YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK VE ÇOK AMAÇLI OYUNLARA ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

Yüksek Matematikçi Adem Cengiz ÇEVİKEL

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 08 Mart 2011
Tez Danışmanı **:** Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU (YTÜ)
Tez Jüri Üyeleri **:** Prof. Dr. Mustafa BAYRAM (YTÜ)
: Prof. Dr. Emanullah HIZEL (İTÜ)
: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ (YTÜ)
: Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU (İÜ)

İSTANBUL, 2011

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ

ÇALP	Çok Amaçlı Lineer Programlama
LP	Lineer Programlama
NLP	Lineer Olmayan Programlama

ÇİZELGE LİSTESİ

sayfa

ÖNSÖZ

Oyun Teorisi, matematiksel temelleri John von Neumann tarafından atılan çatışma ve işbirliği durumlarını ele almada kullanılan çok değerli bir araçtır. Biz bu çalışma kapsamında bulanık hedefli ve bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için bir çözüm modeli önerdik. Ayrıca Doğa'ya karşı bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyunlar oynayan oyuncuların ortaklıklar kurarak ortak kazançlarını dolayısıyla da bireysel kazançlarını arttırabileceklerini gösterdik.

Çalışmalarım sırasında bilimsel ve insani katkılarından dolayı çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet AHLATÇIOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme, çalışmalarım boyunca tüm anlayışı ve desteği ile yanımda olan sevgili eşim Ayşe ÇEVİKEL'e ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

ÖZET

BULANIK VE ÇOK AMAÇLI OYUNLARA ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

Bu çalışmada bulanık hedefli ve bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için bir lineer iteratif çözüm yöntemi sunulmuştur. Ayrıca Doğa'ya karşı bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyun oynayan oyuncuların ortaklıklar (koalisyonlar) kurarak ortak kazançlarını ve dolayısıyla da bireysel kazançlarını arttırdıkları ispatlanmıştır. Burada oyuncuların stratejilerini birleştirerek tek bir oyuncu gibi Doğa'ya karşı oynadıkları bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyunların optimal oyun değerleri ile bulanık karakteristik fonksiyonlu bir ortaklı oyun kurgulanabileceği gösterilmiştir. Üstelik bu şekilde kurgulanan bulanık karakteristik fonksiyonunun süpertoplanabilirlik şartını sağladığı da ispatlanmıştır. Böylece Bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlardan bulanık ödemeli ortaklı oyunlara bir geçiş sağlanmaktadır. Kurgulanan ortaklı oyundan elde edilen maksimum kazancın (oyun değerinin) oyuncular arasında adil paylaşımı, Shapley vektörü ile yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık hedef, bulanık ödeme, iki kişili sıfır toplamlı oyun, koalisyon, bulanık karakteristik fonksiyon, süpertoplanabilirlik, ortaklı oyun, Shapley vektörü.

ABSTRACT

APPROACHES OF SOLUTION FOR FUZZY AND MULTIOBJECTIVE GAMES

In this study we offered a linear interactive solution concept for multiobjective two-person zero-sum games with fuzzy payoffs and fuzzy goals. Moreover, we proved that players who are playing a zero-sum game with fuzzy payoffs against nature are able to increase their joint payoff, and hence their individual payoffs by cooperating. It is shown that, a cooperative game with the fuzzy characteristic function can be constructed via the optimal game values of the zero-sum games with fuzzy payoffs against nature at which players' combine their strategies and act like a single player. It is also proven that, the fuzzy characteristic function that is constructed in this way satisfies the superadditivity condition. Thus we considered a transition from two-person zero-sum games with fuzzy payoffs to cooperative games with fuzzy payoffs. The fair allocation of the maximum payoff (game value) of this cooperative game among players is done using the Shapley vector.

Keywords: Fuzzy goal, fuzzy payoff, two-person zero-sum game, coalition, fuzzy characteristic function, superadditivity, cooperative game, Shapley vector.

1. GİRİŞ

1928 yılında John von Neumann'ın "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" ("On the Theory of Parlor Games") (Osborne, 2004) çalışması ile temelleri atılan Oyun Teorisi bu tarihten itibaren hem akademisyenler hem de uygulamacılar arasında çatışma ve işbirliği durumlarını ele almada kullanılan çok değerli bir araç olmuştur. Müşteri için rekabet eden firmalar, amaçları için savaşan ülkeler, iş ve politika dünyasında karşılaşılan strateji savaşları ve bunun gibi birçok gerçek hayat problemi çözümü üzerine çalışan Oyun Teorisine gün geçtikçe ilgi daha da artmaktadır. Birçok problem, birden çok oyuncu olması halinde bile iki kişili bir oyun olarak modellenebilir. Örneğin, pazarda kazanmak amacıyla rekabet eden yatırımcının karşısında aynı pazarı paylaşan birçok rakip yatırımcı ve müşteri vardır. Bu rakip yatırımcılar ve müşterilerin kümesi tek bir yatırımcı (Doğa oyuncusu) olarak tanımlanabilir. Bu gibi durumlarda tam karşıt amaçları bulunan oyuncuların hangi stratejilerinin kesin olarak hangi olasılıklarla oynanması gerektiğinin belirlenebilmesi için iki kişili sıfır toplamlı oyunların çözümünden yararlanılır. Oyuncular bireysel kazançlarını arttırabilmek veya tek başlarına yapamayacakları işleri birlikte başarabilmek için güçlerini birleştirerek, aralarında ortaklıklar kurarlar. Bu ortaklığın nasıl yapılacağı ve elde edilen toplam kazancın oyuncular arasında nasıl dağıtılacağı konusu ortaklı oyun teorisi ile incelenir.

Matematiksel olarak tanımlanan problemlerin gerçek hayattaki uygulamalarında parametreler kesin olarak tanımlanamamakta, belirsizlik içeren bu durumlarla çok sık karşılaşılmaktadır. Bu belirsizliklerin modellere yansıtılması hayati önem taşımaktadır. Bu belirsizlikler L.A.Zadeh (1965) tarafından ortaya atılan bulanık küme teorisi yardımıyla modellere yansıtılabilmektedir.

Bulanık küme teorisi, bilim ve teknoloji dünyasında bir dönüm noktası niteliğindedir. Geçmişte, genel ve özel olarak belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar, gelişigüzel bir ayrıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler teorisi aracılığıyla tanımlanmışlardır. Son yıllarda gelişen bulanık küme teorisi ise belirsizlik ifade eden terimleri ve kavramları gelişigüzel bir ayrıma tabi tutmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak, kümeler teorisi kapsamı içinde tanımlamalara imkan sağlamaktadır.

Klasik matematiksel yöntemlerde, verilerin tam olması gereksiniminden dolayı bu yöntemlerle gerçek hayattaki sistemleri modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık, matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uyarlama alanı oluşturmak suretiyle bu zorluğu ortadan kaldırmış ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlamıştır. Örneğin bir kişi için “1.70 boyundadır” tanımlaması yerine, sadece “orta boyludur” tanımlamasının yapılması birçok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir bilgi indirgenmesi gerçekleştirilerek matematiksel bir tanımlama yerine, dilsel (linguistik) değişken adı verilen daha kolay anlaşılabilen bir değişken ile niteliksel bir tanımlama yapılabilir. "Kalabalık" veya "kalabalık değil" gibi kelimeler ve ifadelerle tanımlanabilen dilsel değişkenlerin değerleri bulanık kümeler ile ifade edilir. Örneğin; bir sınıftaki öğrenci sayısını belirtecek dilsel değişkenin alabileceği "kalabalık", "kalabalık değil" ve "çok kalabalık" değerlerinin her biri ayrı ayrı bulanık kümeler ile ifade edilir.

Bulanık ortamda oyun teorisi çalışmaları 1970li yılların ortalarından beri incelenmektedir. Bulanık ortamda iki kişili ortaksız oyunları ilk olarak Butnariu ele aldı (Butnariu, 1978). Butnariu bulanık ortamda n-kişili ortaksız oyunları inceledi ve böyle oyunlar için bir denge çözümü bulma yöntemi sundu (Butnariu, 1980). Buckley iki kişili bulanık oyunlarda karar vericinin davranışlarını analiz etti (Buckley, 1984). Billot Butnariu’dan farklı olarak bir tercih etme bağıntısı tanımladı ve n-kişili ortaksız oyunların denge çözümlerini inceledi (Billot, 1992). Campos iki kişili sıfır toplamlı oyunların maximin çözümünü inceledi (Campos, 1989). Campos’un çalışmasında ödeme matrisinin elemanları bulanık sayılar ile gösterildi ve maximin çözümü hesaplamak için bulanık lineer programlama problemleri kullanıldı. Bulanık hedefin tanımlanmasıyla Sakawa ve Nishizaki çoklu ödeme matrisleri ile çoklu ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunları incelediler (Sakawa ve Nishizaki, 1992). Ayrıca Sakawa ve Nishizaki bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunların maximin çözümlerini (Sakawa ve Nishizaki, 1994, 1995) ve çoklu bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı olmayan oyunların denge çözümlerini incelediler (Nishizaki ve Sakawa, 1995, 2000a).

Ortaklı bulanık oyunların araştırmaları bulanık koalisyonun tanımlanmasıyla başladı. İlk olarak Aubin ve Butnariu ortaklı bulanık oyunları incelediler. Aubin bulanık koalisyonlu n-kişili ortaklı oyunlar için Shapley (1953) değeri ve çekirdek kavramlarını inceledi (Aubin, 1979). Butnariu da benzer çalışmalar yaparak n-kişili ortaklı oyunlarda koalisyon kavramını geliştirdi ve sınırsız sayıda oyuncunun olduğu bulanık oyunları inceledi (Butnariu, 1987).

Çok amaçlı oyunların çalışmaları 1960lı yılların ortalarında başladı. Çok amaçlı oyunlar ile ilgili ilk çalışmayı Blackwell yaptı. Blackwell çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için maximin problemlerini inceledi. Blackwell (1956). Contini, Olivetti ve Milano çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlara çalıştılar. Onlar çalışmalarında iki oyuncudan birisini Doğa oyuncusu olarak ele aldılar (Contini vd., 1966). Cook çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlarda amaçların her biri için bir hedef tanımladı (Cook, 1976). Sakawa ve Nishizaki bulanık hedefleri tanımlayarak bulanık ortamda çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunları incelediler (Sakawa ve Nishizaki, 1992) daha sonra bu fikirlerini bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için geliştirdiler (Sakawa ve Nishizaki, 1994). Ayrıca Sakawa ve Nishizaki bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı olmayan oyunların denge çözümlerini elde etmek için bir hesaplama metodu geliştirdiler (Sakawa ve Nishizaki, 1995, 2000).

"Bulanık ve Çok Amaçlı Oyunlara Çözüm Yaklaşımları" isimli çalışmamız yedi bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde Oyun Teorisi ele alınmıştır. Bu bölümde temel kavramlar kısmında oyuncular, stratejiler ve ödeme fonksiyonu kavramları verilmiştir. Ortaksız oyunlar kısmında, belirli tanımlamalar verilmiş ve sıfır toplamlı oyunlar konusu üzerinde ayrıntılı bir şekilde durulmuştur. Son olarak ortaklı oyunlar kısmında ise koalisyon, karakteristik fonksiyon, süpertoplanabilirlik, impütasyon, baskınlık bağıntısı ve çekirdek kavramlarının yanı sıra ortaklı oyundan kazanılan kazancın adil paylaşımını sağlayan shapley vektörü verilmiştir.

Bulanık Teori başlıklı üçüncü bölümde bulanık sayılar ve bulanık kümeler ile ilgili temel tanımlar ve aritmetik işlemler tanımlanmıştır.

Çalışmamızın dördüncü bölümünde Bulanık hedefli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar incelenmiş tek amaçlı ve çok amaçlı oyunlar ayrı ayrı ele alınmıştır.

Beşinci bölümde bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar incelendi. Bulanık sayıların sıralanması ve bulanık ödemeli oyunların uygun çözümleri tanımlanarak bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için Li ve Yang'ın çözüm modeli sunuldu. Li ve Yang'ın çözüm modelinde alternatif çözümlerin olması durumu dikkate alınmamıştı. Bu bölümde alternatif çözümlerin olması durumunu da içeren bir algoritma tanımlandı.

Bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar başlıklı altıncı bölümde bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunların çözümleri ile ilgili literatürde var olan Sakawa'nın metodu sunuldu ve Dinkelbach algoritmasından yararlanılarak çözüme daha hızlı ulaşılacak bir metot geliştirildi.

Çalışmamızın son bölümü olan yedinci bölümde ise Doğa'ya karşı bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyun oynayan oyuncuların ortaklıklar (koalisyonlar) kurarak ortak kazançlarını ve dolayısıyla da bireysel kazançlarını arttırdıkları ispatlanmıştır. Burada oyuncuların stratejilerini birleştirerek tek bir oyuncu gibi Doğa'ya karşı oynadıkları bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyunların optimal oyun değerleri ile bulanık karakteristik fonksiyonlu bir ortaklı oyun kurgulanabileceği gösterilmiştir. Üstelik bu şekilde kurgulanan bulanık karakteristik fonksiyonunun süpertoplanabilirlik şartını sağladığı da ispatlanmıştır. Ayrıca, kurgulanan ortaklı oyundan elde edilen maksimum kazancın (oyun değerinin) oyuncular arasında adil paylaşımı, 1953 yılında Lloyd Shapley tarafından ortaya atılan Shapley vektörü ile yapılmıştır. Tezimizde matematiksel hesaplamalar için Maple 12 bilgisayar programından faydalanılmıştır.

2. OYUNLAR TEORİSİ

Oyun Teorisi çatışma ve işbirliği durumlarının mantıksal analizidir (Straffin, 1993). Bilindiği gibi Oyun Teorisi'nin temelleri 1928 yılında John von Neumann tarafından Almanca yayımlanan "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" makalesi ile atılmıştır. Ancak Oyun Teorisi literatürünün asıl başlangıcının 1944 yılında matematikçi John von Neumann ve ekonomist Oskar Morgenstern tarafından yayınlanan "Theory of Games and Economic Behavior" kitabı olduğu kabul edilmektedir. Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

Oyun Teorisi karar vericilerin etkileşim halinde olduğu durumları anlamamıza yardımcı olmayı amaçlar. 1950'lerde Oyun Teorisine dayanan modeller ekonomi teorisinde ve politik bilimlerde kullanılmaya başlanmıştır. Sonrasında bu modeller mikroekonomi teorisinde kullanılan modeller arasında baskın hale gelmiş ve ekonominin diğer birçok alanında da kullanılmaya başlanmıştır (Osborne, 2004). Oyun Teorisinin ekonomi teorisi üzerine uygulamaları çok değer görmüştür ki bunun en açık ispatı Nobel ekonomi ödülleridir. 1968 yılından bu yana İsveç Kraliyet Bilimleri Akademisi tarafından her yıl düzenli olarak verilen Nobel Ekonomi Ödülü birçok bilim adamına Oyun Teorisi içerikli çalışmalarından dolayı verilmiştir. Bu ödüllerden bir kaçı şöyle sıralanabilir: 1994 yılında Reinhard Selten, John F.Nash Jr., ve John C. Harsanyi ortaksız Oyun Teorisindeki denge konusunda öncü çalışmalarından, 2005 yılında Robert J. Aumann ve Thomas C. Schelling ekonomik işbirliği ve çatışma konularına Oyun Teorisi kapsamında getirdikleri açıklamadan ve son olarak 2007 yılında da Leonid Hurwicz, Eric Maskin ve Roger Myerson mekanizma tasarım teorisinin temellerini atmalarından dolayı Nobel Ekonomi Ödülüne layık görülmüşlerdir.

Oyun Teorisi günlük hayatımızda aldığımız kararların çoğunda gizlidir. Stratejik düşünme sanatı olarak görülen Oyun Teorisinde rekabet halindeki oyuncular rakiplerinin stratejilerini de dikkate alarak kendi amaçları doğrultusunda optimal stratejilerini belirlemeye çalışırlar. Dolayısıyla ekonomi dünyasındaki rekabet ortamını modellemek için Oyun Teorisi çok iyi bir araçtır.

2.1 Temel Kavramlar

Bir oyun; oyuncular kümesi, stratejiler kümeleri ve ödeme fonksiyonları ile tanımlanır.

2.1.1. Tanım (Oyuncular): Oyuna kazanmak amacıyla katılan birey ya da gruplardır. Bir oyunda en az iki oyuncu mevcuttur. Oyuncuların akıl, bilgi ve deneyim bakımından rakiplerine eşdeğer olduğu kabulü yapılmaktadır. Her oyuncu, oyunu mümkün olan en fazla kazanç (kar veya ödeme) ile tamamlamak ister. Bir oyuncu analitik olarak kendisi için en iyi kararı verebilecek kapasitededir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998). Biz burada n-kişili bir oyunun oyuncular kümesini $I = \{1, 2, ..., n\}$ ile göstereceğiz. Bizim ilgilendiğimiz oyunlarda oyuncular sonlu sayıda olduğu için I kümesi sonlu bir kümedir.

2.1.2. Tanım (Stratejiler): Oyuncuların oyun esnasındaki seçenekleridir. Her oyuncunun bir takım stratejileri vardır. Stratejileri yapıları bakımından iki grupta inceleyebiliriz.

i) Davranış Stratejileri: Oyuncuların oyun esnasındaki bilinçli olarak yaptıkları hareketler bu tip stratejiler grubuna girer.

ii) Şans Stratejileri: Oyun esnasında şansa bağlı olarak ortaya çıkan hareketlerdir. Ayrıca bazı oyunlar bu iki strateji tipinin karması ile oynanır (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

Örneğin satranç oyununda şansa bağlı hareket yoktur (oyuna kimin başlayacağına karar vermek hariç). Rulet ise tamamen şansa bağlı oyunlara örnek olarak verilebilir. Briç gibi kağıt oyunlarında ise şansa bağlı olan ve olmayan hareketler mevcuttur (Owen, 1995).

Bir i oyuncusunun stratejiler kümesini S_i ile göstereceğiz. S_i kümesi oyuna dahil olan tüm oyuncular tarafından bilinen bir kümedir ve sonlu olduğu kabulü yapılmıştır. Oyunun her aşamasında i oyuncusu kendi S_i stratejiler kümesinden bir $s_i \in S_i$ stratejisini oynar. Her oyuncu bir $s_i,\ i = 1, ..., n$ stratejisini oynadığında $(s_1, s_2, ..., s_n)$ gibi bir durum ortaya çıkar. Bu şekilde tanımlanmış tüm durumlar $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ kümesinin elemanlarıdır. S kümesine durumlar uzayı denir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

2.1.3. Tanım (Ödeme Fonksiyonu): Her bir $(s_1, s_2, ..., s_n)$ durumunda i oyuncusunun kazançlarını belirleyen S durumlar uzayından $\mathbb{R}$ uzayına tanımlanmış reel değerli $\underset{s=(s_1,...,s_n)\to H_i(s)}{H_i : S \to \mathbb{R}}$ fonksiyonuna i oyuncusunun ödeme fonksiyonu denir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

2.1.4. Tanım (Ortaksız Oyunlar): Oyuncular kümesi I, $\forall i \in I$ için stratejiler kümesi S_i ve ödeme fonksiyonu H_i olmak üzere $\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i\in I}, \{H_i\}_{i\in I} \rangle$ sistemine bir ortaksız oyun denir.

Ortaksız oyunlar sabit toplamlı oyunlar ve sabit toplamlı olmayan oyunlar olmak üzere iki ana başlıkta incelenebilir. Tezimizin dayandığı temel konulardan biri iki kişili sıfır toplamlı oyunlardır.

2.1.5. Tanım (Sabit Toplamlı Oyunlar): $\forall s \in S$ için $\sum_{i \in N} H_i(s) = c \in \mathbb{R}$ (sabit) eşitliğini sağlayan $\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$ oyununa sabit toplamlı oyun denir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

2.1.6. Tanım (Denge durumu): Γ oyunundaki keyfi bir durum $s = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i, ..., s_n)$ ve bu durumda i oyuncusunun bir stratejisi s_i olsun. s durumundan sadece i oyuncusunun s_i stratejisinin yerine $s_i^{'}$ stratejisini alarak yeni bir $s = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_i^{'}, ..., s_n)$ durumunu oluşturalım. Bu durum $s \| s_i^{'}$ ile gösterilsin. $\forall i \in I$ ve $\forall s_i^{'} \in S_i$ için $H_i\left(s \| s_i^{'}\right) \leq H_i\left(s\right)$ eşitsizliğini sağlayan s durumuna bir denge durumu denir.

Diğer bir deyişle, bütün oyuncular için kabul edilebilir olan s durumuna bir denge durumu denir.

2.1.7. Tanım (Stratejik Denk Oyunlar): Oyuncuları ve strateji kümeleri aynı iki oyun $\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$ ve $\Gamma^{'} = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$ olsun. $\forall s \in S$ ve $\forall i \in I$ için $H_i^{'}(s) = kH_i(s) + c_i$ eşitliğini sağlayan $k > 0$ ve $c_i \in \mathbb{R}$ varsa Γ ve $\Gamma^{'}$ oyunlarına stratejik denk oyunlar denir.

2.1.1. Teorem: Stratejik denk oyunlar aynı denge durumuna sahiptir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

Aynı temel özelliklere sahip ortaksız oyunlar aynı denklik sınıfında incelenebilirler. Dolayısıyla denklik sınıfındaki en basit oyunun çözümü ile diğer oyunların çözümleri de elde edilebilir.

2.1.8. Tanım (Sıfır Toplamlı Oyunlar): $\forall s \in S$ için $\sum_{i \in I} H_i(s) = 0$ eşitliğini sağlayan $\Gamma = \langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$ ortaksız oyununa sıfır toplamlı oyun denir.

2.1.2. Teorem: Sabit toplamlı oyunlar sıfır toplamlı oyunlara stratejik denktir (Ahlatcıoğlu ve Tiryaki, 1998).

2.2 İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

İki kişili sıfır toplamlı bir oyunda oyuncular Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 ile gösterilsin. Oyuncu 1 ve Oyuncu 2'nin pür stratejileri kümesi sırasıyla $S_1 = (s_1^1, s_2^1, ..., s_m^1)$ ve $S_2 = (s_1^2, s_2^2, ..., s_n^2)$, ödeme fonksiyonları ise H_1 ve H_2 olsun. Oyuncu 1'in $s_i^1 \in S_1$, $i = 1, ..., m$ pür stratejisini ve Oyuncu 2'nin $s_j^2 \in S_2$, $j = 1, ..., n$ pür stratejisini oynaması halinde sırasıyla $H_1(s_i^1, s_j^2)$ ve $H_2(s_i^1, s_j^2)$ Oyuncu 1 ve Oyuncu 2'nin ödemeleri olsun. Oyun sıfır toplamlı olduğu için $H_1(s_i^1, s_j^2) + H_2(s_i^1, s_j^2) = 0,\ \forall s_i^1 \in S_1, s_j^2 \in S_2$ koşulu sağlanır.

Normal formlu sıfır toplamlı bir oyun matris yapısında; $a_{ij} = H_1(s_i^1, s_j^2) = -H_2(s_i^1, s_j^2)$ olarak kabul edildiğinde,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilen A matrisi oyunun ödeme matrisidir. Matris yapısında ifade edilmiş iki kişili sıfır toplamlı bir oyunda Oyuncu 1'in satır sayısı kadar, Oyuncu 2'nin sütun sayısı kadar stratejisi vardır (Nishizaki ve Sakawa, 2001).

Görüldüğü gibi Oyuncu 1'in stratejilerine karşılık matrisin satırları, Oyuncu 2'nin stratejilerine karşılık matrisin sütunları oluşturulmuştur. Satır ve sütunların kesim noktalarındaki matris elemanları da Oyuncu 1'in ödeme değerlerini göstermektedir. Oyuncu 2'nin ödeme değerleri bunların ters işaretlisi olduğundan ayrıca alınmamıştır. Bu nedenle matrise Oyuncu 1'in faydalarına göre oluşturulmuş ödeme matrisi denilmektedir.

2.2.1. Tanım (Stratejilerin Baskınlığı): $\forall s_j^2 \in S_2$ için $H_1(s_i^1, s_j^2) = a_{ij} \geq H_1(s_k^1, s_j^2) = a_{kj}$ ise s_i^1 stratejisine baskın strateji, s_k^1 stratejisine basılan (mahkum) strateji denir. Oyuncu 1 her durumda daha fazla kazandıran s_i^1 stratejisi varken s_k^1 stratejisini oynamaz ve bu stratejiyi oyundan eler.

Benzer şekilde, $\forall s_i^1 \in S_1$ için $H_1(s_i^1, s_j^2) = a_{ij} \leq H_1(s_i^1, s_l^2) = a_{il}$ ise her durumda s_j^2 stratejisi Oyuncu 2'ye s_l^2 stratejisinden daha az kaybettirir. Dolayısıyla Oyuncu 2 s_j^2 stratejisinin olduğu yerde daha fazla kaybettiren s_l^2'yi oynamaz. s_j^2'ye baskın strateji, s_l^2'ye basılan (mahkum) strateji denir.

2.2.2. Tanım (Karma Strateji): $\forall s_i^1 \in S_1$ stratejisinin oynama olasılığı x_i olsun. Böylece Oyuncu 1'in stratejisine karşılık $(x_1, x_2, ..., x_m)$ vektörü ortaya çıkar. $x^T = (x_1, x_2, ..., x_m)$ vektörü pür stratejiler kümesi S_1 üzerinde bir olasılık dağılımıdır. Burada x^T, x vektörünün transpozesidir. Bu vektör, Oyuncu 1'in stratejilerinin karmasını gösterir. Oyuncu 1'in karma stratejiler kümesi;

$$X = \left\{ x^T = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., m \right\}$$

dir. Burada $\mathbb{R}^m$, m boyutlu reel sayılar kümesidir. Benzer şekilde, Oyuncu 2 için karma stratejiler kümesi;

$$Y = \left\{ y^T = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ \mathrm{y}_j \geq 0,\ \mathrm{j} = 1, ..., n \right\}$$

dir (Nishizaki ve Sakawa, 2000a).

2.2.3. Tanım (Beklenen Ödeme): Oyuncu 1 $x \in X$ karma stratejisini ve Oyuncu 2'de $y \in Y$ karma stratejisini seçtiğinde Oyuncu 1'in beklenen ödeme değeri;

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

dir.

İki kişili sıfır toplamlı A matrisli oyun için, Oyuncu 1'in $x \in X$ karma stratejisini seçmesi halinde beklenen minimum ödemesi;

$$v(x) = \min_{y \in Y} x^T A y$$

dir.

O halde Oyuncu 1, $v(x)$'i maksimum yapacak $x \in X$ karma stratejisini seçmelidir. Böylece Oyuncu 1'in elde ettiği ödeme;

$$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$$

dir. $v(x)$'i maksimum yapacak x stratejisine Oyuncu 1'in maximin stratejisi ve (x, y) ikilisine de oyunun maximin çözümü denir. Ayrıca v_1, matrisli oyun için Oyuncu 1'in oyun değeridir.

Benzer şekilde, Oyuncu 2'nin minimax stratejisi;

$$v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y$$

koşulunu sağlar ve v_2, matrisli oyun için Oyuncu 2'nin oyun değeridir. Bu koşulu sağlayan (x, y) ikilisi oyunun minimax çözümüdür (Nishizaki ve Sakawa, 2001).

$v_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$ değeri Oyuncu 1'in minimum kazancının maksimum olduğu değerdir. Dolayısıyla Oyuncu 1'in garantilediği kazançtır ve oyun değeri için alt sınır oluşturur. Benzer şekilde $v_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y$ değeri Oyuncu 2'nin maksimum kaybının minimum olduğu değerdir. Oyuncu 2'nin kaybı Oyuncu 1'in kazancı olacağından v_2 de oyun değeri için bir üst sınır oluşturur.

2.2.1. Teorem (Minimax Teoremi): İki-kişili sıfır toplamlı A matrisli oyunu için

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y = x^{*^T} A y^*$$

koşulunu sağlayan (x^*, y^*) strateji çiftine denge çözümü denir (Owen, 1995).

2.3 Sabit Toplamlı Olmayan Oyunlar

$s \in S$'ye bağlı olarak $\sum_{i \in N} H_i(s)$ toplamı değişen ortaksız oyunlara sabit toplamlı olmayan oyunlar denir.

2.4 Ortaklı Oyunlar

Bazı durumlarda oyuncular ödemelerini arttırmak veya tek başlarına yapamayacakları işleri yapmak amacıyla çıkarları doğrultusunda işbirliğine giderek koalisyonlar kurarlar. Bu işbirliği kavramı bizi ortaklı oyunlara götürür.

2.4.1. Tanım (Koalisyon): Tüm oyuncuların kümesi $I = \{1, ..., n\}$ olsun. I'nın her S alt kümesi bir koalisyon olarak isimlendirilir.

2.4.2. Tanım (Karakteristik Fonksiyon): Her $S \subseteq I$ koalisyonuna garantilenmiş $v(S)$ reel sayısını atayan reel değerli v fonksiyonuna oyunun karakteristik fonksiyonu denir. "$\varnothing$ " boş kümeyi göstermek üzere her zaman $v(\emptyset)=0$ olarak tanımlanmıştır.

Ortaklı oyunlar v karakteristik fonksiyonu ile belirlenen ödemeler yoluyla tanımlanır. $v(S)$, S koalisyonunun değeri veya koalisyon değeri olarak isimlendirilir ve S koalisyonundaki oyuncuların S dışındaki hiçbir oyuncudan yardım almadan elde edebilecekleri ödemenin (transfer edilebilir fayda) maksimum miktarı olarak yorumlanır. Böylece ortaklı oyun (I,v) çifti ile tanımlanır (Nishizaki ve Sakawa, 1996).

2.4.3. Tanım (Süpertoplanabilirlik): $S\cap T=\emptyset$ olacak şekilde her S ve T koalisyon çifti için $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$ koşulu sağlanıyor ise (I,v) oyununa süpertoplanabilir oyun denir.

Bir süpertoplanabilir oyunda S ve T ayrık koalisyonlarının ($S\cap T=\emptyset$) $v(S)$ ve $v(T)$ değerleri toplamı, $S\cup T$ birleşik koalisyonunun $v(S\cup T)$ değerinden küçük veya eşittir (Owen, 1995).

2.4.4. Tanım (İmpütasyon): (I,v) oyunu için $\forall i\in I$ oyuncusuna, oyun kurallarına uygun olacak şekilde, x_i faydasının atandığını varsayalım. Bütün oyunculara atanan ödemeler $x=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ şeklinde gösterilebilir. x vektörünün kabul edilebilir olması için

$$x_i\geq v(\{i\})\ i=1,...,n \tag{2.1}$$

$$\sum_{i\in N} x_i = v(I) \tag{2.2}$$

şartları aynı anda sağlanmalıdır. (2.1) ve (2.2) şartlarını sağlayan $x=(x_1,...,x_i,...,x_n)$ ödeme vektörüne impütasyon (kazançların paylaşım vektörü) denir.

Burada (2.1) koşulu bireysel rasyonalite olarak isimlendirilir. Bunun anlamı bir oyuncunun koalisyondan elde edeceği fayda bireysel olarak elde edebileceği faydadan küçük olamaz. Aksi halde daha azını alıyor ise o koalisyona girmez. (2.2) koşuluna ise grup rasyonalitesi denir. Oyuncuların elde edeceği faydalar toplamı oyundan elde edilecek toplam faydaya eşittir. Bu hiçbir oyuncunun diğer oyuncuların ödemelerini azaltmadan kendi ödemesini arttıramayacağı anlamına gelir. Bu nedenle (2.2) koşulunu sağlayan ödeme vektörleri pareto optimaldir (Sakawa ve Nishizaki, 1997a)

2.4.5. Tanım (Baskınlık Bağıntısı): (I,v) oyunu için, x ve y iki impütasyon ve $S\subseteq I$ bir koalisyon olsun.

$$x_i > y_i,\ \forall i \in S \tag{2.3}$$

$$\sum_{i \in S} x_i \le v(S) \tag{2.4}$$

koşulları sağlanıyor ise x, y'yi S koalisyonu yoluyla basar denir ve $x\ dom_S\ y$ ile gösterilir. Burada (2.3) koşulu, S koalisyonuna ait olan tüm oyuncuların x'i y'ye tercih ettikleri, (2.4) koşulu ise x'in S koalisyonu tarafından gerçekleştirildiği anlamına gelir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere S koalisyonuna göre x, y'yi basarken bir başka $S^{'}$ koalisyonuna göre y de, x'i basabilir yani $x\ dom_s\ y$ ve $y\ dom_{s^{'}}\ x$ durumları aynı oyun için geçerli olabilir (Nishizaki ve Sakawa, 2000b).

2.4.6. Tanım (Çekirdek): (I, v) oyunu için tüm basılamaz impütasyonların kümesine çekirdek denir ve $C(I, v)$ ile gösterilir (Sakawa ve Nishizaki, 1997b).

2.4.1. Teorem: x impütasyonunun, oyunun çekirdeğine ait olması için gerek ve yeter şart $\forall S$ koalisyonu için $\sum_{i \in S} x_i \ge v(S)$ olmasıdır.

Teorem 2.4.1 den de anlaşılacağı gibi oyunun çekirdeği bir bölge veya bir nokta olabileceği gibi boş küme de olabilir.

2.4.7. Tanım (Shapley Vektörü): Shapley vektörü 1953 yılında Lloyd Shapley tarafından tanıtılmıştır. Ödemelerin adil paylaşımı prensibine dayanır. Her bir oyuncu oyuna yaptıkları katkı oranında pay alır. $i \in S$ olmak üzere S koalisyonunun elde edeceği maksimum ödeme $v(S)$, i'nin dışındaki S koalisyonuna ait oyuncuların oluşturduğu koalisyonun ödemesi $v(S \setminus \{i\})$ olmak üzere i oyuncusunun S koalisyonuna yaptığı katkı $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ dir. S koalisyonunun (kümesinin) eleman sayısı $|S|$ ile gösterilecektir. $|I| = n$ elemanlı oyuncular kümesinden elde edilen içerisinde i oyuncusu bulunan $|S|$ elemanlı kümelerin toplam sayısı $\binom{n}{|S|} \cdot \binom{|S|}{1}$ dir. Bu kümelerden özel bir tanesi S'dir. O halde S kümesinin olma olasılığı;

$$P(S) = \frac{1}{\binom{n}{|S|} \cdot \binom{|S|}{1}} = \frac{(n - |S|)!(|S| - 1)!}{n!}$$

olmak üzere, i oyuncusunun S koalisyonundan beklediği fayda,

$$P(S).\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right]=\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}.\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right]$$

olur.

i oyuncusunun fayda elde eden tüm koalisyonlardan beklenen ödemesi (faydası) ise,

$$\phi_i(v)=\sum_{i\in S}\frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}.\left[v(S)-v(S\setminus\{i\})\right]$$

dir.

$\forall i\in I$ için elde edilen $\phi_i(v)$ ödemelerinden oluşturulan $\phi(v)=(\phi_1(v),\phi_2(v),...,\phi_n(v))$ vektörüne, karakteristik fonksiyonu v olan oyunun shapley vektörü denir. Shapley vektörünün bileşenleri

$$\sum_{i=1}^{n}\phi_i(v)=v(I)$$

eşitliğini sağlar.

Yani, oyundan elde edilecek toplam fayda, oyuncular arasında yaptıkları katkı oranında adil bir şekilde paylaştırılmaktadır (Owen, 1995).

3. BULANIK(FUZZY) MATEMATİK

Matematiksel olarak tanımlanan problemlerin gerçek hayattaki uygulamalarında parametreler kesin olarak tanımlanamamakta, belirsizlik içeren bu durumlarla çok sık karşılaşılmaktadır. Bu belirsizliklerin modellere yansıtılması hayati önem taşımaktadır. Bu belirsizlikler 1965 yılında L.A.Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık küme teorisi yardımıyla modellere yansıtılabilmektedir. (Zadeh, 1965)

Bulanık küme teorisi, bilim ve teknoloji dünyasında bir dönüm noktası niteliğindedir. Geçmişte, genel ve özel olarak belirsizlik ifade eden terimler ve kavramlar, gelişigüzel bir ayrıma tabi tutulmuşlar ve iki değerli kümeler teorisi aracılığıyla tanımlanmışlardır. Son yıllarda gelişen bulanık küme teorisi ise belirsizlik ifade eden terimleri ve kavramları gelişigüzel bir ayrıma tabi tutmaksızın, belirsizliğe belirlilik derecesi atayarak, kümeler teorisi kapsamı içinde tanımlamalara imkan sağlamaktadır. (Chen ve Hwang, 1992)

Klasik matematiksel yöntemlerde, verilerin tam olması gereksiniminden dolayı bu yöntemlerle gerçek hayattaki sistemleri modellemek ve kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık, matematiğin gerçek dünyayı yorumlamasında daha geniş bir uyarlama alanı oluşturmak suretiyle bu zorluğu ortadan kaldırmış ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlamıştır. Örneğin bir kişi için “1.70 boyundadır” tanımlaması yerine, sadece “orta boyludur” tanımlamasının yapılması birçok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir bilgi indirgenmesi gerçekleştirilerek matematiksel bir tanımlama yerine, dilsel (linguistik) değişken adı verilen daha kolay anlaşılabilen bir değişken ile niteliksel bir tanımlama yapılabilir. "Kalabalık" veya "kalabalık değil" gibi kelimeler ve ifadelerle tanımlanabilen dilsel değişkenlerin değerleri bulanık kümeler ile ifade edilir. Örneğin; bir sınıftaki öğrenci sayısını belirtecek dilsel değişkenin alabileceği "kalabalık", "kalabalık değil" ve "çok kalabalık" değerlerinin her biri ayrı ayrı bulanık kümeler ile ifade edilir.

Klasik mantıkta bir önermenin ya doğru ya da yanlış olduğu kabul edilir. Yani önermelerin doğruluk değeri ya 0 ya da 1’dir. Bulanık mantıkta ise önermeler doğru, yanlış, yaklaşık olarak doğru, yaklaşık olarak yanlış vb. olabilir. Yani önermenin doğruluk değeri, [0,1] aralığına ait bir reel sayıdır.

3.1 Bulanık Kümelerle İlgili Temel Kavramlar

Klasik küme teorisine göre; X bir evrensel küme $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere bir A kümesinin üyelik fonksiyonu şu şekilde ifade edilir.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & x \notin A \\ 1; & x \in A \end{cases}$$

Yani klasik küme teorisinde bir elemanın bir kümeye ait olması durumunda üyelik fonksiyonu 1 değerini, olmaması durumunda ise üyelik fonksiyonu 0 değerini alır. Bulanık küme teorisinde ise bir eleman bir kümeye belli derecede aittir.

3.1.1. Tanım (Bulanık küme): $x \in X$ ve $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu olmak üzere $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$ ile tanımlanan $\tilde{A}$ kümesi bulanık küme adını alır. (Zimmermann, 1993)

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için x_i elemanının üyelik derecesi $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ olmak üzere, sonlu evrensel küme $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ üzerinde bulanık $\tilde{A}$ kümesi

$$\tilde{A} = \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n}$$

notasyonu ile gösterilebilir.

X Evrensel kümesi sonsuz elemanlı olduğunda ise bulanık $\tilde{A}$ kümesi

$$\tilde{A} = \int_X \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

notasyonu ile gösterilebilir. (Aksoy vd., 2003)

3.1.2. Tanım (Bulanık kümenin alt kümesi): $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)$ ise $\tilde{A}$ bulanık kümesi $\tilde{B}$ bulanık kümesinin bir alt kümesidir denir ve $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ şeklinde gösterilir. Yani $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)$ $(\forall x \in X)$ dır. (Castillo ve Melin, 2008)

3.1.3. Tanım (Bulanık iki kümenin eşitliği): $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ ise $\tilde{A}$ bulanık kümesi ile $\tilde{B}$ bulanık kümesi eşittir denir ve $\tilde{A} = \tilde{B}$ şeklinde gösterilir. (Sakawa, 1993)

3.1.4. Tanım (Bulanık iki kümenin birleşimi): X evrensel küme ve $x \in X$ olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşimi $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ ile gösterilir ve "$\vee$" bir maksimum işareti olmak üzere

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. (Clark vd., 2008)

3.1.5. Tanım (Bulanık iki kümenin kesişimi): X evrensel küme ve $x \in X$ olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin kesişimi $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ ile gösterilir ve "$\wedge$" bir minimum işareti olmak üzere

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. (Clark vd., 2008)

3.1.6. Tanım (Bulanık kümenin tümleyeni): $\tilde{A}$ bulanık kümesinin $\bar{\tilde{A}}$ tümleyeni $\forall x \in X$ için

$$\mu_{\bar{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanmıştır. (İnuiguchi vd., 2003)

Örneğin $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve $\tilde{A} = \{(2,0.4),(4,0.7),(5,1.0),(6,0.6),(7,0.3)\}$ olsun. Bu kümenin X 'e göre tümleyeni;

$\bar{\tilde{A}} = \{(1,1.0),(2,0.6),(3,1.0),(4,0.3),(6,0.4),(7,0.7)\}$ olarak bulunur.

3.1.7. Tanım (Bulanık kümenin desteği): X evreninde $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ noktalarının oluşturduğu kümeye $\tilde{A}$ bulanık kümesinin desteği denir ve

$$S(\tilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanır. (Bector ve Chandra, 2005)

Örneğin $\tilde{A} = \{(-1,0.3),(0,0.6),(1,1),(2,0.6),(3,0.3),(4,0.0)\}$ bulanık kümesinin desteği

$S\left(\tilde{A}\right) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ kümesidir.

3.1.8. Tanım (Bulanık kümenin α-keseni): $\tilde{A}$ bir bulanık küme olsun. $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

kümesine $\tilde{A}$ bulanık kümesinin α-keseni denir. (Bector ve Chandra, 2005)

3.1.9. Tanım (Bulanık kümenin yüksekliği): $\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği $\mu_{\tilde{A}}(x)$'in aldığı en yüksek değer olarak tanımlanır ve

$$h_{\tilde{A}} = \sup_X \mu_{\tilde{A}}(x)$$

şeklinde gösterilir. (Aksoy vd., 2003)

Örneğin $\tilde{A} = \{(a,0),(b,0.1),(c,0.3),(d,0.7),(e,0.6),(f,0.2)\}$ bulanık kümesinin yüksekliği $h_{\tilde{A}} = 0.7$ dir.

3.1.10. Tanım (Bulanık kümenin konveksliği): $\tilde{A}$ bulanık kümesi $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left(\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\right)$$

koşulunu sağlıyorsa konvekstir denir. (Aksoy vd., 2003)

Bulanık kümenin yüksekliği ve konveksliği tanımlarından sonra bulanık sayının tanımı şu şekilde verilebilir.

3.1.11. Tanım (Bulanık sayı): Yüksekliği 1 olan konveks bir küme, bulanık sayı olarak adlandırılır. (Aksoy vd., 2003)

3.2 Bulanık Sayılarla İlgili Temel Kavramlar

Bulanık sayı ifadesi “3 civarında”, “7 ye yakın” gibi sayısal niceliklerin belirsizliğini ele almak için kullanılır. Bulanık sayı büyüklüğü kesin olarak göstermediğinden, kümeye aitlik derecesini ifade eden üyelik fonksiyonu ile verilir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ile gösterilen bu fonksiyon [0,1] aralığında değer alır. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ ise x sayısı kümenin elemanı değildir. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ ise x sayısı kümenin elemanıdır. Diğer durumlarda x'in kümede olması bulanık olarak tanımlanmıştır. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ değeri 1'e ne kadar yakınsa x sayısının kümenin elemanı olma derecesi de o kadar güçlüdür.

Bulanık sayılar farklı şekillerde ifade edilebilirler. Biz burada üçgensel ve yamuksal bulanık sayıları inceleyeceğiz.

3.2.1 Üçgensel Bulanık Sayılar

Üçgensel bulanık sayılar kısaca (a_1, a_2, a_3) sıralı üçlüleri ile gösterilir. Burada a_2 büyüklüğü kesinlikle gösteren sayıdır. a_1 ve a_3 büyüklüğün alt ve üst sınırlanının kabul edilebilir değerlerini göstermektedir.

$a_1 < a_2 < a_3$ olmak üzere

$$\mu_{\tilde{A}}(x, a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x < a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & a_3 < x \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile verilen bulanık sayıya üçgensel bulanık sayı denir. (Kaufmann ve Gupta, 2005)

3.2.2 Yamuksal Bulanık Sayılar

Yamuksal bulanık sayılar (a_1, a_2, a_3, a_4) şeklindeki sıralı dörtlüler ile gösterilir. Burada $[a_2, a_3]$ aralığı büyüklüğün kesinlikle gösterilebildiği sayıları ifede eder. a_1 ve a_4 sırasıyla büyüklüğün alt ve üst sınırlanının kabul edilebilir değerlerini göstermektedir.

$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ olmak üzere, $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ şeklindeki bir yamuksal bulanık sayı için üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$
\mu_{\tilde{A}}(x,a_1,a_2,a_3,a_4)=\begin{cases} 0 & x<a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2 \\ 1 & a_2<x<a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & a_3\le x\le a_4 \\ 0 & x>a_4 \end{cases}
$$

3.2.2.1. Tanım (Pozitif bulanık sayı): Alt sınır değeri pozitif olan bulanık sayıya pozitif bulanık sayı denir.

3.3 Bulanık Sayılarla Aritmetik İşlemler

Bu bölümde bulanık sayılardaki aritmetik işlemler; Üçgensel bulanık sayılar, Yamuksal bulanık sayılar ve Güven aralığı cinsinden tanımlanacaktır.

3.3.1 Üçgensel Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler

3.3.1.1. Tanım (Eşitlik): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayılarının eşitliği karşılıklı bütün elemanlarının (üyelik fonksiyonlarının) eşitliği anlamına gelir. Matematiksel olarak;

$$\tilde{A}=\tilde{B}\Leftrightarrow(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

dür.

3.3.1.2. Tanım (Skaler ile çarpma): k bir skaler ve $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ bir üçgensel bulanık sayı olmak üzere skalerle çarpma işlemi:

Eğer $k>0$ ise;

$$k\cdot(a_1,a_2,a_3)=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

$k<0$ ise;

$$k\cdot(a_1,a_2,a_3)=(ka_3,ka_2,ka_1)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.1.3. Tanım (Toplama): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ üçgensel bulanık sayılarının toplamı:

$$\tilde{A}(+)\tilde{B}=(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.1.4. Tanım (Çıkarma): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ üçgensel bulanık sayılarının farkı:

$$\tilde{A}(-)\tilde{B}=(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3)=(a_1-b_3,a_2-b_2,a_3-b_1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.1.5. Tanım (Simetrik): Bir $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ üçgensel bulanık sayısının simetriği: $-(\tilde{A})=(-a_3,-a_2,-a_1)$ şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.1.6. Tanım (Çarpma): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ iki pozitif üçgensel bulanık sayı olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ pozitif üçgensel bulanık sayılarının çarpımı:

$$\tilde{A}\odot\tilde{B}=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2,a_3\cdot b_3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.1.7. Tanım (Bölme): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ iki pozitif üçgensel bulanık sayı olsun. $b_1,b_2,b_3\neq 0$ olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ pozitif üçgensel bulanık sayılarının bölümü:

$$\tilde{A}:\tilde{B}=\left(\frac{a_1}{b_3},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_1}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.2 Yamuksal Bulanık Sayılarda Aritmetik İşlemler

3.3.2.1. Tanım (Eşitlik): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ iki yamuksal bulanık sayı olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık sayılarının eşitliği karşılıklı bütün elemanlarının (üyelik fonksiyonlarının) eşitliği anlamına gelir. Matematiksel olarak;

$$\tilde{A}=\tilde{B} \Leftrightarrow \tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right) \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ a_4=b_4$$

dür.

3.3.2.2. Tanım (Skaler ile çarpma): k bir skaler ve $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ bir yamuksal bulanık sayı olmak üzere skalerle çarpma işlemi:

Eğer $k>0$ ise;

$$k\cdot\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)=\left(ka_1,ka_2,ka_3,ka_4\right)$$

$k<0$ ise;

$$k\cdot\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)=\left(ka_4,ka_3,ka_2,ka_1\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.2.3. Tanım (Toplama): $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)$ yamuksal bulanık sayılarının toplamı:

$$\tilde{A}(+)\tilde{B}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)+\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.2.4. Tanım (Çıkarma): $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)$ yamuksal bulanık sayılarının farkı:

$$\tilde{A}(-)\tilde{B}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)-\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)=(a_1-b_4,a_2-b_3,a_3-b_2,a_4-b_1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.2.5. Tanım (Simetrik): Bir $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ yamuksal bulanık sayısının simetriği: $-\left(\tilde{A}\right)=\left(-a_4,-a_3,-a_2,-a_1\right)$ şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.2.6. Tanım (Çarpma): $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3,a_4\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)$ iki pozitif yamuksal bulanık sayı olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ pozitif yamuksal bulanık sayılarının çarpımı:

$$\tilde{A} \odot \tilde{B} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.2.7. Tanım (Bölme): $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ iki pozitif yamuksal bulanık sayı olsun. $b_1, b_2, b_3, b_4 \neq 0$ olmak üzere $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ pozitif yamuksal bulanık sayılarının bölümü:

$$\tilde{A} : \tilde{B} = \left(\frac{a_1}{b_4}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_2}, \frac{a_4}{b_1} \right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.3 Bulanık Sayılarda Güven Aralığı ile Aritmetik İşlemler

3.3.3.1. Tanım (Güven aralığı): $\tilde{A}$ bir bulanık küme olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$$

kümesine $\tilde{A}$ bulanık kümesinin α seviyesindeki güven aralığı denir. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.3.2. Tanım (Üçgensel bulanık sayının güven aralığı): $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ üçgensel bulanık sayısının $\tilde{A}_\alpha$ güven aralığı:

$$\tilde{A}_\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_2 - a_3)\alpha + a_3], \ \alpha \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.3.3. Tanım (Yamuksal bulanık sayının güven aralığı): $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuksal bulanık sayısının $\tilde{A}_\alpha$ güven aralığı:

$$\tilde{A}_\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, (a_3 - a_4)\alpha + a_4], \ \alpha \in [0,1]$$

şeklinde tanımlanmıştır.

3.3.3.4. Tanım (Skaler ile çarpma): k bir skaler olmak üzere güven aralığı cinsinden skalerle çarpma işlemi:

Eğer $k > 0$ ise;

$k.[a_l^\alpha, a_u^\alpha] = [ka_l^\alpha, ka_u^\alpha]$

$k < 0$ ise;

$k.[a_l^\alpha, a_u^\alpha] = [ka_u^\alpha, ka_l^\alpha]$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.3.5. Tanım (Toplama): $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$, $\tilde{B}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha\} = [b_l^\alpha, b_u^\alpha]$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere güven aralığı cinsinden toplama işlemi:

$$\tilde{A}_\alpha + \tilde{B}_\alpha = \left[a_l^\alpha + b_l^\alpha, a_u^\alpha + b_u^\alpha\right]$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Buckley ve Jowers, 2008)

3.3.3.6. Tanım (Çıkarma): $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$, $\tilde{B}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha\} = [b_l^\alpha, b_u^\alpha]$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere güven aralığı cinsinden çıkarma işlemi:

$$\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha = \left[a_l^\alpha - b_u^\alpha, a_u^\alpha - b_l^\alpha\right]$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Buckley ve Jowers, 2008)

3.3.3.7. Tanım (Çarpma): $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki pozitif bulanık sayı ve bu pozitif bulanık sayıların güven aralıkları sırasıyla $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha\} = [b_l^\alpha, b_u^\alpha]$ olsun. Bu iki bulanık sayının güven aralığı cinsinden çarpımı:

$$\tilde{A}_\alpha (\cdot) \tilde{B}_\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha] \cdot [b_l^\alpha, b_u^\alpha] = \left[a_l^\alpha b_l^\alpha, a_u^\alpha b_u^\alpha\right]$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.3.3.8. Tanım (Bölme): $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki pozitif bulanık sayı ve bu pozitif bulanık sayıların güven aralıkları sırasıyla $\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} = [a_l^\alpha, a_u^\alpha]$ ve $\tilde{B}_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha\} = [b_l^\alpha, b_u^\alpha]$ olsun. $b_l^\alpha, b_u^\alpha \neq 0$ olmak üzere bu iki bulanık sayının güven aralığı cinsinden bölümü:

$$\tilde{A}_\alpha (:) \tilde{B}_\alpha = [a_l^\alpha, a_u^\alpha] : [b_l^\alpha, b_u^\alpha] = \left[\frac{a_l^\alpha}{b_u^\alpha}, \frac{a_u^\alpha}{b_l^\alpha}\right]$$

şeklinde tanımlanmıştır. (Bector ve Chandra, 2005)

3.4 Bulanık Sayıların Sıralanması

Bulanık sayıların sıralanması bulanık küme teorisi çalışmalarında önemli bir yere sahiptir. Sıralama işlemleri bulanık oyunlar ve bulanık matematiksel programlama problemleri gibi çeşitli uygulamalarda faydalı bir araçtır. Literatürde birçok sıralama işlemi vardır biz burada yalnızca birkaç tanesini vereceğiz.

3.4.1. Tanım (Üçgensel Bulanık Sayıların Sıralanması): $\tilde{A}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ ve $\tilde{B}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere, eğer $a_1 \le b_1,\ a_2 \le b_2,\ a_3 \le b_3$ ise $\tilde{A} \le \tilde{B}$ dir.

3.4.2. Tanım (Yamuksal Bulanık Sayıların Sıralanması): $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ve $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ iki yamuksal bulanık sayı olsun. Eğer $a_1 \le b_1,\ a_2 \le b_2,\ a_3 \le b_3,\ a_4 \le b_4$ ise $\tilde{A} \le \tilde{B}$ dir.

3.4.3. Tanım (Güven Aralığı Cinsinden Sıralama): $x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

(i) $x \geqq y \Leftrightarrow x_i \geqq y_i,\ \left(i=1,\ldots,n\right)$

(ii) $x \ge y \Leftrightarrow x_i \ge y_i,$ ve $x \ne y$, $\left(i=1,\ldots,n\right)$

(iii) $x > y \Leftrightarrow x_i > y_i,\ \left(i=1,\ldots,n\right)$

olmak üzere, $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ iki bulanık sayı olsun. Bu iki bulanık sayının α -seviyesindeki güven aralıkları sırasıyla $\tilde{A}_\alpha=\left[a_l^\alpha,a_u^\alpha\right]$ ve $\tilde{B}=\left[b_l^\alpha,b_u^\alpha\right]$ şeklinde tanımlansın. $\left(a_l^\alpha,a_u^\alpha\right)$ ve $\left(b_l^\alpha,b_u^\alpha\right)$, $\mathbb{R}^2$ de iki vektör olmak üzere, bu iki bulanık sayının sıralanması Mangasarian tarafında aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. (Mangasarian, 1994)

(i) Eğer $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\left(a_l^\alpha,a_u^\alpha\right) \geqq \left(b_l^\alpha,b_u^\alpha\right) \Rightarrow \tilde{A} \geqq \tilde{B}$

(ii) Eğer $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\left(a_l^\alpha,a_u^\alpha\right) \ge \left(b_l^\alpha,b_u^\alpha\right) \Rightarrow \tilde{A} \ge \tilde{B}$

(iii) Eğer $\forall\alpha \in [0,1]$ için $\left(a_l^\alpha,a_u^\alpha\right) > \left(b_l^\alpha,b_u^\alpha\right) \Rightarrow \tilde{A} > \tilde{B}$

Burada ‘ $\geqq$ ’ bulanık maksimum sıralama, ‘ $\ge$ ’ kesin bulanık maksimum sıralama ve ‘ $>$ ’ güçlü bulanık maksimum sıralama olarak adlandırılır.

3.4.4. Tanım (Sıralama fonksiyonu): $\mathbb{R}$ kümesindeki bütün bulanık sayıların kümesi $N(\mathbb{R})$ olmak üzere $\tilde{A}, \tilde{B} \in N(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $F : N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ uygun bir yaklaşım fonksiyonuna sıralama fonksiyonu denir.

Yager'in tanımladığı

$$F(\tilde{A}) = \left(\int_0^{\alpha_{\max}} m\left[a_l^\alpha, a_u^\alpha\right] d\alpha \right)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\alpha_{\max}$ $\tilde{A}$'nın yüksekliği, $\tilde{A}_\alpha = \left[a_l^\alpha, a_u^\alpha\right]$ bir α-kesen, $\alpha \in [0,1]$ ve $m\left[a_l^\alpha, a_u^\alpha\right]$ α-kesen elemanlarının orta değeri olmak üzere, bir $\tilde{A} = (a_l, a, a_u)$ üçgensel bulanık sayısı için $\alpha_{\max} = 1$ ve $\tilde{A}_\alpha = \left[a_l^\alpha, a_u^\alpha\right] = \left[(a - a_l)\alpha + a_l, (a - a_u)\alpha + a_u\right]$ şeklinde tanımlanır. Buradan

$$m\left[a_l^\alpha, a_u^\alpha\right] = \frac{(2a - a_l - a_u)\alpha + (a_l + a_u)}{2}$$

ve

$$F(\tilde{A}) = \frac{(a_l + 2a + a_u)}{4}$$

elde edilir.

Böylece bulanık bir sayı keskin (crisp) bir sayıya dönüşmüş olur.

O halde Yager'in sıralama fonksiyon bağıntısına göre $\tilde{A} = (a_l, a, a_u)$ ve $\tilde{B} = (b_l, b, b_u)$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere;

$\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow (a_l + 2a + a_u) \leq (b_l + 2b + b_u)$ dir (Yager, 1981).

4. BULANIK (FUZZY) HEDEFLİ İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

Bu bölümde bulanık ortamda oyuncuların kararlarının belirsizliği dikkate alındı ve bu belirsizlikler bulanık hedef olarak ifade edildi. Problemleri dikkate alırken yalnızca karar vericinin kararlarının belirsizliğini değil aynı zamanda karar verme problemindeki bilgilerin kesin olmadığını da dikkate alarak bulanık hedefli tek amaçlı ve çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunları incelendi.

4.1 Bulanık (Fuzzy) Hedefli Tek Amaçlı İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

İki kişili sıfır toplamlı bir oyun,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir ödeme matrisi ile gösterilir. İki kişili sıfır toplamlı bir oyunda Oyuncu 1'in satır sayısı kadar, Oyuncu 2'nin sütun sayısı kadar stratejisi vardır. Oyuncu 1'in stratejilerine karşılık matrisin satırları, Oyuncu 2'nin stratejilerine karşılık matrisin sütunları oluşturulmuştur. Satır ve sütunların kesim noktalarındaki matris elemanları da Oyuncu 1'in ödeme değerlerini göstermektedir. Oyuncu 2'nin ödeme değerleri bunların ters işaretlisi olduğundan ayrıca alınmamıştır. Bu nedenle matrise Oyuncu 1'in faydalarına göre oluşturulmuş ödeme matrisi denilmektedir.

4.1.1. Tanım (Bulanık Hedef): Oyuncu 1 için ödemelerin tanım kümesi $D \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda Oyuncu 1'in ödemelerine göre bulanık hedef $\tilde{G}$, D kümesi üzerinde

$$\mu_{\tilde{G}} : D \to [0,1]$$

$$p \to \mu_{\tilde{G}}(p) = \begin{cases} 0 & \text{, eğer } \; p \le \underline{a} \\ 1 - \dfrac{\overline{a}-p}{\overline{a}-\underline{a}} & \text{, eğer } \; \underline{a} \le p \le \overline{a} \\ 1 & \text{, eğer } \; \overline{a} \le p \end{cases} \tag{4.1}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanabilir.

Oyuncu 1'in tatmin değeri, ödemenin $\underline{a}$ sınır değeri için 0 ve $\overline{a}$ sınır değeri için 1 dir. $\underline{a}$'den daha küçük istenmeyen bir p değeri için $\mu_{\tilde{G}}(p)=0$, $\overline{a}$'den daha büyük istenen bir p

değeri için $\mu_{\tilde{G}}(p)=1$ ve $\underline{a} \leq p \leq \overline{a}$ için $\mu_{\tilde{G}}(p)$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olarak tanıtılmıştır.

Bir bulanık hedefin üyelik fonksiyon değeri, bulanık hedefin başarı derecesi olarak yorumlanabilir. O zaman bir oyuncu iki farklı ödemeye sahip olduğunda üyelik fonksiyon değeri daha yüksek olan ödemeyi diğer ödemeye tercih eder. Yani oyuncu bulanık hedefinin başarı derecesini maksimize etmek ister.

Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 sırasıyla x ve y stratejilerini seçtiği zaman Oyuncu 1 için bulanık hedefin üyelik fonksiyonu $\mu(x,y)$ olsun. Oyuncu 2'nin, Oyuncu 1'in $\mu(x,y)$ bulanık hedefinin başarı derecesini minimize etmek için bir $y \in Y$ stratejisini seçtiğini kabul edelim. O zaman Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesi $v(x)=\min_{y\in Y}\mu(x,y)$ olur. Bu durumda Oyuncu 1, $v(x)$ bulanık hedefinin başarı derecesini maksimize etmek için bir $x \in X$ stratejisini seçer. Yani maximin prensibine göre hareket eder. (Nishizaki ve Sakawa, 2000c).

4.1.2. Tanım (Bulanık Hedefin Başarı Derecesine Göre Maximin Çözüm): Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 sırasıyla x ve y stratejilerini seçtiği zaman Oyuncu 1 için bulanık hedefin üyelik fonksiyonu $\mu(x,y)$ olsun. Bu durumda bulanık hedefin başarı derecesine göre üyelik fonksiyonunun maximin değeri:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\mu(x,y) \tag{4.2}$$

olur ve böyle bir x stratejisine bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümü denir.

Benzer şekilde Oyuncu 2'nin bulanık hedefinin başarı derecesine göre minimax çözümü:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\mu(x,y) \tag{4.3}$$

şeklinde olur ve böyle bir y stratejisine bulanık hedefin başarı derecesine göre minimax çözümü denir.

(x,y) stratejilerinin herhangi bir çifti için bulanık hedefin $\mu(x,y)$ üyelik fonksiyonu, xAy beklenen ödeme olmak üzere $\mu(xAy)$ şeklinde gösterilir. $\mu(xAy)$ bulanık hedefi için üyelik fonksiyonu lineer bir fonksiyon ise;

$$\mu(xAy)=\begin{cases}0 & \text{, eğer} \quad xAy \le \underline{a} \\ 1-\dfrac{\overline{a}-xAy}{\overline{a}-\underline{a}} & \text{, eğer} \quad \underline{a} \le xAy \le \overline{a} \\ 1 & \text{, eğer} \quad \overline{a} \le xAy \end{cases} \tag{4.4}$$

olarak ifade edilebilir.

Burada $\underline{a}$ Oyuncu 1'e verilen tatmin derecesi en kötü ödeme ve $\overline{a}$ Oyuncu 1'e verilen tatmin derecesi en iyi ödemedir. Örneğin Oyuncu 1'in en kötü tatmin derecesine göre parametreler

$$\underline{a}=x^0Ay^0=\min_{x\in X}\min_{y\in Y} xAy=\min_{i\in I}\min_{j\in J} a_{ij} \tag{4.5}$$

ve Oyuncu 1'in en iyi tatmin derecesine göre parametreler

$$\overline{a}=x^1Ay^1=\max_{x\in X}\max_{y\in Y} xAy=\max_{i\in I}\max_{j\in J} a_{ij} \tag{4.6}$$

şeklinde ele alınırsa kullanılan bu parametreler için bir lineer üyelik fonksiyonu:

$$\mu(xAy)=\begin{cases}0 & \text{, eğer} \quad xAy \le x^0Ay^0 \\ 1-\dfrac{x^1Ay^1-xAy}{x^1Ay^1-x^0Ay^0} & \text{, eğer} \quad x^0Ay^0 \le xAy \le x^1Ay^1 \\ 1 & \text{, eğer} \quad x^1Ay^1 \le xAy \end{cases} \tag{4.7}$$

şeklini alır.

Bu fonksiyonun anlamı Oyuncu 1, x^0Ay^0'dan daha küçük bir xAy beklenen ödemesine tatmin olmaz fakat x^0Ay^0'dan büyük olan bir xAy beklenen ödemesi için Oyuncu 1'in tatmin derecesi lineer olarak artar ve Oyuncu 1, x^1Ay^1'den daha büyük bir xAy beklenen ödemesi için yeterince tatmin olur. (Sakawa ve Nishizaki, 1994).

Bulanık hedefin üyelik fonksiyonu (4.4) deki gibi bir lineer fonksiyon olmak üzere, bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümün hesaplanması için Nishizaki ve Sakawa aşağıdaki teoremi geliştirdiler.

4.1.1. Teorem: Tek amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyun için bulanık hedefin üyelik fonksiyonu bir lineer fonksiyon ise Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesine göre maximin çözümü aşağıdaki LP probleminin optimal çözümüne denktir. (Nishizaki ve Sakawa, 2001).

$$\left.\begin{array}{l} \text{maximize } \lambda \\ \text{kısıtlar } \hat{a}_{1j}x_1 + ... + \hat{a}_{mj}x_m + c \geq \lambda,\ j = 1,...,n \\ \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad\qquad x_i \geq 0,\ i = 1,...,m \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Burada

$$\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\overline{a} - \underline{a}} \text{ ve } c = -\frac{\underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}}$$

dır.

Şimdi de bulanık hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 2'nin minimax çözümünü ele alalım. $\hat{\mu}$ Oyuncu 2'nin üyelik fonksiyonu olmak üzere, $\hat{\mu}(xAy)$ bulanık hedefi için üyelik fonksiyonu lineer bir fonksiyon ise

$$\hat{\mu}(xAy) = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } \quad xAy \leq \underline{a} \\ 1 - \dfrac{xAy - \underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}} & \text{, eğer } \quad \underline{a} \leq xAy \leq \overline{a} \\ 0 & \text{, eğer } \quad \overline{a} \leq xAy \end{cases} \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Oyuncu 2'nin en kötü tatmin derecesine göre parametreler

$$\overline{a} = x^1Ay^1 = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} xAy = \max_{i \in I} \max_{j \in J} a_{ij} \tag{4.10}$$

ve Oyuncu 2'nin en iyi tatmin derecesine göre parametreler

$$\underline{a} = x^0Ay^0 = \min_{x \in X} \min_{y \in Y} xAy = \min_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \tag{4.11}$$

şeklindedir. Bu parametreler için bir lineer üyelik fonksiyonu (4.12)'de gösterildiği gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{\mu}(xAy) = \begin{cases} 1 & \text{, eğer } \quad xAy \leq x^0Ay^0 \\ 1 - \dfrac{xAy - x^0Ay^0}{x^1Ay^1 - x^0Ay^0} & \text{, eğer } \quad x^0Ay^0 \leq xAy \leq x^1Ay^1 \\ 0 & \text{, eğer } \quad x^1Ay^1 \leq xAy \end{cases} \tag{4.12}$$

Bu durumda bulanık hedefin başarı derecesi için Oyuncu 2'nin minimax prensibine göre hareket edeceğini düşüneceğiz.

4.1.2. Teorem: Tek amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyun için bulanık hedefin üyelik fonksiyonu bir lineer fonksiyon ise Oyuncu 2'nin bulanık hedefinin başarı derecesine göre minimax çözümü aşağıdaki LP probleminin optimal çözümüne denktir. (Nishizaki ve Sakawa, 2001)

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize } \lambda \\ \text{kısıtlar } \hat{a}_{i1}y_1 + \ldots + \hat{a}_{in}y_n + c \le \lambda,\ i = 1,\ldots,m \\ \qquad\quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ \qquad\quad y_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n \end{array}\right\} \quad (4.13)$$

4.1.3. Teorem: Tek amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyun için, Oyuncu 1'in bulanık hedefinin üyelik fonksiyonu (4.4)'de gösterildiği gibi bir lineer fonksiyon ve Oyuncu 2'nin bulanık hedefinin üyelik fonksiyonu (4.9)'da gösterildiği gibi bir lineer fonksiyon olsun. Bu durumda oyuncuların her ikisi de bulanık hedefin başarı derecesinde maximin yada minimax prensibine göre hareket ederlerse Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesi Oyuncu 2'nin bulanık hedefinin başarı derecesine eşittir. (Nishizaki ve Sakawa, 2001)

4.1.1. Örnek: Ödeme matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Oyuncu 1 ve Oyuncu 2'nin üyelik fonksiyonları sırasıyla (4.4) ve (4.9)'da gösterildiği gibi lineer fonksiyonlar olmak üzere, oyuncuların bulanık hedeflerinin başarı dereceleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Oyuncu 1 için: (4.8) probleminden aşağıdaki LP problemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize } \lambda & \\ \text{kısıtlar} & -\frac{3}{13}x_1+\frac{3}{13}x_3+\frac{6}{13}\geq\lambda \\ & \frac{7}{13}x_1-\frac{2}{13}x_2-\frac{1}{13}x_3+\frac{6}{13}\geq\lambda \\ & \frac{2}{13}x_1-\frac{6}{13}x_3+\frac{6}{13}\geq\lambda \\ & x_1+x_2+x_3=1 \\ & x_i\geq 0,\ i=1,2,3\end{array}\right\}$$

Burada $\overline{a}=7,\ \underline{a}=-6$ ve $c=\frac{6}{13}$ dür.

Bu LP probleminin çözülmesiyle aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$x_1=0.1837,\ x_2=0.7143,\ x_3=0.1020$ ve $\lambda=0.4427$

Oyuncu 2 için: (4.13) probleminden aşağıdaki LP problemi elde edilir.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize } \lambda & \\ \text{kısıtlar} & -\frac{3}{13}y_1+\frac{7}{13}y_2+\frac{2}{13}y_3+\frac{6}{13}\leq\lambda \\ & -\frac{2}{13}y_2+\frac{6}{13}\leq\lambda \\ & \frac{3}{13}y_1-\frac{1}{13}y_2-\frac{6}{13}y_3+\frac{6}{13}\leq\lambda \\ & y_1+y_2+y_3=1 \\ & y_j\geq 0, j=1,2,3\end{array}\right\}$$

Bu LP probleminin çözülmesiyle aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$y_1=0.5714,\ y_2=0.1225,\ y_3=0.3061$ ve $\lambda=0.4427$

Dikkat edilirse Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesi Oyuncu 2'nin bulanık hedefinin başarı derecesine eşittir.

4.2 Bulanık (Fuzzy) Hedefli Çok Amaçlı İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar aşağıdaki gibi verilen ödeme matrisleriyle gösterilir.

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^1 & \cdots & a_{mn}^1 \end{pmatrix}, \dots, A^r = \begin{pmatrix} a_{11}^r & \dots & a_{1n}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^r & \cdots & a_{mn}^r \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

Burada iki oyuncunun her birinin r tane amaca sahip olduğunu kabul edelim. Herhangi bir A^k, $(k = 1, \dots, r)$ matrisinin satırları ve sütunları sırasıyla Oyuncu 1 ve Oyuncu 2 için pür stratejilere karşılık gelir. Yani Oyuncu 1 bir $i \in I$ pür stratejisini ve Oyuncu 2 bir $j \in J$ pür stratejisini seçtiği zaman Oyuncu 1, Oyuncu 2'den bir $(a_{ij}^1, a_{ij}^2, \dots, a_{ij}^r)$ ödeme vektörü alır.

Oyuncu 1'in bir karma stratejisi;

$$x \in X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \Big| \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\} \text{ ve}$$

Oyuncu 2'nin bir karma stratejisi;

$$y \in Y = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \Big| \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n\}$$

şeklinde tanımlanır.

4.2.1. Tanım (Bulanık Hedef): $D = D^1 \times D^2 \times \dots \times D^r \subseteq \mathbb{R}^r$, Oyuncu 1'in ödemelerinin tanım kümesi olmak üzere, Oyuncu 1'in k. ödeme matrisine göre bulanık hedefi $\tilde{G}^k$, D^k kümesi üzerinde

$$\mu_{\tilde{G}^k}^k : D^k \rightarrow [0,1]$$

$$p^k \rightarrow \mu_{\tilde{G}^k}^k(p^k) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } \ p^k < \underline{a}^k \\ 1 - \dfrac{\overline{a}^k - p^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} & , \text{ eğer } \ \underline{a}^k \leq p^k \leq \overline{a}^k \\ 1 & , \text{ eğer } \ \overline{a}^k < p^k \end{cases} \tag{4.15}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Oyuncu 1'in tatmin değeri, ödemenin $\underline{a}^k$ sınır değeri için 0 ve $\overline{a}^k$ sınır değeri için 1 dir. $\underline{a}^k$'dan daha küçük istenmeyen bir p^k değeri için $\mu_{\tilde{G}^k}^k(p^k) = 0$, $\overline{a}^k$'dan daha büyük istenen bir p^k değeri için $\mu_{\tilde{G}^k}^k(p^k) = 1$ ve $\underline{a}^k \leq p^k \leq \overline{a}^k$ için $\mu_{\tilde{G}^k}^k(p^k)$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır.

Bir bulanık hedefin üyelik fonksiyon değeri, bulanık hedefin başarı derecesi olarak yorumlanabilir. O zaman bir oyuncu iki farklı ödemeye sahip olduğunda üyelik fonksiyon değeri daha yüksek olan ödemeyi diğer ödemeye tercih eder. Yani oyuncu bulanık hedefinin başarı derecesini maksimize etmek ister.

Oyuncu 2'nin, Oyuncu 1'in $\mu^k(x,y)$ bulanık hedefinin başarı derecesini minimizi etmek için bir $y \in Y$ stratejisini seçtiğini kabul edelim. O zaman Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesi $v^k(x) = \min_{y\in Y} \mu^k(x,y)$ olur. Bu durumda Oyuncu 1, $v^k(x)$ bulanık hedefinin başarı derecesini maksimize etmek için bir $x \in X$ stratejisini seçer. Yani maximin prensibine göre hareket eder.

Bir oyuncunun amaçlarının her biri için bir bulanık hedefe sahip olduğunu kabul edelim. Bu hedefe karşılık gelen ödeme, tatmin derecesi ile ifade edilir. Oyuncu 1'in (x,y) karma stratejilerinin herhangi bir çifti için k. amacının üyelik fonksiyonu $\mu^k(xA^k y)$ olsun. Eğer bulanık hedef için $\mu^k(xA^k y)$ üyelik fonksiyonu lineer bir fonksiyon ise

$$\mu^k(xA^k y) = \begin{cases} 0 & , \text{ eğer } \; xA^k y < \underline{a}^k \\ 1 - \dfrac{\overline{a}^k - xA^k y}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} & , \text{ eğer } \; \underline{a}^k \le xA^k y \le \overline{a}^k \\ 1 & , \text{ eğer } \; \overline{a}^k < xA^k y \end{cases} \tag{4.16}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Burada $\underline{a}^k$ k. amaç için Oyuncu 1'in tatmin derecesi en kötü ödemesi ve $\overline{a}^k$ k. amaç için Oyuncu 1'in tatmin derecesi en iyi ödemesidir.

Örneğin tek amaçlı duruma benzer şekilde,

$$\underline{a}^k = x^0 A^k y^0 = \min_{x\in X} \min_{y\in Y} xA^k y = \min_{i\in I} \min_{j\in J} a_{ij}^k \tag{4.17}$$

k. amaca göre Oyuncu 1'in en kötü tatmin derecesi için bir parametre ve

$$\overline{a}^k = x^1 A^k y^1 = \max_{x\in X} \max_{y\in Y} xA^k y = \max_{i\in I} \max_{j\in J} a_{ij}^k \tag{4.18}$$

k. amaca göre Oyuncu 1'in en iyi tatmin derecesi için bir parametre olarak kullanılabilir. Bu parametreleri kullanarak lineer üyelik fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\mu^k(xA^k y) = \begin{cases} 0 & , \text{eğer} \quad xA^k y \le x^0 A y^0 \\ 1 - \dfrac{x^1 A^k y^1 - xA^k y}{x^1 A^k y^1 - x^0 A^k y^0} & , \text{eğer} \quad x^0 A^k y^0 \le xA^k y \le x^1 A^k y^1 \\ 1 & , \text{eğer} \quad x^1 A^k y^1 \le xA^k y \end{cases} \tag{4.19}$$

Bulanık ortamlarda karar verme problemleri için sıkça kullanılan Bellman ve Zadeh'in bulanık karar verme kuralı (Bellman ve Zadeh, 1970) kullanılarak çoklu bulanık hedefler birleştirilirse, birleştirilmiş bulanık hedefin üyelik fonksiyonu:

$$\mu(x,y) = \min_{k \in K} \mu^k(xA^k y) \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer her bir üyelik fonksiyonu (4.16) gibi lineer bir fonksiyon ise bu durumda birleştirilmiş bulanık hedefin üyelik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mu(x,y) &= \min_{k \in K} \left(1 - \frac{\overline{a}^k - xA^k y}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} \right) \\ &= \min_{k \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} x_i y_j - \frac{\underline{a}^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} \right) \\ &= \min_{k \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}^k x_i y_j + c^k \right) \end{aligned} \tag{4.21}$$

olur. Burada

$$\hat{a}_{ij}^k = \frac{a_{ij}^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} \quad \text{ve} \quad c^k = -\frac{\underline{a}^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} \tag{4.22}$$

dir.

Çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlarda birleşmiş bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümü hesaplamak için aşağıdaki teoremden yararlanabiliriz.

4.2.1. Teorem: Çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için, eğer bulanık hedeflerin üyelik fonksiyonları (4.16) gibi lineer fonksiyonlar ve bulanık hedefler bulanık karar verme kuralına göre birleşmiş ise Oyuncu 1'in birleşmiş bulanık hedefinin başarı derecesine göre maximin çözümü aşağıdaki LP probleminin optimal çözümüne denktir. (Nishizaki ve Sakawa, 2001)

$$\left.\begin{array}{l} \text{maximize } \lambda \\ \text{kısıtlar } \hat{a}_{1j}^k x_1 + \ldots + \hat{a}_{mj}^k x_m + c^k \geq \lambda,\ j = 1,\ldots,n,\ k = 1,\ldots,r \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m \end{array}\right\} \tag{4.23}$$

Benzer şekilde Oyuncu 2 için minimax stratejiyi aşağıdaki LP problemini çözerek elde edebiliriz. (Nishizaki ve Sakawa, 2001)

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimize } \lambda \\ \text{kısıtlar } \hat{a}_{i1}^k y_1 + \ldots + \hat{a}_{in}^k y_n + c^k \leq \lambda,\ i = 1,\ldots,m,\ k = 1,\ldots,r \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ \qquad y_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n \end{array}\right\} \tag{4.24}$$

4.2.1. Örnek: Cook'un nümerik örneğini ele alalım (Cook, 1976).

$$A^1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Burada A^1'i maliyet, A^2'yi zaman ve A^3'ü üretkenlik olarak yorumlayabiliriz.

Her bir bulanık hedefin üyelik fonksiyonu (4.19)'da ki gibi lineer olarak tanımlanmış ve bulanık hedeflerin (4.20)'de ki gibi birleştirildiğini kabul edelim. Bu durumda Oyuncu 1 için (4.23) problemi dikkate alınarak aşağıdaki LP problemi elde edilir.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{maximize } \lambda \\
&\text{kısıtlar} \quad \frac{2}{8}x_1 - \frac{1}{8}x_2 + \frac{1}{4} \geq \lambda \\
&\frac{5}{8}x_1 - \frac{2}{8}x_2 + \frac{3}{8}x_3 + \frac{1}{4} \geq \lambda \\
&\frac{1}{8}x_1 + \frac{6}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3 + \frac{1}{4} \geq \lambda \\
&-\frac{3}{13}x_1 + \frac{3}{13}x_3 + \frac{6}{13} \geq \lambda \\
&\frac{7}{13}x_1 - \frac{2}{13}x_2 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{6}{13} \geq \lambda \\
&\frac{2}{13}x_1 - \frac{6}{13}x_3 + \frac{6}{13} \geq \lambda \\
&\frac{8}{13}x_1 - \frac{5}{13}x_2 - \frac{3}{13}x_3 + \frac{5}{13} \geq \lambda \\
&-\frac{2}{13}x_1 + \frac{6}{13}x_2 + \frac{1}{13}x_3 + \frac{5}{13} \geq \lambda \\
&\frac{3}{13}x_1 + \frac{6}{13}x_3 + \frac{5}{13} \geq \lambda \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&x_i \geq 0, \; i = 1,2,3
\end{aligned}\right\}$$

Bu LP probleminin çözülmesiyle Oyuncu 1'in maximin stratejisi aşağıdaki gibi olur.

$x_1 = 0.59928,\ x_2 = 0.15027,\ x_3 = 0.25045$ ve $\lambda = 0.38104$

Benzer şekilde Oyuncu 2 için (4.24) problemi dikkate alınarak aşağıdaki LP problemi elde edilir.

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{minimize } \lambda \\
&\text{kısıtlar} \quad \frac{2}{8}y_1+\frac{5}{8}y_2+\frac{1}{8}y_3+\frac{1}{4}\le\lambda \\
&-\frac{1}{8}y_1-\frac{2}{8}y_2+\frac{6}{8}y_3+\frac{1}{4}\le\lambda \\
&\frac{3}{8}y_2-\frac{1}{8}y_3+\frac{1}{4}\le\lambda \\
&-\frac{3}{13}y_1+\frac{7}{13}y_2+\frac{2}{13}y_3+\frac{6}{13}\le\lambda \\
&-\frac{2}{13}y_2+\frac{6}{13}\le\lambda \\
&\frac{3}{13}y_1-\frac{1}{13}y_2-\frac{6}{13}y_3+\frac{6}{13}\le\lambda \\
&\frac{8}{13}y_1-\frac{2}{13}y_2+\frac{3}{13}y_3+\frac{5}{13}\le\lambda \\
&-\frac{5}{13}y_1+\frac{6}{13}y_2+\frac{5}{13}\le\lambda \\
&-\frac{3}{13}y_1+\frac{1}{13}y_2+\frac{6}{13}y_3+\frac{5}{13}\le\lambda \\
&y_1+y_2+y_3=1 \\
&y_j\ge 0,\ j=1,2,3
\end{aligned}\right\}
$$

Bu LP probleminin çözülmesiyle Oyuncu 2’nin minimax stratejisi aşağıdaki gibi olur.

$y_1 = 0.38462,\ y_2 = 0.38462,\ y_3 = 0.23077$ ve $\lambda = 0.6154$

5. BULANIK (FUZZY) ÖDEMELİ İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

Oyuncu 1 bir $i \in I$ ve Oyuncu 2 bir $j \in J$ pür stratejisini seçtiğinde Oyuncu 1 için bir bulanık ödeme $\tilde{a}_{ij}$ olsun. Bulanık ödeme $\tilde{a}_{ij}$ aşağıdaki şekilde gösterilsin:

$$\tilde{a}_{ij} = \left((a_{ij})_l, a_{ij}, (a_{ij})_u\right) \tag{5.1}$$

Burada a_{ij} bir orta değer, $(a_{ij})_l$ sol yayılma ve $(a_{ij})_u$ sağ yayılma değeridir. İki kişili sıfır toplamlı bir bulanık oyun aşağıdaki bulanık ödeme matrisi ile gösterilir:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1} & \cdots & \tilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

(5.2) ile tanımlı oyuna bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyun denir.

Bu matristen, Oyuncu 1 optimal stratejilerini kullanarak maksimum faydayı elde etmeye çalışırken, Oyuncu 2 de optimal stratejilerini kullanarak kaybını minimize etmeye çalışacaktır.

Oyuncuların her biri bir strateji seçtiğinde, seçtikleri stratejiye karşılık bir ödeme alırlar. Bu ödemeler bulanık sayılar ile gösterildi fakat oyunun sonucu sıfır toplamlı bir yapıya sahip olduğundan bir oyuncu bir kazanç aldığında diğer oyuncu bu kazancı eşitleyecek bir kayba uğrar.

Bu bölümde bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunları çözmek için Li ve Yang'ın çözüm modelini sunacağız. Li ve Yang'ın çözüm modeli alternatif çözümler olması durumunda etkin değildir. Bu yüzden bu bölümde alternatif çözümlerin olması durumunu içeren bir algoritma tanımlayacağız.

5.1 Bulanık Ödemeli İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar İçin Li ve Yang'ın Modeli

$$S^m = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \right\},$$

$$S^n = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n \right\} \text{ ve}$$

$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ üçgensel bulanık sayılardan oluşan bir matris olmak üzere, bulanık ödemeli bir oyun BO $(FG) = (S^m, S^n, \tilde{A})$ şeklinde gösterilmiş olsun.

5.1.1. Tanım (Bulanık Ödemeli Oyunun Uygun Çözümü): $\tilde{v} = (v_l, v, v_u)$ ve $\tilde{w} = (w_l, w, w_u)$ iki üçgensel bulanık sayı olsun. Eğer

(i) $\forall y \in S^n$ için $\hat{x}^T \tilde{A} y \tilde{\geq} \tilde{v}$

(ii) $\forall x \in S^m$ için $x^T \tilde{A} \hat{y} \tilde{\leq} \tilde{w}$

olacak şekilde $\hat{x} \in S^m$ ve $\hat{y} \in S^n$ elemanları var ise, bu durumda $(\tilde{v}, \tilde{w})$'ya bulanık ödemeli oyunun bir uygun çözümü denir. (Li, 1999a)

$(\tilde{v}, \tilde{w})$ bulanık ödemeli oyunun bir uygun çözümü ise, bu durumda $\tilde{v}$'ya Oyuncu 1'in bir uygun çözümü ve $\tilde{w}$'ya Oyuncu 2'nin bir uygun çözümü denir.

Oyuncu 1 için bütün uygun çözümlerin kümesi V ve Oyuncu 2 için bütün uygun çözümlerin kümesi W olsun. Bu durumda bulanık ödemeli oyunun çözümü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

5.1.2. Tanım (Bulanık Ödemeli Oyunun Çözümü):

(i) $\forall \tilde{v} \in V$ için $\tilde{v}^* \tilde{\geq} \tilde{v}$

(ii) $\forall \tilde{w} \in W$ için $\tilde{w}^* \tilde{\leq} \tilde{w}$

eşitsizliklerini sağlayan $(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*) \in V \times W$ elemanına bulanık ödemeli oyunun çözümü denir (Li, 1999b). Bulanık ödemeli bir oyunun çözümü $(x^*, y^*, \tilde{v}^*, \tilde{w}^*)$ şeklinde gösterilebilir. Burada $x^* \in S^m$ Oyuncu 1 için, $y^* \in S^n$ Oyuncu 2 için optimal stratejidir ve $\tilde{v}^*$ Oyuncu 1'in, $\tilde{w}^*$ Oyuncu 2'nin oyun değerine karşılık gelir.

Tanım 5.1.1 ve Tanım 5.1.2'den yararlanarak bulanık ödemeli matris oyunları çözmek için aşağıdaki bulanık optimizasyon problemlerini çözmemiz gerekir. Burada problem (5.3) Oyuncu 1 için ve problem (5.4) Oyuncu 2 için bulanık ödemeli matris oyunların çözümlerini verir.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; \tilde{v} \\ &kısıtlar \;\; x^T \tilde{A} y \tilde{\geq} \tilde{v}, \;\; \forall y \in S^n \text{ için} \\ &\qquad\qquad x \in S^m \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} &\min imize \;\; \tilde{w} \\ &kısıtlar \;\; x^T \tilde{A} y \tilde{\leq} \tilde{w}, \;\; \forall x \in S^m \text{ için} \\ &\qquad\qquad y \in S^n \end{aligned} \tag{5.4}$$

$x \in S^m$, $y \in S^n$ ve $\tilde{\geq}$, $\tilde{\leq}$ bulanık eşitsizlikleri pozitif çarpma işlemi altında değişmeyeceği için, problem (5.3) ve problem (5.4)'de, S^m ve S^n kümelerinin yalnızca uç noktalarını ele alabiliriz. O halde problem (5.3) ve problem (5.4) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; \tilde{v} \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \tilde{\geq} \tilde{v}, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &\min imize \;\; \tilde{w} \\ &kısıtlar \;\; \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \tilde{\leq} \tilde{w}, \;\; (i = 1,...,m) \\ &\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ &\qquad\qquad y_j \geq 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$\tilde{v} = (v_l, v, v_u)$ ve $\tilde{w} = (w_l, w, w_u)$ birer üçgensel bulanık sayı olduğu için (5.5) ve (5.6) problemlerini aşağıdaki şekilde ele alabiliriz.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; (v_l, v, v_u) \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i \geq v_l, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i \geq v_u, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$
\begin{aligned}
&\min imize \ \ (w_l, w, w_u) \\
&kısıtlar \ \ \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_l y_j \le w_l, \ \ (i=1,...,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le w, \ \ (i=1,...,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_u y_j \le w_u, \ \ (i=1,...,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
&\qquad\qquad y_j \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

(5.7) ve (5.8) problemleri çok amaçlı lineer programlama problemleridir. $\tilde{v}^* = (v_l^*, v^*, v_u^*)$ ve $\tilde{v} = (v_l, v, v_u)$ olmak üzere, problem (5.7)'ye uygun bütün $(x, \tilde{v})$ değerleri için $v_l^* \ge v_l,\ v^* \ge v,\ v_u^* \ge v_u$ eşitsizlikleri sağlanırsa $(x^*, \tilde{v}^*)$ değeri problem (5.7)'nin bir optimal çözümü olur. Benzer durum problem (5.8) için de geçerlidir. (Li, 1999a)

Çok amaçlı programlama problemleri Pareto optimal çözümler ile hesaplanabilir. O halde bulanık ödemeli oyunların çözümlerini aşağıdaki şekilde yeniden tanımlayabiliriz.

5.1.3. Tanım (Bulanık Ödemeli Oyunun Çözümü):

$\left(\tilde{v}^* = (v_l^*, v^*, v_u^*),\ \tilde{w}^* = (w_l^*, w^*, w_u^*)\right) \in V \times W$ elemanı için,

(i) $(v_l, v, v_u) > (v_l^*, v^*, v_u^*)$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{v} = (v_l, v, v_u) \in V$ mevcut değil ve

(ii) $(w_l, w, w_u) < (w_l^*, w^*, w_u^*)$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{w} = (w_l, w, w_u) \in W$ mevcut değilse

$\left(\tilde{v}^* = (v_l^*, v^*, v_u^*),\ \tilde{w}^* = (w_l^*, w^*, w_u^*)\right) \in V \times W$ elemanına bulanık ödemeli oyunun bir çözümü denir.

Yukarıdaki tanımdan (5.7) ve (5.8) çok amaçlı lineer programlama problemlerinin Pareto optimal çözümlerini $\left(\left(x^*, \tilde{v}^* = (v_l^*, v^*, v_u^*)\right) \text{ve } \left(y^*,\ \tilde{w}^* = (w_l^*, w^*, w_u^*)\right)\right)$ elde edebiliriz.

Li ve Yang bu problemleri çözmek için aşağıda verilen lineer programlama yaklaşımını sundular. (Li ve Yang, 2004)

Oyuncu 1 için:

Adım 1: Aşağıdaki LP problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; v \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i \geq v_l, \;\; (j=1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \;\; (j=1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i \geq v_u, \;\; (j=1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Burada $x=(x_1,x_2,...,x_m)$ ve (v_l,v,v_u) karar değişkenleridir. Problem (5.9)'un bir optimal çözümü (x^*,v^*) olsun.

Adım 2: Aşağıdaki LP problemini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; (v_l, v_u) \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i^* \geq v_l, \;\; (j=1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i^* \geq v_u, \;\; (j=1,...,n) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Burada v_l ve v_u karar değişkenleridir. Problem (5.10)'da v_l ve v_u için kısıtlar birbirini etkilemediğinden problem (5.10) aşağıdaki gibi iki LP problemine dönüştürülebilir.

$$\left.\begin{aligned} &\max imize \;\; v_l \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i^* \geq v_l, \;\; (j=1,...,n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_l = \max_j \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i^* \tag{5.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\max imize \;\; v_u \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i^* \geq v_u, \;\; (j=1,...,n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_u = \max_j \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i^* \tag{5.12}$$

Bu iki LP problemlerinin optimal çözümleri sırası ile v_l^* ve v_u^* olsun.

Bu durumda problem (5.7)'nin pareto optimal çözümü $\left(x^*, \tilde{v}^* = (v_l^*, v^*, v_u^*)\right)$ elde edilmiş olur.

Oyuncu 2 için:

Adım 1: Aşağıdaki LP problemini ele alalım.

$$\begin{aligned}
&\min imize \;\; w \\
&kısıtlar \;\; \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_l y_j \le w_l, \;\; (i=1,\dots,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le w, \;\; (i=1,\dots,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_u y_j \le w_u, \;\; (i=1,\dots,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
&\qquad\qquad y_j \ge 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Burada $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ve (w_l, w, w_u) karar değişkenleridir. Problem (5.13)'ün bir optimal çözümü (y^*, w^*) olsun.

Adım 2: Aşağıdaki LP problemini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
&\min imize \;\; (w_l, w_u) \\
&kısıtlar \;\; \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_l y_j^* \le w_l, \;\; (i=1,\dots,m) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_u y_j^* \le w_u, \;\; (i=1,\dots,m)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Burada w_l ve w_u karar değişkenleridir. Problem (5.14)'de w_l ve w_u için kısıtlar birbirini etkilemediğinden problem (5.14) aşağıdaki gibi iki lineer programlama problemine dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned}
&\min imize \;\; w_l \\
&kısıtlar \;\; \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_l y_j^* \le w_l, \;\; (i=1,\dots,m)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
&\min imize \;\; w_u \\
&kısıtlar \;\; \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_u y_j^* \le w_u, \;\; (i=1,\dots,m)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Bu iki LP problemlerinin optimal çözümleri sırası ile w_l^* ve w_u^* olsun.

Bu durumda Problem (5.8)'in pareto optimal çözümü $\left(y^*, \tilde{w}^* = (w_l^*, w^*, w_u^*)\right)$ elde edilmiş olur.

Li ve Yang'ın tanımlamış olduğu yaklaşımda alternatif çözümlerin olması durumu dikkate alınmamıştır. Biz alternatif çözümlerin olması durumunu da içeren aşağıdaki algoritmayı tanımladık. Algoritmamızda Li ve Yang'ın yaklaşımında olduğu gibi karar vericinin en yüksek tatmin değerini v orta değerine verdiği ve bulanık sayıların sıralanmasının Yager'in sıralama prensibine göre ele alındığı kabulu yapılmıştır.

Algoritma 5.1.1:

Adım 1: En yüksek tatmin derecesine göre aşağıdaki problemden v^* optimal değeri elde edilir.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; v \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Adım 2: Bulunan v^* optimal değerinin kullanılması ve tatmin önceliğinin sol yayılmaya verilmesi durumunda aşağıdaki problemden v_{l1}^* optimal değeri bulunur.

$$\begin{aligned} &\max imize \;\; v_{l1} \\ &kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i \geq v_{l1}, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v^*, \;\; (j = 1,...,n) \\ &\qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ &\qquad\qquad x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Adım 3: Bulunan v^* ve v_{l1}^* optimal değerleri kullanılarak v_{u1}^* sağ yayılma değeri ve x^{1*} optimal değeri aşağıdaki problemden elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{v}_1^* = \left(v_{l1}^*, v^*, v_{u1}^*\right)$, $x^{1*} = \left(x_1^{1*}, x_2^{1*}, ..., x_m^{1*}\right)$ değerleri elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}
&\max imize \;\; v_{u1} \\
&kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i \ge v_{l1}^*, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v^*, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i \ge v_{u1}, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Adım 4: Bulunan v^* optimal değerinin kullanılması ve tatmin önceliğinin sağ yayılmaya verilmesi durumunda aşağıdaki problemden v_{u2}^* değeri bulunur.

$$\begin{aligned}
&\max imize \;\; v_{u2} \\
&kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v^*, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i \ge v_{u2}, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Adım 5: Bulunan v^* ve v_{u2}^* optimal değerleri kullanılarak aşağıdaki problemden v_{l2}^* sol yayılma değeri ve x^{2*} optimal değeri elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{v}_2^* = \left(v_{l2}^*, v^*, v_{u2}^*\right)$, $x^{2*} = \left(x_1^{2*}, x_2^{2*}, ..., x_m^{2*}\right)$ değerleri bulunmuş olur.

$$\begin{aligned}
&\max imize \;\; v_{l2} \\
&kısıtlar \;\; \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_l x_i \ge v_{l2}, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge v^*, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} (a_{ij})_u x_i \ge v_{u2}^*, \;\; (j=1,...,n) \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Adım 6: Yager'in sıralama prensibine göre; $\tilde{v}_1^* = \left(v_{l1}^*, v^*, v_{u1}^*\right) \geq \tilde{v}_2^* = \left(v_{l2}^*, v^*, v_{u2}^*\right)$ ise, yani $\left(v_{l1}^* + 2v^* + v_{u1}^*\right) \geq \left(v_{l2}^* + 2v^* + v_{u2}^*\right)$ ise, $\tilde{v}_1^* = \left(v_{l1}^*, v^*, v_{u1}^*\right)$, $x^{1*} = \left(x_1^{1*}, x_2^{1*}, \ldots, x_m^{1*}\right)$ optimal çözüm olur. Diğer taraftan $\tilde{v}_1^* = \left(v_{l1}^*, v^*, v_{u1}^*\right) < \tilde{v}_2^* = \left(v_{l2}^*, v^*, v_{u2}^*\right)$ ise, yani $\left(v_{l1}^* + 2v^* + v_{u1}^*\right) < \left(v_{l2}^* + 2v^* + v_{u2}^*\right)$ ise, $\tilde{v}_2^* = \left(v_{l2}^*, v^*, v_{u2}^*\right)$, $x^{2*} = \left(x_1^{2*}, x_2^{2*}, \ldots, x_m^{2*}\right)$ optimal çözümü elde edilir.

Alternatif çözümlerin olduğu aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

5.1.1 Örnek: Aşağıdaki bulanık ödemeleri verilen matris oyunu ele alalım.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} (170,180,190) & (160,180,200) & (165,180,195) & (168,180,200) \\ (175,180,185) & (170,180,182) & (172,180,188) & (150,180,210) \\ (172,180,187) & (177,180,188) & (175,180,187) & (170,180,185) \end{pmatrix}$$

Li ve Yang'ın modeli ile bu örneği çözersek;

$v^* = 180$ ve $x^* = \left(1,0,0\right)$ şeklinde bir çözüm elde edilir. Halbuki bu problemde $x^* = \left(1,0,0\right)$, $x^* = \left(0,1,0\right)$, $x^* = \left(0,0,1\right), \ldots$

şeklinde sonsuz sayıda çözüm vardır ve bu çözümler taranmamaktadır.

Bizim sunmuş olduğumuz algoritma ile çözersek;

Adım 1: En yüksek tatmin derecesine göre;

$$\left.\begin{array}{ll} \max imize & v \\ kısıtlar & 180x_1 + 180x_2 + 180x_3 \geq v \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v^* = 180$$

Adım 2: Tatmin önceliğinin sol yayılmaya verilmesi durumunda;

$$\left.\begin{array}{l}
\max imize \;\; v_{l1} \\
kısıtlar \;\; 170x_1 + 175x_2 + 172x_3 \geq v_{l1} \\
\qquad\quad 160x_1 + 170x_2 + 177x_3 \geq v_{l1} \\
\qquad\quad 165x_1 + 172x_2 + 175x_3 \geq v_{l1} \\
\qquad\quad 168x_1 + 150x_2 + 170x_3 \geq v_{l1} \\
\qquad\quad 180x_1 + 180x_2 + 180x_3 \geq 180 \\
\qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow v_{l1}^{\ *} = 170$$

Adım 3: Tatmin önceliğinin (orta deger, sol yayılma, sağ yayılma) olması durumunda optimal çözüm aşağıdaki problemin çözülmesiyle bulunmuş olur.

$$\left.\begin{array}{l}
\max imize \;\; v_{u1} \\
kısıtlar \;\; 190x_1 + 185x_2 + 187x_3 \geq v_{u1} \\
\qquad\quad 200x_1 + 182x_2 + 188x_3 \geq v_{u1} \\
\qquad\quad 195x_1 + 188x_2 + 187x_3 \geq v_{u1} \\
\qquad\quad 200x_1 + 210x_2 + 185x_3 \geq v_{u1} \\
\qquad\quad 180x_1 + 180x_2 + 180x_3 \geq 180 \\
\qquad\quad 170x_1 + 175x_2 + 172x_3 \geq 170 \\
\qquad\quad 160x_1 + 170x_2 + 177x_3 \geq 170 \\
\qquad\quad 165x_1 + 172x_2 + 175x_3 \geq 170 \\
\qquad\quad 168x_1 + 150x_2 + 170x_3 \geq 170 \\
\qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow v_{u1}^{*} = 185$$

O halde; tatmin önceliğinin (orta deger, sol yayılma, sağ yayılma) olması durumunda $\tilde{v}_1^* = (170,180,185)$ ve $x^{1*} = (0,0,1)$ optimal değerleri elde edilir.

Adım 4: Tatmin önceliğinin sağ yayılmaya verilmesi durumunda;

$$\left.\begin{array}{l}
\max imize \;\; v_{u2} \\
kısıtlar \;\; 190x_1 + 185x_2 + 187x_3 \geq v_{u2} \\
\qquad\quad 200x_1 + 182x_2 + 188x_3 \geq v_{u2} \\
\qquad\quad 195x_1 + 188x_2 + 187x_3 \geq v_{u2} \\
\qquad\quad 200x_1 + 210x_2 + 185x_3 \geq v_{u2} \\
\qquad\quad 180x_1 + 180x_2 + 180x_3 \geq 180 \\
\qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
\qquad\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow v_{u2}^{*} = 190$$

Adım 5: Tatmin önceliğinin (orta deger, sağ yayılma, sol yayılma) olması durumunda optimal çözüm aşağıdaki problemin çözülmesiyle bulunmuş olur.

$$\left.\begin{array}{ll} \max imize & v_{l2} \\ kısıtlar & 190x_1+185x_2+187x_3 \geq 190 \\ & 200x_1+182x_2+188x_3 \geq 190 \\ & 195x_1+188x_2+187x_3 \geq 190 \\ & 200x_1+210x_2+185x_3 \geq 190 \\ & 180x_1+180x_2+180x_3 \geq 180 \\ & 170x_1+175x_2+172x_3 \geq v_{l2} \\ & 160x_1+170x_2+177x_3 \geq v_{l2} \\ & 165x_1+172x_2+175x_3 \geq v_{l2} \\ & 168x_1+150x_2+170x_3 \geq v_{l2} \\ & x_1+x_2+x_3=1 \\ & x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{l2}^*=160$$

O halde; tatmin önceliğinin (orta deger, sağ yayılma, sol yayılma) olması durumunda $\tilde{v}_2^*=(160,180,190)$ ve $x^{2*}=(1,0,0)$ optimal değerleri elde edilir.

Adım 6:

Yager'in sıralama prensibine göre $\tilde{v}_1^*=(170,180,185)=715 \geq \tilde{v}_2^*=(160,180,190)=710$ olduğundan $\tilde{v}_1^*=(170,180,185)$ ve $x^{1*}=(0,0,1)$ optimal değerleri elde edilir.

5.1.2. Örnek: Aşağıdaki bulanık ödemeleri verilen matris oyunu ele alalım. (Li ve Yang, 2004)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} (175,180,190) & (150,156,158) \\ (80,90,100) & (175,180,190) \end{pmatrix}$$

Algoritma 5.1.1 ile bu örneği çözersek;

$\tilde{v}_1^*=(155,161.0526,164.7368)$, $x^{1*}=(0.7895,0.2105)$

$\tilde{v}_2^*=(155,161.0526,164.7368)$, $x^{2*}=(0.7895,0.2105)$ değerleri bulunur.

Yani, $\tilde{v}_1^*=\tilde{v}_2^*=(155,161.0526,164.7368)$ ve $x^{1*}=x^{2*}=(0.7895,0.2105)$ optimal değerleri elde edilir. Li ve Yang'ın sunduğu yaklaşımla da aynı sonuçlar bulunmuştur.

6. BULANIK (FUZZY) HEDEFLİ VE BULANIK (FUZZY) ÖDEMELİ İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

6.1 Bulanık (Fuzzy) Hedefli ve Bulanık (Fuzzy) Ödemeli Tek Amaçlı İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Bu bölümde bulanık hedefli ve bulanık ödemeli tek amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunların maximin çözümleri için Sakawa'nın hesaplama yöntemi verildi. Daha sonra bir lineer iteratif metot sunuldu.

Bulanık ödemeler için bulanık sayıların şekil fonksiyonları ve bulanık hedeflerin üyelik fonksiyonlarının lineer olduğunu kabul edelim. Oyuncu 1'in bulanık hedefinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun:

$$\mu_{\tilde{G}}(p) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad p < \underline{a} \\ \dfrac{p - \underline{a}}{\overline{a} - \underline{a}} & \text{eğer} \quad \underline{a} \le p \le \overline{a} \\ 1 & \text{eğer} \quad \overline{a} < p \end{cases} \tag{6.1}$$

Burada $\underline{a}$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en kötü ödemesi ve $\overline{a}$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en iyi ödemesidir. Yani Oyuncu 1, $\underline{a}$'den daha küçük bir ödemeye tatmin olmazken $\overline{a}$'den daha büyük bir ödemeye tam anlamıyla tatmin olur.

Karma stratejilerin herhangi bir çifti $x \in X$ ve $y \in Y$ için, Oyuncu 1'in bulanık beklenen ödemesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde karakterize edilmiş olsun:

$$\mu_{x\tilde{A}y}(p) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad p < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_l x_i y_j \\ \dfrac{p - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_l x_i y_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} - (a_{ij})_l\right)x_i y_j} & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_l x_i y_j \le p < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)x_i y_j \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j - p}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j} & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)x_i y_j \le p \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j \\ 0 & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j < p \end{cases} \tag{6.2}$$

6.1.1. Tanım (Bulanık Hedefin Başarı Derecesi): (x, y) karma stratejilerinin herhangi bir çifti olmak üzere, Oyuncu 1 için bulanık beklenen ödeme $x\tilde{A}y$ ve bulanık hedef $\tilde{G}$ ile gösterilsin. Bu durumda bir bulanık kümede bulanık hedefin başarı durumu: $\tilde{G}$ bulanık hedefi ile $x\tilde{A}y$ bulanık beklenen ödemesinin kesişimi olarak belirtilir. Bulanık kümenin üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mu_{a(x,y)}(p) = \min(\mu_{x\tilde{A}y}(p), \mu_{\tilde{G}}(p)) \tag{6.3}$$

bulanık hedefin başarı derecesi (6.3) üyelik fonksiyonunun maksimumu olarak tanımlanmıştır, yani

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) &= \max_p \mu_{a(x,y)}(p) \\ &= \max_p \left\{ \min\left(\mu_{x\tilde{A}y}(p), \mu_{\tilde{G}}(p) \right) \right\} \end{aligned} \tag{6.4}$$

şeklindedir. (Sakawa ve Nishizaki, 1994)

6.1.2. Tanım (Bulanık Hedefin Başarı Derecesine Göre Maximin Çözüm): (x, y) karma stratejilerin herhangi bir çifti olmak üzere Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesi $\hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*)$ olsun. Bu durumda Oyuncu 1'in bulanık hedefinin başarı derecesine göre maximin değeri:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) \tag{6.5}$$

şeklinde tanımlanır. (Nishizaki ve Sakawa, 2001)

Bu durumda bulanık hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 1'in maximin değeri aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} \hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} \max_p \min(\mu_{x\tilde{A}y}(p), \mu_{\tilde{G}}(p)) \tag{6.6}$$

Üyelik fonksiyonları lineer olarak tanımlandığında bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin strateji, aşağıdaki teorem ile verilen matematiksel programlama probleminin çözülmesiyle elde edilebilir.

6.1.1. Teorem: Tek amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyunda, bulanık hedefin üyelik fonksiyonu ve bulanık beklenen ödemenin şekil fonksiyonu sırasıyla (6.1) ve (6.2)'de ki gibi lineer ise bulanık hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 1'in maximin çözümü aşağıdaki

NLP probleminin bir optimal çözümüne denktir. (Sakawa ve Nishizaki, 1994)

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,\sigma}{\text{maximize}}\ \sigma \\ \text{kısıtlar}\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j - \underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j + \overline{a} - \underline{a}} \geq \sigma,\ \forall y \in Y \\ \qquad\quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad\quad x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m \end{array}\right\} \tag{6.7}$$

Eğer σ^* optimal değer ise $0 \leq \sigma^* \leq 1$ dir.

(6.7) problemine Shimizu ve Aiyoshi tarafından tanımlanan rahatlatma işlemini uygularsak, (Shimizu ve Aiyoshi, 1980) $y^l \in Y, l = 1,\ldots,L,\ \sum_{j=1}^{n} y_j^l = 1,\ y_j^l \geq 0$ alarak (6.7) problemi için aşağıdaki rahatlatılmış problemi elde ederiz.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,\sigma}{\text{maximize}}\ \sigma \\ \text{kısıtlar}\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^l - \underline{a}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^l + \overline{a} - \underline{a}} \geq \sigma,\ l = 1,\ldots,L \\ \qquad\quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad\quad x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m \end{array}\right\} \tag{6.8}$$

Rahatlatılmış problem (6.8)'in bir optimal çözümü (x^l, σ^l) ile gösterilsin. Eğer (x^l, σ^l) (6.7) esas problemine uygunsa o zaman (x^l, σ^l), (6.7) esas probleminin bir optimal çözümü olur. Uygunluğun test edilmesi ((6.8) rahatlatılmış probleminin optimal çözümü (x^l, σ^l)'nin (6.7) problemine uygun olup olmadığı) aşağıdaki minimizasyon probleminin çözülmesiyle elde edilebilir.

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{y} imize & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i^l y_j - \underline{a}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i^l y_j + \overline{a} - \underline{a}} \\ \text{kısıtlar} & \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ & y_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n \end{array}\right\} \tag{6.9}$$

$y^{l+1} = \hat{y}(x^l)$, (6.9) minimizasyon probleminin bir optimal çözümü olsun. Eğer $(x^l, \hat{y}(x^l), \sigma^l)$, (6.7) esas probleminin kısıtlarını sağlarsa bu durumda $(x^l, \hat{y}(x^l), \sigma^l)$ esas problemin bir optimal çözümü olur. $(x^l, \hat{y}(x^l), \sigma^l)$ esas problemin kısıtlarını sağlamazsa (6.10) eşitsizliği (6.8) probleminin kısıtlarına eklenir ve problem (6.8) yeniden çözülür.

$$\left.\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^{l+1} - \underline{a}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^{l+1} + \overline{a} - \underline{a}} \geq \sigma\right\} \tag{6.10}$$

Bu işlemi sonlu sayıda tekrarlamak suretiyle optimal çözümü elde edebiliriz. (Shimizu ve Aiyoshi, 1980).

(6.8) rahatlatılmış problemi Sakawa'nın metodu kullanılarak lineer hale getirilip çözülebilir (Sakawa, 1983). Bu metot yarılama yöntemi ve LP probleminin uygunluğunun test edilmesi üzerine kurulmuştur.

(6.8) rahatlatılmış probleminde σ değişkeni $0 \leq \sigma \leq 1$ koşulunu sağlar çünkü σ değişkeni bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin değere karşılık gelir. $\sigma = \hat{\sigma}$ olsun, bu durumda $\hat{\sigma}$, [0,1] aralığında bir değere sahiptir. O zaman (6.8) rahatlatılmış probleminin kısıtları aşağıdaki gibi olur.

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^l - \underline{a} \geq \hat{\sigma}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^l + \overline{a} - \underline{a}\right),\ l = 1,\ldots,L \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m \end{array}\right\} \tag{6.11}$$

Bu kısıtlara göre Sakawa'nın metodu kullanılarak problemin çözülmesiyle elde edilen $x^L = x^*$ optimal değeri problem (6.9)'da yerine yazılabilir. Diğer taraftan (6.9) ile gösterilen minimizasyon problemi Charnes ve Cooper tarafından tanımlanan aşağıdaki değişken dönüşümü kullanılarak LP problemine indirgenirse (Charnes ve Cooper, 1962).

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i^L y_j + \overline{a} - \underline{a}} = t \tag{6.12}$$

ve

$$y_j t = z_j \tag{6.13}$$

(6.9) minimizasyon problemi aşağıdaki LP problemine indirgenmiş olur.

$$\left.\begin{array}{l}
\min\limits_{z,t} \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i^L z_j - \underline{a}t \\
\text{kısıtlar} \sum_{j=1}^{n} z_j = t \\
\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i^L z_j + (\overline{a} - \underline{a})t = 1 \\
\qquad z_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n
\end{array}\right\} \tag{6.14}$$

(6.14) problemi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ve t karar değişkenlerine sahip bir LP problemidir, iki eşitlik kısıt'ı ve değişkenlerin negatif olmama koşulu vardır.

Bulanık ödemeli ve bulanık hedefli iki kişili sıfır toplamlı bir oyunda maximin çözümün hesaplanması aşağıdaki algoritmayla özetlenebilir.

ALGORİTMA 6.1.1

Adım 1: Ödeme için bir bulanık hedef tanımla, herhangi bir $y^l \in Y$ seç ve $l = 1$ al. Sonra (6.8) rahatlatılmış problemini formüle et.

Adım 2: (6.8) rahatlatılmış probleminin kısıtlarında $\sigma = \hat{\sigma}$ alarak (6.11) kısıtlarını formüle et, yarılama metodunu kullanarak ve uygunluğu test ederek $(x^*, \hat{\sigma} = \sigma^*)$ optimal değerini hesapla, sonra $x^* = x^L$ al.

Adım 3: (6.14) minimizasyon problemini x^L ile formüle et.

Adım 4: (6.14) minimizasyon problemini çöz ve optimal çözüm (z^*, t^*)'ı elde et. Amaç fonksiyon değeri $\Phi(z^*, t^*)$ olsun.

Adım 5: Eğer $\Phi(z^*, t^*) \geq \sigma^* + \varepsilon$ ise algoritma sona erer, burada ε önceden belirtilmiş bir sabittir. Bu durumda x^L bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümdür. Aksi takdirde eğer $\Phi(z^*, t^*) < \sigma^* + \varepsilon$ ise $l = l + 1$ al ve $\hat{\sigma}$'yı düzenleyerek adım 2 ye dön.

Sakawa'nın tanımladığı yukarıdaki algoritmada defalarca yarılama yöntemi uygulanıp her seferinde uygunluk testi yapılmaktadır bu da çok fazla işlem gerektirmektedir. Biz bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için aşağıda tanımladığımız gibi bir lineer iteratif metot sunduk.

(6.8) probleminin kısıtlarını sağlayan σ maksimal kısıt değeri aşağıdaki lineer iteratif metot kullanılarak bulunabilir.

(6.8) probleminde,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^l - \underline{a} = P^l$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^l + \overline{a} - \underline{a} = Q^l$$

olsun. Bu durumda (6.8) probleminin ilk kısıt'ı

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^l - \underline{a} = P^l\\&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^l + \overline{a} - \underline{a} = Q^l\end{aligned}\right\} \Rightarrow l = 1, \ldots, L, \text{ için } \frac{P^l}{Q^l} \geq \sigma \tag{6.15}$$

şeklinde olur.

O halde Dinkelbach algoritmasından yararlanarak (Bajalinov, 2003) aşağıdaki LP problemini yazabiliriz.

$$\left.\begin{aligned}
&\max\ r\\
&\textit{kısıt}\ : P^l - \sigma_s Q^l - r \geq 0\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_u x_i y_j^l - \underline{a} - P^l = 0\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij})_u - a_{ij}\right)x_i y_j^l + \overline{a} - \underline{a} - Q^l = 0,\ l = 1,\ldots,L\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\\
&\qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m,
\end{aligned}\right\}\ s = 0,\ldots,S \tag{6.16}$$

Burada bir $\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri alınır ve bu değere göre P^l, Q^l ve r değerleri hesaplanır. Bulunan bu P^l ve Q^l değerlerine göre

$$\sigma_1 = \min_l \left\{\frac{P^l}{Q^l}\right\}$$

şeklinde σ_1 değeri hesaplanır ve bu değer problem (6.16) da yerine yazılıp problem çözülürse yeni P^l, Q^l ve r değerleri elde edilir. Elde edilen bu yeni değerlerden

$$\sigma_2 = \min_l \left\{\frac{P^l}{Q^l}\right\}$$

değeri bulunur. Genel olarak σ_s değerini;

$$\sigma_s = \min_l \left\{\frac{P^l}{Q^l}\right\}\quad s = 1,\ldots,S,\ l = 1,\ldots,L \tag{6.17}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Yukarıda bahsettiğimiz iterasyon kabul edilebilir bir ε değeri için $\max\ r < \varepsilon$ olana kadar devam ettirilir, yani $\max\ r < \varepsilon$ olduğu zaman σ maximal kısıt değerini bulmuş oluruz.

Bu durumda x^* uygun çözümü ve σ maximal kısıt değer çifti $(x^*, \sigma = \sigma^*)$, (6.8) rahatlatılmış probleminin bir optimal çözümü olur.

O halde Sakawa'nın algoritmasında gösterdiğimiz gibi defalarca ikiye bölme işlemi yapmaktansa problem (6.16) de gösterdiğimiz gibi bir lineer iteratif metot kullanarak daha hızlı bir şekilde (6.8) rahatlatılmış probleminin optimal çözümünü bulabiliriz. O halde yukarıdaki algoritma aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

ALGORİTMA 6.1.2

Adım 1: Ödeme için bir bulanık hedef tanımla, kabul edilebilir bir ε hata payı al, herhangi bir $y^l \in Y$ seç ve $l = 1$ al. Sonra (6.8) rahatlatılmış problemini formüle et.

Adım 2: $\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri al ve (6.16) lineer programlama problemini çözüp, $(x^*, \sigma = \sigma^*)$ optimal değerini hesapla.

Adım 3: $x^* = x^L$ alarak (6.14) minimizasyon problemini x^L ile formüle et.

Adım 4: (6.14) minimizasyon problemini çözerek, optimal çözüm (z^*, t^*)'ı elde et, amaç fonksiyon değeri $\Phi(z^*, t^*)$ olsun.

Adım 5: Eğer $\Phi(z^*, t^*) \geq \sigma^*$ ise algoritma sona erer. Bu durumda x^L bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümdür. Aksi takdirde eğer $\Phi(z^*, t^*) < \sigma^*$ ise $l = l + 1$ al ve adım 2 ye dön.

6.2 Bulanık (Fuzzy) Hedefli ve Bulanık (Fuzzy) Ödemeli Çok Amaçlı İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar

Bu bölümde çok amaçlı oyunların maximin çözümleri için ilk olarak Sakawa'nın metodu sunuldu. Daha sonra yukarıda tanımladığımız lineer iterasyon metot yardımıyla çok amaçlı oyunların maximin çözümleri ele alındı.

Oyuncuların r tane amaca (bulanık ödeme matrisine) sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyun aşağıdaki r tane bulanık ödemeli matris ile gösterilebilir:

$$\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^1 & \cdots & \tilde{a}_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^1 & \cdots & \tilde{a}_{mn}^1 \end{pmatrix}, \ldots, \tilde{A}^r = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^r & \cdots & \tilde{a}_{1n}^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}^r & \cdots & \tilde{a}_{mn}^r \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

Bir oyuncunun amaçlarının her biri için bir bulanık hedefe sahip olduğunu kabul edelim. k. amaç için Oyuncu 1'in bulanık hedefinin üyelik fonksiyonu, k. ödeme p^k olmak üzere $\mu_{\tilde{G}^k}(p^k)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bulanık hedefin $\mu_{\tilde{G}^k}(p^k)$ üyelik fonksiyonu lineer olduğunda aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mu_{\tilde{G}^k}(p^k) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad p^k < \underline{a}^k \\ 1 - \dfrac{\overline{a}^k - p^k}{\overline{a}^k - \underline{a}^k} & \text{eğer} \quad \underline{a}^k \le p^k \le \overline{a}^k \\ 1 & \text{eğer} \quad \overline{a}^k < p^k \end{cases} \tag{6.19}$$

Burada k. amaç için $\underline{a}^k$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en kötü ödemesi ve $\overline{a}^k$ Oyuncu 1'in tatmin derecesi en iyi ödemesidir.

Ayrıca k. amaç için $\tilde{A}^k$ bulanık ödeme matrisinde, karma stratejilerin herhangi bir çifti $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere Oyuncu 1'in bulanık beklenen ödemesinin üyelik fonksiyonu $\mu_{x\tilde{A}^k y}(p^k)$ lineer olduğunda aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\mu_{x\tilde{A}^k y}(p^k) = \begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad p^k < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_l x_i y_j \\ \dfrac{p^k - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_l x_i y_j}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^k - (a_{ij}^k)_l\right)x_i y_j} & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_l x_i y_j \le p^k < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^k\right)x_i y_j \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j - p^k}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i y_j} & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^k\right)x_i y_j \le p^k \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j \\ 0 & \text{eğer} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j < p^k \end{cases} \tag{6.20}$$

Genel olarak bulanık hedefin başarı derecesi aşağıdaki vektör ifadesiyle gösterilebilir:

$$\begin{pmatrix} \max\limits_{p^1} \min(\mu_{x\tilde{A}^1 y}(p^1), \mu_{\tilde{G}^1}(p^1)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \max\limits_{p^r} \min(\mu_{x\tilde{A}^r y}(p^r), \mu_{\tilde{G}^r}(p^r)) \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

Böyle bir problem için Belman ve Zadeh' in bulanık karar kuralı çoklu bulanık hedeflerin bir birleşme kuralı olarak kullanılabilir. Bu durumda birleşmiş bulanık hedefin başarı derecesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) = \min_{k \in K} \max_{p^k} \min(\mu_{x\tilde{A}^k y}(p^k), \mu_{\tilde{G}^k}(p^k)) \tag{6.22}$$

Burada $p^* = (p^{1^*},...,p^{r^*})$ dır. O zaman Oyuncu 1'in birleşmiş bulanık hedefinin başarı derecesine göre maximin değeri aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\hat{\mu}_{a(x,y)}(p^*) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y}\min_{k\in K}\max_{p^k}\min(\mu_{x\tilde{A}^k y}(p^k), \mu_{\tilde{G}^k}(p^k)) \tag{6.23}$$

Üyelik fonksiyonları lineer olduğunda birleşmiş bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin strateji aşağıdaki teorem ile gösterilen matematiksel programlama probleminin çözülmesiyle elde edilebilir.

6.2.1. Teorem: Çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için, bulanık hedeflerin üyelik fonksiyonları ve bulanık ödemeler için şekil fonksiyonları sırası ile (6.19) ve (6.20) gibi lineer ve bulanık hedefler bulanık karar kuralına göre birleşmiş ise birleşmiş bulanık hedefin başarı derecesine göre Oyuncu 1'in maximin çözümü aşağıdaki NLP probleminin bir optimal çözümüne denktir. (Sakawa ve Nishizaki, 1994).

$$\left.\begin{array}{l}
\underset{x,\sigma}{\text{maximize}}\ \sigma \\
\text{kısıtlar}\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j - \underline{a}^k}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i y_j + \overline{a}^k - \underline{a}^k} \ge \sigma,\ \forall y\in Y,\ k=1,...,r \\
\qquad\quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
\qquad\quad x_i \ge 0,\ i=1,...,m
\end{array}\right\} \tag{6.24}$$

Eğer σ^* optimal değer ise $0 \le \sigma^* \le 1$ dir.

(6.24) problemine Shimizu ve Aiyoshi tarafından tanımlanan rahatlatma işlemi uygulanırsa, (Shimizu ve Aiyoshi, 1980) $y^l \in Y, l=1,...,L,\ \sum_{j=1}^{n} y_j^l = 1,\ y_j^l \ge 0,\ j=1,...,n$ alarak (6.24) problemi için aşağıdaki rahatlatılmış problemi elde ederiz.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,\sigma}{\text{maximize}}\ \sigma \\ \text{kısıtlar}\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{k})_u x_i y_j^l - \underline{a}^k}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^{k})_u - a_{ij}^{k}\right)x_i y_j^l + \overline{a}^k - \underline{a}^k} \geq \sigma,\ l=1,\dots,L,\ k=1,\dots,r \\ \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \qquad x_i \geq 0,\ i=1,\dots,m \end{array}\right\} \tag{6.25}$$

$\sigma = \hat{\sigma}$ olsun, burada $\hat{\sigma}$, [0,1] aralığında bir değerdir. Bu durumda (6.25) rahatlatılmış probleminin kısıtları aşağıdaki gibi olur.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{k})_u x_i y_j^l - \underline{a}^k \geq \hat{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^{k})_u - a_{ij}^{k}\right)x_i y_j^l + \overline{a}^k - \underline{a}^k\right),\ l=1,\dots,L,\ k=1,\dots,r \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0,\ i=1,\dots,m \end{array}\right\} \tag{6.26}$$

Tek amaçlı oyunlara benzer bir işlem kullanarak (6.26) kısıtlarını sağlayan $\hat{\sigma}$ maximal kısıt değerini bulabiliriz. Bu durumda $x^* = x^L$ uygun çözümü ve $\hat{\sigma}$ maksimal kısıt değeri çifti (6.25) rahatlatılmış probleminin bir optimal çözümü olmalıdır.

En çok bozulan kısıt'ın üretimi ve uygunluğun test edilmesi için r tane minimizasyon problemi aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{y}{\text{minimize}}\ \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^{k})_u x_i y_j - \underline{a}^k}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^{k})_u - a_{ij}^{k}\right)x_i y_j + \overline{a}^k - \underline{a}^k} \\ \text{kısıtlar}\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ \qquad y_j \geq 0,\ j=1,\dots,n \end{array}\right\} k=1,\dots,r \tag{6.27}$$

Yukarıdaki (6.27) minimizasyon problemi aşağıdaki değişken dönüşümü kullanılarak LP problemine indirgenebilir.

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i^L y_j + \overline{a}^k - \underline{a}^k} = t^k,\ k = 1,...,r \tag{6.28}$$

ve

$$y_j t^k = z_j^k,\ k = 1,...,r \tag{6.29}$$

Böylece (6.27) minimizasyon problemi aşağıdaki r tane LP problemine indirgenmiş olur.

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{z^k,t^k} \ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i^L z_j^k - \underline{a}^k t^k \\ \text{kısıtlar } \sum_{j=1}^{n} z_j^k = t^k \\ \qquad\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i^L z_j^k + (\overline{a}^k - \underline{a}^k)t^k = 1 \\ \qquad\ z_j^k \geq 0,\ j = 1,...,n \end{array}\right\} k = 1,...,r. \tag{6.30}$$

(6.30), $z^k = (z_1^k, z_2^k, ..., z_n^k)$ ve t^k karar değişkenlerine sahiptir. İki eşitlik kısıt'ı ve değişkenlerin negatif olmama koşulu vardır. r tane problem olduğu için en çok bozulan kısıtın üretimi ve problem (6.24) için uygunluğun testi, r tane LP probleminin çözülmesi ve en küçük optimal değere sahip problemin bulunmasıyla elde edilebilir. Bulanık ödemeli ve bulanık hedefli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı bir oyunda maximin çözümün hesaplanması aşağıdaki algoritmayla özetlenebilir.

ALGORİTMA 6.2.1

Adım 1: Ödemeler için r tane bulanık hedef tanımla, herhangi bir $y^l \in Y$ seç ve $l = 1$ al. Sonra (6.25) rahatlatılmış problemini formüle et.

Adım 2: (6.25) rahatlatılmış probleminin kısıtlarında $\sigma = \hat{\sigma}$ alarak (6.26) kısıtlarını formüle et. Yarılama yöntemi ve uygunluk testinden yararlanarak $(x^*, \hat{\sigma} = \sigma^*)$ optimal değerini hesapla, sonra $x^* = x^L$ al.

Adım 3: (6.30)'da ki r tane minimizasyon problemlerini x^L ile formüle et.

Adım 4: (6.30)'da ki r tane minimizasyon problemlerini çöz ve r tane optimal çözüm $(z^{k*}, t^{k*}),\ k = 1,...,r$ elde et. Minimal amaç fonksiyon değerlerinin her biri

$\Phi^k(z^{k*}, t^{k*}),\ k = 1,...,r$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = \min_k \Phi^k(z^{k*}, t^{k*})$ olsun.

Adım 5: Eğer $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) \geq \sigma^* + \varepsilon$ ise algoritma sona erer, burada ε önceden belirtilmiş bir sabittir. Bu durumda x^L bulanık hedefin başarı derecesine göre maximin çözümdür. Aksi takdirde eğer $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}}*, z^{\hat{k}}*) < \sigma* + \varepsilon$ ise $l = l + 1$ al adım 2 ye dön.

Sakawa'nın tanımladığı yukarıdaki algoritmada defalarca yarılama yöntemi uygulanıp her seferinde uygunluk testi yapılmaktadır bu da çok fazla işlem gerektirmektedir. Bulanık hedefli ve bulanık ödemeli çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için (6.26) probleminin kısıtlarını sağlayan σ maximal kısıt değerini aşağıdaki lineer iteratif metodu kullanarak bulabiliriz. (Cevikel ve Ahlatcioglu, 2010)

(6.25) probleminde,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j^l - \underline{a}^k = P_k^l$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i y_j^l + \overline{a}^k - \underline{a}^k = Q_k^l$$

olsun. Bu durumda (6.25) probleminin ilk kısıtı

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j^l - \underline{a}^k = P_k^l \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i y_j^l + \overline{a}^k - \underline{a}^k = Q_k^l \end{array}\right\} \Rightarrow l = 1,...,L,\ k = 1,...,r \text{ için } \frac{P_k^l}{Q_k^l} \geq \sigma \qquad (6.31)$$

şeklinde elde edilir.

O halde Dinkelbach algoritmasından yararlanarak aşağıdaki LP problemini yazabiliriz.

$$\left.\begin{array}{l}
\max\ r \\
kısıt : P_k^l - \sigma_s Q_k^l - r \geq 0 \\
\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^k)_u x_i y_j^l - \underline{a}^k - P_k^l = 0 \\
\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left((a_{ij}^k)_u - a_{ij}^k\right)x_i y_j^l + \overline{a}^k - \underline{a}^k - Q_k^l = 0,\ k=1,...,r,\ l=1,...,L \\
\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
\qquad x_i \geq 0,\ i=1,...,m,
\end{array}\right\} s=0,...,S \qquad (6.32)$$

Burada bir $\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri alınır ve tek amaçlı durumda olduğu gibi;

$$\sigma_s = \min_{k,l}\left\{\frac{P_k^l}{Q_k^l}\right\} \quad s=1,...,S,\ l=1,...,L,\ k=1,...,r \qquad (6.33)$$

şeklinde σ_s'nin yeni değerleri hesaplanır ve max $r < \varepsilon$ olduğu zaman σ maximal kısıt değeri bulunmuş olur.

Bu durumda x^* uygun çözümü ve σ maximal kısıt değer çifti $(x^*, \sigma = \sigma^*)$, (6.25) rahatlatılmış probleminin bir optimal çözümü olur.

Bu durumda Sakawa'nın algoritmasında gösterdiğimiz gibi defalarca ikiye bölme işlemi yapmaktansa problem (6.32) da gösterdiğimiz gibi bir lineer iteratif metot kullanarak daha hızlı bir şekilde (6.25) rahatlatılmış probleminin çözümünü bulabiliriz. O halde yukarıdaki algoritma aşağıdaki gibi yazılabilir.

ALGORİTMA 6.2.2

Adım 1: Ödemeler için r tane fuzzy hedef tanımla, kabul edilebilir bir ε hata payı al, herhangi bir $y^l \in Y$ seç ve $l = 1$ al. Sonra (6.25) rahatlatılmış problemini formüle et.

Adım 2: $\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri al ve (6.32) lineer programlama problemini çözüp, $(x^*, \sigma = \sigma^*)$ optimal değerini hesapla.

Adım 3: $x^* = x^L$ alarak (6.30)'da ki r tane minimizasyon problemlerini x^L ile formüle et.

Adım 4: (6.30)'da ki r tane minimizasyon problemlerini çöz ve r tane optimal çözüm $(z^{k*}, t^{k*}),\ k = 1,...,r$ elde et. Minimal amaç fonksiyon değerlerinin her biri

$\Phi^k(z^{k*}, t^{k*}),\ k = 1,...,r$ olsun. Bu durumda $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = \min_k \Phi^k(z^{k*}, t^{k*})$ al.

Adım 5: Eğer $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) \geq \sigma^*$ ise algoritma sona erer. Bu durumda x^L fuzzy hedefin başarı derecesine göre maximin çözümdür. Aksi takdirde eğer $\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) < \sigma^*$ ise $l = l + 1$ al ve adım 2 ye dön.

6.2.1. Örnek: Her bir oyuncunun üç pür stratejiye ve üç amaca sahip olduğunu kabul edelim. Bulanık ödemeleri aşağıdaki gibi verilen çok amaçlı iki kişili sıfır toplamlı oyunu ele alalım (Cook, 1976).

$$\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} (1.8, 2, 2.2) & (4.5, 5, 5.5) & (0.2, 1, 1.8) \\ (-1.8, -1, -0.2) & (-2.4, -2, -1.6) & (5.9, 6, 6.1) \\ (-0.1, 0, 0.1) & (2.5, 3, 3.5) & (-1.8, -1, -0.2) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} (-3.8, -3, -2.2) & (6.7, 7, 7.3) & (1.6, 2, 2.4) \\ (-0.5, 0, 0.5) & (-2.2, -2, -1.8) & (-0.7, 0, 0.7) \\ (2.6, 3, 3.4) & (-1.8, -1, -0.2) & (-6.5, -6, -5.5) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} (7.9, 8, 8.1) & (-2.5, -2, -1.5) & (2.3, 3, 3.7) \\ (-5.5, -5, -4.5) & (5.6, 6, 6.4) & (-0.6, 0, 0.6) \\ (-3.8, -3, -2.2) & (0.4, 1, 1.6) & (5.9, 6, 6.1) \end{pmatrix}$$

Üç amaç için Oyuncu 1'in bulanık hedefleri aşağıdaki lineer üyelik fonksiyonları ile verilmiş olsun.

$$\mu_{\hat{G}^1}(p^1)=\begin{cases} 0 & .,\text{eğer} \quad p^1<-2 \\ \dfrac{(p^1+2)}{8} & .,\text{eğer} \quad -2\le p^1\le 6 \\ 1 & .,\text{eğer} \quad 6<p^1 \end{cases}$$

$$\mu_{\hat{G}^2}(p^2)=\begin{cases} 0 & .,\text{eğer} \quad p^2<-6 \\ \dfrac{(p^2+6)}{13} & .,\text{eğer} \quad -6\le p^2\le 7 \\ 1 & .,\text{eğer} \quad 7<p^2 \end{cases}$$

$$\mu_{\hat{G}^3}(p^3)=\begin{cases} 0 & .,\text{eğer} \quad p^3<-5 \\ \dfrac{(p^3+5)}{13} & .,\text{eğer} \quad -5\le p^3\le 8 \\ 1 & .,\text{eğer} \quad 8<p^3 \end{cases}$$

Şimdi bu örneği $\varepsilon=10^{-5}$ değeri için Algoritma 6.3.2 ile çözelim.

Algoritmada 6.3.2 de y 'nin başlangıç değerinin $y_1=0, \mathrm{y}_2=1, y_3=0$ olduğunu kabul edelim.

$l=1$ için problem (6.25) den

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{x,\sigma} \quad \sigma \\ \dfrac{5.5x_1-1.6x_2+3.5x_3+2}{0.5x_1+0.4x_2+0.5x_3+8}\ge\sigma \\ \dfrac{7.3x_1-1.8x_2-0.2x_3+6}{0.3x_1+0.2x_2+0.8x_3+13}\ge\sigma \\ \dfrac{-1.5x_1+6.4x_2+1.6x_3+5}{0.5x_1+0.4x_2+0.6x_3+13}\ge\sigma \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{array}\right\} \tag{6.34}$$

problemi bulunur.

Bu problemi (6.32) LP modeline dönüştürürsek aşağıdaki problem elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l}\max \quad r \\ 5.5x_1 - 1.6x_2 + 3.5x_3 + 2 - P_1^1 = 0 \\ 7.3x_1 - 1.8x_2 - 0.2x_3 + 6 - P_2^1 = 0 \\ -1.5x_1 + 6.4x_2 + 1.6x_3 + 5 - P_3^1 = 0 \\ 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 + 8 - Q_1^1 = 0 \\ 0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 + 13 - Q_2^1 = 0 \\ 0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.6x_3 + 13 - Q_3^1 = 0 \\ P_1^1 - \sigma_0 Q_1^1 - r \geq 0 \\ P_2^1 - \sigma_0 Q_2^1 - r \geq 0 \\ P_3^1 - \sigma_0 Q_3^1 - r \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (6.35)$$

$\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri için (6.35) probleminin optimal çözümü aşağıdaki gibi olur.

$x_1 = 0.2156862745,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.7843137255,$
$P_1^1 = 5.9313725490,\ P_2^1 = 7.4176470588,\ P_3^1 = 5.9313725490,$
$\mathrm{Q}_1^1 = 8.5,\ \mathrm{Q}_2^1 = 13.6921568627,\ \mathrm{Q}_3^1 = 13.5784313725$
ve
$r = 5.931372549$

$$\sigma_1 = \min\left\{\frac{P_1^1}{Q_1^1}, \frac{P_2^1}{Q_2^1}, \frac{P_3^1}{Q_3^1}\right\} = 0.436823104$$

$\sigma_1 = 0.436823104$ değeri problem (6.35)'de yerine yazılır ve problem bu yeni σ değerine göre çözülürse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x_1 = 0.2094075849,\ x_2 = 0.2199013442,\ x_3 = 0.5706910709,$
$P_1^1 = 4.7973183144,\ P_2^1 = 7.0187147361,\ P_3^1 = 7.0063629389,$
$\mathrm{Q}_1^1 = 8.4780098656,\ \mathrm{Q}_2^1 = 13.5633554010,\ \mathrm{Q}_3^1 = 13.5350789727,$
ve
$r = 1.09392772919286728$

Yukarıda bulunan yeni değerlere göre σ_2 değeri hesaplanır.

$$\sigma_2 = \min\left\{\frac{P_1^1}{Q_1^1}, \frac{P_2^1}{Q_2^1}, \frac{P_3^1}{Q_3^1}\right\} = 0.517476282$$

$\sigma_2 = 0.517476282$ değeri problem (6.35)'de yerine yazılıp bu değere göre problemin çözülmesiyle aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

$x_1 = 0.2428171011,\ x_2 = 0.2778337180, x_3 = 0.4793491808,$
$P_1^1 = 4.5686822400,\ P_2^1 = 7.1765943096,\ P_3^1 = 7.1808688332,$
$Q_1^1 = 8.4722166282,\ Q_2^1 = 13.5118912186,\ Q_3^1 = 13.5201515463$
ve
$r = 0.184511079015114792$

Bu iterasyonu devam ettirmek suretiyle aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$\sigma_3 = 0.531123398$ ve $r = 0.0308464488237477978$

$\sigma_4 = 0.533405377$ ve $r = 0.00515816812432929022$

$\sigma_5 = 0.5337869363$ ve $r = 0.00086259062776972$

$\sigma_6 = 0.5338507507$ ve $r = 0.00014425099020443$

$\sigma_7 = 0.5338614225$ ve $r = 0.000024121857328579$

$\sigma_8 = 0.5338632069$ ve $r = 0.0000040353761585216 < \varepsilon$

O halde

$x^* = (0.2494967511, 0.2895312188, 0.4609720300)$ ve $\sigma^* = 0.5338632069$

bulunmuş olur.

Şimdi $x^* = x^L$ alalım ve bu x^L değeri ile (6.30) problemlerini formüle edelim.

$k = 1$ için:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{z^1, t^1} \ \left\{0.537083811 z_1^1 + 2.52238429 z_2^1 + 2.123040175 z_3^1 + 2t^1\right\} \\ \textit{kısıt}\ \ 0.327621527 z_1^1 + 0.471046878 z_2^1 + 0.597328147 z_3^1 + 8t^1 = 1 \\ \qquad z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 = t^1 \\ \qquad z_1^1, z_2^1, z_3^1 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$k = 2$ için:

$$\left.\begin{array}{ll}\min\limits_{z^2,t^2} & \left\{1.163177662z_1^2 + 1.207975684z_2^2 - 1.733882116z_3^2 + 6t^2\right\} \\ kısıt & 0.528751822z_1^2 + 0.501532893z_2^2 + 0.532956568z_3^2 + 13t^2 = 1 \\ & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = t^2 \\ & z_1^2, z_2^2, z_3^2 \geq 0\end{array}\right\}$$

$k = 3$ için:

$$\left.\begin{array}{ll}\min\limits_{z^3,t^3} & \left\{-0.296105266z_1^3 + 2.216309918z_2^3 + 3.908786099z_3^3 + 5t^3\right\} \\ kısıt & 0.538492908z_1^3 + 0.517144081z_2^3 + 0.394463659z_3^3 + 13t^3 = 1 \\ & z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = t^3 \\ & z_1^3, z_2^3, z_3^3 \geq 0\end{array}\right\}$$

elde edilir

Bu problemlerin sonuçları sırasıyla aşağıda verildiği gibi bulunur.

$k = 1$ için:

$z^{1*} = (0.120082306425403407, 0, 0),\ t^{1*} = 0.120082306425403407$
ve
$\Phi^1(z^{1*}, t^{1*}) = 0.30465887561943$

$k = 2$ için:

$z^{2*} = (0,\ 0,\ 0.0738936828013324054),\ t^{2*} = 0.0738936828013324054$
ve
$\Phi^2(z^{2*}, t^{2*}) = 0.31523916171339$

$k = 3$ için:

$z^{3*} = (0.0738634652169512934, 0, 0),\ t^{3*} = 0.0738634652169512934$
ve
$\Phi^3(z^{3*}, t^{3*}) = 0.34744596506901$

Bu durumda;

$$\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = \min_k \Phi^k(z^{k*}, t^{k*}) = 0.30465887561943$$

değeri elde edilir.

$\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = 0.30465887561943 < \sigma^* = 0.5338632069$ olduğundan $l = 2$ alınıp algoritmada ikinci adıma dönülür. Burada yeni y değerimiz $y^2 = (1,0,0)$ dir.

Şimdi $y^2 = (1,0,0)$ ve $\sigma_0 = 0$ başlangıç değeri alınarak (6.32) modeli formüle edilirse aşağıdaki lineer programlama problemi bulunmuş olur.

$$
\begin{aligned}
&\max \ r \\
&\left.\left.\begin{aligned}
&5.5x_1 - 1.6x_2 + 3.5x_3 + 2 - P_1^1 = 0 \\
&7.3x_1 - 1.8x_2 - 0.2x_3 + 6 - P_2^1 = 0 \\
&-1.5x_1 + 6.4x_2 + 1.6x_3 + 5 - P_3^1 = 0 \\
&0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.5x_3 + 8 - Q_1^1 = 0 \\
&0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.8x_3 + 13 - Q_2^1 = 0 \\
&0.5x_1 + 0.4x_2 + 0.6x_3 + 13 - Q_3^1 = 0 \\
&P_1^1 - \sigma_0 Q_1^1 - r \geq 0 \\
&P_2^1 - \sigma_0 Q_2^1 - r \geq 0 \\
&P_3^1 - \sigma_0 Q_3^1 - r \geq 0
\end{aligned}\right\} l = 1 \\
&\left.\begin{aligned}
&2.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2 - P_1^2 = 0 \\
&-2.2x_1 + 0.5x_2 + 3.4x_3 + 6 - P_2^2 = 0 \\
&8.1x_1 - 4.5x_2 - 2.2x_3 + 5 - P_3^2 = 0 \\
&0.2x_1 + 0.8x_2 + 0.1x_3 + 8 - Q_1^2 = 0 \\
&0.8x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 13 - Q_2^2 = 0 \\
&0.1x_1 + 0.5x_2 + 0.8x_3 + 13 - Q_3^2 = 0 \\
&P_1^2 - \sigma_0 Q_1^2 - r \geq 0 \\
&P_2^2 - \sigma_0 Q_2^2 - r \geq 0 \\
&P_3^2 - \sigma_0 Q_3^2 - r \geq 0
\end{aligned}\right\} l = 2 \\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}\right\}
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

Bu problemin optimal çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$x_1 = 0.9268800909,\ x_2 = 0.0627012692,\ x_3 = 0.0104186399,$
$P_1^1 = 7.0339837090,\ P_2^1 = 12.6512786513,\ P_3^1 = 4.0276378102,$
$P_1^2 = 4.0276378102,\ P_2^2 = 4.0276378102,\ P_3^2 = 12.2026520174,$
$Q_1^1 = 8.4937298731,\ Q_2^1 = 13.2989391930,\ Q_3^1 = 13.4947717371,$
$Q_1^2 = 8.2365788975,\ Q_2^2 = 13.7770221633,\ Q_3^2 = 13.1323735556,$
ve
$r = 4.0276378102$

$$\sigma_1 = \min\left\{\frac{P_1^1}{Q_1^1}, \frac{P_2^1}{Q_2^1}, \frac{P_3^1}{Q_3^1}, \frac{P_1^2}{Q_1^2}, \frac{P_2^2}{Q_2^2}, \frac{P_3^2}{Q_3^2}\right\} = 0.2923445838$$

$\sigma_1 = 0.2923445838$ değeri problem (6.36)'da yerine yazılır ve bu yeni σ değerine göre problem çözülürse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$x_1 = 0.6979797172,\ x_2 = 0.1298835212,\ x_3 = 0.1721367626,$
$P_1^1 = 6.2335534813,\ P_2^1 = 10.8270342467,\ P_3^1 = 5.0597037737,$
$P_1^2 = 3.5267923501,\ P_2^2 = 5.1146513750,\ P_3^2 = 9.6904589908,$
$Q_1^1 = 8.4870116480,\ Q_2^1 = 13.3730800293,\ Q_3^1 = 13.5042253242,$
$Q_1^2 = 8.2607164359,\ Q_2^2 = 13.6921802389,\ Q_3^2 = 13.2724491419,$
ve
$r = 1.1118166428$

Bu iterasyona devam etmek suretiyle aşağıdaki sonuçlar bulunur.

$\sigma_2 = 0.3735454314$ ve $r = 0.30140523$

$\sigma_3 = 0.3955954247$ ve $r = 0.0812845742$

$\sigma_4 = 0.4015446853$ ve $r = 0.02189$

$\sigma_5 = 0.4031470235$ ve $r = 0.0058927338$

$\sigma_6 = 0.4035783827$ ve $r = 0.0015861431$

$\sigma_7 = 0.4036944922$ ve $r = 0.0004269310$

$\sigma_8 = 0.4037257446$ ve $r = 0.0001149137$

$\sigma_9 = 0.4037341564$ ve $r = 0.0000309320$

$\sigma_{10} = 0.4037364205$ ve $r = 0.0000083277 < \varepsilon$

Bu durumda

$x^* = (0.6125305827, 0.1567256646, 0.2307437527)$ ve $\sigma^* = 0.4037364205$

değerleri bulunmuş olur.

Şimdi $x^* = x^L$ alalım ve bu x^L değeri ile (6.30) problemlerini formüle edelim.

$k = 1$ için:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{z^1, t^1} & \left\{1.3392965524 z_1^1 + 3.925760276 z_2^1 + 2.012432852 z_3^1 + 2t^1\right\} \\ kısıt & 0.2709610236 z_1^1 + 0.4843274336 z_2^1 + 0.6902920349 z_3^1 + 8t^1 = 1 \\ & z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 = t^1 \\ & z_1^1, z_2^1, z_3^1 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$k = 2$ için:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{z^2, t^2} & \left\{-0.4846756908 z_1^2 + 4.143218307 z_2^2 + 0.310690724 z_3^2 + 6t^2\right\} \\ kısıt & 0.6606847996 z_1^2 + 0.3996993099 z_2^2 + 0.4700920747 z_3^2 + 13t^2 = 1 \\ & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = t^2 \\ & z_1^2, z_2^2, z_3^2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

$k = 3$ için:

$$\left.\begin{array}{ll} \min\limits_{z^3, t^3} & \left\{3.748595974 z_1^3 + 0.4534383831 z_2^3 + 3.767935446 z_3^3 + 5t^3\right\} \\ kısıt & 0.3242108928 z_1^3 + 0.5074018088 z_2^3 + 0.5458811821 z_3^3 + 13t^3 = 1 \\ & z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = t^3 \\ & z_1^3, z_2^3, z_3^3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

problemleri elde edilir

Bu problemlerin sonuçları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$k = 1$ için:

$z^{1*} = (0.1209049344, 0, 0)$, $t^{1*} = 0.1209049344$ ve $\Phi^1(z^{1*}, t^{1*}) = 0.4037374271831$

$k = 2$ için:

$z^{2*} = (0.0732027724, 0, 0),\ t^{2*} = 0.0732027724$ ve $\Phi^2(z^{2*}, t^{2*}) = 0.403737030032$

$k = 3$ için:

$z^{3*} = (0, 0.0740334828, 0),\ t^{3*} = 0.0740334828$ ve $\Phi^3(z^{3*}, t^{3*}) = 0.403737036944$

O halde

$$\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = \min_k \Phi^k(z^{k*}, t^{k*}) = 0.403737030032$$

elde edilir.

$$\Phi^{\hat{k}}(z^{\hat{k}*}, z^{\hat{k}*}) = 0.403737030032 \geq \sigma^* = 0.4037364205$$

olduğundan $x^* = (0.6125305827, 0.1567256646, 0.2307437527)$ ve $\sigma^* = 0.4037364205$ optimal çözümleri elde edilmiş olur. Sonuçlar aşağıda verilen çizelge ile özetlenebilir.

Çizelge 6.1 Algoritma 6.3.2 ile σ değerleri

İterasyon sayısı	1. Adım	2. Adım
1	0	0
2	0.436823104	0.2923445838
3	0.517476282	0.3735454314
4	0.531123398	0.3955954247
5	0.533405337	0.4015446853
6	0.5337869363	0.4031470235
7	0.5338507507	0.4035783827
8	0.533861425	0.4036944922
9	0.5338632069	0.4037257446
10		0.4037341564
11		0.4037364205

Sakawa’nın algoritması ile elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelge ile verilmiştir.

Çizelge 6.2 Sakawa'nın yöntemi ile σ değerleri

İterasyon	1. Adım	2. Adım
1	0.5	0.266932487
2	0.75	0.40039873
3	0.625	0.467131852
4	0.5625	0.433765291
5	0.53125	0.41708201
6	0.546875	0.40874037
7	0.5390625	0.40456955
8	0.53515625	0.40248414
9	0.533203125	0.403526845
10	0.534179687	0.404048197
11	0.533691406	0.403787521
12	0.533447265	0.403657183
13	0.533813476	0.403722352
14	0.533996581	0.403754936
15	0.533905028	0.403738644
16	0.533859252	0.403730498
17	0.53388214	
18	0.533870696	
19	0.533864974	

Yukarıdaki iki çizelgede gördüğümüz gibi, bizim sunmuş olduğumuz algoritma ile daha az iterasyon yapılarak sonuca gidilmiştir.

7. BULANIK (FUZZY) ÖDEMELİ ORTAKLI OYUNLAR

Bu bölümde bulanık (fuzzy) ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlardan bulanık (fuzzy) ödemeli ortaklı oyunlara geçiş yapılmaktadır. Doğa'ya karşı bulanık (fuzzy) ödemeli oyunlar oynayan oyuncuların stratejilerini birleştirerek oynamaları sonunda elde ettikleri optimal oyun değerleri ile bulanık (fuzzy) ödemeli bir ortaklı oyun kurgulanmaktadır. Üstelik bu şekilde elde edilmiş olan bulanık (fuzzy) karakteristik fonksiyonun süpertoplanabilir özellikte olduğunun ispatı da yapılmaktadır.

7.1 Doğa'ya Karşı Bulanık (Fuzzy) Ödemeli İki Kişili Sıfır Toplamlı Oyunlar Oynayan Oyuncuların Ortaklıklar Kurarak Ödemelerini Arttırmalarının Analizi

Bu bölümde, daha önce keskin (crisp) durumlar için yapılan "Doğa'ya karşı oynayan oyuncuların ortaklıklar kurarak ödemelerini arttırmaları" (Özkök, 2009) çalışması bulanık (fuzzy) durumlar için incelenmiştir. Bu kapsamda, Doğa'ya karşı bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyun oynayan oyuncuların ortaklıklar (koalisyonlar) kurarak ortak kazançlarını ve dolayısıyla da bireysel kazançlarını arttırdıkları gösterilmektedir. Ayrıca oyuncuların Doğa'ya karşı oynadıkları bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunların optimal oyun değerleri ile elde edilen $\tilde{v}$ bulanık karakteristik fonksiyonlu ortaklı oyunun süpertoplanabilir özellikte olduğunu bir teoremle ifade etmekte ve ispatlamaktayız.

A oyuncusunun stratejileri: A_i, $(i = 1,...,m)$

B oyuncusunun stratejileri: B_j, $(j = 1,...,n)$

D (Doğa) oyuncusunun stratejileri: D_k, $(k = 1,...,l)$

olmak üzere, A ve B oyuncularının ödeme matrisleri sırasıyla,

$$H_A(A_i, D_k) = \tilde{a}_{ik},\ H_B(B_j, D_k) = \tilde{b}_{jk},\ i = 1,...,m,\ j = 1,...,n,\ k = 1,...,l$$

olsun.

Burada $\tilde{a}_{ik} = \left((a_{ik})_l, a_{ik}, (a_{ik})_u\right)$ ve $\tilde{b}_{jk} = \left((b_{jk})_l, b_{jk}, (b_{jk})_u\right)$ dır.

A'nın A_i'yi oynama olasılığı: x_i, $(i = 1,...,m)$

B'nin B_j'yi oynama olasılığı: y_j, $(j = 1,...,n)$

D'nin D_k'yı oynama olasılığı: z_k, $(k = 1,...,l)$

olmak üzere A ve B oyuncularının ödeme fonksiyonları sırasıyla,

$$H_A(x,z) = \sum_i \sum_k x_i \tilde{a}_{ik} z_k \text{ ve } H_B(y,z) = \sum_j \sum_k y_j \tilde{b}_{jk} z_k$$

olsun.

Burada

$$x_i, y_j, z_k \geq 0;\ i = 1,...,m;\ j = 1,...,n;\ k = 1,...,l \text{ ve } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1;\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1;\ \sum_{k=1}^{l} z_k = 1$$

dir. Ayrıca $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ve $z = (z_1, z_2, ..., z_l)$ vektörlerinin her biri birer olasılık dağılımını gösterir.

$$\max_x \min_z H_A(x,z) = H_A(x^0, z^A) = \tilde{v}(\{A\})$$

ve

$$\max_y \min_z H_B(y,z) = H_B(y^0, z^B) = \tilde{v}(\{B\})$$

olsun. Böylece (x^0, z^A) ve (y^0, z^B), sırasıyla A ve B oyuncularının Doğa'ya karşı oynadıkları oyunda denge çözümleridir. O halde,

$$H_A(x^0, z^A) \leq H_A(x^0, z)$$

ve

$$H_B(y^0, z^B) \leq H_B(y^0, z)$$

dir. Çünkü denge çözümünü değiştiren oyuncu kayba uğrar. Burada Doğa oyuncusu kendi stratejisini değiştirdiğinde, dolayısıyla dengeyi değiştirdiğinden, rakiplerinin kazançları artarken Doğa'nın kazancı azalmıştır. Buradaki sıralama karar vericinin sıralama tercihine göre değişebilir. Karar verici öncelik sırasına göre;

- (Orta değer, Sağ yayılma, Sol yayılma)
- (Orta değer, Sol yayılma, Sağ yayılma)
- (Sağ yayılma, Orta değer, Sol yayılma)

- (Sağ yayılma, Sol yayılma, Orta değer)
- (Sol yayılma, Orta değer, Sağ yayılma)
- (Sol yayılma, Sağ yayılma, Orta değer)
- $\tilde{a} = \left(a_l, a, a_u\right)$ ve $\tilde{b} = \left(b_l, b, b_u\right)$ iki üçgensel bulanık sayı olmak üzere;

$\tilde{a} \leq \tilde{b} \Leftrightarrow \left(a_l + 2a + a_u\right) \leq \left(b_l + 2b + b_u\right)$

sıralamalarından herhangi birini tercih edebilir.

D oyuncusu (Doğa) D_k stratejisini uyguladığında A oyuncusu A_i ve B oyuncusu B_j stratejisini oynasın. Bu durumda $A \cup B$ koalisyonu $\tilde{a}_{ik} + \tilde{b}_{jk}$ değerini kazanır. A_i, B_j ve D_k stratejilerinin oynanma olasılıkları sırasıyla x_i, y_j ve z_k olmak üzere koalisyonun ödeme fonksiyonu

$$H_{A \cup B}(x \odot y, z) = \sum_i \sum_j \sum_k x_i y_j (\tilde{a}_{ik} + \tilde{b}_{jk}) z_k$$

dır. Burada $x \odot y = (x_1 y_1, ..., x_i y_j, ..., x_m y_n)$ vektörü olasılık dağılım vektörüdür.

Gerçekten $\forall i, j$ için $x_i \geq 0,\ y_j \geq 0 \Rightarrow x_i y_j \geq 0$, ve $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j = \sum_{i=1}^{m} x_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j}_{=1} = \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ dir.

A ve B oyuncularının birlikte Doğa'ya karşı elde edecekleri maksimum kazanç (oyun değeri)

$$\max_{x \odot y} \min_{z} H_{A \cup B}(x \odot y, z) = H_{A \cup B}(x^* \odot y^*, z^*) = \tilde{v}(\{A\} \cup \{B\})$$

olsun. Burada $(x^* \odot y^*, z^*)$ oyunun denge durumudur. Denge durumunu bozan oyuncu kayba uğrar.

Oyuncular iki kişili olduğu gibi üç, dört veya daha çok oyuncuylada Doğa'ya karşı koalisyonlar kurabilirler. S bir koalisyon ve S koalisyonunun stratejilerinin karma vektörü w olmak üzere S koalisyonunun Doğa'ya karşı elde edeceği maksimum kazanç (oyun değeri)

$$\max_{w} \min_{z} H_S(w, z) = \tilde{v}(\{S\})$$

ile gösterilmiştir.

7.1.1. Tanım (Bulanık Ödemeli Ortaklı Oyunun Karakteristik Fonksiyonu): Yukarıda ifade edildiği gibi A ve B oyuncularının Doğa'ya karşı elde edecekleri kazançlar (oyun değerleri) sırasıyla

$$\max_{x}\min_{z} H_A(x,z) = \tilde{v}(\{A\})$$

$$\max_{y}\min_{z} H_B(y,z) = \tilde{v}(\{B\})$$

dir. A ve B oyuncularının birlikte elde edecekleri oyun değeri, $x \odot y = (x_1 y_1, \ldots, x_i y_j, \ldots, x_m y_n)$ vektörü olasılık dağılım vektörü olmak üzere

$$\max_{x\odot y}\min_{z} H_{A\cup B}(x\odot y,z) = \tilde{v}(\{A\}\cup\{B\})$$

dir. Benzer şekilde $S \subset I$ koalisyonunun karma vektörü w olsun. Bu durumda $S \subset I$ koalisyonunun elde edeceği kazanç (oyun değeri)

$$\max_{w}\min_{z} H_S(w,z) = \tilde{v}(\{S\})$$

dir. Böylece Doğa'ya karşı oynanan sıfır toplamlı oyunların optimal oyun değerleri, bulanık ödemeli ortaklı oyunun $\tilde{v}$ karakteristik fonksiyonunu belirler.

7.1.1. Teorem: $\tilde{v}$ karakteristik fonksiyonlu ortaklı oyun bir süpertoplanabilir oyundur. Yani

$\tilde{v}\left(\{A\}\cup\{B\}\right) \geq \tilde{v}\left(\{A\}\right) + \tilde{v}\left(\{B\}\right)$ dir.

İspat: Daha önce keskin (crisp) sayılar için bu teorem ispatlandı (Özkök, 2009). Biz bulanık sayılar için bu teoremi ispatlayacağız. Burada karar verici hangi sıralama kriterini tercih ederse bütün işlem aşamalarında aynı sıralamaya sadık kalması varsayımı altında bu teorem geçerlidir. Oyunun denge çözümü $(x^* \odot y^*, z^*)$ olduğundan koalisyon bu denge durumunu bozarsa kazancını azaltır. Eğer dengeyi Doğa bozarsa kaybını dolayısıyla koalisyonun kazancını arttırır.

$$H_{A\cup B}(x^0 \odot y^0, z^*) \le H_{A\cup B}(x^* \odot y^*, z^*) = \tilde{v}(\{A\}\cup\{B\}) \le H_{A\cup B}(x^* \odot y^*, z)$$

$$H_{A\cup B}(x^* \odot y^*, z) = \sum_i\sum_j\sum_k x_i^* y_j^* (\tilde{a}_{ik} + \tilde{b}_{jk}) z_k \ge \sum_i\sum_j\sum_k x_i^0 y_j^0 (\tilde{a}_{ik} + \tilde{b}_{jk}) z_k$$

$$= \sum_k \left[\sum_i\sum_j x_i^0 y_j^0 \tilde{a}_{ik} + \sum_i\sum_j x_i^0 y_j^0 \tilde{b}_{jk} \right] z_k$$

$$= \sum_k \left[\sum_i x_i^0 \tilde{a}_{ik} \underbrace{\left(\sum_j y_j^0\right)}_{=1} + \sum_j y_j^0 \tilde{b}_{jk} \underbrace{\left(\sum_i x_i^0\right)}_{=1} \right] z_k$$

$$= \sum_k \left[\sum_i x_i^0 \tilde{a}_{ik} + \sum_j y_j^0 \tilde{b}_{jk} \right] z_k$$

$$= \underbrace{\sum_k\sum_i x_i^0 \tilde{a}_{ik} z_k}_{H_A(z)} + \underbrace{\sum_k\sum_j y_j^0 \tilde{b}_{jk} z_k}_{H_B(z)}$$

$$= H_A(x^0, z) + H_B(y^0, z)$$

$$H_{A\cup B}(x^* \odot y^*, z) \ge H_A(x^0, z) + H_B(y^0, z)$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin her iki tarafının z'ye göre minimumu alınırsa eşitsizlik bozulmaz.

$$\underbrace{\min_z H_{A\cup B}(x^* \odot y^*, z)}_{\tilde{v}(\{A\}\cup\{B\})} \ge \min_z \left\{ H_A(x^0, z) + H_B(y^0, z) \right\} \ge \underbrace{\min_z H_A(x^0, z)}_{\tilde{v}(\{A\})} + \underbrace{\min_z H_B(y^0, z)}_{\tilde{v}(\{B\})}$$

$$\tilde{v}\left(\{A\}\cup\{B\}\right) \ge \tilde{v}\left(\{A\}\right) + \tilde{v}\left(\{B\}\right)$$

sonucu elde edilir. Bu da $\tilde{v}$ karakteristik fonksiyonlu ortaklı oyunun süpertoplanabilir olduğunun ispatıdır. Böylece ortaklıktan ilave fayda sağlandığı da gösterilmiştir.

7.2 Doğa'ya Karşı Bulanık (Fuzzy) Ödemeli Sıfır Toplamlı Oyun İle Elde Edilen Maksimum Kazancın Oyuncular Arasında Adil Paylaşımının İncelenmesi

Bu bölümde Doğa'ya karşı bulanık (fuzzy) ödemeli sıfır toplamlı oyun ile elde edilen maksimum faydanın oyuncuların katkıları oranında adil bir şekilde paylaşımı incelenecektir. Ortaklıktan elde edilen maksimum kazancın oyuncular arasında adil paylaşımı Shapley vektörü ile yapılacaktır.

Doğa'ya karşı oynayan oyuncular kümesinin $I = \{A, B, C\}$ olduğunu kabul edelim. A'nın stratejileri A_i $(i = 1, ..., m)$, B'nin stratejileri B_j $(j = 1, ..., n)$, C'nin stratejileri C_k $(k = 1, ..., l)$ olsun. Doğa'nın kullanacağı stratejiler D_r $(r = 1, ..., s)$ olmak üzere bu oyuncuların tek tek ya da birlikte Doğa'ya karşı elde edecekleri kazançları (bulanık ortaklı oyunun karakteristik fonksiyon değeri)

$\tilde{v}(\varnothing)$, $\tilde{v}(\{A\})$, $\tilde{v}(\{B\})$, $\tilde{v}(\{C\})$, $\tilde{v}(\{A,B\})$, $\tilde{v}(\{A,C\})$, $\tilde{v}(\{B,C\})$, $\tilde{v}(\{A,B,C\})$ dir.

Ortaklıktan elde edilen maksimum kazanç $\tilde{v}(\{A,B,C\}) = (v_l, v, v_u)$'nun oyuncular arasında adil paylaşımı Shapley vektörü ile yapılacaktır. Burada $\tilde{v}(\{A,B,C\}) = (v_l, v, v_u)$ bulanık değeri için; v_l sol yayılma, v orta değer ve v_u sağ yayılma değerlerine göre sırasıyla;

$$\phi_i(v_l) = \sum_{i \in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}\left[v_l(S) - v_l(S \setminus \{i\})\right],$$

$$\phi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}\left[v(S) - v(S \setminus \{i\})\right],$$

$$\phi_i(v_u) = \sum_{i \in S} \frac{(n-|S|)!(|S|-1)!}{n!}\left[v_u(S) - v_u(S \setminus \{i\})\right]$$

Shapley vektörleri hesaplanacaktır. Buna göre,

A oyuncusunun payı:

$$\phi_A(v_l) = \frac{1}{3}\left[v_l(\{A\}) - v_l(\varnothing)\right] + \frac{1}{6}\left[v_l(\{A,B\}) - v_l(\{B\})\right] +$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_l(\{A,C\}) - v_l(\{C\})\right] + \frac{1}{3}\left[v_l(\{A,B,C\}) - v_l(\{B,C\})\right]$$

$$\phi_A(v) = \frac{1}{3}\left[v(\{A\}) - v(\varnothing)\right] + \frac{1}{6}\left[v(\{A,B\}) - v(\{B\})\right] +$$
$$+\frac{1}{6}\left[v(\{A,C\}) - v(\{C\})\right] + \frac{1}{3}\left[v(\{A,B,C\}) - v(\{B,C\})\right]$$

$$\phi_A(v_u) = \frac{1}{3}\left[v_u(\{A\}) - v_u(\varnothing)\right] + \frac{1}{6}\left[v_u(\{A,B\}) - v_u(\{B\})\right] +$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_u(\{A,C\}) - v_u(\{C\})\right] + \frac{1}{3}\left[v_u(\{A,B,C\}) - v_u(\{B,C\})\right]$$

B oyuncusunun payı:

$$\phi_B(v_l)=\frac{1}{3}\left[v_l(\{B\})-v_l(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v_l(\{A,B\})-v_l(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_l(\{B,C\})-v_l(\{C\})\right]+\frac{1}{3}\left[v_l(\{A,B,C\})-v_l(\{A,C\})\right]$$

$$\phi_B(v)=\frac{1}{3}\left[v(\{B\})-v(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v(\{A,B\})-v(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v(\{B,C\})-v(\{C\})\right]+\frac{1}{3}\left[v(\{A,B,C\})-v(\{A,C\})\right]$$

$$\phi_B(v_u)=\frac{1}{3}\left[v_u(\{B\})-v_u(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v_u(\{A,B\})-v_u(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_u(\{B,C\})-v_u(\{C\})\right]+\frac{1}{3}\left[v_u(\{A,B,C\})-v_u(\{A,C\})\right]$$

C oyuncusunun payı:

$$\phi_C(v_l)=\frac{1}{3}\left[v_l(\{C\})-v_l(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v_l(\{A,C\})-v_l(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_l(\{B,C\})-v_l(\{B\})\right]+\frac{1}{3}\left[v_l(\{A,B,C\})-v_l(\{A,B\})\right]$$

$$\phi_C(v)=\frac{1}{3}\left[v(\{C\})-v(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v(\{A,C\})-v(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v(\{B,C\})-v(\{B\})\right]+\frac{1}{3}\left[v(\{A,B,C\})-v(\{A,B\})\right]$$

$$\phi_C(v_u)=\frac{1}{3}\left[v_u(\{C\})-v_u(\varnothing)\right]+\frac{1}{6}\left[v_u(\{A,C\})-v_u(\{A\})\right]+$$
$$+\frac{1}{6}\left[v_u(\{B,C\})-v_u(\{B\})\right]+\frac{1}{3}\left[v_u(\{A,B,C\})-v_u(\{A,B\})\right]$$

olarak bulunur.

7.2.1. Örnek:

A oyuncusunun stratejileri: A_1, A_2, A_3

B oyuncusunun stratejileri: B_1, B_2

C oyuncusunun stratejileri: C_1, C_2

Doğa (D) oyuncusunun stratejileri: D_1, D_2, D_3

olmak üzere Doğa'ya karşı oynayan A, B ve C oyuncularının ödeme matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Karar vericinin sıralama tercihinin (Orta değer, Sol yayılma, Sağ yayılma) şeklinde olduğunu kabul edelim.

Çizelge 7.1 A oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
A_1	$(5.9,6,6.1)$	$(6.8,7,7.2)$	$(2.9,3,3.1)$
A_2	$(8.7,9,9.3)$	$(8.8,9,9.2)$	$(6.9,7,7.1)$
A_3	$(4.6,5,5.4)$	$(5.9,6,6.1)$	$(6.9,7,7.1)$

Çizelge 7.2 B oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
B_1	$(6.9,7,7.1)$	$(7.9,8,8.1)$	$(4.8,5,5.2)$
B_2	$(7.9,8,8.1)$	$(8.9,9,9.1)$	$(5.8,6,6.2)$

Çizelge 7.3 C oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
C_1	$(3.9,4,4.1)$	$(6.8,7,7.2)$	$(4.8,5,5.2)$
C_2	$(4.8,5,5.2)$	$(7.8,8,8.2)$	$(8.9,9,9.1)$

A, B ve C oyuncularının Doğa'ya karşı bireysel oynamaları halinde elde edecekleri optimal oyun değerleri sırasıyla

$$\tilde{v}(\{A\}) = (6.9,7,7.1)$$
$$\tilde{v}(\{B\}) = (5.8,6,6.2)$$
$$\tilde{v}(\{C\}) = (4.8,5,5.2)$$

olarak bulunmuştur.

A, B ve C oyuncularının Doğa'ya karşı ortaklıklar (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun matrisleri aşağıdaki şekildedir.

Çizelge 7.4 A ve B oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
A_1B_1	$(12.8,13,13.2)$	$(14.7,15,15.3)$	$(7.7,8,8.3)$
A_1B_2	$(13.8,14,14.2)$	$(15.7,16,16.3)$	$(8.7,9,9.3)$
A_2B_1	$(15.6,16,16.4)$	$(16.7,17,17.3)$	$(11.7,12,12.3)$
A_2B_2	$(16.6,17,17.4)$	$(17.7,18,18.3)$	$(12.7,13,13.3)$
A_3B_1	$(11.5,12,12.5)$	$(13.8,14,14.2)$	$(11.7,12,12.3)$
A_3B_2	$(12.5,13,13.5)$	$(14.8,15,15.2)$	$(12.7,13,13.3)$

Çizelge 7.5 A ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
A_1C_1	$(9.8,10,10.2)$	$(13.6,14,14.4)$	$(7.7,8,8.3)$
A_1C_2	$(10.7,11,11.3)$	$(14.6,15,15.4)$	$(11.8,12,12.2)$
A_2C_1	$(12.6,13,13.4)$	$(15.6,16,16.4)$	$(11.7,12,12.3)$
A_2C_2	$(13.5,14,14.5)$	$(16.6,17,17.4)$	$(15.8,16,16.2)$
A_3C_1	$(8.5,9,9.5)$	$(12.7,13,13.3)$	$(11.7,12,12.3)$
A_3C_2	$(9.4,10,10.6)$	$(13.7,14,14.3)$	$(15.8,16,16.2)$

Çizelge 7.6 B ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
B_1C_1	$(10.8,11,11.2)$	$(14.7,15,15.3)$	$(9.6,10,10.4)$
B_1C_2	$(11.7,12,12.3)$	$(15.7,16,16.3)$	$(13.7,14,14.3)$
B_2C_1	$(11.8,12,12.2)$	$(15.7,16,16.3)$	$(10.6,11,11.4)$
B_2C_2	$(12.7,13,13.3)$	$(16.7,17,17.3)$	$(14.7,15,15.3)$

Çizelge 7.7 A, B ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3
$A_1B_1C_1$	$(16.7,17,17.3)$	$(21.5,22,22.5)$	$(12.5,13,13.5)$
$A_1B_1C_2$	$(17.6,18,18.4)$	$(22.5,23,23.5)$	$(16.6,17,17.4)$
$A_1B_2C_1$	$(17.7,18,18.3)$	$(22.5,23,23.5)$	$(13.5,14,14.5)$
$A_1B_2C_2$	$(18.6,19,19.4)$	$(23.5,24,24.5)$	$(17.6,18,18.4)$
$A_2B_1C_1$	$(19.5,20,20.5)$	$(23.5,24,24.5)$	$(16.5,17,17.5)$
$A_2B_1C_2$	$(20.4,21,21.6)$	$(24.5,25,25.5)$	$(20.6,21,21.4)$

$A_2B_2C_1$	$(20.5, 21, 21.5)$	$(24.5, 25, 25.5)$	$(17.5, 18, 18.5)$
$A_2B_2C_2$	$(21.4, 22, 22.6)$	$(25.5, 26, 26.5)$	$(21.6, 22, 22.4)$
$A_3B_1C_1$	$(15.3, 16, 16.7)$	$(20.6, 21, 21.4)$	$(16.5, 17, 17.5)$
$A_3B_1C_2$	$(16.3, 17, 17.7)$	$(21.6, 22, 22.4)$	$(20.6, 21, 21.4)$
$A_3B_2C_1$	$(16.4, 17, 17.6)$	$(21.6, 22, 22.4)$	$(17.5, 18, 18.5)$
$A_3B_2C_2$	$(17.3, 18, 18.7)$	$(22.6, 23, 23.4)$	$(21.6, 22, 22.4)$

Çizelge 7.4'den A ve B oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri $\tilde{v}(\{A, B\}) = (12.7, 13, 13.3)$ olarak bulunur.

Benzer şekilde Çizelge 7.5'den A ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri $\tilde{v}(\{A, C\}) = (13.5, 14, 14.5)$ ve Çizelge 7.6'dan B ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri $\tilde{v}(\{B, C\}) = (12.7, 13, 13.3)$ elde edilir.

Çizelge 7.7'den A, B ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri $\tilde{v}(\{A, B, C\}) = (21.4, 22, 22.4)$ ve maksimum değeri elde eden bu ortaklığın stratejilerinin karma olasılıklar vektörü,

$$\begin{pmatrix} x_1y_1z_1 = 0, x_1y_1z_2 = 0, x_1y_2z_1 = 0, x_1y_2z_2 = 0, x_2y_1z_1 = 0, x_2y_1z_2 = 0, \\ x_2y_2z_1 = 0, x_2y_2z_2 = 1, x_3y_1z_1 = 0, x_3y_1z_2 = 0, x_3y_2z_1 = 0, x_3y_2z_2 = 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$x^* = (0,1,0),\ y^* = (0,1),\ z^* = (0,1)$$

değerleri elde edilir.

Doğa'ya karşı bulanık (fuzzy) ödemeli oyunlar oynayan A, B ve C oyuncularının ortaklıkları ile kurgulanan bulanık (fuzzy) ortaklı oyunun karakteristik fonksiyonu:

$$\tilde{v}(\varnothing) = (0,0,0),\quad \tilde{v}(\{A\}) = (6.9, 7, 7.1),\quad \tilde{v}(\{B\}) = (5.8, 6, 6.2),\quad \tilde{v}(\{C\}) = (4.8, 5, 5.2),$$

$$\tilde{v}(\{A, B\}) = (12.7, 13, 13.3),\quad \tilde{v}(\{A, C\}) = (13.5, 14, 14.5),\quad \tilde{v}(\{B, C\}) = (12.7, 13, 13.3),$$

$$\tilde{v}(\{A, B, C\}) = (21.4, 22, 22.4)$$

olarak bulunmuş olur.

Örnekten de dikkat edilebileceği gibi her bir oyuncu kurduğu ortaklıklardan ek fayda sağlamaktadır. Örneğin A, B ve C oyuncularının ayrı ayrı elde ettikleri oyun değerleri toplamı

$$\tilde{v}(\{A\})+\tilde{v}(\{B\})+\tilde{v}(\{C\})=(17.5,18,18.5)$$

olarak bulunurken bu oyuncuların Doğa'ya karşı beraber oynamaları halinde elde ettikleri oyun değeri

$$\tilde{v}(\{A,B,C\})=(21.4,22,22.4)$$

olmaktadır. Böylece ortaklıktan

$$\tilde{v}(\{A,B,C\})-\left[\tilde{v}(\{A\})+\tilde{v}(\{B\})+\tilde{v}(\{C\})\right]=(2.9,4,4.9)$$

ek fayda elde edilmiştir.

A, B ve C oyuncularının payları Shapley vektörü yardımıyla,

$$\phi_A(\tilde{v})=(7.8,8,8.133),$$

$$\phi_B(\tilde{v})=(6.85,7,7.083),$$

$$\phi_C(\tilde{v})=(6.75,7,7.183)$$

şeklinde bulunmuştur.

Oysa A, B ve C oyuncularının tek başlarına oynamaları halinde elde edecekleri kazançlar sırasıyla;

$$\tilde{v}(\{A\})=(6.9,7,7.1),$$

$$\tilde{v}(\{B\})=(5.8,6,6.2),$$

$$\tilde{v}(\{C\})=(4.8,5,5.2)$$

olarak bulunmuştu. Buradan oyuncuların ortaklıktan elde edecekleri bireysel kazanç artırımları A için:

$$\phi_A(\tilde{v})-\tilde{v}(\{A\})=(7.8,8,8.133)-(6.9,7,7.1)=(0.7,1,1.233)$$

B için:

$$\phi_B(\tilde{v}) - \tilde{v}(\{B\}) = (6.85, 7, 7.083) - (5.8, 6, 6.2) = (0.65, 1, 1.283)$$

C için:

$$\phi_C(\tilde{v}) - \tilde{v}(\{C\}) = (6.75, 7, 7.183) - (4.8, 5, 5.2) = (1.55, 2, 2.383)$$

elde edilir.

Karar vericinin farklı sıralama kriterlerine göre elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgeler ile özetlenmiştir. Bu çizelgelerde M: Orta değer, R: Sağ yayılma, L: Sol yayılma değerlerini temsil etmektedir.

Çizelge 7.8 $\tilde{v}(\{A,B,C\})$ ortaklı oyununun karakteristik fonksiyonu

	(M,R,L)	(M,L,R)	(R,M,L)
$\tilde{v}(\{\varnothing\})$	0	0	0
$\tilde{v}(\{A\})$	$(6.9,7,7.1)$	$(6.9,7,7.1)$	$(6.9,7,7.1)$
$\tilde{v}(\{B\})$	$(5.8,6,6.2)$	$(5.8,6,6.2)$	$(5.8,6,6.2)$
$\tilde{v}(\{C\})$	$(4.8,5,5.2)$	$(4.8,5,5.2)$	$(4.8,5,5.2)$
$\tilde{v}(\{A,B\})$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$
$\tilde{v}(\{A,C\})$	$(13.5,14,14.5)$	$(13.5,14,14.5)$	$(13.5,14,14.5)$
$\tilde{v}(\{B,C\})$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$
$\tilde{v}(\{A,B,C\})$	$(21.4,22,22.4)$	$(21.4,22,22.4)$	$(21.4,22,22.4)$
	(R,L,M)	(L,M,R)	(L,R,M)
$\tilde{v}(\{\varnothing\})$	0	0	0
$\tilde{v}(\{A\})$	$(6.9,7,7.1)$	$(6.9,7,7.1)$	$(6.9,7,7.1)$
$\tilde{v}(\{B\})$	$(5.8,6,6.2)$	$(5.8,6,6.2)$	$(5.8,6,6.2)$
$\tilde{v}(\{C\})$	$(4.8,5,5.2)$	$(4.8,5,5.2)$	$(4.8,5,5.2)$
$\tilde{v}(\{A,B\})$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$
$\tilde{v}(\{A,C\})$	$(13.5,14,14.5)$	$(13.5,14,14.5)$	$(13.5,14,14.5)$
$\tilde{v}(\{B,C\})$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$	$(12.7,13,13.3)$
$\tilde{v}(\{A,B,C\})$	$(21.4,22,22.4)$	$(21.4,22,22.4)$	$(21.4,22,22.4)$

Çizelge 7.9 $\tilde{v}(\{A,B,C\})$ ortaklı oyununun denge çözümleri

	x^*	y^*	z^*
(M,R,L)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
(M,L,R)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
(R,M,L)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
(R,L,M)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
(L,M,R)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$
(L,R,M)	$(0,1,0)$	$(0,1)$	$(0,1)$

Çizelge 7.10 Ortaklıktan elde edilen ek fayda (F)

	F
(M,R,L)	$(2.9,4,4.9)$
(M,L,R)	$(2.9,4,4.9)$
(R,M,L)	$(2.9,4,4.9)$
(R,L,M)	$(2.9,4,4.9)$
(L,M,R)	$(2.9,4,4.9)$
(L,R,M)	$(2.9,4,4.9)$

Çizelge 7.11 Shapley vektörü yardımıyla oyuncuların payları

	$\phi_A(\tilde{v})$	$\phi_B(\tilde{v})$	$\phi_C(\tilde{v})$
(M,R,L)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$
(M,L,R)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$
(R,M,L)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$
(R,L,M)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$
(L,M,R)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$
(L,R,M)	$(7.8,8,8.133)$	$(6.85,7,7.083)$	$(6.75,7,7.183)$

Çizelge 7.12 Oyuncuların bireysel kazanç artırımları

	A	B	C
(M,R,L)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$
(M,L,R)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$
(R,M,L)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$
(R,L,M)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$

(L,M,R)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$
(L,R,M)	$(0.7,1,1.233)$	$(0.65,1,1.283)$	$(1.55,2,2.383)$

7.2.2. Örnek:

A oyuncusunun stratejileri: A_1, A_2, A_3

B oyuncusunun stratejileri: B_1, B_2

C oyuncusunun stratejileri: C_1, C_2

Doğa (D) oyuncusunun stratejileri: D_1, D_2, D_3, D_4

olmak üzere Doğa'ya karşı oynayan A, B ve C oyuncularının ödeme matrisleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Karar vericinin sıralama tercihinin (Orta değer, Sağ yayılma, Sol yayılma) şeklinde olduğunu kabul edelim.

Çizelge 7.13 A oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
A_1	$(5.9,6,6.1)$	$(6.8,7,7.1)$	$(2.8,3,3.1)$	$(8.8,9,9.1)$
A_2	$(8.7,9,9.2)$	$(8.8,9,9.3)$	$(6.9,7,7.1)$	$(6.9,7,7.2)$
A_3	$(1.7,2,2.2)$	$(5.8,6,6.2)$	$(6.8,7,7.1)$	$(6.7,7,7.1)$

Çizelge 7.14 B oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
B_1	$(6.8,7,7.1)$	$(7.9,8,8.2)$	$(7.9,8,8.2)$	$(3.9,4,4.2)$
B_2	$(5.7,6,6.2)$	$(7.8,8,8.1)$	$(5.8,6,6.1)$	$(2.8,3,3.1)$

Çizelge 7.15 C oyuncusunun ödemelerine göre kurulan oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
C_1	$(1.9,2,2.2)$	$(7.9,8,8.2)$	$(3.8,4,4.1)$	$(0.9,1,1.2)$
C_2	$(2.8,3,3.1)$	$(0.7,1,1.2)$	$(8.8,9,9.1)$	$(4.8,5,5.2)$

A, B ve C oyuncularının Doğa'ya karşı bireysel oynamaları halinde elde edecekleri optimal oyun değerleri sırasıyla

$\tilde{v}(\{A\}) = (6.9, 7, 7.1)$

$\tilde{v}(\{B\}) = (3.9, 4, 4.2)$

$\tilde{v}(\{C\}) = (2.5, 2.75, 2.875)$

olarak bulunmuştur.

A, B ve C oyuncularının Doğa'ya karşı ortaklıklar (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun matrisleri aşağıdaki şekildedir.

Çizelge 7.16 A ve B oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
A_1B_1	$(12.7,13,13.2)$	$(14.7,15,15.3)$	$(10.7,11,11.3)$	$(12.7,13,13.3)$
A_1B_2	$(11.6,12,12.3)$	$(14.6,15,15.2)$	$(8.6,9,9.2)$	$(11.6,12,12.2)$
A_2B_1	$(15.5,16,16.3)$	$(16.7,17,17.5)$	$(14.8,15,15.3)$	$(10.8,11,11.4)$
A_2B_2	$(14.4,15,15.4)$	$(16.6,17,17.4)$	$(12.7,13,13.2)$	$(9.7,10,10.3)$
A_3B_1	$(8.5,9,9.3)$	$(13.7,14,14.4)$	$(14.7,15,15.3)$	$(10.6,11,11.3)$
A_3B_2	$(7.4,8,8.4)$	$(13.6,14,14.3)$	$(12.6,13,13.2)$	$(9.5,10,10.2)$

Çizelge 7.17 A ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
A_1C_1	$(7.8,8,8.3)$	$(14.7,15,15.3)$	$(6.6,7,7.2)$	$(9.7,10,10.3)$
A_1C_2	$(8.7,9,9.2)$	$(7.5,8,8.3)$	$(11.6,12,12.2)$	$(13.6,14,14.3)$
A_2C_1	$(10.6,11,11.4)$	$(16.7,17,17.5)$	$(10.7,11,11.2)$	$(7.8,8,8.4)$
A_2C_2	$(11.5,12,12.3)$	$(9.5,10,10.5)$	$(15.7,16,16.2)$	$(11.7,12,12.4)$
A_3C_1	$(3.6,4,4.4)$	$(13.7,14,14.4)$	$(10.6,11,11.2)$	$(7.6,8,8.3)$
A_3C_2	$(4.5,5,5.3)$	$(6.5,7,7.4)$	$(15.6,16,16.2)$	$(11.5,12,12.3)$

Çizelge 7.18 B ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
B_1C_1	$(8.7,9,9.3)$	$(15.8,16,16.4)$	$(11.7,12,12.3)$	$(4.8,5,5.4)$
B_1C_2	$(9.6,10,10.2)$	$(8.6,9,9.4)$	$(16.7,17,17.3)$	$(8.7,9,9.4)$
B_2C_1	$(7.6,8,8.4)$	$(15.7,16,16.3)$	$(9.6,10,10.2)$	$(3.7,4,4.3)$
B_2C_2	$(8.5,9,9.3)$	$(8.5,9,9.3)$	$(14.6,15,15.2)$	$(7.6,8,8.3)$

Çizelge 7.19 A, B ve C oyuncularının ortaklık kurması durumunda elde edilen oyun matrisi

	D_1	D_2	D_3	D_4
$A_1B_1C_1$	$(14.6,15,15.4)$	$(22.6,23,23.5)$	$(14.5,15,15.4)$	$(13.6,14,14.5)$
$A_1B_1C_2$	$(15.6,16,16.3)$	$(15.4,16,16.5)$	$(19.5,20,20.4)$	$(17.5,18,18.5)$
$A_1B_2C_1$	$(13.5,14,14.5)$	$(22.5,23,23.4)$	$(12.4,13,13.3)$	$(12.5,13,13.4)$
$A_1B_2C_2$	$(14.4,15,15.4)$	$(15.3,16,16.4)$	$(17.4,18,18.3)$	$(16.4,17,17.4)$
$A_2B_1C_1$	$(17.4,18,18.5)$	$(24.6,25,25.7)$	$(18.6,19,19.4)$	$(11.7,12,12.6)$
$A_2B_1C_2$	$(18.3,19,19.4)$	$(17.4,18,18.7)$	$(23.6,24,24.4)$	$(15.6,16,16.6)$
$A_2B_2C_1$	$(16.3,17,17.6)$	$(24.5,25,25.6)$	$(16.5,17,17.3)$	$(10.6,11,11.5)$
$A_2B_2C_2$	$(17.2,18,18.5)$	$(17.3,18,18.6)$	$(21.5,22,22.3)$	$(14.5,15,15.5)$
$A_3B_1C_1$	$(10.4,11,11.5)$	$(21.6,22,22.6)$	$(18.5,19,19.4)$	$(11.5,12,12.5)$
$A_3B_1C_2$	$(11.3,12,12.4)$	$(14.4,15,15.6)$	$(23.5,24,24.4)$	$(15.4,16,16.5)$
$A_3B_2C_1$	$(9.3,10,10.6)$	$(21.5,22,22.5)$	$(16.4,17,17.3)$	$(10.4,11,11.4)$
$A_3B_2C_2$	$(10.2,11,11.5)$	$(14.3,15,15.5)$	$(21.4,22,22.3)$	$(14.3,15,15.4)$

Çizelge 7.16'dan A ve B oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri,

$$\tilde{v}\left(\{A,B\}\right)=\left(12.06666,12.33333,12.63334\right)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde Çizelge 7.17'den A ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri,

$$\tilde{v}\left(\{A,C\}\right)=\left(10.89534,11.34884,11.65818\right)$$

Çizelge 7.18'den B ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri,

$$\tilde{v}\left(\{B,C\}\right)=\left(8.6,9,9.4\right)$$

Çizelge 7.19'dan A, B ve C oyuncularının ortaklık (koalisyon) kurmaları halinde elde edilen oyun değeri,

$$\tilde{v}\left(\{A,B,C\}\right)=\left(16.47906,17.06977,17.41167\right)$$

ve maksimum değeri elde eden bu ortaklığın stratejilerinin karma olasılıklar vektörü,

$$\begin{pmatrix} x_1y_1z_1 = 0, x_1y_1z_2 = 0.62789, x_1y_2z_1 = 0, x_1y_2z_2 = 0, \\ x_2y_1z_1 = 0.04651, x_2y_1z_2 = 0.3256, x_2y_2z_1 = 0, x_2y_2z_2 = 0, \\ x_3y_1z_1 = 0, x_3y_1z_2 = 0, x_3y_2z_1 = 0, x_3y_2z_2 = 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$x^* = (0.62789, 0.37211, 0),\ y^* = (1, 0),\ z^* = (0.04651, 0.95349)$$

değerleri elde edilir.

Doğa'ya karşı bulanık (fuzzy) ödemeli oyunlar oynayan A, B ve C oyuncularının ortaklıkları ile kurgulanan bulanık (fuzzy) ortaklı oyunun karakteristik fonksiyonu:

$$\tilde{v}(\emptyset) = 0,\quad \tilde{v}(\{A\}) = (6.9, 7, 7.1),\quad \tilde{v}(\{B\}) = (3.9, 4, 4.2),\quad \tilde{v}(\{C\}) = (2.5, 2.75, 2.875),$$
$$\tilde{v}(\{A,B\}) = (12.06666, 12.33333, 12.63334),\quad \tilde{v}(\{A,C\}) = (10.89534, 11.34884, 11.65818),$$
$$\tilde{v}(\{B,C\}) = (8.6, 9, 9.4),\ \tilde{v}(\{A,B,C\}) = (16.47906, 17.06977, 17.41167)$$

olarak bulunmuş olur.

Örnekten de dikkat edilebileceği gibi her bir oyuncu kurduğu ortaklıklardan ek fayda sağlamaktadır. Örneğin A, B ve C oyuncularının ayrı ayrı elde ettikleri oyun değerleri toplamı

$$\tilde{v}(\{A\}) + \tilde{v}(\{B\}) + \tilde{v}(\{C\}) = (13.3, 13.75, 14.175)$$

olarak bulunurken bu oyuncuların Doğa'ya karşı beraber oynamaları halinde elde ettikleri oyun değeri

$$\tilde{v}(\{A,B,C\}) = (16.47906, 17.06977, 17.41167)$$

olmaktadır. Böylece ortaklıktan

$$\tilde{v}(\{A,B,C\}) - \left[\tilde{v}(\{A\}) + \tilde{v}(\{B\}) + \tilde{v}(\{C\})\right] = (2.30406, 3.31977, 4.11167)$$

ek fayda elde edilmiştir.

A, B ve C oyuncularının payları Shapley vektörü yardımıyla,

$$\phi_A(\tilde{v}) = (7.686686667, 7.845285, 7.906643333)$$

$\phi_B(\tilde{v}) = (5.039016667, 5.170865, 5.327553333)$

$\phi_C(\tilde{v}) = (3.753356667, 4.05362, 4.177473333)$

şeklinde bulunmuştur.

Oysa A, B ve C oyuncularının tek başlarına oynamaları halinde elde edecekleri kazançlar sırasıyla;

$\tilde{v}(\{A\}) = (6.9, 7, 7.1)$,

$\tilde{v}(\{B\}) = (3.9, 4, 4.2)$,

$\tilde{v}(\{C\}) = (2.5, 2.75, 2.875)$

olarak bulunmuştu. Buradan oyuncuların ortaklıktan elde edecekleri bireysel kazanç artırımları A için:

$\phi_A(\tilde{v}) - \tilde{v}(\{A\}) = (0.586686667, 0.845285, 1.006643333)$

B için:

$\phi_B(\tilde{v}) - \tilde{v}(\{B\}) = (0.839016667, 1.170865, 1.427553333)$

C için:

$\phi_C(\tilde{v}) - \tilde{v}(\{C\}) = (0.878356667, 1.30362, 1.677473333)$

elde edilir.

Karar vericinin farklı sıralama kriterlerine göre elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgeler ile özetlenmiştir.

Çizelge 7.20 $\tilde{v}(\{A, B, C\})$ ortaklı oyununun karakteristik fonksiyonu

	(M,R,L)	(M,L,R)
$\tilde{v}(\{\varnothing\})$	0	0
$\tilde{v}(\{A\})$	$(6.9, 7, 7.1)$	$(6.9, 7, 7.1)$
$\tilde{v}(\{B\})$	$(3.9, 4, 4.2)$	$(3.9, 4, 4.2)$
$\tilde{v}(\{C\})$	$(2.5, 2.75, 2.875)$	$(2.5, 2.75, 2.875)$

$\tilde{v}(\{A,B\})$	$(12.06666, 12.33333, 12.63334)$	$(12.06666, 12.33333, 12.63334)$
$\tilde{v}(\{A,C\})$	$(10.89534, 11.34884, 11.65818)$	$(10.89536, 11.34884, 11.65814)$
$\tilde{v}(\{B,C\})$	$(8.6, 9, 9.4)$	$(8.6, 9, 9.4)$
$\tilde{v}(\{A,B,C\})$	$(16.47906, 17.06977, 17.41167)$	$(16.47909, 17.06977, 17.41163)$
	(R,M,L)	(R,L,M)
$\tilde{v}(\{\varnothing\})$	0	0
$\tilde{v}(\{A\})$	$(6.9, 7, 7.1)$	$(6.9, 7, 7.1)$
$\tilde{v}(\{B\})$	$(3.9, 4, 4.2)$	$(3.9, 4, 4.2)$
$\tilde{v}(\{C\})$	$(2.43165, 2.68354, 2.88354)$	$(2.43165, 2.68354, 2.88354)$
$\tilde{v}(\{A,B\})$	$(12.05593, 12.32204, 12.65593)$	$(12.05593, 12.32204, 12.65593)$
$\tilde{v}(\{A,C\})$	$(10.82108, 11.27809, 11.75543)$	$(10.82108, 11.27809, 11.75543)$
$\tilde{v}(\{B,C\})$	$(8.6, 9, 9.4)$	$(8.6, 9, 9.4)$
$\tilde{v}(\{A,B,C\})$	$(16.41812, 17.01349, 17.59860)$	$(16.41812, 17.01349, 17.59860)$
	(L,M,R)	(L,R,M)
$\tilde{v}(\{\varnothing\})$	0	0
$\tilde{v}(\{A\})$	$(6.9, 7, 7.1)$	$(6.9, 7, 7.1)$
$\tilde{v}(\{B\})$	$(3.9, 4, 4.2)$	$(3.9, 4, 4.2)$
$\tilde{v}(\{C\})$	$(2.56667, 2.74074, 2.86667)$	$(2.56667, 2.74074, 2.86667)$
$\tilde{v}(\{A,B\})$	$(12.06667, 12.33333, 12.63334)$	$(12.06667, 12.33333, 12.63334)$
$\tilde{v}(\{A,C\})$	$(10.98436, 11.27157, 11.66074)$	$(10.98436, 11.27157, 11.66074)$
$\tilde{v}(\{B,C\})$	$(8.66486, 8.96397, 9.36397)$	$(8.66486, 8.96397, 9.36397)$
$\tilde{v}(\{A,B,C\})$	$(16.56311, 17.01983, 17.41343)$	$(16.56311, 17.01981, 17.41348)$

Çizelge 7.21 $\tilde{v}(\{A,B,C\})$ ortaklı oyununun denge çözümleri

	x^*	y^*	z^*
(M,R,L)	$(0.62789, 0.37211, 0)$	$(1,0)$	$(0.04651, 0.95349)$
(M,L,R)	$(0.62791, 0.37209, 0)$	$(1,0)$	$(0.04651, 0.95349)$
(R,M,L)	$(0.57437, 0.42563, 0)$	$(1,0)$	$(0.02317, 0.97683)$
(R,L,M)	$(0.57437, 0.42563, 0)$	$(1,0)$	$(0.02317, 0.97683)$
(L,M,R)	$(0.62424, 0.37576, 0)$	$(1,0)$	$(0.05716, 0.94284)$
(L,R,M)	$(0.62422, 0.37578, 0)$	$(1,0)$	$(0.05716, 0.94284)$

Çizelge 7.22 Ortaklıktan elde edilen ek fayda (F)

	F
(M,R,L)	$(2.30406, 3.31977, 4.11167)$
(M,L,R)	$(2.30409, 3.31977, 4.11163)$
(R,M,L)	$(2.23458, 3.32995, 4.36695)$
(R,L,M)	$(2.23458, 3.32995, 4.36695)$
(L,M,R)	$(2.39644, 3.27909, 4.04676)$
(L,R,M)	$(2.39644, 3.27907, 4.04681)$

Çizelge 7.23 Shapley vektörü yardımıyla oyuncuların payları

	$\phi_A(v)$	$\phi_B(v)$	$\phi_C(v)$
(M,R,L)	$(7.68669, 7.845285, 7.906643)$	$(5.03902, 5.170865, 5.327553)$	$(3.75335, 4.05362, 4.177474)$
(M,L,R)	$(7.6867, 7.845285, 7.906623)$	$(5.03902, 5.170865, 5.327553)$	$(3.75337, 4.05362, 4.177454)$
(R,M,L)	$(7.6636, 7.823928, 7.990315)$	$(5.05306, 5.184883, 5.3626)$	$(3.70146, 4.004679, 4.245685)$
(R,L,M)	$(7.6636, 7.823928, 7.990315)$	$(5.05306, 5.184883, 5.3626)$	$(3.70146, 4.004679, 4.245685)$
(L,M,R)	$(7.69681, 7.829313, 7.921055)$	$(5.03706, 5.175513, 5.32267)$	$(3.82924, 4.015004, 4.169705)$
(L,R,M)	$(7.69681, 7.829307, 7.921072)$	$(5.03706, 5.175507, 5.322687)$	$(3.82924, 4.014996, 4.169721)$

Çizelge 7.24 Oyuncuların bireysel kazanç artırımları

	A	B	C
(M,R,L)	$(0.586690, 0.845285, 1.006643)$	$(0.839017, 1.170865, 1.427553)$	$(0.878357, 1.30362, 1.677473)$
(M,L,R)	$(0.5867, 0.845285, 1.006623)$	$(0.83902, 1.170865, 1.427553)$	$(0.87837, 1.30362, 1.677453)$
(R,M,L)	$(0.5636, 0.823928, 1.090315)$	$(0.85306, 1.184883, 1.4626)$	$(0.81792, 1.321139, 1.814035)$
(R,L,M)	$(0.5636, 0.823928, 1.090315)$	$(0.85306, 1.184883, 1.4626)$	$(0.81792, 1.321139, 1.814035)$
(L,M,R)	$(0.59681, 0.829313, 1.021055)$	$(0.83706, 1.175513, 1.42267)$	$(0.96257, 1.274263, 1.603035)$
(L,R,M)	$(0.59681, 0.829307, 1.021072)$	$(0.83706, 1.175507, 1.422687)$	$(0.96257, 1.274257, 1.603052)$

8. SONUÇ

İnsanlığın varoluşundan bu yana bireyler çeşitli durumlar için karar verme problemi ile karşı karşıya kalmışlardır. Bu karar verme problemi kimi zaman gündelik karşılaşılabilecek bir durumu ele alırken kimi zamanda çok büyük sonuçlar doğurabilecek karmaşık bir durumu ele alır. Araştırmacılar yüzyıllardır karar verme problemleri için çok sayıda model geliştirmişlerdir. Bir modelin tutarlı sonuçlar verebilmesi için araştırmacının ele aldığı sistemi iyi analiz etmesi ve sistem girdilerini modele yansıtması gerekmektedir.

Oyun teorisi karar vericilerin etkileşim halinde olduğu durumları ele almada kullanışlı bir araçtır. Üzerine düşünülen problemde karar vericiler arasında çatışma veya işbirliği bulunabilir. Oyun teorisi araştırmacılar tarafından ekonomi, politika, biyoloji ve mühendislik gibi birçok bilim dalına uygulanmış ve halen uygulanmaya devam etmektedir.

Bu doktora tezi kapsamında:

- Bulanık hedefli ve bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlar için bir alternatif çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Sunulan çözüm yöntemi literatürdeki Sakawa'nın yöntemi ile karşılaştırılmış ve daha hızlı sonuca varıldığı bir örnek üzerinde gösterilmiştir.

- Doğa'ya karşı bulanık ödemeli sıfır toplamlı oyun oynayan oyuncuların ortaklıklar (koalisyonlar) kurarak ortak kazançlarını ve dolayısıyla da bireysel kazançlarını arttırdıkları ispatlanmıştır.

- Doğa'ya karşı bulanık ödemeli oynayan koalisyonların optimal oyun değerleri bulanık ödemeli bir ortaklı oyunun karakteristik fonksiyonunu oluşturmaktadır. Üstelik bu karakteristik fonksiyonun süpertoplanabilir özellikte olduğu ispatlanmıştır.

- Bulanık ödemeli iki kişili sıfır toplamlı oyunlardan bulanık ödemeli ortaklı oyunlara bir geçiş sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

Ahlatçıoğlu, M. ve Tiryaki, F., (1998), Oyunlar Teorisi, Üniversite Yayın No: YTÜ.FE.DK-98.0342./Fakülte Yayın No: FE.MAT-98.004 Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Aksoy, Y., Özkan, E.M. ve Karanfil, S., (2003), Bulanık Mantığa Giriş, Yıldız Teknik Üniversitesi Vakfı Yayın No: YTÜVAK..FE.DK-2003.004 Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Aubin, J.P., (1979), Mathematical Methods of Game and Economic Theory, North-Holland.

Bajalinov, E.B., (2003), Linear-Fractional Programming Theory, Methods, Applications And Software, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London.

Bector, C.R. ve Chandra, S., (2005), Fuzzy Mathematical Programming And Fuzzy Matrix Games, Springer Berlin Heidelberg, New York.

Bellman, R.E. ve Zadeh, L.A., (1970), "Decision Making in a Fuzzy Enviroment", Mangement Science, 17: 141-164

Billot, A., (1992), Economic Theory of Fuzzy Equilibria, Springer-Verlag.

Blackwell, D., (1956), "An Analog of The Minimax Theorem for Vector Payoffs", Pacific Journal of Mathematics, 98: 1-8

Buckley, J.J., (1984), "Multiple Goal Non-Cooperative Conflicts Under Uncertainty: A Fuzzy Set Approach", Fuzzy Sets and Systems, 13: 107-124

Buckley, J.J. ve Leonard J. Jowers., (2008), Monte Carlo Methods in Fuzzy Optimization, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Butnariu, D., (1978), "Fuzzy Games; A Description of The Concept", Fuzzy Sets and Systems, 1: 181-192

Butnariu, D., (1980a), "Stability and Shapley Value for An n-Persons Fuzzy Game", Fuzzy Sets and Systems, 4: 63-72

Butnariu, D., (1980b), "Values and Cores of Fuzzy Games with Infinitely Many Players", International Journal of Game Theory, 16: 43-68

Campos, L., (1989), "Fuzzy Linear Programming Models to Solve Fuzzy Matrix Game", Fuzzy Sets and Systems, 32: 275-289

Castillo, O. ve Melin P., (2008), Type-2 Fuzzy Logic: Theory and Applications, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Charnes, A. ve Cooper, W., (1962), "Programming with Linear Fractional Function", Naval Research Logistics Quarterly, 9: 181-186

Chen, S.J. ve Hwang, L., (1992), Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, Germany, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Clark, T.D., Larson, J.M., Mordeson, J.N., Potter, J.D. ve Wierman, M.J., (2008), Applying Fuzzy Mathematics to Formal Models in Comparative Politics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Contini, M., Olivitti, I. ve Milano, C., (1966), A Decision Model Under Certainty with Multiple Payoffs, in A.Mensch (ed.) Theory of Games; Tecniques and Applications, American Elsevier, New York

Cook, W.D., (1976), “Zero-Sum Games with Multiple Goals”, Naval Research Logistics Quarterly, 23: 615-622

Çevikel, A.C. ve Ahlatcıoğlu, M., (2010), “A Linear Interactive Solution Concept for Fuzzy Multiobjective Games”, European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3: 107-117.

Inuiguchi, M., Ramik, J., Tanino, T., ve Vlach, M., (2003), “Satisficing Solutions and Duality in Interval and Fuzzy Linear Programming”, Fuzzy Sets and Systems”, 135: 151-177

Kaufmann, A. Ve Gupta, M.M., (1998), Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science Publishers B.V.

Li, D.F., (1999a), “Fuzzy Constrained Matrix Games with Fuzzy Payoffs”, The Journal of Fuzzy Mathematics, 7: 873-880

Li, D.F., (1999b), “A Fuzzy Multi-Objective Approach to Solve Fuzzy Matrix Games”, The Journal of Fuzzy Mathematics, 7: 907-912

Li, D.F., ve Yang, J.B., (2004), Two Level Linear Programming Approach to Solve Fuzzy Matrix Games with Fuzzy Payoffs, Manchester School of Management, University of Manchester Institute of Science and Technology, UK, Unpunlished Preprint.

Mangasarian, O.L., (1994), Nonlinear Programming, SIAM, Philadelphia, PA

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (1995), “Equilibrium Solutions for Multiobjective Bimatrix Games Incorporating Fuzzy Goals”, Journal of Optimization Theory and Applications, 86: 433-458.

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (1996), “The Least Core and The Nucleolus in n-Person Cooperative Fuzzy Games”, in R. Trappl (ed.) Cybernetics and Systems Research 96, Austrian Society for Cybernetic Studies, 1: 310-315.

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (2000a), “Equilibrium Solutions in Multiobjective Bimatrix Games with Fuzzy Payoffs and Fuzzy Goals”, Fuzzy Sets and Systems, 111: 99-116.

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (2000b), “Fuzzy Cooperative Games Arising from Linear Production Programming Problems with Fuzzy Parameters”, Fuzzy Sets and Systems, 114: 11-21.

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (2000c), “Solutions Based on Fuzzy Goals in Fuzzy Linear Programming Games”, Fuzzy Sets and Systems, 115: 105-119.

Nishizaki, I. ve Sakawa, M., (2001), Fuzzy and Multiobjective Games for Conflict Resolution, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Osborne, M.J., (2004), An Introduction to Game Theory, Oxford University Pres, New York.

Owen, G., (1995), Game Theory, 3.bs., Academic Pres, USA.

Özkök, B., (2009), “Doğa’ya Karşı Oynayan Oyuncuların Ortaklıklarla Ödemelerini Arttırmaları ve Portföy Seçimi Problemine Bir Uygulama”, Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı Sayısal Yöntemler Bilim Dalı, İstanbul.

Sakawa, M., (1983), “Interactive Computer Program for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives” , International Journal of Man-Machine Studies, 18: 489-503.

Sakawa, M. ve Nishizaki, I., (1992), “Two-Person Zero-Sum Games with Multiple Goals, Proceedings of The Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making” Taipei 37-46.

Sakawa, M., (1993), Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Pres, New York.

Sakawa, M. ve Nishizaki, I., (1994), “Max-Min Solutions for Fuzzy Multiobjective Matrix Games”, Fuzzy Sets and Systems, 67: 53-69.

Sakawa, M. ve Nishizaki, I., (1995), “A Solution Concept in Multiobjective Matrix Games with Fuzzy Payoffs and Fuzzy Goals, in Z. Bien and K.C. Min (eds.) Fuzzy Logic and İts Applications to Engineering, Information Science, and Intelligent Systems , Kluwer Academic Publishers. 417-426

Sakawa, M. ve Nishizaki, I., (1997a), “N-Person Cooperative Games with Multiple Scenarios, in J. Climaco (ed.) Multicriteria Analysis, Springer-Verlag”, 347-355.

Sakawa, M. ve Nishizaki, I., (1997b), “The Nucleolus in Multiobjective N-Person Cooperative Games”, in G. Fandel and T. Gal (eds.) Multiple Criteria Decision Making, Springer-Verlag, 64-73.

Shapley, L.S., (1953), A Value for N-Person Games, in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.), Contribution to The Theory of Games, 2, Annals of Mathematics, Studies 28, Princeton University Pres.

Shimizu, K. ve Aiyoshi, E., (1980), “Necessary Conditions for Min-Max Problems and Algorithm by A Relaxation Procedure”, IEEE Transaction on Automatic Control, 25: 62-66

Straffin, D.P., (1993), Game Theory and Strategy, Third Printing., The Mathematical Association of America:36, Washington, DC.

Yager, R.R., (1981), “A Procedure for Ordering Fuzzy Numbers of The Unit İnterval”, Information Sciences, 24: 143-161.

Zadeh, L.A., (1965), “Fuzzy sets”, Information and Control, 8: 338-353.

Zimmermann, H.J., (1993), Fuzzy Set Theory and Its Applications, Second, Revised Edition, Sixth Printing, Boston /London /Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	07.10.1979	
Doğum yeri	Antakya	
Lise	1993-1996	Alibeyköy Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi
Lisans	1998-2002	Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2002-2005	Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü.
Doktora	2006-2011	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü.

Çalıştığı kurumlar

	2002-2006	Dumlupınar Üniversitesi Araştırma Görevlisi
	2006-Devam ediyor	YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Araştırma Görevlisi