ , X için bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -tabandır ve $\tau_{\langle \tau \rangle} = \tau^{(S)}$ 'dir (Höhle, 2001).

Kanıt. τ 'nın tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -taban olduğu $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji tanımından kolayca görülür. Böylece Önerme 3.1.1.5'ten $\tau_{\langle \tau \rangle}$ 'nın τ 'yu kapsayan tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji olduğu görülerek $\tau^{(S)} \subseteq \tau_{\langle \tau \rangle}$ elde edilir.

τ' X üzerinde tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -topoloji ve $\tau \subseteq \tau'$ olsun. $f \in \tau_{\langle \tau \rangle}$ ise her $i \in I$ için $a_i \in L$, $g_i \in \tau$ ve $f = \bigvee_{i \in I} (a_i * g_i)$ olacak biçimde bir $I \neq \emptyset$ damga kümesi bulunabilir. Her $i \in I$ için $g_i \in \tau \subseteq \tau'$ ve τ' tabakalı olduğundan her $i \in I$ için

$a_i * g_i \in \tau'$ olur ve (O3)'ten $\bigvee_{i \in I} (a_i * g_i) \in \tau'$ elde edilir. Böylece X üzerindeki her bir τ' tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojisi için $\tau_{\langle \tau \rangle} \subseteq \tau'$ olup

$$\tau_{\langle \tau \rangle} \subseteq \bigcap \left\{ \tau' \in \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X) \mid \tau \subseteq \tau' \right\} = \tau^{(S)}$$

olduğu da elde edilmiş olur. ■

Tanım 3.1.1.5 (X, τ) tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzay olsun. $g \in \tau$ ve $g \leq \sqrt{0}_X$ olması $(\sqrt{0}_X \rightarrow g)^2 \in \tau$ olmasını gerektiriyorsa τ 'nun bir katı (rigid) $\mathfrak{G}_*$ -değerli topoloji olduğu söylenir. (X, τ) 'nun katı olması, τ 'nun katı olması olarak tanımlanır (Höhle, 2001).

Yukarıdaki tanımda $\sqrt{0}_X, L^X$ kümesinin X 'in her noktasında $\sqrt{0} \in L$ değerini alan öğesini göstermektedir.

Örnek 3.1.1.2 a) Her bir X kümesi için (X, τ_{dis}) 'in bir katı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olacağı açıktır.

b) Herhangi bir X kümesi üzerinde $\tau_{\text{ind}}^{(S)} = \{a_X \mid a \in L\}$ $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojisi verilsin. $g \in \tau$ ise $g = a_X$ olacak biçimde bir $a \in L$ vardır ve böylece

$$g \leq \sqrt{0}_X \implies a \leq \sqrt{0} \implies (\sqrt{0}_X \rightarrow g)^2 = (\sqrt{0}_X \rightarrow a_X)^2 = \left[(\sqrt{0} \rightarrow a)^2 \right]_X \in \tau$$

olup $\tau_{\text{ind}}^{(S)}$ katıdır (Höhle, 2001).

Son olarak bu bölümde klasik çarpım uzayı kavramının tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylardaki bir benzeri tanımlanacaktır. Herhangi $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzayların çarpımı da kategori teorisinin imkanları yardımıyla tanımlanabilir olmakla birlikte, çok değerli çarpım uzaylarının özelliklerinin bu çalışmada böyle bir genellikte incelenmesine gerek duyulmamıştır.

Sadeliği sağlamak amacıyla aşağıdaki önermede ve sonrasında $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ çoklu kuantal işlemi kısaca $\bigstar_{i=1}^n a_i$ biçiminde yazılacaktır.

Önerme 3.1.1.7 $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayların bir ailesi olsun. $X = \prod_{i \in I} X_i$, $\{X_i \mid i \in I\}$ küme ailesinin çarpımını; $\pi_{i_0} : X \rightarrow X_{i_0}$, çarpım kümesinden tanımlanan izdüşüm fonksiyonlarını gösterebilir. X kümesindeki her bir $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ noktası ve her $h \in L^X$ için,

$$[v(\mathbf{x})](h) = \bigvee \left\{ \bigstar_{k=1}^n [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](f_{i_k}) \mid \bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h \text{ ve } \forall k, 1 \leq k \leq n \text{ için } f_{i_k} \in L^{X_{i_k}}, \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ile tanımlanan $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ dönüşümü $\prod_{i \in I} X_i$ kümesi üzerinde bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli

komşuluk sistemidir ve v 'a karşılık gelen (X, τ_v) $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayı tabakalıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$ olsun. Herhangi bir $i_1 \in I$ ve her $\mathbf{y} = (y_i)_{i \in I} \in X$ için

$$(1_{X_{i_1}} \circ \pi_{i_1})(\mathbf{y}) = 1_{X_{i_1}}(y_{i_1}) = 1 \leq 1 = 1_X(\mathbf{y})$$

olduğundan

$$\bigstar_{k=1}^1 [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](1_{X_{i_k}}) = [v_{\tau_{i_1}}(x_{i_1})](1_{X_{i_1}}) = 1$$

değeri $[v(\mathbf{x})](1_X)$ 'i veren eküs hesabına katılır. Dolayısıyla $[v(\mathbf{x})](1_X) = 1$ olmak zorundadır, yani (U0) sağlanır. (U1)'in geçerliliği de kolayca görülür. (U2) Teorem 2.2.1.1'de (F2)'nin gösterilişine benzer biçimde elde edilir. $\bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h$ ise, her bir $v_{\tau_{i_k}}$ için (U3)'ün kullanılmasıyla

$$\bigstar_{k=1}^n [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](f_{i_k}) \leq \bigstar_{k=1}^n f_{i_k}(x_{i_k}) = \bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k})(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$$

bulunur ve (U3)'ün v için sağlandığı, bu eşitsizliklerin eküs altında korunacağı gerçeğinden görülür. (U4)'ü elde etmek için, eküse katılacak özelliklere sahip her $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$ damga kümesi için

$$\begin{aligned} \bigstar_{k=1}^n [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](f_{i_k}) &\leq \bigvee \left\{ \bigstar_{j=1}^n [v_{\tau_{i_j}}(x_{i_j})](g_{i_j}) \mid g_{i_j} \leq (f_{i_j})_{v_{\tau_{i_j}}}, j = 1, \dots, n \right\} \\ &\leq \bigvee \left\{ \bigstar_{k=1}^n [v(\mathbf{x})](g_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \mid \bigstar_{k=1}^n (g_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h_v \right\} \end{aligned}$$

olduğunun gözlenmesi yeterlidir. Böylece v 'un bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli komşuluk sistemi olduğu gösterilmiş olur.

v 'a karşılık gelen $\mathfrak{G}_*$ -topolojinin tabakalı olduğunu görmek için Önerme 3.1.1.3'e başvurularak her $\mathbf{x} \in X$, $h \in L^X$, $a \in L$ için

$$a * [v(\mathbf{x})](h) \leq [v(\mathbf{x})](a * h)$$

olduğunun gösterilmesi yeterli olur. Bu eşitsizlik ise kuantal işleminin eküse dağılmasından, çarpan uzayların tabakalılığından ve

$$\bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h \implies (a * f_{i_1}) * \left(\bigstar_{k=2}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \right) \leq a * h$$

gerektirmesinden yararlanılarak elde edilebilir. ■

Tanım 3.1.1.6 Önerme 3.1.1.7'de $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayları yardımıyla $\prod_{i \in I} X_i$ üzerinde tanımlanan tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojiye tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -çarpım topolojisi adı verilir (Höhle ve Šostak, 1999).

3.2 Bazı Çok Değerli Topolojik Kavramlar

3.2.1 Süreklilik

Tanım 3.2.1.1 $\mathfrak{G}$ bir tam grupoid, (X, τ_1) ve (Y, τ_2) $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar olmak üzere, $g \in \tau_2 \implies g \circ \varphi \in \tau_1$ koşulu gerçekleşiyorsa $\varphi : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olduğu söylenir (Höhle ve Šostak, 1999).

Süreklilik tanımının $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemleri türünden ifadesi aşağıdaki teoremle verilmektedir.

Teorem 3.2.1.1 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid, (X, τ_1) ve (Y, τ_2) $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar olsunlar ve bir $\varphi : X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir: (Höhle ve Šostak, 1999)

- (i) $g \in \tau_2 \implies g \circ \varphi \in \tau_1$
- (ii) $g_{v_{\tau_2}} \circ \varphi \leq (g \circ \varphi)_{v_{\tau_1}}, \forall g \in L^Y$

Kanıt. (i $\implies$ ii) : $g \in L^Y$ olsun. (i) kabul edildiğinden $h \in \tau_2$ olması $h \circ \varphi \in \tau_1$ olmasını gerektirir ve buradan

$$\begin{aligned} g_{v_{\tau_2}} \circ \varphi &= \left(\bigvee \{h \in \tau_2 \mid h \leq g\} \right) \circ \varphi \\ &= \bigvee \{h \circ \varphi \mid h \in \tau_2, h \leq g\} \\ &\leq \bigvee \{k \mid k \in \tau_1, k \leq g \circ \varphi\} \\ &= (g \circ \varphi)_{v_{\tau_1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii $\implies$ i) : $g \in \tau_2$ iken $g_{v_{\tau_2}} = \bigvee \{h \in \tau_2 \mid h \leq g\} = g$ olacağından (ii)'nin kullanılmasıyla $g \circ \varphi = g_{v_{\tau_2}} \circ \varphi \leq (g \circ \varphi)_{v_{\tau_1}}$ yazılabilir ve Teorem 3.1.1 yardımıyla $g \circ \varphi \in \{f \in L^X \mid f \leq f_{v_{\tau_1}}\} = \tau_{v_{\tau_1}} = \tau_1$ olduğu görülür. ■

Teorem 3.2.1.2 $\mathfrak{G}$ bir tam grupoid, (X, τ_1) , (Y, τ_2) ve (Z, τ_3) $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar ve $\varphi : X \rightarrow Y$, $\gamma : Y \rightarrow Z$ verilen $\mathfrak{G}$ -topolojilere göre sürekli fonksiyonlar ise $\gamma \circ \varphi : X \rightarrow Z$ fonksiyonu da sürekli (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $h \in \tau_3 \implies h \circ \gamma \in \tau_2 \implies (h \circ \gamma) \circ \varphi = h \circ (\gamma \circ \varphi) \in \tau_1$ olmasından hemen görülür. ■

Genel olarak $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar arasındaki sabit fonksiyonların sürekli olması gerekmez. Aşağıda bu duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 3.2.1.1 Örnek 2.1.5.2 (a)'da verilen $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ kuantali ele alınsın ve

$$X = \{a, b\}, \tau_1 = \{0_X, 1_X\} \quad \text{ve} \quad Y = \{c, d\}, \tau_2 = \{0_Y, 1_Y, \left(\frac{1}{2}\right)_Y\}$$

olmak üzere (X, τ_1) ve (Y, τ_2) I -değerli topolojik uzayları verilsin. $\varphi : X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = c$ olarak tanımlanırsa $\left(\frac{1}{2}\right)_Y \in \tau_2$ olmasına karşın $\left(\frac{1}{2}\right)_Y \circ \varphi = \left(\frac{1}{2}\right)_X \notin \tau_1$ olacağından $\varphi : (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ sürekli değildir.

Örnek 2.1.5.3 ve Örnek 2.1.5.5 gereği $I = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ bir sıkı kareköklü GL-monoiddir. I için monoid ortalama operatörünün yine $\wedge$ 'ye eşit olacağına dikkat edilirse I 'nın kendisine eşit olan $\mathfrak{I}_* = (\mathbb{I}, \leq, \wedge)$ tam grupoidini belirlediği görülür. Dolayısıyla, $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylar arasında tanımlanmış sabit fonksiyonlar da sürekli olmayabilirler. Ancak, tanım kümesindeki $\mathfrak{G}_*$ -topolojinin en azından zayıf tabakalı olması durumunda, sabit fonksiyonlar her zaman sürekli olurlar. Bu gerçek aşağıdaki önerme ile ifade edilmektedir.

Önerme 3.2.1.1 (X, τ_1) ve (Y, τ_2) $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylar ve c, Y 'de sabit bir nokta olsun. (X, τ_1) uzayı zayıf tabakalı ise $\varphi(x) = c$ ile tanımlanan $\varphi : X \rightarrow Y$ sabit fonksiyonu sürekli dir.

Kanıt. $g \in \tau_2$ olsun. Her $x \in X$ için $(g \circ \varphi)(x) = g(c)$ olduğundan $g \circ \varphi = (g(c))_X$ olur. (X, τ_1) 'in zayıf tabakalılığının $(g(c))_X \in \tau_1$ olmasını gerektirmesinden de $g \circ \varphi \in \tau_1$ olduğu görülür. Dolayısıyla φ sürekli dir. ■

Aşağıdaki teorem tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -çarpım topolojisi tanımının kategorik anlamda iyi olduğu anlamına gelir.

Teorem 3.2.1.3 $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayların bir ailesi ve $\tau, X = \prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -çarpım topolojisi olsun. Bu durumda her bir $\pi_i : X \rightarrow X_i$ fonksiyonu sürekli dir. Ayrıca σ X üzerindeki başka bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topoloji ve her bir π_i fonksiyonu σ 'ya göre sürekli ise $\tau \subseteq \sigma$ 'dır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. Önerme 3.2.1.1 gereği, her $i \in I$ için π_i 'nin sürekli olduğu, her $g \in L^{X_i}$ için $g_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i \leq (g \circ \pi_i)_{v_\tau}$ olduğunu göstererek kanıtlanabilir.

$\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$ olsun. (U3) gereği $g_{v_{\tau_i}} \leq g$ olduğundan $\bigstar_{k=1}^1 g_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i \leq g \circ \pi_i$ olur ve dolayısıyla $g_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i = \bigstar_{k=1}^1 g_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i$ çarpımı $[v_\tau(\mathbf{x})](g \circ \pi_i)$ 'yi veren eküse katılır. Buradan $(g_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i)(x) \leq [v_\tau(\mathbf{x})](g \circ \pi_i)$ elde edilir ve aranan eşitsizliğe

$[v_\tau(\mathbf{x})](g \circ \pi_i) = (g \circ \pi_i)_{v_\tau}(x)$ olmasından ulaşılır.

X üzerinde, bütün π_i izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan bir σ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojisi verilsin. $\tau \subseteq \sigma$ olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned} \tau \subseteq \sigma &\iff \forall h \in L^X \ (\{g \in \tau \mid g \leq h\} \subseteq \{g \in \sigma \mid g \leq h\}) \\ &\iff \forall h \in L^X \ (\bigvee \{g \in \tau \mid g \leq h\} \leq \bigvee \{g \in \sigma \mid g \leq h\}) \\ &\iff \forall h \in L^X \ (h_{v_\tau} \leq h_{v_\sigma}) \\ &\iff \forall h \in L^X, \forall \mathbf{x} \in X \ ([v_\tau(\mathbf{x})](h) \leq [v_\sigma(\mathbf{x})](h)) \end{aligned}$$

olduğuna dikkat ederek son satırdaki önermenin doğruluğunu göstermek yeterlidir.

Her π_i izdüşümü σ 'ya göre sürekli olduğundan, her $i \in I$, her $f \in L^{X_i}$ ve her $\mathbf{x} \in X$ için $(f_{v_{\tau_i}} \circ \pi_i)(\mathbf{x}) \leq (f \circ \pi_i)_{v_\sigma}(\mathbf{x}) = [v_\sigma(\mathbf{x})](f \circ \pi_i)$ eşitsizliği geçerli olur.

Dolayısıyla $\bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h$ ise

$$\begin{aligned} \bigstar_{k=1}^n [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](f_{i_k}) &= \bigstar_{k=1}^n (f_{i_k})_{v_{\tau_{i_k}}}(x_{i_k}) \\ &= \bigstar_{k=1}^n ((f_{i_k})_{v_{\tau_{i_k}}} \circ \pi_{i_k})(\mathbf{x}) \\ &\leq \bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k})_{v_\sigma}(\mathbf{x}) \\ &\leq h_{v_\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= [v_\sigma(\mathbf{x})](h) \end{aligned}$$

olur ve eşitsizliğin sol tarafındaki terimler üzerinden eküs alınarak

$$[v_\tau(\mathbf{x})](h) \leq [v_\sigma(\mathbf{x})](h)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. ■

3.2.2 Kapalılık ve Yoğunluk

Herhangi bir $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidinde tümlemeden bahsetmek her zaman mümkün değildir. $\mathfrak{G}$ 'nin bir değişmeli kuantal olması durumunda bir çeşit çarpık tütleme mekanizması mevcut olsa da bu tütleme ancak çok özel tam grupoid türleri olan Boole cebirlerinde kendisinden beklenen iyi özelliklere sahip olur. Dolayısıyla bir X kümesi üzerinde verilen bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojiye göre L^X 'in kapalı öğelerini $\mathfrak{G}^X$ tam grupoidindeki tümlemeye dayalı olarak belirlemek genel olarak uygun değildir. Üstelik, tam grupoidlerde ebas işleminin yerini alan ve normal koşullarda birleşmeli veya değişmeli olması dahi gerekmeyen $\otimes$ ikili işlemi herhangi sayıdaki

öge üzerine tek türlü olarak genişletilemeyeceğinden L^X üzerinde, ilgili topolojiden kaynaklı doğal bir kapanış operatörü tanımlamak da olası değildir. Bu nedenle, çok değerli topolojik uzayların çalışılmasında kapalılık kavramının kaydadeğer bir yeri yoktur. Benzer olarak, yoğunluk kavramı da L^X üzerinde kullanışlı bir biçimde tanımlanamaz.

Yukarıda bahsi geçen kavramlar çok değerli topolojik uzaylara uygun biçimde genelleştirilememelerine karşın, bir X kümesi üzerindeki herhangi bir çok değerli topolojik yapıya göre X 'in adi alt kümelerinin yoğunluğundan ve buradan yola çıkarak X 'in alt kümelerinin kapalılığından bahsetmek mümkündür. $\mathcal{P}(X)$ üzerine kondurulan bu kapalılık kavramı, X üzerinde bir topoloji belirleyecek eksiksiz bir kapanış operatörü sağlamasa da, iki açık kümenin kesişiminin açık olmasının gerekmemesi mantığına dayalı olan bir genelleştirilmiş topoloji belirler. Buna karşın, üzerinde çalışılan tam grupoid sabit tutulsa bile, bir çok değerli topoloji tarafından belirlenen genelleştirilmiş topoloji yapısı, kendisini veren çok değerli topolojiyi tek türlü olarak karakterize edecek güce sahip değildir. Dolayısıyla topolojik özelliklerin kapalılık kavramına dayanan birçok kullanışlı karakterizasyonu, çok değerli topolojik uzaylar teorisine yansıtılamaz (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 3.2.2.1 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun.

a) Her $g \in \tau$ için

$$\forall x \in A, g(x) \leq 0 \otimes 1 \implies \forall x \in X, g(x) \leq 0 \otimes 1$$

önermesi doğruysa A 'nın X içinde yoğun olduğu söylenir (Höhle ve Šostak, 1999).

b) $(1_{A^c})^\circ = 0_X$ oluyorsa A 'nın X içinde Rodabaugh anlamında yoğun olduğu söylenir (Höhle, 2001).

c) Her $g \in \tau$ ve her $x \in X$ için $g(x) \leq \bigvee \{g(y) \mid y \in A\}$ eşitsizliği geçerliyse A 'ya X içinde kesin yoğun (strictly dense) denir (Höhle ve Šostak, 1999).

(X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olmak üzere X 'in kendi içerisinde her zaman kesin yoğun olacağı tanımdan hemen görülür. Ayrıca $0 \otimes 1 = 0$ olması durumunda yoğunluk ve Rodabaugh anlamında yoğunluk aynı anlama gelir. $\mathfrak{G}$ 'nin bir kuantal olması veya $\otimes = \wedge$ olması durumlarının $0 \otimes 1 = 0$ olmasını gerektireceği açıktır.

Önerme 3.2.2.1 Kesin yoğunluk, hem yoğunluğu hem de Rodabaugh anlamında yoğunluğu gerektirir (Höhle ve Šostak, 1999; Höhle, 2001).

Kanıt. A kümesi X içerisinde kesin yoğun olsun. Her $y \in A$ için $g(y) \leq 0 \otimes 1$ olması $\bigvee \{g(y) \mid y \in A\} \leq 0 \otimes 1$ olmasını gerektirir. Böylece bir $g \in \tau$ ögesi, her $y \in A$ için $g(y) \leq 0 \otimes 1$ olmasını gerçekleştirdiğinde, her $x \in X$ için

$$g(x) \leq \bigvee \{g(y) \mid y \in A\} \leq 0 \otimes 1$$

yazılabilir ve A 'nın X içerisinde yoğun olduğu görülmüş olur.

Rodabaugh anlamında yoğunluğu görmek için $g \leq 1_{A^c}$ olacak biçimde bir $g \in \tau$ ögesi alınır. Bu durumda her $y \in A$ için $g(y) = 0$ olması sağlanacağından, her $x \in X$ için $g(x) \leq \bigvee \{g(y) \mid y \in A\} = 0$, yani $g = 0_X$ olmak zorundadır. Bu ise $(1_{A^c})^\circ = 0_X$ olduğu anlamına gelir. ■

Önerme 3.2.2.2 (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olsun. Bu durumda bir $A \subseteq X$ alt kümesinin X içerisinde Rodabaugh anlamında yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul her $g \in \tau$ ve her $x \in X$ için

$$g(x) \leq \left(\left(\bigvee \{g(y) \mid y \in A\} \right)^\perp \right)^\perp$$

olmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. $(\implies)$: $g \in \tau$ olsun. (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzay olduğundan $\bigvee \{g(y) \mid y \in A\} = a$ olmak üzere $a^\perp * g \in \tau$ yazılabilir. Ayrıca her $x \in A$ için $(a^\perp * g)(x) = (a \rightarrow 0) * g(x) \leq (a \rightarrow 0) * a = 0$ olduğundan $a^\perp * g \leq 1_{A^c}$ olur ve $(1_{A^c})^\circ = 0_X$ olmasından $a^\perp * g = 0_X$ elde edilir. Buradan $g \leq (a \rightarrow 0) \rightarrow 0$ bulunur ve istenen eşitsizliğe ulaşılır.

$(\impliedby)$: Her $g \in \tau$ ve her $x \in X$ için

$$g(x) \leq \left(\left(\bigvee \{g(y) \mid y \in A\} \right)^\perp \right)^\perp$$

olsun. $g \in \tau$ ve $g \leq 1_{A^c}$ ise

$$g(x) \leq \left(\left(\bigvee \{g(y) \mid y \in A\} \right)^\perp \right)^\perp = (0^\perp)^\perp$$

olur. $\mathfrak{G}_*$ grupoidinin tanımı gereği $G = (L, \leq, *)$ bir değişmeli kuantal olduğundan $(0^\perp)^\perp = 0$ 'dır ve buradan $g = 0_X$ elde edilir. Dolayısıyla $(1_{A^c})^\circ = 0_X$ olur. ■

Teorem 3.2.2.1 $G = (L, \leq, *)$ bir sıkı kareköklü MV-cebir ve $A \subseteq X$ olsun. (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay ise aşağıdakiler denktir: (Höhle, 2001)

- i) A kümesi X içerisinde yoğundur.
- ii) A kümesi X içerisinde Rodabaugh anlamında yoğundur.
- iii) A kümesi X içerisinde kesin yoğundur.

Kanıt. (i $\implies$ ii) : $g \in \tau$ ve $g(x) \leq 1_{A^c}$ olsun. Bu durumda her $x \in A$ için $g(x) = 0$ olacağından, her $x \in A$ için $(g \otimes 1_X)(x) \leq 0 \otimes 1$ elde edilir. (O1) ve (O2) gereği $g \otimes 1_X \in \tau$ olduğundan A 'nın X içinde yoğun olması her $x \in X$ için $(g \otimes 1_X)(x) \leq 0 \otimes 1$ olmasını gerektirir ve G 'nin değişmeliliği ve kesin çift yanlılığından her $x \in X$ için $g(x) = [(g \otimes 1_X)(x)]^2 \leq (0 \otimes 1)^2 = 0$ olduğu bulunur. Böylece $(1_{A^c})^\circ = 0_X$ olur.

(ii $\implies$ iii) : G bir MV-cebir olduğundan her $a \in L$ için $(a^\perp)^\perp = a$ eşitliği sağlanır. Böylece istenen, Önerme 3.2.2.2'den elde edilir.

(iii $\implies$ i) : Önerme 3.2.2.1'den görülmüştür. ■

3.2.3 Yakınsaklık

Yakınsaklıkla ilgili bazı amaçların karşılanması için bu bölüm boyunca klasik süzgeçlerin yakınsaklığından bahsedilirken bir cl-grupoid üzerinde çalışıldığı varsayılır. Bölüm 3.1.1'de ele alınan $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidleri Önerme 2.1.5.8 gereği bir cl-kuasi monoid ve dolayısıyla bir cl-grupoid olacağından bu bölümde elde edilecek bütün sonuçlar özel olarak tüm $\mathfrak{G}_*$ -topolojiler için geçerli olacaktır. $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeçlerin yakınsaklığıyla ilgili tanımlarda ise tam grupoid üzerinde herhangi bir kısıtlamaya gidilmemiştir.

Bir X kümesi üzerindeki bir (klasik) süzgeç veya dizinin bu küme üzerindeki bir $\mathfrak{G}$ -topolojiye göre X 'in bir noktasına yakınsaması durumu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2.3.1 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay ve $p \in X$ olsun. X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ süzgeci için

$$[v_\tau(p)](f) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) , \quad \forall f \in L^X$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu $\mathcal{F}$ süzgecinin τ 'ya göre p 'ye yakınsadığı söylenir. Bir (x_n) dizisinin yakınsaklığı, bu dizinin bileşen süzgecinin yakınsaklığı ile denk tutulur (Höhle, 2001).

Önerme 3.2.3.1 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olmak üzere X üzerindeki bir (x_n) dizisinin τ 'ya göre p 'ye yakınsaması için gerek ve yeter koşul

$$[v_\tau(p)](f) \leq \bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{n=m}^{\infty} f(x_n) , \quad \forall f \in L^X$$

olmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. $\mathcal{F}$, (x_n) dizisinin bileşen süzgeci olmak üzere

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) = \bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{n=m}^{\infty} f(x_n) \quad , \quad \forall f \in L^X$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{F}$ süzgecini üreten süzgeç tabanı $\mathcal{B} = \{X_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ biçimindedir ve her $f \in L^X$ için

$$\bigvee_{F \in \mathcal{B}} \bigwedge_{x \in F} f(x) = \bigvee_{m \in \mathbb{N}} \bigwedge_{x \in X_m} f(x) = \bigvee_{m=1}^{\infty} \bigwedge_{n=m}^{\infty} f(x_n)$$

eşitliği vardır. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ olduğundan

$$\bigvee_{F \in \mathcal{B}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olur. Ayrıca her $F \in \mathcal{F}$ için $B_F \subseteq F$ olacak biçimde en az bir $B_F \in \mathcal{B}$ vardır. Bu kümeler üzerinden alınan ebaslar arasında

$$\bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigwedge_{x \in B_F} f(x)$$

biçiminde bir ilişki bulunacağından

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{B}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olur ve aranan eşitlik buradan elde edilir. ■

Teorem 3.2.3.1 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olsun. X üzerindeki bir $\mathcal{F}$ süzgecinin bir $p \in X$ noktasına τ 'ya göre yakınsaması için gerek ve yeter koşul, her bir $f \in \tau$ için

$$f(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. $\mathcal{F}$, p 'ye yakınsasın. v_τ 'nın tanımı ve (U3) gereği $f \in \tau$ olması $f_{v_\tau} = f$ olmasını gerektireceğinden

$$f(p) = f_{v_\tau}(p) = [v_\tau(p)](f) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olur.

Her $f \in \tau$ için $f(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$ eşitsizliği geçerli olsun. Her $f \in L^X$ için,

(O3) gereği $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\} \in \tau$ olacağından,

$$[v_\tau(p)](f) = f_{v_\tau}(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

eşitsizliği elde edilir ve $\mathcal{F}$, p 'ye yakınsamış olur. ■

Örnek 3.2.3.1 Bir $\mathfrak{G} = (L, \leq, \wedge)$ tam Boole cebiri verilsin ve $I_L : L \rightarrow L$, L kümesi için birim dönüşüm olmak üzere $\tau_L = \left\{ 1_L, 0_L, I_L, (I_L)^\perp \right\} \subseteq L^L$ alt kümesi ele alınsın. Bu durumda τ_L , L üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojidir ve bir $\mathcal{F}$ süzgecinin τ_L 'ye göre bir $a \in L$ noktasına yakınsaması için gerek ve yeter koşul

$$\bigwedge_{F \in \mathcal{F}} \bigvee F \leq a \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge F$$

eşitsizliğinin sağlanması, başka bir ifadeyle $\mathcal{F}$ 'nin a 'ya sıra yakınsak olmasıdır (Höhle, 2001).

$\mathfrak{G}$ -topolojik uzaylarda ortaya çıkan yakınsamanın özellikleri, Kent anlamındaki yakınsaklık yapısı tanımıyla uyumludur.

Teorem 3.2.3.2 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\mathcal{T}_\tau = \{(\mathcal{F}, p) \in \mathfrak{F}_2(X) \times X \mid \mathcal{F} \text{ } \tau \text{ 'ya göre } p \text{ 'ye yakınsar}\}$$

kümesi X üzerinde Kent anlamında bir yakınsaklık yapısıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. Her bir $f \in \tau$ için

$$f(p) = \bigvee_{F=\{p\}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{p \in F} \bigwedge_{x \in F} f(x) = \bigvee_{F \in \dot{p}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olacağından, her $p \in X$ için $\dot{p}$, τ 'ya göre p 'ye yakınsar ve (C1) sağlanmış olur.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{F}_2(X)$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, $(\mathcal{F}, p) \in \mathcal{T}_\tau$ yani

$$f(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x), \quad \forall f \in \tau$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ olduğundan $\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{G}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$ olur ve $(\mathcal{G}, p) \in \mathcal{T}_\tau$ olması sağlanır.

$\mathcal{F} \in \mathfrak{F}_2(X)$, $(\mathcal{F}, p) \in \mathcal{T}_\tau$ olsun. Herhangi bir $f \in \tau$ için

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F} \cap \dot{p}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olmasaydı, buna ancak $E \in \mathcal{F}$, $E \notin \mathcal{F} \cap \dot{p}$ olacak biçimdeki bir E kümesi neden olabilirdi. Böyle bir E kümesi için $p \notin E$ ve $E \cup \{p\} \in \mathcal{F} \cap \dot{p}$ olması sağlanacağından sözkonusu eşitsizliğin var olmaması için

$$\bigwedge_{x \in E} f(x) \leq \bigwedge_{x \in E \cup \{p\}} f(x) = \left(\bigwedge_{x \in E} f(x) \right) \wedge f(p)$$

eşitsizliğinin de geçerli olmaması gerekirdi. Halbuki, $(\mathcal{F}, p) \in \mathcal{T}_\tau$ olmasından dolayı

$f(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$ 'tir ve buradan

$$\left(\bigwedge_{x \in E} f(x) \right) \wedge f(p) \leq \left(\bigwedge_{x \in E} f(x) \right) \wedge \left(\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \right) = \bigwedge_{x \in E} f(x)$$

elde edileceğinden böyle bir durumun gerçekleşmesi mümkün değildir, yani

$$\bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F} \cap \dot{p}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olmalıdır. Buradan

$$f(p) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} f(x) \leq \bigvee_{F \in \mathcal{F} \cap \dot{p}} \bigwedge_{x \in F} f(x)$$

olduğu elde edilir ve böylece (C3) koşulu da sağlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem yakınsaklığın süreklilik altında korunduğunu ifade eder.

Teorem 3.2.3.3 (X, τ_1) ve (Y, τ_2) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay, $\varphi : X \rightarrow Y$ verilen $\mathfrak{G}$ -topolojilere göre sürekli ise φ , $\mathcal{T}_{\tau_1}$ ve $\mathcal{T}_{\tau_2}$ 'ye göre de sürekli (Höhle, 2001).

Kanıt. $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}_{\tau_1}$ ve $g \in L^Y$ olsun. Tanım 3.2.3.1 ve Teorem 3.2.1.1 gereği

$$\begin{aligned} [v_{\tau_2}(\varphi(x))](g) &= g_{v_{\tau_2}(\varphi(x))} \\ &\leq (g \circ \varphi)_{v_{\tau_1}(x)} \\ &= [v_{\tau_1}(x)](g \circ \varphi) \\ &\leq \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{x \in F} (g \circ \varphi)(x) \\ &= \bigvee_{F \in \mathcal{F}} \bigwedge_{y \in \varphi^{-1}(F)} g(y) \end{aligned}$$

olup buradan

$$[v_{\tau_2}(\varphi(x))](g) \leq \bigvee_{G \in \varphi(\mathcal{F})} \bigwedge_{y \in G} g(y)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla τ_2 'ye göre $\varphi(\mathcal{F})$ süzgeci $\varphi(x)$ 'e yakınsar, yani $(\varphi(\mathcal{F}), \varphi(x)) \in \mathcal{T}_{\tau_2}$ 'dir. ■

$\mathfrak{G}$ -topolojik uzaylarda klasik süzgeçlerin yanısıra $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeçlerin yakınsaklığından da söz edilebilir. $\mathfrak{G}$ -süzgeçlerin yakınsaklığı $\mathfrak{G}$ -topolojik uzaylardaki kompaktlığın araştırılmasında önemli bir rol oynar.

Tanım 3.2.3.2 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay, ν X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç ve $x \in X$ olsun.

a) X üzerinde $\bar{\nu}[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$, $\nu \leq \bar{\nu}$ ve $v_{\tau}(x) \leq \bar{\nu}$ olmasını sağlayan bir $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}$ -süzgeci bulunabiliyorsa x 'e ν 'nün bir kaplama noktası (adherent point) denir.

b) $v_{\tau}(x) \leq \nu$ oluyorsa x 'e ν 'nün bir limit noktası denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 3.2.3.2 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay, ν bir $\mathfrak{G}$ -süzgeç olsun.

a) ν 'nün bir kaplama noktası varsa $\nu[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ eşitsizliği sağlanır.

b) $\nu[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa ν 'nün her limit noktası aynı zamanda bir kaplama noktası olur (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. a) ν 'nün bir kaplama noktası varsa, bir $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}$ -süzgeci için $\bar{\nu}[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ ve $\nu \leq \bar{\nu}$ olması sağlanır ve istenen eşitsizlik buradan gelir.

b) $\nu[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ eşitsizliği sağlansın ve $x \in X$ ν 'nün bir limit noktası olsun. Bu durumda $v_\tau(x) \leq \nu$ olur. $\nu \leq \bar{\nu}$ olması da sağlandığından $\bar{\nu} = \nu$ seçilmesi x 'in ν 'nün bir kaplama noktası olmasını gerektirmeye yeterdir. ■

$\nu[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ eşitsizliği çok değerli topolojik uzaylar üzerindeki kompaktlık tanımlarında merkezi bir konuma sahiptir. Aşağıdaki önerme tabakalı süzgeçlerde bu eşitsizliğin ayrıca araştırılmasına gerek olmadığını göstermektedir.

Önerme 3.2.3.3 (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay ve ν , X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç ve $x \in X$ olsun. x 'in ν 'nün bir kaplama noktası olması için gerek ve yeter koşul X üzerinde, $\nu \leq \bar{\nu}$ ve $v_\tau(x) \leq \bar{\nu}$ koşullarını gerçekleyen bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci bulunabilmesidir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: x , ν 'nün bir kaplama noktası ise

$$\nu'[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1, \quad \nu \leq \nu', \quad v_\tau(x) \leq \nu'$$

olmasını sağlayan bir $\nu' : L^X \rightarrow L$ $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci vardır. $0 \otimes 1 = \sqrt{0}$ olduğundan Önerme 2.2.1.8 ve Önerme 2.2.1.10 gereği $\nu' \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci bulunabilir.

$(\impliedby)$: İstenen özellikleri sağlayan bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci varsa x 'in ν 'nün bir kaplama noktası olduğu Önerme 2.2.1.7 yardımıyla hemen görülür. ■

Bir X kümesi üzerindeki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeçler, tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeçler ailesindeki maksimal elemanlar olduklarından bir ν tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeci için $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeci bulunabilmesi $\nu = \bar{\nu}$ olmasını gerektirir. Böylece Tanım 3.2.3.2 ve Önerme 3.2.3.3'ten aşağıdaki sonuca varılır.

Sonuç 3.2.3.1 (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay ve ν X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç ise ν 'nün her bir kaplama noktası aynı zamanda bir limit noktasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

3.2.4 Ayırma Belitleri

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe üzerinde çalışılan $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ tam grupoidinin en azından bir cl-kuasi monoid olduğu kabul edilecektir.

(X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topoloji olsun. Her bir $g \in \tau$ ögesi özel bir $g^* \in \tau$ ögesine aşağıdaki biçimde karşılık gelir.

Tanım 3.2.4.1 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir cl-kuasi monoid, (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzay, $g \in \tau$ olsun. Bu durumda $g^* \in L^X$ ögesi $g^* = \bigvee \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq 0_X \otimes 1_X\}$ ile tanımlanır (Höhle ve Šostak, 1999).

(O3) gereği $g^* \in \tau$ olacağı açıktır. Ayrıca her cl-kuasi monoid bir cl-grupoid olduğundan $\otimes$ işlemi boş olmayan küme üzerinden alınan eküs üzerine dağılır ve Teorem 2.1.1.1 gereği

$$0_X \in \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq 0_X \otimes 1_X\} \neq \emptyset$$

olup $g^* \otimes g \leq 0_X \otimes 1_X$ olması her zaman sağlanır.

Tanım 3.2.4.2 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ ikilisine karşılık $g(x) \neq g(y)$ olacak biçimde bir $g \in \tau$ bulunabiliyorsa (X, τ) 'nın bir Kolmogoroff (veya T_0) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayı veya $\mathfrak{G}$ -değerli Kolmogoroff (T_0) uzayı olduğu söylenir (Höhle ve Šostak, 1999).

Tanım 3.2.4.3 (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay olmak üzere, her $x, y \in X$, $x \neq y$ için, $g^*(x) \otimes g(y) \not\leq 0 \otimes 1$ olacak biçimde bir $g \in \tau$ bulunabiliyorsa (X, τ) 'ya bir Hausdorff (veya T_2) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayı veya $\mathfrak{G}$ -değerli Hausdorff (T_2) uzayı denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 3.2.4.1 Her $\mathfrak{G}$ -değerli Hausdorff uzayı aynı zamanda bir $\mathfrak{G}$ -değerli Kolmogoroff uzayıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. (X, τ) bir Hausdorff $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayı, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Bu durumda $g^*(x) \otimes g(y) \not\leq 0 \otimes 1$ olacak biçimde bir $g \in \tau$ vardır. $g(x) = g(y)$ olsaydı

$$\begin{aligned} g^*(x) \otimes g(y) &= g^*(x) \otimes g(x) = (g^* \otimes g)(x) \\ &= (\bigvee \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq 0_X \otimes 1_X\} \otimes g)(x) \\ &\leq (0_X \otimes 1_X)(x) = 0 \otimes 1 \end{aligned}$$

olurdu ve bu $g^*(x) \otimes g(y) \not\leq 0 \otimes 1$ olmasıyla çelişirdi. Öyleyse $g(x) \neq g(y)$ olup (X, τ) bir Kolmogoroff $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayıdır. ■

Tanım 3.2.4.4 Her $h \in \tau$ için $h = \bigvee \{g \in \tau \mid g^* \vee h = 1_X\}$ eşitliğinin sağlandığı bir (X, τ) $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzayına düzenli (regular) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay veya $\mathfrak{G}$ -değerli düzenli uzay denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 3.2.4.2 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ cl-kuasi monoidi her $a, b \in L$ için

$$1 \otimes a \leq b \otimes 1 \implies a \leq b$$

olması ek koşulunu gerçeklesin. Bu durumda her düzenli $\mathfrak{G}$ -değerli Kolmogoroff uzayı bir $\mathfrak{G}$ -değerli Hausdorff uzayıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

$Q = (L, \leq, *)$ bir kareköklü GL-monoid olsun. $\sqrt{1} = 1$ olacağına dikkat edilirse $1 \otimes a = \sqrt{1} * \sqrt{a} = \sqrt{a}$, $b \otimes 1 = \sqrt{b}$ olduğu görülür ve buradan,

$$1 \otimes a \leq b \otimes 1 \implies \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \implies a \leq b$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.2.4.1 Düzenli $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzaylar için T_0 ve T_2 belitleri birbirine denktir (Höhle ve Šostak, 1999).

Önerme 3.2.4.3 (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olsun. Her $g \in \tau$ için

$$g^* = \bigvee \{h \in \tau \mid h * g = 0_X\}$$

eşitliği vardır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $\mathfrak{G}_*$ -değerli bir topolojik uzayda $\otimes = \circledast$ olduğundan

$$g^* = \bigvee \{h \in \tau \mid h \circledast g \leq 0_X \circledast 1_X\}$$

yazılabilir. $(h \circledast g)^2 = h * g$ ve $0_X \circledast 1_X = \sqrt{0_X}$ eşitlikleri $\mathfrak{G}_*$ 'ı belirleyen Q kuantalının bir GL-monoid olmasından kolayca görülür. Böylece, $h \in \tau$ olmak üzere $h \circledast g \leq 0_X \circledast 1_X \implies h * g = 0_X$ elde edilir ve buradan

$$\{h \in \tau \mid h \circledast g \leq 0_X \circledast 1_X\} \subseteq \{h \in \tau \mid h * g = 0_X\}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $h * g = 0_X \implies (h \circledast g)^2 \leq 0_X \implies h \circledast g \leq \sqrt{0_X}$ olduğundan kapsamanın diğer yönü de geçerlidir. İstenen eşitlik eküsü alınan kümelerin eşitliğinden elde edilir. ■

T_2 özelliğinin $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylar için önemli bir karakterizasyonu aşağıdaki teoremlerle verilir.

Teorem 3.2.4.1 (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olsun. (X, τ) 'nın bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in X$, $x \neq y$ için, $g_1 * g_2 = 0_X$ ve $g_1(x) * g_2(y) \neq 0$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in \tau$ bulunabilmesidir (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun ancak $g_1 * g_2 = 0_X$ ve $g_1(x) * g_2(y) \neq 0$ olacak biçimde $g_1, g_2 \in \tau$ bulunamam. $g_1 * g_2 = 0_X$ olacak biçimdeki her $g_1, g_2 \in \tau$ için $g_1(x) * g_2(y) = 0$ olur.

$g \in \tau$ olsun. $0 \otimes 1 = \sqrt{0}$ olacağına dikkat edilerek $g^* = \bigvee \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq \sqrt{0_X}\}$ yazılabilir. Ayrıca $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidinin temelindeki G kuantali bir sıkı kareköklü GL-monoid olduğundan G 'nin değişmeliliği kullanılarak

$$\begin{aligned} h \otimes g \leq \sqrt{0_X} &\implies \sqrt{h} * \sqrt{g} \leq \sqrt{0_X} \\ &\implies \sqrt{h} * \sqrt{g} * \sqrt{h} * \sqrt{g} \leq 0_X \\ &\implies h * g = 0_X \end{aligned}$$

elde edilir. $0_X \in \{h \in \tau \mid h \otimes g \leq \sqrt{0_X}\} \neq \emptyset$ olması sayesinde Önerme 2.1.5.5 uygulanabileceğinden $g^* * g = 0_X$ olur ve varsayım gereği bu, $g^*(x) * g(y) = 0$ olmasını gerektirir. (S3)'ün de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} g^*(x) * g(y) = 0 &\implies \sqrt{g^*(x) * g(y)} = \sqrt{0} \\ &\implies \left(\sqrt{g^*(x)} * \sqrt{g(y)} \right) \vee \sqrt{0} = \sqrt{0} \\ &\implies \sqrt{g^*(x)} * \sqrt{g(y)} \leq \sqrt{0} \\ &\implies g^*(x) \otimes g(y) \leq 0 \otimes 1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu her $g \in \tau$ için geçerli olduğundan (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı değildir.

$(\impliedby)$: Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için, $g_1 * g_2 = 0_X$ ve $g_1(x) * g_2(y) \neq 0$ olacak biçimde $g_1, g_2 \in \tau$ bulunabilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} g_1 \otimes g_2 &= \sqrt{g_1} * \sqrt{g_2} \\ &\leq (\sqrt{g_1} * \sqrt{g_2}) \vee \sqrt{0_X} \\ &= \sqrt{g_1 * g_2} \\ &= \sqrt{0_X} \\ &= 0_X \otimes 1_X \end{aligned}$$

olacağından

$$g_1 \in \{h \in \tau \mid h \otimes g_2 \leq 0_X \otimes 1_X\}$$

olur ve buradan $g_1 \leq g_2^*$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned}
g_2^*(x) \otimes g_2(y) \leq 0 \otimes 1 &\implies \sqrt{g_2^*(x)} * \sqrt{g_2(y)} \leq \sqrt{0} \\
&\implies \left(\sqrt{g_2^*(x)} * \sqrt{g_2(y)} \right) \vee \sqrt{0} = \sqrt{0} \\
&\implies \sqrt{g_2^*(x) * g_2(y)} = \sqrt{0} \\
&\implies g_2^*(x) * g_2(y) = 0 \\
&\implies g_1(x) * g_2(y) = 0
\end{aligned}$$

olacağından $g_1(x) * g_2(y) \neq 0$ varsayımı $g_2^*(x) \otimes g_2(y) \not\leq 0 \otimes 1$ olmasını gerektirir.

Dolayısıyla (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayıdır. ■

Teorem 3.2.4.2 Bir (X, τ) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzayının $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin en çok bir tane limit noktasının bulunmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olsun. $\nu \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ olduğu ve $x, y \in X$ olmak üzere x ve y 'nin ν 'nün birer limit noktası olduğu kabul edilsin ve $x \neq y$ olduğu varsayalım. Önceki teorem $f * g = 0_X$ ve $f(x) * g(y) \neq 0$ olacak biçimde $f, g \in \tau$ bulunabilmesini gerektirir. Böylece Teorem 3.1.1 gereği $f \leq f_{v_\tau}$ ve $g \leq g_{v_\tau}$ olur ve $f(x) \leq f_{v_\tau}(x) = [v_\tau(x)](f)$, $g(y) \leq g_{v_\tau}(y) = [v_\tau(y)](g)$ yazılabilir. x ve y , ν 'nün limit noktası olduğundan $v_\tau(x) \leq \nu$ ve $v_\tau(y) \leq \nu$ eşitsizlikleri vardır ve buradan $f(x) \leq \nu(f)$, $g(y) \leq \nu(g)$ olduğu görülür. Ayrıca $f * g = 0_X$ eşitliğine Önerme 2.2.1.7 ve Önerme 2.2.1.8 uygulanarak $\nu(f) * \nu(g) = 0$ elde edilir ve $0 \neq f(x) * g(y) \leq \nu(f) * \nu(g) = 0$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla $x \neq y$ varsayımı yanlıştır, yani ν 'nün birden çok limit noktası var olamaz.

$(\Leftarrow)$: X üzerindeki her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin en çok bir tane limit noktası bulunsun ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Bu durumda $v_\tau(x) \leq \nu$, $v_\tau(y) \leq \nu$ olacak biçimde $\nu \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ bulunamaz ve Önerme 3.1.1.3 gereği $v_\tau(x), v_\tau(y) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(X)$ olduğundan, Önerme 2.2.1.10'dan

$$f * g = 0_X \implies [v_\tau(x)](f) * [v_\tau(y)](g) = 0, \quad \forall f, g \in L^X$$

önermesinin yanlışı olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla, $f * g = 0_X$ olmakla birlikte $[v_\tau(x)](f) * [v_\tau(y)](g) \neq 0$ olacak biçimde $f, g \in L^X$ vardır. $f_{v_\tau} \leq f$, $g_{v_\tau} \leq g$ olduğundan $f_{v_\tau} * g_{v_\tau} = 0_X$ olması da sağlanır. Ayrıca

$$f_{v_\tau}(x) * g_{v_\tau}(y) = [v_\tau(x)](f) * [v_\tau(y)](g) \neq 0$$

olur ve $f_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq f\}$, $g_{v_\tau} = \bigvee \{h \in \tau \mid h \leq g\}$ olduğundan (O3) koşulu gereği $f_{v_\tau}, g_{v_\tau} \in \tau$ 'dur. Böylece f_{v_τ} ve g_{v_τ} Teorem 3.2.4.1'de istenen koşulları sağlamış olur. x ile y keyfi olduğundan (X, τ) bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayıdır. ■

$\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayları ultrasüzgeçler yardımıyla da belirlenebilir.

Önerme 3.2.4.4 Bir (X, τ) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayının $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgecin en çok bir limit noktasının bulunmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. ($\implies$) : Teorem 3.2.4.2 ve Önerme 3.2.5.1'in sonucudur.

($\impliedby$) : ν X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olsun ve ν 'nün $x, y \in X$ gibi iki limit noktası bulunduğu varsayalım. Bu durumda $v_\tau(x) \leq \nu$ ve $v_\tau(y) \leq \nu$ olur. Teorem 2.2.1.2 (b) gereği $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeci bulunabilir ve $\nu \leq \bar{\nu}$ olması x ve y 'nin $\bar{\nu}$ 'nin de limit noktaları olmasını gerektirir. $\bar{\nu}$ bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç olduğundan hipotezden $x = y$ elde edilir. Dolayısıyla X üzerindeki tabakalı bir $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin birden çok limit noktası bulunamaz ve X 'in bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olduğu Teorem 3.2.4.2'nin bir sonucu olarak görülür. ■

Elde edilen sonuçlar altında aşağıdaki teoremin kanıtlanması mümkündür.

Teorem 3.2.4.3 $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayların bir ailesi ve τ , $X = \prod_{i \in I} X_i$ çarpım kümesi üzerindeki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -çarpım topolojisi olsun. (X, τ) 'nün $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter şart her bir (X_i, τ_i) çarpan uzayının bir $\mathfrak{G}_*$ -değerli Hausdorff uzayı olmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

3.2.5 Kompaktlık

Tanım 3.2.5.1 a) (X, τ) bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzay olsun. $\nu[(0 \otimes 1)_X] \leq 0 \otimes 1$ eşitsizliğini sağlayan her ν $\mathfrak{G}$ -süzgecinin en az bir kaplama noktası varsa (X, τ) uzayının kompakt olduğu söylenir.

b) (X, τ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzay olsun. X üzerindeki her bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin en az bir kaplama noktası varsa (X, τ) uzayına yıldız (star) kompakt veya kısaca S-kompakt denir (Höhle ve Šostak, 1999).

Tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylar üzerinde çalışıldığında kompaktlığın yıldız kompaktlığı gerektirdiği $0 \otimes 1 = \sqrt{0}$ eşitliği yardımıyla Önerme 2.2.1.7'den görülür. Burada, çok değerli topolojilerin geneline hitap eden kompaktlık kavramından çok,

tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzaylar için iyi özelliklere sahip olan yıldız kompaktlık üzerinde durulmaktadır.

S-kompaktlık ultrasüzgeçler yardımıyla karakterize edilebilir.

Önerme 3.2.5.1 Bir (X, τ) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzayının S-kompakt olması için gerek ve yeter koşul X üzerindeki her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgecin en az bir limit noktasının bulunmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: Tanım 3.2.5.1 (b) ve Sonuç 3.2.3.1'in sonucudur.

$(\impliedby)$: ν X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olsun. Teorem 2.2.1.2 (b) gereği $\nu \leq \bar{\nu}$ olacak biçimde bir tabakalı $\bar{\nu}$ $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeci bulunabilir ve hipotezden dolayı $\bar{\nu}$ 'nin X 'te bir p limit noktası vardır. Bu durumda $v_\tau(p) \leq \bar{\nu}$ olacağından $\nu \leq \bar{\nu}$ ve $v_\tau(p) \leq \bar{\nu}$ olduğu elde edilir ki, bu p 'nin ν 'nün bir kaplama noktası olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla X üzerinde verilen her tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecin en az bir kaplama noktası vardır, yani (X, τ) S-kompakttır. ■

Teorem 3.2.5.1 (X, τ) bir S-kompakt ve tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzay ve (Y, σ) bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzay olsun. $\varphi : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise (Y, σ) uzayı da S-kompakttır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $\nu : L^Y \rightarrow L$ bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olsun. Önerme 2.2.1.5 (b)'den $\varphi^{-1}(\nu)$ X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgeç olur. (X, τ) S-kompakt olduğundan $\varphi^{-1}(\nu)$ 'nün en az bir $p \in X$ kaplama noktası vardır. Önerme 3.2.3.3 gereği bu, $\varphi^{-1}(\nu) \leq \bar{\nu}$ ve $v_\tau(p) \leq \bar{\nu}$ olmasını sağlayan bir $\bar{\nu}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -süzgecinin bulunabilmesi anlamına gelir.

$\nu = \varphi(\varphi^{-1}(\nu)) \leq \varphi(\bar{\nu})$ olduğu Önerme 2.2.1.3 ve Önerme 2.2.1.4'ten görülür. Diğer taraftan φ sürekli olduğundan Teorem 3.2.1.1 gereği her $g \in L^Y$ için $g_{v_\sigma} \circ \varphi \leq (g \circ \varphi)_{v_\tau}$ eşitsizliği vardır. Buradan $(g_{v_\sigma} \circ \varphi)(p) \leq (g \circ \varphi)_{v_\tau}(p)$ veya başka bir yazımla $[v_\sigma(\varphi(p))](g) \leq [v_\tau(p)](g \circ \varphi)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Görüntü süzgeci tanımı gereği $[v_\tau(p)](g \circ \varphi) = [\varphi(v_\tau(p))](g)$ olur. $v_\tau(p) \leq \bar{\nu}$ olduğundan $[\varphi(v_\tau(p))](g) \leq [\varphi(\bar{\nu})](g)$ ve böylece her $g \in L^Y$ için $[v_\sigma(\varphi(p))](g) \leq [\varphi(\bar{\nu})](g)$ olup $v_\sigma(\varphi(p)) \leq \varphi(\bar{\nu})$ elde edilir.

$\nu \leq \varphi(\bar{\nu})$, $v_\sigma(\varphi(p)) \leq \varphi(\bar{\nu})$ ve Önerme 2.2.1.5 (a) gereği $\varphi(\bar{\nu}) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}_*}^{(S)}(Y)$ olduğundan $\varphi(p)$ ν 'nün bir kaplama noktasıdır. ν keyfi olarak seçildiğinden (Y, σ) S-kompakttır. ■

Teorem 3.2.5.2 $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -değerli topolojik uzayların bir ailesi ve $\tau, X = \prod_{i \in I} X_i$ üzerindeki tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -çarpım topolojisi olsun. (X, τ) 'nın S-kompakt olması için gerek ve yeter koşul her bir (X_i, τ_i) uzayının S-kompakt olmasıdır (Höhle ve Šostak, 1999).

Kanıt. $(\implies)$: Teorem 3.2.1.3 ve Teorem 3.2.5.1'in direkt sonucudur.

$(\impliedby)$: Her bir (X_i, τ_i) tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzayının S-kompakt olduğu varsayalım ve ν X üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç olsun. Teorem 2.2.1.3, her $i \in I$ için $\nu_i := \pi_i(\nu)$ 'nin X_i üzerinde bir tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -ultrasüzgeç olmasını gerektirir. Her bir (X_i, τ_i) S-kompakt olduğundan, her bir ν_i ultrasüzgecinin bir $x_i \in X_i$ limit noktası vardır. Böylece her $i \in I$ için $v_{\tau_i}(x_i) \leq \nu_i$ olur.

$\mathbf{x} \in X$ noktası $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I}$ olarak tanımlansın ve herhangi bir $h \in L^X$ alınsın. $\bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \leq h$ olduğunda Sonuç 2.2.1.1'den,

$$\begin{aligned} \bigstar_{k=1}^n [v_{\tau_{i_k}}(x_{i_k})](f_{i_k}) &\leq \bigstar_{k=1}^n v_{i_k}(f_{i_k}) \\ &= \bigstar_{k=1}^n [\pi_{i_k}(\nu)](f_{i_k}) \\ &= \bigstar_{k=1}^n \nu(f_{i_k} \circ \pi_{i_k}) \\ &\leq \nu\left(\bigstar_{k=1}^n (f_{i_k} \circ \pi_{i_k})\right) \\ &\leq \nu(h) \end{aligned}$$

elde edilir ve sol tarafta ilgili eküsün alınmasıyla $[v_\tau(\mathbf{x})](h) \leq \nu(h)$ olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $\mathbf{x}$ ν 'nün bir limit noktası olup (X, τ) S-kompakttır. ■

3.3 Çok Değerli Topolojik Uzayların Kategorisi

Çok değerli topolojik uzayların, kendileri arasında tanımlanan sürekli fonksiyonlarla, bir kategori oluşturacak derecede uyumlu olduklarını görmek zor değildir. Bu gerçek, kanıtı açık olan aşağıdaki önerme ile ifade edilmektedir.

Önerme 3.3.1 $\mathfrak{G}$ bir tam grupoid olmak üzere, $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar ve bunlar için tanımlanmış sürekli fonksiyonlar, alışılmış bileşke ve birim fonksiyonlar ile birlikte bir kategori oluşturur (Höhle, 2001).

Tanım 3.3.1 Bir $\mathfrak{G}$ tam grupoidi için, $\mathfrak{G}$ -topolojik uzaylar ve bunlara göre sürekli dönüşümlerin kategorisi $\mathfrak{G}\text{-TOP}$ ile gösterilir. Bu kategorinin birim morfizmleri özdeşlik dönüşümlerine, bileşkesi fonksiyon bileşkesine karşılık gelir (Höhle, 2001).

$\mathfrak{G}$ -TOP kategorisinin, **SET** kategorisinden yola çıkarak, kategorik olarak kurulabileceğini görmek ilginçtir. Bunu başarmak için, Örnek 2.3.4.6'da klasik topoloji kavramını yeniden elde etmekte kullanılan bakış açısını korumak kaydıyla gerekli değişiklikleri yapmak yeterli olacaktır. Söz konusu örnek, topolojik uzay tanımının bir Kleisli kategorisi yardımıyla yeniden verilebildiğini göstermekteydi. Bu, herhangi bir **K** kategorisi ile **K** üzerindeki bir $\mathbf{T} = (\mathcal{T}, \eta, \bullet)$ monadına karşılık gelen keyfi bir $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ Kleisli kategorisinde benzer bir yaklaşım yapılarak, **K**-nesneler üzerinde topoloji benzeri yapılar tanımlanıp tanımlanamayacağı sorusunu aklı getirir. Bu sorunun yanıtı genel anlamda olumsuzdur (Höhle, 2001). Örneğin, Örnek 2.3.4.6'daki (i) koşulunun bir benzerinden bahsedilebilmesi için her şeyden önce belirli bir sıralama ölçütüne sahip olunması gerekmektedir. Bununla birlikte bazı ek yapılar ve özelliklerin bulunması halinde $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}$ kategorisindeki uygun endomorfizmler yardımıyla topolojiye benzer bir yapı tanımlamanın mümkün olduğu bilinmektedir. Burada, bu yapıların kendilerine has özelliklerinin araştırılması kapsam dışı bırakılarak yalnızca bazı kategorik özelliklerin elde edilmesi ve çok değerli topolojilerin de bu tür yapılardan biri olduğunun gösterilmesi üzerinde durulmuştur.

$\mathfrak{G}$ bir tam grupoid olmak üzere $\mathfrak{G}$ -değerli topoloji tanımının elde edilmesinde kullanılacak monad, aşağıdaki önerme ile tanımlanmıştır.

Önerme 3.3.2 $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun ve $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}} : |\mathbf{SET}| \rightarrow |\mathbf{SET}|$ nesne fonksiyonu her X kümesini, X üzerinde tanımlanabilen bütün $\mathfrak{G}$ -süzgeçlerin kümesi olan $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ kümesine taşınsın. Her $X \in |\mathbf{SET}|$ için $\eta_X : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ fonksiyonu

$$[\eta_X(x)](f) = f(x), \quad \forall f \in L^X, \quad \forall x \in X$$

biçiminde tanımlansın ve her bir $\varphi : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Y)$, $\psi : Y \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Z)$ fonksiyon çifti için $\psi \bullet \varphi : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Z)$ klon bileşkesi

$$[(\psi \bullet \varphi)(x)](h) = [\varphi(x)]([\psi(-)](h)), \quad \forall h \in L^Z, \quad \forall x \in X$$

ile verilsin. Bu durumda $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}, \eta, \bullet)$ üçlüsü **SET** kategorisi üzerinde bir (klon biçimli) monad olur (Höhle, 2001).

Kanıt. M1) **SET** kategorisinde $X \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Y)$, $Y \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Z)$, $Z \xrightarrow{\zeta} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(W)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ ve her $k \in L^W$ için

$$\begin{aligned} [(\zeta \bullet (\psi \bullet \varphi))(x)](k) &= [(\psi \bullet \varphi)(x)]([\zeta(-)](k)) \\ &= [\varphi(x)]([\psi(-)]([\zeta(-)](k))) \\ &= [\varphi(x)]([\zeta \bullet \psi(-)](k)) \\ &= [((\zeta \bullet \psi) \bullet \varphi)(x)](k) \end{aligned}$$

olacağından $\zeta \bullet (\psi \bullet \varphi) = (\zeta \bullet \psi) \bullet \varphi$ eşitliği elde edilir.

M2) $X \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Y)$ olsun. Her $y \in Y$ ve her $g \in L^Y$ için

$$[\eta_Y(y)](g) = g(y) \implies [\eta_Y(-)](g) = g$$

ve böylece her $x \in X$ ve her $g \in L^Y$ için

$$[(\eta_Y \bullet \varphi)(x)](g) = [\varphi(x)]([\eta_Y(-)](g)) = [\varphi(x)](g)$$

olmasından $\eta_Y \bullet \varphi = \varphi$ bulunur.

M3) $X \xrightarrow{\phi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(Z)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ ve her $g \in L^Z$ için

$$\begin{aligned} [(\psi \bullet (\eta_Y \circ \phi))(x)](g) &= [(\eta_Y \circ \phi)(x)]([\psi(-)](g)) \\ &= [\eta_Y(\phi(x))](\psi(-)](g)) \\ &= [[\psi(-)](g)](\phi(x)) \\ &= [\psi(\phi(x))](g) \\ &= [(\psi \circ \phi)(x)](g) \end{aligned}$$

olduğundan $\psi \bullet (\eta_Y \circ \phi) = \psi \circ \phi$ eşitliğine ulaşılır. ■

Tanım 3.3.2 ($\mathfrak{G}$ -Süzgeç Monadı) $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olsun. **SET** kategorisi üzerinde bir (klon biçimli) monad olduğu Önerme 3.3.2 ile kanıtlanan $\mathbf{F}_{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}, \eta, \bullet)$ üçlüsü, $\mathfrak{G}$ -değerli süzgeç monadı veya kısaca $\mathfrak{G}$ -süzgeç monadı olarak adlandırılır (Höhle, 2001).

Tanım 3.3.3 X bir küme $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid ve $\mathbf{F}_{\mathfrak{G}} = (\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}, \eta, \bullet)$, **SET** kategorisi üzerindeki $\mathfrak{G}$ -süzgeç monadı olsun. $v \in \text{End}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}(X)$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ üzerindeki $\leq$ sıralamasına göre

$$(T1) \quad v \leq \eta_X$$

$$(T2) \quad v \leq v \bullet v$$

koşullarını sağlayan bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ endomorfizmi olmak üzere, v 'a X üzerinde bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik nesne, (X, v) ikilisine ise bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesnesi adı verilir (Höhle, 2001).

Teorem 3.3.1 (X, v) bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesnesi olsun. Bu durumda

$$\acute{v}(x) = v(x), \forall x \in X$$

ile tanımlanan $\acute{v} : X \rightarrow L^{(L^X)}$ dönüşümü X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemi olur (Höhle, 2001).

Kanıt. Her $x \in X$ için $\acute{v}(x) = v(x) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ olduğundan (U0), (U1) ve (U2) sırasıyla (F0), (F1) ve (F2)'den hemen çıkar. (U3), $\mathfrak{G}$ -süzgeç monadındaki η_X tanımı ile (T1)'in, her $x \in X, f \in L^X$ için

$$\begin{aligned} [\acute{v}(x)](f) &= [v(x)](f) \\ &\leq [\eta_X(x)](f) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olmasını gerektirmesinden görülür. (T2)'den dolayı her $f \in L^X, x \in X$ için

$$\begin{aligned} [\acute{v}(x)](f) &= [v(x)](f) \\ &\leq [(v \bullet v)(x)](f) \\ &= [v(x)]([v(-)](f)) \end{aligned}$$

olur ve $v : X \xrightarrow{\mathbf{SET}} \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X) \subseteq L^{(L^X)}, f \in L^X$ olmasından $[v(-)](f) : X \xrightarrow{\mathbf{SET}} L$ elde edilir. Ayrıca her $y \in X$ için $[[v(-)](f)](y) = [v(y)](f) = [\acute{v}(y)](f)$ olması da sağlandığından

$$[v(x)]([v(-)](f)) \in \{[\acute{v}(x)](h) \mid h \in L^X, h(y) \leq [\acute{v}(y)](f), \forall y \in X\}$$

'dır ve buradan

$$\begin{aligned} [\acute{v}(x)](f) &\leq [v(x)]([v(-)](f)) \\ &\leq \bigvee \{[\acute{v}(x)](h) \mid h \in L^X, h(y) \leq [\acute{v}(y)](f), \forall y \in X\} \end{aligned}$$

olup (U4) de elde edilmiş olur. ■

Kategorik anlamda bir morfizmin değer nesnesi ($\mathbf{SET}$ kategorisi için, bir fonksiyonun değer kümesi) tek türlü belirlenebildiğinden, aslında her yerde aynı değerleri alan iki “eşit” fonksiyon için $v : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ ve $\acute{v} : X \rightarrow L^{(L^X)}$ gibi iki

farklı gösterime gidilmiştir. Karşıt durum ile ilgili bilgi veren aşağıdaki teoremden de buna benzer bir teknik ayırımı yapılmaktadır.

Teorem 3.3.2 Bir X kümesi üzerinde bir $v : X \rightarrow L^{(L^X)}$ $\mathfrak{G}$ -değerli komşuluk sistemi verilsin. Bu durumda her bir $x \in X$ için $v(x) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ olur ve her $x \in X$ için $\hat{v}(x) = v(x)$ olacak biçimde tanımlanan $\hat{v} : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ dönüşümü, X üzerinde bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik nesnedir (Höhle, 2001).

Kanıt. Önerme 3.1.1 gereği her bir $x \in X$ için $v(x) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ olur ve böylece v ile her bir noktada eşit değer alacak bir $\hat{v} : X \rightarrow \mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Kleisli kategorisi tanımı, $\hat{v}$ fonksiyonunun bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -endomorfizm olmasını gerektirir. (U3) her $x \in X, f \in L^X$ için

$$\begin{aligned} [\hat{v}(x)](f) &= [v(x)](f) \\ &\leq f(x) \\ &= [\eta_X(x)](f) \end{aligned}$$

olmasını gerektireceğinden $\hat{v} \leq \eta_X$ olup (T1) elde edilir. (T2) ise (U4) ve (U1) belitlerinin kullanılmasıyla her $x \in X, f \in L^X$ için

$$\begin{aligned} [\hat{v}(x)](f) &= [v(x)](f) \\ &\leq \bigvee \{ [v(x)](h) \mid h \in L^X, h(y) \leq [v(y)](f), \forall y \in X \} \\ &= \bigvee \{ [v(x)](h) \mid h \in L^X, h \leq [v(-)](f) \} \\ &\leq [v(x)]([v(-)](f)) \\ &= [\hat{v}(x)]([\hat{v}(-)](f)) \\ &= [(\hat{v} \bullet \hat{v})(x)](f) \end{aligned}$$

olmasından görülür. ■

Bir fonksiyonun değer kümesinin, önce genişletilip sonra tekrar eski durumuna getirilmesi veya görüntü kümesini kapsayacak biçimde daraltılarak tekrar genişletilmesi fonksiyonun alacağı değerlerde herhangi bir değişime sebep olamayacağından, Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 birlikte yorumlanarak aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Sonuç 3.3.1 X bir küme, $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir tam grupoid olmak üzere X üzerindeki her bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik nesnesi, değer kümesi L^{L^X} 'e genişletilerek X üzerinde bir

$\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemine dönüştürülebilir. Tersine X üzerindeki her bir $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi, değer kümesi $\mathfrak{F}_{\mathfrak{G}}(X)$ 'e daraltılarak X üzerindeki bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik nesnesine dönüştürülebilir.

Yukarıdaki sonuca göre özetle “ $\mathfrak{G}$ -komşuluk sistemi” ve “ $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik nesne” kavramları birbirine denktir. Buna ek olarak, değer kümesiyle ilgili teknik ayrıntı gözardı edilirse bu iki yapı tamamen aynı olur. Bu sonuç Teorem 3.1.1 ile birlikte ele alındığında ise “ $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesnesi” ve “ $\mathfrak{G}$ -topolojik uzay” kavramlarının birbirine bağlı oldukları görülür. Bu bağ, bir yandan çok değerli topolojik uzayların kategorik özelliklerinin araştırılmasını kolaylaştırırken, diğer taraftan bir $\mathfrak{G}$ -topolojik uzaya tek türlü olarak karşılık gelen bir $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesnesinden bahsedilmesini mümkün kılarak çok değerli topolojik uzaylar ile ilgili kavramlar için kategorik temelli alternatif tanımlar elde edilmesini sağlar. Aşağıda bu durumun bir örneğine yer verilmektedir.

Teorem 3.3.3 $\mathfrak{G}$ bir tam grupoid, (X, τ_1) ve (Y, τ_2) $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik uzaylar ve (X, v_1) ve (Y, v_2) bu uzaylara sırasıyla karşılık gelen $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesneleri olsunlar. Bu durumda bir $\varphi : X \rightarrow Y$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$v_2 \bullet (\eta_Y \circ \varphi) \leq (\eta_Y \circ \varphi) \bullet v_1$$

olmasıdır (Höhle, 2001).

Kanıt. Teorem 3.2.1.1 gereği φ 'nin sürekli olması için komşuluk sistemleri türünden gerek ve yeter koşul

$$g_{v_{\tau_2}} \circ \varphi \leq (g \circ \varphi)_{v_{\tau_1}}, \quad \forall g \in L^Y$$

olmasıdır. Gösterim olarak $f_v = [v(-)](f)$ olduğundan bu koşul

$$[[v_{\tau_2}(-)](g) \circ \varphi](x) \leq [[v_{\tau_1}(-)](g \circ \varphi)](x), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in L^Y$$

veya

$$[v_{\tau_2}(\varphi(x))](g) \leq [v_{\tau_1}(x)](g \circ \varphi), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in L^Y$$

biçiminde yazılabilir. $\mathfrak{G}$ -komşuluk süzgeçleriyle $\mathbf{SET}_{\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}}$ -topolojik uzay nesneleri eşit değerler aldıklarından yukarıdaki ifadeyi v_1 ve v_2 türünden

$$[(v_2 \circ \varphi)(x)](g) \leq [v_1(x)](g \circ \varphi), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in L^Y$$

biçiminde yazmak da mümkündür.

$\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}$ monadı için birim doğal dönüşümü tanımından her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} [[(\eta_Y \circ \varphi)(-)](g)](x) &= [(\eta_Y \circ \varphi)(x)](g) \\ &= [\eta_Y(\varphi(x))](g) \\ &= g(\varphi(x)) \end{aligned}$$

olduğundan $[(\eta_Y \circ \varphi)(-)](g) = g \circ \varphi$ 'dir. $\mathbf{F}_{\mathfrak{G}}$ 'nin klon bileşke tanımı da kullanılırsa

$$\begin{aligned} [v_1(x)](g \circ \varphi) &= [v_1(x)]([(\eta_Y \circ \varphi)(-)](g)) \\ &= [[(\eta_Y \circ \varphi) \bullet v_1](x)](g) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $v_2 \circ \varphi = v_2 \bullet (\eta_Y \circ \varphi)$ eşitliği ise (M3)'ten çıkar. Böylece

$$[(v_2 \circ \varphi)(x)](g) \leq [v_1(x)](g \circ \varphi), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in L^Y$$

eşitsizliği

$$[(v_2 \bullet (\eta_Y \circ \varphi))(x)](g) \leq [[(\eta_Y \circ \varphi) \bullet v_1](x)](g), \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in L^Y$$

biçimine dönüştürülmüş olur. Bu ise

$$v_2 \bullet (\eta_Y \circ \varphi) \leq (\eta_Y \circ \varphi) \bullet v_1$$

olması anlamına gelir. ■

Aşağıda herhangi bir $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisi için iki önemli alt kategori tanımlanmaktadır.

Tanım 3.3.4 a) Bir $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidi için $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin, bütün zayıf tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -toplojik uzaylardan oluşan eksiksiz alt kategorisi $\mathbf{WS}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ ile gösterilir.

b) Bir $\mathbf{WS}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin bütün tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -toplojik uzaylardan oluşan eksiksiz alt kategorisi $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ ile gösterilir (Höhle ve Šostak, 1999; Höhle, 2001).

$\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin aynı zamanda $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin de bir eksiksiz alt kategorisi olduğu ilgili tanımlardan dolayı açıktır. Buna ek olarak aşağıda, $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ 'un $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin bir eşyansımali alt kategorisi olduğu gösterilmektedir.

Teorem 3.3.4 Herhangi bir $\mathfrak{G}_*$ tam grupoidi için $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$, $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin bir eşyansımali alt kategorisidir.

Kanıt. Keyfi bir $A = (X, \tau) \in |\mathfrak{G}_*\text{-TOP}|$ nesnesi verilsin ve buna karşılık gelecek $\check{A} \in |\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}|$ nesnesi $\check{A} = (X, \tau^{(S)})$ olarak seçilsin. $c_A : X \rightarrow X$, X kümesi için birim fonksiyonu gösterebilir. Tabakalı kabuk tanımı $\tau \subseteq \tau^{(S)}$ olmasını gerektirdiğinden, $g \in \tau^{(S)} \implies g \circ c_A = g \in \tau$ yazılabilir. Dolayısıyla c_A sürekli olup, $c_A : (X, \tau^{(S)}) \xrightarrow{\mathfrak{G}_*\text{-TOP}} (X, \tau)$ biçimindeki bir $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ morfizmi olarak düşünülebilir.

Herhangi bir $B = (Y, \sigma) \in |\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}|$ tabakalı $\mathfrak{G}_*$ -topolojik uzayı ve bir $f : (Y, \sigma) \xrightarrow{\mathfrak{G}_*\text{-TOP}} (X, \tau)$ morfizmi verilsin, $\check{f} : Y \rightarrow X$ fonksiyonu, f morfizminin temsil ettiği fonksiyona eşit olarak seçilsin ve $g \in \tau^{(S)}$ olsun. Önerme 3.1.1.6 gereği $\tau_{\langle \tau \rangle} = \tau^{(S)}$ olduğundan, her $i \in I$ için $a_i \in L$ ve $g_i \in \tau$ olmak üzere $g = \bigvee_{i \in I} (a_i * g_i)$ olacak biçimde bir I damga kümesi vardır. Böylece, Teorem 2.1.6'nın da dikkate alınmasıyla $g \circ f = \bigvee_{i \in I} [(a_i * g_i) \circ f]$ yazılabilir. Her $i \in I$ için $g_i \in \tau$ ve $f : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ sürekli olduğundan $g_i \circ f \in \sigma$ 'dır. σ 'nın tabakalılığı ise $a_i * (g_i \circ f) \in \sigma$ olmasını gerektirir ve $a_i * (g_i \circ f) = (a_i * g_i) \circ f$ olacağı gerçeği de göz önünde bulundurularak (O3) aksiyomunun uygulanmasıyla $g \circ f \in \sigma$ olduğu sonucuna ulaşılır. $\check{f}$ fonksiyonu f 'e eşit olarak seçildiğinden $g \circ \check{f} \in \sigma$ olup $\check{f} : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ sürekli ve $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ kategorisinin eksiksiz olmasından dolayı $\check{f}$ bir $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ -morfizmidir. Üstelik c_A birim fonksiyon ve f ile $\check{f}$ aynı değerleri alan fonksiyonlar olduğundan $c_A \circ \check{f} = f$ olup

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \check{f} \downarrow & & \parallel \\ \check{A} & \xrightarrow{c_A} & A \end{array}$$

diyagramını değişimlidir. Bu ise c_A 'nın $A = (X, \tau)$ nesnesi için bir $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ -eşyansına olduğunu gösterir. A keyfi olduğundan, $\mathbf{S}\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$, $\mathfrak{G}_*\text{-TOP}$ 'un bir eşyansımali alt kategorisidir. ■

$\mathfrak{G}\text{-TOP}$ kategorisiyle adjointlik ilişkisi bulunan bazı önemli kategoriler de mevcuttur. $\mathfrak{G}$ 'nin en azından bir cl-grupoid olması koşuluyla bunlardan biri, Örnek 2.3.1.3 ile tanıtilan **CONV** kategorisidir.

Teorem 3.2.3.2'nin bir sonucu olarak, $\mathfrak{G}$ bir cl-grupoid ise her bir (X, τ) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayına bir $(X, \mathcal{T}_\tau)$ yakınsaklık uzayı karşılık gelir. Böylece $\mathfrak{G}\text{-TOP}$ ve **CONV** kategorileri arasında bir geçiş elde edilir. Özet olarak $\mathfrak{G}$ -değerli topolojik

uzaylar için yakınsaklığın süreklilik altında korunduğunu ifade eden Teorem 3.2.3.3 ise iki kategori arasındaki bu geçişin bir fonktöre karşılık geleceği sonucunu verir.

Sonuç 3.3.2 $\mathfrak{G}$ bir cl-grupoid olmak üzere her bir (X, τ) $\mathfrak{G}$ -topolojik uzayı ve $\mathfrak{G}$ -değerli topolojilere göre sürekli olan her φ fonksiyonu için

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(X, \tau) = (X, \mathcal{T}_{\tau}), \quad \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\varphi) = \varphi$$

kuralı ile verilen $\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}} : \mathfrak{G}\text{-TOP} \rightarrow \mathbf{CONV}$ bir fonktördür (Höhle, 2001).

$\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}$ fonktörünün bir sol adjointi vardır. Bu konuma aday bir fonktörün tanımlanabilirliği aşağıdaki teoremler ile elde edildikten sonra iki fonktör arasındaki adjointlik ilişkisi ele alınacaktır.

Teorem 3.3.5 $(X, \mathcal{T})$ bir yakınsaklık uzayı ve $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir cl-grupoid olsun.

$$\tau_{\mathcal{T}}^* = \left\{ g \in L^X \mid g(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} g(a), \forall (\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T} \right\}$$

ile tanımlanan $\tau_{\mathcal{T}}^*$, X üzerinde bir $\mathfrak{G}$ -değerli topolojidir (Höhle, 2001).

Kanıt. $1 \leq 1$ olmasından (O1) hemen görülür.

$f, g \in \tau_{\mathcal{T}}^*$ olsun. Her $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}$ için $f(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} f(a)$ ve $g(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} g(a)$ olur. $\otimes$ işleminin sıra koruyanlığı, $A \in \mathcal{F} \implies A \neq \emptyset$ olduğu, $\mathfrak{G}$ 'nin cl-grupoid olması ve klasik süzgeçler için $(\mathcal{F}2)$ belitine dikkat edilirse her $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}$ için

$$\begin{aligned} (f \otimes g)(x) &= f(x) \otimes g(x) \\ &\leq \left(\bigvee_{B \in \mathcal{F}} \bigwedge_{b \in B} f(b) \right) \otimes \left(\bigvee_{C \in \mathcal{F}} \bigwedge_{c \in C} g(c) \right) \\ &= \bigvee_{C \in \mathcal{F}} \left[\left(\bigvee_{B \in \mathcal{F}} \bigwedge_{b \in B} f(b) \right) \otimes \bigwedge_{c \in C} g(c) \right] \\ &= \bigvee_{C \in \mathcal{F}} \bigvee_{B \in \mathcal{F}} \left[\left(\bigwedge_{b \in B} f(b) \right) \otimes \left(\bigwedge_{c \in C} g(c) \right) \right] \\ &\leq \bigvee_{C \in \mathcal{F}} \bigvee_{B \in \mathcal{F}} \left[\left(\bigwedge_{b \in B \cap C} f(b) \right) \otimes \left(\bigwedge_{c \in B \cap C} g(c) \right) \right] \\ &= \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \left[\left(\bigwedge_{b \in A} f(b) \right) \otimes \left(\bigwedge_{c \in A} g(c) \right) \right] \\ &\leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \left[\bigwedge_{a \in A} (f(a) \otimes g(a)) \right] \\ &= \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} (f \otimes g)(a) \end{aligned}$$

olup $f \otimes g \in \tau_T^*$ 'dir ve böylece (O2) de elde edilmiş olur.

$I = \emptyset$ olması durumunda (O3)'ün sağlanacağı açıktır. $I \neq \emptyset$ olması durumunda ise istenen eşitsizlik farklı damgalarla ard arda uygulanan iki eküs işleminin birbiriyle yer değiştirebileceği gerçeğinden görülür. ■

Teorem 3.3.6 $(X, \mathcal{T}_1)$ ve $(Y, \mathcal{T}_2)$ birer yakınsaklık uzayı, $\varphi : X \rightarrow Y$ $\mathcal{T}_1$ ile $\mathcal{T}_2$ 'ye göre bir sürekli fonksiyon ve $\mathfrak{G} = (L, \leq, \otimes)$ bir cl-grupoid olsun. $\tau_{\mathcal{T}_1}^*$ ve $\tau_{\mathcal{T}_2}^*$ $\mathfrak{G}$ -değerli topolojileri Teorem 3.3.5'teki gibi tanımlanmış ise φ fonksiyonu $\tau_{\mathcal{T}_1}^*$ ile $\tau_{\mathcal{T}_2}^*$ 'ye göre de süreklidir (Höhle, 2001).

Kanıt. $g \in \tau_{\mathcal{T}_2}^*$ ve $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}_1$ olsun. φ yakınsaklık yapılarına göre sürekli olduğundan $(\varphi \langle \mathcal{F} \rangle, \varphi(x)) \in \mathcal{T}_2$ 'dir.

Herhangi bir $A \in \mathcal{F}$ seçilsin. $g \in \tau_{\mathcal{T}_2}^*$ olduğundan

$$g(\varphi(x)) \leq \bigvee_{B \in \varphi \langle \mathcal{F} \rangle} \bigwedge_{b \in B} g(b)$$

'dir. Özel olarak $\varphi^{\rightarrow}(A) \in \varphi \langle \mathcal{F} \rangle$ kümesi ele alınırsa

$$g(\varphi(x)) \leq \bigwedge_{b \in \varphi^{\rightarrow}(A)} g(b) = \bigwedge_{a \in A} g(\varphi(a))$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik her bir $A \in \mathcal{F}$ için geçerli olacağından

$$(g \circ \varphi)(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} (g \circ \varphi)(a)$$

elde edilip $g \circ \varphi \in \tau_{\mathcal{T}_1}^*$ olduğu görülür ve φ , $\tau_{\mathcal{T}_1}^*$ ile $\tau_{\mathcal{T}_2}^*$ 'ye göre de sürekli olur. ■

Sonuç 3.3.3 $\mathfrak{G}$ bir cl-grupoid olmak üzere her bir $(X, \mathcal{T})$ yakınsaklık uzayı ve yakınsaklık yapıları altında sürekli her φ fonksiyonu için

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T}) = (X, \tau_{\mathcal{T}}^*), \quad \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\varphi) = \varphi$$

kuralı ile verilen $\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}} : \mathbf{CONV} \rightarrow \mathfrak{G}\text{-TOP}$ bir fonktördür (Höhle, 2001).

Şimdi $\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}$ ve $\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$ fonktörleri arasındaki adjointlik ilişkisi ifade edilebilir.

Teorem 3.3.7 $\mathfrak{G}$ bir cl-grupoid olmak üzere $\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}} \dashv \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}$ 'dir (Höhle, 2001).

Kanıt. Her bir $(X, \mathcal{T}) \in |\mathbf{CONV}|$ için $I_X : X \rightarrow X$ fonksiyonu ele alınsın ve $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda her bir $g \in \tau_{\mathcal{T}}^*$ için $g(x) \leq \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} g(a)$ olacağından $\mathcal{F}$, $\tau_{\mathcal{T}}^*$ 'ye göre x 'e yakınsar ve $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{T}}^*}$ olur.

$(\mathcal{F}, x) = (I_X \langle \mathcal{F} \rangle, I_X(x))$ ve $(X, \mathcal{T}_{\tau_{\mathcal{T}}^*}) = \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T}))$ olduğuna dikkat edilirse, $\mathbf{CONV}$ kategorisinde $I_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T}))$ olduğu görülür.

Ayrıca $(Y, \tau') \in |\mathfrak{G}\text{-}\mathbf{TOP}|$ olmak üzere herhangi bir $\varphi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(Y, \tau')$ **CONV**-morfizmi verildiğinde

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{I_X} & \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T})) \\ \parallel & & \downarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(\varphi_*) \\ (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow[\varphi]{} & \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(Y, \tau') \end{array}$$

diyagramını değişimli yapan bir $\varphi_* : \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \tau')$ **mathfrak{G}-TOP**-morfizminin bulunabildiği de gösterilirse I_X 'in X 'ten $\mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}$ 'ye bir başlangıç morfizmi olduğu görülmüş olur.

Herhangi bir $(\mathcal{F}, x) \in \mathcal{T}$ süzgeci alınsın ve $g \in \tau'$ olsun. $\varphi : (X, \mathcal{T}) \rightarrow \mathfrak{T}_{\mathfrak{G}}(Y, \tau')$ sürekliliğinden $(\varphi \langle \mathcal{F} \rangle, \varphi(x)) \in \mathcal{T}_{\tau'}$ olup

$$g(\varphi(x)) \leq \bigvee_{B \in \varphi \langle \mathcal{F} \rangle} \bigwedge_{b \in B} g(b) = \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{b \in \varphi^{-1}(A)} g(b) = \bigvee_{A \in \mathcal{F}} \bigwedge_{a \in A} (g \circ \varphi)(x)$$

eşitsizliği vardır ve $\mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}$ 'nin tanımı gereği bu eşitsizlik $g \circ \varphi \in \tau_{\mathcal{T}}^*$ olduğu anlamına gelir ve φ_* sadece bir fonksiyon olarak bakıldığında $\varphi_* = \varphi$ olacak biçimde tanımlanarak istenen diyagramı değişimli yapan $\varphi_* : \mathfrak{S}_{\mathfrak{G}}(X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \tau')$ **mathfrak{G}-TOP**-morfizmi bulunmuş olur. ■

4 TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada çok değerli topolojik uzaylara temel sağlayan bazı tam grupoid yapıları tanıtıldı ve bu tür yapılar üzerine kurulmuş çok değerli topolojik yapılar incelendi.

Sözkonusu kuramı çeşitli yönlerden zenginleştirmek mümkündür. Örnek olarak, bu çalışmadakine benzer bir inceleme kümenin yanında topolojinin de bir tam grupoidle yapılandırılması mantığına dayanan çok değerli topolojik uzaylar için de yapılabilir. Farklı tam grupoidler üzerinde tanımlı çok değerli topolojik uzaylar arasında bağ kuracak anlamlı bir morfizm kavramı oluşturularak, bütün çok değerli topolojik uzaylar aynı tür nesneler olarak ele alınabilir ve böylece çok değerli topolojik uzay ve tam grupoid teorileri birleştirilebilir. Üzerinde çalışılan tam grupoid, tümleme gibi ek yapılarla donatılarak daha zengin bir teori elde edilebilir. Kapamış operatörü benzeri bir araç yardımıyla herhangi bir sınırlı kısmi sıralı kümeye tam grupoid benzeri bir yapı kazandırılıp bunun üzerinde bir topoloji kuramı geliştirmek de başka bir araştırma konusu olabilir.

Çalışmada elde edilen diğer bir sonuç, özel bir Kleisli kategorisi yardımıyla çok değerli topolojik uzaylar teorisine kategorik olarak ulaşılabilinmesidir. Bazı özel ek yapılar yardımıyla herhangi bir Kleisli kategorisinde bu oluşumu taklit etmek mümkündür. Bu şekilde elde edilen çok değerli topoloji benzeri yapıların en genel anlamda incelenmesinde şimdiye kadar çok az yol alınabilmiştir. Bu yapıların araştırılması da yeni çalışmalar için oldukça uygun bir seçim olarak düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Adámek, J., Herrlich H. ve Strecker, G. E. 2004. *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, Retrieved May 10, 2010, from <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc>
- Aslım G. 2004. *Genel Topoloji* (3. Baskı). Ege Üniversitesi Basımevi, Bornova, İzmir. 274 s.
- Belluce L. P. 1992. Semi-simple and complete MV-algebras, *Algebra Universalis.*, 29: 1-9.
- Birkhoff, G. 1995. *Lattice Theory* (Third Edition). Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. 420 s.
- Borceux, F. 1994. Handbook of Categorical Algebra 3. In: *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications* (Vol. 53). Cambridge University Press.
- Bourbaki, N. 1966. *General Topology Part I*, Addison-Wesley Publishing Company. 437 s.
- Cartan, H. 1937. *Théorie des filtres*, CR Acad. Paris, 205, 595-598.
- Chang, C. L. 1968. Fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 24, 182-190.
- Chicourrat, M. 2010. Convergences, pretopologies and proximities induced by Cauchy and Riesz screens, *Acta Mathematica Hungarica*, 128 (3), 199-220.
- Çoker, D., Taş, K. ve Özer, O. 2008. *Soyut Matematik*, Bilim Yayınları. 317 s.
- Devlin, K., 1993. *The Joy of Sets*, Fundamentals of Contemporary Set Theory, Springer. 192 s.
- Gabbay, D. M., Shetman V., Skvortsov, D. 2009. *Quantification in Nonclassical Logic: I (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*, Elsevier Science. 640 s.
- Goguen, J. A. 1967. L-fuzzy sets, *J. Math. Anal. Appl.* 18, pp. 145—174.
- Höhle, U. 1998. GL-Quantales: Q-Valued Sets and Their Singletons, *Studia Logica* 61, 123-148.
- Höhle, U. 2001. *Many Valued Topology and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston. 382 s.

- Höhle, U. 2007 Fuzzy sets and sheaves. Part I: basic concepts, *Fuzzy Sets Systems*. 158, 1143-1174.
- Höhle, U. 1995 Commutative, residuated ℓ -monoids, In: U. Höhle and E.P. Klement Ed. *Nonclassical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets*, 53-106, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston.
- Höhle, U., Šostak A. P. 1999 Axiomatic foundations of fixed-basis fuzzy topology, In: Höhle, U., Rodabaugh, S. E. Ed. *Mathematics of Fuzzy Sets*, 123-272, Kluwer Academic Publishers.
- Kelley, J. L. 1975. *General Topology*, Springer. 298 s.
- Lai, H. ve Zhang, D. 2006. Fuzzy preorder and fuzzy topology, *Fuzzy Sets Systems*. 157, 1865-1885
- Lowen, R., Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56 (3) 1976, 621-633.
- Pu, Q. ve Zhang, D., Preordered sets valued in a GL-monoid, *Fuzzy Sets and Systems* (to appear).
- Rodabaugh, S. E. 1999. Powerset Operator Foundations For Popsat Fuzzy Set Theories And Topologies, In: Höhle, U., Rodabaugh, S. E. Ed. *Mathematics of Fuzzy Sets*, 123-272, Kluwer Academic Publishers.
- Šostak, A. P. 1985. On a fuzzy topological structure, *Rend. Circ. Mat. Palermo Ser. II* 11, 98-103.
- Willard, S. 2004. *General Topology*, Courier Dover Publications. 369 s.
- Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy sets, *Information and Control* 8, 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı: Utku GÜRDAL

Doğum Yeri ve Yılı: Gördes, 1984

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce



Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Manisa Fatih Anadolu Lisesi, 2002

Lisans: Celal Bayar Üniversitesi, 2007

Çalıştığı Kurum ve Yıl:

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, 2008-Devam