

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ KADEMELİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Doğukan ÇETİNYOL

Anabilim Dalı : Makina Mühendisliği

Programı : Katı Cisimlerin Mekanik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

EYLÜL 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ EKSENLİ KADEMELİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Doğukan ÇETİNYOL
(503081508)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Eylül 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Eylül 2011

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY (İTÜ)

EYLÜL 2011

ÖNSÖZ

Çalışmanın konusunu oluşturan, eğri eksenli çubuklar, mühendisliğin pek çok alanında yapı elemanı olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada eğri eksenli kademeli çubuğun titreşimlerinin genel denklemleri verilmiştir. Daha sonra, sırasıyla analitik, nümerik ve deneysel çözümler yapılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ' ye teşekkür ederim.

Eylül 2011

Doğukan ÇETİNYOL

Makine Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	3
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ	11
3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri	11
3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları	15
3.1.2 Denge denklemleri	16
3.1.3 Bünye denklemleri	17
3.2 Çember Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Genel Denklemleri.....	22
4. ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ VE DÜZLEM DIŞI TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ	27
5. ÇEMBER EKSENLİ KADEMELİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR PAKET PROGRAMI YARDIMYLA ÇÖZÜMÜ.....	35
6. DENEYSEL ÇALIŞMALAR VE DENEYSEL TİTREŞİM ANALİZİ.....	39
6.1 Deney Düzenegi	40
6.2 Deneyde kullanılan test parçaları	44
6.3 Deneyler	45
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
EKLER.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	79

KISALTMALAR

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuğun kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
C	: Kayma rijitliği matrisi
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
F_n, F_b, F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
I_n, I_b	: Çubuk kesitinin normal ve binormal eksenlere göre eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jirasyon yarıçapı
K	: Rijitlik matrisi
k_n, k_b	: Kayma gerilmesinin kesite uniform yayılmadığını gösteren sabitler
M	: Kütle matrisi
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r_o, r	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
R	: Eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
T	: Kinetik enerji
u	: Yerdeğiştirme vektörü
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
X	: Yer değiştirme vektörü
Y	: Asal matris
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y_o	: Başlangıç değerleri vektörü
ψ	: Kademe konumunu belirten açı
μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi
η	: Kesit alanının değişim oranı
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
ϕ_T	: Toplam giriş açısı
ν	: Poisson oranı

$\vec{e}_n, \vec{e}_b, \vec{e}_t$: Frenet eksen takımının normal, binormal ve teğet birim vektörleri
 J : Kesitin Burulma eylemsizlik momenti

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : k_n , k_b sabitleri.....	18
Çizelge 4.1 : Deneyde kullanılan tek kademeli çubukların geometrik özellikleri....	27
Çizelge 4.2 : Deneyde kullanılan iki kademeli çubukların geometrik özellikleri.....	27
Çizelge 4.3 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$).....	28
Çizelge 4.4 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$).....	29
Çizelge 4.5 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	29
Çizelge 4.6 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	30
Çizelge 4.7 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$).....	30
Çizelge 4.8 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$).....	31
Çizelge 4.9 : İki kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	31
Çizelge 4.10 : İki kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	32
Çizelge 4.11 : İki kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$)	32
Çizelge 4.12 : İki kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$).....	33
Çizelge 6.1 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$).....	46

Çizelge 6.2 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$).....	47
Çizelge A.1 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$).....	73
Çizelge A.2 : Tek kademeli serbest-serbet çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$).....	73
Çizelge A.3 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	74
Çizelge A.4 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	74
Çizelge A.5 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	75
Çizelge A.6 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$).....	75
Çizelge A.7 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$).....	76
Çizelge A.8 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$).....	76

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.....	11
Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.....	16
Şekil 4.1 : Çubuk üzerinde kademenin konumu.....	28
Şekil 5.1 : Çember eksenli çubukların geometrik özellikleri.....	35
Şekil 5.2 : Deneyde kullanılan çubuklara ait geometriler.....	36
Şekil 5.3 : Modal analiz için kullanılan Solid186 tipi eleman.....	36
Şekil 5.4 : Ansys programında malzeme değerlerinin girilmesi.....	37
Şekil 5.5 : Ansys de mesh işlemi yapılmış çubuk.....	37
Şekil 5.6 : 90 dereceli tek kademeli çubuğa ait düzlem içi ilk frekans ve mod şekli.....	38
Şekil 6.1 : Deney düzeneği.....	40
Şekil 6.2 : Piezoelektrik ivmeölçer.....	41
Şekil 6.3 : İvmeölçerin bağlanması.....	41
Şekil 6.4 : Darbe çekici.....	42
Şekil 6.5 : Etki ve tepki fonksiyonlarının zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülmesi.....	42
Şekil 6.6 : Deneyde kullanılan cihazlar.....	43
Şekil 6.7 : Çubuk üzerinde kademenin konumu	44
Şekil 6.8 : ME'scopeVES programında modellenen çubuk ve ölçüm noktaları.....	45
Şekil 6.9 : SS sınır şartlarında 90 derece çubuğa ait düzlem içi ve dışı mod şekilleri.....	48
Şekil A.1 : Tek kademeli 90 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri.....	58
Şekil A.2 : Tek kademeli 90 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri.....	59
Şekil A.3 : Tek kademeli 90 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik Mod şekilleri.....	60
Şekil A.4 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod Şekilleri.....	61
Şekil A.5 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri.....	62
Şekil A.6 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik Mod şekilleri.....	63
Şekil A.7 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel Mod şekilleri.....	64
Şekil A.8 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri.....	65
Şekil A.9 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik Mod şekilleri.....	66
Şekil A.10 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri.....	67
Şekil A.11 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri.....	68

Şekil A.12 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereeli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri.....	69
Şekil A.13 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri.....	70
Şekil A.14 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri.....	71
Şekil A.15 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri.....	72

EĞRİ EKSENLİ KADEMELİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Eğri eksenli çubuklar, en basit yapı elemanlarından biri olarak, çok sayıda modern mühendislik yapısında kullanılmaktadır. Günümüzde eğri eksenli çubuklar üzerinde yapılan çalışmalar devam etmektedir.

Bu çalışmada, eğri eksenli kademeli çubukların düzlem içi titreşim davranışı ele alınmaktadır. Çubuk statik davranışını ifade eden denklemlerden hareketle, D'Alembert prensibiyle, dinamik davranışları ifade eden denklemlere ulaşılabilmektedir. Dinamik denklemlerin kesin çözümleri Matlab paket programı yardımıyla elde edilmiştir.

Bu çalışmanın temel amacı, eğri eksenli çubukların dinamik denklemlerinden elde edilen kesin çözümü, nümerik ve deneysel olarak elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırmak ve birbiriyle olan uyumunu incelemektir.

Birinci bölümde, çubuk teorisi hakkında kısaca bilgi verilmiş, çalışmanın amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, eğri eksenli çubuklarla ilgili literatürdeki mevcut çalışmalar incelenmiş, dinamik problemlerin çözümünde kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, eğri eksenli çubukların düzlem iç ve düzlem dışı genel denklemleri verilmiştir. Çubuk statığının genel denklemlerine bağlı olarak titreşim denklemlerde verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çember eksenli kademeli kesitli çubukların titreşim denklemlerinin kesin çözümü Matlab paket programı yardımıyla elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, çember eksenli kademeli kesitli çubukların doğal frekansları sonlu elemanlar paket programı olan Ansys ile çözülmüş ve sonuçların tutarlılığına bakılmıştır.

Altıncı bölüm, deneysel modal analiz çalışmalarını içermektedir. Eğri eksenli kademeli kesitli çubukların analitik ve nümerik cevapları, deneysel olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yedinci bölümde, çalışmanın sonuçları tartışılmış ve yeni öneriler ele alınmıştır.

FREE VIBRATION ANALYSES OF STEPPED CIRCULAR ARCHES

SUMMARY

Arch elements are the most simple and the most commonly used structures in engineering area. Considerable amount of attention has been devoted to the analysis of such elements in recent years.

This study investigates the free in-plane and out-of-plane vibration of stepped circular arches. Equations of vibration of circular arches are obtained from static equations of circular arches by using D'Alembert's principle. Exact solutions of dynamic equations are obtained by using MATLAB which is commercial software.

The purpose of this study is to compare the analytical and numerical solutions with the experimental studies of stepped circular arches.

In the first chapter, a general view for curved beams and the aim of the present study are given in summary.

In the second chapter, a detailed review for the studies in the literature on dynamic problems is given. In additionally, some methods are examined.

In the third chapter, the governing differential equations of a curved beam are given for the dynamic problems.

In the fourth chapter, exact solutions of stepped circular arches, which is obtained by using a Matlab code, are given.

In the fifth chapter, numerical solutions of stepped circular arches are obtained by using ANSYS commercial software.

In the sixth chapter, the experimental studies and modal analysis are performed on different stepped circular beam specimens and the results are presented. Numerical, analytical and experimental solutions of stepped circular arches are compared.

In the seventh chapter, the scope of the study is given with the results and discussions.

1. GİRİŞ

Çubuk ve kiriş olarak adlandırılan cisimler, mühendislik alanında önemli bir yere sahiptir ve çeşitli sanayi kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Günümüzde, akademisyenler ve mühendisler çubuk teorisi üzerinde çalışmaya devam etmekte olup en iyi çözümü elde etmeye çalışmaktadırlar.

Hali hazırda kullanılmakta olan elastisite teorisi, dış kuvvetlerin etkisi altında bulunan elastik bir cismi, gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme açısından inceler. Ancak, karmaşık problemler mevcut olduğunda, çok basit durumlar dışında, elastisite teorisi kullanılmaz. Bu nedenle, eğer bu tip problemlerde elastisite teorisi kullanılmışsa problemi basitleştirmek için varsayımlar ve kabuller yapılmaktadır. Bu da, sadece bazı özel hallerde kullanılacak çözümler ortaya çıkarmaktadır.

Bu çalışmada da kullanılacak olan eğri eksenli çubuklar için, statik ve dinamik problemlerin büyük bir kısmında, bu tür basitleştirmeler kullanılmıştır. Çalışmaların çoğunda eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınmıştır. Fakat bu teori problemi basitleştirmekle beraber, bir çok problemde, çubuğun gerçek davranışından uzak sonuçlar vermektedir. Literatürdeki çözümlerde çoğunlukla Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar gibi yöntemler kullanılmıştır. Özellikle bu çalışmada da kullanılan sonlu elemanlar yöntemi çok büyük kolaylık sağlamak ve mühendisler için zaman kazandırmaktadır.

Eğri eksenli çubukların düzlem içi dinamik davranışını inceleyen çalışmalar olmakla beraber, bunların çoğu sabit kesitli olup kademeli kesitli çubuklarla ilgili çalışmalar oldukça azdır.

1.1 Tezin Amacı

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem içi dinamik davranışları ele alınmaktadır. İlk olarak eğri eksenli çubukların statik ve dinamik denklemleri verilmiştir. Bu denklemler literatürde mevcuttur.

Bu çalışmada kullanılmış olan eğri eksenli kademeli çubukların titreşim analizi için dinamik denklemler, daha önceki çalışmalarda verilen, Matlab paket programında çözdürülmüştür. Analitik olarak doğal frekans değerleri ve mod şekilleri elde edilmiştir. Bu değerler, daha sonra, sonlu elemanlar programından ve deneysel çalışmalardan elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır. Deneyler, tek kademeli ve iki kademeli çember eksenli çubuklar üzerinde gerçekleştirilmiştir.

Eğri eksenli kademeli çubukların titreşimlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmesi başarılı sonuçlar vermektedir. Problemin çözümüyle çubuğa ait frekans değerleri bulunarak analitik sonuçlarla karşılaştırılmaktadır.

Yapılan çalışmaların gerçek durumla olan ilişkisini belirlemek ve karşılaştırma yapmak amacıyla eğri eksenli çubukların titreşimleri deneysel olarak da incelenmiştir. Bu amaçla, bir deney düzeneği tasarlanmış, giriş açıklığı olarak da 180° olan dikdörtgen kesitli, kademeli çember eksenli çubuklar kullanılmıştır. Çubukların serbest-serbest sınır şartlarında doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİMLERİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Literatürde eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Çalışmalarda genel olarak, sabit kesit alanına ait çubuklar ele alınmaktadır. Love [1] tarafından ortaya konulan çalışma, eğri eksenli çubukların dinamik davranışı ile ilgili yapılan en önemli ve en eski çalışmalardan biridir. Çalışmada, dairesel kesitli tam bir daire halkası çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi ile ele alınmaktadır. Düzlem içi ve düzlem dışı titreşimler incelenmiştir.

Kaynaklar içerisinde yer alan [2-6] numaralar arasındaki çalışmalar, mukavemet, elastisite teorisi ve çubuk teorisi konularında temel bilgileri vermektedir.

Den Hartog'a ait olan çalışmada [7], dairesel kesitli, çember eksenli çubuğun titreşimleri incelenmektedir. Çubuk ekseninin uzamadığı ve uzadığı varsayımları yapılmış, enerji ifadeleri oluşturularak Rayleigh-Ritz yöntemiyle sonuca ulaşılmıştır. Eksenin uzadığı varsayımı ile oluşturulan ifadelerde, eksenin uzamadığı varsayımından elde ettiği ilişkiyi kullanmış, ankastre ve sabit mesnet şartlarını göz önüne almıştır.

Kademeli değişken kesitli çubukları inceleyen çalışmalardan biri De Irassar ve Laura'ya [8], aittir. Bu çalışmada, kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri yaklaşık çözüm yöntemleri ile ele alınmaktadır. Kademenin ortada olması durumunda, çubukların serbest titreşimlerine ait ilk simetrik mod şekilleri incelenmekte, çubuğun konsantre kütle taşıması durumu da göz önüne alınmaktadır.

Laura ve diğerleri [9], kesiti kademeli değişken çember eksenli çubuğun düzlemindeki titreşimlerini, konsantre kütle olması durumunda Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelenmekte ve sonuçları sonlu eleman yönteminin sonuçları ile karşılaştırmaktadır.

Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek, enerji ifadelerinde kütleye ait terimlere yer verilmiştir. Sabit-sabit, ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları için elde edilen sonuçlar, sonlu eleman yönteminin verdiği sonuçlarla karşılaştırarak, tablolar halinde sunulmuştur.

Gutierrez ve diğerlerine [10] ait olan çalışmada, kesiti kademeli ve sürekli değişen, farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar seçilerek Ritz yöntemiyle incelenmektedir. Parabol, zincir eğrisi (catenary), spiral, çember ve sikloid şekillerinde eksenlere sahip çubukların doğal frekansları, farklı sınır şartları için sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunulmaktadır. Simetrik ve asimetrik geometriye sahip çubuklar, sürekli değişken kesitli ve kademeli değişken kesitli olarak ayrı ayrı ele alınmıştır. Çalışmada, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir.

Rossi ve diğerlerine [11] ait olan çalışmada, bir önceki çalışma [10] esas alınarak, serbest ucunda konsantre kütle bulunan, ankastre-serbest çubukların titreşimleri incelenmiştir. [10]'te verilen örneklerle aynı geometriye sahip eğri eksenli çubuklar için frekans değerleri hesaplanmıştır.

Auciello ve Rosa [12], çember eksenli çubukların titreşimlerini Euler-Bernoulli teorisi yardımıyla incelemekte, sonuçları diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmaktadır. Çalışmada, kademeli değişken kesitli ve sürekli değişken kesitli çember eksenli çubuklar ankastre-ankastre, sabit-sabit ve sabit-ankastre sınır koşulları için incelenmektedir.

Rossi ve Laura [13], kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların titreşimlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini göz önüne alarak, sonlu eleman yöntemiyle incelemektedir. Kademenin ortada bulunması durumunda, sabit-sabit ve ankastre-ankastre mesnet şartlarına sahip çubukları incelemekte, dinamik katılma olarak adlandırılan, frekans değişiminin kütle değişimine oranını da çalışmada sunulmaktadır.

Kawakami ve Sakiyama [14], eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı davranışlarını incelemiş, Green fonksiyonları ve sayısal integrasyon kullanarak serbest titreşim davranışı için hesaplamalar yapmıştır.

Tarnopolskaya ve diğerlerine ait olan çalışmada [15], değişken eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubuğun düzlem içi titreşimleri, asimptotik yaklaşımla ele alınmaktadır. Bu çözüm yoluyla, mod şekilleri arasındaki geçişi, eğrilik yarıçapının değişimine bağlı olarak açıklamaktadır. Çalışmada deneysel sonuçlara da yer verilmektedir.

Tong ve diğerlerine ait çalışmada [16], çember eksenli değişken kesitli çubukların serbest ve zorlanmış titreşimleri Euler-Bernoulli çubuk teorisi kullanılarak incelenmektedir. Sürekli değişken kesitli eğri eksenli çubukları, sabit kesitli elemanlara ayırmış ve her bir sabit kesitli çubuğun titreşim frekanslarını kesin çözümle elde etmiştir. Eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal ederek, elde ettiği sonuçlarda eleman sayısının arttıkça sonucun yakınsadığını göstermektedir.

Tüfekçi ve Arpacı [17], eğri eksenli, sabit kesitli düzlemsel çubukların, düzlem içi serbest titreşimlerinin kesin çözümünü, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek vermektedir. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılmış, sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunulmuştur.

Tüfekçi, [18] ve [19]'de sırayla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerine ait, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönem eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği genel denklemleri, kesin çözümleriyle beraber sunmaktadır. Çalışmalarda, beş farklı sınır koşulu için, farklı narinlik oranlarına, kademe oranlarına ve kiriş açılara sahip çubuklar incelenmiştir. Tüfekçi ve Özdemirci'ye [20] ait olan çalışmada, [18]'ye paralel olarak, tek kademeli değişken kesitli çubukların titreşimi incelenmiş, kademe oranı, kademenin yeri, sınır şartları, kiriş açıklığı ve narinlik oranının doğal frekans üzerindeki etkisi grafikler halinde sunulmuştur. Aynı çözüm yönteminin uygulandığı bir diğer çalışmada [21], yüksekliğinin kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubukları incelemiştir. Sabit kesitli çubuklar göz önüne alınmış, ilk beş moda ait frekans değerleri elde edilmiştir. Hesaplamalar sonucunda, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerinin sığ çubuklarda, sığ olmayan çubuklara göre daha baskın olduğu görülmektedir.

Tarnopolskaya ve diğerlerine [22] ait çalışmada, düşük frekanslardaki mod geçişi incelenmiştir. Değişken eğrilik ve kesit alanı için hesaplamalar yapılmış, eğrilik yarıçapının mod şekli üzerindeki etkileri mod geçişi açısından ele alınmıştır.

Oh ve diğerleri [23], parabol, elips ve sinüs eğriliklerine sahip çubukların, düzlem içi titreşimlerine ait denklemleri, eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek elde etmiştir. Farklı kayma katsayısı ve narinlik oranları için hesaplamalar, sonlu eleman yöntemi sonuçlarıyla karşılaştırılmaktadır. Aynı yazarlara ait bir diğer çalışmada [24], bir önceki çalışmada verilen yöntem kullanılarak kuadratik, parabol, zincir eğrisi (catenary) ve elips şekillerinde eksenlere sahip çubukların, düzlem içi titreşimlerine ait diferansiyel denklemler elde edilmiş, farklı sınır şartlarında doğal frekans ve mod şekilleri hesaplanmıştır. Değişken kesitli çubuklara ait hesapların yapıldığı bu çalışmada, dikdörtgen kesitli çubuklar göz önüne alınmış, deneysel ve teorik sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yüksek modlardaki davranışlar esas olarak incelenmiş, kayma etkisi ihmal edilmiş, dönme eylemsizliği ve eksenel uzama göz önüne alınmıştır.

Diferansiyel kuadratur yöntemini (Differential quadrature method) kullanan çalışmalardan biri olan Rosa ve Franciosi'ye [25] ait makalede, eksenel uzama etkisi ihmal edilerek dönme eylemsizliği ve kayma deformasyonu hesaplara dahil edilmiştir. Sunulan yöntemle göre, derin çubuklarda hata oranı yüksek iken, sık çubuklarda yüksek frekanslarda dahi düşük hatalarla çözüm elde edilebilmektedir.

Kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini içeren çözümlerden birini sunan Lin ve Lee [26]'ye ait çalışmada Frobenius yöntemi ile elde edilen denklemler, Green fonksiyonu kullanılarak çözülmüştür.

Tüfekçi ve Özdemirci [27], iki kademeli değişken kesitli eğri eksenli çubuğu, sabit kesit alanına sahip üç bölgeye ayırarak ele almaktadır. Çubuğun ilk beş moduna ait düzlem içi titreşimlerini, kesin çözümle incelemekte, dinamik katılma etkisini vurgulamaktadır.

Liu ve Wu [28], çember eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini, genelleştirilmiş diferansiyel kuadratur yöntemini (generalized differential quadrature method) kullanarak incelemekte, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmektedir.

Sabit kesitli, sürekli değişken ve kademeli değişken kesitli çubukların titreşimlerini inceleyerek Rayleigh-Ritz, Rayleigh-Schmidt, Galerkin, sonlu eleman ve hücre ayrıklaştırma (cell discretization) yöntemleri ile elde edilen sonuçları karşılaştırmıştır.

Karami ve Malekzadeh [29] de aynı geometrilerin titreşimini, diferansiyel kuadratur yöntemini (differential quadrature method) kullanarak incelemiş, sonuçları [28]'de elde edilen sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Kang ve diğerlerine [30], ait çalışmada eğri eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimleri, dalga yayılımı (wave propagation) yaklaşımı ile incelemiş, elastik mesnetler, tekil yükler, eğrilik yarıçapı değişimi gibi süreksizlik durumlarını içeren problemler göz önüne almıştır. Süreksizlik noktalarına ait dalga yansıması (wave reflection) transfer matrisi ile ele alınmış, hem kinetik hem de geometrik süreksizlikler için çözüm elde edilmiştir.

Literatürdeki, eğri eksenli çubukların zorlanmış titreşimlerini inceleyen çalışmalardan biri Sophianopoulos ve Michaltsos [31]'e ait olan çalışmadır. Sabit-sabit mesnet şartlarına sahip, parabolik çubuğun serbest titreşimlerine paralel olarak, zamana bağlı değişen eksenel kuvvet altında dinamik davranışı ve dinamik kararlılığı incelenmektedir. Sistemin sönümsüz olduğu varsayımı yapılmıştır.

Rosen ve Gur [32] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli çubuğun lineer olmayan davranışı, transfer matrisi yöntemi ile ele alınmaktadır. Çubuk, elemanlara ayrılarak çözüm yapılmakta, büyük deformasyonlar hesaplanabilmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, eğri eksenli çubukların statik davranışında olduğu gibi, dinamik davranışlarının çözümünde de etkin olarak kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Raveendranath ve diğerlerine ait olan [33] ve [34] numaralı çalışmalarda, çubuğa ait yer değiştirmeler seçilen özel fonksiyonlarla ifade edilerek iki düğüm noktasına ve altı serbestlik derecesine sahip sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. [33]'de normal ve teğetsel doğrultulardaki yer değiştirmeler için kübik fonksiyonlar seçilirken, [34]'de normal doğrultudaki yer değiştirme kuadratik fonksiyonla ifade edilmiş ve doğru sonuca olan yakınsama artmıştır.

Litewka ve Rakowski [35], eksenel uzama ve kayma deformasyonunun dahil edildiği statik fonksiyonları kullanarak bir sonlu eleman formülasyonu oluşturmuştur. Çubuğun dinamik davranışlarını incelemiş, özellikle kalın çubuklar üzerindeki eksenel uzama ve kayma deformasyonunun etkilerini vurgulamıştır.

Wu ve Chiang'a [38] ait çalışmada oluşturulan sonlu eleman formülasyonu ile hem düz, hem de eğri eksenli çubukları içeren geometriler için çözüm aranmış, kinetik enerji ifadesi kullanılarak kütle matrisi hesaplanmıştır.

Aynı yazarlara ait olan [39]'de, kayma deformasyonu ve dönme etkileri formüllere dahil edilmiş, etkiler örnekler üzerinde ayrı ayrı ele alınmıştır. İnce çubuklarda, ilk beş mod için kayma deformasyonu etkisi ihmal edilebilecek kadar düşük iken aynı etki kalın çubuklarda önem kazanmaktadır. Sonlu eleman çalışmalarından biri olan [39]'de, kayma deformasyonu, eksenel uzama ve dönme eylemsizliği etkileri hesaplara dahil edilerek, Hamilton Prensibi'ne dayalı çözüme gidilmiştir. Farklı sınır koşulları ve farklı geometriler için doğal frekans değerleri ve mod şekilleri hesaplanmıştır. Cannarozzi ve Molari [39] tarafından yapılan çalışmada, yer değiştirme ve gerilme eşitlikleri Hellinger-Reissner prensibine dayalı olarak elde edilen eleman formülasyonu oluşturulmuştur. Oluşturulan eleman, herhangi bir eğriliğe ve değişken kesit alanına sahip çubuğun doğal frekanslarının hesaplanmasında kullanılabilir. Kim ve Park [40, 41]'ye ait olan çalışmalarda, dikdörtgen kesitli çubuklar için, statik ve dinamik analizlerde kullanılabilecek bir hibrit eleman sunulmaktadır. Hem statik hem de dinamik davranışı inceleyen [42]'de, düz ve eğri eksenli çubuklar için bir sonlu eleman oluşturulmuştur. Rijitlik matrisinde, kayma deformasyonu etkisi, kütle matrisinde dönme eylemsizliği etkisi hesaplara dahil edilmiştir. Kim ve Lee [44], eğri eksenli çubuk titreşimlerini incelemek üzere sonlu eleman formülasyonu oluşturmuş, çubuğun düzlem içi eğilme titreşimlerini incelemiştir.

Rubin ve Tüfekçi [45] tarafından yapılan çalışmada, eğri eksenli dikdörtgen kesitli çubukların titreşimi, Cosserat Teorisi ile incelenmektedir. Çalışmada, çubuk teorisinin, Cosserat teorisinin, sonlu eleman analizinin ve deneyden elde edilen bulguların karşılaştırılması verilmiştir.

Teorik çalışmalara paralel olarak, deneysel modal analiz (modal testing) de son yıllarda gittikçe daha fazla araştırılan bir konu haline gelmiştir.

Özellikle, bilgisayar teknolojisinin geliştiği günümüzde bilgisayar destekli ölçüm cihazları bu işlemin daha hızlı yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu yöntemle, yapıların dinamik karakteristikleri olarak adlandırılan doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları deneysel olarak elde edilebilmektedir.

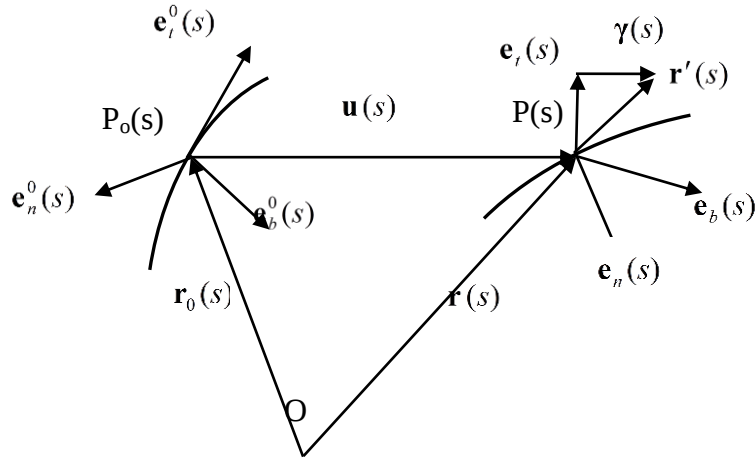
Böyle bir deneysel yöntem gereksinim duyulmasının esas sebepleri arasında, yapıların teorik analizinde yapılan kabullerin gerçekte sağlanıp sağlanmadığının tespit edilmesi, teorik analizinin yapılmasında güçlük olan sistemlerin dinamik karakteristiklerinin deneysel olarak belirlenmesi yer almaktadır.

Ewins'e [46] ait olan kitapta, deneysel modal analizin temel esasları ve uygulama alanları anlatılmaktadır. Ölçüm teknikleri ve modal parametrelerin elde edilme yöntemleri verilmekte, matematik modellerin oluşturulması ele alınmaktadır. Bu konuda, literatürde yapılan pek çok çalışma bulunmaktadır. Cauberghe ve diğerleri [47] tarafından yapılan çalışmada, deneysel çalışma sırasında ortaya çıkan bozucu kuvvetler ve sızıntı (leakage) etkisini en aza indirmek için bir yöntem sunulmaktadır. Verilen yöntemin geçerliliği, Monte Carlo simülasyonu ve alüminyum plaka üzerinde yapılan deneysel çalışmalarla ispatlanmıştır. Bir diğer modal analiz çalışması, Ren ve diğerlerine [48] aittir. Bir köprü üzerine yapılan deneysel çalışma sonlu eleman çalışmasıyla da desteklenmektedir.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

3.1 Çubuk Statığının Genel Denklemleri

Bu bölümde, çubuk statığının ve titreşimlerinin genel denklemlerinin elde edilmesi özetlenecektir. Çubuk malzemesinin elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Şekil 3.1’de çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları



Şekil 3.1. Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları

gösterilmektedir. Çubuk eksen eğrisi, üzerindeki her noktada birbirine dik iki birim vektör bağlı bir parametrelili yönlendirilmiş bir ortamla temsil edilmektedir. Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumunda, birim vektörler uzay eğrisinin teğetine diktir ve çubuğun kesitini belirlemektedir. Bu durumda, üçüncü vektör, teğet birim vektörünü ifade eder. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, kesit vektörleri yine birbirlerine dik birim vektörler olarak kalmaktadır. Başlangıçtaki teğet birim vektörü ise kesit vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık, ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet ne de birim vektör olma şartı vardır. Böylece, çubuk dik kesitinin rijit olması varsayımı yapılmaktadır. Dik kesit ötelenir ve döner; ancak şekil değiştirmez. Yani kesit, serbestçe dönebileceği için şekil değiştirmeden sonraki eksene dik kalmayabilir [4].

Çubuk eksen eğrisi üzerindeki $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen noktada, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri yer almaktadır. s parametresi, başlangıç durumunda, yay uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü, başlangıçta, eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_t^0(s) &= \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0 \\ \mathbf{e}_t^0(s) &= \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds}\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır. Bu doğrultular kesit asal eksenleriyle çakışmayabilir. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum göz önüne alınacaktır.

$\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumuna ait bilinen vektörlerdir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü, $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş eksen eğrisine teğet, ne de birim vektör olma şartı vardır. Yani, dik kesit ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \neq \alpha \cdot \mathbf{e}_t(s)\tag{3.2}$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca, artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.

Şekil 3.1’de, çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları gösterilmektedir. Buradaki (0) üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu ifade eder.

Çubuğun yer değiştirme durumu, iki vektörle tanımlanabilir: Birincisi, eksen üzerindeki noktanın yer değiştirme vektörü,

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır.

İkinci yer değiştirme vektörü, rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörüdür. Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat, burada, yer ve şekil değiştirmeler küçük varsayılarak dönme, bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne,

$$\mathbf{e}_i(s) = Q_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.4)$$

şeklinde, $\mathbf{Q}$ ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin,

$$Q_{ij} = \delta_{ij} + W_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{Birim matris} \quad (3.5)$$

olarak parçalanması durumunda, (3.4) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.3)$$

biçiminde yazılabilir. Dönüşüm matrisinin ortogonalliğini kullanarak; yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla; W_{ij} bir antisimetrik matris olacaktır. Antisimetrik bir matris için,

$$W_{ij} \mathbf{e}_i^0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.7)$$

özelliğini sağlayan bir $\boldsymbol{\Omega}$ vektörü bulunabilir. Çubuk kesitinin dönme vektörü olan $\boldsymbol{\Omega}(s)$ ile (3.6) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \boldsymbol{\Omega}(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \quad (3.4)$$

şekline dönüşür. $\boldsymbol{\Omega}(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir. Birinci vektör, çubuğa ait ekstenel şekil değiştirme vektörü olan γ vektörüdür. Eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları ifade etmektedir. γ , ekstenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve

$$\gamma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t \quad (3.5)$$

şeklinde tarif edilmektedir.

Diğer şekil değiştirme vektörü, bazı çalışmalarda, birim dönme vektörü olarak tanımlanır ve

$$\omega_1 = \frac{d\Omega}{ds} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir [2]. Bu durumda, ilgili şekil değiştirme denklemi,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \omega_1 \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{M}$ kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, $\mathbf{D}$ ise eğilme rijitliği matrisidir.

Bazı mühendislik çalışmaları ise, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak, ω açısal değişim vektörünü kullanmaktadır. Bu vektör, üçlü eksen takımının, çubuk eksen eğrisi üzerinde birim uzunluk kadar ilerletildiğinde açısal değişimini belirleyen vektör olarak tarif edilmektedir. Bileşenleri, çubuk ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \omega \times \mathbf{e}_i \quad (3.8)$$

olarak tarif edilmektedir. Açısal değişim vektörünün şekil değiştirme büyüklüğü olarak kullanılması, daha genel problemlerin çözümüne ve şekil değiştirmiş çubuğun geometrisini tanımaya olanak sağlamaktadır.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\omega}$ olarak bilinen altı bilinmeyeni, iki yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntısı, iki denge denklemi ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları

Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.1), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{e}_i^0 + \boldsymbol{\gamma} \quad (3.10)$$

şeklinde, ilk yer değiştirme - şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur. (3.8) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} \quad (3.11)$$

Eşitliğinde (3.12) de verilen açısal değişim vektörü yerleştirilerek,

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 + \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} \times \mathbf{e}_i^0 + \mathbf{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0) \quad (3.12)$$

ifadesi bulunur. (3.8) eşitliği ve vektörel çarpım $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ özellikleri kullanılarak,

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{e}_i^0 = (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0) \times (\mathbf{e}_i^0 \times \mathbf{\Omega}) \quad (3.13)$$

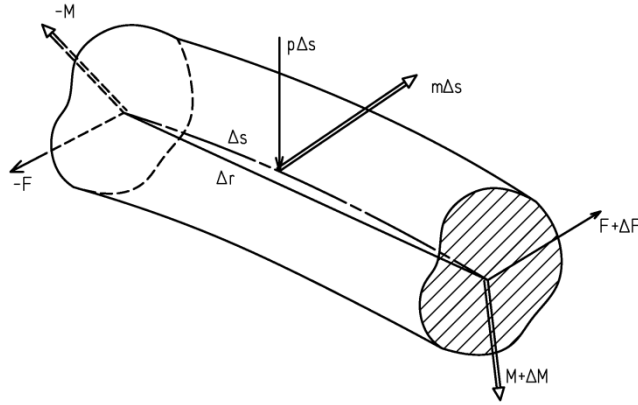
elde edilir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımı ile eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak tanımlanabilir. Böylece, eşitliğin sol tarafındaki parantezin içinin de sıfır olması gerekecek, buradan,

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Omega} \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilecektir.

3.1.2 Denge denklemleri

$\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ vektörleri, birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ vektörleri ise, sırasıyla, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörlerini göstermek üzere, Şekil 3.2'deki elemana ait denge denklemleri,



Şekil 3.2. Çubuk elemanına etki eden dış yükler ve kesit tesirleri.

$$-\mathbf{F} + \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} + \mathbf{p}.\Delta s = 0$$

$$-\mathbf{M} + \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} + \mathbf{m}.\Delta s + \Delta\mathbf{r} \times (\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}) = 0 \quad (3.15)$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapıp, $(\Delta s \rightarrow 0)$ için limit alındığında,

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.16)$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir.

3.1.3 Bünye denklemleri

Seçilen herhangi bir koordinat düzleminde,

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} \quad (3.17)$$

ilişkisi vardır. Burada, $\mathbf{D}$ ve $\mathbf{C}$ ile gösterilen katsayılar, yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı değerler olup, çubuğa ait eğilme ve kayma rijitlik matrislerini gösterir.

Böylece, elastik çubuk teorisinin genel denklemlerine ait 6 adet denklem elde edilmiş olmaktadır. Bunlar, yer değiştirme ve dönme olarak adlandırdığımız $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{\Omega}$, şekil değiştirme elemanları olan $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$, kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörleri olan $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ 'dir.

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \boldsymbol{\gamma} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0 = 0$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \mathbf{p} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}_0)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir [4]. Denklemlerde $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ matrislerinin ikisi de simetriktir. Eğer, kesit simetrik ise ve $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0$ eksenleri, kesitin simetri eksenleriyle çakışırsa, matrisler, diyagonal matrisler olarak elde edilir [3].

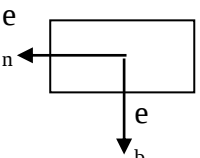
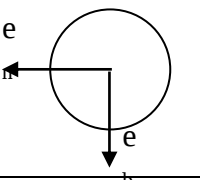
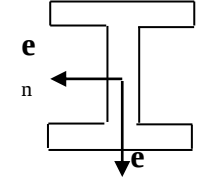
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n}GA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_b}GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$C_{11} = C_n = \frac{1}{k_n}GA; \quad C_{22} = C_b = \frac{1}{k_b}GA; \quad C_{33} = C_t = EA$$

$$D_{11} = D_n = EI_n; \quad D_{22} = D_b = EI_b; \quad D_{33} = D_t = GJ$$

Burada, E ve G malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n , I_b kesit eylemsizlik momentlerini, J kesitin burulma eylemsizlik momentini, A kesit alanını ve k_n , k_b ise kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler, Çizelge 3.1’de çeşitli kesitler için verilmektedir. İleride ele alınacak sayısal örnekler, kesit geometrisine bağlı olarak, çizelgedeki değerler kullanılarak çözülmüştür.

Çizelge 3.1. k_n , k_b sabitleri.

Kesit	k_n	k_b
	6/5	6/5
	10/9	10/9
	2.10	2.20

(3.21) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}\end{aligned}\tag{3.20}$$

elde edilir.

Bunlar, (3.22)'de verilen genel denklemlerin ilk ikisinde yerine konulduğunda, (3.22) eşitlikleri aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{\Omega} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{F}}{ds} &= -\mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \mathbf{F} &= -\mathbf{m}\end{aligned}\tag{3.21}$$

Buradaki $\mathbf{u}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla, şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ eksen takımında;

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u \mathbf{e}_n^0 + v \mathbf{e}_b^0 + w \mathbf{e}_t^0 \\ \mathbf{\Omega} &= \Omega_n \mathbf{e}_n^0 + \Omega_b \mathbf{e}_b^0 + \Omega_t \mathbf{e}_t^0 \\ \mathbf{F} &= F_n \mathbf{e}_n^0 + F_b \mathbf{e}_b^0 + F_t \mathbf{e}_t^0 \\ \mathbf{M} &= M_n \mathbf{e}_n^0 + M_b \mathbf{e}_b^0 + M_t \mathbf{e}_t^0 \\ \mathbf{p} &= p_n \mathbf{e}_n^0 + p_b \mathbf{e}_b^0 + p_t \mathbf{e}_t^0 \\ \mathbf{m} &= m_n \mathbf{e}_n^0 + m_b \mathbf{e}_b^0 + m_t \mathbf{e}_t^0\end{aligned}\tag{3.22}$$

şeklinde ifade edilebilirler.

Eksen herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, açısal değişim vektörü,

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \kappa_0 \mathbf{e}_n^0 + \kappa'_0 \mathbf{e}_b^0 + \tau_0 \mathbf{e}_t^0 \quad (3.23)$$

olarak ifade edilir. Burada, κ_0 , $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ'_0 , $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır [2].

(3.26) denklemlerindeki büyüklüklerin türevleri hesaplanırken,

$$\frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.24)$$

eşitliğinden faydalanılacaktır.

Kesit asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan düzlemsel eğri eksenli çubuk için;

$$\kappa_0 = 0 \quad \kappa'_0 = 1/R_0 \quad \tau_0 = 0 \quad (3.25)$$

olarak alınır. Böylece, (3.25) denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + p_n &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + p_b &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dF_t}{ds} + \frac{F_n}{R_0} + p_t &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + m_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + m_b &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} = 0 \quad \frac{dM_t}{ds} - \frac{dM_n}{R_0} + m_t = 0 \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir. Burada; düzlem içindeki ve düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklükler, aynı denklemlerde birlikte bulunmamaktadır. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun şekil değiştirmelerini ifade eden denklemlerde, yay uzunluğu yerine $ds = R_0 d\phi$ eşitliği konarak düzenlenirse düzlem içindeki şekil değiştirmeleri ifade eden denklemler;

$$\frac{dw}{d\phi} = u + \frac{R_0(\phi)}{C_t(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -w + \frac{R_0(\phi)}{C_n(\phi)} F_n + R_0(\phi)\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R_0(\phi)}{D_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R_0(\phi)F_n - R_0(\phi)m_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R_0(\phi) p_t$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R_0(\phi) p_n \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilirler. Düzlem dışı şekil değiştirmeleri ifade eden denklemler ise;

$$\frac{dv}{d\phi} + \Omega_n R_o - \frac{F_b}{C_b} R_o = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + p_b R_o = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{M_n}{D_n} R_o = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - FR_o + m_n R_o &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\phi} + \Omega_n - \frac{M_t}{D_t} R_o &= 0 \\
\frac{dM_t}{d\phi} + M_n + m_t R_o &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada; u , v ve w normal, binormal ve teğetsel yer değiştirmeler; ϕ kiriş açıklığı, Ω_b , Ω_n , Ω_t normal, binormal ve teğersel eksen etrafındaki dönme açısı, $R_o(\phi)$ şekil değiştirmemiş çubuğun eksen eğrisinin eğrilik yarıçapı; F_n , F_t ve F_b binormal, normal ve teğetsel tekil iç kuvvetler; M_b , M_t , M_n normal, binormal ve teğetsel eksen üzerindeki tekil iç moment; p_b , p_n ve p_t , binormal, normal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış yük; m_t , m_b ve m_n normal, binormal ve teğetsel eksen üzerindeki yayılı dış momentler şeklinde tanımlanabilir.

3.2 Çember Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri, (3.28) ve (3.28) eşitlikleri ile verilmektedir. Denklemlerde, eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkilerini göz önüne alınmaktadır. D’Alambert prensibi yardımı ile, çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece, **p** ve **m** dış yükleri;

$$\begin{aligned}
p_n &= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & m_n &= -\frac{\mu}{A} I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} \\
p_b &= -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} & m_b &= -\frac{\mu}{A} I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} \\
p_t &= -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} & m_t &= -\frac{\mu}{A} I_p \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde eylemsizlik kuvvetleri ve kuvvet çiftleri olarak alınır. Burada, μ birim boyun kütlesi, A kesit alanı, I_n, I_b sırası ile kesitin normal ve binormal eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini, I_p kesitin polar eylemsizlik momentini, göstermektedir. Yer değiştirme büyüklükleri konum ve zamanın fonksiyonlarıdır. O halde tüm büyüklükler de konum ve zamanın fonksiyonları olacaktır. Bu büyüklükler, konum ve zaman fonksiyonlarının çarpımı olduğu varsayımı ile,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s, t) &= \mathbf{u}(s) e^{i\omega t} & \mathbf{\Omega}(s, t) &= \mathbf{\Omega}(s) e^{i\omega t} \\ \mathbf{F}(s, t) &= \mathbf{F}(s) e^{i\omega t} & \mathbf{M}(s, t) &= \mathbf{M}(s) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilebilirler. Burada, ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermekte olup, bu eşitlikler (3.26) denklemlerinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} p_n &= \mu \omega^2 u(s) e^{i\omega t} & m_n &= \frac{\mu}{A} I_n \Omega_n(s) \omega^2 e^{i\omega t} \\ p_b &= \mu \omega^2 v(s) e^{i\omega t} & m_b &= \frac{\mu}{A} I_b \Omega_b(s) \omega^2 e^{i\omega t} \\ p_t &= \mu \omega^2 w(s) e^{i\omega t} & m_t &= \frac{\mu}{A} I_p \Omega_t(s) \omega^2 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu ifadeler (3.26) denklemlerinde yerine konulur ve zaman fonksiyonu sadeleştirilirse denklemler sadece konuma ve frekansa bağlı olarak elde edilirler.

Kesit asal doğrultularının, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıyla çakışması durumunda, (3.25) denklemleri geçerli olacak ve düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerinin genel denklemleri aşağıdaki gibi elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} + \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + \mu \omega^2 u &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + \mu \omega^2 v &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R_0} + \mu \omega^2 w &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{ds} + \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + \mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n &= 0 \\
\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + \mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_0} + \mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t &= 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Burada, düzlem içindeki ve düzlem dışındaki titreşimlerle ilgili büyüklüklerin ayrı denklemlerde bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla, düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki eğilmelerini ifade eden denklemlerde yay uzunluğu yerine $ds = R_0(\phi)d\phi$ eşitliği konarak düzenlenir, **C** ve **D** rijitlik matrislerine ait değerler

yerlerine konulursa çubuğun kendi düzlemindeki düzlem içi serbest titreşimlerini ifade eden denklemler,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R}{EA} F_t \\
\frac{du}{d\phi} &= -w + \frac{RF_n}{GA/k_n} + R\Omega_b \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R}{EI_b} M_b \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -RF_n - R\mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_b \\
\frac{dF_t}{d\phi} &= F_n - R\mu \omega^2 w \\
\frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t - R\mu \omega^2 u
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklinde yazılabilir.

Düzlem dışı titreşimi ifade denklemler ise;

$$\frac{dv}{d\phi} + \Omega_n R_o - \frac{F_b}{C_b} R_o = 0$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} + \mu \omega^2 v R_o = 0$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \frac{M_n}{EI_n} R_o = 0$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - FR_o + \mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n R_o = 0$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} + \Omega_n - \frac{M_t}{GJ} R_o = 0$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} + M_n + \mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t R_o = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde yazılabilir.

4. ÇEMBER EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ VE DÜZLEM DIŞI PROBLEMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, aşağıdaki çizelgede gösterildiği gibi, çeşitli açılardaki tek kademeli ve iki kademeli çubukların Matlab paket programı yardımıyla çözümü elde edilmiştir. Analitik çözümün düzlem içi ve düzlem dışı analitik doğal frekans değerleri tablolar halinde verilmiştir. Çizelge 4.1 ve çizelge 4.2’de tek kademeli ve iki kademeli çubukların özellikleri verilmektedir.

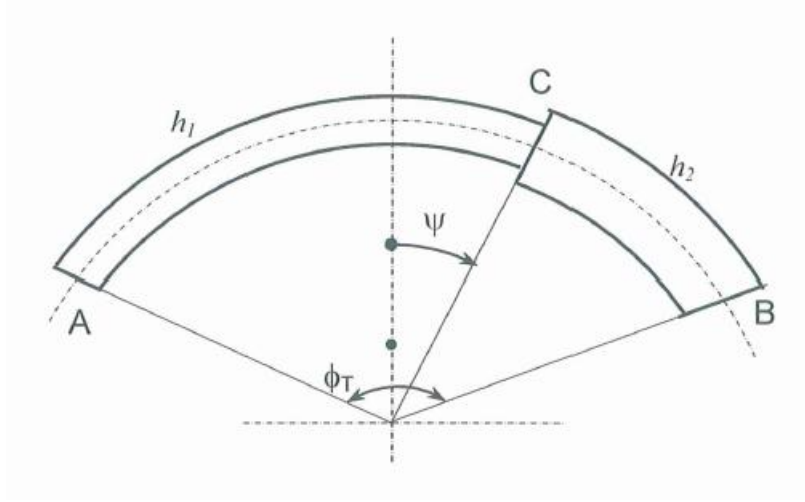
Çizelge 4.1 : Deneyde kullanılan tek kademeli çubukların geometrik özellikleri

Kiriş Açısı	Kademe Oranı	Kademe Konumu
Φ_T	$\eta = \frac{h_2}{h_1}$	$\frac{\psi}{\Phi_T}$
180°	0.8	0.0
180°	0.8	0.166
180°	0.8	-0.166

Çizelge 4.2 : Deneyde kullanılan iki kademeli çubukların geometrik özellikleri

Kiriş Açısı	Kademe Oranı	Kademe Konumu
ϕ_T	$\eta = \frac{h_2}{h_1}$	$\frac{\psi}{\phi_T}$
180°	0.8	0.166 ve -0.166
180°	0.8	0.0 ve -0.33

Birinci ve ikinci bölgelerin kesitlerinin yüksekliklerinin arasındaki oran, kademe oranı olarak adlandırılmaktadır ve h_2/h_1 olarak ifade edilmektedir. Kademenin konumu ψ açısıyla tanımlanmaktadır. ψ/ϕ_T 'ın pozitif değerleri kademenin referans ekseninin sağında olduğu durumu, negatif değerleri ise solunda olduğu durumu ifade etmektedir. Çubuk üzerinde kademenin konumu Şekil 4.1'de görülebilir.



Şekil 4.1 : Çubuk üzerinde kademenin konumu

Çizelge 4.3'te tek kademeli çubuğun düzlem içi mod değerleri görülebilir.

Çizelge 4.3 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	189.90
2	564.18
3	1148.83
4	1975.73
5	2930.66

Verilen değerler sabit kesitli çubuklara ait olup kiriş açısı 180° dir. Değişken kesitli çubuklar ve farklı kiriş açıları olan çubuklar da istenirse incelenebilir. Çizelge 4.4 ve 4.5'te tek kademeli 90° kademeli çubuğun düzlem dışı ve içi frekansları görülebilir.

Çizelge 4.4 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	258.18
2	560.12
3	1044.03
4	1490.90
5	1955.41
6	2237.96
7	2839.42

Çizelge 4.5 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	216.14
2	572.58
3	1202.67
4	2038.22
5	3032.83

Dinamik davranışın çözümünden elde edilen integral hesapları bilgisayar kullanımını zorunlu kılmaktadır. İntegral hesaplamaları Matlab yardımıyla yapılmıştır. Çizelge 4.6 ve 4.7’de 120° kademeli çubuğun düzlem dışı ve içi frekansları görülebilir.

Çizelge 4.6 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166\right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	264.46
2	572.72
3	1045.24
4	1480.04
5	1944.90
6	2218.28
7	2870.96

Çizelge 4.7 : Tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166\right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	171.80
2	530.71
3	1131.77
4	1889.61
5	2840

İstenirse farklı mod ve mesnet şartlarında, etkilerin tümünün hesaplara dahil edildiği durum için hesaplanan boyutsuz frekans değerleri, grafikler üzerinde gösterilebilir. Grafiklerden, ayrı modlara ait eğrilerin, aynı frekans değerinde buluşabildiği gözlenir. Bu durum mod geçişi olarak adlandırılmaktadır. Çizelge 4.8 ve 4.9’da 60° kademeli çubuğun düzlem dışı ve içi frekansları verilmiştir.

Çizelge 4.8 : Tek kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166\right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	251.85
2	549.19
3	1036.52
4	1502.88
5	1999.89
6	2219.26
7	2791.18

Çizelge 4.9 : İki kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166 \text{ ve } \frac{\psi}{\phi_T} = 0.166\right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	168.99
2	566.62
3	1230.17
4	2015.39
5	3042.93

Çubuk statik davranışını ifade eden denklemlerden hareketle, D'Alembert prensibiyle, dinamik davranışları ifade eden denklemlere ulaşılabilir. Çizelge 4.10 ve 4.11'de iki kademeli 30° kademeli çubuğun düzlem dışı ve içi frekansları verilmiştir.

Çizelge 4.10 : İki kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166 \text{ ve } \frac{\psi}{\phi_T} = 0.166 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	247.70
2	537.43
3	1033.88
4	1479.44
5	1956.65
6	2144.39
7	2605.81

Çizelge 4.11 : İki kademeli çubuğun düzlem içi ilk 5 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0 \text{ ve } \frac{\psi}{\phi_T} = -0.33 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	180.82
2	556.30
3	1158.98
4	2025.78
5	3039.52

Analitik değerlerin alındığı çalışmada dinamik problemlerin kesin çözümü, başlangıç değerler yöntemiyle verilmektedir. Herhangi bir bilinen sınır şartı ile çözümler elde etmek mümkündür. Çizelge 4.12’de iki kademeli, kademelerin biri 90° ve diğeri 30° de olan çubuğun düzlem dışı ve içi frekansları verilmiştir.

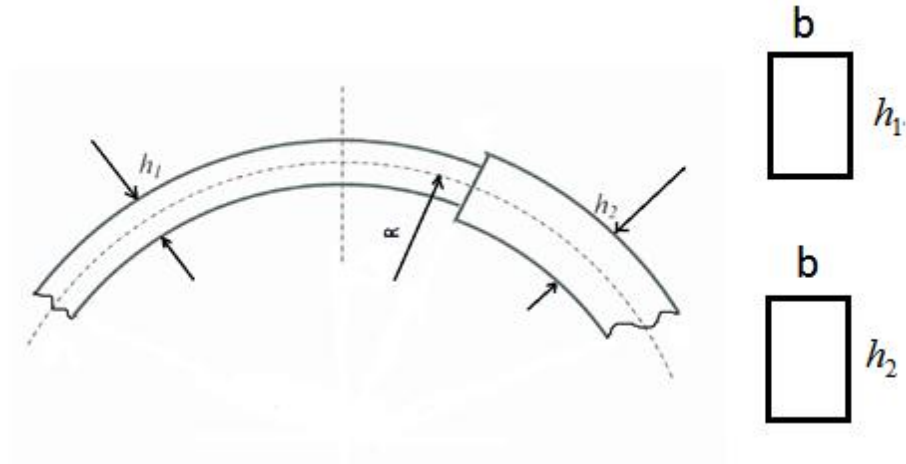
Çizelge 4.12 : İki kademeli çubuğun düzlem dışı ilk 7 mod değerleri

$$\left(\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0 \text{ ve } \frac{\psi}{\phi_T} = -0.33 \right)$$

Mod sayısı	Frekans (Hz)
1	252.18
2	551.30
3	1031.60
4	1450.42
5	1951.55
6	2123.57
7	2686.98

5. ÇEMBER EKSENLİ KADEMELİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR PAKET PROGRAMI YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

Bu çalışmada sonlu eleman analiz programı olarak ANSYS (v12) kullanılmıştır. Modellemesi yapılan çubuklar kolaylık sağlaması ve pratikliği nedeniyle Workbench modülünde hazırlanmıştır. Hazırlanan modeller çözdürülmüştür. Bu çalışmada, 3' ü tek kademeli ve 2' si iki kademeli olmak üzere, 5 adet çember eksenli çubuk deneyi yapılmıştır, malzeme özellikleri aşağıda verilmektedir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 : Çember eksenli çubukların geometrik özellikleri

$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N / m}^2$$

$$G = 8.077 \times 10^{10} \text{ N / m}^2$$

$$\nu = 0.3$$

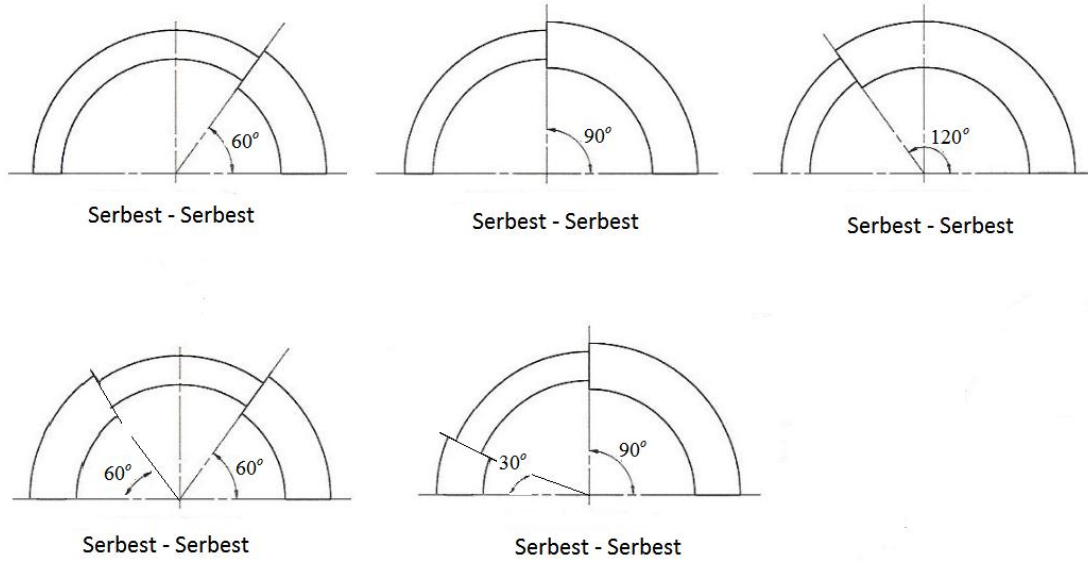
$$\rho = 7715 \text{ kg / m}^3$$

$$h_1 \times b = 16 \times 10 \text{ mm} \times \text{mm}$$

$$h_2 \times b = 20 \times 10 \text{ mm} \times \text{mm}$$

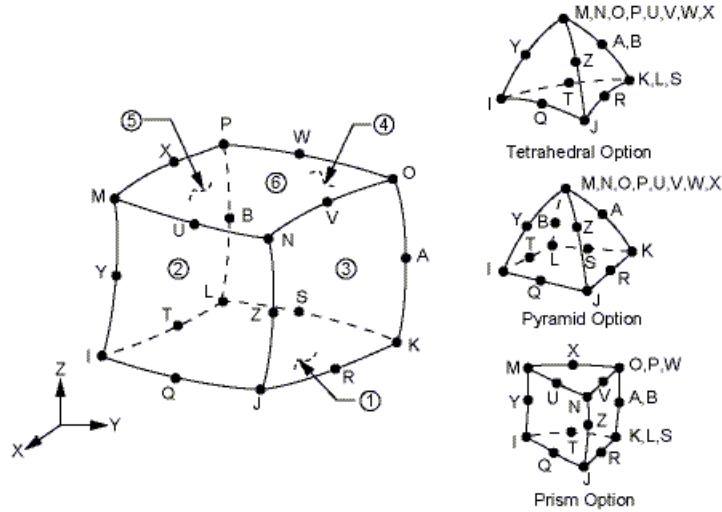
$$R = 200 \text{ mm}$$

Deneyde kullanılan çubuklara ait geometriler ve sınır koşulları Şekil 5.2’de sunulmaktadır.



Şekil 5.2 : Deneyde kullanılan çubuklara ait geometriler

ANSYS sonlu elemanlar paket programı, modal analiz için Solid186 tipi eleman kullanmıştır. Bu eleman yüksek dereceli, 20 nod’lu hexagonal bir elemandır. Solid186 elemanı Şekil 5.3 te gösterilmiştir.



Şekil 5.3 : Modal analiz için kullanılan Solid186 tipi eleman.

İlk örnek 90° çubuk için ele alınmıştır. Ansys programı 70741 nod ve 14175 eleman kullanmıştır. Diğer çubuklarda benzer eleman sayılarına sahiptir.

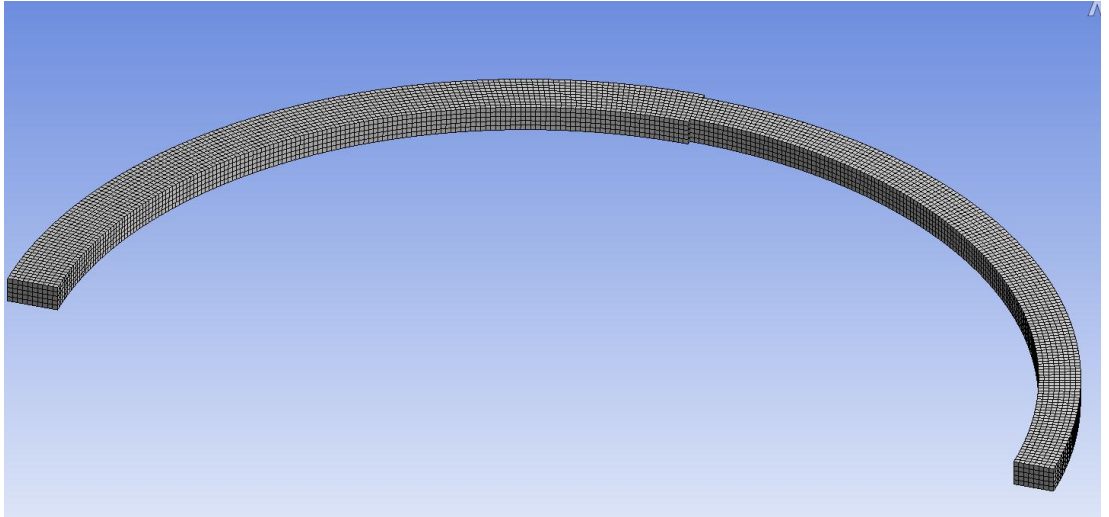
Öncelikle Şekil 5.4'te görüldüğü gibi Ansys yazılımında çubuğa ait malzeme değerleri girilmiştir.

Outline of Schematic A2: Engineering Data				
	A	B	C	D
1	Contents of Engineering Data		S.	Description
2	Material			
3	Structural Steel			Fatigue Data at zero mean stress comes from 1998 ASME BPV Code, Section 8, Div 2, Table 5-110.1
*	Click here to add a new material			

Properties of Outline Row 3: Structural Steel				
	A	B	C	D E
1	Property	Value	Unit	
2	Density	7850	kg m ⁻³	
3	Isotropic Elasticity			
4	Young's Modulus	2.1E+05	MPa	
5	Poisson's Ratio	0.3		

Şekil 5.4 : Ansys programında malzeme değerlerinin girilmesi

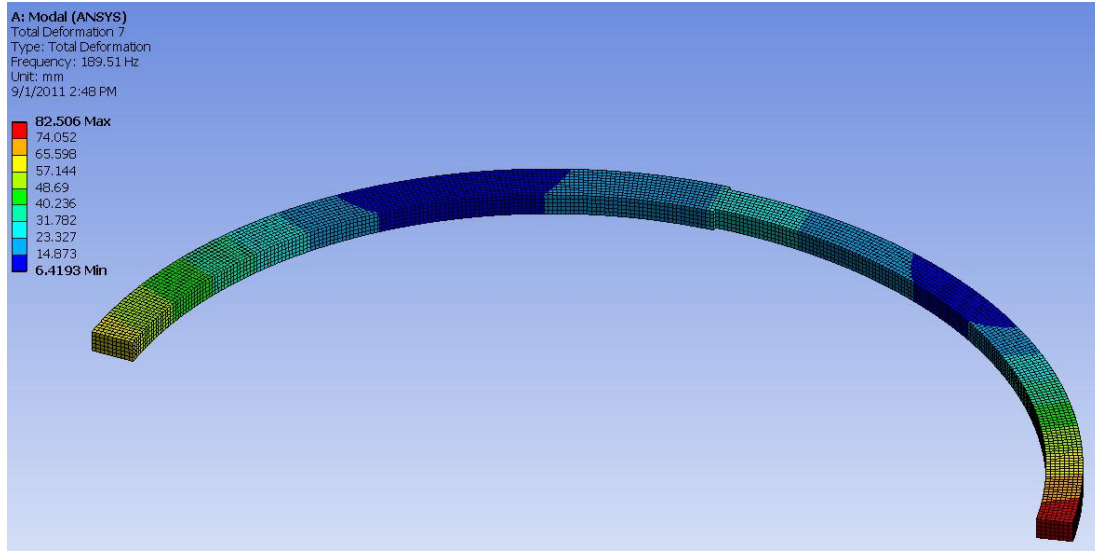
Daha sonra 90° açıklığındaki tek kademeli çubuğa uygun şekilde mesh yapıldı. Burada çubuğun boyutları belli ve başlangıç-bitiş yönleri belli bir doğrultuda gittiği için Ansys'in Mesh bölümünde Sweep, yani süpürme, metodunu kullanarak eleman boyutu olarak da 2 mm'yi seçerek meshleme yapıldı. Şekil 5.5'te 90 dereceli tek kademeli mesh yapılmış çubuk gösterilmektedir.



Şekil 5.5 : Ansys de mesh işlemi yapılmış çubuk.

Meshleme işlemini bitirdikten sonra çözüm aşamasına gelinmiştir. Çubuğun yaklaşık 20 mod şekli elde edilmiştir.

Şekil 5.6'da 90° li tek kademeli çubuğun düzlem içi ilk frekansı ve mod şekli gösterildi. Aynı işlemler bütün çubuklar için yapıldı.



Şekil 5.6 : 90 dereceli tek kademeli çubuğa ait düzlem içi ilk frekans ve mod şekli

Bu şekile 5 çubuğunda analizleri yapılarak düzlem içi ve düzlem dışı frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler karşılaştırma yapılacağı için bir sonraki bölümde gösterildi.

6. DENEYSEL ÇALIŞMALAR VE DENEYSEL TİTREŞİM ANALİZİ

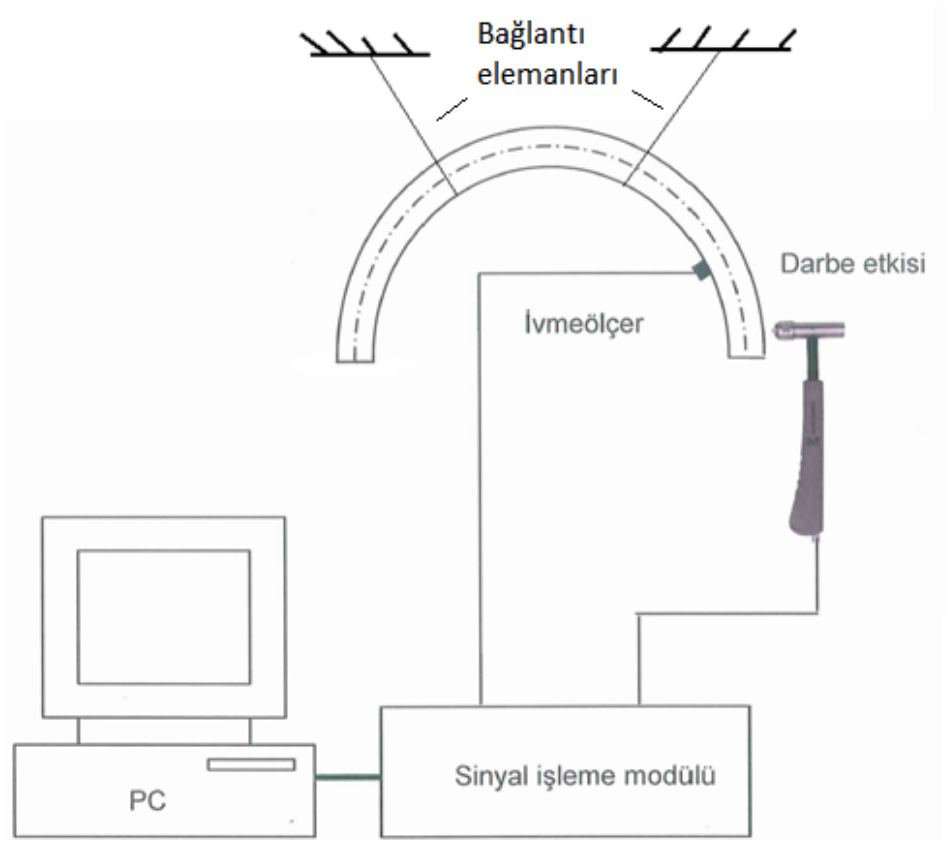
Deneysel titreşim analizi (modal analiz), son yıllarda gittikçe daha fazla araştırılan bir konu haline gelmiştir. Özellikle, bilgisayar teknolojisinin geliştiği günümüzde, bilgisayar destekli ölçüm cihazları, bu işlemin, daha hızlı yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu yöntemle, yapıların dinamik karakteristikleri olarak adlandırılan doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları deneysel olarak elde edilebilmektedir. Böyle bir deneysel yöntem gereksinim duyulmasının esas sebepleri arasında, yapıların teorik analizinde yapılan kabullerin gerçekte sağlanıp sağlanmadığının tespit edilmesi, teorik analizinin yapılmasında güçlük olan sistemlerin dinamik karakteristiklerinin deneysel olarak belirlenmesi ve kullanılmış ve/veya hasar görmüş yapıların durumlarının belirlenmesi yer almaktadır.

Basit bir deneysel titreşim analizinde bulunması gereken temel cihazlar; sinyal üretici, ivmeölçer (transducer) ve analizör olarak sayılabilir. Sinyal üretici adı verilen cihaz farklı özelliklere sahip titreşimler oluşturmaktadır. Sisteme, giriş sinyali olarak verilen ve büyüklüğü bilinen bu titreşim hareketi, ivmeölçer ile elektrik sinyallerine çevrilir. Elde edilen dijital sinyaller, okumayı kolaylaştırmak amacıyla bir sinyal yükselticiden geçirilerek analizöre iletilir. Analizör, içerisinde bulunan yazılım ile, sinyal üreticiden gelen ve ivmeölçerin ilettiği sinyalleri, ivmeölçerin karakteristik özelliklerine bağlı olarak işleyerek analiz eder ve sistemin dinamik yapısı hakkında bilgi elde edilir.

Bu çalışmada, farklı geometrik özelliklere sahip çember eksenli çubuklara ait deneysel titreşim ölçümleri sunulmakta, çubukların doğal frekansları ve mod şekilleri incelenmektedir. Çalışmada, sinyal üretici yerine titreşim ölçümleri için özel olarak tasarlanan bir çekiç kullanılmış ve sistemlerin serbest titreşimleri ele alınmıştır. Deneysel olarak elde edilen doğal frekans ve mod şekilleri, teorik sonuçlarla ve sonlu eleman yöntemi sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

6.1 Deney Düzeneği

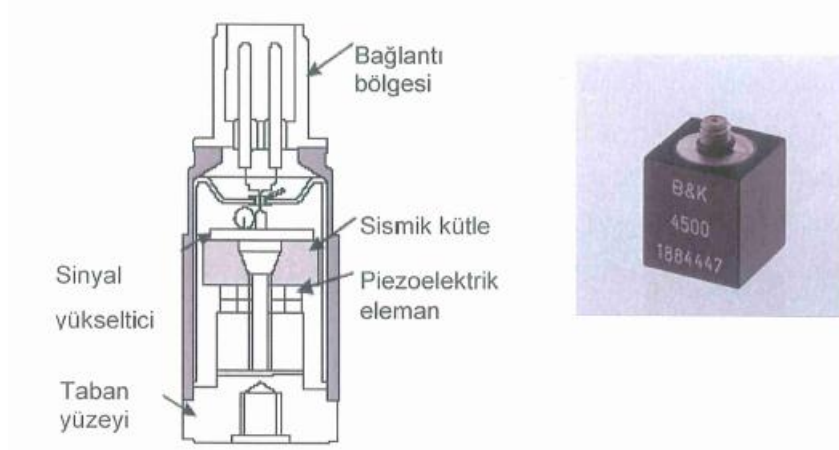
Deney düzeneğindeki elemanlar bağlantı elemanları, çekiç, ivmeölçer ve analizörden oluşmaktadır (Şekil 6.1). Düzenekte serbest-serbest sınır şartları sağlanmış düzlem içi ve düzlem dışı titreşim hareketi için deneysel veriler elde edilmiştir.



Şekil 6.1 : Deney düzeneği

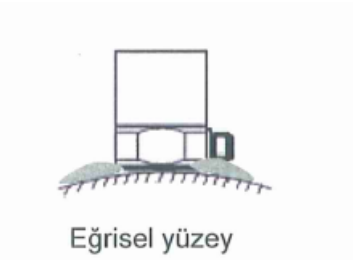
Düzlem içi ve düzlem dışı titreşim sinyallerinin algılanması amacıyla, 4507B (Brüel&Kjaer) tipi tek eksenli piezoelektrik ivmeölçer, hem düzlem içi hem de düzlem dışı doğrultularda çubuk üzerine yapıştırılmıştır. Bir piezoelektrik ivmeölçer; pizoelektrik eleman, sismik kütleler ve sinyal yükselticiden meydana gelir. Piezoelektrik elemanın bir yüzü, algılayıcının tabanındaki katı desteğe bağlıdır. Sismik kütle ise digger tarafındadır. İvmeölçer titreşim etkisinde kaldığında, piezoelektrik elemana etki eden bir kuvvet oluşur. Newton Kanunu'na göre bu kuvvet, sismik kütlelerin yarattığı ivmenin sonucudur. Piezoelektrik ilkesine göre, uygulanan bu kuvvetle orantılı bir şekilde elektriksel yük çıkışı gözlemlenir. Sismik kütle, sabit bir değerde olduğundan dolayı ortaya çıkan bu elektriksel yük, kütlelerin ivmesiyle doğru orantılıdır.

Çok düşük voltajlarda olan bu sinyaller, yükseltici tarafından daha yüksek seviyelere çıkartılarak, sinyal işleme modülüne iletilir. Yüksek hassasiyete sahip olan piezoelektrik ivmeölçerler ile oldukça geniş frekans aralığındaki titreşim hareketi incelenebilmektedir (Şekil 6.2).



Şekil 6.2 : Piezoelektrik ivmeölçer

İvmeölçerlerin bağlanma şekli, ölçümün doğruluğunda önemli rol oynar. En iyi performans için, özellikle yüksek frekanslarda, ivmeölçerin tabanı ve test edilecek nesnenin yüzeylerinin temiz, düz, pürüzsüz, çiziksiz olmasına dikkat edilmelidir. Yapılan deneylerde, test parçaları temiz, pürüzsüz ancak eğrisel yüzeylere sahip parçalardır. Eğrisel yüzey, çalışma için bir dezavantaj oluşturmaktadır. İvmeölçer, eğrisel yüzey üzerine, hem sağlam bir mekanik bağ oluşturacak, hem de yüzey ve ivmeölçer arasındaki boşlukları kapatacak şekilde, özel bir yapışkanlı madde ile bağlanmıştır (Şekil 6.3).



Şekil 6.3 : İvmeölçerin bağlanması

Çubuğa uygulanan ilk hareket, darbe etkisi şeklinde uygulanmış olup, bu iş için özel olarak tasarlanan bir çekiçten (Brüel&Kjaer, 8206 tip) faydalanılmıştır.

Darbe etkisi uygulandığında, çekicin ucuna yerleştirilmiş bulunan sinyal algılayıcısı sayesinde, uygulanan kuvveti ölçebilmektedir. Deneylerde kullanılan çekiç çelik uçludur (Şekil 6.4).



Şekil 6.4 : Darbe çekici

Modal parametreler adı verilen doğal frekanslar ve frekanslara ait mod şekilleri, yapıya ait bir dizi frekans cevabı fonksiyonu (Frequency Response Function-FRF) elde edilerek hesaplanır. Yapıya uygulanan etki, darbe (impact) şeklinde zaman ortamında ölçülür. Uygulanan bu kuvvet altında, yapı; sınır koşullarına ve malzeme özelliklerine bağlı olarak bir titreşim hareketi yapar. Yapının, bu etkiye gösterdiği tepki (response) ise yapıya bağlanan ivmeölçerle yine zaman ortamında ölçülür. Fourier dönüşümü (FFT – Fast Fourier Transform) kullanılarak etki ve tepki fonksiyonları zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülür (Şekil 6.5).



Şekil 6.5 : Etki ve tepki fonksiyonlarının zaman ortamından frekans ortamına dönüştürülmesi

Yapıya ait frekans cevabı fonksiyonu (FRF), Fourier dönüşümleri yapılmış tepki fonksiyonunun, etki fonksiyonuna bölünmesiyle elde edilir [60].FRF fonksiyonun hangi nokta arasındaki bilgiyi taşıdığı sonuçların işlenmesi aşamasında büyük önem taşımaktadır.

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (6.1)$$

Burada;

$X(\omega)$: frekans ortamındaki tepki fonksiyonunu,

$F(\omega)$: frekans ortamındaki etki fonksiyonunu,

$H(\omega)$: frekans cevap fonksiyonunu göstermektedir.

Deney sırasında, özel olarak deneysel titreşim analizleri için geliştirilmiş olan PULSE (Brüel&Kjaer) sinyal toplama ve işleme modülü kullanılmıştır. Örnekleme frekansı ve hassasiyet, bilgisayar programı içerisinde ayarlanabilmekte olup, bu bilgiler doğrultusunda, ivmeölçer ve çekiçten gelen sinyaller toplanarak işlenmektedir. Elde edilen tüm veriler, FRF diyagramlarına aktarılmakta ve UFF (Universal File Format) olarak saklanabilmektedir. FRF fonksiyonları işlenerek, titreşim sistemine ait, rezonans frekansları, sönüm oranları ve mod şekilleri elde edilebilmektedir. Aşağıda deneyde kullanılan cihazlar gösterilmektedir (Şekil 6.6).



Şekil 6.6 : Deneyde kullanılan cihazlar

6.2 Deneyde Kullanılan Test Parçaları

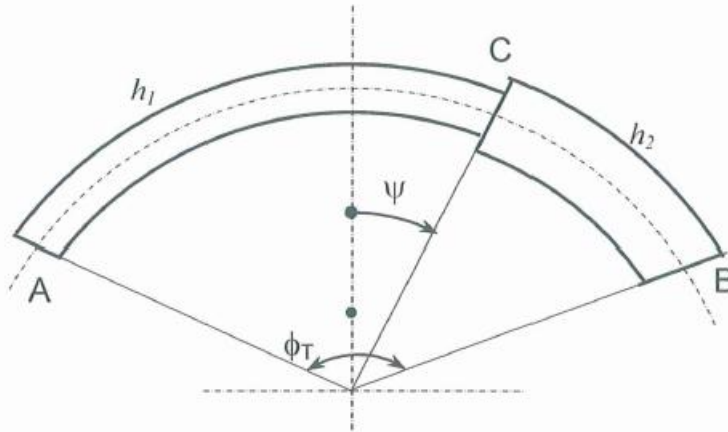
Deneyde kullanılan çember eksenli çubuklar, sıcak çekme levha malzemelerden lazer yöntemi ile kesilerek imal edilmiştir olup, çubuğun boyut değerleri ve malzeme özellikleri 5. Bölümde verildiği için burada tekrar verilmeyecektir.

Yapılan çalışmada, dikdörtgen kesitli, kesiti sabit ve kademeli değişen çember eksenli çubuklar göz önüne alınmıştır. Çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri incelenmiştir. Deneyde çubuklara serbest-serbest sınır şartları uygulanmıştır. Deneylerde kullanılan çember eksenli çubuklara ait geometriler ve sınır koşulları Şekil 5.2’de sunulmaktadır.

Kesiti kademeli olarak değişen çubuklarda, kademenin konumu ve kademe oranları Çizelge 6.1’de verilmektedir.

Deneyde kullanılan tek kademeli ve iki kademeli çubuklara ait geometrik özellikler çizelge 4.1 ve çizelge 4.2’ de verilmiştir.

Birinci ve ikinci bölgelerin kesitlerinin yükseklikleri arasındaki oran, kademe oranı olarak adlandırılmaktadır ve h_2/h_1 olarak ifade edilmektedir. Kademenin konumu ψ açısıyla tanımlanmaktadır. ψ/ϕ_T ‘ ın pozitif değerleri kademenin referans ekseninin sağında olduğu durumu, negatif değerleri ise solunda olduğu durumu ifade etmektedir. Şekil 6.7’de bu durumlar çubuk üzerinde gösterilmektedir.



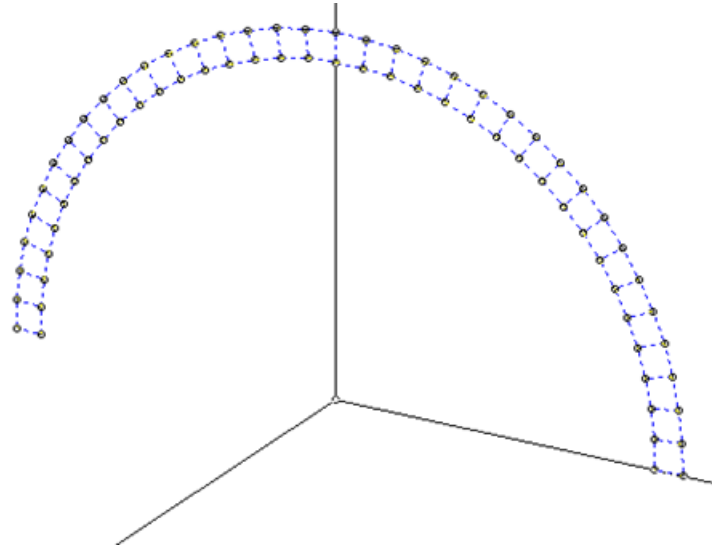
Şekil 6.7 : Çubuk üzerinde kademenin konumu

6.3 Deneyler

Serbest-serbest sınır şartı çubukların lastiklerle uygun bir yere asılmasıyla gerçekleştirilmiştir. Serbest-serbest sınır şartına ait en uygun mesnet noktaları, çember eksenli çubuğun tepe noktası ve civarındaki noktalar olarak hesaplanmıştır.

Deneylerde kullanılacak çember eksenli çubuklar, tahrik ve ölçüm noktalarını oluşturmak üzere, elemanlara ayrılarak, bilgisayar ortamında ME'scopeVES programında modelleri oluşturulmuştur. Deney sonuçlarının işlenmesi aşamasında kullanılacak olan bu model üzerindeki her nokta, gerçek yapılar üzerinde de işaretlenerek numaralandırma yapılmıştır. Her çubuk 37 parçaya ayrılmıştır. Böylece hassasiyet de arttırılmıştır. Düzlem içi 37 ve düzlem dışı 74 noktadan veri alınmıştır. Deneylerde sabit bir tahrik noktası belirlenmiş, ivmeölçer ise bütün noktalarda gezdirilerek ölçümler alınmıştır. Deney hatalarını azaltmak için her noktada üçer adet ölçüm yapılmış ve ortalamaları alınmıştır.

Şekil 6.8'de ME'scopeVES programında modellenen çubuk gösterilmiştir.



Şekil 6.8 : ME'scopeVES programında modellenen çubuk ve ölçüm noktaları

Elde edilen FRF fonksiyonları PULSE programında uff formatında kaydedilerek ME'scopeVES programına atılmıştır.

Burada programa okutularak doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar hem sonlu eleman sonuçları hem de analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Serbest-serbest sınır şartı için, deneysel, analitik ve sonlu eleman yöntemi olmak üzere üç farklı çözüm ile elde edilen doğal frekans değerleri, çizelgelerde verilmektedir. Sonlu eleman çözümleri ANSYS paket programı kullanılarak hesaplanmıştır. Burada örnek olarak 90° çubuğun düzlem içi ve dışı analitik, numerik ve deneysel sonuçlarına ait çizelge verilmiştir (Çizelge 6.1 ve çizelge 6.2). Sonuçlara bakılırsa birbiriyle uyum içinde olduğu görülebilir. Diğer çubuklara ait düzlem içi ve düzlem dışı değerler ekler bölümünde verilmiştir.

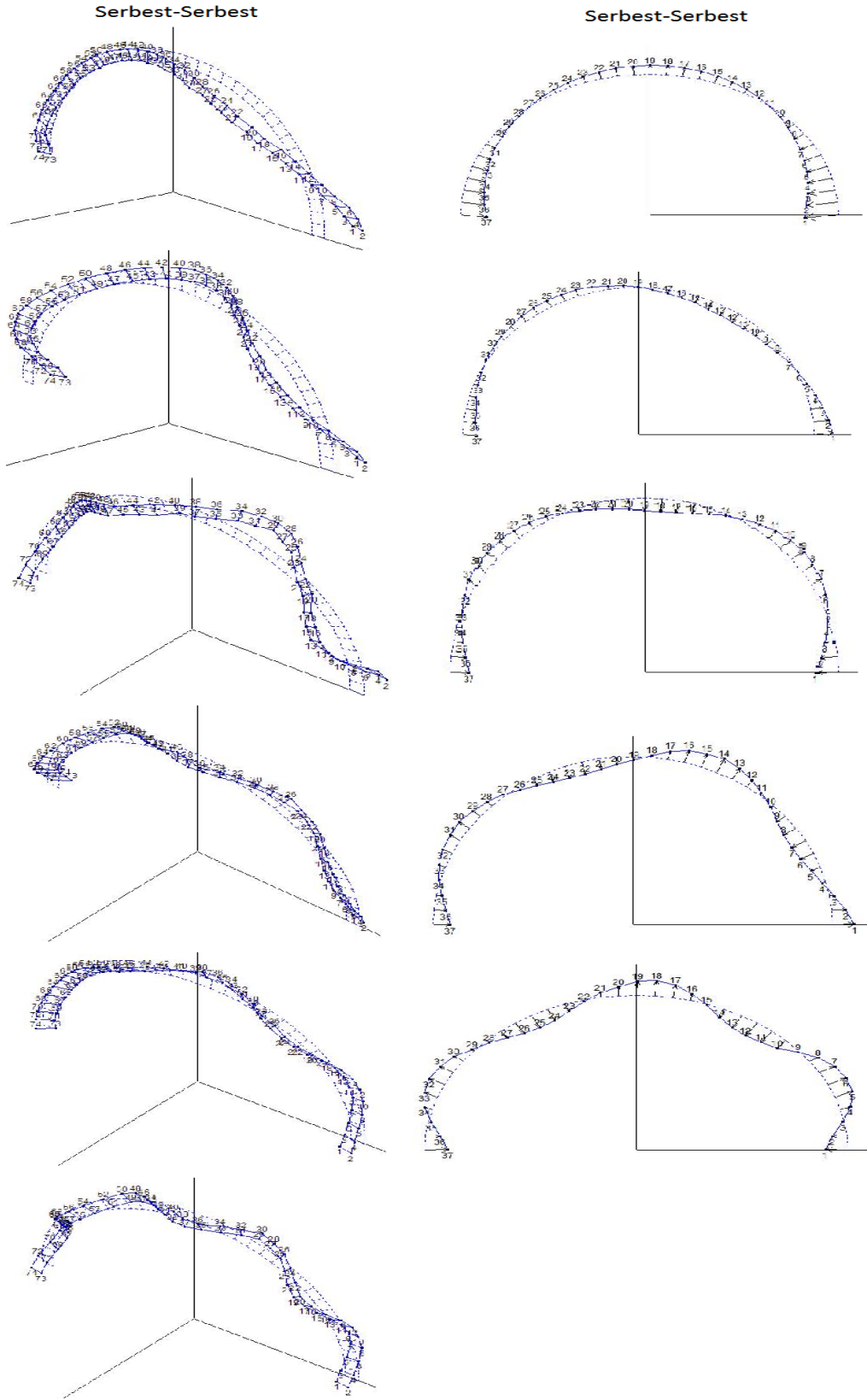
Çizelge 6.1 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneysel
1	189.9	189.5	188.7
2	564.1	565.1	560.4
3	1148.8	1149.3	1139.9
4	1975.7	1980.6	1962.9
5	2930.6	2934.5	2911.1

Çizelge 6.2 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneyisel
1	258.1	257.8	255.9
2	560.1	558.5	553
3	1044	1042.7	1029.1
4	1490.9	1489.3	1467.3
5	1955.4	1953.5	1928.9
6	2237.9	2236.3	2216.2
7	3172.2	3168.3	3132.8

Bazı mod sayılarındaki frekanslardaki farkların artması, deneyi yapılan çubukların malzeme özellikleri, geometrisi ve boyut belirsizliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Şekil 6.9’da ise 90° kademeli çubuğa ait düzlem içi ve dışı mod şekilleri yan yana verilmiştir.



Şekil 6.9 :SS sınır şartlarında 90° çubuğa ait düzlem içi ve dışı mod şekilleri

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde çember eksenli çubukların düzlem içi ve dışı dinamik problemlerini inceleyen birçok çalışma olmasına rağmen bu çalışmaların çoğu sabit kesit alanına sahip çubukları ele almaktadır. Bu çalışmada ise farklı kesit alanına sahip kademeli çubukların titreşim karakteristiği incelenmiştir. Özellikle sayısal yöntemler ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle beraber, sonlu elemanlar yöntemi yaygın bir uygulama alanı bulmaktadır. Bu çalışmada da sonlu elemanlar yönteminden faydalanılmış ve sonuçların karşılaştırılmasında kullanılmıştır.

İlk olarak, deneylerde kullanılan çember eksenli çubukların genel denklemleri verilmiştir. Çubuk statığının genel denklemleriyle başlanmış olup, yer değiştirme, şekil değiştirme ve bünye denklemleri formülasyonlarla izah edilmiştir. Bu bölümde son olarak, çalışmamızın ana konusunu oluşturan çember eksenli çubukların titreşimlerinin genel denklemlerine yer verilmiştir.

Çember eksenli çubukların denklemleri verildikten sonra, deneylerde kullanılan çubukların başka bir çalışmada Matlab paket programı yardımıyla çözülmüş olan analitik sonuçları tablolar halinde gösterilmiştir.

Sınır koşulları ve kademe açıları, çubukların sonlu elemanlarla çözümünün yapıldığı bölümde kısaca izah edilmiştir. Çubuklara ait malzeme özellikleri gösterilmiştir. Ansys programının arka planda modal analiz için kullandığı eleman tipi anlatılmıştır. Ansys'te eğri eksenli çubuğun sonlu eleman analizi yapılırken izlenecek adımlar kısaca anlatılmıştır. Meshleme stratejisinin nasıl olacağı çok detaya girilmeden gösterilmiştir. Örnek olarak ise, 90° tek kademeli eğri eksenli çubuğun sonlu eleman analizi resimlerle anlatılmıştır. Elde edilen sonuçlar bir sonraki bölümde gösterilmiştir. Aynı yöntem bütün çubuklar için yapılmış olup, elde edilen sonuçlar tek bir tabloda ve bir sonraki bölümde gösterilmiştir. Teorik, deneysel ve numeric hesaplamaların karşılaştırıldığı çalışmanın son bölümünde, modal analiz uygulaması sunulmaktadır. Deneysel modal analiz çalışması, tek bir giriş açıklığına sahip fakat farklı kademe sayısı ve kademe açısına sahip, çember eksenli deney çubukları üzerinde yapılmıştır.

Deneysel modal analiz çalışmasının yapıldığı bölümde, tahrik noktası olarak çubuğun kalın kesitli tarafı ve ölçüm noktaları belirlenmiş olup, serbest-serbest sınır şartı, çubukların lastiklerle uygun bir yere asılmasıyla sağlanmıştır. Deneylerden elde edilen veriler, ME'scopeVES programına gönderilmiş ve burada çubukların doğal frekansları ve mod şekilleri belirlenmiştir. Bu elde edilen deney sonuçları, teorik ve numerik değerlerle karşılaştırılmış, karşılaştırmalar tablolar halinde verilmiştir. Sonuçların uyum içinde olduğu görülmüştür.

Bundan sonra yapılacak çalışmalarda farklı mesnet şartları için deneyler yapılabilir. Mod şekilleri ve grafikler halinde sunulup mod geçişlerine bakılabilir. Sürekli değişken kesitli çubuklar için aynı çalışmalar yapılabilir. Ansys paket programında, hekzagonal eleman tipi yerine BEAM (kiriş) eleman kullanılarak sonlu eleman çözümü yapılabilir ve sonuçlar karşılaştırılarak aradaki farkların ne kadar değiştiği gözlemlenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Love, A.E.H.**, 1994. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication, New York.
- [2] **İnan, M.**, 1996. *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İTÜ Yayını, İstanbul.
- [3] **İnan, M.**, 1967. *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ Yayını, İstanbul.
- [4] **Cinemre, V.**, 1982. *Çubuk Teorisinde Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri*, İTÜ Dergisi, Cilt 40, No:3-6.
- [5] **Timoshenko, S., Goodier, J.N.**, 1951. *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [6] **Pilkey, W., D.**, 2002. *Analysis and Design of Elastic Beams Computational Methods*, John Wiley and Sons.
- [7] **Den Hartog, J.P.**, 1952. *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [8] **Varniere De Irassar, P.L., Laura, P.A.A.**, 1986. A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.116, 580-584.
- [9] **Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L., Carnicer, R., Berteo, R.**, 1988. A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration*, V.120(1), 95-105.
- [10] **Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Berteo, R., Villaggi, A.**, 1989. In-Plane Vibrations of Non-Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.129(2), 181-200.
- [11] **Rossi, R.E., Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L.**, 1989. In-Plane Vibrations of Cantilevered Non-Circular Arcs of Non-Uniform Cross-Section with a Tip Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 129, 201-213.
- [12] **Auciello, N.M., Rosa, M.A.**, 1994. Free Vibrations of Circular Arches:A Review, *Journal of Sound and Vibration*, V.176(4), pp. 433-458.
- [13] **Rossi, R.E., Laura, P.A.A.**, 1995. Numerical Experiments on Dynamic Stiffening of a Circular Arch Executing In-Plane Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, V.187(5), 897-909.
- [14] **Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsuda, H., Morita, C.**, 1995. In-Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams with Variable Cross-Sections, *Journal of Sound and Vibration*, 187, 381-401.

- [15] **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., Thwaites, S.,** 1996. Asymptotic Analysis of the free in-Plane Vibrations of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.196(5), 659-680.
- [16] **Tong, X., Mrad, N., Tabarrok, B.,** 1998. In-Plane Vibration of Circular Arches with Variable Cross-Sections, *Journal of Sound and Vibration*, V.212(1), 121-140.
- [17] **Arpacı, A., Tüfekçi, E.,** 1998. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotary Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856.
- [18] **Tüfekçi, E.,** 1999. Exact Solution of In-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia-Pacific Vibration Conference '99*, V.2, 1158-1163, Singapore.
- [19] **Tüfekçi, E.,** 2001. In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Section, *Proceedings of IMAC XIX, A Conference on Structural Dynamics*, V.2, 1688-1694, Florida, A.B.D.
- [20] **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2006. Exact Solution of Free In-Plane Vibration of a Stepped Circular Arch, *Journal of Sound and Vibration*, 295, 725-738.
- [21] **Tüfekçi, E.,** 2001. Exact Solution of Free in-Plane Vibration of Shallow Circular Arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, V.1, No:3, 409-428.
- [22] **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H.,** 1999. Low-Frequency Mode Transition in the Free in-Plane Vibration of Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration*, V.228(1), 69-90.
- [23] **Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.,** 2000. Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation, *Journal of Sound and Vibration*, V.219(1), 23-33.
- [24] **Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.,** 2000. Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4871-4891.
- [25] **De Rossa, M.A., Franciosi, C.,** 2000. Exact and Approximate Dynamic Analysis of Circular Arches Using DQM, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 1103-1117.
- [26] **Lin, S.M., Lee, S.Y.,** 2001. Closed Form Solution for Dynamic Analysis of Extensional Circular Timoshenko Beams with General Elastic Boundary Conditions, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 227-240.
- [27] **Tüfekçi, E., Özdemirci, Ö.,** 2002. On the Dynamic Stiffening of a Stepped Circular Arch: Exact Solution, *6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Paper No. APM-067, Istanbul, Türkiye.

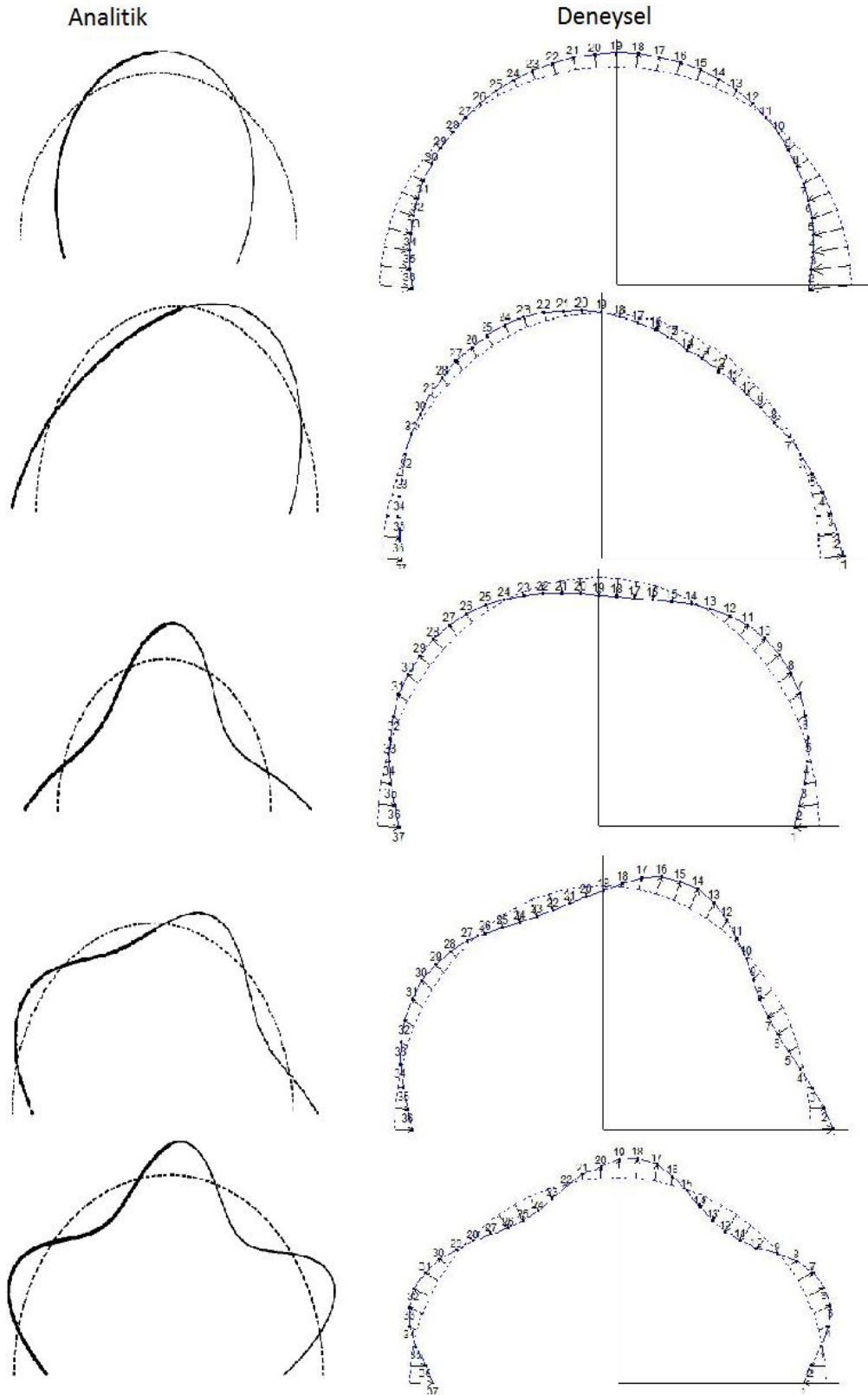
- [28] **Liu, G.R., Wu, T.Y.**, 2001. In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, V.43, 2597-2611.
- [29] **Karami, G., Malekzadeh, P.**, 2004. In-Plane Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-Sections Using Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration*, 274, 777-799.
- [30] **Kang, B., Riedel, C.H., Tan, C.A.**, 2003. Free Vibration Analysis of Planar Curved Beams by Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, 260, 19-44.
- [31] **Sophianopoulos, D.S., Michaltsos, G.T.**, 2003. Analytical Treatment of In-Plane Parametrically Excited Undamped Vibrations of Simply Supported Parabolic Arches, *Journal of Vibration and Acoustics*, 125, 73-79.
- [32] **Rosen, A., Gur, O.**, 2009. A Transfer Matrix Model of Large Deformations of Curved Rods, *Computers and Structures*, basım aşamasında.
- [33] **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.**, 1999. Two-Noded Locking Free Shear Flexible Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 265-280.
- [34] **Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B.**, 2000. Free Vibration of Arches based on a Coupled Polynomial Displacement Field, *Computers and Structures*, 78, 583-590.
- [35] **Litewka, P., Rkowski, J.**, 2001. Free Vibrations of Shear-Flexible and Compressible Arches by FEM, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 273-286.
- [36] **Wu, J.S., Chiang, L.K.**, 2003. Free Vibration Analysis of Arches using Curved Beam Elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 1907-1936.
- [37] **Wu, J.S., Chiang, L.K.**, 2004. A New Approach for Free Vibration Analysis of Arches with Effects of Shear Defformation and Rotatory Inertia Considered, *Journal of Sound and Vibration*, 277, 49-71.
- [38] **Yang, F., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E.**, 2008. Free In-Plane Vibration of General Curved Beams Using Finite Element Method, *Journal of Sound and Vibration*, 318, 850-867.
- [39] **Cannarozzi, M., Molari, L.**, 2008. A Mixed Stressed Model for Linear Elastodynamics of Arbitrarly Curved Beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74, 116-137.
- [40] **Kim, J.G., Park, Y.L.**, 2006. Hybrid-Mixed Curved Beam Elements with Increased Degrees of Freedom for Static and Vibration Analyses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68, 690-706.
- [41] **Kim, J.G., Park, Y.K.**, 2008. The Effect of Additional Equilibrium Stress Functions on the Three-Node Hybrid Mixed Curved Beam Element, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22, 2030-2037.

- [42] **Sengupta, D., Dasgupta, S.**, 1997. Static and Dynamic Applications of a Five Noded Horizontaly Curved Beam Element with Shear Deformation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1801-1819.
- [43] **Tüfekçi, E., Dogruer, O.Y.**, 2006. Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section, *Journal of Engineering Mechanics*, 132, 600-609.
- [44] **Kim, J.G., Lee, J.K.**, 2008. Free Vibration Analysis of Arches Based on the Hybrid-Mixed Formulation with Consistent Quadratic Stress Functions, *Computers and Structures*, 86, 1672-1681.
- [45] **Rubin, M.B., Tüfekçi, E.**, 2005. Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of accosserat point, *Computer Methods, Journal of Sound and Vibration*, 286, 799-816.
- [46] **Ewins, D., J.**, 2000. *Modal Testing, Theory, Practice, and Application*, Research Studies Press.
- [47] **Cauberghe, B., Guillaume, P., Verboben, P., Parloo, E.**, 2003. Identification of Modal Parameters Including Unmeasured Forced and Transient Effects, *Journal of Sound and Vibration*, 265, 609-625.
- [48] **Ren, W.X., Peng, X.L., Lin, Y.Q.**, 2005. Experimental and Analytical Studies on Dynamic Characteristics of a Large Span Cable-Stayed Bridge, *Engineering Structures*, 27, 535-548.

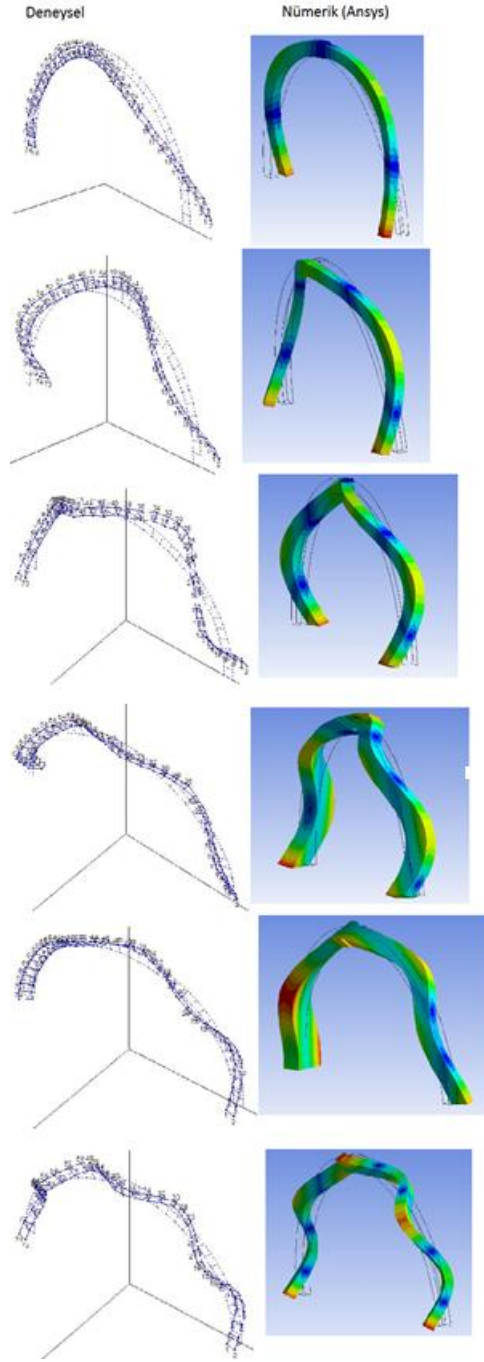
EKLER

EK A.1 : 180 derece kiriş açıklığına sahip çubuklara ait düzlem içi ve düzlem dışı mod şekilleri

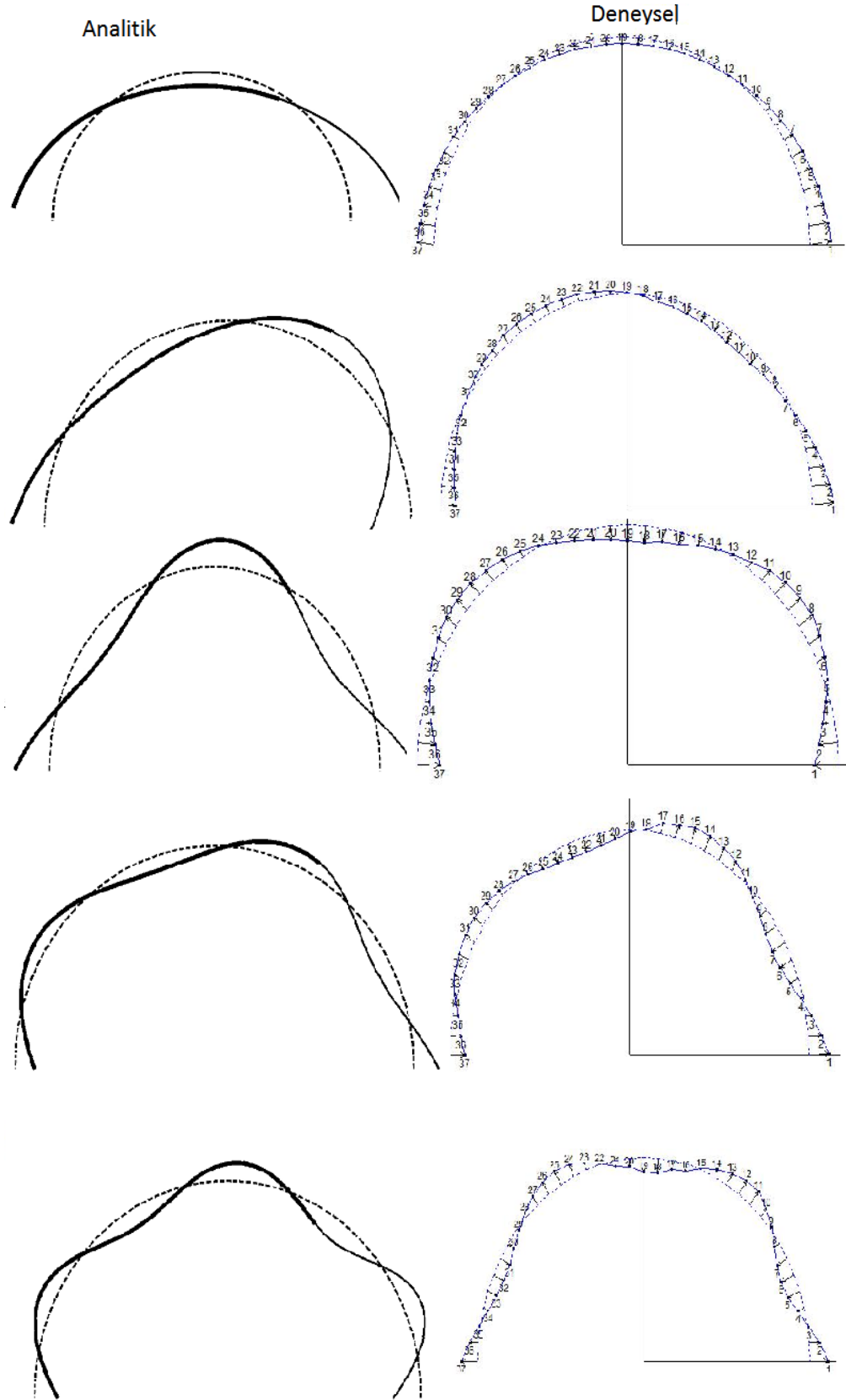
EK A.1



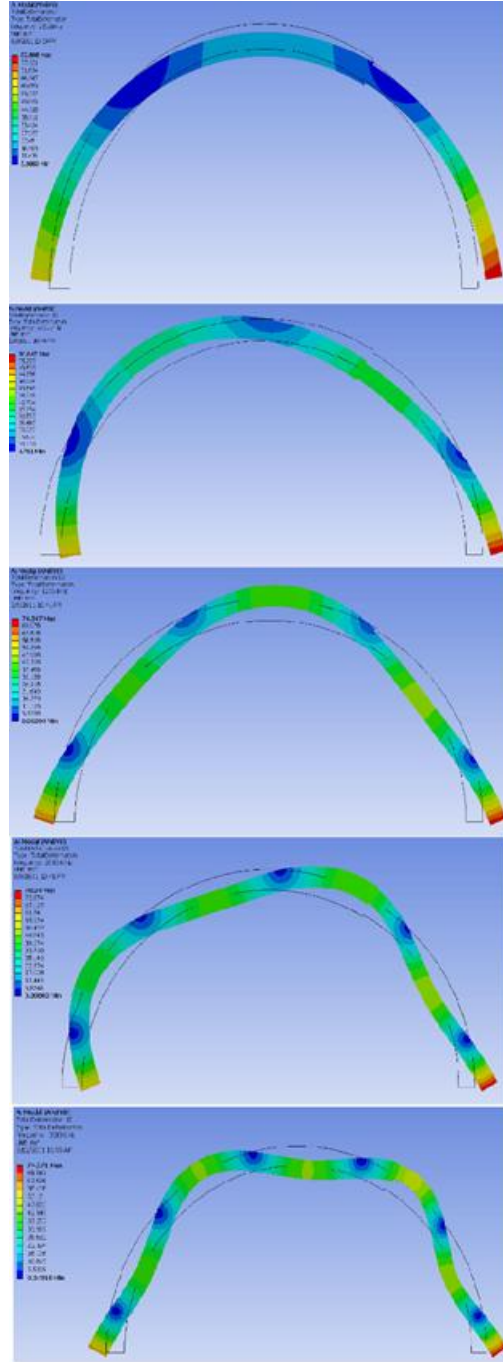
Şekil A.1 : Tek kademeli 90 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri



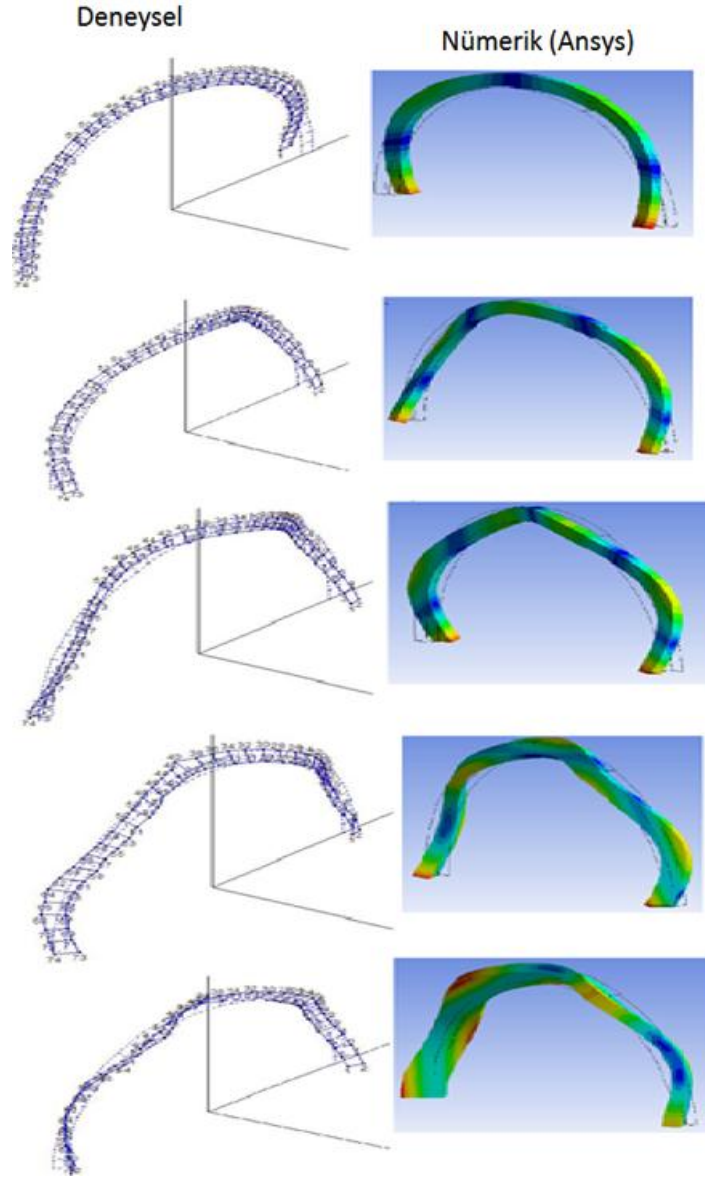
Şekil A.3 : Tek kademeli 90 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve numerik mod şekilleri



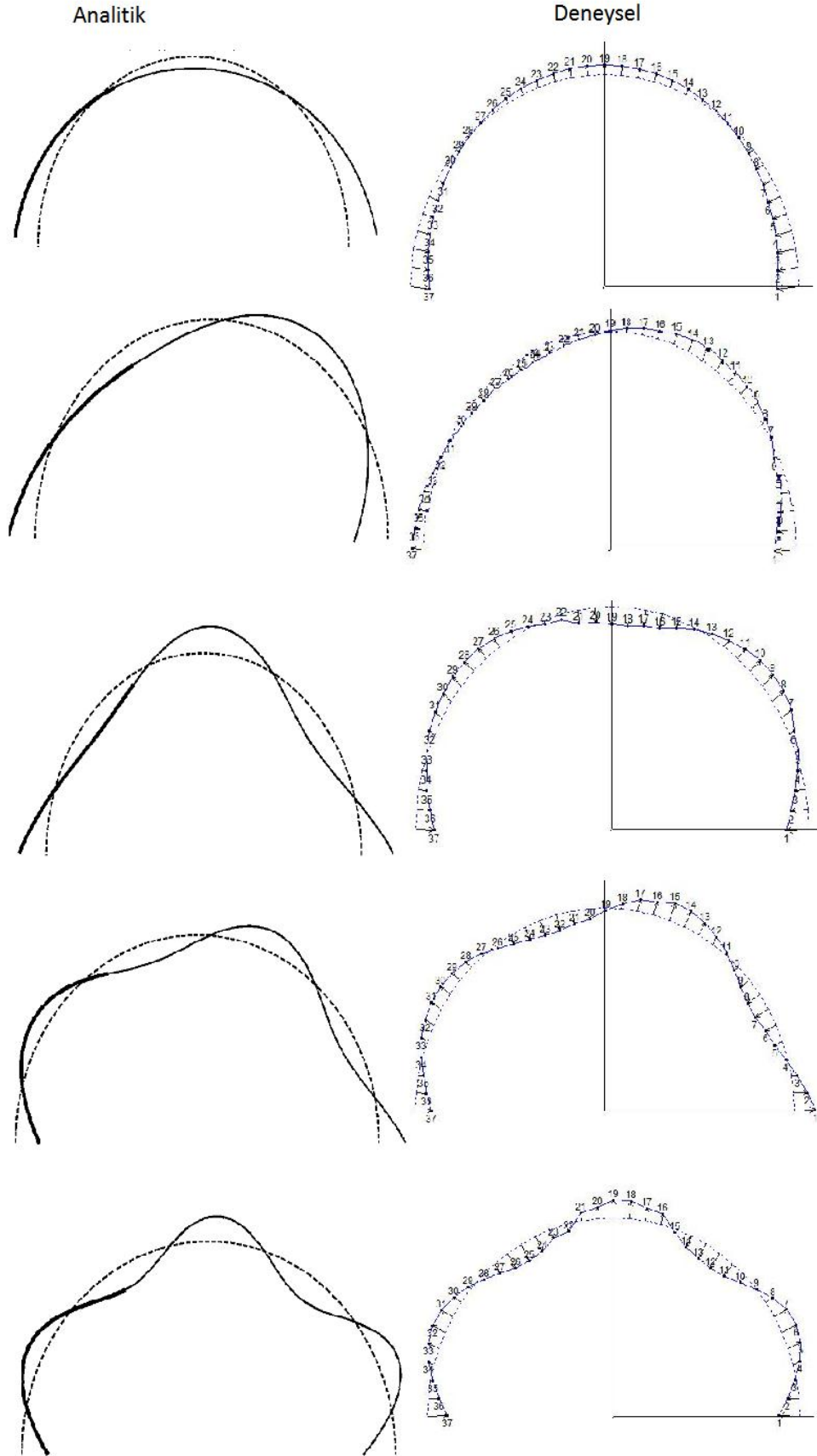
Şekil A.4 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri



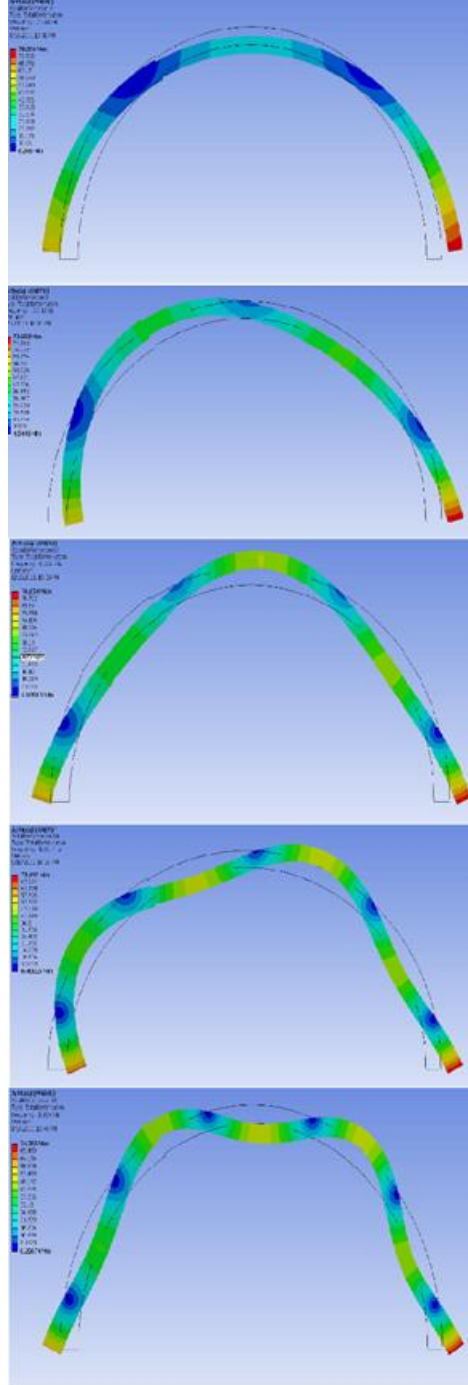
Şekil A.5 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri



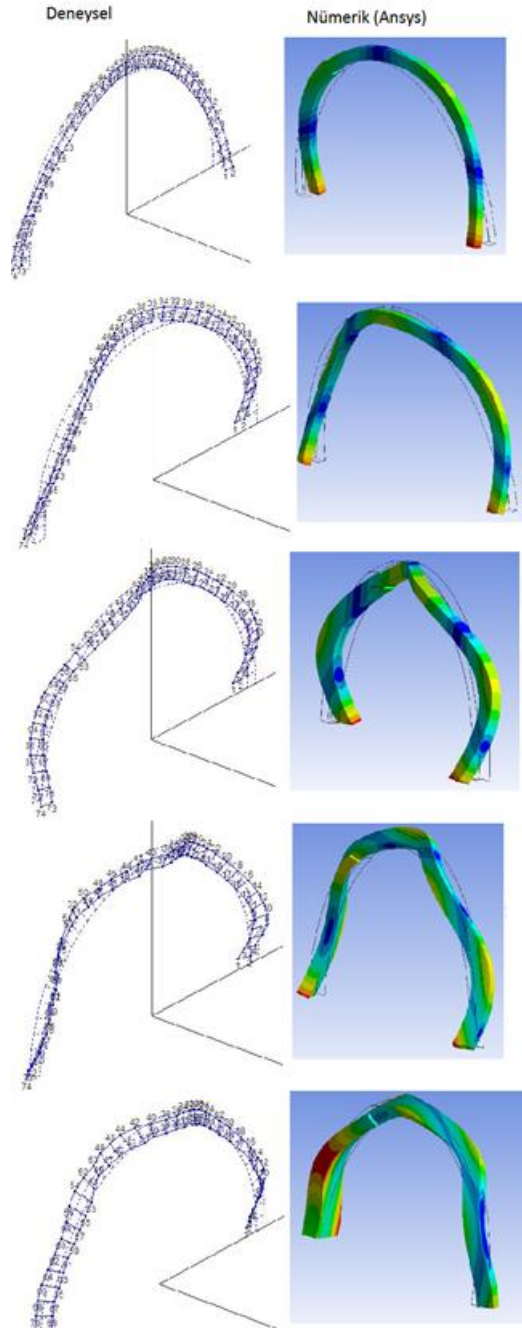
Şekil A.6 : Tek kademeli 60 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri



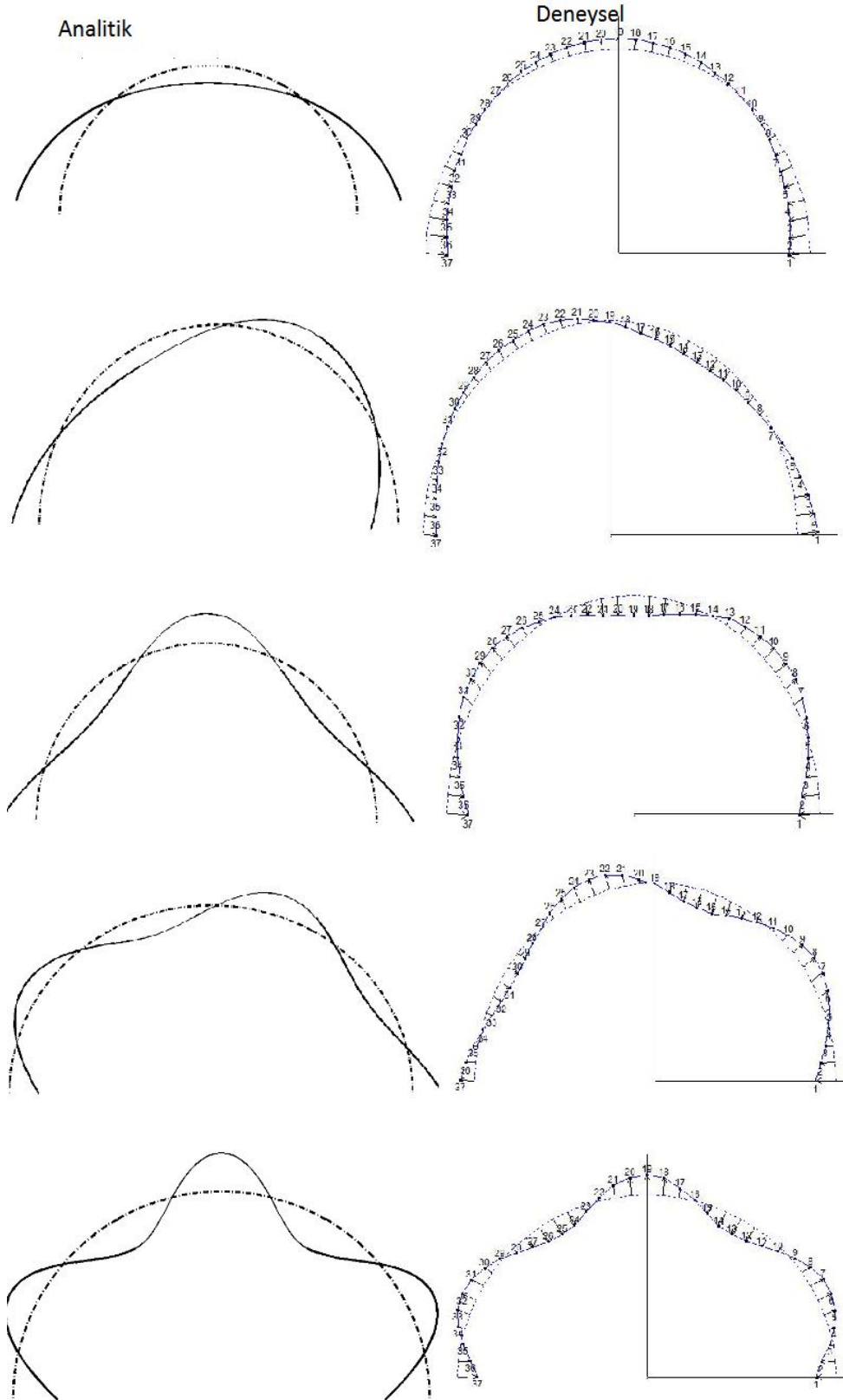
Şekil A.7 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri



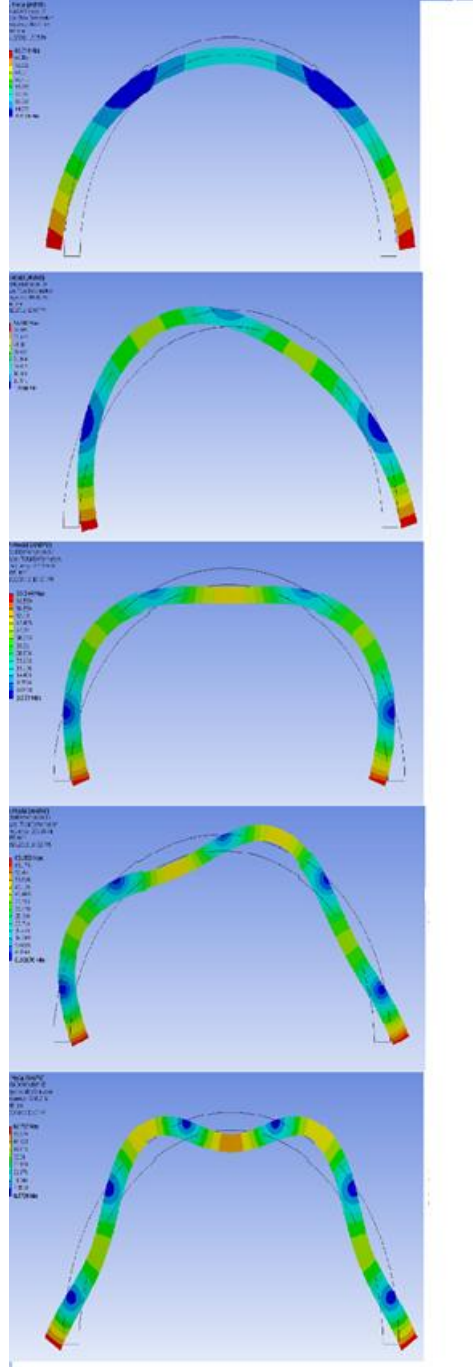
Şekil A.8 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri



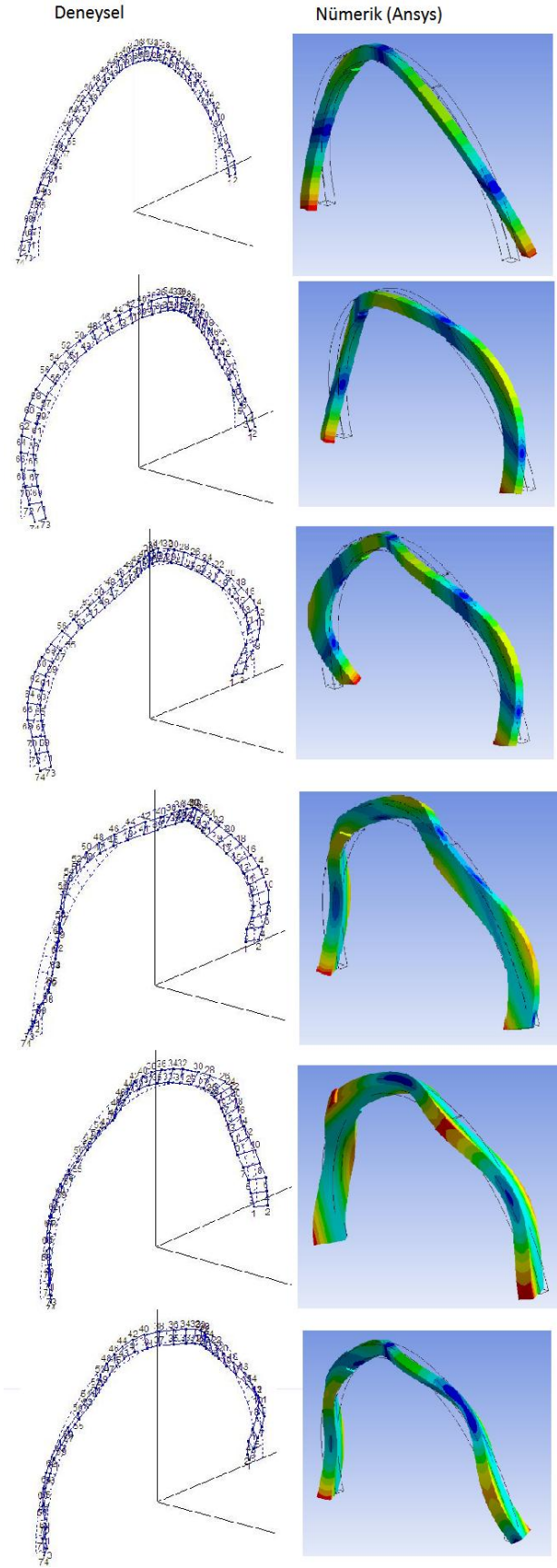
Şekil A.9 : Tek kademeli 120 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri



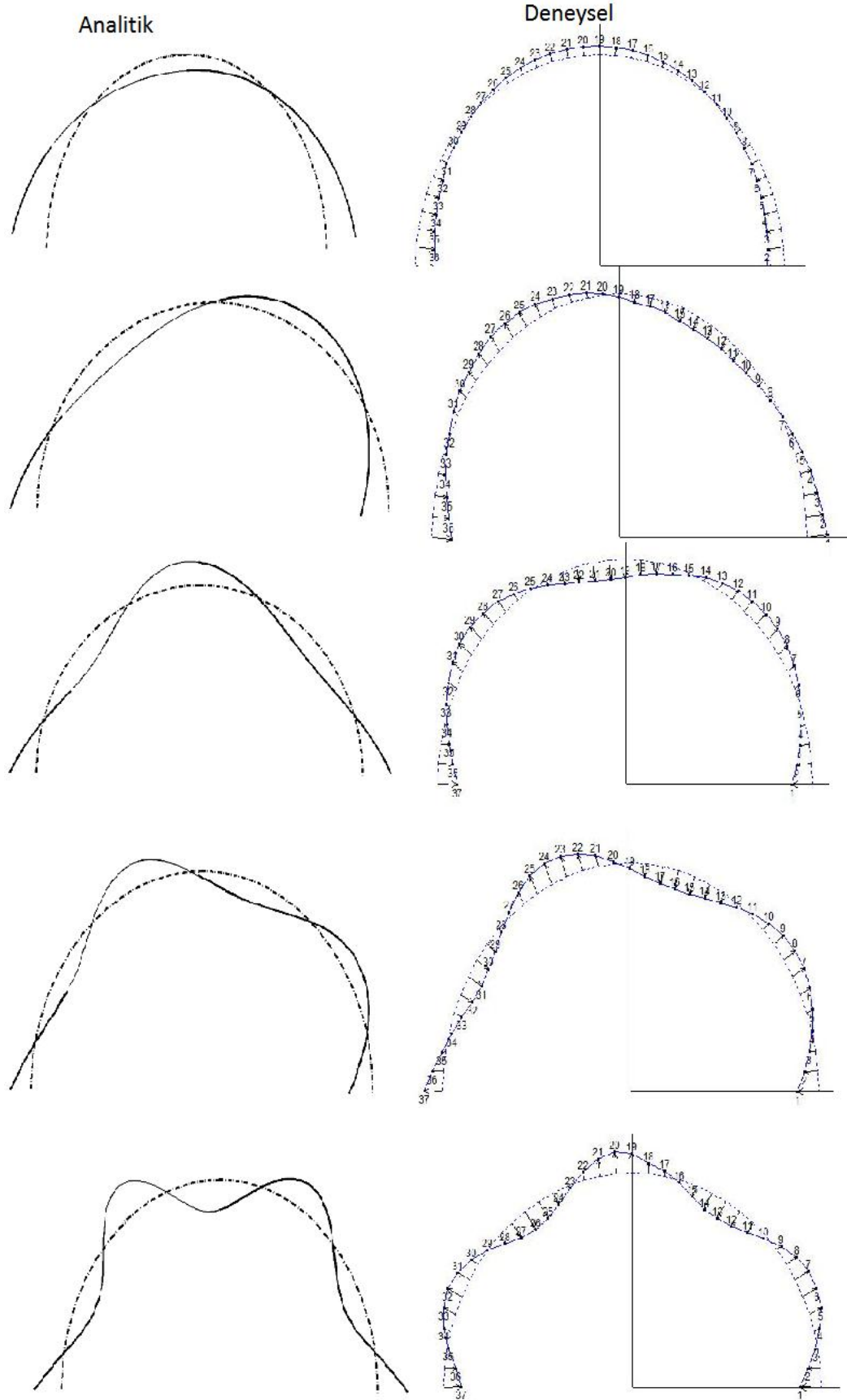
Şekil A.10 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri



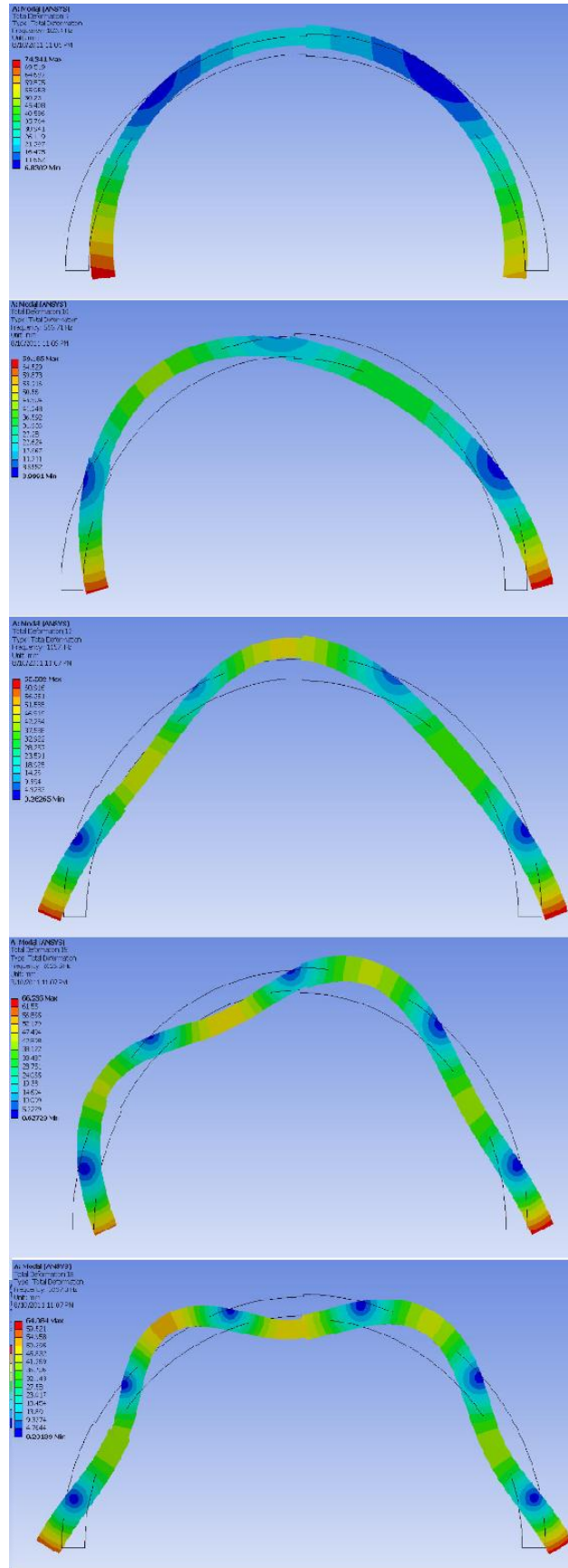
Şekil A.11 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereceli çubuğa ait düzlem içi nümerik mod şekilleri



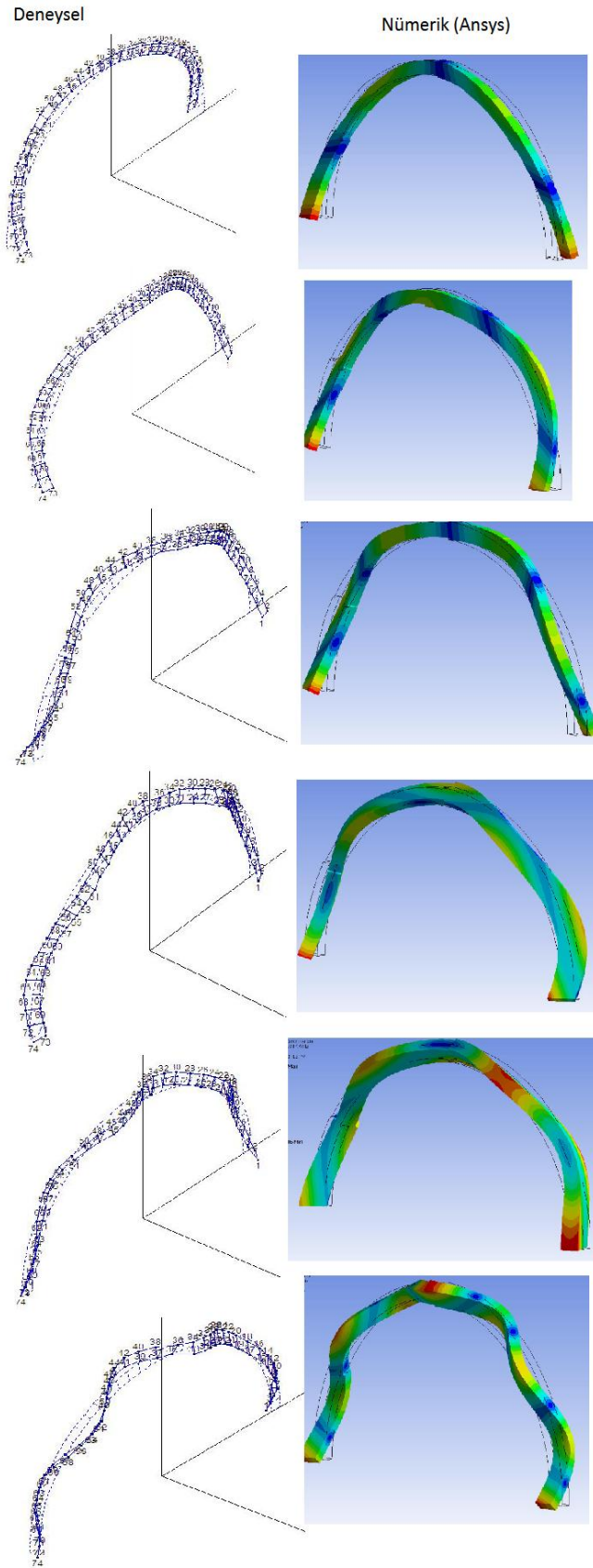
Şekil A.12 : İki kademeli PSI:60 PS1:-30 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri



Şekil A.13 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem içi analitik ve deneysel mod şekilleri



Şekil A.14 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem içi numerik mod şekilleri



Şekil A.15 : İki kademeli PSI:60 PS1:-60 dereceli çubuğa ait düzlem dışı deneysel ve nümerik mod şekilleri

Çizelge A.1 : Tek kademeli serbest-serbet çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneysel
1	171.8	171.6	163.8
2	530.7	530.3	505.8
3	1131.7	1133.3	1094.3
4	1889.6	1893.7	1853.1
5	2840	2842.4	2762.1

Çizelge A.2 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneysel
1	251.8	251.5	245.3
2	549.1	548.3	537.2
3	1036.5	1133.3	1010.9
4	1502.8	1499	1460.7
5	1999.8	2000.7	1978.7
6	2219.2	2217.6	2181.2
7	3180.1	3176.7	3125.4

Çizelge A.3 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneyisel
1	216.1	215.8	216.7
2	572.5	572.5	573.2
3	1202.6	1205.8	1191.8
4	2038.2	2040.6	2043.9
5	3032.8	3038.6	3034.4

Çizelge A.4 : Tek kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneyisel
1	264.4	264	263.8
2	572.7	571.8	568.9
3	1045.2	1043.1	1038.8
4	1480	1476.8	1471.8
5	1944.9	1945.3	1921.3
6	2218.2	2216.2	2207.3
7	3161.8	3157.4	3151.8

Çizelge A.5 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneyisel
1	168.9	168.6	165
2	566.6	564.8	554.9
3	1230.1	1231.9	1211.9
4	2015.3	2018.6	1986.1
5	3042.9	3039.8	2992.7

Çizelge A.6 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = -0.166$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = 0.166$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneyisel
1	247.7	247.1	245.6
2	537.4	536.3	532.5
3	1033.8	1031.1	1025.1
4	1479.4	1474.2	1465.4
5	1956.6	1956.6	1953.4
6	2144.3	2144.5	2145.3
7	2605.8	2605.9	2608.5
8	3171.4	3166	3162

Çizelge A.7 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem içi doğal frekans

değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneysel
1	180.8	180.4	178.1
2	556.3	556.7	547.3
3	1158.9	1157	1139.7
4	2025.7	2026.5	1998.2
5	3039.5	3037.3	2997.8

Çizelge A.8 : İki kademeli serbest-serbest çubuğa ait düzlem dışı doğal frekans

değerleri ($\frac{\psi}{\phi_T} = 0.0$ ve $\frac{\psi}{\phi_T} = -0.33$)

Mod no	Analitik	Nümerik (Ansys)	Deneysel
1	252.1	251.8	250.9
2	551.3	549.5	546.9
3	1031.6	1029.5	1024
4	1450.4	1448.4	1437.9
5	2123.5	2121.2	2124
6	2686.9	2686.4	2697.5
7	3182.6	3178.4	3175.4

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Doğukan ÇETİNYOL

Doğum Yeri ve Tarihi: Iğdır / 03.12.1984

Lisans Üniversitesi: Yıldız Teknik Üniversitesi

Doğukan ÇETİNYOL, ilk ve orta öğretimini tamamladıktan sonra lise tahsilini Pertevniyal Lisesi'nde sürdürerek, 2003 yılında Fen Bilimleri Bölümü'nden mezun oldu. 2004 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı. Dört yıllık lisans eğitiminin ardından 2008 yılında makina mühendisi olarak mezun oldu.

2008 yılında, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Katı Cisimlerin Mekaniği programında yüksek lisans eğitimine başlayan Doğukan ÇETİNYOL halen özel bir şirkette çalışmaktadır.