

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3- BOYUTLU LORENZ UZAYINDA
HELİSLER VE BERTRAND EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru KORKMAZ

(091121106)

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Geometri

TEMMUZ-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3- BOYUTLU LORENZ UZAYINDA HELİSLER VE BERTRAND
EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ebru KORKMAZ
(091121106)

Anabilim Dalı : Matematik
Programı : Geometri

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

TEMMUZ-2011

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU LORENZ UZAYINDA HELİSLER VE BERTRAND
EĞRİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru KORKMAZ

(091121106)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:

Tezin Savunulduğu Tarih:

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ (F.Ü)

Yrd. Doç. Dr. Ünal İÇ (F.Ü)

TEMMUZ - 2011

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Handan ÖZTEKİN 'e üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd.Doç.Dr. Essin TURHAN 'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ebru KORKMAZ

ELAZIĞ-2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY.....	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar	3
2.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Üzerine Karakterizasyonlar	10
3. ÜÇ BOYUTLU LORENZ UZAYI.....	12
3.1. Üç Boyutlu Lorenz Uzayında Temel Kavramlar	12
4. ÜÇ BOYUTLU UZAYDA DÜZLEM EĞRİLERİ VE SİLİNDİRİK HELİSLER	22
4.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Düzlem Eğrileri ve Silindirik Helisler	22
4.2. Üç Boyutlu Lorenz Uzayında Düzlem Eğrileri ve Silindirik Helisler	33
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	60

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; Öklid uzayına ait temel kavramlar ve eğriler üzerine karakterizasyonlar verildi.

İkinci bölümde; üç boyutlu Lorenz uzayında temel kavramlar, eğrilik küresi ve çember, eğriler üzerine karakterizasyonlar incelendi.

Son bölümde ise; üç boyutlu Öklid uzayında ve üç boyutlu Lorenz uzayında düzlem eğrileri, silindirik helisler, küresel eğriler ve Bertrand eğrileri, araştırıldı.

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Lorenz uzayı, silindirik helisler, küresel eğriler ve Bertrand eğrileri.

ABSTRACT

Helices and Bertrand Curves in the Three Dimensional Lorentzian Space

This study is formed in three parts.

In the first part, fundamental definitions about Euclidean space and curves over characterization are given.

In the second part, fundamental definitions in three dimensional Lorentzian space and curves over characterization are researched.

In the last part, plane curves, cylindrical helices, spherical curves, and Bertrand curves in three dimensional Euclidean space and Lorentzian space are researched .

Keywords: Euclidean space, Lorentzian space, cylindrical helices, spherical curves and Bertrand curves.

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	:	Vektör uzayı
$\langle, \rangle$	:	İç çarpım
$\ \cdot\ $	:	Norm
$\mathbf{S}^2$	:	Oskülatör küre
$\mathbf{E}^3$	:	Öklid uzayı
κ	:	Eğrilik fonksiyonu
τ	:	Burulma fonksiyonu
ρ	:	Eğrilik yarıçapı fonksiyonu
$\mathbf{T}$	:	Birim teğet vektör alanı
$\mathbf{N}$	:	Birinci dik (Asli normal) vektör alanı
$\mathbf{B}$	:	Binormal vektör alanı
$\mathbf{H}_1$	:	Birinci harmonik eğrilik
$\mathbf{L}^3$	:	Lorenz uzayı
$\mathbf{g}(,)$	:	Lorenz iç çarpım
$\times$	:	Lorenz vektörel çarpım
$\mathbf{S}_1^2$	:	Lorenzian küre
$\mathbf{H}_1^2$	:	Hiperbolik küre
$\mathbf{D}(\mathbf{s})$	:	Darboux vektörü
$\mathbf{d}(\mathbf{s})$	:	Birim Darboux vektörü

1.GİRİŞ

$\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında eğrilerin en ilginç olanlarından biri helislerdir. Helisler için günlük hayattan bir çok örnek verilebilir. Örneğin; bir ağaca sarılarak çıkan sarmaşık, minaredeki merdiven veya bir vidanın üzerine işlenmiş yivler ve setler verilebilir.

İlk olarak bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helis ele alınmış ve buna dairesel helis denilmiştir. Bu helislerde κ eğrililiği ve τ burulmanın ayrı ayrı birer sabit olduğu ilk tesbit edilen karakterizasyonlardandır. Daha sonra bu eğriliklerin sabit olmasına rağmen oranlarının sabit olduğu helis bulunmuştur ki bu helise genel helis adı verilmiştir. Bulunan genel helis sayesinde bir dik dairesel silindir üzerine çizilmiş helislerden başka helislerin de var olduğu ortaya çıkmıştır.

Helisler sabit eğriliklidir. Başka bir deyişle eğrinin tanjant vektörü sabit bir doğruyla sabit bir açı yapar. İlk olarak 1802 yılında Lancret Öklid uzayındaki helisler için yaptığı çalışmalar sonucu genel helis tanımını yapmıştır. 1845 yılında ise de Saint Venant tarafından bir eğrinin helis olması için gerek ve yeter şartın κ eğrililiğinin τ burulmasına oranının sabit olması gerektiği ispatlanmıştır [1].

Genel helisler ve eğilim çizgileri diferansiyel geometrinin çok iyi bilinen eğrileri olup yapılan son çalışmaların takibi açısından [2,3,4,5,6] çalışmaları incelenebilir. Daha sonra slant helis ve helis arasındaki ilişki üzerine çalışmalar yapılmıştır [7,8].

Bertrand eğriler klasik uzay eğrisi teorisinin en ilginç konularından biridir [9,10,11]. J.A Serret 1850 yılında eğrilerin eğriliklerini ve torsiyonlarını bulmuştur. Bu sonuçlara dayanarak L.Bianchi ise Bertrand eğrilerin eğrilik ve torsiyonlarının lineer bağıntısını ispatlamış ve aynı yıl içinde Bertrand eğriler J.Bertrand tarafından bulunmuştur.

[12] de Bertrand eğriler ve bu eğrilerin geodezik imbeddingleri incelenerek modern soliton teorisinde çalışılmıştır. Ayrıca Bertrand eğri çiftleri bilgisayar destekli tasarımlarda kullanılan özel eğri örnekleridir [13].

[14]'de silindirik helisler ve Bertrand eğrileri, regle yüzeyi üzerindeki eğrilmiş gibi düşünülerek çalışılmıştır. Bu eğriler klasik bilimsel çalışmalarda özel eğriler denilen dairesel helislerin çeşitli genellemelerinden ibarettir [15]. Bu eğrilere özel eğriler denilmesine rağmen, uzay eğrilerinin geniş bir sınıfındandırılar. Düzlem eğrilerinden

silindirik helisleri, silindirik helislerden Bertrand eğrilerinin elde edilebileceği gösterilebilir. Üstelik tüm bu eğriler bu yöntemle elde edilebilir. Genel diferansiyel geometride, ilk olarak $\mathbb{R}^3$ de doğrular, düzlemler, küreler gibi standart özelliklere sahip model altmanifoldlar düşünülür. Daha sonra genel altmanifoldlarla model altmanifoldlar arasında benzerlikler ve farklılıklar değerlendirilir. Silindirik helis ve Bertrand eğri kavramları, dairesel helis kavramının bir genelleştirilmiş olduğuundan burada model altmanifoldlar olarak dairesel helisler kabul edilmektedir [16].

Biz bu çalışmada [16] de yapılan çalışmayı esas olarak alıp, üç boyutlu Lorenz uzayında düzlem eğrilerinden silindirik helisleri, silindirik helislerden Bertrand eğrilerin elde edilebileceğini inceledik. Ayrıca S_1^2 Lorenz küresi ve H_1^2 hiperbolik kürede eğriler için Sabban çatıları, ve buna bağlı olarak Bertrand eğrilerin elde edilebileceğini gösterdik.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^n$ kümesinde toplama işlemi

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olur.

$\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayının doğal iç çarpımı denir.

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p \rightarrow \|p\|$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı, normlu vektör uzayıdır.

$$d(p, q) = \|p - q\|$$

biçiminde tanımlanan $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$ uzayında bir metriktir. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir [17].

2.1.2. Tanım. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E^3$ diferansiyellenebilir dönüşümüne E^3 de bir eğri denir. Eğer her $t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ ise α ya birim hızlıdır denir. Aksi takdirde keyfi parametrelidir denir. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi için,

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir [18].

2.1.3. Tanım. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

olmak üzere κ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriligi denir [18].

2.1.4. Tanım. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}T'(s)$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) denir. N vektör alanına, α eğrisinin birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı) denir [18].

2.1.5. Tanım. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) denir. B vektör alanına, α eğrisinin ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı) denir [18].

2.1.6. Tanım. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

τ fonksiyonuna, α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [18].

Bundan sonra, aksi belirtilmedikçe, $T = T(s)$, $N = N(s)$, $B = B(s)$ olarak alınacaktır.

2.1.7. Teorem. E^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

dir [17].

2.1.8. Teorem. α birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere, $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre

$$\begin{aligned} T &= \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \\ B &= \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \\ N &= B \times T \end{aligned}$$

dir [17].

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin eğrilik ve burulma fonksiyonları κ, τ olduğuna göre;

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \\ \tau &= \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha^{(3)} \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir [17].

2.1.9. Teorem. α birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere, $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ve bu eğrinin eğrilik ve burulması κ, τ olsun. $\|\alpha'\| = v$ olduğuna göre;

$$\begin{aligned} T' &= v\kappa N \\ N' &= v(-\kappa T + \tau B) \\ B' &= v(-\tau N) \end{aligned}$$

dir [18].

2.1.10. Tanım. $\alpha : I \longrightarrow E^n$ eğrisinin $\alpha(s_0)$ noktası verilsin. $\gamma : J \longrightarrow E^n$ bir eğri olmak üzere $t_0 \in J$ için;

$$\gamma(t_0) = \alpha(s_0)$$

oluyorsa; γ eğrisi α eğrisine 0. basamaktan geçiyor denir.

$$\gamma(t_0) = \alpha(s_0), \gamma'(t_0) = \alpha'(s_0)$$

oluyorsa; γ eğrisi α eğrisine 1. basamaktan geçiyor denir.

$$\gamma(t_0) = \alpha(s_0), \gamma'(t_0) = \alpha'(s_0), \gamma''(t_0) = \alpha''(s_0)$$

oluyorsa; γ eğrisi α eğrisine 2. basamaktan geçiyor denir.

$$\gamma(t_0) = \alpha(s_0), \gamma'(t_0) = \alpha'(s_0), \gamma''(t_0) = \alpha''(s_0), \dots, \gamma^{(k)}(t_0) = \alpha^{(k)}(s_0)$$

oluyorsa; $k \leq n$ olmak üzere, γ eğrisi α eğrisine k . basamaktan geçiyor denir [17].

2.1.11 Tanım. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin eğrilik fonksiyonu κ olmak üzere $\frac{1}{\kappa}$ fonksiyonuna, α eğrisinin eğrilik yarıçapı fonksiyonu denir ve ρ ile gösterilir. $t \in I$ için $\rho(t)$ sayısına, $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğrilik yarıçapı denir [17].

2.1.12. Teorem. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in I$ olsun. Bu durumda

$$\gamma(0) = \alpha(s_0), \quad \gamma'(0) = \alpha'(s_0), \quad \gamma''(0) = \alpha''(s_0)$$

olacak biçimde birim hızlı bir $\gamma : J \longrightarrow E^3$ çemberi vardır. Bu çember,

$$\rho_0 = \rho(s_0), \quad N_0 = N(s_0), \quad T_0 = T(s_0)$$

olmak üzere;

$$\gamma(\theta) = \alpha(s_0) + \rho_0 N_0 + \rho_0 \cos \frac{\theta}{\rho_0} (-N_0) + \rho_0 \sin \frac{\theta}{\rho_0} T_0$$

denklemleriyle verilebilir. Çemberin merkezi $\alpha(s_0) + \rho_0 N_0$ noktasıdır [18].

2.1.13 Tanım. α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında üçüncü basamaktan değen küreye, α eğrisinin, $\alpha(s_0)$ noktasındaki eğrilik küresi (dokunum küresi veya oskülatör küre) denir.

$$S^2 = \{x \in E^3 : \langle x, x \rangle = 1\}$$

şeklinde tanımlanır [17].

2.1.14. Tanım. d merkezli bir K küresi ile α eğrisi için bir f fonksiyonu

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(s) = \langle \alpha(s) - d, \alpha(s) - d \rangle - r^2$$

şeklinde olsun. $s_0 \in I$ olmak üzere

$$f(s_0) = 0$$

ise K küresi α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 0. basamaktan değiyor denir.

$$f(s_0) = 0, \quad f'(s_0) = 0$$

ise K küresi α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 1.basamaktan değiyor denir.

$$f(s_0) = 0, \quad f'(s_0) = 0, \quad f''(s_0) = 0$$

ise K küresi α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 2.basamaktan değiyor denir.

$$f(s_0) = 0, \quad f'(s_0) = 0, \quad f''(s_0) = 0, \quad f^{(3)}(s_0) = 0$$

ise K küresi α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 3. basamaktan değiyor denir [17].

2.1.15. Teorem. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $s_0 \in I$ olsun. α eğrisine $\alpha(s_0)$ noktasında 2.basamaktan değen kürelerin merkezlerinin geometrik yeri, $\mu \in \mathbb{R}$ için

$$d_0(\mu) = \alpha(s_0) + \rho_0 N_0 + \mu B_0$$

eşitliğiyle belirli $d_0(\mu)$ noktalarının belirlediği doğrudur [18].

2.1.16. Teorem. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere, M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

$$a(s) = \alpha(s) - m_2(s)N(s) - \lambda m_3(s)$$

dir. Burada

$$m_2 : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad m_2(s) = \frac{-1}{\kappa(s)}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ dir [19].

2.1.17. Sonuç. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezleri bir doğru üzerindedir [19].

2.1.18. Tanım. $M \subset E^3$ eğrisinin $m \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yerine M eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik eksenini denir [19].

2.1.19. Teorem. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında oskülatör küre merkezi a ise;

$$a(s) = \alpha(s) - m_2(s)N(s) - m_3(s)B(s)$$

dir. Burada $\{T(s), N(s), B(s)\}$, $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olup

$$m_2(s) = \frac{-1}{\kappa(s)}, m_3(s) = \frac{m'_2(s)}{\tau(s)}$$

dir [19].

2.1.20. Sonuç. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında oskülatör kürenin yarıçapı r ise;

$$r = [m_2^2 + m_3^2]^{\frac{1}{2}}$$

dir [19].

2.1.21. Teorem. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $m_3(s) \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında oskülatör kürenin yarıçapının sabit olması için gerek ve yeter şart oskülatör kürelerin merkezlerinin aynı olmasıdır [19].

2.1.22. Teorem. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\tau(s) \neq 0$, $m_3(s) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M küresel bir eğri olması

için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki oskütör kürelerin merkezlerinin aynı nokta olmasıdır [19].

2.1.23. Teorem. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\tau(s) \neq 0$, $m_3(s) \neq 0$ ise, M nin küresel bir eğri olması için gerek ve yeter şart $m'_3(s) + m_2(s)\tau(s) = 0$ olmasıdır [19].

2.2. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Eğriler Üzerine Karakterizasyonlar

2.2.1. Tanım. Birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \longrightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha^*(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir involütü denir [18].

2.2.2. Teorem. α^* eğrisi α eğrisinin bir involütü ise k sabit bir reel sayı olmak üzere

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + (-s + k)T(s)$$

dir [17].

2.2.3. Tanım. Birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \longrightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki teğeti $\alpha(s)$ noktasından geçiyorsa ve $\langle T^*(s), T(s) \rangle = 0$ ise α^* eğrisine α eğrisinin bir evolütü denir [17].

2.2.4. Teorem. α^* eğrisi, α eğrisinin bir evolütü ise $c \in \mathbb{R}$ ve

$$\varphi(s) = \int_0^s \tau(u) du$$

olmak üzere

$$\alpha^*(s) = \alpha(s) + \rho(s)N(s) - \rho(s) \tan[\varphi(s) + c] B(s)$$

dir. Ayrıca $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlemde, birinci kenarı $\alpha^*(s) - \alpha(s)$, ikinci kenarı $N(s)$ olan yönlü açının ölçüsü $\varphi(s) + c$ dir [18].

2.2.5. Tanım. Birim hızlı $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi ile aynı aralıkta tanımlı $\alpha^* : I \longrightarrow E^3$ eğrisi verilsin. Her bir $s \in I$ için $\alpha^*(s)$ noktası ile $\alpha(s)$ noktasını birleştiren doğru, α^* eğrisinin $\alpha^*(s)$ noktasındaki birinci normalini ve α nın $\alpha(s)$ noktasındaki birinci normalini kapsıyorsa, α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyor denir [18].

2.2.6. Teorem. α^* eğrisi α eğrisiyle Bertrand eğri çifti oluşturuyorsa k sabit bir sayı olmak üzere α^* eğrisi $\alpha^* = \alpha + \kappa N$ biçimindedir [18].

2.2.7.Tanım. $M \subset E^3$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $X \in \chi(E^3)$ de sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer $p \in M$ için

$$\langle T, X \rangle|_p = \cos \varphi = \text{sabit}$$

ise M eğrisine E^3 de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $S_p\{X\}$ uzayına da M nin eğilim eksenini denir [20].

3. ÜÇ BOYUTLU LORENZ UZAYI

3.1. Üç Boyutlu Lorenz Uzayında Temel Kavramlar

3.1.1. Tanım. V bir reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

$$i) g(u, v) = g(v, u)$$

$$ii) g(au + bv, w) = a g(u, w) + b g(v, w) \quad \text{ve} \quad g(u, av + bw) = a g(u, v) + b g(u, w)$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir [21].

3.1.2. Tanım. 3-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ve $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in \mathbb{R}^3$ için Lorenz iç çarpımı, $g_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$g_1(\vec{X}, \vec{Y}) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

şeklinde ya da $g_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$g_2(\vec{X}, \vec{Y}) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki g_1 ve g_2 fonksiyonları $\mathbb{R}^3$ de bir Lorenz iç çarpımı olup, bu fonksiyonlarla birleşen $\mathbb{R}^3$ vektör uzayına da kısaca Lorenz uzayı denir ve L^3 ile gösterilir. Biz çalışmalarımızda g_2 Lorenz iç çarpımını kullanacağız ve kısalığı hatırı için g ile göstereceğiz [21].

3.1.3. Tanım. L^3 de bir vektör $\vec{X}$ ve g, L^3 de Lorenz iç çarpımı olmak üzere, $\vec{X}$ vektörünün normu;

$$\|\vec{X}\| = \sqrt{|g(\vec{X}, \vec{X})|}$$

şeklinde tanımlanır [21].

3.1.4. Tanım. α, L^3 de bir eğri olmak üzere $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$ ise bu α eğrisine birim hızlı eğri adı verilir [21].

3.1.5. Tanım. $a, b \in L^3$ olmak üzere $g(a, b) = 0$ ise a ve b vektörlerine ortogonaldır denir [21].

3.1.6. Tanım. $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3), \vec{Y} = (y_1, y_2, y_3) \in L^3$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \times|_L &: L^3 \times L^3 \rightarrow L^3 \\ (\vec{X}, \vec{Y}) &\rightarrow \vec{X} \times|_L \vec{Y} = (-(x_2y_3 - x_3y_2), x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\wedge|_L$ operatörüne L^3 de Lorenz anlamında vektörel çarpım denir. Bu tanımlı matrisel formda;

$$\vec{X} \times|_L \vec{Y} = \det \begin{bmatrix} -\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bundan sonra aksi belirtilmedikçe $\times|_L$ yerine $\times$ ifadesini kullanacağız [19].

3.1.7. Teorem. $\times : L^3 \times L^3 \rightarrow L^3$ olmak üzere $\forall \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in L^3$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- 1) $g(\vec{X} \times \vec{Y}, \vec{Z}) = \det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$,
- 2) $(\vec{X} \times \vec{Y}) \times \vec{Z} = g(\vec{Y}, \vec{Z})\vec{X} - g(\vec{X}, \vec{Z})\vec{Y}$,
- 3) $g(\vec{X}, \vec{X} \times \vec{Y}) = 0$,
- 4) $g(\vec{Y}, \vec{X} \times \vec{Y}) = 0$ [19].

3.1.8. Sonuç. $\forall \vec{X}, \vec{Y} \in L^3$ olmak üzere;

$$g(\vec{X} \times \vec{Y}, \vec{X} \times \vec{Y}) = (g(\vec{X} \times \vec{Y}))^2 - g(\vec{X} \times \vec{X})g(\vec{Y} \times \vec{Y})$$

dir [19].

3.1.9. Tanım. $\forall \vec{V} \in L^3$ olmak üzere

- i) $g(\vec{V}, \vec{V}) > 0$ ise $\vec{V}$ ye space-like vektör,
- ii) $g(\vec{V}, \vec{V}) < 0$ ise $\vec{V}$ ye time-like vektör
- iii) $g(\vec{V}, \vec{V}) = 0, \vec{V} \neq 0$ ise $\vec{V}$ ye light-like veya null vektör

denir [21].

3.1.10. Teorem. $\forall U, V \in L^3$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- 1) U space-like ve V time-like vektör ise $U \times V$ space-like,
 2) U space-like ve V null vektör olmak üzere
 $g(U, V) = 0$ ise $U \times V$ null vektör, $g(U, V) \neq 0$ ise $U \times V$ space-like vektördür [19].

3.1.11. Tanım. $\alpha \subset L^3$ Lorenz uzayında bir eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü $T(s)$ olmak üzere,

- i) $g(T(s), T(s)) < 0$ ise, $\alpha(s)$ time-like eğri,
 ii) $g(T(s), T(s)) > 0$ ise, $\alpha(s)$ space-like eğri,
 iii) $g(T(s), T(s)) = 0$ ise, $\alpha(s)$ light-like veya null eğri
 olarak adlandırılır [20].

3.1.12. Tanım.

1.Durum. L^3 de bir eğri α olsun. Eğer $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, sırasıyla,

$$\{\text{time-like, space-like, space-like}\}$$

şeklinde verilmiş ise Frenet denklemleri;

$$T' = \kappa N \tag{3.1}$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir [22].

Ayrıca; $T \times N = -B$, $N \times B = T$, $B \times T = -N$ olup, Darboux vektörü $D(s) = \tau T - \kappa B$ dir [23].

2.Durum. L^3 de bir eğri α olsun. Eğer $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, sırasıyla,

$$\{\text{space-like, time-like, space-like}\}$$

şeklinde verilmiş ise Frenet denklemleri;

$$T' = \kappa N \tag{3.2}$$

$$N' = \kappa T + \tau B$$

$$B' = \tau N$$

dir [22].

Ayrıca; $T \times N = -B$, $N \times B = -T$, $B \times T = N$ olup, Darboux vektörü $D(s) = -\tau T + \kappa B$ dir [23].

3.Durum. L^3 de bir eğri α olsun. Eğer $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı, sırasıyla,

$$\{\text{space-like, space-like, time-like}\}$$

şeklinde verilmiş ise Frenet denklemleri;

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= \tau N \end{aligned} \tag{3.3}$$

dir [22].

Ayrıca; $T \times N = B$, $N \times B = -T$, $B \times T = -N$ olup, Darboux vektörü $D(s) = \tau T - \kappa B$ dir [23].

3.1.13. Tanım. L^3 de bir eğri α olsun. Eğer κ ve τ nun her ikisi de α eğrisi boyunca pozitif sabitler ise α eğrisine dairesel helis denir [22].

3.1.14. Tanım. L^3 Lorenz uzayında $m = (m_1, m_2, m_3)$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$S_1^2(r) = \{a = (a_1, a_2, a_3) \in L^3 : g(a - m, a - m) = r^2\}$$

şeklinde tanımlanan $S_1^2(r)$ cümlesine Lorenzian küre adı verilir [21].

3.1.15. Tanım. $M \subset L^n$ de time-like eğri ve $S^p \subset L^n$ p -hiperküresi verilsin. Eğer $M \subset S^p$ ise M ye L^n in p -time-like hiperküresel eğrisi denir. $n = 3$ ve $p = 1$ halinde M time-like eğrisi bir çember (Lorenz çemberi) veya çember yayıdır [19].

3.1.16. Tanım. $M \subset L^3$ time-like eğrisiyle $m \in M$ noktasında sonsuz yakın dört ortak noktası olan küreye M nin $m \in M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi adı verilir [19].

3.1.17. Teorem. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yeri;

$$a(s) = \alpha(s) - m_2(s)N(s) - m_3(s)B(s)$$

dir. Burada

$$m_2 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad m_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$$

ve

$$m_3(s) = \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)^2} = \lambda \in \mathbb{R}$$

dir [19].

3.1.18. Sonuç. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezleri bir doğru üzerindedir [19].

3.1.19. Tanım. $M \subset L^n$ time-like eğrisinin $m \in M$ noktasında M ile sonsuz yakın üç ortak noktası olan kürelerin merkezlerinin geometrik yerine, M time-like eğrisinin $m \in M$ noktasındaki eğrilik eksenini denir [19].

3.1.20. Teorem. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında Oskülatör küre merkezi a ise;

$$a = \alpha(s) - m_2(s)N(s) - m_3(s)B(s)$$

dir. Burada, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı olup

$$\begin{aligned} m_2(s) &= \frac{1}{\kappa(s)} \\ m_3(s) &= \frac{m'_2(s)}{\tau(s)} \end{aligned}$$

şeklindedir [19].

3.1.21. Sonuç. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s) \in M$ noktasında Oskülatör kürenin yarıçapı r ise;

$$r = [m_2^2(s) + m_3^2(s)]^{\frac{1}{2}}$$

dir [19].

3.1.22. Teorem. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $m_3(s) \neq 0$ $\tau(s) \neq 0$ olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında Oskülatör kürenin yarıçapının sabit olması için gerek ve yeter şart oskülatör kürelerin merkezlerinin aynı olmasıdır [19].

3.1.23. Teorem. $M \subset L^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\tau(s) \neq 0$ $m_3(s) \neq 0$ varsayalım. Bu durumda ; M bir küresel eğri olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında Oskülatör kürelerin merkezlerinin aynı nokta olmasıdır [19].

3.1.24. Teorem. $M \subset L^3$ time-like eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere $\tau(s) \neq 0$ $m_3(s) \neq 0$ ise M bir küresel eğri olması için gerek ve yeter şart $m_3' + m_2\tau = 0$ olmasıdır [19].

3.1.25. Tanım. L^3 uzayındaki Hiperbolik birim küre,

$$H_1^2 = \{a \in L^3 : g(a, a) = -1\}$$

şeklinde tanımlanır [24].

3.1.26. Tanım. L^3 de iki regüler eğri $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s) \neq 0$ olmak üzere; α , $\bar{\alpha}$ olsun. α , ve $\bar{\alpha}$ boyunca Frenet çatıları, sırasıyla, $\{T, N, B\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ olsun. Eğer $\forall s \in I$ için α ile $\bar{\alpha}$ nin normal vektör alanları lineer bağımlı ise, bu taktirde α eğrisine bir Bertrand eğri denir. Bu durumda $\bar{\alpha}$ ye α nın Bertrand çifti denir. Böylece

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + rN(s), \quad \forall s \in I \quad (3.4)$$

yazabiliriz [22].

3.1.27. Teorem. L^3 de $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti olmak üzere (3.4) eşitliğindeki r sabittir [22].

3.1.27. İspat. L^3 de $\{T, N, B\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ sırasıyla α ve $\bar{\alpha}$ nin Frenet çatıları olsun. $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti ise

$$\bar{\alpha} = \alpha + rN$$

yazabiliriz. Her iki tarafın s ye göre türevini alırsak;

$$\bar{T} \frac{d\bar{s}}{ds} = T + r'N + rN'$$

$s, \bar{s}$ sırasıyla α ve $\bar{\alpha}$ nin parametreleri olmak üzere

$$\frac{d\bar{s}}{ds} \neq 0$$

dır. O halde

$$\bar{T} = T + r'N + r(\lambda\kappa T + \tau B)$$

olup, N ile iç çarpımından

$$r'\varepsilon_0 = 0$$

elde edilir ki; bu ise r nin sabit olması demektir. Burada

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & N \text{ space-like vektör ise} \\ -1, & N \text{ time-like vektör ise} \end{cases}$$

dir.

3.1.28. Teorem. L^3 de κ ile τ , α eğrisinin eğrilikleri; $\alpha, \bar{\alpha}$ iki regüler eğri olsunlar. $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $A \neq 0, B \neq 0 : A\kappa + B\tau = 1$ olmasıdır [22].

3.1.28. İspat. L^3 de $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eğri çifti, $\{T, N, B\}$ ve $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ sırasıyla α ve $\bar{\alpha}$ nin Frenet çatıları olsun. T ile $\bar{T}$ arasındaki açı φ olmak üzere,

$$\bar{T} = \varepsilon_1 \cosh \varphi T + \varepsilon_2 \sinh \varphi B \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & (2). \text{ ya da } (3). \text{ durumunda} \\ -1, & (1). \text{ durumunda} \end{cases}$$

ve

$$\varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & (1). \text{ ya da } (2). \text{ durumunda} \\ -1, & (3). \text{ durumunda} \end{cases}$$

$\bar{s}$, $\bar{\alpha}$ nin parametresi olmak üzere (3.5) eşitliğinin her iki tarafı s ye göre türev alınır;

$$\frac{\overline{\kappa} N}{\overline{\kappa} N} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{d(\cosh \varphi)}{ds} T + \frac{d(\sinh \varphi)}{ds} B + (\kappa \varepsilon_1 \cosh \varphi + \gamma \tau \varepsilon_2 \sinh \varphi) N$$

$\cosh \varphi = \text{sabit}$ elde edilir. Bu ise φ nin sabit olduğunu verir. Ayrıca $\bar{\alpha} = \alpha + rN$, $r = \text{sabit}$ böylece;

$$A\kappa + B\tau = 1$$

yazabiliriz. Şimdi $(\alpha, \bar{\alpha})$ Bertrand eşi olduğunu göstereceğiz. A ve r sabit olduğundan, A nın yerine $-r\lambda$ yazılırsa,

$$1 + r\lambda\kappa = B\tau$$

ve $\bar{\alpha} = \alpha + rN$ 'den

$$\frac{d\bar{T}}{d\bar{s}} \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{B\kappa + r\gamma\tau}{\sqrt{\varepsilon_1 B^2 + \varepsilon_2 r^2}} N$$

dir. Bu demektir ki; N ile $\bar{N}$ lineer bağımlıdır. Bu ise ispatı tamamlar [22].

3.1.29. Teorem. α , L^3 de regüler bir eğri olsun. α nın birden fazla Bertrand çiftine sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart α bir dairesel helis olmasıdır [22].

3.1.30. Teorem. $(\alpha, \bar{\alpha})$ L^3 de bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu taktirde α ve $\bar{\alpha}$ nin torsiyonları, sırasıyla, τ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere $\tau.\bar{\tau} = \text{sabittir}$ [25].

3.1.31. Sonuç $(\alpha, \bar{\alpha})$ L^3 de bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu taktirde α ve $\bar{\alpha}$ nin Frenet elemanları arasında;

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \varepsilon \frac{-bT + aB}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \quad \bar{N} = \pm N, \quad \bar{B} = \varepsilon \frac{aT - bB}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \\ \bar{\kappa} &= -\varepsilon \frac{(-b\kappa + a\tau)}{(b^2 - a^2)\tau}, \\ \bar{\tau} &= -\varepsilon \frac{(a\kappa - b\tau)}{(b^2 - a^2)\tau}, \\ d\bar{s} &= -\sqrt{b^2 - a^2} \tau(s) ds \end{aligned}$$

eşitlikleri mevcuttur [25].

3.1.32. Teorem. L^3 de sabit bir düzleme paralel olmayan birim vektör alanı $e(t)$, ve sıfırdan farklı bir sabit a olsun. Bu takdirde

$$\alpha(t) = -\varepsilon_2 a \int e(t) \times \dot{e}(t) dt$$

eşitliği $-\frac{\varepsilon_2}{a}$ sabit torsiyonlu ve $\pm e(t)$ binormal vektör alanlı bir uzay eğrisidir [25].

3.1.33. Teorem. L^3 de sıfırdan farklı sabit τ_α torsiyonlu bir eğri α olsun. Bu taktirde,

$$\beta(s) = -\frac{1}{\tau_\alpha} N(s) - \varepsilon_3 \int B(s) ds$$

eğrisi ile $|\tau_\alpha|$ sabit eğriliklidir. Burada $\varepsilon_3 = g(B, B)$ dir [25].

3.1.34. Teorem. L^3 de sıfırdan farklı sabit τ_α torsiyonlu bir eğri α olsun. Bu taktirde,

$$\beta(s) = a\alpha(s) + b\left(-\frac{1}{\tau_\alpha} N(s) - \varepsilon_3 \int B(s) ds\right)$$

bir Bertrand eğridir [25].

3.1.35. Teorem. $u(\sigma)$, H_1^2 de yay uzunluğu ile parametrelendirilmiş bir time-like eğri olsun.

$$\begin{aligned} \alpha &= a \int u(\sigma) d\sigma, \\ \beta &= a \tanh \theta \int u(\sigma) \times du, \\ \gamma &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

şeklinde üç eğri tanımlanabilir. Burada α sabit eğrilikli bir eğri, β sabit torsiyonlu bir eğri ve γ da bir Bertrand eğridir. Tersine her Bertrand eğri bu formda gösterilebilir [25].

3.1.36. Tanım. $M \subset L^3$ eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve $X \in \chi(L^3)$ de sabit bir birim vektör alanı olsun. Eğer $p \in M$ için $g(T, X)|_p = \cosh \varphi = \text{sabit}$ ise M eğrisine

L^3 de bir eğilim çizgisi, φ açısına M nin eğilim açısı ve $S_p\{X\}$ uzayına da M nin eğilim ekseni denir [20].

3.1.37. Teorem. $\|T(s)\| = +1$ ise α eğrisi birim hızlı time-like eğri olacaktır. Bu eğriyi birim hızlı time-like eğri olarak alalım. $\alpha \subset L^3$ eğrisi bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\forall s \in I$ için $\frac{\kappa}{\tau}$ nin sabit olmasıdır [20].

3.1.38. Sonuç. α bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şartın $g(\alpha'', \alpha''' \wedge \alpha^{(4)}) = 0$ olmasıdır [20].

4. ÜÇ BOYUTLU UZAYDA DÜZLEM EĞRİLERİ VE SİLİNDİRİK HELİSLER

4.1. Üç Boyutlu Öklid Uzayında Düzlem Eğrileri ve Silindirik Helisler

4.1.1. Tanım. $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde bir $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini göz önüne alalım. Eğer $\tilde{\gamma}$ eğrisinin teğet doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapıyorsa, $\tilde{\gamma}$ eğrisine bir silindirik helis adı verilir. Bilindiği gibi, $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisi bir silindirik helistir gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}(s) = \text{sabit}$ tir. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s) = \text{sabit}$ ise eğriye bir silindirik helistir denir [16].

4.1.2. Tanım. Bir $\tilde{\gamma}$ Bertrand eğrisi için, $\tau(s_0) = 0$ olacak şekilde bir $s_0 \in I$ noktası varsa, o zaman $\tilde{\gamma}$ bir düzlemsel eğridir. Böylece uzayda bulunan bir Bertrand eğrisinin torsiyonu sıfır olamaz [16].

4.1.3. Tanım. Herhangi bir, birim hızlı $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektörüne Darboux vektörü denir. $d(s) = \frac{D(s)}{\|D(s)\|}$ haline $\tilde{\gamma}$ nın küresel Darboux resmi yada Darboux göstergesi denir [16].

4.1.4. Tanım. $\tau(s_0) = 0$ olacak şekilde bir $\tilde{\gamma}$ uzay eğrisi için, $\tilde{\gamma}$ bir Bertrand eğrisidir, gerek ve yeter şart, sıfırdan farklı A ve B sayıları vardır öyleki; $\forall s \in I$ için

$$A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$$

dir [16].

4.1.5. Tanım. Bir uzay eğrisi için, bu eğrinin torsiyonu daima sıfır oluyorsa, o zaman bu eğri düzlem tarafından kapsanır, yani eğri düzlemseldir. Bu durumda $\tilde{\gamma}$ nın yerine γ , ve κ nın yerine κ_p alalım. Bir $\gamma(t)$ düzlemsel eğrisi için,

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t) + \left(\cot \theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du \right) a + c$$

şeklinde bir uzay eğrisi tanımlanabilir. θ sabit bir sayı ve a, c sabit vektörlerdir öyle ki; $\langle \gamma', a \rangle = 0$ ve $\|a\| = 1$ dir [16].

4.1.6. Teorem. $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir eğri $\xi(s)$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\xi}(s) = \xi(s) + \left(\cot \theta \int_{t_0}^s \|\xi'(u)\| du \right) a + c$$

şeklinde tanımlı $\tilde{\xi}(s)$ eğrisi bir silindirik helistir. Üstelik tüm silindirik helisler bu metodla elde edilebilir [16].

4.1.6. İspat.

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}'(s) &= \xi'(s) + \cot \theta a, \\ \tilde{\xi}''(s) &= \kappa_p(s)n(s) \\ \tilde{\xi}^{(3)}(s) &= \kappa_p'(s)n(s) - (\kappa_p(s))^2 t(s) \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.1) eşitliği yardımıyla $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ hesaplanacak olursa;

$$\kappa(s) = |\kappa_p(s)| \sin^2 \theta$$

ve

$$\tau(s) = -\kappa_p(s) \cot \theta \sin^2 \theta$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında, $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)}$ =sabit olur. Bu ise $\tilde{\xi}(s)$ eğrisinin silindirik helis olması demektir.

Şimdi $\tilde{\xi}(s)$ eğrisini birim hızlı silindirik bir eğri olarak alalım. Bu durumda, eğrinin $d(s)$ küresel Darboux resmi sabit olur. Böylece $d(s) = a$ alınabilir. Bir c reel sayısı vardır öyle ki $\tau(s) = c\kappa(s)$ dir. Böylece $\cot \theta = c$ olacak şekilde θ sabit sayısı seçilebilir. Genelliği bozmadan $\sin \theta > 0$ olduğu farz edilebilir.

$$\xi(s) = \tilde{\xi}(s) - \langle \tilde{\xi}(s), a \rangle a$$

eğrisi düşünülürse, o zaman $\langle \xi(s), a \rangle = 0$ olur. Bu ise $\xi(s)$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması demektir.

$$a = \frac{\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}}$$

olduğundan dolayı, $\langle \tilde{\xi}'(s), a \rangle = \cos \theta$ elde edilir. Böylece,

$$\left\| \tilde{\xi}'(s) - \langle \tilde{\xi}'(s), a \rangle a \right\| = \sin \theta$$

elde edilir. Buradan,

$$\xi(s) + \left(\cot \theta \int_0^s \|\xi'(u)\| du \right) a = \tilde{\xi}(s) - s \cos \theta + s \cos \theta = \tilde{\xi}(s)$$

olur ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

4.1.7. Uyarı.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\xi}(s), a \rangle' &= \langle \tilde{\xi}'(s), a \rangle + \langle \tilde{\xi}(s), a' \rangle \\ \langle \tilde{\xi}(s), a \rangle' &= \cos \theta \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte her iki tarafın integrali alınır; $\langle \tilde{\xi}(s), a \rangle = \cos \theta s$ elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir [16].

4.1.8. Sonuç. Bir γ düzlemsel eğrisi bir çemberdir, gerek ve yeter şart, silindirik helislere dairesel helisler karşılık gelir [16].

4.1.8.İspat. 4.1.6. Teoreminin ispatındaki hesaplamalardan;

$$\kappa(t) = |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta$$

ve

$$\tau(t) = -\kappa_p(t) \cot \theta \sin^2 \theta$$

yazılabilir. Eğer γ bir çember ise, $\kappa_p(t)$ =sabit olacağından, $\kappa(t)$ =sabit ve $\tau(t) \neq 0$ olur. Bu ise bir eğrinin dairesel helis olması için gerek ve yeter şarttır. Bununla ispat tamamlanır.

4.1.9. Önerme. $\kappa \neq 0$ olmak üzere, bir regüler $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisini ele alalım. O zaman $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde bir J açık aralığı ve $\tilde{\delta} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ şeklinde bir tek dairesel helis mevcuttur öyle ki; $\tilde{\delta}(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$, $\tilde{\delta}$ eğrisinin eğriliği $\kappa(t_0)$ ve $\tilde{\delta}, \tilde{\gamma}$ eğrileri t_0 noktasında 3. basamaktan değme noktasına sahiplerdir [16].

4.1.9. İspat.

$$\tilde{\delta}(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0), \quad \tilde{\delta}'(t_0) = \tilde{\gamma}'(t_0), \quad \tilde{\delta}''(t_0) = \tilde{\gamma}''(t_0)$$

başlangıç şartlarıyla verilen, $\kappa_\delta(t) = \kappa(t_0)$ ve $\tau_\delta(t) = \tau(t_0)$ doğal denklemlerinden elde edilir. Burada, $\tilde{\delta}$ dairesel helisine, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin s_0 noktasındaki Oskülatör dairesel helis denir. Eğer $\tilde{\gamma}$ eğrisi bir silindirik helis ise, o zaman her iki eğrinin de küresel Darboux resimleri, bir sabit a vektörü olur. 4.1.6 Teoreminin ispatından,

$$\delta(s) = \tilde{\delta}(s) - \langle \tilde{\delta}(s), a \rangle a$$

eğrisi, bir düzlem eğrisine karşılık gelir. $\tilde{\delta}$ bir dairesel helis olduğundan, δ eğrisi de bir çemberdir. Kolayca gösterilebilir ki bu çember,

$$\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a$$

eğrisi ile, $s_0 = s(t_0)$ noktasında 3. basamaktan değme noktasına sahiptir.

i)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s_0) - \langle \tilde{\gamma}(s_0), a \rangle a &= \tilde{\delta}(t_0) - \langle \tilde{\gamma}(t_0), a \rangle a \\ \tilde{\gamma}(s_0) - s \cos \theta &= \tilde{\delta}(t_0) - s \cos \theta \end{aligned}$$

ve $\tilde{\gamma}(s_0) = \tilde{\delta}(t_0)$ olup, δ eğrisi γ eğrisine 0. basamaktan değişiyor denir.

ii)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(s_0) - \langle \tilde{\gamma}'(s_0), a \rangle a &= \tilde{\delta}'(t_0) - \langle \tilde{\gamma}'(t_0), a \rangle a \\ \tilde{\gamma}'(s_0) - \cos \theta &= \tilde{\delta}'(t_0) - \cos \theta \end{aligned}$$

ve $\tilde{\gamma}'(s_0) = \tilde{\delta}'(t_0)$ olup, δ eğrisi γ eğrisine 1. basamaktan değişiyor denir.

iii)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}''(s_0) - \langle \tilde{\gamma}''(s_0), a \rangle a &= \tilde{\delta}''(t_0) - \langle \tilde{\gamma}''(t_0), a \rangle a \\ \tilde{\gamma}''(s_0) &= \tilde{\delta}''(t_0) \end{aligned}$$

ve $\tilde{\gamma}''(s_0) = \tilde{\delta}''(t_0)$ olup, δ eğrisi γ eğrisine 2. basamaktan geçiyor denir.

iv)

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'''(s_0) - \langle \tilde{\gamma}'''(s_0), a \rangle a &= \tilde{\delta}'''(t_0) - \langle \tilde{\gamma}'''(t_0), a \rangle a \\ \tilde{\gamma}'''(s_0) &= \tilde{\delta}'''(t_0)\end{aligned}$$

ve $\tilde{\gamma}'''(s_0) = \tilde{\delta}'''(t_0)$ olup, δ eğrisi γ eğrisine 3. basamaktan geçiyor denir. Bu ise δ eğrisinin, γ nın s_0 noktasında eğrilik çemberi olması demektir. γ eğrisinin s_0 noktasındaki eğrilik merkezine, δ nın merkezi denir.

4.1.10. Tanım. $\mathbb{R}^3$ de düzlemsel bir γ eğrisinin eğrilik merkezlerinin geometrik yerine γ nın evolütü denir ve,

$$e_\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_p(s)} n(s)$$

şeklinde verilir. Burada $n(s)$, düzlemde $t(s)$ birim teğet vektörünün saat yönünün tersi yönünde $\frac{\pi}{2}$ oranda döndürülmesiyle elde edilen birim normal vektördür. Bir $\tilde{\gamma}(s)$ silindirik helisi için;

$$E_{\tilde{\gamma}(s)} = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2} N(s)$$

eğrisini göz önüne alalım. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}\langle E_{\tilde{\gamma}(s)}, a \rangle &= \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle - \langle \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a, a \rangle + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2} \langle N(s), a \rangle \\ &= \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2} \langle N(s), a \rangle\end{aligned}$$

olur. Burada

$$a = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$$

vektörü gösterildiğinden $\langle E_{\tilde{\gamma}(s)}, a \rangle = 0$ ve $\langle E'_{\tilde{\gamma}(s)}, a \rangle = 0$ elde edilir. Bu ise $E_{\tilde{\gamma}(s)}$ nin bir düzlemsel eğri olması demektir. Üstelik $E_{\tilde{\gamma}(s)}$ nin

$$\gamma(s) = \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a$$

eğrisinin evolütü olduğu gösterilebilir. $E_{\tilde{\gamma}(s)}$ eğrisine, $\tilde{\gamma}(s)$ silindirik helisinin düzlemsel evolütü denir [16].

4.1.11. Tanım. Birim hızlı küresel eğri $\gamma : I \rightarrow S^2$ olsun. σ, γ nın yay parametresi olmak üzere $t(\sigma) = \gamma'(\sigma)$ olsun. Bu taktirde

$$s(\sigma) = \gamma(\sigma) \times t(\sigma)$$

vektörü tanımlanabilir. Böylece γ boyunca ortonormal bir $\{\gamma(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya γ nın Sabban çatısı adı verilir [16].

4.1.12. Teorem. $\gamma : I \rightarrow S^2$ birim hızlı küresel eğrisini gözönüne alalım. σ, γ nın yay parametresi olmak üzere, γ nın Frenet-Serret formülü;

$$\begin{aligned}\gamma'(\sigma) &= t(\sigma) \\ t'(\sigma) &= -\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma) \\ s'(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)\end{aligned}$$

dir [16].

4.1.13. Tanım. $\kappa_g(\sigma), S^2$ de γ nın jeodezik eğriliği olmak üzere,

$$\kappa_g(\sigma) = \det(\gamma(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma))$$

şeklinde tanımlanır [16].

4.1.14. Teorem. S^2 de bir eğri γ olsun. Bu taktirde a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektör olmak üzere

$$\tilde{\gamma}(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \gamma(u) du + a \cot \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(u) du + c \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanan eğri bir Bertrand eğridir. Üstelik, tüm Bertrand eğriler bu metodla elde edilebilir [16].

4.1.14. İspat. $\tilde{\gamma}(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(\sigma) &= a(\gamma(\sigma) + \cot \theta s(\sigma)) \\ \tilde{\gamma}''(\sigma) &= a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))t(\sigma) \\ \tilde{\gamma}^{(3)}(\sigma) &= -a \cot \theta \kappa_g'(\sigma)t(\sigma) + a(1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))(-\gamma(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma))\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) eşitliği yardımıyla eğrilik ve torsiyon hesaplanırsa;

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2 \theta (1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))}{a}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Diğer yandan,

$$\tau(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında; $a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \cot \theta \tau(\sigma)) = 1$ olur ki bu eşitlik, $\tilde{\gamma}(s)$ nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir. Tersine, $\tilde{\gamma}(s)$ ni bir Bertrand eğrisi olarak alalım. Böylece sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır öyle ki; $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ dir. $a = A$ ve $\cot \theta = \frac{B}{a}$ diyelim. Şimdi,

$$\gamma(s) = \varepsilon(\sin \theta T(s) - \cos \theta B(s))$$

küresel eğrisini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \varepsilon(\kappa(s) + \cot \theta \tau(s)) \sin \theta N(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta N(s)\end{aligned}$$

yazılabilir. γ nın yay parametresi σ olarak alınırsa $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta$ olur. Üstelik,

$$\begin{aligned}a\gamma(s)\frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\sin \theta T(s) - \cos \theta B(s))\frac{\varepsilon}{a} \sin \theta \\ &= \sin \theta(\sin \theta T(s) - \cos \theta B(s))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}a \cot \theta \gamma(s) \times \frac{d\gamma}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} &= a \cot \theta \varepsilon(\sin \theta T(s) - \cos \theta B(s)) \times \frac{\varepsilon}{a} \sin \theta N(s) \\ &= \cos \theta(\sin \theta B(s) - \cos \theta T(s))\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
& a \int_0^\sigma \gamma(u) du + a \cot \theta \int_0^\sigma s(u) du \\
&= \int_{s_0}^s \sin \theta (\sin \theta T(t) - \cos \theta B(t)) dt + \int_{s_0}^s \cos \theta (\sin \theta B(t) + \cos \theta T(t)) dt \\
&= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\gamma}(s) + c
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.15. Sonuç. Küresel bir γ eğrisinin bir çember olması için gerek ve yeter şart; Bertrand eğrilerine, dairesel helislerin karşılık gelmesidir [16].

4.1.15. İspat. 3.1.14. Teoreminin ispatından;

$$\kappa'(\sigma) = \frac{-\varepsilon \kappa'(\sigma) \cos \theta \sin \theta}{a}, \tau'(\sigma) = \frac{\kappa'(\sigma) \sin^2 \theta}{a}$$

yazılabilir. Eğer bu γ eğrisi bir çember olması için gerek ve yeter şart; $\kappa_g = \text{sabit}$ ve $\tau_g = 0$ olmasıdır. Dolayısıyla $\kappa'_g(\sigma) = 0$ olur. Buna göre; $\kappa'(\sigma) = 0$ ve $\tau'(\sigma) = 0$ elde edilir. Bu ise $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisinin dairesel olması demektir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.16. Tanım. $\kappa_g \neq 0$ olacak şekilde bir küresel $\gamma : I \rightarrow S^2$ eğrisini ele alalım. $\forall \sigma_0 \in I$ için

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma_0)^2 + 1}} (\kappa_g(\sigma_0) \gamma(\sigma_0) + s(\sigma_0))$$

birim vektörünü ve

$$S^1(e_0, c_0) = \{x \in S^2 : \langle x, e_0 \rangle = c_0\}$$

çemberi düşünülürse, burada

$$c_0 = \frac{\kappa_g(\sigma_0)}{\sqrt{\kappa_g(\sigma_0)^2 + 1}}$$

dir. O zaman, $h_{e_0}(x) = \langle x, e_0 \rangle - c_0$ ile verilen $h_{e_0} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ yükseklik fonksiyonunu tanımlayalım. Kolayca hesap edilebilir ki;

$$h_{e_0} \circ \gamma(\sigma_0) = \frac{d}{d\sigma} (h_{e_0} \circ \gamma)(\sigma_0) = \frac{d^2}{d\sigma^2} (h_{e_0} \circ \gamma)(\sigma_0) = 0$$

dır. Bu ise, $S^1(e_0, c_0)$ çemberinin, γ nın $\gamma(\sigma_0)$ noktasındaki eğrilik çemberi olması demektir. Üstelik, eğer $(h_{e_0} \circ \gamma)^{(3)}(\sigma_0)$ ve $(h_{e_0} \circ \gamma)^{(4)}(\sigma_0)$ hesap edilirse, o zaman gösterilebilir ki, $S^1(e_0, c_0)$ ve γ eğrileri, $\gamma(\sigma_0)$ noktasında 4. basamaktan değme noktasına sahiptir, gerek ve yeter şart; $\kappa'_g(\sigma) = 0$ ve $\kappa''_g(\sigma) \neq 0$ dır. Bu argümanlar, γ nın $\gamma(\sigma_0)$ noktasındaki eğrilik merkezinin, e_0 ile verildiğini gösterir. γ nin eğrilik merkezinin yerine

$$e_\gamma(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\kappa_g(\sigma)^2 + 1}}(\kappa_g(\sigma)\gamma(\sigma) + s(\sigma))$$

denklemleri ile verilen γ nın küresel evolütü adı verilir [16].

4.1.17. Önerme. $\gamma : I \rightarrow S^2$ bir küresel eğri ve bu küresel eğriye karşılık gelen Bertrand eğrisi de $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. O zaman $\tilde{\gamma}$ nın küresel Darboux resmi γ nın küresel evolütüne eşittir [16].

4.1.17. İspat. 4.1.14. Teoreminin ispatından

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2 \theta (1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))}{a} \quad \text{ve} \quad \tau(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} T(\sigma) &= a(\gamma(\sigma) + \cot \theta s(\sigma)) \frac{d\sigma}{ds}, \\ N(\sigma) &= \varepsilon t(\sigma) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$B(\sigma) = T(\sigma) \times N(\sigma)$$

olduğundan

$$B(\sigma) = \varepsilon \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) (s(\sigma) - \cot \theta \gamma(\sigma))$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} D(\sigma) &= \tau(\sigma)T(\sigma) + \kappa(\sigma)B(\sigma) \\ &= \frac{d\sigma}{ds} (s(\sigma) + \kappa(\sigma)\gamma(\sigma)) \end{aligned}$$

olur.

$$d(\sigma) = \frac{D(\sigma)}{\|D(\sigma)\|}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
d(\sigma) &= \frac{\frac{d\sigma}{ds}(s(\sigma) + \kappa(\sigma)\gamma(\sigma))}{\frac{d\sigma}{ds}\sqrt{1 + \kappa_g(\sigma)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa_g(\sigma)^2}}(\kappa(\sigma)\gamma(\sigma) + s(\sigma)) \\
d(\sigma) &= e_\gamma(\sigma)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla ispat tamamlanır.

4.1.18. Teorem. $\gamma : I \rightarrow S^2$ bir küresel eğri ve $\kappa = 0$ olmak üzere bu küresel eğriye karşılık gelen Bertrand eğrilerinden biri $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir [16].

- 1) $\kappa'_g(\sigma_0) = 0$ ve $\kappa''_g(\sigma_0) \neq 0$
- 2) $\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma_0) = 0$ ve $\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma_0) \neq 0$
- 3) $\kappa'(\sigma_0) = \tau'(\sigma_0) = 0, \kappa''(\sigma_0) \neq 0$ ve $\tau''(\sigma_0) \neq 0$.

4.1.18. İspat. 4.1.14 Teoreminin ispatından

$$\kappa(\sigma) = \varepsilon \frac{\sin^2 \theta (1 - \cot \theta \kappa_g(\sigma))}{a} \quad \text{ve} \quad \tau(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta (\kappa_g(\sigma) + \cot \theta)}{a}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\kappa'(\sigma) = \frac{-\sin^2 \theta \cot \theta \kappa'_g(\sigma)}{a} \quad \text{ve} \quad \tau'(\sigma) = \frac{\sin^2 \theta \kappa'_g(\sigma)}{a}$$

dir. $\kappa'_g(\sigma_0) = 0$ alınırsa,

$$\kappa'(\sigma_0) = \tau'(\sigma_0) = 0 \quad \text{ve} \quad \kappa''_g(\sigma_0) = 0$$

ve,

$$\kappa''(\sigma_0) \neq 0, \tau''(\sigma_0) \neq 0$$

elde edilir ki, 1) şartı 3) şartını gerektirir. $\kappa \neq 0$ olduğundan $\sin \theta - \kappa_g(\sigma) \cos \theta \neq 0$ dir. Böylece,

$$\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma) = \frac{\kappa_g(\sigma) \sin \theta + \cos \theta}{\varepsilon \sin \theta - \cos \theta \kappa_g(\sigma)}$$

olur. O zaman aşağıdaki hesaplamalar yapılabilir.

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma) = \frac{\varepsilon\kappa'_g(\sigma)}{(\sin\theta - \kappa_g(\sigma)\cos\theta)^2}$$

ve

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma) = \frac{\varepsilon\{\kappa''_g(\sigma)(\sin\theta - \kappa_g(\sigma)\cos\theta)^2 + 2\kappa'_g(\sigma)^2(\sin\theta - \kappa_g(\sigma)\cos\theta)\cos\theta\}}{(\sin\theta - \kappa_g(\sigma)\cos\theta)^4}$$

elde edilir. Buradan $\kappa'_g(\sigma_0) = 0$ olduğunda $\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(\sigma_0) = 0$ olacağı ve $\kappa''_g(\sigma_0) \neq 0$ olacağı aşıkardır. Bununla ispat tamamlanır.

4.1.19. Örnek. Eğer düzlemsel bir $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$ ve $a = (0, 0, 1)$ doğrusunu seçersek, bu düzlemsel γ eğrisine karşılık gelen silindirik helis, 4.1.6. Teoremden

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(t) &= \gamma(t) + \left(\cot\theta \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du\right) a + c \\ &= (x_1(t), x_2(t), 0) + (\cot\theta \int \sqrt{x_1'(t)^2, x_2'(t)^2} dt) a \\ &= (x_1(t), x_2(t), c \int \sqrt{x_1'(t)^2, x_2'(t)^2} dt)\end{aligned}$$

olup, burada c sabit bir sayıdır.

Şimdi, düzlemsel bir $\gamma(t) = (2\cos\tau, \sin\tau, 0)$ eğrisini göz önüne alalım. 4.1.6. Teoremden,

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(t) &= (2\cos\tau, \sin\tau, 0) + (\cot\theta \int_0^\tau \|\gamma'(\tau)\| d\tau) a + c \\ &= (2\cos\tau, \sin\tau, 0) + (\cot\theta \int_0^\tau \sqrt{1 + 3\sin^2(\tau)} d\tau)\end{aligned}$$

ve

$$E(\tau, m) = \int_0^\tau \sqrt{1 + m\sin^2(\tau)} d\tau$$

denirse, $\tilde{\gamma}(t) = (2\cos\tau, \sin\tau, E(\tau, 3))$ elde edilir. $\tilde{\gamma}$ eğrisinin düzlemsel evolütü,

$$\begin{aligned}E_{\tilde{\gamma}(s)} &= \tilde{\gamma}(s) - \langle \tilde{\gamma}(s), a \rangle a + \frac{\kappa(s)}{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2} N(s) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right) \cos\theta(1 - 3\sin^2\theta), -3\sin\theta, 0\end{aligned}$$

şeklindedir [16].

4.2. Üç Boyutlu Lorenz Uzayında Düzlem Eğrileri ve Silindirik Helisler

Bu bölüm çalışmamızın orjinal kısmını oluşturmaktadır. [16] da yapılan çalışmayı esas olarak alıp, üç boyutlu Lorenz uzayında düzlem eğrilerinden silindirik helisleri, silindirik helislerden Bertrand eğrilerin elde edilebileceğini inceledik. Ayrıca S_1^2 Lorenz küresi ve H_1^2 hiperbolik kürede eğriler için Sabban çatıları, ve buna bağlı olarak Bertrand eğrilerin elde edilebileceğini gösterdik.

4.2.1. Tanım. $\kappa(s) \neq 0$ olacak şekilde bir $\tilde{\gamma} : I \rightarrow L^3$ eğrisini göz önüne alalım. Eğer $\tilde{\gamma}$ eğrisinin teğet doğruları sabit bir doğru ile sabit bir açı yapıyorsa, $\tilde{\gamma}$ eğrisine bir silindirik helis adı verilir. Bilindiği gibi, $\tilde{\gamma}(s)$ eğrisi bir silindirik helistir gerek ve yeter şart $\frac{\tau}{\kappa}(s) = \text{sabit}$ tir. Eğer $\kappa(s) \neq 0$ ve $\tau(s) = \text{sabit}$ ise eğriye bir silindirik helistir denir.

4.2.2. Tanım. L^3 de bir eğri α olsun. Eğer bu eğrinin torsiyonu sıfır ise o zaman düzlemseldir denir.

4.2.3. Teorem. L^3 uzayındaki space-like düzlemsel bir eğri $\eta_s(t)$ olsun. θ sabit bir sayı $\vec{a}$, c sabit vektörler olmak üzere,

$$\tilde{\eta}_s(t) = \eta_s(t) + \left(\cot \theta \int_{t_0}^t \|\eta'_s(u)\| du \right) \vec{a} + c$$

eğrisi bir silindirik helistir. Üstelik tüm silindirik helisler bu methodla elde edilebilir.

4.2.3. İspat. İlk iddiamın ispatı için, $\eta_s(t)$ eğrisini birim hızlı bir eğri olarak alıp, 3.1.12. Tanımının 2. durumundaki Frenet eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}'_s(t) &= \eta'_s(t) + \cot \theta \vec{a}, \\ \tilde{\eta}''_s(t) &= \kappa_p(t) n(t) \\ \tilde{\eta}^{(3)}_s(t) &= \kappa'_p(t) n(t) + (\kappa_p(t))^2 t(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. (2.1) eşitliği yardımıyla $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t) &= (t(t) + \cot \theta \vec{a}) \times (\kappa_p(t)n(t)) \\
&= \kappa_p(t)(t(t) \times n(t)) + \kappa_p(t)(\cot \theta (\vec{a} \times n(t))) \\
&= \kappa_p(t)(-b(t) + \cot \theta t(t))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t)\| &= \sqrt{|g(\kappa_p(t)(-b(t) + \cot \theta t(t)), \kappa_p(t)(-b(t) + \cot \theta t(t)))|} \\
&= \sqrt{|(\kappa_p(t))^2(1 + \cot^2 \theta)|} \\
&= |\kappa_p(t)| \frac{1}{\sin \theta}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\eta}_s'(t)\| &= \sqrt{|g(t(t) + \cot \theta \vec{a}, t(t) + \cot \theta \vec{a})|} \\
&= \sqrt{|1 + \cot^2 \theta|} \\
&= \frac{1}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

olur ki;

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t)\|}{\|\tilde{\eta}_s'(t)\|^3} \\
&= \frac{|\kappa_p(t)| \frac{1}{\sin \theta}}{\left(\frac{1}{\sin \theta}\right)^3} \\
\kappa(t) &= |\kappa_p(t)| \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi torsiyonu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
g\left(\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t), \tilde{\eta}_s^{(3)}(t)\right) &= g\left(\kappa_p(t)(-b(t) + \cot \theta t(t)), \kappa_p'(t)n(t) + (\kappa_p(t))^2 t(t)\right) \\
&= (\kappa_p(t))^3 \cot \theta \\
\tau(t) &= \frac{g\left(\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t), \tilde{\eta}_s^{(3)}(t)\right)}{\|\tilde{\eta}_s'(t) \times \tilde{\eta}_s''(t)\|^2} \\
&= \frac{(\kappa_p(t))^3 \cot \theta}{(|\kappa_p(t)| \frac{1}{\sin \theta})^2}
\end{aligned}$$

$$\tau(t) = \kappa_p(t) \cos \theta \sin \theta \quad (4.3)$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} &= \frac{\kappa_p(t) \cos \theta \sin \theta}{|\kappa_p(t)| \sin^2 \theta} \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

yani, $\frac{\tau(t)}{\kappa(t)}$ =sabit olur. Bu ise $\tilde{\eta}_s(t)$ eğrisinin silindirik helis olması demektir. Bununla ilk iddianın ispatı tamamlanır.

İkinci iddia için $\tilde{\eta}_s(s)$ eğrisini birim hızlı silindirik bir eğri olarak alalım. Bu durumda, eğrinin $d(s)$ küresel Darboux resmi sabit olur. Böylece $d(s) = \vec{a}$ alınabilir. Bir c reel sayısı vardır öyle ki $\tau(s) = c\kappa(s)$ dir. Böylece $\tan \theta = c$ olacak şekilde θ sabit sayısı seçilebilir. Genelliği bozmadan $\cos \theta > 0$ olduğu farz edilebilir.

$$\eta_s(s) = \tilde{\eta}_s(s) - g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a}) \vec{a}$$

eğrisi düşünülürse, o zaman $\langle \eta(s), a \rangle = 0$ olur. Bu ise $\eta(s)$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması demektir.

$$\vec{a} = \frac{-\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}}$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} g(\tilde{\eta}_s'(s), \vec{a}) &= g(T(s), \vec{a}) \\ &= g\left(T(s), \frac{-\tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}}\right) \\ &= \frac{-\tau(s)}{\sqrt{\tau(s)^2 + \kappa(s)^2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur. (4.2) ve (4.3) eşitlikleri (4.4) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} g(\tilde{\eta}_s'(s), \vec{a}) &= \frac{-\kappa_p(t) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{(\kappa_p(t) \cos \theta \sin \theta)^2 + (|\kappa_p(t)| \sin^2 \theta)^2}} \\ g(\tilde{\eta}_s'(s), \vec{a}) &= -\cos \theta \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|\eta'_s(s)\| = \|\tilde{\eta}'_s(s) - g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) \vec{a}\|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}'_s(s) - g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) \vec{a}\| &= \sqrt{\|\tilde{\eta}'_s(s) - g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) \vec{a}\|, \|\tilde{\eta}'_s(s) - g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) \vec{a}\|} \\ &= \sqrt{|g(T(s) - (-\cos \theta \vec{a}), T(s) - (-\cos \theta \vec{a}))|} \\ &= \sqrt{|1 - (\cos \theta)^2|} \\ \|\tilde{\eta}'_s(s) - g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) \vec{a}\| &= \sin \theta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında

$$\begin{aligned} \eta_s(s) + \left(\cot \theta \int_0^s \|\eta'_s(u)\| du \right) \vec{a} &= \tilde{\eta}_s(s) - g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a}) \vec{a} - s \cot \theta \sin \theta \\ &= \tilde{\eta}_s(s) - (-s \cos \theta) - s \cos \theta \\ &= \tilde{\eta}_s(s) \end{aligned}$$

yani,

$$\eta_s(s) + \left(\cot \theta \int_0^s \|\eta'_s(u)\| du \right) \vec{a} = \tilde{\eta}_s(s)$$

olur ki bu da ikinci iddianın ispatını tamamlar.

4.2.4. Uyarı.

$$\begin{aligned} g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a})' &= g(\tilde{\eta}'_s(s), \vec{a}) + g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a}') \\ g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a})' &= \cos \theta \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte her iki tarafın integrali alınır;

$$g(\tilde{\eta}_s(s), \vec{a}) = \cos \theta s$$

elde edilir.

4.2.5. Teorem. L^3 uzayındaki time-like düzlemsel bir eğri $\eta_t(t)$ olsun. θ sabit bir sayı $\vec{a}$, c sabit vektörler olmak üzere,

$$\tilde{\eta}_t(t) = \eta_t(t) + \left(\tanh \theta \int_{t_0}^t \|\eta'_t(u)\| du \right) \vec{a} + c$$

eğrisi bir silindirik helistir. Üstelik tüm silindirik helisler bu methodla elde edilebilir.

4.2.5. İspat. İlk iddianın ispatı için, $\eta_t(t)$ time-like eğrisini birim hızlı bir eğri olarak alıp, 3.1.12. Tanımının 1. durumundaki Frenet eşitlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t'(t) &= \eta_t'(t) + \tanh \theta \vec{a}, \\ \tilde{\eta}_t''(t) &= \kappa_p(t)n(t) \\ \tilde{\eta}_t^{(3)}(t) &= \kappa_p'(t)n(t) + (\kappa_p(t))^2 t(t)\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.1) eşitliği yardımıyla $\kappa(t)$ ve $\tau(t)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_t'(t) \times \tilde{\eta}_t''(t) &= (t(t) + \tanh \theta \vec{a}) \times (\kappa_p(t)n(t)) \\ &= \kappa_p(t)(t(t) \times n(t)) + \kappa_p(t)(\tanh \theta (\vec{a} \times n(t))) \\ &= \kappa_p(t)(-b(t) + \tanh \theta t(t))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\tilde{\eta}_t'(t) \times \tilde{\eta}_t''(t)\| &= \sqrt{|g(\kappa_p(t)(-b(t) + \tanh \theta t(t)), \kappa_p(t)(-b(t) + \tanh \theta t(t)))|} \\ &= \sqrt{|(\kappa_p(t))^2(1 - \tanh^2 \theta)|} \\ &= |\kappa_p(t)| \frac{1}{\cosh \theta}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\eta}_t'(t)\| &= \sqrt{|g(t(t) + \tanh \theta \vec{a}, t(t) + \tanh \theta \vec{a})|} \\ &= \sqrt{|\tanh^2 \theta - 1|} \\ &= \frac{1}{\cosh \theta}\end{aligned}$$

olur ki;

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\tilde{\eta}_t'(t) \times \tilde{\eta}_t''(t)\|}{\|\tilde{\eta}_t'(t)\|^3} \\ &= \frac{|\kappa_p(t)| \frac{1}{\cosh \theta}}{\left(\frac{1}{\cosh \theta}\right)^3} \\ \kappa(t) &= |\kappa_p(t)| \cosh^2 \theta\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi torsiyonu hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
g\left(\tilde{\eta}'_t(t) \times \tilde{\eta}''_t(t), \tilde{\eta}_t^{(3)}(t)\right) &= g\left(\kappa_p(t)(b(t) + \tanh \theta t(t)), \kappa'_p(t)n(t) + (\kappa_p(t))^2 t(t)\right) \\
&= -(\kappa_p(t))^3 \tanh \theta
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \frac{g\left(\tilde{\eta}'_t(t) \times \tilde{\eta}''_t(t), \tilde{\eta}_t^{(3)}(t)\right)}{\left\|\tilde{\eta}'_t(t) \times \tilde{\eta}''_t(t)\right\|^2} \\
&= \frac{-(\kappa_p(t))^3 \tanh \theta}{(|\kappa_p(t)| \frac{1}{\cosh \theta})^2}
\end{aligned}$$

$$\tau(t) = -\kappa_p(t) \cosh \theta \sinh \theta \tag{4.6}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında,

$$\begin{aligned}
\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} &= \frac{-\kappa_p(t) \cosh \theta \sinh \theta}{|\kappa_p(t)| \cosh^2 \theta} \\
&= -\frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \\
&= -\tanh \theta \\
\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} &= \text{sabit}
\end{aligned}$$

olur. Bu ise $\tilde{\eta}_t(t)$ eğrisinin silindirik helis olması demektir. Bununla ilk iddianın ispatı tamamlanır.

İkinci iddia için $\tilde{\eta}_t(t)$ eğrisini birim hızlı silindirik bir eğri olarak alalım. Bu durumda, eğrinin $d(t)$ küresel Darboux resmi sabit olur. Böylece $d(t) = \vec{a}$ alınabilir. Bir c reel sayısı vardır öyle ki $\tau(t) = c\kappa(t)$ dir. Böylece $-\tanh \theta = c$ olacak şekilde θ sabit sayısı seçilebilir. Genelliği bozmadan $\cos \theta > 0$ olduğu farz edilebilir.

$\eta_t(t) = \tilde{\eta}_t(t) - g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}) \vec{a}$ eğrisi düşünülürse, o zaman $g(\eta_t(t), \vec{a}) = 0$ olur. Bu ise $\eta_t(t)$ eğrisinin düzlemsel bir eğri olması demektir.

$$\vec{a} = \frac{\tau(t)T(t) - \kappa(t)B(t)}{\sqrt{\tau(t)^2 + \kappa(t)^2}}$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}
g(\tilde{\eta}'_t(t), a) &= g(T(t), a) \\
&= g\left(T(t), \frac{\tau(t)T(t) - \kappa(t)B(t)}{\sqrt{\tau(t)^2 + \kappa(t)^2}}\right) \\
&= \frac{-\tau(t)}{\sqrt{\tau(t)^2 + \kappa(t)^2}}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri (4.7) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) &= \frac{\kappa_p(t) \cosh \theta \sinh \theta}{\sqrt{(-\kappa_p(t) \cosh \theta \sinh \theta)^2 + (|\kappa_p(t)| \cosh^2 \theta)^2}} \\
&= \frac{\kappa_p(t) \cosh \theta \sinh \theta}{\sqrt{(\kappa_p(t) (\cosh \theta))^2 (-\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta)}} \\
g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) &= \sinh \theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|\eta'_t(t)\| = \|\tilde{\eta}'_t(t) - g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) \vec{a}\|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\eta}'_t(t) - g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) \vec{a}\| &= \sqrt{\|\tilde{\eta}'_t(t) - g(\tilde{\eta}'_t(s), \vec{a}) \vec{a}\|, \|\tilde{\eta}'_t(t) - g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) \vec{a}\|} \\
&= \sqrt{|g(T(t) - \sinh \theta \vec{a}, T(t) - \sinh \theta \vec{a})|} \\
&= \sqrt{|-1 - \sinh^2 \theta|} \\
&= \sqrt{|(-\cosh^2 \theta)|}
\end{aligned}$$

$$\|\tilde{\eta}'_t(t) - g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) \vec{a}\| = \cosh \theta$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında

$$\begin{aligned}
\eta_t(t) + \left(\tanh \theta \int_0^s \|\eta'_t(u)\| du\right) \vec{a} &= \tilde{\eta}_t(t) - g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}) \vec{a} + s \tanh \theta \cosh \theta \\
&= \tilde{\eta}_t(t) - t \sinh \theta + t \sinh \theta \\
&= \tilde{\eta}_t(t)
\end{aligned}$$

yani,

$$\eta_t(t) + \left(\tanh \theta \int_0^s \|\eta'_t(u)\| du\right) \vec{a} = \tilde{\eta}_t(t)$$

olur ki bu da ikinci iddianın ispatını tamamlar.

4.2.6. Uyarı.

$$\begin{aligned} g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}') &= g(\tilde{\eta}'_t(t), \vec{a}) + g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}') \\ g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}') &= \sinh \theta \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte her iki tarafın integrali alınır;

$$g(\tilde{\eta}_t(t), \vec{a}') = \sinh \theta t$$

elde edilir.

4.2.7. Tanım. Birim hızlı küresel eğri $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ, γ nın yay parametresi olmak üzere $t(\sigma) = \gamma'(\sigma)$ olsun. Bu taktirde

$$s(\sigma) = \gamma(\sigma) \times t(\sigma)$$

vektörü tanımlanabilir. Böylece γ boyunca ortonormal bir $\{\gamma(\sigma), t(\sigma), s(\sigma)\}$ çatısı elde edilir. Bu çatıya γ nın Sabban çatısı adı verilir.

4.2.8. Teorem. L^3 de Lorenzian küre S_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel space-like eğri $\gamma_s : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ, γ_s nin yay parametresi olmak üzere, γ_s nin Frenet-Serret formülü;

$$\begin{aligned} \gamma'_s(\sigma) &= t(\sigma) \\ t'(\sigma) &= -\gamma_s(\sigma) - \kappa_g(\sigma)s(\sigma) \\ s'(\sigma) &= -\kappa_g(\sigma)t(\sigma) \end{aligned} \tag{4.8}$$

dir. Burada $\kappa_g(\sigma), S_1^2$ de γ_s nin $\kappa_g(\sigma) = \det(\gamma_s(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma))$ ile verilen jeodezik eğriliğidir.

$$\begin{aligned} \kappa_g(\sigma) &= \det(\gamma_s(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma)) \\ &= g(\gamma_s \times t, t') \\ &= g(s, t') \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $g(\gamma'_s, t) = 1$ dir.

4.2.8. İspat.

$$\gamma'_s(\sigma) = a\gamma_s(\sigma) + bt(\sigma) + cs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(\gamma'_s, \gamma_s) &= a \Rightarrow a = 0 & g(\gamma_s, \gamma_s) &= 1 \\ g(\gamma'_s, t) &= b \Rightarrow b = 1 & g(t, t) &= 1 \\ g(\gamma'_s, s) &= -c \Rightarrow c = 0 & g(s, s) &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$\gamma'_s(\sigma) = t(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$t'(\sigma) = d\gamma_s(\sigma) + et(\sigma) + fs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(t', \gamma_s) &= d \Rightarrow d = -1 & g(\gamma_s, \gamma_s) &= 1, & (g(t, \gamma_s) &= g(t', \gamma_s) + g(t, \gamma'_s)) \\ g(t', t) &= e \Rightarrow e = 0 & g(t, t) &= 1 \\ g(t', s) &= -f \Rightarrow f = -\kappa_g & g(s, s) &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$t'(\sigma) = -\gamma_s(\sigma) - \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$s'(\sigma) = h\gamma_s(\sigma) + mt(\sigma) + ns(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(s', \gamma_s) &= h \Rightarrow h = 0 & g(\gamma_s, \gamma_s) &= 1 \\ g(s', t) &= m \Rightarrow m = -\kappa_g & g(t, t) &= 1, & (g(s, t) &= g(s', t) + g(s, t')) \\ g(s', s) &= n \Rightarrow n = 0 & g(s, s) &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$s'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.9. Teorem. L^3 de Lorenzian küre S_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel time-like eğri $\gamma_t : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ , γ_t nin yay parametresi olmak üzere, γ_t nin Frenet-Serret formülü

$$\begin{aligned}\gamma'_t(\sigma) &= -t(\sigma) \\ t'(\sigma) &= -\gamma_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma) \\ s'(\sigma) &= \kappa_g(\sigma)t(\sigma)\end{aligned}\tag{4.9}$$

dir. Burada $\kappa_g(\sigma), S_1^2$ de γ_t nin $\kappa_g(\sigma) = \det(\gamma_t(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma))$ ile verilen jeodezik eğriligidir.

$$\begin{aligned}\kappa_g(\sigma) &= \det(\gamma_t(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma)) \\ &= g(\gamma_t \times t, t') \\ &= g(s, t')\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $g(\gamma'_t, t) = 1$ dir.

4.2.9. İspat.

$$\gamma'_t(\sigma) = a\gamma_t(\sigma) + bt(\sigma) + cs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}g(\gamma'_t, \gamma_t) &= a \Rightarrow a = 0 & g(\gamma_t, \gamma_t) &= 1 \\ g(\gamma'_t, t) &= -b \Rightarrow b = -1 & g(t, t) &= -1 \\ g(\gamma'_t, s) &= c \Rightarrow c = 0 & g(s, s) &= 1\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$\gamma'_t(\sigma) = -t(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$t'(\sigma) = d\gamma_t(\sigma) + et(\sigma) + fs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$g(t', \gamma_t) = d \Rightarrow d = -1 \quad g(\gamma_t, \gamma_t) = 1, \quad (g(t, \gamma_t) = g(t', \gamma_t) + g(t, \gamma'_t))$$

$$g(t', t) = e \Rightarrow e = 0 \quad g(t, t) = -1$$

$$g(t', s) = f \Rightarrow f = \kappa_g \quad g(s, s) = 1$$

elde edilir ki bu da,

$$t'(\sigma) = -\gamma_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$s'(\sigma) = h\gamma_t(\sigma) + mt(\sigma) + ns(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$g(s', \gamma_t) = h \Rightarrow h = 0 \quad g(\gamma_t, \gamma_t) = 1$$

$$g(s', t) = -m \Rightarrow m = \kappa_g \quad g(t, t) = -1, \quad (g(s, t) = g(s', t) + g(s, t'))$$

$$g(s', s) = n \Rightarrow n = 0 \quad g(s, s) = 1$$

elde edilir ki bu da,

$$s'(\sigma) = \kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.10. Teorem. L^3 de Hiperbolik küre H_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel space-like eğri $\mu_s : I \rightarrow H_1^2$ olsun. σ, μ_s nin yay parametresi olmak üzere, μ_s nin Frenet-Serret formülü;

$$\mu'_s(\sigma) = t(\sigma) \tag{4.10}$$

$$t'(\sigma) = \mu_s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

$$s'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

dir. Burada $\kappa_g(\sigma)$, H_1^2 de μ_s nin $\kappa_g(\sigma) = \det(\mu_s(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma))$ ile verilen jeodezik eğriliğidir.

$$\begin{aligned}\kappa_g(\sigma) &= \det(\mu_s(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma)) \\ &= g(\mu_s \times t, t') \\ &= g(s, t')\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $g(\mu'_s, t) = 1$ dir.

4.2.10. İspat.

$$\mu'_s(\sigma) = a\mu_s(\sigma) + bt(\sigma) + cs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}g(\mu'_s, \mu_s) &= -a \Rightarrow a = 0 & g(\mu_s, \mu_s) &= -1 \\ g(\mu'_s, t) &= b \Rightarrow b = 1 & g(t, t) &= 1 \\ g(\mu'_s, s) &= c \Rightarrow c = 0 & g(s, s) &= 1\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$\mu'_s(\sigma) = t(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$t'(\sigma) = d\mu_s(\sigma) + et(\sigma) + fs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}g(t', \mu_s) &= -d \Rightarrow d = 1 & g(\mu_s, \mu_s) &= -1 & (g(t, \mu_s) &= g(t', \mu_s) + g(t, \mu'_s)) \\ g(t', t) &= e \Rightarrow e = 0 & g(t, t) &= 1 \\ g(t', s) &= f \Rightarrow f = \kappa_g & g(s, s) &= 1\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$t'(\sigma) = \mu_s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$s'(\sigma) = h\mu_s(\sigma) + mt(\sigma) + ns(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(s', \mu_s) &= -h \Rightarrow h = 0 & g(\mu_s, \mu_s) &= -1 \\ g(s', t) &= m \Rightarrow m = -\kappa_g & g(t, t) &= 1, \quad (g(s, t) = g(s', t) + g(s, t')) \\ g(s', s) &= n \Rightarrow n = 0 & g(s, s) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$s'(\sigma) = -\kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.11. Teorem. L^3 de Hiperbolik küre H_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel time-like eğri $\mu_t : I \rightarrow H_1^2$ olsun. σ, μ_t nin yay parametresi olmak üzere, μ_t nin Frenet-Serret formülü;

$$\begin{aligned} \mu_t'(\sigma) &= -t(\sigma) \\ t'(\sigma) &= \mu_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma) \\ s'(\sigma) &= \kappa_g(\sigma)t(\sigma) \end{aligned} \tag{4.11}$$

dir. Burada $\kappa_g(\sigma)$, H_1^2 de μ_s nin $\kappa_g(\sigma) = \det(\mu_t(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma))$ ile verilen jeodezik eğriligidir.

$$\begin{aligned} \kappa_g(\sigma) &= \det(\mu_t(\sigma), t(\sigma), t'(\sigma)) \\ &= g(\mu_t \times t, t') \\ &= g(s, t') \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $g(\mu_t', t) = 1$ dir.

4.2.11. İspat.

$$\mu_t'(\sigma) = a\mu_t(\sigma) + bt(\sigma) + cs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(\mu_t', \mu_t) &= -a \Rightarrow a = 0 & g(\mu_t, \mu_t) &= -1 \\ g(\mu_t', t) &= -b \Rightarrow b = -1 & g(t, t) &= 1 \\ g(\mu_t', s) &= c \Rightarrow c = 0 & g(s, s) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$\mu'_t(\sigma) = -t(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$t'(\sigma) = d\mu_t(\sigma) + et(\sigma) + fs(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(t', \mu_t) &= -d \Rightarrow d = 1 & g(\mu_t, \mu_t) &= -1 & (g(t, \mu_t) &= g(t', \mu_t) + g(t, \mu'_t)) \\ g(t', t) &= -e \Rightarrow e = 0 & g(t, t) &= -1 \\ g(t', s) &= f \Rightarrow f = \kappa_g & g(s, s) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$t'(\sigma) = \mu_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)$$

dir. Benzer şekilde;

$$s'(\sigma) = h\mu_t(\sigma) + mt(\sigma) + ns(\sigma)$$

olarak yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned} g(s', \mu_t) &= -h \Rightarrow h = 0 & g(\mu_t, \mu_t) &= -1 \\ g(s', t) &= -m \Rightarrow m = \kappa_g & g(t, t) &= -1 & (g(s, t) &= g(s', t) + g(s, t')) \\ g(s', s) &= n \Rightarrow n = 0 & g(s, s) &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da,

$$s'(\sigma) = \kappa_g(\sigma)t(\sigma)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.12. Teorem. L^3 de Lorenzian küre S_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel space-like eğri $\Gamma_s : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ , Γ_s nin yay parametresi olmak üzere,

$$\tilde{\Gamma}_s(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \Gamma_s(u) du + a \tanh \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(u) du + c \quad (4.12)$$

eğrisini ele alalım. Burada a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektördür. (4.12) ile verilen eğri bir Bertrand eğrisidir. Üstelik, tüm Bertrand eğrileri bu methodla elde edilebilir.

4.2.12. İspat.

$\tilde{\Gamma}_s(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu (4.8) eşitliği yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) &= a(\Gamma_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)) \\ \tilde{\Gamma}_s''(\sigma) &= a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))t(\sigma) \\ \tilde{\Gamma}_s^{(3)}(\sigma) &= -a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)t(\sigma) + (-a)(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))(\Gamma_s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)) \\ \tilde{\Gamma}_s^{(3)}(\sigma) &= \Gamma_s(\sigma) [a(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) + t(\sigma) [-a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] \\ &\quad + s(\sigma) [a\kappa_g(\sigma)(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)]\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) eşitliği yardımıyla eğrilik ve torsiyon hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma) &= \begin{vmatrix} -\Gamma_s(\sigma) & t(\sigma) & s(\sigma) \\ a & 0 & a \tanh \theta \\ 0 & a - a \tanh \theta \kappa_g(\sigma) & 0 \end{vmatrix} \\ \tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma) &= \Gamma_s(\sigma) [a^2 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + s(\sigma) [a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \\ &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) [\tanh \theta \Gamma_s(\sigma) + s(\sigma)] \\ \|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma)\| &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \sqrt{|\tanh^2 \theta - 1|} \\ \|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma)\| &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \frac{1}{\cosh \theta}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma)\| &= \sqrt{|g(a(\Gamma_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)), a(\Gamma_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)))|} \\ &= a \sqrt{1 - \tanh^2 \theta} \\ &= \frac{a}{\cosh \theta}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\kappa(\sigma) &= \frac{\|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma)\|}{\|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma)\|^3} \\ &= \frac{a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \frac{1}{\cosh \theta}}{\left(\frac{a}{\cosh \theta}\right)^3} \\ \kappa(\sigma) &= \varepsilon \frac{\cosh^2 \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))}{a}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
& g\left(\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma), \tilde{\Gamma}_s^{(3)}(\sigma)\right) \\
&= g\left(\begin{array}{c} \Gamma_s(\sigma) [a^2 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) + s(\sigma) [a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))], \\ \Gamma_s(\sigma) [-a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) + t(\sigma) [-a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] + \\ s(\sigma) [-a \kappa_g(\sigma)(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \end{array}\right) \\
&= -a^3 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 - (-a^3 \kappa_g(\sigma))(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 \\
&= a^3 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)
\end{aligned}$$

ve

$$\tau(\sigma) = \frac{g\left(\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma), \tilde{\Gamma}_s^{(3)}(\sigma)\right)}{\left\|\tilde{\Gamma}_s'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_s''(\sigma)\right\|^2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma) &= \frac{a^3 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a^4 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 \left(\frac{1}{\cosh \theta}\right)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 \theta (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında; $a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \tanh \theta \tau(\sigma)) = 1$ olur ki bu eşitlik, $\tilde{\Gamma}_s(s)$ nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

Tersine, $\tilde{\Gamma}_s(s)$ ni bir Bertrand eğrisi olarak alalım. Böylece sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır öyle ki; $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ dir. $a = A$ ve $\tanh \theta = \frac{B}{a}$ diyelim. Şimdi, $\Gamma_s(s) = \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))$ küresel eğrisini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned}
\Gamma_s'(s) &= \varepsilon(\cosh \theta \kappa(s) N(s) + \sinh \theta \tau(s) N(s)) \\
&= \varepsilon(\kappa(s) + \tanh \theta \tau(s)) \cosh \theta N(s) \\
&= \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Γ_s nın yay parametresini σ olarak alalım. O zaman $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta$ olur. Üstelik,

$$\begin{aligned}
a\Gamma_s(s) \frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta \\
&= \cosh \theta (\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a \tanh \theta \Gamma_s(s) \times \frac{d\Gamma_s}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} &= a \tanh \theta \varepsilon (\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \times \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s) \\ &= \sinh \theta (\cosh \theta B(s) - \sinh \theta T(s)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &a \int_0^\sigma \Gamma_s(u) du + a \tanh \theta \int_0^\sigma s(u) du \\ &= \int_{s_0}^s \cosh \theta (\cosh \theta T(t) - \sinh \theta B(t)) dt + \int_{s_0}^s \sinh \theta (\cosh \theta B(t) + \sinh \theta T(t)) dt \\ &= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\Gamma}_s(s) + c \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

4.2.13. Teorem. L^3 de Lorentzian küre S_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel time-like eğri $\Gamma_t : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ , Γ_t nin yay parametresi olmak üzere,

$$\tilde{\Gamma}_t(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^\sigma \Gamma_t(u) du + a \tanh \theta \int_{\sigma_0}^\sigma s(u) du + c \quad (4.13)$$

eğrisini ele alalım. Burada a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektördür. (4.13) ile verilen eğri bir Bertrand eğrisidir. Üstelik, tüm Bertrand eğrileri bu methodla elde edilebilir.

4.2.13. İspat.

$\tilde{\Gamma}_t(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu (4.9) eşitliği yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_t'(\sigma) &= a(\Gamma_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)) \\ \tilde{\Gamma}_t''(\sigma) &= a(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))t(\sigma) \\ \tilde{\Gamma}_t^{(3)}(\sigma) &= a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)t(\sigma) + a(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))(-\Gamma_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)) \\ \tilde{\Gamma}_t^{(3)}(\sigma) &= \Gamma_t(\sigma) [a - a \tanh \theta \kappa_g(\sigma)] + t(\sigma) [a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] + \\ &\quad s(\sigma) [-a \kappa_g(\sigma) + a \tanh \theta \kappa_g^2(\sigma)] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) eşitliği yardımıyla eğrilik ve torsiyon hesaplanırsa:

$$\tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma) = \begin{vmatrix} -\Gamma_t(\sigma) & t(\sigma) & s(\sigma) \\ a & 0 & a \tanh \theta \\ 0 & -a + a \tanh \theta \kappa_g(\sigma) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma) &= \Gamma_t(\sigma)[a^2 \tanh \theta(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + s(\sigma)(a^2(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))) \\
&= a^2(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))[\tanh \theta \Gamma_t(\sigma) + s(\sigma)]
\end{aligned}$$

ve

$$\left\| \tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma) \right\| = a^2(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))\sqrt{1 + \tanh^2 \theta}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \right\| &= \sqrt{g(a(\Gamma_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)), a(\Gamma_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)))} \\
&= a\sqrt{|\tanh^2 \theta + 1|}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\kappa(\sigma) &= \frac{\left\| \tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma) \right\|}{\left\| \tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \right\|^3} \\
&= \frac{a^2(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))\sqrt{1 + \tanh^2 \theta}}{a^3\sqrt{1 + \tanh^2 \theta} \cdot (1 + \tanh^2 \theta)} \\
\kappa(\sigma) &= \varepsilon \frac{(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))}{a(1 + \tanh^2 \theta)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
&g\left(\tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma), \tilde{\Gamma}_t^{(3)}(\sigma)\right) \\
&= g\left(\begin{array}{c} \Gamma_t(\sigma)[a^2 \tanh \theta(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + s(\sigma)(a^2(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))), \\ \Gamma_t(\sigma)[-a(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + t(\sigma)[a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] + \\ s(\sigma)[a \kappa_g(\sigma)(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \end{array}\right) \\
&= -a^3 \tanh \theta(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 + a^3 \kappa_g(\sigma)(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 \\
&= a^3(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2(\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)
\end{aligned}$$

ve

$$\tau(\sigma) = \frac{g\left(\tilde{\Gamma}_t'(\sigma) \times \tilde{\Gamma}_t''(\sigma), \tilde{\Gamma}_t^{(3)}(\sigma)\right)}{\left\| \tilde{\gamma}'(\sigma) \times \tilde{\gamma}''(\sigma) \right\|^2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\tau(\sigma) &= \frac{a^3(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2(\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a^4(-1 + \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2(1 + \tanh^2 \theta)} \\ &= \frac{\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta}{a(1 + \tanh^2 \theta)}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında; $-\cosh \theta[a(1 + \tanh^2 \theta)(\varepsilon \kappa(\sigma) - \tanh \theta \tau(\sigma))] = 1$ olur ki bu eşitlik, $\tilde{\gamma}(s)$ nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

Tersine, $\tilde{\gamma}(s)$ ni bir Bertrand eğrisi olarak alalım. Böylece sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır öyle ki; $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ dir. $a = A$ ve $\tanh \theta = \frac{B}{a}$ diyelim. Şimdi,

$$\gamma(s) = \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))$$

küresel eğrisini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \varepsilon(\cosh \theta \kappa(s)N(s) + \sinh \theta \tau(s)N(s)) \\ &= \varepsilon(\kappa(s) + \tanh \theta \tau(s)) \cosh \theta N(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s)\end{aligned}$$

yazılabilir. γ nın yay parametresini σ olarak alalım. O zaman $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta$ olur. Üstelik,

$$\begin{aligned}a\gamma(s)\frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))\frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta \\ &= \cosh \theta(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}a \tanh \theta \gamma(s) \times \frac{d\gamma}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} &= a \tanh \theta \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \times \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s) \\ &= \sinh \theta(\cosh \theta B(s) - \sinh \theta T(s))\end{aligned}$$

elde edilir. $s = \gamma \times \frac{d\gamma}{d\sigma}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}&a \int_0^\sigma \gamma(u) du + a \tanh \theta \int_0^\sigma s(u) du \\ &= \int_{s_0}^s \cosh \theta(\cosh \theta T(t) - \sinh \theta B(t)) dt + \int_{s_0}^s \sinh \theta(\cosh \theta B(t) + \sinh \theta T(t)) dt \\ &= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\gamma}(s) + c\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

4.2.14. Teorem. L^3 de Hiperbolik küre H_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel space-like eğri $\xi_s : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ , ξ_s nin yay parametresi olmak üzere,

$$\tilde{\xi}_s(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^{\sigma} \xi_s(u) du + a \tanh \theta \int_{\sigma_0}^{\sigma} s(u) du + c \quad (4.14)$$

eğrisini ele alalım. Burada a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektördür. (4.14) ile verilen eğri bir Bertrand eğrisidir. Üstelik, tüm Bertrand eğrileri bu methodla elde edilebilir.

4.2.14. İspat. $\tilde{\xi}_s(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu (4.10) eşitliği yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_s'(\sigma) &= a(\xi_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)) \\ \tilde{\xi}_s''(\sigma) &= a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))t(\sigma) \\ \tilde{\xi}_s^{(3)}(\sigma) &= -a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)t(\sigma) + a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))(\xi_s(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)) \\ \tilde{\xi}_s^{(3)}(\sigma) &= \xi_s(\sigma) [a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + t(\sigma) [-a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] \\ &\quad + s(\sigma) [a \kappa_g(\sigma)(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) eşitliği yardımıyla eğrilik ve torsiyon hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma) &= \begin{vmatrix} -\xi_s(\sigma) & t(\sigma) & s(\sigma) \\ a & 0 & a \tanh \theta \\ 0 & a - a \tanh \theta \kappa_g(\sigma) & 0 \end{vmatrix} \\ \tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma) &= \xi_s(\sigma) [a^2 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + s(\sigma) [a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \\ &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) [\tanh \theta \xi_s(\sigma) + s(\sigma)] \\ \|\tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma)\| &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \sqrt{|1 - \tanh^2 \theta|} \\ \|\tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma)\| &= a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \frac{1}{\cosh \theta} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\xi}_s'(\sigma)\| &= \sqrt{|g(a(\xi_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)), a(\xi_s(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)))|} \\ &= a \sqrt{\tanh^2 \theta - 1} \\ &= \frac{a}{\cosh \theta} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\kappa(\sigma) &= \frac{\left\| \tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma) \right\|}{\left\| \tilde{\xi}_s'(\sigma) \right\|^3} \\
&= \frac{a^2(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma)) \frac{1}{\cosh \theta}}{\left(\frac{a}{\cosh \theta} \right)^3} \\
\kappa(\sigma) &= \varepsilon \frac{\cosh^2 \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
&g \left(\tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma), \tilde{\xi}_s^{(3)}(\sigma) \right) \\
&= g \left(\begin{array}{c} \xi_s(\sigma) [a^2 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + s(\sigma) [a^2 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] , \\ \xi_s(\sigma) [a(1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] + t(\sigma) [-a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] \\ + s(\sigma) [a \kappa_g(\sigma) (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))] \end{array} \right) \\
&= -a^3 \tanh \theta (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 + a^3 \kappa_g(\sigma) (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 \\
&= a^3 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)
\end{aligned}$$

ve

$$\tau(\sigma) = \frac{g \left(\tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma), \tilde{\xi}_s^{(3)}(\sigma) \right)}{\left\| \tilde{\xi}_s'(\sigma) \times \tilde{\xi}_s''(\sigma) \right\|^2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma) &= \frac{a^3 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a^4 (1 - \tanh \theta \kappa_g(\sigma))^2 \left(\frac{1}{\cosh \theta} \right)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 \theta (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında; $a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \tanh \theta \tau(\sigma)) = 1$ olur ki bu eşitlik, $\tilde{\xi}_s(s)$ nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

Tersine, $\tilde{\xi}_s(s)$ ni bir Bertrand eğrisi olarak alalım. Böylece sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır öyle ki; $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ dir. $a = A$ ve $\tanh \theta = \frac{B}{a}$ diyelim.

Şimdi, $\xi_s(s) = \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))$ küresel eğrisini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned}\xi'_s(s) &= \varepsilon(\cosh \theta \kappa(s) N(s) + \sinh \theta \tau(s) N(s)) \\ &= \varepsilon(\kappa(s) + \tanh \theta \tau(s)) \cosh \theta N(s) \\ &= \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s)\end{aligned}$$

yazılabilir. ξ_s nin yay parametresini σ olarak alalım. O zaman $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta$ olur. Üstelik,

$$\begin{aligned}a\xi_s(s)\frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))\frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta \\ &= \cosh \theta(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}a \tanh \theta \xi_s(s) \times \frac{d\xi_s}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} &= a \tanh \theta \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \times \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s) \\ &= \sinh \theta(\cosh \theta B(s) - \sinh \theta T(s))\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}&a \int_0^\sigma \xi_s(u) du + a \tanh \theta \int_0^\sigma s(u) du \\ &= \int_{s_0}^s \cosh \theta(\cosh \theta T(t) - \sinh \theta B(t)) dt + \int_{s_0}^s \sinh \theta(\cosh \theta B(t) + \sinh \theta T(t)) dt \\ &= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\xi}_s(s) + c\end{aligned}$$

elde edilir. Bununla teorem ispatlanır.

4.2.15. Teorem. L^3 de Hiperbolik küre H_1^2 olmak üzere birim hızlı küresel time-like eğri $\xi_t : I \rightarrow S_1^2$ olsun. σ, ξ_t nin yay parametresi olmak üzere,

$$\tilde{\xi}_t(\sigma) = a \int_{\sigma_0}^\sigma \xi_t(u) du + a \tanh \theta \int_{\sigma_0}^\sigma s(u) du + c \quad (4.15)$$

eğrisini ele alalım. Burada a, θ sabit sayılar ve c sabit bir vektördür. (4.15) ile verilen eğri bir Bertrand eğrisidir. Üstelik, tüm Bertrand eğrileri bu methodla elde edilebilir.

4.2.15. İspat. $\tilde{\xi}_t(\sigma)$ eğrisinin eğrilik ve torsiyonunu (4.11) eşitliği yardımıyla hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_t'(\sigma) &= a(\xi_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)) \\
\tilde{\xi}_t''(\sigma) &= a(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)t(\sigma) \\
\tilde{\xi}_t^{(3)}(\sigma) &= a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)t(\sigma) + a(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)(\xi_t(\sigma) + \kappa_g(\sigma)s(\sigma)) \\
\tilde{\xi}_t^{(3)}(\sigma) &= \xi_t(\sigma) [a(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) + t(\sigma) [a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] \\
&\quad + s(\sigma) [a \kappa_g(\sigma)(\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)]
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) eşitliği yardımıyla eğrilik ve torsiyon hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma) &= \begin{vmatrix} -\xi_t(\sigma) & t(\sigma) & s(\sigma) \\ a & 0 & a \tanh \theta \\ 0 & a \tanh \theta \kappa_g(\sigma) - a & 0 \end{vmatrix} \\
\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma) &= \xi_t(\sigma) [a^2 \tanh \theta (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)] + s(\sigma) [a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)] \\
&= a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) [\tanh \theta \xi_t(\sigma) + s(\sigma)] \\
\|\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma)\| &= a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) \sqrt{|1 - \tanh^2 \theta|} \\
\|\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma)\| &= a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) \frac{1}{\cosh \theta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\xi}_t'(\sigma)\| &= \sqrt{|g(a(\xi_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)), a(\xi_t(\sigma) + \tanh \theta s(\sigma)))|} \\
&= a \sqrt{\tanh^2 \theta - 1} \\
&= \frac{a}{\cosh \theta}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\kappa(\sigma) &= \frac{\|\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma)\|}{\|\tilde{\xi}_t'(\sigma)\|^3} \\
&= \frac{a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1) \frac{1}{\cosh \theta}}{\left(\frac{a}{\cosh \theta}\right)^3} \\
\kappa(\sigma) &= \varepsilon \frac{\cosh^2 \theta (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
& g\left(\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma), \tilde{\xi}_t^{(3)}(\sigma)\right) \\
&= g\left(\begin{array}{c} \xi_t(\sigma) [a^2 \tanh \theta (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)] + s(\sigma) [a^2 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)], \\ \xi_t(\sigma) [a (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)] + t(\sigma) [a \tanh \theta \kappa_g'(\sigma)] \\ + s(\sigma) [a \kappa_g(\sigma) (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)] \end{array}\right) \\
&= -a^3 \tanh \theta (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)^2 + a^3 \kappa_g(\sigma) (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)^2 \\
&= a^3 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)
\end{aligned}$$

ve

$$\tau(\sigma) = \frac{g\left(\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma), \tilde{\xi}_t^{(3)}(\sigma)\right)}{\left\|\tilde{\xi}_t'(\sigma) \times \tilde{\xi}_t''(\sigma)\right\|^2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tau(\sigma) &= \frac{a^3 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)^2 (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a^4 (\tanh \theta \kappa_g(\sigma) - 1)^2 \left(\frac{1}{\cosh \theta}\right)^2} \\
&= \frac{\cosh^2 \theta (\kappa_g(\sigma) - \tanh \theta)}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığı altında; $-a(\varepsilon \kappa(\sigma) + \tanh \theta \tau(\sigma)) = 1$ olur ki bu eşitlik, $\tilde{\xi}_t(s)$ nin bir Bertrand eğrisi olduğunu gösterir.

Tersine, $\tilde{\xi}_t(s)$ ni bir Bertrand eğrisi olarak alalım. Böylece sıfırdan farklı A ve B reel sayıları vardır öyle ki; $A\kappa(s) + B\tau(s) = 1$ dir. $a = A$ ve $\tanh \theta = \frac{B}{a}$ diyelim. Şimdi, $\xi_t(s) = \varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))$ küresel eğrisini tanımlayalım. O halde,

$$\begin{aligned}
\xi_t'(s) &= \varepsilon(\cosh \theta \kappa(s) N(s) + \sinh \theta \tau(s) N(s)) \\
&= \varepsilon(\kappa(s) + \tanh \theta \tau(s)) \cosh \theta N(s) \\
&= \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s)
\end{aligned}$$

yazılabilir. ξ_t nın yay parametresini σ olarak alalım. O zaman $\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta$ olur. Üstelik,

$$\begin{aligned}
a\xi_t(s) \frac{d\sigma}{ds} &= a\varepsilon(\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta \\
&= \cosh \theta (\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
a \tanh \theta \xi_t(s) \times \frac{d\xi_t}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} &= a \tanh \theta \varepsilon (\cosh \theta T(s) - \sinh \theta B(s)) \times \frac{\varepsilon}{a} \cosh \theta N(s) \\
&= \sinh \theta (\cosh \theta B(s) - \sinh \theta T(s))
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
&a \int_0^\sigma \xi_t(u) du + a \tanh \theta \int_0^\sigma s(u) du \\
&= \int_{s_0}^s \cosh \theta (\cosh \theta T(t) - \sinh \theta B(t)) dt + \int_{s_0}^s \sinh \theta (\cosh \theta B(t) + \sinh \theta T(t)) dt \\
&= \int_{s_0}^s T(t) dt = \tilde{\xi}_t(s) + c
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

- [1]. **Struik, D.J.**, 1961. Lectures in Classical Differential Geometry, Addison,-Wesley, Reading, MA.
- [2]. **Ali., A.T.**, 2009. Inclined curves in the Euclidean 5-space E^5 , J.Adv. Res. in Pure Math. **1**, 15-22.
- [3]. **Ali, A.T.**, 2009. Determination of the position vektor of general helices from intrinsic equations in E^3 , Preprint : arXiv: 0904.0301v1 [math.DG].
- [4]. **Gluck, H.**, 1996. Higher curvatures of curves in Euclidean space, Amer. Math. Monthly **73**, 699-704.
- [5]. **Monterde, J.**, 2007. Curves with constant curvature ratios, Bulletin of Mexican Mathematic Society, 3a serie vol. **13**, 177-186.
- [6]. **Turgut, M. and Yilmaz, S.**, 2008. Contributions to classical differential geometry of the curves in E^3 , Scientia Magna **4**, 5-9.
- [7]. **Kula, L., Ekmekci, N., Yayli, Y. and Ilarslan, K.**, 2009. Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space, Tur. J. Math. **33**, 1-13.
- [8]. **Izumiya, S. and Takeuchi, N.**, 2004. New Special Curves and Developable Surfaces Turk J. Math., **28** , 153-163.
- [9]. **Eisenhart, L. P.**, 1909. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn and Company, Boston.
- [10]. **Otsuki, T.**, 1961. Differential Geometry (in Japanese), Asakuara, Tokyo.
- [11]. **Weatherburn, C. E.**, 1927. Differential Geometry of Three Dimensions 1, Cambridge Univ. Press.
- [12]. **Schief, W. K.**, 2003. On the integrability of Bertrand curves and Razzaboni surfaces, J. Geom. Phys., **45**, 130-150.
- [13]. **Nutbourne, A. W. and Martin, R. R.**, 1988. Differential Geometry Applied to the Design of Curves and Surfaces, ellis Horwood, Chichester, UK.
- [14]. **Izumiya, S. and Takeuchi, N.**, 2000. Special curves and ruled surfaces preprint Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge University, preprint series, NI-00023-SGT

- [15]. **do Carmo, M.**, 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, New Jersey.
- [16]. **Izumiya, S. and Takeuchi, N.**, 2002. Generic Properties Of Helices And Bertrand Curves J.geom. **74**. 97-109 0047-2468/02/020097-13 Birkhauser Verlag, Bassel.
- [17] **Sabuncuoğlu, A.**, 2006. Diferansiyel Geometri 3. Baskı Nobel Yayın dağıtım.
- [18]. **Hacısalıhoğlu, H. H.**, 1993. Differential Geometry Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- [19]. **Soylu, D.**, 1996. Doktora Tezi, n-Boyutlu Lorentz Uzayında Küresel Eğrilerin Karakterizasyonu. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [20]. **Ekmekçi, N.**, 1991. Doktora Tezi, Lorentz Manifoldları Üzerinde Eğilim Çizgileri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [21]. **Öğrenmiş, A.**, 2004. Doktora Semineri, Lorentz Uzayında Bazı Karakterizasyonlar. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi.
- [22] **Balgetir, H., Bektaş, M., Ergüt, M.**, 2003. Bertrand Curves For Nonnull Curves In 3-Dimensional Lorentzian Space " Hadronic Journal **27** 229-236.
- [23]. **Bilici, M., Çalışkan, M.**, 2009. On the Involutives of the Spacelike Curve with a Timelike Binormal in Minkowski 3-Space" International Mathematical Forum, **4**, no.31,1497-1509.
- [24] **O'Neill, B.**, 1983.Semi Riemann Geometry. Academic Press, New York, London
- [25] **Balgetir, Öztekin, H., Bektaş, M.**, 2010. Representation formulae for Bertrand curves in the Minkowski 3-space " Scientia Magna Vol. **6** No. 1, 89-96.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Elazığ 'da doğmuşum. İlk ve orta okulu Malatya Fatih İlköğretim Okulu, Liseyi Malatya Süper (Y.D.A) Lisesinde tamamladım. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans Programına başladım ve 2009 yılında mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Geometri Bilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programına başladım.