

**T. C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

POLİNOMLARLA İNTERPOLASYON VE SAYISAL YAKLAŞIMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATMA GÜL TAŞKIN

**HAZİRAN 2011
MUĞLA**

**T. C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

POLİNOMLARLA İNTERPOLASYON VE SAYISAL YAKLAŞIMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma Gül TAŞKIN

MUĞLA 2011

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK danışmanlığında Fatma Gül TAŞKIN tarafından hazırlanan Polinomlarla İnterpolasyon ve Sayısal Yaklaşımlar başlıklı tez 22/06/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

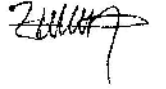
Başkan : Prof. Dr. Nesrin ÖZSOY

İmza :



Danışman : Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

İmza :



Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel Paşalı ATMACA

İmza :



ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK'a ve her zaman her konuda yanımda olduklarını bildiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Fatma Gül TAŞKIN

MUĞLA 2011

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
ABSTRACT	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ	VIII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	2
2.1 Temel Tanım ve Teoremler.....	2
2.1.1 Polinom Tanımı.....	2
2.1.2 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü.....	3
2.1.3 Düzgün Süreklilik	3
2.1.4 Türevlenebilir Fonksiyonlar.....	4
2.1.5 Rolle Teoremi.....	4
2.1.6. Weirstrass Yaklaşım Teoremi	5
2.2 Taylor Polinomu.....	7
2.3 Lagrange Polinomu	11
2.4 Spline Fonksiyonu.....	11
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1 Lagrange İnterpolasyon Yöntemi.....	13
3.2 En Küçük Kareler Yöntemi ile İnterpolasyon.....	22
3.2.1 $(n + 1)$ Noktadan Geçen E.K.K.	
Doğrusunun Bulunması	23
3.2.2 $(n + 1)$ Noktadan Geçen E.K.K.	
Parabolünün Bulunması	25
3.2 Bölünmüş Farklar	28

	<u>Sayfa No</u>
3.2.1 İleri Farklar	35
3.2.2 Geri Farklar	39
3.4 Spline Polinomları ile İnterpolasyon Yöntemi	42
3.4.1 Lineer Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon Yöntemi	42
3.4.2 Kuadratik Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon Yöntemi	44
3.4.3 Kübik Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon Yöntemi	48
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	59
4.1 Örnek Problemler ve Tablolar ile Karşılaştırma	59
5. SONUÇLAR	68
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	70

POLİNOMLARLA İNTERPOLASYON VE SAYISAL YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma Gül TAŞKIN

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2011

ÖZET

Pek çok problemin analitik çözümü kolay bulunamadığı için, yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak temel tanım ve teoremler ile Weirstrass Yaklaşım teoremi, Taylor polinomu, Lagrange polinomu ve Spline polinomlarının tanımları verilmiştir. Daha sonra Lagrange interpolasyon yöntemi, En Küçük Kareler yöntemi ile interpolasyon polinomu, Bölünmüş farklar yöntemi ve Spline polinomları ile interpolasyon yöntemi incelenmiştir. Son kısımda ise örnek problemler çözülerek yaklaşık çözümler ile gerçek çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler : Taylor Polinomu, Lagrange Polinomu, Bölünmüş Farklar, Spline Polinomları

Sayfa Adedi : 81
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Zeynep Fidan Koçak

POLINOMIAL INTERPOLATION AND NUMERICAL APPROACH**(M. Sc. Thesis)****Fatma Gül TAŞKIN****MUĞLA UNIVERSITY
INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY****2011****ABSTRACT**

Because, quite a few problems' analytical solution can't be found easily, approximate solutions are acquired. In this study, firstly, with basic definition and theorems, Weirstrass approach theorem, Taylor polynominal, Lagrange polynominal and Spline polynominal deffinitions are given. After that Lagrange interpolation method with the smallest squares method interpolation, divided differences and with Spline polynominal interpolation method are analysed. At the last part, sample problems have been solved and the obtained approximate solutions are compared with the exact solutions.

Keywords : Taylor Polynomial, Lagrange Polynomials
Divided Differences, Spline Functions

Page Number : 81

Adviser : Prof. Dr. Zeynep Fidan KOÇAK

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil No</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 Taylor polinomu grafiği	8
Şekil 3.1 En Küçük Kareler Eğrisi	23
Şekil 3.2 Lineer spline fonksiyon grafiği	43
Şekil 3.3 Kuadratik spline fonksiyon grafiği	46
Şekil 3.4 Kübik spline fonksiyon grafiği	56

TABLolar DİZİNİ

<u>Tablo No</u>	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1 Bölünmüş farklar tablosu	30
Tablo 3.2 İleri farklar tablosu	37
Tablo 3.3 Geri farklar tablosu	40
Tablo 4.1 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile Lagrange polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma	60
Tablo 4.2 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile E.K.K. doğrusunda aldığı değerleri karşılaştırma	61
Tablo 4.3 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile birinci dereceden Newton polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma	62
Tablo 4.4 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile ikinci dereceden Newton polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma	63
Tablo 4.5 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile Kübik spline polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma	67
Tablo 5.1 Lagrange, E.K.K. doğrusu, Newton ve Spline polinomlarının hata değerlerinin karşılaştırılması	68

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	Her
$\exists$	Bazı
IR	Reel sayılar kümesi
IN	Doğal sayılar kümesi
ε, δ	Keyfi pozitif sabitler
$C^n[a, b]$	n . mertebeden sürekli türevli
$C^{n+1}[a, b]$	$(n + 1)$. mertebeden sürekli türevli
$C^\infty[a, b]$	Sonsuz türevlenebilir
E.K.K.	En küçük kareler
$f[x_i]$	i . bölünmüş fark
$L_i(x)$	Lagrange katsayı polinomları
$P_n(z)$	n -inci dereceden polinom
$S_i(x)$	Spline katsayı polinomları
$S(x)$	Spline fonksiyonu
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü

1. GİRİŞ

İnterpolasyon kelimesi elemanter anlamda bir fonksiyonun tablo halinde verilmiş değerlerinden hareketle, bu fonksiyonun bu aralıkta bilinmeyen değerlerinin hesaplanması işlemidir. Aynı deyim geniş anlamda verilmiş bir fonksiyonun daha basit bir $P(x)$ polinomu ile gösterilmesi veya onun yerine kullanılması işlemi için de kullanılır.

O halde polinomlarla işlem yapmak kolay olduğundan ve polinomların birçok özellikleri bilindiğinden, fonksiyonların yerine onları temsil edebilecek polinomları araştırıp kullanmak büyük kolaylık sağlar. Eğer bir aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu ile bir $P(x)$ polinomu aldığı değerler farkı istenildiği kadar küçük olabiliyorsa, $P(x)$ polinomuna $f(x)$ fonksiyonunun bir yaklaşım polinomu denir. Böyle durumda $f(x)$ fonksiyonu yerine $P(x)$ polinomunu incelemek yeterli olabilir. İnterpolasyon polinomları nümerik analizde önemli bir yer tutar.

Bu çalışmada interpolasyon polinomları incelenecektir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1 Polinomlar

Tanım 2.1.1 $a_0 \neq 0 \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere,

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots a_n \quad (2.1)$$

ifadesi n -inci dereceden bir polinom belirtir. Derecesi n olan polinomlar P_n ile gösterilir (Gültürk, 2008).

Teorem 2.1.1 (Çarpanlara Ayırma Teoremi) Eğer $P_n(x)$ n -inci dereceden bir polinom ise;

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n) \quad a_0 \neq 0$$

olacak şekilde n tane $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ sayısı bulunabilir. x_i değerleri farklı olmayabilir. Eğer n kompleks sayıdan r tanesi ($r \leq n$) $x_1, x_2 \dots x_r$ farklı ise $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_r = n$ şartını sağlayan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_r$ pozitif tamsayılarını kullanarak,

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} \quad (2.2)$$

yazılabilir. α_i tek olarak belirlenir ve bu α_i 'ler x_i 'lerin kaç katlı olduğunu gösterir (Gültürk, 2008).

Teorem 2.1.2 (Teklik) Eğer $f(x) \in P_n$ ve f polinomu n farklı noktadan daha çok noktada sıfır oluyorsa bu polinom özdeş olarak sıfırdır (Gültürk, 2008).

İspat: f nin derecesi k ve $k \leq n$ olsun. Teorem(2.1.1)'den $f(x) = a_0(x - x_1) \dots (x - x_k)$ dır.

Hipotezden $f(x^*) = 0$ olacak şekilde $x^* = x_1, x_2, \dots, x_k$ bulunabilir. O zaman

$$0 = a_0(x^* - x_1) \dots (x^* - x_k) \quad \text{öyle ki } a_0 \neq 0 \text{ dır. Böylece } f(x) = 0 \text{ 'dır.}$$

2.1.2 Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümleri

$x_0, x_1, \dots, x_n$ $n+1$ tane bilinmeyen olmak üzere,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

olacak şekilde n tane lineer denklemden oluşan lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

Teorem 2.1.3 (Cramer Kuralı) Eğer $|A| = |a_{ij}| \neq 0$ ise

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır (Gültürk, 2008).

Teorem 2.1.4 (Alternatif Teorem) Eğer Teorem (2.1.3) 'de $b_i = 0$ ve $(i=1, 2, \dots, n)$ ise elde edilen ,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0 \quad ; \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

sistemine homojen denklem sistemi denir.

Tanım 2.1.2 Her $x \in X$ vektörü x_i ' lerin tek türlü lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa $x_1, x_2, \dots$ elemanlarının kümesi X 'in bir bazıdır denir (Gültürk, 2008).

2.1.3 Düzgün Süreklilik

Tanım 2.1.3 $A \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\delta > 0$ sayısı için $|x - a| < \delta$ koşulunu sağlayan noktaların kümesine a noktasının δ - komşuluğu denir.

Tanım 2.1.4

i) $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ reel sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir (Balcı, 1984).

ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x_1 - x_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x_1, x_2 \in A$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonu A kümesinde düzgün süreklidir denir (Balcı, 1984).

ii) den düzgün sürekli her fonksiyonun sürekli olduğu kolayca görülür. Tersine her zaman doğru değildir.

2.1.4 Türevlenebilir (Diferensiyellenebilir) Fonksiyonlar

Tanım 2.1.5 $f(x)$, (a, b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad (2.6)$$

limiti mevcutsa $f(x)$ 'e bir $x_0 \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir veya diferensiyellenebilir denir (Gültürk, 2008).

Sağdan ve soldan türev tanımı: $f(x)$, (a, b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^+) \text{ ise } f(x) \text{ fonksiyonu } x_0 \text{ noktasında sağdan türevlidir}$$

denir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0^-) \text{ ise } f(x) \text{ fonksiyonu } x_0 \text{ noktasında soldan türevlidir}$$

denir.

Tanım 2.1.6 Eğer $f(x)$, $[a, b]$ üzerinde n defa türevlenebilirse ve $f^{(n)}(x)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli ise $f(x) \in C^{(n)}[a, b]$ dir.

Teorem 2.1.5 (Rolle Teoremi) f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli , (a, b) aralığında türevlenebilir ve $f(a) = f(b)$ olsun. Bu durumda $f'(c) = 0$ olacak biçimde en az bir $c \in (a, b)$ vardır (Thomas, 1984).

Teorem 2.1.6 (Genelleştirilmiş Rolle Teoremi) $n \geq 2$ olsun. $f \in C^n[a, b]$ ve $f^{(n-1)}(x)$ fonksiyonları (a, b) 'nin her noktasında var ve sürekli, $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ için $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$ olsun. O zaman, $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ olacak şekilde $x_1 < \xi < x_n$ koşuluna uygun bir ξ noktası vardır (Davis, 1975).

İspat: $f \in C^n[a, b]$ ve $\forall x \in (a, b)$ için $f^{(n-1)}(x)$ var olsun. Ayrıca $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ olmak üzere $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$ olsun. f fonksiyonuna Rolle teoremini uygularsak $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < x_3 < \dots < \xi_{n-1} < x_n$ için;

$$f'(\xi_1) = 0, f'(\xi_2) = 0, \dots, f'(\xi_{n-1}) = 0 \text{ olur.}$$

f fonksiyonunun birinci türevine tekrar Rolle teoremi uygularsak;

$$\xi_1 < \xi_{1,1} < \xi_2 < \xi_{2,1} < \xi_3 < \dots < \xi_{n-2,1} < \xi_{n-1} \text{ için;}$$

$$f''(\xi_{1,1}) = 0, f''(\xi_{2,1}), \dots, f''(\xi_{n-2,1}) = 0$$

olacaktır. $\forall x \in (a, b)$ için $f^{(n-1)}(x)$ var olduğundan, bu şekilde $(n-1)$. mertebeden türevelere kadar devam ederse $f^{(n-1)}(\xi) = 0$ olacak şekilde bir $\xi \in (x_1, x_n)$ olduğu görülür.

Teorem 2.1.7 (Weirstrass Yaklaşım Teoremi)

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass; 31 Ekim 1815'de Ostenfelde'de (Münster) doğdu, 18 Şubat 1897 Berlin'de öldü. Alman öğretmen ve matematikçi. Meslek yaşamına Münster'de, Deutsch-Krone'de ve Braunsberg'te ilkökul öğretmeni olarak başladı, daha sonra 1856'da Berlin Meslek Enstitüsü'nde ve 1864'te de Berlin Üniversitesi matematik profesörlüğüne atandı ve ölümüne dek ders verdi. Derslerinde, çözümlemenin yeniden doğmasına önemli katkılarda bulundu ve bütün bir matematikçiler kuşağı üzerinde çok büyük bir etki yarattı. Kummer ile birlikte Almanya'daki ilk matematik seminerini düzenledi. Bolzano, Abel ve Cauchy'nin başlattığı matematiği kurallara bağlama çabasını daha da ileri götürerek bir sayı dizisinin limiti, sürekli değişken vb. kavramlarına ilişkin henüz yeterince açık olmayan formülleştirmeleri aritmetik eşitsizlikler biçiminde ifade etti ve böylece matematikte sezginin rolünü daha da azalttı. Bu kavramları iyice irdeleyerek sürekli ve hiçbir noktasında türevi alınamayan bir fonksiyonun kurulması problemini ortaya attı. Bu fonksiyonu düzgün yakınsak sonsuz bir seriyle tanımladı. Çözümlemeyi aritmetiğe dayandırmak istedi ve aritmetiğin mantık temelinden yoksun oluşunu gidermek için bir gerçek sayılar kuramı geliştirdi. Karmaşık bir değişkenin analitik fonksiyonları kuramının geliştirilmesine büyük katkıda bulundu.

Çalışmalarının büyük bir bölümünü yayımlamayan ve derslerinde açıklamakla yetinen Weierstrass, Gauss ve Riemann'dan sonra 19.yy'da yaşamış üçüncü büyük Alman matematikçi olarak anılmaktadır.

Her $f \in C[a, b]$ ve $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için, $|f - P| < \varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.

İspat: Farz edelim ki $-1 \leq x \leq 1$ ve $u = 1 - x^2$ olsun.

$|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sqrt{1 - u}$ dir. Binom serilerinden;

$$\sqrt{1 - u} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2^2 \cdot 2!}u^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}u^3 - \dots$$

$0 \leq u \leq 1$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Bu nedenle $\sqrt{1 - u}$ fonksiyonuna

$0 \leq u \leq 1$ aralığında u değişkeninin polinomlarıyla ve $-1 \leq x \leq 1$ aralığında da $|x|$ fonksiyonuna x değişkeninin polinomlarıyla düzgün yaklaşabilir.

$|x|$ fonksiyonunun grafiği bir açılı poligonal doğrudur. Şimdi herhangi bir poligonal fonksiyona polinomlarla düzgün keyfi küçük hatayla düzgün yaklaşılabilirliğini göstermek istiyoruz. Öncelikle; $(-l, l)$ aralığında $|x| = l \cdot \left| \frac{x}{l} \right|$ ve $\left| \frac{x}{l} \right| \leq 1$ sağlandığında,

her $(-l, l)$ aralığındaki $|x|$ için bu durum doğrudur. Yine her,

$$L_c(x) = \frac{1}{2} \{ (x - c) + |x - c| \}$$

fonksiyonuna her $[a, b]$ aralığında polinomlarla yaklaşılabilir. Şimdi kabul edelim ki; $g(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında grafiği $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ noktalarında açılara sahip herhangi bir poligonal fonksiyon olsun.

Şimdi $g(x)$ fonksiyonunun L_c 'nin bir kombinasyonu olduğunu göstereceğiz.

$$g_0(x) = g(a) + C_0 L_{a_0}(x) + C_1 L_{a_1}(x) + \dots C_{n-1} L_{a_{n-1}}(x)$$

ifadesi kullanılarak ve

$$g_0(a_v) = g(a_v), \quad v = 0, 1, \dots, n$$

denklemleri yardımıyla C_v sabitleri tanımlanır. Bu denklemlerden birincisi bir özdeşliktir. İkincisi ise

$$g(a) + C_0 L_{a_0}(a_1) = g_0(a_1)$$

dir ve buradan C_0 bulunur, üçüncüsünden ise C_1 ve böyle devam edilerek tüm sabitler bulunur. g ve g_0 poligonal fonksiyonları tüm temel noktalarda çakışır ve bu nedenle özdeştir. Bu durum herhangi bir $g(x)$ fonksiyonuna polinomlar ile yaklaşım yapılabileceğini gösterir. Son olarak, kabul edelim ki $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ aralığının bir parçalanması vardır öyle ki; $f(x)$ fonksiyonunun maksimumu M_v ve minimumu m_v arasındaki fark herhangi bir $[a_{v-1}, a_v]$ aralığında $\frac{1}{2}\varepsilon$ 'dan küçüktür. $g(x)$ poligonal fonksiyonu a_v noktasında $f(x)$ fonksiyonuna interpolate olsun. $[a_{v-1}, a_v]$ aralığında $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının her ikisinde m_v ve M_v arasındadır ve bu nedenle,

$$|f(x) - g(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad a \leq x \leq b \text{ dır.}$$

Eğer $P(x)$ bir polinom ve $|g(x) - P(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ ise, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

2.2 Taylor Polinomu

Sonlu farklı nümerik hesaplamalar için temel teknik $x = x_0$ komşuluğunda $f(x)$ fonksiyonuna polinom yaklaşımına dayanır. $x = x_0 + \Delta x$ alalım yani $\Delta x = x - x_0$ olsun. Eğer $f(x)$ 'e $x = x_0$ komşuluğunda bir sabit ile yaklaşırsak $f(x_0)$ seçeriz ve $f(x)$ için daha iyi bir tahmin $x = x_0$ daki teğet doğrusu;

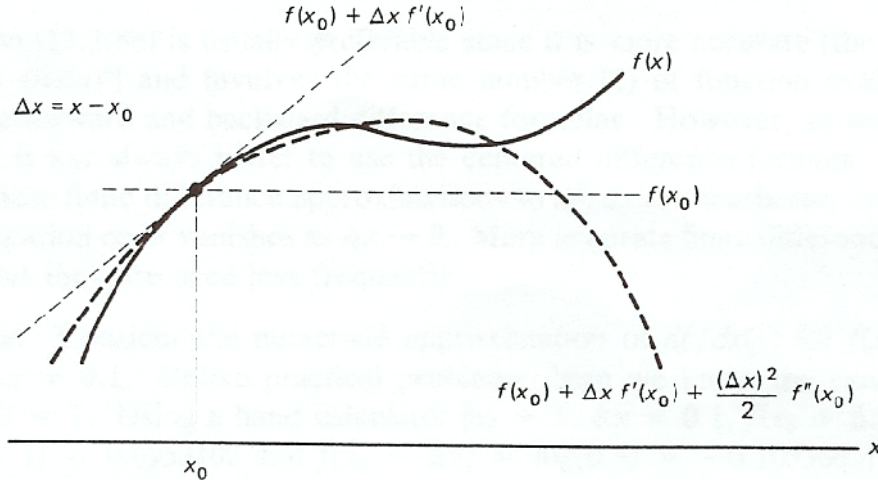
$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \frac{df(x_0)}{dx} \quad (2.7)$$

Yani lineer bir yaklaşım (birinci derece polinom) dır. $f(x)$ 'e daha iyi bir yaklaşım

$$f(x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2 f''(x_0)}{2!}$$

İkinci derece (kuadratik) yaklaşımı olup, bu yaklaşımın $x = x_0$ daki birinci ve ikinci türev değerleri $f(x)$ ile aynıdır.

Böylece, eğer x, x_0 'a yeterince yakın (yani Δx küçük) ise şekil 2.1 de görüldüğü gibi $f(x)$ 'e her bir üst derece polinom yaklaşımı daha fazla duyarlı olur (Mehmetlioğlu, 2007).



Şekil 2.1 Taylor Polinomu

Teorem 2.2.1 $y = f(x)$ fonksiyonu ve ardışık türevleri x_0 noktasında ve civarında sürekli ise $f(x)$ fonksiyonuna x_0 civarında yakınsayan Taylor Polinomu vardır.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

İspat:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad f'(x_0) = P'(x_0) = a_1 \quad f'(x_0) = a_1$$

$$P''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f''(x_0) = P''(x_0) = 2a_2 \quad f''(x_0) = 2a_2 \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$P'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$f'''(x_0) = P'''(x_0) = 6a_3 \qquad f'''(x_0) = 6a_3 \qquad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}$$

Buradan $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ diyebiliriz.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Bir polinom yaklaşımındaki hata formülü;

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

eşitliğinden doğrudan elde edilir. Bu eşitlik kalan terimli Taylor serisi olarak bilinir. Kalan terim R_n (kesme hatası da denir) serinin bir sonraki terimi cinsinden verilir fakat genellikle bilinmeyen bir noktada hesaplanır. Yani,

$$R_n = \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) \quad ; \quad x_0 < \xi_{n+1} < x \quad (2.8)$$

olacak şekilde bir ξ_{n+1} değeri vardır. Kuşkusuz bu değerin var olması için $f(x)$ 'in $(n+1)$ noktada sürekli türe ve sahip olması gereklidir.

Örnek 2.2.1 Teğet doğrusu yaklaşımındaki hata, denklem (2.7)'de $n=1$ için

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df(x_0)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(\xi_2)}{dx^2}$$

olup geliştirilmiş ortalama değer teoremi olarak adlandırılır. Eğer Δx küçükse ξ_2 küçük bir aralığın içinde kalır ve $\frac{d^2 f}{dx^2}$ sürekli ise kesme hatası hemen hemen belirlenir. Yani,

$$R \approx \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \text{ olur. Kesme hatası bu durumda } O(\Delta x)^2 \text{ basamaktadır deriz.}$$

Bunun anlamı;

$$|R| \leq C(\Delta x)^2 \text{ dir. Çünkü genellikle,}$$

$\frac{d^2 f}{dx^2}$ nin $\left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| < M$ sınırlı olduğunu varsaydığımız içindir. Böylece $C = \frac{M}{2}$ dir.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ polinomu}$$

için kalan ya da hata terimi;

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

şeklindedir. Burada $\zeta(x)$, x ile x_0 arasında bir sayıdır.

Örnek 2.2.2 $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $x_0 = 1$ civarında üçüncü dereceden Taylor polinomunu bulalım ve $f(3)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = (-1)^2 2 \frac{1}{x^3}$ olur. Genel olarak

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1}$ elde edilir. Buradan $n \geq 1$ için Taylor polinomu;

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k (x-1)^k$$

olarak bulunur. Buradan üçüncü dereceden Taylor polinomunu yazarsak;

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k (x-1)^k \text{ şeklinde olur. Üçüncü dereceden Taylor polinomunda}$$

$P_3(3)$ ü hesaplırsak; $P_3(3) = -5$ bulunur. Fakat verilen fonksiyona göre $f(3) = \frac{1}{3}$

dür.

Dördüncü dereceden Taylor polinomunu yazarsak;

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k (x-1)^k \text{ şeklindedir.}$$

Dördüncü dereceden Taylor polinomunda $P_4(3)$ ü hesaplırsak; $P_4(3) = 11$ bulunur.

Bizim yaklaşık olarak bulacağımız değerde $f(3) = \frac{1}{3}$ değerine yakın bir değer

olmalıydı. Burada n büyüdükçe yapılan hata,

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}} ; \quad 1 \leq \xi \leq x$$

mutlak değer olarak büyür. Bu da bize $x=3$ sayısının yeter derecede $x_0=1$ sayısının komşuluğunda olmadığını söyler.

Yani Taylor polinomu yaklaşık hesaplamalar için her zaman kullanılabilecek bir polinom değildir.

2.3 Lagrange Polinomu

Genel bir fonksiyona özellikleri iyi bilinen daha iyi bir fonksiyonlar sınıfı ile yaklaşım yapılan polinomlardır. Bunun iki faydası vardır. Birincisi, daha genel veya daha karmaşık bir fonksiyon yerine türevi, integrali, v.s. bilinen daha kolay fonksiyonların alınması. İkincisi, fonksiyon değerleri ile tablo haline getirilmiş bir fonksiyonun tablolarla bulunmayan değerlerinin hesaplanması. Nümerik analizde önemli yere sahip olan Lagrange İnterpolasyon yöntemini, Hildebrand, (1956)' da detaylı olarak incelemiştir (Bunchanan, 1992).

2.4 Spline Polinomları

Problem çözümlerinde sıklıkla kullanılan yöntemler arasında yer alan interpolasyon yöntemleri, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve matematik gibi çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlar arasında polinom yaklaşımları önemli bir yere sahiptir. Uygulamada kullanılacak olan fonksiyonu bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Ancak fonksiyonu temsil etmek üzere bir polinom elde edilebilir. Fonksiyonu elde etmek için verilen nokta sayısı ne kadar artarsa polinomun derecesi de o kadar artacaktır. Yüksek dereceden polinomlar hem işlem güçlüklerini ortaya çıkaracağından hem de fonksiyonlarda büyük salınımlara yol açacağından hatalı sonuçlar doğurabilir. Bundan dolayı verilen bilgilere en küçük dereceden polinomlar bulunabilir. Bu yaklaşım için hem düzgünleştirici hem de verimli bir yaklaşım elde etmede en uygun olanı parçalı polinom yaklaşımıdır (De Boor, 1978). Böylece işlem kolaylığı da sağlanmış olacaktır. Polinom yaklaşımında yapılan işlem, problemin çözüm bölgesini küçük aralıklara parçalayarak her bir parça üzerinde düşük dereceden polinomlar

kullanarak, aranan $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşımdır. Bu tür parçalı özelliklere sahip parçalı polinomlardan biri de Spline polinomlarıdır (Schumaker, 1993).

Spline kavramı, ilk olarak 1946'da Schoenberg tarafından tanıtılmıştır. Fonksiyona spline adının verilmesi parçalı polinomlarla, spline adını taşıyan mekanik bir alet arasındaki ilişkiden kaynaklanmıştır. Bu mekanik alet, elastik bir maddeden yapılmış ince oluklu bir çubukla beraber kollarının bir ucunda ağırlıkları olan ve diğer ucunda da oluklara geçirilebilecek çıkıntıları olan parçalardan oluşmaktadır. Kollar ve ağırlıklarla çubuğun belli bir yoldan geçmesi sağlanır ve böylece ağırlıkların kollarının çubuğa değdiği noktalardan geçen düzgün eğrileri çizilir. Bu düzgün eğriler spline fonksiyonu olarak adlandırılmıştır ve $S(x)$ ile gösterilmiştir. Çok sayıda veri noktalarına bir tek eğri ile yaklaşmak büyük kolaylıklar sağlasa da bazı hallerde bu durum büyük hatalara neden olabilir. Ayrıca bu amaçla kullanılan Newton ve Lagrange İnterpolasyon polinomlarının derecesi nokta sayısı arttıkça artacağından, bu tür polinomlarla yapılacak işlemler zorlaşır. Bu nedenlerden dolayı, peş peşe gelen iki veri arasında birinci, ikinci ya da üçüncü dereceden fonksiyonlarla yaklaşımın yapıldığı Spline İnterpolasyon yöntemi önerilmektedir (Türker, Can, 1997).

Spline İnterpolasyonu veri noktalarını çeşitli aralıklarla bölerek, her bir aralıkta daha küçük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma esasına dayanır.

m . dereceden spline fonksiyonlar, $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ monoton artan bir dizi olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $S(x)$, her $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ de m . ya da daha küçük dereceden bir polinomdur. (Burada $x_0 = -\infty$ ve $x_n = \infty$ olabilir.)
 - (ii) $S(x)$ ve $(m-1)$. mertebeden ardışık türevleri ve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ bölünme noktalarında süreklidir. Bu bölünme noktalarına düğüm noktaları da denilir
- $m = 0$ için (ii) koşulu geçersizdir. $m = 1$ için spline fonksiyonu lineer bir fonksiyon olup verilen aralıkta kırık çizgiyi gösterir.

Genel olarak, $S(x)$; $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ aralıklarının her biri için derecesi m ya da daha küçük olan farklı fonksiyonlar olarak verilebilir. $m > 0$ için m . dereceden bir spline fonksiyonunun m . mertebeden türevi sabit fonksiyondur. Bunun yanı sıra m . dereceden bir spline fonksiyonu sabit fonksiyonun m . basamaktan integralidir de denilebilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Lagrange İnterpolasyon Yöntemi

$x_0, x_1, \dots, x_n$ birbirinden farklı reel veya kompleks noktalar olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonu için bu noktalara karşılık gelen fonksiyon değerleri $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ olsun. Bu durumda interpolasyon polinomu da n . dereceden en genel polinom olan,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (3.1)$$

olarak tanımlanırsa, $p(x_i) = y_i$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için,

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n \quad (3.2)$$

olacak biçimde $(n+1)$ bilinmeyenli ve $(n+1)$ denklemden oluşan (3.2) sistemi elde edilsin. Sistem (3.2)'nin katsayılar matrisini V , bilinmeyenler matrisini A ve ikinci yan matrisini Y olarak yazarsak;

$$VA = Y \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Buradaki katsayılar matrisi olan V matrisine özel olarak Vandermonde matrisi denir. Sistem (3.2)'nin çözümü ile derecesi n 'den büyük olmayan ve $f(x)$ ile $(n+1)$ noktada uyuşan $p(x)$ interpolasyon polinomunun reel katsayılarını bulabiliriz (Kartal, 2008).

Elde edilen $p(x)$ polinomu tektir. Bu $p(x)$ polinomuna $(n+1)$ noktadan geçen n . dereceden *Lagrange polinomu* denir. Ancak yeni bir nokta eklediğimizde polinomun derecesi artacağından çok kullanışlı değildir.

Teorem 3.1.1 $(n+1)$ farklı nokta için, bu noktalara karşılık gelen değerlere interpolate edilen, yani bu karşılık gelen değerlerden geçen en fazla n . derece olan bir polinom vardır ve bu polinom n . dereceden polinomların oluşturduğu kümede tektir.

İspat: Birbirinden farklı $x_0, x_1, \dots, x_n$ değerleri ve $y = f(x)$ fonksiyonu için bu noktalara karşılık gelen fonksiyon değerleri $y_0, y_1, \dots, y_n$ olsun. Bu durum için n . dereceden interpolasyon polinomu, denklem (2.9)'daki gibi olsun. Bu durumda elde edilecek olan (2.10) sisteminin katsayılar matrisinin determinanı,

$$\det(V) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & . & . & . & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & . & . & . & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & . & . & . & x_2^n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & . & . & . & x_n^n \end{vmatrix}$$

olur. Burada determinanta elemanter satır ve sütun işlemleri uygulandığında,

$$\det(V) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

bulunur. Bütün x_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ noktaları birbirinden farklı olduklarından $\det(V) \neq 0$ dır. Yani denklemin tek çözümü vardır. Elde edilen ifadelerden yola çıkarak, $p(x)$ interpolasyon polinomunu farklı biçimde oluşturmaya çalışalım.

İlk olarak kolaylık olsun diye, x_0 ve x_1 gibi iki farklı nokta ve f fonksiyonunun bu noktalardaki değerleri $f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ verilmiş olsun Amacımız verilen noktalarda f fonksiyonu ile aynı değerleri alan bir polinom bulmaktır (Karagöz, 2001).

Şimdi,

$$P(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1$$

biçimindeki lineer polinomu göz önüne alalım. Bu polinomda, $x = x_0$ alınırsa,

$$P(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x_0 - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 = f(x_0)$$

ve $x = x_1$ alınırsa,

$$P(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x_1 - x_1)}{(x_1 - x_0)} y_1 = f(x_1) \text{ elde edilir. Elde edilen lineer } P(x)$$

polinomu ile f fonksiyonu verilen noktalarda aynı değerleri almaktadır. Bu şekilde elde edilen $P(x)$ polinomunun elde ediliş yöntemine Lagrange İnterpolasyon yöntemi denir. Burada $P(x)$ polinomunu elde ederken,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

oranları kullanır. Burada $x = x_0$ iken $L_0(x_0) = 1$ ve $L_1(x_0) = 0$ olur. Benzer şekilde,

$x = x_1$ iken $L_0(x_1) = 0$ ve $L_1(x_1) = 1$ olur.

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) \quad (3.4)$$

ile ifade edelim. Ayrıca polinom verilen noktalardan geçeceğinden

$$p(x_0) = y_0 L_0(x_0) + y_1 L_1(x_0) + \dots + y_n L_n(x_0) = y_0$$

$$p(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + \dots + y_n L_n(x_1) = y_1$$

.

.

.

$$p(x_n) = y_0 L_0(x_n) + y_1 L_1(x_n) + \dots + y_n L_n(x_n) = y_n \quad (3.5)$$

olmalıdır. Burada

$$P_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow L_0(x_0) = 1, L_1(x_0) = 0, L_2(x_0) = 0, \dots, L_n(x_0) = 0$$

$$P_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow L_0(x_1) = 0, L_1(x_1) = 1, L_2(x_1) = 0, \dots, L_n(x_1) = 0$$

.

.

.

$$P_n(x_n) = f(x_n) \Rightarrow L_0(x_n) = 0, L_1(x_n) = 0, L_2(x_n) = 0, \dots, L_n(x_n) = 1$$

elde edilir. Bir başka ifadeyle,

$$\delta_{ij} = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n \delta_{ik} L_k(x_j) = L_i(x_j) \quad (3.6)$$

yazabiliriz. Burada δ Kronecker Deltası olup;

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & ; k = i \\ 0 & ; k \neq i \end{cases}$$

şeklindedir. Şimdi $L_0(x)$ polinomunu göz önüne alalım. Kendi kökleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ cinsinden $L_0(x)$ polinomu,

$$L_0(x) = c_0 \cdot (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $L_0(x_0) = 1$ olduğundan,

$$c_0 = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \text{ ve}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \quad (3.8)$$

dır. $L_1(x)$ polinomu, kendi kökleri $x_0, x_2, \dots, x_n$ cinsinden

$$L_1(x) = c_1 (x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $L_1(x_1) = 1$ olduğundan,

$$c_1 = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \text{ ve}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \quad (3.10)$$

dır. Benzer şekilde işlemler yapılarak, $L_i(x)$ polinomları için

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (3.11)$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x) \quad (3.12)$$

şeklinde elde ederiz (Cantürk, 2009).

$n = 2$ için, (x_0, y_0) , (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktalarından geçen Lagrange kuadratik interpolasyon polinomu,

$$p_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad (3.13)$$

olarak yazılır. Benzer biçimde Lagrange kübik interpolasyon polinomu da,

$$p_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (3.14)$$

olarak bulunur. Şimdi Lagrange polinomları ile ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.1.1 Uzaya gönderilen bir roketin zamana bağlı hız değerleri aşağıdaki tabloda veriliyor.

Veri tablosu 3.1

t(zaman) (s)	0	10	15	20	22.5	30
v(t)(Hız)(m/s)	0	227,04	362,78	517,35	602,97	901,67

Roketin 16 saniyedeki hız değerini birinci dereceden Lagrange polinomunu kullanarak hesaplayalım.

Çözüm: Birinci derecede bir polinom için (Lineer interpolasyon), hızı;

$$v(t) = \sum_{i=0}^1 L_i(t) v(t_i) = L_0(t) v(t_0) + L_1(t) v(t_1) \text{ olarak seçilir.}$$

$t = 16$ saniyedeki hızını bulmak istediğimizden, $t = 16$ ya yakın iki nokta seçeceğiz ki; bu iki nokta arasında $t = 16$ olsun. Bu noktalar $t_0 = 15$ ve $t_1 = 20$ dir.

$$t_0 = 15, \quad v(t_0) = 362,78$$

$$t_1 = 20, \quad v(t_1) = 517,35$$

$$L_0(t) = \prod_{j=0, j \neq 0}^1 \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{j=0, j \neq 1}^1 \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \frac{t-t_0}{t_1-t_0} \text{ olup,}$$

$$v(t) = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0}v(t_1) = \frac{t-20}{15-20}(362,78) + \frac{t-15}{20-15}(517,35)$$

$$v(16) = \frac{16-20}{15-20}(362,78) + \frac{16-15}{20-15}(517,35)$$

$v(16) = 393,7$ m/s olarak bulunur.

Örnek 3.1.2 Örnek 3.1.1 de verilen roketin 16 saniyedeki hız değerlerini ikinci dereceden Lagrange polinomunu kullanarak hesaplayalım. Ayrıca hata seviyesini ikinci dereceden polinom için bulalım.

Çözüm: $t = 16$ saniyedeki hızını bulmak için $t = 16$ noktasının içinde bulunduğu üç noktayı $t_0 = 10$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$ olarak seçebiliriz.

$$t_0 = 10 ; v(t_0) = 227,04$$

$$t_1 = 15 ; v(t_1) = 362,78$$

$$t_2 = 20 ; v(t_2) = 517,35 \text{ için,}$$

$$L_0(t) = \prod_{j=1, j \neq 0}^2 \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right)$$

$$L_1(t) = \prod_{j=0, j \neq 1}^2 \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right)$$

$$L_2(t) = \prod_{j=0, j \neq 2}^2 \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) \text{ olup,}$$

$$v(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) v(t_0) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) v(t_1) + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) v(t_2)$$

$$v(16) = \frac{(16-15)(16-20)}{(10-15)(10-20)}(227,04) + \frac{(16-10)(16-20)}{(15-10)(15-20)}(362,78) +$$

$$\frac{(16-10)(16-15)}{(20-10)(20-15)}(517,35) = (-0,08)(227,04) + (0,96)(362,78) + (0,12)(517,35)$$

$v(16) = 392,19$ m/s olarak bulunur.

Bir önceki örnek ile bu örnek arasındaki hesaplama değerinin göreceli hata yüzdesi,

$$\left| \frac{392,19 - 393,70}{392,19} \right| \cdot 100 = \%0,38502 \text{ dir.}$$

Örnek 3.1.3 Örnek 3.1.1 de verilen roketin 16 saniyedeki hız değerlerini üçüncü dereceden Lagrange polinomunu kullanarak hesaplayalım. Ayrıca hata seviyesini üçüncü dereceden polinom için bulalım.

Çözüm: Üçüncü dereceden bir polinom için (kübik interpolasyon olarak da adlandırılabilir), hızı şu şekilde seçebiliriz;

$$v(t) = \sum_{i=0}^3 L_i(t) v(t_i) = L_0(t) v(t_0) + L_1(t) v(t_1) + L_2(t) v(t_2) + L_3(t) v(t_3)$$

Üçüncü dereceden bir polinomu kullanarak, $t = 16$ saniyesinde hızı bulmak istediğimizden, $t = 16$ noktasının içinde bulunduğu dört noktayı,

$t_0 = 10$, $t_1 = 15$, $t_2 = 20$ ve $t_3 = 22.5$ olarak seçebiliriz.

$$t_0 = 10 ; v(t_0) = 227,04$$

$$t_1 = 15 ; v(t_1) = 362,78$$

$$t_2 = 20 ; v(t_2) = 517,35$$

$$t_3 = 22,5 ; v(t_3) = 602,97$$

Böylece,

$$L_0(t) = \prod_{j=1, j \neq 0}^3 \frac{t - t_j}{t_0 - t_j} = \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \right) \left(\frac{t - t_2}{t_0 - t_2} \right) \left(\frac{t - t_3}{t_0 - t_3} \right)$$

$$L_1(t) = \prod_{j=0, j \neq 1}^3 \frac{t - t_j}{t_1 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) \left(\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \right) \left(\frac{t - t_3}{t_1 - t_3} \right)$$

$$L_2(t) = \prod_{j=0, j \neq 2}^3 \frac{t - t_j}{t_2 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \right) \left(\frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right) \left(\frac{t - t_3}{t_2 - t_3} \right)$$

$$L_3(t) = \prod_{j=0, j \neq 3}^3 \frac{t - t_j}{t_3 - t_j} = \left(\frac{t - t_0}{t_3 - t_0} \right) \left(\frac{t - t_1}{t_3 - t_1} \right) \left(\frac{t - t_2}{t_3 - t_2} \right) \text{ olup,}$$

$$v(t) = \left(\frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \right) \left(\frac{t - t_2}{t_0 - t_2} \right) \left(\frac{t - t_3}{t_0 - t_3} \right) \cdot v(t_0) + \left(\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \right) \left(\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \right) \left(\frac{t - t_3}{t_1 - t_3} \right) \cdot v(t_1)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) \left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3} \right) \cdot v(t_2) + \left(\frac{t-t_0}{t_3-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2} \right) \cdot v(t_3) \\
v(16) &= \frac{(16-15)(16-20)(16-22.5)}{(10-15)(10-20)(10-22.5)} \cdot (227,04) + \\
& \frac{(16-10)(16-20)(16-22.5)}{(15-10)(15-20)(15-22.5)} \cdot (362,78) + \\
& \frac{(16-10)(16-15)(16-22.5)}{(20-10)(20-15)(20-22.5)} \cdot (517,35) + \\
& \frac{(16-10)(16-15)(16-20)}{(22.5-10)(22.5-15)(22.5-20)} \cdot (602,97) \\
v(16) &= (-0,0416) \cdot (227,04) + (0,832) \cdot (362,78) + \\
& (0,312) \cdot (517,78) + (-0,1024) \cdot (602,06)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bir önceki örnek ile bu örnek arasındaki hesaplama değerindeki göreceli hata yüzdesi,

$$\left| \frac{392,06 - 392,19}{392,06} \right| \cdot 100 = \% 0,033427 \quad \text{dir.}$$

Teorem 3.1.2 $[a, b]$ farklı x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) noktalarını kapsayan herhangi bir aralık olsun. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $(n+1)$. mertebede dahil olmak üzere $(n+1)$. mertebeye kadar türevi var ve sürekli ise her $x \in [a, b]$ için (a, b) aralığındaki bir ξ sayısı için

$$|f(x) - p(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \quad (3.15)$$

eşitliği vardır (Bayram, 2002).

İspat: Her $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x = x_k$ ise $f(x_k) = p(x_k)$ olur ve $\xi(x)$ (3.15) eşitliğini sağlayacak şekilde (a, b) aralığından keyfi olarak seçilebilir. Eğer $x \neq x_k$ ise $t \in [a, b]$ olacak şekilde,

$$g(t) = f(t) - p(t) - [f(x) - p(x)] \frac{(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$$

$$= f(t) - p(t) - [f(x) - p(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} \quad \text{fonksiyonunu tanımlayalım.}$$

$f \in C^{n+1}[a, b]$, $p \in C^\infty[a, b]$ ve her k için $x \neq x_k$ olduğundan $g \in C^{n+1}[a, b]$ olur.

$t = x_k$ için,

$$g(x_k) = f(x_k) - p(x_k) - [f(x) - p(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$$

$$= 0 - [f(x) - p(x)] \cdot 0 \quad \text{olur. Bundan başka}$$

$$g(x) = f(x) - p(x) - [f(x) - p(x)] \prod_{i=0}^n \frac{(x - x_i)}{(x - x_i)}$$

$$= f(x) - p(x) - [f(x) - p(x)] = 0 \quad \text{olur.}$$

Böylece $g \in C^{n+1}[a, b]$ fonksiyonu $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ gibi $(n+2)$ farklı noktada sıfır olur. Rolle teoremine göre $g^{n+1}(\xi)$ olacak şekilde (a, b) açık aralığında $\xi = \xi(x)$ sayısı vardır.

Bu noktada g^{n+1} fonksiyonu,

$$0 = g^{n+1}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - p^{n+1}(\xi) - [f(x) - p(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\prod_{i=0}^n \frac{t - x_i}{x - x_i} \right]_{t=\xi} \quad (3.16)$$

olur. p , en fazla derecesi n . dereceden bir polinom olduğundan $(n+1)$. türevi sıfırdır.

$\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}$ terimi $(n+1)$. dereceden bir polinomdur. Böylece,

$$\prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \left[\frac{1}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \right] \cdot t^{n+1} + (t\text{'ye göre daha küçük dereceli terimler})$$

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^n \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \quad \text{olur. Buna göre denklem (3.16);}$$

$$0 = f^{n+1}(\xi) - 0 - [f(x) - p(x)] \cdot \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} \quad \text{olur. Buradan } f(x) \text{ çözümlürse}$$

$$f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (3.17)$$

olarak bulunur.

Teorem (3.1.2)'deki hata formülü teorik sonuçlar için önemlidir. Çünkü biz Lagrange polinomunu hesaplarken genel olarak nümerik türev ve integral yöntemlerini kullanırız. Bu teknikler için hata sınırları Lagrange hata formülünden elde edilir. Lagrange polinomu için hata formülü Taylor polinomu için kullanılan hata formülüne çok benzemektedir. x_0 noktasından n . dereceden bir Taylor polinomu için hata formülü;

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{idi.}$$

n . dereceden Lagrange polinomunun hata formülünde, Taylor polinomunun hata formülündeki $(x - x_0)^{n+1}$ terimi yerine $x_0, x_1, \dots, x_n$ farklı noktanın $(n+1)$ çarpımından oluşan $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ terimi gelir. Yani Lagrange polinomunun hata formülü;

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad \text{biçimindedir.}$$

Bu formül ancak f fonksiyonunun türevi hesaplanacak biçimde ise kullanışlıdır.

3.2 En Küçük Kareler Yöntemi ile İnterpolasyon

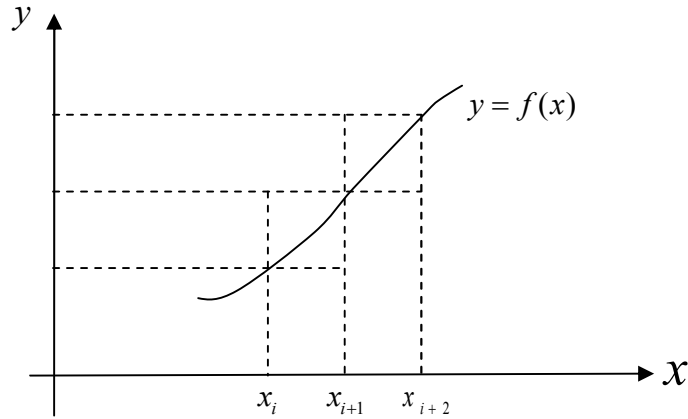
Deneysel verilerde, verilerdeki sapmalar kaçınılmazdır. Çoğu zaman aşırı farklı noktalar ölçümlerden çıkarılır. Çünkü bu aşırı büyük ve küçük değerler genel ortalamayı ve verilerin sapmasını bozacaktır. Bunun için elde bulunan verilere uygun bir eğri seçmeden önce bunları bir programla ve elle basit bir grafik üzerinde görmek ve noktaların dizilişine bakarak uygun eğri veya fonksiyon seçmek çoğu zaman iyi bir yol olacaktır. Değilse en uygun fonksiyonu bulmak için daha fazla zaman harcanacaktır. Ancak bu durum çok da açık ve kesin bir yol değildir. En küçük kareler yöntemi bu, uydurulan eğri ile veri noktaları arasındaki farkları, bir başka deyişle sapmaları minimum yapan bir eğri üretmek için geliştirilen bir tekniktir (Uzun, 1990).

$n + 1$ tane noktadan geçen n den küçük dereceli çok terimliyi bulmaya dayanan bir interpolasyondur. Aranan çok teriminin derecesi $m < n$ olsun ve $P(x)$ ile gösterilsin.

$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$ olacaktır. Noktalar (x_i, y_i) $i = 0, 1, 2, \dots, n$

olduğunda, $s = \sum_{i=0}^n (y_i - p(x_i))^2$ ifadesini en küçük yapan $p(x)$ 'e en küçük kareler çok terimlisi denir.

Bu çok terimlide a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) katsayıları, $\frac{\partial s}{\partial a_i} = 0$ denklemleri ile elde edilir.



Şekil 3.1 En Küçük Kareler Eğrisi

3.2.1 $(n + 1)$ Noktadan Geçen En Küçük Kareler Doğrusunun Bulunması

$P(x) = a_1 x + a_0$ olacaktır.

$$S = \sum_{i=0}^n (y_i - a_1 x_i - a_0)^2 \Rightarrow S = \sum_{i=0}^n (y_i^2 + a_1^2 x_i^2 + a_0^2 - 2a_1 x_i y_i - 2a_0 y_i + 2a_0 a_1 x_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^n (2a_0 - 2y_i + 2a_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^n (2a_1 x_i^2 - 2x_i y_i + 2a_0 x_i) = 0$$

Buradan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_{i=0}^n a_0 + \sum_{i=0}^n a_1 x_i = \sum_{i=0}^n y_i$$

$$\sum_{i=0}^n a_0 x_i + \sum_{i=0}^n a_1 x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

Bu denklem sistemini Cramer Yöntemi ile çözersek,

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^n y_i & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n+1 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=0}^n y_i \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - \sum_{i=0}^n x_i \cdot \sum_{i=0}^n x_i y_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (n+1) & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^n x_i y_i - \sum_{i=0}^n x_i \cdot \sum_{i=0}^n y_i}{(n+1) \cdot \sum_{i=0}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^n x_i \right)^2}$$

olarak bulunur. Bulunan bu katsayılar $P(x) = a_1 x + a_0$ da yerine konularak $n+1$ noktadan geçen En Küçük Kareler (E.K.K) doğrusu bulunmuş olur.

Örnek 3.2.1

Veri tablosu 3.2

x	1	3	4	6
y	0	2,6	6,3	12,15

Noktalarından geçen E.K.K doğrusunu bularak $P(2)$ yi hesaplayalım.

Çözüm: Dört nokta verildiğine göre $n+1 = 4 \Rightarrow n = 3$ dür.

$$\sum_{i=0}^3 x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 3 + 4 + 6 = 14$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 = 1 + 9 + 16 + 36 = 62$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i y_i = 1.0 + 3.2,6 + 4.6,3 + 6.12,15 = 105,9$$

$$\sum_{i=0}^3 y_i = 0 + 2,6 + 6,3 + 12,15 = 21,05$$

$$a_0 = \frac{21,05.62 - 14.105,9}{4.62 - (14)^2} = \frac{-177,5}{52} = -3,41346153$$

$$a_1 = \frac{4.105,9 - 14.21,05}{4.62 - (14)^2} = \frac{128,9}{52} = 2,47884615$$

$$P(x) = a_1 x + a_0 = 2,47884615x - 3,41346153$$

$$P(2) = 2,47884615.2 - 3,41346153$$

$$P(2) = 4,9576923 - 3,41346153$$

$$P(2) = 1,54423077 \text{ olarak bulunur.}$$

3.2.2 (n + 1) Noktadan Geçen En küçük Kareler Parabolünün Bulunması

$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ olacaktır.

$S = \sum_{i=0}^n (y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0)^2$ ifadesini minimum yapan $a_i (i = 0, 1, 2)$ değerlerini

bulalım.

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = \sum_{i=0}^n 2(y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0)(-x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^n 2(y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^n 2(y_i - a_2 x_i^2 - a_1 x_i - a_0)(-1) = 0$$

Buradan aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i x_i^2$$

$$a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_0 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i x_i$$

$$a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_0 \cdot (n+1) = \sum_{i=0}^n y_i$$

Bu denklem sistemi matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n x_i^4 & \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i^3 & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i \\ \sum_{i=0}^n x_i^2 & \sum_{i=0}^n x_i & (n+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n y_i x_i^2 \\ \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \sum_{i=0}^n y_i \end{bmatrix}$$

olur. Bu sistem istenilen yöntemle çözülerek a_2 , a_1 , a_0 katsayıları bulunur (Koçak, 1990).

Örnek 3.2.2

Veri tablosu 3.3

x	0	1	2	3	4
y	4,2	0,9	0,3	1,1	3,8

Verilenlere karşılık gelen ikinci derece E.K.K. eğrisini (parabolü) ve $P(2,5)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm: Beş nokta verildiğine göre $n+1=5 \Rightarrow n=4$ dür.

$$\sum_{i=0}^n x_i^4 = 0 + 1 + 16 + 81 + 256 = 354$$

$$\sum_{i=0}^4 x_i^3 = 0 + 1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

$$\sum_{i=0}^4 x_i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

$$\sum_{i=0}^4 x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum_{i=0}^4 y_i x_i^2 = 4,2 \cdot 0^2 + 0,9 \cdot 1^2 + 0,3 \cdot 2^2 + 1,1 \cdot 3^2 + 3,8 \cdot 4^2 = 0 + 0,9 + 1,2 + 9,9 + 60,8 = 72,8$$

$$\sum_{i=0}^4 x_i y_i = 0 \cdot 4,2 + 1 \cdot 0,9 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 1,1 + 4 \cdot 3,8 = 0 + 0,9 + 0,6 + 3,3 + 15,2 = 20$$

$$\sum_{i=0}^4 y_i = 4,2 + 0,9 + 0,3 + 1,1 + 3,8 = 10,3$$

$$\begin{bmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72,8 \\ 20 \\ 10,3 \end{bmatrix}$$

Aradığımız parabol $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ dır.

$$354a_2 + 100a_1 + 30a_0 = 72,8$$

$$100a_2 + 30a_1 + 10a_0 = 20$$

$$30a_2 + 10a_1 + 5a_0 = 10,3$$

Denklemin katsayılar matrisine K diyelim ve Cramer Yöntemini kullanarak;

$$\det K = \begin{vmatrix} 354 & 100 & 30 \\ 100 & 30 & 10 \\ 30 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 700$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 72,8 & 100 & 30 \\ 20 & 30 & 10 \\ 10,3 & 10 & 5 \end{vmatrix}}{\det K} = 0,957142857$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 354 & 72,8 & 30 \\ 100 & 20 & 10 \\ 30 & 10,3 & 5 \end{vmatrix}}{\det K} = -3,88857142$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 354 & 100 & 72,8 \\ 100 & 30 & 20 \\ 30 & 10 & 10,3 \end{vmatrix}}{\det K} = 4,094285714$$

olarak bulunur. Buna göre

$$P(x) = 0,957142857x^2 - 3,88857142x + 4,094285714 \text{ olarak bulunur.}$$

$$P(2,5) = 0,957142857 \cdot (2,5)^2 - 3,88857142 \cdot (2,5) + 4,094285714$$

$$P(2,5) = 5,98214285625 - 9,72142855 + 4,094285714$$

$$P(2,5) = 0,35500002025$$

3.3 Bölünmüş Farklar

P_n ; $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarında ($n+1$ farklı nokta) f ile aynı değeri alan n . dereceden interpolasyon polinomu olsun.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \quad (3.18)$$

olacak şekilde $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabitlerini bölünmüş farklar cinsinden hesaplayalım. a_0 sayısını bulmak için denklemin (3.18)'de $x = x_0$ yazalım. Bu durumda,

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0) \text{ elde edilir. Benzer yöntemle (3.18) de } x = x_1 \text{ yazılır ve}$$

$$a_0 = f(x_0) \text{ olduğu göz önüne alınırsa,}$$

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1) \text{ elde edilir. Bu eşitlikte } a_1 \text{ çözülürse,}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \quad (3.19)$$

olur. Denklem (3.18)'de $x = x_2$ yazarsak;

$$f(x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = P_n(x_2) = f(x_2) \text{ elde edilir. Bu eşitlikte}$$

a_2 çözülürse;

$$a_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \text{ şeklinde yazabiliriz. Eşitlikte } a_1 \text{ katsayısının}$$

değerini yerine yazarsak,

$$a_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} \text{ buluruz.}$$

Eşitliğimizde paydaları eşitlersek;

$$a_2 = \frac{x_1 f(x_2) - x_0 f(x_2) - x_1 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_0 f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

Paya $x_1 f(x_1)$ ifadesini ekleyip çıkaralım;

$$a_2 = \frac{x_1 f(x_2) - x_0 f(x_2) - x_1 f(x_0) - x_2 f(x_1) + x_0 f(x_1) + x_2 f(x_0) + x_1 f(x_1) - x_1 f(x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$a_2 = \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1)) - (x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

olur. Şimdi bölünmüş farkı tanımlayabiliriz. f fonksiyonunun x_i noktasındaki sıfırıncı bölünmüş farkı $f[x_i]$ ile gösterilir ve $f[x_i] = f(x_i)$ biçiminde tanımlanır.

Benzer yöntemle f fonksiyonunun x_i ve x_{i+1} noktaları için birinci bölünmüş fark,

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.20)$$

formülü ile hesaplanır. Benzer yöntemle $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$ noktaları için $(k-1)$. bölünmüş fark iki farklı şekilde;

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}]$ ve $f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$ olarak yazılabilir. Son olarak k . bölünmüş fark;

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

olarak tanımlanır. Bu gösterimler kullanılarak $a_1 = f[x_0, x_1]$ ve denklem (3.18),

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

olur. Bu eşitlikte $a_2, a_3, \dots, a_n$ katsayıları da her $k = 0, 1, \dots, n$ için ,

$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ şeklinde gösterilir. Buna göre denklem (3.18),

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

şeklinde yeniden yazılır. Bu eşitlik daha kısa olarak,

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.21) Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomu olarak adlandırılır (Bayram, 2002).

Tablo 3.1 Bölünmüş Farklar Tablosu

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				

Tabloya göre k . mertebeden bölünmüş farklar ise;

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \text{şeklinde yazılabilir (Amat, Busquier, Escudero, Trillo, 2008).}$$

Teorem 3.3.1 n . mertebeden bölünmüş fark $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{r=0}^n \frac{f_r}{\prod_{j \neq r}^n (x_r - x_j)} \quad (3.22)$$

şeklinde f_j çarpanlarının simetrik toplamı olarak ifade edilebilir (Phillips, 2003).

İspat:

$$\begin{aligned} & \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = \\ & \frac{\frac{f_1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n)} + \dots + \frac{f_n}{(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}}{(x_n - x_0)} - \\ & \frac{\frac{f_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1})} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{n-1})} + \dots + \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_0) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})}}{(x_n - x_0)} - \\ & \frac{\frac{f_1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n)} + \dots + \frac{f_n}{(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}}{(x_n - x_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)} + \\
&+ f_1 \left[\frac{1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_{n-1})(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)(x_0 - x_n)} \right] + \\
&+ f_2 \left[\frac{1}{(x_2 - x_0) \dots (x_2 - x_{n-1})(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_n)(x_0 - x_n)} \right] + \dots + \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&+ f_{n-1} \left[\frac{1}{(x_{n-1} - x_0) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_n)(x_0 - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_1)(x_n - x_{n-1}) \dots (x_n - x_0)} \\
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\
&+ \frac{f_1}{(x_1 - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \left[\frac{1}{(x_1 - x_0)(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_1 - x_n)(x_1 - x_n)} \right] \\
&+ \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_{n-1})} \left[\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_2 - x_n)(x_0 - x_n)} \right] + \dots \\
&+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})} \left[\frac{1}{(x_{n-1} - x_0)(x_0 - x_n)} - \frac{1}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_0)} \right] \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \\
&+ \frac{f_1}{(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_{n-1})} \left[\frac{\cancel{x_1} - x_n - \cancel{x_1} + x_0}{(x_1 - x_0)(x_0 - x_n)(x_1 - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_2}{(x_2 - x_1) \dots (x_2 - x_{n-1})} \left[\frac{\cancel{x_2} - x_n - \cancel{x_2} + x_0}{(x_2 - x_0)(x_0 - x_n)(x_2 - x_n)} \right] + \dots + \\
&+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1}) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})} \left[\frac{\cancel{x_{n-1}} - x_n - \cancel{x_{n-1}} + x_0}{(x_{n-1} - x_0)(x_0 - x_{n-1})(x_{n-1} - x_n)} \right] + \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \\
&= \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} + \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} + \dots + \\
&+ \frac{f_{n-1}}{(x_{n-1} - x_0)(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)} + \\
&+ \frac{f_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \\
&= f[x_0, x_1, \dots, x_n]
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.3.2 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $f \in C^n[a, b]$ olsun. Farklı

$x_0, x_1, \dots, x_n$ noktaları için $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ olmak üzere (a, b) aralığında $f^{(n+1)}$ var olsun. Bu durumda;

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \quad (3.23)$$

olacak şekilde x 'e bağlı bir $\zeta_x \in (a, b)$ vardır (Phillips, 2003).

İspat: Genelleştirilmiş Rolle teoremini kullanarak ispatı yapabiliriz.

$\alpha \in [a, b]$ ve $\alpha \neq x_0, x_1, \dots, x_n$ olmak üzere,

$$G(x) = f(x) - p_n(x) - \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)} \cdot (f(\alpha) - p_n(\alpha)) \quad (3.24)$$

G fonksiyonunun α ve $n+1$ tane x_j interpolasyon noktasında $n+2$ tane kökü vardır.

$$0 \leq j \leq n \quad \text{için} \quad G(j) = 0$$

$$x = \alpha \quad \text{için} \quad G(\alpha) = f(\alpha) - p_n(\alpha) - f(\alpha) + p_n(\alpha) = 0$$

Genelleştirilmiş Rolle teoreminden $G^{(n+1)}(\zeta_\alpha) = 0$ olacak şekilde $x = \zeta_\alpha$ gibi bir köke sahiptir. Böylece denklem (3.24)'ün $(n+1)$. mertebeden türevini alıp $x = \zeta_\alpha$ yazarsak

$$G^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)! (f(\alpha) - p_n(\alpha))}{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)}$$

$$G^{(n+1)}(\zeta_\alpha) = f^{(n+1)}(\zeta_\alpha) - \frac{(n+1)! (f(\alpha) - p_n(\alpha))}{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)} = 0$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için,

$$f(\alpha) - p_n(\alpha) = f^{(n+1)}(\zeta_\alpha) \frac{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) \dots (\alpha - x_n)}{(n+1)!} \text{ yazılabilir.}$$

Son olarak α yerine x yazarsak,

$$f(x) - p_n(x) = f^{(n+1)}(\zeta_x) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n+1)!}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

İnterpolasyon için bulduğumuz hata sınırlı kullanıma sahiptir. Çünkü bu hata f 'nin $(n+1)$. mertebeden türevinin hesaplanmasını gerektirmektedir ve genel olarak ζ_x 'in değeri bilinmiyor.

Şimdi sadece yüksek mertebeden türeve sahip olan fonksiyonlara değil tüm fonksiyonlara uygulanabilir alternatif bir hata terimi elde etmeliyiz. Bu hata terimi $(n+1)$. mertebeden türev yerine bölünmüş fark içermektedir.

$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$ bölünmüş farkını,

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \dots, x_n]}{x - x_n}$$

$$f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + (x - x_n) \cdot f[x, x_0, \dots, x_n] \quad (3.25)$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer olarak,

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x, x_0] \quad (3.26)$$

yazılabilir. Yine $n = 1$ için,

$$f[x, x_0] = f[x_0, x_1] + (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$$

elde edilir. Bu ifadeyi denklem (3.23)'de yazalım.

$$f[x] = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1] \quad (3.27)$$

Denklem (3.27), $p_1(x)$ polinomu f fonksiyonu için x_0, x_1 noktalarına dayandırılmış interpolasyon polinomu olmak üzere;

$$f(x) = p_1(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x, x_0, x_1]$$

şeklinde yazılabilir. Genel olarak,

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f[x, x_0, \dots, x_n] \quad (3.28)$$

elde edilir.

$\forall x \in [a, b]$ ve $(0 \leq j \leq n)$, $x_j \in [a, b]$ için Teorem (3.3.2)'nin koşulları sağlandığından,

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!}$$

olacak şekilde x 'e bağlı bir $\zeta_x \in (a, b)$ vardır. Denklem (3.28)'den

$$f(x) = p_n(x) + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f[x, x_0, \dots, x_n] \text{ olduğundan denklem (3.28)}$$

ve (3.25)'i eşitlersek,

$$f[x, x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(\zeta_x)}{(n+1)!} \text{ olacaktır.}$$

n yerine $(n-1)$ yazarsak ve $x = x_n$ için,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \quad ; \quad \zeta \in (x_0, x_n) \quad (3.29)$$

elde edilmiş olur. Ayrıca $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$\lim_{x_i \rightarrow x} f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \text{ dir (Davis, 1975).}$$

Örnek 3.3.1

Veri tablosu 3.4

x	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2
$f(x)$	0,7651977	0,6200860	0,4554022	0,281816	0,1103623

Verilere uygun Newton bölünmüş fark interpolasyon polinomunu kullanarak, $f(1,5)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm: Newton bölünmüş farklar tablosunu yapalım.

Örnek 3.3.1'e ait Newton bölünmüş farklar tablosu

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \dots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \dots, x_i]$
0	1,0	0,7651977	-0,4837057	-0,1087339	0,0658784	0,0018251
1	1,3	0,6200860	-0,5489460	-0,0494433	0,0680685	
2	1,6	0,4554022	-0,5786120	0,0118183		
3	1,9	0,2818186	-0,5715210			
4	2,2	0,1103623				

şeklinde elde edilir. Buna göre dördüncü dereceden Newton interpolasyon polinomu;

$$P_4(x) = 0,7651977 - 0,4837057 \cdot (x-1) - 0,1087339(x-1)(x-1,3) + 0,0658784(x-1)(x-1,3)(x-1,6) + 0,0018251(x-1)(x-1,3)(x-1,6) \cdot (x-1,9)$$

olarak elde edilir.

Buradan, $f(1,5) \approx P_4(1,5) = 0,5118200$ olarak bulunur.

3.3.1 İleri Farklar

Tablo 3.1'deki bölünmüş farklar tekrarlı olarak,

$$\frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k+1}] - f[x_i, \dots, x_{i+k}]}{x_{i+k+1} - x_i} \text{ bölümü ile hesaplanır.}$$

Bu şekilde istediğimiz mertebeden bölünmüş fark elde edilir. Eğer $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktaları arasındaki fark eşit ise, denklem (3.18) daha basit bir şekilde yazılabilir.

Her $i = 0, 1, \dots, n-1$ için $h = x_{i+1} - x_i$ ve $x = x_0 + sh$ olsun. Bu durumda $x - x_i$ farkı $x - x_i = (s-i)h$ olur. Böylece denklem (3.18),

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) = f[x_0] + s.h.f[x_0, x_1] + s.(s-1)h^2.f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ &\quad + s.(s-1) \dots (s-n+1).h^n.f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \sum_{k=0}^n s(s-1) \dots (s-k+1)h^k.f[x_0, x_1, \dots, x_k] \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1) \dots (s-k+1)}{k!} \quad (3.30)$$

binom katsayıları kullanılarak,

$$P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad (3.31)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Bu formüle *Newton ileri bölünmüş fark formülü* denir (Bayram, 2002).

Tanım 3.3.1 $h \neq 0$ ve $x_i = x_0 + ih$ için $\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$ olmak üzere $(k+1)$. mertebeden ileri farklar,

$$\Delta^{k+1} f(x_i) = \Delta(\Delta^k f(x_i)) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i) \text{ olarak tanımlanır. Denklem (3.20),}$$

ileri fark notasyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulur.

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1}{h} \Delta f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 f(x_0)$$

ve genel olarak,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{1}{k! h^k} \Delta^k f(x_0) \text{ olur (Phillips, 2003).}$$

Teorem 3.3.3 $j, k \geq 0$ ve $x_j = j$ için;

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k f_j \text{ dir (Phillips, 2003).}$$

İspat: İspatı k üzerinden tümevarımla yapacağız.

i. $k = 0$ için doğrudur.

$$f[x_j] = f_j = 1 \cdot \Delta^0 f_j = f_j$$

ii. $k \geq 0$ ve $j \geq 0$ için doğruluğunu kabul edelim.

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k f_j \text{ olsun.}$$

iii. $k+1$ için doğrumudur?

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \Delta^{k+1} f_j \text{ eşitliği var mıdır?}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j}$$

$$= \frac{1}{(k+1)} \cdot \left[\frac{\Delta^k f_{j+1}}{k!} - \frac{\Delta^k f_j}{k!} \right]$$

$$= \frac{1}{(k+1) \cdot k!} (\Delta^k f_{j+1} - \Delta^k f_j) = \frac{1}{(k+1)!} \cdot \Delta^{k+1} f_j \text{ olur.}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. Sonuç olarak denklem (3.28),

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k f(x_0)$$

şeklinde yazılır. Bu polinoma Newton ileri fark interpolasyon polinomu denir. İleri farkları hesaplamak için aşağıdaki gibi tablo oluşturabiliriz.

Tablo 3.2 İleri Farklar Tablosu

f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$
f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	
f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$		
f_3	Δf_3			
f_4				

Teorem 3.3.4 Tüm $j \geq 0$ için $x_j = x_0 + j \cdot h$ ise

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f(x_j) \text{ dir (Phillips, 2003).}$$

İspat: İspatı k üzerinden tümevarımla yapalım.

i. $k = 0$ için doğrudur.

$$f[x_j] = \frac{1}{0! \cdot h^0} \Delta^0 f(x_j) = 1 \cdot f(x_j) = f(x_j)$$

ii. $k \geq 0$ ve $j \geq 0$ için doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f(x_j) \text{ olsun.}$$

iii. $(k+1)$ için doğru mudur?

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] = \frac{1}{(k+1)! \cdot h^{k+1}} \Delta^{k+1} f(x_j)$$

olduğunu görmek istiyoruz.

$$\begin{aligned} f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}] &= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]}{x_{j+k+1} - x_j} \\ &= \frac{1}{x_{j+k+1} - x_j} \left(\frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f(x_{j+1}) - \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^k f(x_j) \right) \\ &= \frac{1}{(j+k+1) \cdot h} \left(\frac{1}{k! \cdot h^k} (\Delta^k f(x_{j+1}) - \Delta^k f(x_j)) \right) \\ &= \frac{1}{(k+1) \cdot h} \cdot \frac{1}{k! \cdot h^k} \Delta^{k+1} f(x_j) = \frac{1}{(k+1)! \cdot h^{k+1}} \Delta^{k+1} f(x_j) \end{aligned}$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.5 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $f \in C[a, b]$ olsun. Farklı

$x_0, x_1, \dots, x_n$ noktaları için $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ olmak üzere $\forall x \in (a, b)$ için $f^{(n)}(x)$ var olsun.

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} \text{ olacak şekilde bir } \zeta \in (x_0, x_n) \text{ vardır (Phillips, 2003).}$$

İspat: Teorem 3.1.2'den

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \text{ olduğunu biliyoruz. Teorem 3.1.4 kullanılarak,}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!h^n} \Delta^n f(x_0) \text{ yazabiliriz. Buradan,}$$

$$\frac{1}{n!h^n} \Delta^n f(x_0) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}$$

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n} = f^{(n)}(\zeta) \text{ olduğu görülür.}$$

3.3.2 Geri Farklar

Eğer interpolasyon noktaları $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ şeklinde düzenlenirse elde edilecek interpolasyon polinomu yine (3.16) denklemine benzerdir. Yani,

$$P_n(x) = f[x_n] + f[x_{n-1}, x_n](x - x_n) + f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

şeklinde dir. Bu formül $x = x_n + sh$ ve $x = x_i + (s + n - i)h$ olarak tanımlanırsa eşit aralıklı interpolasyon noktaları için,

$$P_n(x) = P_n(x_n + sh) = f[x_n] + s.h.f[x_{n-1}, x_n] + s.(s+1).h^2.f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \dots \\ + s.(s+1) \dots (s+n-1).h^n.f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

şeklinde yazılır.

Bu denklem, *Newton geri bölünmüş fark interpolasyon polinomu* olarak adlandırılır (Bayram, 2002).

Bu denklemden daha kullanışlı ve Newton geri fark formülü diye adlandırılan başka bir formül daha vardır. Bu formül Newton geri fark interpolasyon polinomu diye adlandırılır. Newton geri fark interpolasyon polinomunu elde etmek için önce geri fark notasyonunu tanımlayalım.

Tanım 3.3.2 $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi verilsin, bu durumda ∇P_n geri farkı,

$$\nabla P_n = P_n - P_{n-1}, \quad n \geq 1 \text{ olarak tanımlanır.}$$

Daha yüksek kuvvetten geri farklar,

$$\nabla^k P_n = \nabla (\nabla^{k-1} P_n), \quad k \geq 2$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki tanıma göre ,

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{h} \nabla f(x_n) \quad , \quad f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{2h^2} \nabla^2 f(x_n)$$

olur ve daha genel olarak,

$$f[x_{n-k}, \dots, x_{n-1}, x_n] = \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f(x_n) \text{ olur.}$$

Yukarıdaki notasyon kullanılarak Newton geri fark interpolasyon polinomu,

$$P_n(x) = f[x_n] + s \nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!} \nabla^2 f(x_n) + \dots + \frac{s(s+1) \dots (s+n-1)}{n!} \nabla^n f(x_n)$$

şeklinde yazılır. Şimdi binom katsayıları kullanılarak Newton geri fark interpolasyon polinomunu yazmak için, negatif tamsayıların binom katsayılarının nasıl hesaplanacağını gösterelim:

$$\binom{-s}{k} = \frac{-s(-s-1) \dots (-s-k+1)}{k!} \quad \text{veya}$$

$$\binom{-s}{k} = (-1)^k \frac{s(s+1) \dots (s+k-1)}{k!} \quad \text{olarak tanımlanır. Bu tanıma göre Newton geri fark}$$

interpolasyon polinomu,

$$P_n(x) = f(x_n) + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + (-1)^2 \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \dots + (-1)^n \binom{-s}{n} \nabla^n f(x_n)$$

olarak elde edilir. Bu polinom,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_k)$$

şeklinde daha kısa olarak yazılabilir. Bu polinoma Newton geri fark interpolasyon polinomu denir (Bayram, 2002).

Geri farkları hesaplamak içinde aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

Tablo 3.3 Geri Farklar Tablosu

f_0	∇f_0	$\nabla^2 f_0$	$\nabla^3 f_0$	$\nabla^4 f_0$
f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_1$	$\nabla^3 f_1$	
f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$		
f_3	∇f_3			
f_4				

Teorem 3.3.6 j . mertebeden bölünmüş fark

$f[x_{n-j}, x_{n-j+1}, \dots, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] = \frac{\nabla^j f(x_n)}{j! \cdot h^j}$ olarak j . mertebeden geri fark

türünden ifade edilir (Phillips, 2003).

İspat: İspatı j üzerinden tümevarımla yapalım.

i. $j = 1$ için doğrudur.

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{\nabla^1 f(x_n)}{1! \cdot h^1} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

ii. $j \geq 0$ için doğruluğunu kabul edelim. Yani,

$$f[x_{n-j}, x_{n-j+1}, \dots, x_n] = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}] = \frac{\nabla^j f(x_n)}{j! \cdot h^j} \text{ olsun.}$$

iii. $j + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j-1}] = \frac{\nabla^{j+1} f(x_n)}{(j+1)! \cdot h^{j+1}} \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\begin{aligned} f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j-1}] &= \frac{f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-j-1}] - f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-j}]}{x_{n-j-1} - x_n} \\ &= \frac{1}{x_0 + (n-j-1) \cdot h - x_0 - n \cdot h} \cdot \left[\frac{\nabla^j f(x_{n-1})}{j! \cdot h^j} - \frac{\nabla^j f(x_n)}{j! \cdot h^j} \right] \\ &= \frac{1}{-(j+1) \cdot h} \cdot \frac{1}{j! \cdot h^j} \cdot [\nabla^j f(x_{n-1}) - \nabla^j f(x_n)] \\ &= \frac{\nabla^j f(x_n) - \nabla^j f(x_{n-1})}{(j+1)! \cdot h^{j+1}} = \frac{\nabla^{j+1} f(x_n)}{(j+1)! \cdot h^{j+1}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.3.2 $f(x) = x^3$ fonksiyonuna ait bir tablodan aşağıdaki değerler okunmaktadır.

Veri tablosu 3.5

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	8	27	64	125

Verilenlere göre ileri fark tablosunu yaparak, $f(0,5)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm: İleri fark tablosunu yapalım.

Veri tablosu 3.5 ile verilen $f(x) = x^3$ fonksiyonuna ait ileri farklar tablosu

x	$f(x)$	$\Delta^1 f$	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	0	1	6	6	0	0
1	1	7	12	6	0	
2	8	19	18	6		
3	27	37	24			
4	64	61				
5	125					

şeklinde olur. Buradan,

$$P_3(s) = 0 + 1 \cdot s + 6 \cdot \frac{s(s-1)}{2} + 6 \cdot \frac{s(s-1)(s-2)}{6} = s^3 \text{ olarak bulunur.}$$

$$P_3(0,5) = (0,5)^3 = 0,125 \text{ elde edilir.}$$

3.4 Spline Polinomları ile İnterpolasyon Yöntemi

3.4.1 Lineer Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon

Veri noktalarını çeşitli aralıklara bölerek her bir aralıkta doğrusal fonksiyonlar kullanma esasına dayanan bir yöntemdir. Bu yöntem kullanım kolaylığı bakımından tercih edilmektedir (Bayram, 2002).

Her bir aralıktaki doğrusal spline polinomunu bulabilmek için iki noktadan geçen doğru denkleminden yararlanarak;

$$S_0(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) \quad ; \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$$S_1(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) \quad ; \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

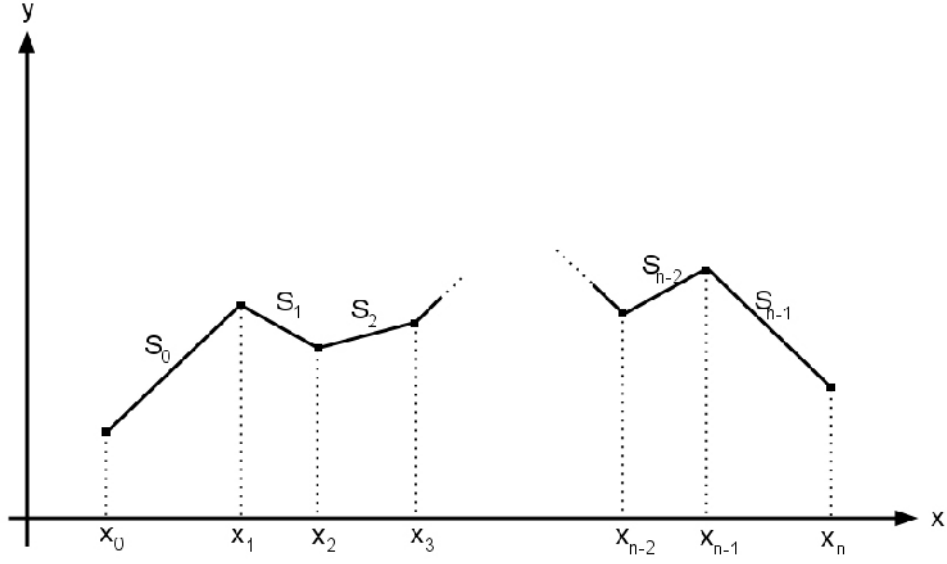
$$\dots\dots\dots ; \quad \dots\dots\dots$$

$$S_{n-1}(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) \quad ; \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

bulunur. Burada m_i ler doğruların eğimleri olup,

$m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ dir. Bu şekildeki tanımlamadan sonra $[x_0, x_n]$ aralığındaki

herhangi bir $x = x_i$ noktasında fonksiyon değeri hesaplanabilecektir (Bayram, 2002).



Şekil 3.2 Lineer Spline Fonksiyon Grafiği

Birinci dereceden (linear) bir Spline fonksiyonu;

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0x + b_0 & ; \quad x \in [t_0, t_1] \\ S_1(x) = a_1x + b_1 & ; \quad x \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1}x + b_{n-1} & ; \quad x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases} \quad (3.32)$$

biçiminde gösterilebilir.

Örnek 3.4.1 $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki tablo veriliyor.

Veri tablosu 3.6

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Verilere uygun doğrusal spline polinomunu bulalım ve $f(5)$ in yaklaşık değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$$m_0 = \frac{1-2,5}{4,5-3} = -1 \quad m_1 = \frac{2,5-1}{7-4,5} = 0,6 \quad m_2 = \frac{0,5-2,5}{9-7} = -1$$

$$S_0(x) = 2,5 - 1(x - 3) = -x + 5,5$$

$$S_1(x) = 1 + 0,6(x - 4,5) = 0,6x - 1,7$$

$$S_2(x) = 2,5 + (-1)(x - 7) = -x + 9,5$$

$$S(x) = \begin{cases} -x + 5,5 & ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \\ 0,6x - 1,7 & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7 \\ -x + 9,5 & ; \quad 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

olarak yazılır.

$$f(5) = 0,6 \cdot 5 - 1,7 = 1,3$$

olarak bulunur.

3.4.2 Kuadratik Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ şeklindeki $n+1$ tane noktaya karşılık $y_0, y_1, \dots, y_n$ değerlerinin ölçülmüş olduğunu kabul edelim. Her bir aralık için

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

şeklindeki ikinci dereceden polinom yaklaşımı göz önüne alınırsa bu denklem sisteminde yer alan $3n$ tane bilinmeyen hesaplanması gerçeği ortaya çıkar (Özdemir, 1996).

Denklem sisteminin çözümü a_i, b_i, c_i katsayılarını verecektir ki bu katsayılar yardımıyla

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & ; \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ S_{n-1}(x) & ; \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

biçiminde parçalı kuadratik spline fonksiyonu elde edilmiş olur. Spline fonksiyonun özellikleri kullanılarak;

(i) $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarında fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, (n-1)$$

(ii) $S_i(x)$ spline polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, (n-2)$$

(iii) $S_i(x)$ spline polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, (n-2)$$

(iv) Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

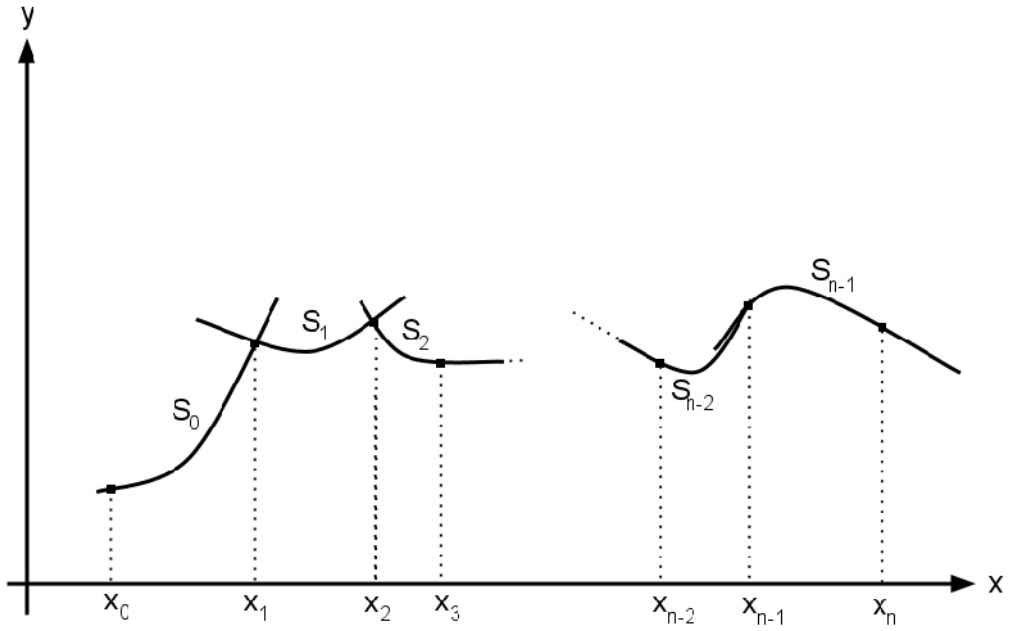
$$S_0(x_0) = y_0, \quad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

dir.

Böylece i . özellikten $(n-1)$, ii . özellikten $(n-1)$, iii . özellikten $(n-1)$ ve son olarak iv . özellikten 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 3n - 1$$

tane denklem elde edilmiş oldu. O halde bir denkleme daha ihtiyacımız olacaktır. Bu denklemi de ilk noktada ikinci türevin sıfır olduğu, yani $S_0(x)$ polinomunun bir doğru parçası olduğu koşulunu koyarak elde ederiz. Bu da $a_0 = 0$ olması ile eş değerdir. Bu şekilde elde edilen kuadratik spline fonksiyonuna *natural (doğal) kuadratik spline fonksiyonu* denir.



Şekil 3.3 Kuadratik Spline Fonksiyon Grafiği

Örnek 3.4.2 $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki tablo veriliyor.

Veri tablosu 3.7

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Veriler uygun kuadratik spline fonksiyonunu bulalım ve $f(5)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm:

(i) koşuluna göre,

$$S_1(x_1) = y_1 \Rightarrow a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + c_1 = y_1$$

$$\Rightarrow a_1 (4,5)^2 + b_1 4,5 + c_1 = 1,0$$

$$\Rightarrow 20,25a_1 + 4,5b_1 + c_1 = 1,0$$

$$S_2(x_2) = y_2 \Rightarrow a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2 = y_2$$

$$\Rightarrow a_2 7^2 + b_2 7 + c_2 = 2,5$$

$$\Rightarrow 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 2,5$$

bağıntıları elde edilir. Şimdi (ii) koşulunu uygularsak;

$$S_0(x_1) = S_1(x_1) \Rightarrow a_0 x_1^2 + b_0 x_1 + c_0 = a_1 x_1^2 + b_1 + c_1 = 1,0$$

$$S_1(x_2) = S_2(x_2) \Rightarrow a_1 x_2^2 + b_1 x_2 + c_1 = a_2 x_2^2 + b_2 x_2 + c_2 = 2,5$$

elde edilir.

(iii) koşulundan,

$$S'_0(x_1) = S'_1(x_1) \Rightarrow 2a_0 x_1 + b_0 = 2a_1 x_1 + b_1$$

$$\Rightarrow 2a_1 4,5 + b_1 = 2a_2 4,5 + b_2$$

$$\Rightarrow 9a_1 + b_1 = 9a_2 + b_2$$

$$S'_1(x_2) = S'_2(x_2) \Rightarrow 2a_1 x_2 + b_1 = 2a_2 x_2 + b_2$$

$$\Rightarrow 2a_1(7) + b_1 = 2a_2(7) + b_2$$

$$\Rightarrow 14a_1 + b_1 = 14a_2 + b_2$$

elde edilir.

(iv) koşulundan,

$$S_0(x_0) = y_0 \Rightarrow a_0 x_0^2 + b_0 x_0 + c_0 = y_0$$

$$\Rightarrow a_0(3)^2 + b_0 3 + c_0 = 2,5$$

$$S_2(x_3) = y_3 \Rightarrow a_2 x_3^2 + b_2 x_3 + c_3 = y_3$$

$$\Rightarrow a_2(9)^2 + b_2(9) + c_3 = 0,5$$

Son olarak da

$a_0 = 0$ alınmasıyla,

$$\begin{bmatrix} 4,5 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 20,25 & 4,5 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 49,0 & 7,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 49,0 & 7,0 & 1,0 \\ 3,0 & 1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 81,0 & 9,0 & 1,0 \\ 1,0 & 0,0 & -9,0 & -1,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 14,0 & 1,0 & 0,0 & -14,0 & -1,0 & 0,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ c_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$$

sistemi elde edilir.

Bu sistemin çözülmesi ile,

$$\begin{array}{lll} a_0 = 0,0 & b_0 = 1,0 & c_0 = 5,5 \\ a_1 = 0,64 & b_1 = -6,76 & c_1 = 18,46 \\ a_2 = -1,6 & b_2 = 24,6 & c_2 = -91,3 \end{array}$$

bulunur. Böylece sonuç olarak,

$$S(x) = \begin{cases} -x + 5,5 & ; \quad 3,0 \leq x \leq 4,5 \\ 0,64x^2 - 6,76x + 18,46 & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7,0 \\ -1,6x^2 + 24,6x - 91,3 & ; \quad 7,0 \leq x \leq 9,0 \end{cases}$$

elde edilir.

$$f(5) = 0,64 \cdot 5^2 - 6,76 \cdot 5 + 18,46 = 0,66$$

3.4.3 Kübik Spline Fonksiyonu ile İnterpolasyon Yöntemi

$a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b$ şeklinde sıralanmış apsislere karşılık $n+1$ nokta için $y_0, y_1, \dots, y_n$ değerleri ölçülmüş olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan n tane $S_i(x)$ üçüncü dereceden polinom varsa $S(x)$ 'e kübik spline fonksiyonu denir. Burada her aralık için üçüncü dereceden,

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

şeklinde polinomlar kullanılarak yaklaşımlar yapılacaktır.

$i = 0, 1, \dots, n-1$ olmak üzere $(n+1)$ tane nokta için n tane aralık mevcut olduğundan $4n$ tane bilinmeyen bulunması için $4n$ tane denkleme gerek vardır. Kübik spline fonksiyonunun özelliklerini kullanarak a_i, b_i, c_i, d_i katsayılarını bulabiliriz.

(i) $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarında fonksiyon ile aynı değeri almalıdır. Yani,

$$S_i(x_i) = y_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, (n-1)$$

(ii) $S_i(x)$ polinomları iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, (n-2)$$

(iii) $S_i(x)$ polinomlarının birinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-2$$

(iv) $S_i(x)$ polinomlarının ikinci mertebeden türevleri iç düğüm noktalarında sürekli olmalıdır. Yani,

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, (n-2)$$

(v) Baştaki ve sondaki spline polinomları uç noktalardan geçmelidir. Yani,

$$S_0(x_0) = y_0 \quad , \quad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

Böylece i . özellikten $(n-1)$, ii . özellikten $(n-1)$, iii . özellikten $(n-1)$, iv . özellikten $(n-1)$ ve son olarak v . özellikten 2 tane olmak üzere toplamda,

$$(n-1) + (n-1) + (n-1) + (n-1) + 2 = 4n - 2$$

tane denklem elde edilmiş olur. O halde 2 denkleme daha ihtiyacımız olacaktır.

(vi) Uç noktalarda ikinci mertebeden türev sıfır olmalıdır. Yani,

$$S''_0(x_0) = 0 \quad , \quad S''_{n-1}(x_n) = 0$$

dır. Bu koşulu sağlayan kübik spline fonksiyonlara *natural (doğal) kübik spline* denir (Ralston, Rabinowitz, 2001).

Bunların dışında,

$$S'(x_0) = y_0$$

$$S'_{n-1}(x_n) = y_n$$

koşulunu gerçekleyen kübik spline ‘‘Clamped Spline’’;

$$S(x_0) = S(x_n)$$

$$S'(x_0) = S'(x_n)$$

koşulunu gerçekleyen kübik spline ‘‘Periyodik Kübik Spline’’;

$$S''(x_0) = f''(x_0)$$

koşulunu gerçekleyen kübik spline ‘‘Complete Kübik Spline’’ fonksiyonları elde edilir.

Şimdi iki ayrı yaklaşım ile kübik spline fonksiyonlarının nasıl elde edileceklerini görelim;

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ noktalarında

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanan $S_i(x)$ fonksiyonları (x_i, y_i) ve (x_{i+1}, y_{i+1}) noktalarından geçeceğinden $x = x_i$ alınız;

$S_i(x_i) = a_i$ olur. Diğer taraftan (ii) koşulunu kullandığımızda;

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = a_{i+1} = S_i(x_{i+1})$$

$$a_{i+1} = a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 \text{ olarak elde edilen denklemde}$$

$x_{i+1} - x_i = h_i$ ifadesi yerine yazıldığında;

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.34)$$

bulunur. Denklem (3.33)'ün birinci mertebeden türevi alındığında;

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \text{ şeklinde oluşan denklemde } x = x_i \text{ koyarak;}$$

$$S'_i(x_i) = b_i \text{ bulunur.}$$

(iii) koşulu kullanıldığında;

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = b_{i+1} = S'_i(x_{i+1})$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) + 3d_i(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad (3.35)$$

bulunur. Diğer taraftan denklem (3.33)'ün ikinci türevi alındığında;

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \text{ elde edilir. Burada } x = x_i \text{ koyarsak;}$$

$$S''_i(x_i) = 2c_i \Rightarrow c_i = \frac{S''_i(x_i)}{2} \text{ bulunur.}$$

(iv) koşulundan;

$$\frac{S''_{i+1}(x_{i+1})}{2} = c_{i+1} = \frac{S''_i(x_{i+1})}{2}$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i(x_{i+1} - x_i)$$

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad (3.36)$$

Denklem (3.33) , (3.35) , (3.36) kullanıldığında;

$$\begin{aligned} c_{i+1} &= c_i + 3d_i h_i \\ c_i &= c_{i+1} - 3d_i h_i \end{aligned} \quad (3.37)$$

buluruz ki bu eşitlik denklem (3.34)'de yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \\ a_{i+1} &= a_i + b_i h_i + (c_{i+1} - 3d_i h_i) h_i^2 + d_i h_i^3 \\ a_{i+1} &= a_i + b_i h_i + c_{i+1} h_i^2 - 2d_i h_i^3 \\ a_{i+1} &= a_i + b_i h_i - (2d_i h_i^3 - c_{i+1} h_i^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

elde edilir. Denklem (3.34)'den elde edilen

$d_i h_i^3 = a_{i+1} - a_i - b_i h_i - c_i h_i^2$ ifadesi (3.38) denkleminde yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= a_i + b_i h_i - (2a_{i+1} - 2a_i - 2b_i h_i - 2c_i h_i^2 - c_{i+1} h_i^2) \\ a_{i+1} &= a_i + b_i h_i - 2a_{i+1} + 2a_i + 2b_i h_i + 2c_i h_i^2 + c_{i+1} h_i^2 \\ a_{i+1} + 2a_{i+1} &= 3a_i + 3b_i h_i + 2c_i h_i^2 + c_{i+1} h_i^2 \\ \frac{3a_{i+1}}{3} &= \frac{3a_i + 3b_i h_i + h_i^2 (2c_i + c_{i+1})}{3} \\ a_{i+1} &= a_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3} (2c_i + c_{i+1}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

bulunur.

Denklem (3.37)'deki ifade (3.35) denkleminde yazıldığında;

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= b_i + 2c_{i+1} h_i - 6d_i h_i^2 + 3d_i h_i^2 \\ b_{i+1} &= b_i + 2c_{i+1} h_i - 3d_i h_i^2 \\ 3d_i h_i^2 &= -b_{i+1} + b_i + 2c_{i+1} h_i \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir.

Denklem (3.35)'de son ifadeyi yerine koyduğumuzda;

$$\begin{aligned} b_{i+1} &= b_i + 2c_{i+1} h_i - b_{i+1} + b_i + 2c_i h_i \\ 2b_{i+1} &= 2b_i + 2h_i (c_{i+1} + c_i) \end{aligned}$$

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_{i+1} + c_i) \quad (3.41)$$

bulunur. Denklem (3.39)'da b_i yi çaktığımızda;

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (3.42)$$

elde edilir. Bu denklemde i yerine $i-1$ alındığında;

$$b_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \quad (3.43)$$

olacaktır.

Denklem (3.41)'de i yerine $i-1$ yazarsak;

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

elde edilir.

Son denklemde b_i yerine denklem (3.42), b_{i-1} yerine denklem (3.43) yazıldığında;

$$\frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) = \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$$

$$\frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + h_{i-1}\left(-\frac{2}{3}c_{i-1} - \frac{1}{3}c_i + c_{i-1} + c_i\right)$$

$$\frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) = \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) + h_{i-1}\left(\frac{1}{3}c_{i-1} + \frac{2}{3}c_i\right)$$

$$\frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) = \frac{1}{3}(2c_i h_i + c_{i+1} h_i + c_{i-1} h_{i-1} + 2c_i h_{i-1})$$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2c_i(h_i + h_{i-1}) + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$$

ifadesi elde edilir.

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad c_i = \frac{S''(x_i)}{2}, \quad a_i = S(x_i)$$

$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad c_{i-1} = \frac{S''(x_{i-1})}{2}, \quad a_{i-1} = S(x_{i-1})$$

$$c_{i+1} = \frac{S''(x_{i+1})}{2}, \quad a_{i+1} = S(x_{i+1})$$

eşitlikleri kullanılarak ikinci mertebeden türeve indirgendiğinde;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1})S''(x_{i-1}) + \frac{2}{2}S''(x_i)(x_{i+1} - x_{i-1}) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)S''(x_{i+1}) \\ & \frac{3}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] - \frac{3}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_i) - S(x_{i-1})] \\ & S''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)S''(x_{i+1}) = \\ & \frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] - \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_i) - S(x_{i-1})] \end{aligned} \quad (3.44)$$

eşitliği elde edilir (Doğan, 2008).

Bu denklemi “Lagrange İnterpolasyon polinomunu” kullanarak da elde edebiliriz. Herhangi bir $[x_i, x_{i+1}]$ aralığında $S_i(x)$ fonksiyonu üçüncü dereceden olduğundan ikinci türevinin doğrusallığından Lagrange İnterpolasyon polinomuna göre;

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + S''_i(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} m_i &= S''_i(x_i) & m_{i+1} &= S''_i(x_{i+1}) \\ m_{i-1} &= S''_i(x_{i-1}) & h_i &= x_{i+1} - x_i \end{aligned} \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Bu ifadeler denklemde yerine yazılırsa;

$$S''_i(x) = \frac{m_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{m_{i+1}}{h_i}(x - x_i)$$

elde edilir. Bu ifadenin iki kez integrali alınarak c_i ve d_i katsayıları integrasyon sabitleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x) \\ S_i(x) &= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + c_i(x_{i+1} - x) + d_i(x - x_i) \end{aligned} \quad (3.45)$$

bulunur. $S(x)$ ' in sürekli yapılması ve interpolasyon koşullarının sağlanması için

$y_i = S_i(x_i)$ ve $y_{i+1} = S_i(x_{i+1})$ ifadeleri (3.45) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + c_i(x_{i+1} - x_i) \\ y_i &= \frac{m_i}{6}h_i^2 + c_i h_i \end{aligned} \quad (3.46)$$

bulunur.

Denklem (3.45)'de x yerine x_{i+1} alındığında

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x_{i+1} - x_i)^3 + d_i(x_{i+1} - x_i) \\ y_{i+1} &= \frac{m_{i+1}}{6}h_i^2 + d_i h_i \end{aligned} \quad (3.47)$$

elde edilir.

Denklem (3.46) ve (3.47)'de c_i ve d_i ler çekilip denklem (3.45)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{m_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i}{6}h_i \right)(x_{i+1} - x) \\ &+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1}}{6}h_i \right)(x - x_i) \end{aligned} \quad (3.48)$$

olur. Bu denklemi düzenlediğimizde;

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{S_i''(x_i)}{6(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S_i''(x_{i+1})}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 \\ &\left[\frac{S_i(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S_i''(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{6} \right](x_{i+1} - x) + \\ &\left[\frac{S_i(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S_i''(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{6} \right](x - x_i) \end{aligned} \quad (3.49)$$

sonucuna varılır. Denklem(3.48)'in türevi;

$$S_i'(x) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{m_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{m_i h_i}{6} \right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} \right) \quad (3.50)$$

olup kübik spline olma koşullarının sağlanması için son koşul $[a, b]$ nin iç noktalarında $S'_i(x)$ 'i sürekli yapmaktır. Denklem (3.50)'de,

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

bağıntısını sağlayacak biçimde seçilen m_i , değerleri ile $S'_i(x)$ sürekli yapılabilir.

Böylece $n+1$ tane bilinmeyenli $n-1$ denklem sistemi elde edilir. Denklem (3.50)'de x yerine x_i yazıldığında;

$$S'_i(x_i) = -\frac{m_i}{2h_i}(x_{i+1} - x_i)^2 - \frac{y_i}{h_i} + \frac{m_i h_i}{6} + \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{m_{i+1} h_i}{6}$$

$$S'_i(x_i) = -\frac{m_i h_i^2}{2h_i} + \frac{m_i h_i}{6} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$$

ifadesinde $\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = p_k$ dersek,

$$S'_i(x_i) = -\frac{m_i}{3} h_i - \frac{m_{i+1} h_i}{6} + p_k \quad (3.51)$$

(3.50) denkleminde i yerine $i-1$, x yerine x_i konulduğunda;

$$S'_{i-1}(x_i) = \frac{m_i}{3} h_{i-1} - \frac{m_{i-1}}{6} h_{i-1} + p_{k-1} \quad (3.52)$$

bulunur ve

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.53)$$

eşitliğinden denklem (3.51) ve (3.52)'nin birbirine eşit olduğu görülür. Buradan,

$$-\frac{m_i h_i}{3} - \frac{m_{i+1} h_i}{6} + p_k = \frac{m_i h_{i-1}}{3} - \frac{m_{i-1} h_{i-1}}{6} + p_{k-1}$$

$$-2m_i h_i - m_{i+1} h_i - 2m_i h_{i-1} + m_{i-1} h_{i-1} = 6(p_k - p_{k-1})$$

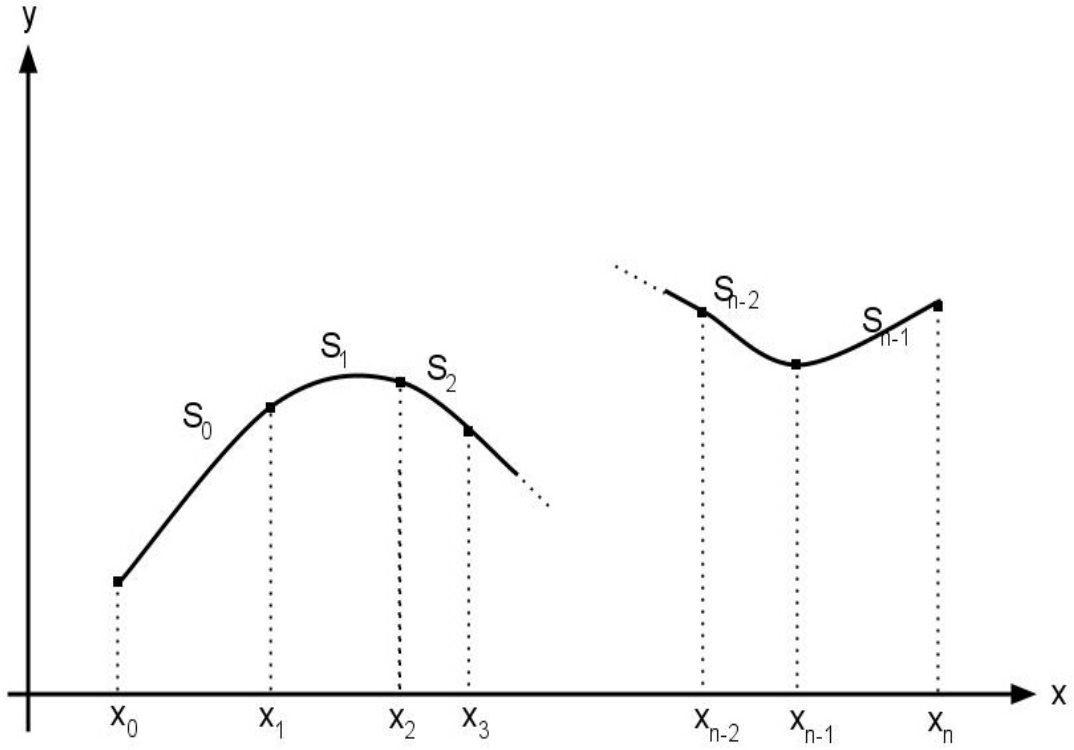
$$h_{i-1} m_{i-1} + 2m_i (h_{i-1} + h_i) + h_i m_{i+1} = 6 \left[\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right) - \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \right) \right]$$

$$(x_i - x_{i-1}) S''_i(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) S''_i(x_i) + (x_{i+1} - x_i) S''_i(x_{i+1}) =$$

$$\frac{6}{(x_{i+1} - x_i)} [S_i(x_{i+1}) - S_i(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})} [S_i(x_{i-1}) - S_i(x_i)] \quad (3.54)$$

elde edilir (Albasiny, Hoskins, 1969; Koçak, 2001).

Denklem (3.44) ve (3.54)'den eşitliklerin aynı olduğu görülmektedir.



Şekil 3.4 Kübik Spline Fonksiyon Grafiği

Örnek 3.4.3 $y = f(x)$ fonksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki tablo veriliyor.

Veri tablosu 3.8

x	3,0	4,5	7,0	9,0
$f(x)$	2,5	1,0	2,5	0,5

Veriler uygun kübik spline fonksiyonunu bulalım ve $f(5)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayalım.

Çözüm: Denklem (3.54)'de $i = 1$ alalım;

$$(x_1 - x_0)S''(x_0) + 2(x_2 - x_0)S''(x_1) + (x_2 - x_1)S''(x_2) =$$

$$\frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_2) - S(x_1)] + \frac{6}{(x_1 - x_0)}[S(x_0) - S(x_1)]$$

$$(4,5 - 3,0)S''(3,0) + 2(7,0 - 3,0)S''(4,5) + (7,0 - 4,5)S''(7,0) =$$

$$\frac{6}{(7,0-4,5)}(2,5-1) + \frac{6}{(4,5-3,0)}(2,5-1)$$

Doğal spline koşuluna göre $S''(3,0) = 0$ yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$8S''(4,5) + 2,5S''(7,0) = 9,6$$

Denklem (3.54)'de $i = 2$ alalım;

$$(x_2 - x_1)S''(x_1) + 2(x_3 - x_1)S''(x_2) + (x_3 - x_2)S''(x_3) =$$

$$\frac{6}{(x_3 - x_2)}[S(x_3) - S(x_2)] + \frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_1) - S(x_2)]$$

$$(7,0 - 4,5)S''(4,5) + 2(9,0 - 4,5)S''(7,0) + (9,0 - 7,0)S''(9,0) =$$

$$\frac{6}{(9,0 - 7,0)}(0,5 - 2,5) + \frac{6}{(7,0 - 4,5)}(1 - 2,5)$$

Doğal spline koşuluna göre $S''(9,0) = 0$ yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$2,5S''(4,5) + 9,0S''(7,0) = -9,6$$

bulunur. Böylece elde edilen,

$$8S''(4,5) + 2,5S''(7,0) = 9,6$$

$$2,5S''(4,5) + 9,0S''(7,0) = -9,6$$

sistemi çözülerek,

$$S''(4,5) = 1,6791$$

$$S''(7,0) = -1,5331$$

bulunur. Denklem(3.49)'den,

$$S_1(x) = \frac{S''(4,5)}{6(4,5-3,0)}(x-3,0)^3 + \frac{2,5}{(4,5-3,0)}(4,5-x) + \left[\frac{1}{(4,5-3,0)} - \frac{S''(4,5)(4,5-3,0)}{6} \right](x-3)$$

elde edilir. Buradan,

$$S = \begin{cases} 0,19(x-3)^3 + 1,66(4,5-x) + 0,25(x-3) & ; \quad 3 \leq x \leq 4,5 \\ 0,112(7-x)^3 - 0,102(x-4,5)^3 - 0,30(7-x) + 1,64(x-4,5) & ; \quad 4,5 \leq x \leq 7 \\ 0,128(9-x)^3 - 1,76(9-x) + 0,25(x-7) & ; \quad 7 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan $f(5)$ 'in yaklaşık değerini,

$$f(5) = 0,112 \cdot (7-5)^3 - 0,102 \cdot (5-4,5)^3 - 0,3 \cdot (7-5) + 1,64 \cdot (5-4,5)$$

$$f(5) = 1,10325$$

olarak buluruz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Örnek Problemler ve Tablolar ile Karşılaştırmalar

Örnek 4.1.1

Veri tablosu 4.1

x_i	0	0,3	0,8	1,5
y_i	1	1,349858	2,225540	4,481689

Tabloda $f(x) = e^x$ fonksiyonunun belli noktalardaki değerleri verilmiştir. Buna göre uygun Lagrange interpolasyon polinomunu belirleyelim ve fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler ile karşılaştıralım.

Çözüm:

$$L_0(x) = \frac{(x-0,3)(x-0,8)(x-1,5)}{(0-0,3)(0-0,8)(0-1,5)} = -2,77778 \cdot (-0,36 + 1,89x - 2,6x^2 + x^3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-0,8)(x-1,5)}{(0,3-0)(0,3-0,8)(0,3-1,5)} = 5,55556 \cdot (0 + 1,2x - 2,3x^2 + x^3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0,3)(x-1,5)}{(0,8-0)(0,8-0,3)(0,8-1,5)} = 3,571428 \cdot (0 + 0,45x - 1,8x^2 + x^3)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-0,3)(x-0,8)}{(1,5-0)(1,5-0,3)(1,5-0,8)} = 0,793651 \cdot (0 + 0,24x - 1,1x^2 + x^3)$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^3 f(x_i) \cdot L_i(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \{-2,77778 \cdot (-0,36 + 1,89x - 2,6x^2 + x^3)\} \\
 &\quad + 1,349858 \cdot \{5,55556 \cdot (0 + 1,2x - 2,3x^2 + x^3)\} \\
 &\quad + 2,22554 \cdot \{3,571428 \cdot (0 + 0,45x - 1,8x^2 + x^3)\} \\
 &\quad + 4,481689 \cdot \{0,793651 \cdot (0 + 0,24x - 1,1x^2 + x^3)\}
 \end{aligned}$$

$$P(x) = 0,329973x^3 + 0,368483x^2 + 1,025951x + 1$$

Tablo 4.1 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile Lagrange polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma

x	$P(x)$	$f(x)$	Fark
0,1	1,106608	1,105171	0,001437
0,2	1,222568	1,221403	0,001165
0,5	1,646341	1,648721	0,002380
1,0	2,724407	2,718282	0,006125

Örnek 4.1.2 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun belli noktalardaki değerleri veri tablosu 4.1’de verilmiştir. Buna göre uygun En Küçük Kareler doğrusunu belirleyelim ve fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler ile karşılaştıralım.

Çözüm:

Dört nokta verildiğine göre $n + 1 = 4 \Rightarrow n = 3$ dür.

$$\sum_{i=0}^3 x_i = 0 + 0,3 + 0,8 + 1,5 = 2,6$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 = 0^2 + (0,3)^2 + (0,8)^2 + (1,5)^2 = 2,98$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i y_i = 0 + 0,3 \cdot 1,349858 + 0,8 \cdot 2,225540 + 1,5 \cdot 4,481689 = 8,907922$$

$$\sum_{i=0}^3 y_i = 1 + 1,349858 + 2,225540 + 4,481689 = 9,057087$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 9,057087 & 2,6 \\ 8,907922 & 2,98 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2,6 \\ 2,6 & 2,98 \end{vmatrix}} = 0,742155 \quad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 9,057087 \\ 2,6 & 8,907922 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2,6 \\ 2,6 & 2,98 \end{vmatrix}} = 2,341717$$

Bu katsayıları $P(x) = a_1 x + a_0$ eşitliğinde yazarsak,

$P(x) = 2,341717x + 0,742155$ şeklinde En Küçük Kareler doğrusu bulunur.

Tablo 4.2 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile E.K.K. doğrusunda aldığı değerleri karşılaştırma

x	$P(x)$	$f(x)$	Fark
0,1	0,976326	1,105171	0,128845
0,2	1,210498	1,221403	0,010905
0,5	1,913014	1,648721	0,264293
1,0	3,083872	2,718282	0,36559

Örnek 4.1.3 $f(x) = e^x$ fonksiyonu ile ilgili olarak aşağıdaki tabloda verilen değerleri kullanarak verilen fonksiyona yakınsayan birinci dereceden Newton polinomunu bulalım ve hatayı inceleyelim.

Veri tablosu 4.2

x_i	$f(x_i)$
0,0	1,0
0,5	1,648721

Çözüm: İlk olarak bölünmüş farklar tablosunu yapalım.

Veri tablosu 4.2 ile verilen $f(x) = e^x$ fonksiyonuna ait bölünmüş farklar tablosu

x_i	$f(x_i)$	Δf_i
0,0	1,0	1,297442
0,5	1,648721	

Tablomuza göre $a_1 = 1,297442$ olarak elde edilmiştir. O halde $0,0 < x < 0,5$ aralığında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsayan Newton polinomu:

$$N_1(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) = 1,0 + 1,297442(x - 0,0) = 1,0 + 1,297442x$$

olarak elde edilir.

Şimdi $0,0 < x < 0,5$ aralığında $f(x) = e^x$ fonksiyonunu ve yakınsayan birinci mertebeden Newton Polinomunu aynı tabloda gösterelim ve hatamızın gelişimini izleyelim:

Tablo 4.3 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile birinci dereceden Newton polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma

x	e^x	$N_1(x)$	Fark
0	1	1	0
0,05	1,051271	1,064872	0,013601
0,1	1,105171	1,129744	0,024573
0,15	1,161834	1,194616	0,032782
0,2	1,221403	1,259488	0,038085
0,25	1,284025	1,324360	0,040332
0,3	1,349859	1,389232	0,039373
0,35	1,419068	1,454104	0,0335036
0,4	1,491825	1,518976	0,027151
0,45	1,568312	1,583848	0,015536
0,5	1,648721271	1,648721	0,0000002

Hata tahmini için İkinci mertebeden bölünmüş farkın hesaplanması gerekir.

Yine aynı $f(x) = e^x$ fonksiyonunda aşağıdaki değerleri verilen tabloyu kullanarak fonksiyona yakınsayan Newton polinomunu bulalım.

Veri tablosu 4.3 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun aldığı bazı değerleri gösteren tablo

x_i	$f(x_i)$
0,0	1,0
0,5	1,648721
0,6	1,822118

Tablodan yararlanarak Newton Polinomunu yazmak için önce bölünmüş farklar tablosunu yapalım.

Veri tablosu 4.3 ile verilen $f(x) = e^x$ fonksiyonuna ait bölünmüş farklar tablosu

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$
0,0	1,0		
0,5	1,648721	1,297442	
0,6	1,822118	1,733970	0,727546

$$N_2(x) \cong 1,0 + 1,297442(x - 0,0) + 0,727546(x - 0,0)(x - 0,5)$$

$$N_2(x) \cong 1,0 + 0,933669x + 0,727546x^2$$

Yine $0 \leq x \leq 0.6$ aralığında $f(x) = e^x$ fonksiyonunu bulunan $N_2(x)$ değerlerini aynı tabloda gösterelim ve hatanın gelişimini izleyelim.

Tablo 4.4 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile ikinci dereceden Newton polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma

x	e^x	$N_2(x)$	Fark
0	1	1	0
0,05	1,051271	1,048502	0,002769
0,1	1,105171	1,100642	0,004539
0,15	1,161834	1,156420	0,005428
0,2	1,221403	1,215835	0,005585
0,25	1,284025	1,278888	0,005176
0,3	1,349859	1,345579	0,004301
0,35	1,419068	1,415908	0,003182
0,4	1,491825	1,489874	0,001973
0,45	1,568312	1,567479	0,000855
0,5	1,648721271	1,648721	0,0000002
0,55	1,733253	1,733600	0,000329
0,6	1,822119	1,822117	0,000017

Bu yaklaşımın öncekinden çok daha başarılı olduğu görülmektedir. Birinci dereceden yazılan interpolasyon hatası için ikinci dereceden bölünmüş fark kullanılır. O halde birinci dereceden yaklaşımın hatası;

$$H_1(x) \cong 0,727546(x - 0,0)(x - 0,5) \cong 0,727546x^2$$

$x = 0,25$ noktasındaki $H_1 = 0,045471$ dır. Bu noktada fonksiyonun değeri $f(0,25) = e^{0,25} = 1,284025$ ve $N_1(0,25) = 1,324360$ olarak verildiğine göre bunların farkını alırsak $H(0,25) = 0,040335$ olarak elde edilir. Görüldüğü gibi oldukça güvenilir yaklaşım elde edilmiştir,

Örnek 4.1.4

Veri tablosu 4.4

x_i	0,1	0,2	0,5	1,0
y_i	1,105171	1,221403	1,648721	2,718282

Tabloda $f(x) = e^x$ fonksiyonunun belli noktalardaki değerleri verilmiştir. Kübik spline fonksiyonunu bularak verilen değerleri gerçek değerleri ile karşılaştıralım.

Çözüm:

$$(x_i - x_{i-1})S''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})S''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)S''(x_{i+1}) =$$

$$\frac{6}{(x_{i+1} - x_i)}[S(x_{i+1}) - S(x_i)] + \frac{6}{(x_i - x_{i-1})}[S(x_{i-1}) - S(x_i)]$$

denkleminde;

$i = 1$ için,

$$(x_1 - x_0)S''(x_0) + 2(x_2 - x_0)S''(x_1) + (x_2 - x_1)S''(x_2) =$$

$$\frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_2) - S(x_1)] + \frac{6}{(x_1 - x_0)}[S(x_0) - S(x_1)]$$

$$(0,2 - 0,1)S''(0,1) + 2(0,5 - 0,1)S''(0,2) + (0,5 - 0,2)S''(0,5) =$$

$$\frac{6}{(0,5 - 0,2)}[1,648721 - 1,221403] + \frac{6}{(0,2 - 0,1)}[1,105171 - 1,221403]$$

Doğal spline koşuluna göre, $S''(0,1) = 0$ yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$0,8S''(0,2) + 0,3S''(0,5) = 1,57244 \text{ elde edilir.}$$

$i = 2$ için,

$$(x_2 - x_1).S''(x_1) + 2.(x_3 - x_2).S''(x_2) + (x_3 - x_2).S''(x_3) =$$

$$\frac{6}{(x_3 - x_2)}[S(x_3) - S(x_2)] + \frac{6}{(x_2 - x_1)}[S(x_1) - S(x_2)]$$

$$\frac{6}{(1 - 0,5)}[2,718282 - 1,648721] + \frac{6}{(0,5 - 0,2)}[1,221403 - 1,648721] \text{ elde edilir.}$$

Doğal spline koşuluna göre, $S''(1) = 0$ yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$0,3S''(0,2) + 0,6S''(0,5) = 4,288372 \text{ bulunur.}$$

Elde ettiğimiz,

$$0,8S''(0,2) + 0,3S''(0,5) = 1,57244$$

$$0,3S''(0,2) + 0,6S''(0,5) = 4,288372$$

sistem çözülerek,

$$S''(0,2) = -0,879609$$

$$S''(0,5) = 7,587091$$

bulunur.

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6(x_{i+1} - x_i)}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^3 +$$

$$\left[\frac{S_i(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S''_i(x_i)(x_{i+1} - x_i)}{6} \right](x_{i+1} - x) +$$

$$\left[\frac{S_i(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)} - \frac{S''_i(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{6} \right](x - x_i)$$

denklemden;

$$S_1(x) = \frac{S''(0,2)}{6(0,2 - 0,1)}(x - 0,1)^3 + \frac{S''(0,5)}{6(0,2 - 0,1)}(0,2 - x) +$$

$$\left[\frac{S(0,2)}{(0,2 - 0,1)} - \frac{S''(0,2)(0,2 - 0,1)}{6} \right](x - 0,1)$$

$$S_1(x) = -1,466015(x - 0,1)^3 + 11,05171(0,2 - x) + 12,22869(x - 0,1) \quad ; \quad 0,1 \leq x \leq 0,2$$

$$S_2(x) = \frac{S''(0,2)}{6(0,5-0,2)}(0,5-x)^3 + \frac{S''(0,5)}{6(0,5-0,2)}(x-0,2)^3$$

$$\left[\frac{S(0,2)}{(0,5-0,2)} - \frac{S''(0,2)(0,5-0,2)}{6} \right] (0,5-x) +$$

$$\left[\frac{S(0,5)}{(0,5-0,2)} - \frac{S''(0,5)(0,5-0,2)}{6} \right] (x-0,2)$$

$$S_2(x) = -0,488671(0,5-x)^3 + 4,215050(x-0,2)^3 +$$

$$4,115323(0,5-x) + 5,116382(x-0,2) \quad ; \quad 0,2 \leq x \leq 0,5$$

$$S_3(x) = \frac{S''(0,5)}{6(1-0,5)}(1-x)^3 + \frac{S''(1)}{6(1-0,5)}(x-0,5)^3 +$$

$$\left[\frac{S(1)}{(1-0,5)} - \frac{S''(0,5)(1-0,5)}{6} \right] (1-x) + \left[\frac{S(1)}{(1-0,5)} - \frac{S''(1)(1-0,5)}{6} \right] (x-0,5)$$

$$S_3(x) = 2,529030(1-x)^3 + 4,804306(1-x) +$$

$$5,436564(x-0,5) \quad ; \quad 0,5 \leq x \leq 1$$

$$S(x) = \begin{cases} \begin{aligned} & -1,466015(x-0,1)^3 + 11,05171(0,2-x) + \\ & 12,22869(x-0,1) \end{aligned} & ; \quad 0,1 \leq x \leq 0,2 \\ \\ \begin{aligned} & -0,488671(0,5-x)^3 + 4,215050(x-0,2)^3 + \\ & 4,115323(0,5-x) + 5,116382(x-0,2) \end{aligned} & ; \quad 0,2 \leq x \leq 0,5 \\ \\ \begin{aligned} & 2,529030(1-x)^3 + 4,804306(1-x) + \\ & 5,436564(x-0,5) \end{aligned} & ; \quad 0,5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Tablo 4.5 $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bazı noktalarda aldığı gerçek değerler ile
Kübik spline polinomunda aldığı değerleri karşılaştırma

x	$S(x)$	$f(x)$	Fark
0,1	1,105171	1,105170198	0,000000802
0,2	1,221402783	1,221402758	0,000000025
0,5	1,64872095	1,648721271	0,000000321
1,0	2,718282	2,718281828	0,000000172

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada daha önce pek çok kez işlenmiş olan Taylor polinomu, Lagrange polinomu, bölünmüş farklar, ileri ve geri fark operatörleri, Spline polinomları ve bunlarla birlikte ifade edilebilen interpolasyon polinomlarının elde edilişleri üzerinde çalıştık. Daha sonra, belli aralıkta verilen fonksiyon değerlerine uygun bu interpolasyon polinomlarını oluşturarak fonksiyonun belli bir noktada aldığı gerçek değeri ile interpolasyon polinomlarında aldığı değerleri karşılaştırdık.

Aynı tablo içinde üç noktada Lagrange, E.K.K., Newton ve Spline polinomlarının hatalarını göstererek tablodaki değerleri inceleyelim.

Tablo 5.1 Lagrange, E.K.K. doğrusu, Newton ve Spline polinomlarının hata değerlerinin karşılaştırılması

x	0,1	0,2	0,5
Lagrange Polinomu	0,001437	0,001165	0,002380
E.K.K doğrusu	0,128845	0,10905	0,264293
Birinci dereceden Newton Polinomu	0,024573	0,038085	0,0000002
İkinci dereceden Newton Polinomu	0,004539	0,005585	0,0000002
Kübik Spline Polinomu	0,000000802	0,000000025	0,00000032

Tablodan hatanın en az olduğu polinomun Spline polinomları olduğu görülmektedir. O halde Spline polinomları ile fonksiyonun gerçek değerine çok yakın değerlerin bulunabileceğini söyleyebiliriz.

Başka bir çalışmada B-Spline fonksiyonları incelenerek uygun yaklaşımlarla fonksiyonun gerçek değeri ile karşılaştırılması yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Albasiny, E.L., Hoskins, W.D., 1969. Cubik spline solutions to two- point boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 12: 151-153
- Amat, S., Busquier, S., Escudero, A., Trillo, J.C., 2008. Lagrange interpolation for continuous piecewise smooth functions, *J. Comput. Appl. Math.*, 221: 47-51
- Balcı, M., 1984. *Matematik Analiz*, Ertem Matbaası, İstanbul, 420s.
- Bayram, M., 2002. *Nümerik Analiz*, Aktif Yayınevi, İstanbul, 499s.
- Bunchanan, J. L., Turner, P.R., 1992. *Numerical Methods and Analysis*, McGraw-Hill Newyork, 576p.
- Cantürk, Mevlana., *Lagrange İnterpolasyon ve Bazı Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, 2009.
- Davis , J.P., 1975. *Interpolation and Approximation*, Dover, Newyork, 393p.
- Doğan, M., *q-Integer Noktalarında B-Spline Fonksiyonu ve Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi, 2008.
- Gültürk, F., *İnterpolasyon ve Kalan Teorisi*, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana, 2008.
- Karagöz, İ., 2001. *Sayısal Analiz ve Mühendislik Uygulamaları*, Vipaş Yayınevi, Bursa, 426s.
- Kartal, Ş.,Ş., Bir Fonksiyonun Türevinin Lagrange İnterpolasyonu ile Hesaplanması, Yüksek lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, 2008.
- Koçak, Z.F., 1990. *Matematik IV Sayısal Çözümleme*, Bornova, İzmir, 116s.
- Mehmetlioğlu, G., Bazı Kısmi Türevli Denklemler İçin Nümerik Algoritmalar, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, 2007.
- Özdemir, A., *Diferensiyel Denklemlerinin Spline Fonksiyonu Yardımıyla Çözümü ve Bir Uygulama*, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, 1996.
- Phillips, G.M., 2003. *Interpolation and Approximation by Polynomials Springer*, Newyork, 327p.
- Ralston, A., Rabinowitz, P., 2001. *A First Course In Numerical Analysis*, McGraw-Hill, Newyork, 576p.
- Schumaker, L.L., 1993. *Spline Functions Basic Theory*, Kriepel Publishing Company, 553p.
- Thomas, G.B., 1984. *Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, 1142p.
- Türker, E.S., Can, E., 1997. Bilgisayar Uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri, Değişim Yayınevi, Sakarya, 478s.
- Uzun, İ., 2004. *Nümerik Analiz*, Beta Yayınevi, İstanbul, 485s.

ÖZGEÇMİŞ

01.06.1969 doğumlu Fatma Gül TAŞKIN ilkokulu İzmir'in Foça ilçesinde, ortaokul ve liseyi Kocaeli'nin Gölcük ilçesinde bitirmiştir. 1987 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanmış ve 1991 yılında mezun olmuştur. 2008 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başlamıştır. Halen Fethiye Fatih Anadolu Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.