

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

FONKSİYON ÖĞRETİMİNDE TABLO KULLANIMI VE ÖĞRENMEYE ETKİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yavuz SİDAL

İSTANBUL, 2011

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

FONKSİYON ÖĞRETİMİNDE TABLO KULLANIMI VE ÖĞRENMEYE ETKİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Yavuz SİDAL

Tez Danışmanı: Dr. İlyas YAVUZ

İSTANBUL, 2011

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı
Ortaöğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Yavuz SİDAL tarafından hazırlanan “**Fonksiyon Öğretiminde Tablo Kullanımı ve Öğrenmeye Etkisi**” başlıklı bu çalışma 27.05.2011 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

İmzalar

Danışman : Dr. İlyas YAVUZ

Üye : Doç. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR

Üye : Dr. Savaş BAŞTÜRK

.....
.....
.....

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, fonksiyon öğretiminde tablo kullanımı ve bunun öğrenmeye etkisi didaktiksel durum teorisi ve çoklu temsiller üzerinden ele alınmıştır. Öğrencilerin daha önce sınıflarında pek karşılaşmadıkları problem durumlarına verdikleri cevaplar analiz edilmiş, bu cevaplar üzerinden tablo yorumlama becerisi ile ilgili çeşitli çıkarımlarda bulunulmuştur. Bu çalışma, matematik eğitimcilerine farklı bir öğretim ortamı sunması düşüncesiyle yapılmıştır.

Bu araştırmanın yürütülmesinde, araştırma konusunun belirlenmesinde ve ortaya konmasında yardım ve desteğini esirgemeyen hocam ve tez danışmanım Dr. İlyas YAVUZ'a, yüksek lisans eğitimim boyunca kendilerinden ders aldığım tüm öğretim üyelerine teşekkür ve saygılarımı sunarım. Araştırmam boyunca bana her türlü manevi desteği sunan, çalışmam boyunca yanımda olan sevgili eşim Deniz SİDAL'a ve en kötü günlerimde, en zor koşullarda desteğini hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Yavuz SİDAL

ÖZET

FONKSİYON ÖĞRETİMİNDE TABLO KULLANIMI VE ÖĞRENMEYE ETKİSİ

Bu çalışmada, fonksiyon öğretiminde tablo kullanımı ve bunun öğrenmeye etkisi didaktiksel durum teorisi ve çoklu temsiller üzerinden ele alınmıştır. Öğrencilerin daha önce pek karşılaşmadıkları problem durumlarına verdikleri cevaplar analiz edilmiş, bu cevaplar üzerinden tablo yorumlama becerisi ile ilgili çeşitli çıkarımlarda bulunulmuştur. Bu çalışma, matematik eğitimcilerine farklı bir öğretim ortamı sunması düşüncesiyle yapılmıştır.

Çalışma bir grubun derinlemesine incelenmesinden dolayı özel durum çalışması niteliği taşımaktadır. Çalışma grubunu 2009–2010 eğitim-öğretim yılında Bursa’da bir devlet lisesinde eğitim gören 9. Sınıf 26, 12. Sınıf 24 öğrenci oluşmaktadır. Öncelikle öğrencilerin tablo okuma becerilerini anlamaya yönelik soru kağıdı uygulanmıştır. Bu soru kağıdına verilen cevaplar alt kategorilere ayrılmıştır. Daha sonra farklı kategorilerden öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu sayede öğrencilerin açıklamalarını daha iyi anlama imkânı sağlanmıştır.

Çalışma sonucunda elde edilen bulgulara göre öğrencilerin tablo okuma becerilerinin yeteri kadar iyi olmadıklarını göstermiştir. Öğrenciler tablo değerlerini grafik üzerinde nokta olarak işaretleyebiliyor iken, daha önce karşılaşmadıkları farklı soru tiplerini çözmekte zorlanmışlardır. Verilen tablo değerlerini doğrusal olarak birleştirmek en çok karşılaşılan durum olmuştur. Bununla birlikte 12. Sınıflar ve 9. Sınıflar arasında grafik çizimi esnasında farklılıklara rastlanmıştır. Özellikle öğrencilerin tablo-grafik geçişlerinde problemleri olduğu görülmüştür.

Bu çalışmanın sonuçlarına bakarak, öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini artırabilmek için orta öğretim matematik öğretim programında fonksiyonların temsiller arası dönüşüm etkinliklerine ağırlık verilmesi önerilebilir. Ayrıca açık-uçlu ve günlük hayatla ilişkili sorularla öğrencilerin farklı durumlara hazırlanması faydalı olacaktır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Değerler Tablosu, Değişkenler Tablosu, Fonksiyon Kavramı, Didaktik Antlaşması, Çoklu Temsiller.

ABSTRACT

THE USAGE TABLES IN EDUCATION OF FUNCTIONS

AND ITS EFFECTS ON LEARNING

In this research, students' knowledge about table interpreting skills are considered. The answers given by the students to the questions which they had never seen before, that's why they do not comply with didactic contracts, are analyzed, then various estimations are formed about knowledge of function graphs and interpreting skills by these answers.

Since the group is researched deeply, the research is a case study. The groups consist of 26 9th grade and 24 12th grade students from a state schools in Bursa. First of all, a questionnaire is applied in order to understand their interpretations of tables. The answers given to the questionnaires are seperated into subcategories. Then some students from different subcategories have semi-structured interview. The aim is to get their thought about their answers and to explore their mental thought structures in this process.

According to the results, students are not good enough at interpreting tables. While student were signing the point values correctly which are given in the tables; it was difficult for them to answer problems in the type that they had never seen before. Mostly students integrated given values linearly. In addition while drawing graphics, some differences were seen between 9th grades and 12th grades. Especially it is seen that the students had some problems with table-grafic relations.

As a result of this research, it is necessary to pay much attention to activities of transformation between function representations. In addition it is seen as good if the students are faced off open-ended and daily problems.

KEY WORDS: Table of Values, Table of Variables, Function Concept, Didactic Contract, Multiple Representations

İçindekiler

ABSTRACT	4
BÖLÜM I	7
GİRİŞ	7
1.1. PROBLEM DURUMU VE ÇALIŞMANIN AMACI	7
1.2. ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ	9
1.3. VARSAYIMLAR	9
1.4. SINIRLILIKLAR	9
BÖLÜM II	10
İLGİLİ ALANYAZIN	10
2.1. FONKSİYON KAVRAMI	10
2.1.1. Fonksiyon Kavramının Tarihsel Gelişimi	10
2.2. FONKSİYON KAVRAMINA İLİŞKİN SIK RASTLANAN ÖĞRENCİ GÜÇLÜKLERİ VE YANILGILARI	13
2.2.1. Öğrencilerin Fonksiyon Kavramlarını Yorumlamaları	14
2.2.2. Grafik Temsille İlgili Öğrenci Yanılgıları	16
2.3. ÇALIŞMANIN KURAMSAL TEMELLERİ	33
2.3.1. Didaktik Antlaşması Tarihçe	33
2.3.2. Didaktiksel Durum Teorisi	33
2.3.3. Didaktik Antlaşması Kavramı	35
2.3.4. Didaktik Antlaşması ile İlgili Örnek Çalışmalar	39
2.3.5. Didaktik Anlaşmanın Paradoksları	41
2.3.6. Çoklu Temsil Kavramı	49
BÖLÜM III	52
YÖNTEM	52
3.1. TEORİK ÇERÇEVE	52
3.2. ARAŞTIRMA MODELİ	52
3.3. ARAŞTIRMANIN ÖRNEKLEMİ	52
3.4. VERİLERİN TOPLANMASI	52
3.5. VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ VE YORUMLANMASI	53
3.6. GEÇERLİK VE GÜVENİRLİK	53

BÖLÜM IV	55
VERİLERİN ANALİZİ, BULGULAR VE YORUM	55
4.1. UYGULAMA ÖNCESİ ANALİZ	55
4.1.1. Milli Eğitim Sisteminde Tabloların Yeri	55
4.1.2. 9'uncu Sınıflar 1. Soru A Grubu	57
4.1.3. 9'uncu Sınıflar 1. Soru B Grubu	57
4.1.4. 9'uncu Sınıflar 2. Soru A Grubu	58
4.1.5. 9'uncu Sınıflar 2. Soru B Grubu	58
4.1.6. 9'uncu Sınıflar 3. Soru A Grubu	59
4.1.7. 9'uncu Sınıflar 3. Soru B Grubu	59
4.1.8. 12'nci Sınıflar 1. Soru A Grubu	60
4.1.9. 12'nci Sınıflar 1. Soru B Grubu	60
4.1.10.12'nci Sınıflar 2. Soru A Grubu	61
4.1.11.12'nci Sınıflar 2. Soru B Grubu	61
4.1.12.12'nci Sınıflar 3. Soru A Grubu	61
4.1.13.12'nci Sınıflar 3. Soru B Grubu	62
4.1.14. 12'nci Sınıflar 4. Soru	62
4.1.15. 12'nci Sınıflar 5. Soru	63
4.2.SORULARIN ANALİZİ	64
4.2.1. 9'uncu Sınıflar	64
4.2.2. 12'nci Sınıflar	83
BÖLÜM V	104
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	104
KAYNAKLAR	108
EKLER	108

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. PROBLEM DURUMU VE ÇALIŞMANIN AMACI

Fonksiyon konusu, öğrencilerin değişkenler arasındaki değişimin ilişkilerini tanımlama, parametre değişikliklerini açıklama ve grafikleri yorumlama ve analiz etme yeteneklerinin merkezidir. Beklendiği gibi “okul matematiği için ilkeler ve standartlar” (principles and standards for school mathematics) (NCTM, 2000: 296), anaokulu öncesinden 12’nci sınıfa kadar “öğrencilerin örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlamalarına imkân veren” eğitici programları savunurlar (Clement, 2001).

Matematiksel ifadelerin açıklanması ve anlaşılmasında önemli bir yere sahip olan fonksiyon kavramı, ortaöğretim matematik programının da en temel öğelerinden biridir. Birçok ülkede ortaöğretim programları fonksiyon konusu ile başlar, diğer konular fonksiyon konusunun teorik çerçevesine uygun olarak işlenir (Bloch, 2003).

Birçok araştırmacı fonksiyon kavramının öğretiminin zorluğunu ve öğrenciler tarafından sıklıkla yapılan hataları ortaya koyarak farklı perspektifler önermişlerdir. Bazı araştırmacılar özellikle bilişsel açıdan yaklaşmışlar (Dubinsky, 1991; Tall ve Vinner, 1981, Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989), bazıları ise tarihsel ve epistemolojik açıdan bu kavramı incelemişlerdir (Sierpinska, 1992; Sfard, 1991, 1992). Adı geçen bu araştırmacılardan bazıları ise özellikle bu kavramın doğası ile ilgilenerek kavram tanımı ile kavram imajı ifadelerini kullanarak, bunlar arasında var olan farklılığı incelemişlerdir (Gray ve Tall, 1994; Tall ve Vinner, 1981, Vinner, 1983; Vinner ve Dreyfus, 1989; Bakar ve Tall, 1992). Yine bazı araştırmacılar, özellikle farklı gösterim alanları arasındaki ilişkileri irdelemişlerdir (Duval, 1993, 1995; Chevallard, 1992; Bosch et Chevallard, 1999; Lacasta, 1995; Akt. Yavuz ve Baştürk, 2008). Bu kavramın öğretimi ile ilgili didaktik senaryoları geliştiren ve özellikle teknolojik yazılımlar yardımı ile öğrenmenin daha etkin bir şekilde gerçekleştiğini ifade eden araştırmacılar da gittikçe çoğalmaktadır (Chauvat, 1997; Goldenberg ve diğerleri, 1992; Confrey, 1992; Schwarz ve diğerleri, 1990; Schwarz ve Dreyfus, 1995; Schoenfeld, 1990; Arcavi ve Schoenfeld, 1993; Slavit, 1997; Akt.

Yavuz ve Baştürk, 2008). Özellikle farklı gösterim biçimlerinin karakteristik özelliklerini görselleştiren ve birinden diğerine geçişleri ilgilendiren etkinlikleri etkin bir şekilde kullanmayı sağlayan teknolojik yazılımlar bu çalışmalarda ön planda tutulmaktadır (Yavuz ve Baştürk, 2008).

Bilindiği gibi fonksiyonlar farklı gösterimlerle ifade edilir. Bunlardan cebirsel gösterim potansiyel olarak fonksiyonların bütün özelliklerini taşımakla birlikte bu özellikleri görselleştiremez ve hatta bazılarını tespit etmek için pek çok işlem yapmak gerekebilir. Değerler tablosu fonksiyonun sadece bazı değerlerini verir. Değişkenler tablosu fonksiyonun grafiğinin bir şemasıdır ve fonksiyonun değişkenliğini görselleştirir. Grafiksel gösterim ise fonksiyonun birçok özelliğini (tanım kümesi, değerler kümesi, artan-azalan aralıkları, extramum noktaları, vb.) görsel olarak vermektedir. Araştırmacılar fonksiyon kavramının içselleştirilmesinde grafiksel gösterimin önemini vurgulamışlar ve bu kavramın öğretiminde mutlaka kullanılmasını tavsiye etmişlerdir (Yavuz, 2007).

Bu çalışmada öğrencilerin fonksiyonlarda tablo kullanım becerileri didaktik antlaşması ve çoklu temsiller kavramları yardımıyla ele alınmıştır. Öğrencilerin daha önceden karşılaşmadıkları ve dolayısıyla didaktik antlaşmasına uygun olmayan türden problemler verilmiş ve öğrencilerin verdikleri cevaplar analiz edilmiş, bu cevaplar üzerinden fonksiyonlarda tablo yorumlama becerisi ile ilgili çeşitli çıkarımlarda bulunulmuştur. Bu amaca ulaşmak için aşağıdaki sorular bağlamında araştırma yapılacaktır:

1. Öğrenciler verilen sorudaki kısıtlamaları sağlayacak şekilde fonksiyonların grafiklerini oluşturabiliyorlar mı?
2. Öğrencilerin tabloları okuma ve yorumlama becerileriyle ilgili ne tür kavram yanılgıları vardır? Ve bu yanılgılar didaktik antlaşması ile ilişkili midir?
3. Öğrenciler tablo ve grafik temsiller arasındaki geçişleri nasıl yapıyorlar? Çoklu temsillerle ilgili ne gibi zorluklarla karşılaşılıyorlar?
4. Tabloların kullanıldığı günlük hayat problemlerinde fonksiyonla ilgili bilgilerini ilişkilendirebiliyorlar mı?

1.2. ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ

Fonksiyonlar konusu ortaöğretim matematik konularının hemen hepsi ile ilişkilidir. Dolayısıyla sağlam bir temel üzerine oturmayan fonksiyon imajı ilerleyen yıllarda öğrencilerin matematik dersi ile problem yaşamasına yol açmaktadır. Fonksiyonlarda çoklu temsillerin ve grafik çizimlerinin ön plana çıktığı diğer çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada üzerinde duracağımız konu olan değerler ve değişkenler tablosu da ortaöğretim matematiğinin eşitsizlikler, türev, özel tanımlı fonksiyonlar gibi farklı konularında karşımıza çıkmaktadır. Öğrencilerin yaptıklarını nedensel olarak açıklayabilmeleri de eğitim sisteminin doğal bir beklentisidir. Dolayısıyla bu çalışmada öğrencilerin tabloları okuma ve yorumlama becerileri grafik çizimleriyle de ilişkilendirilerek incelenecektir. Tablolar konusunda yerli yayınların azlığından hareketle bu çalışmanın gelecekte yapılacaklara bir kaynak oluşturması ümit edilmektedir.

1.3. VARSAYIMLAR

Bu araştırma yapılırken aşağıdaki hususlar göz önünde bulundurulmuştur:

1. Araştırmaya katılan tüm öğrencilerin sorulan soruları içtenlikle ve objektif olarak yanıtladıkları kabul edilmektedir.
2. Uygulamayı yapan araştırmacının veri toplama araçlarının sonuçlarını objektif olarak yansıttığı kabul edilmektedir.

1.4. SINIRLILIKLAR

1. Bu çalışma kullanılan veri toplama yöntem ve teknikleriyle sınırlıdır.
2. Çalışmanın katılımcıları, Bursa'daki bir devlet lisesinde 26 tane 9. Sınıf öğrencisi ve 24 tane 12. Sınıf ile sınırlıdır.
3. Süre açısından 2009–2010 eğitim-öğretim yılının ikinci dönemi ile sınırlıdır.

BÖLÜM II

İLGİLİ ALANYAZIN

2.1. FONKSİYON KAVRAMI

Matematiğin birkaç alanı fonksiyonlarla direk veya dolaylı olarak ilgilenir: matematiksel analiz onların özelliklerini olduğu kadar türevlerini de araştırarak bir, iki veya n değişkenli fonksiyonlar üzerinde durur; diferansiyel ve integral denklemleri bilinmeyenlerin fonksiyonlar olduğu denklemleri çözmeye yönelir; fonksiyonel analiz fonksiyonlarla oluşturulmuş uzaylarda çalışır, ve nümerik analiz farklı türdeki tüm fonksiyonların değerlendirilmesinde hataları kontrol etme sürecini araştırır. Matematiğin diğer alanları fonksiyon kavramının genellemelerini veya gelişmelerini oluşturan kavramlarla ilgilenir. Örneğin; cebir, işlemler ve bağıntılarla, matematiksel mantık ise tekrarlı fonksiyonlarla ilgilenir (Ponte, 1992).

Fonksiyon kavramı matematik içindeki en önemli konulardan biri olarak değerlendirilir. Nokta, doğru ve düzlem Öklid geometrisinin temel elemanları iken, Eski Yunan zamanından Modern Çağa kadar egemen olan teori, fonksiyon ve türev kavramları matematiksel analizin temelini oluşturur, bu teori o zamandan beri matematiğin gelişmesinde merkez olmuştur (Ponte, 1992).

Fonksiyon kavramı matematik ve matematik eğitiminin merkezidir. Fonksiyonun ders kitabı tanımları veya açıklamaları zamana, içeriğe ve sunumun seviyesine göre değişmektedir; fonksiyon bir formül, bir kural, bir karşılık gelme değişkenler arasındaki bir ilişki, bir değerler tablosu, bir grafik, bir eşleme, bir dönüşüm, bir işlem/operasyon, sıralı ikililerin bir kümesi olarak görülmektedir (Hight, 1968, Malik, 1980, Markovits ve diğerleri, 1986; Akt. Kleiner, 1993). Bu düşünceler fonksiyon kavramının tarihsel evrimini yansıtmaktadır (Kleiner, 1993).

2.1.1. Fonksiyon Kavramının Tarihsel Gelişimi

Fonksiyon kavramı yaklaşık 300 yıllık bir geçmişe dayanmasına rağmen, fonksiyonellik içgüdü (sezgisi) yaklaşık 4000 yıllık olduğu söylenebilir. Bir niceliğin diğerlerine olan bağıllığı olarak fonksiyon kavramı çok yaygındır. Antik

matematikte tablolarda, eğrilerde, fiziksel kurallarda ve geometrik nicelikler arasındaki ilişkilerde kapalıdır (örtüktür) (Kleiner, 1993).

Eski çağlarda fonksiyonların özel örnekleri bulunabilir; örneğin, sayma, verilmiş olan bir nesne kümesi ve bir dizi sayma sayısı arasında bir ilişki ortaya koyma; iki değişkenin fonksiyonu olan dört temel aritmetik işlem, ve tersleri, kareleri, karekökleri, küpleri ve küp kökleri ile ilgili Babil tabloları (Ponte, 1992).

Babilliler, M.Ö 1800 yıl kadar önce, her şeyi tablolaştırmışlardır. Aritmetiksel ve cebirsel hesaplamaları kolaylaştırmak için sayıların tersleri, kareler, küpler, karekökler, küp kökler ve diğerlerinin tablolarını oluşturulmuşlar. Aşağıdaki sayıların tersi tablosunun bir kopyasıdır (Kline, 1972, s.7; akt. Kleiner, 1993)

igi 2 gál-bi 30	igi 8 gál-bi 7, 30
igi 3 gál-bi 20	igi 9 gál-bi 7, 40
igi 4 gál-bi 15	
igi 6 gál-bi 10	igi 27 gál-bi 2, 13, 20

Tablo 2.1. Sayıların tersi tablosu

Tablo şunu söylemektedir (örneğin) 2'nin tersi 30/60 ve 8'in tersi 7/60+30/60² (Babillilerin sayı tabanı 60'dır).

Tarihsel olarak, bazı matematikçilerin fonksiyon kavramının modern şekline yaklaştığı ve önceden görüldüğü söylenebilir. Bunlar arasında, enlem ve boylamın farklı derecelerini temsil eden şekillerin serbestlikleriyle ilgili geometrik bir teori geliştiren Oresme (1323–1382) vardır. Bu teoride, bağımsız ve bağımlı değişken miktarları hakkında bazı genel fikirlerin sunulduğu görülmektedir. Fakat fonksiyonların matematiksel araştırmalarda açık bir şekilde ayrı bir kavram ve kendi başına bir araştırma nesnesi olarak doğuşu oldukça yenidir, 17. yüzyılın sonunda başlamıştır (Ponte, 1992).

Fonksiyon düşüncesi kapalı olarak milattan önce 2000 yılından öncesine dayandığı halde açık formda 18. yüzyılın başlarına kadar çıkmamıştır. Fonksiyon kavramının erken çıkmamasının temel nedenleri:

- Cebirsel önkoşulların eksikliği – gerçek sayıların gelişimi ve sembolik notasyonlarının gelişimi ile birlikte terimselleşme;
- Motivasyon eksikliği. Soyut olana birçok örnek olmaksızın fonksiyonun soyut bir düşüncesi neden tanımlanır?

değişkenler arasındaki ilişkinin ifade edilmesi ve değişkenlerin tanıtımıydı. İkincisi araştırma için büyük miktarda eğri örnekleri (potansiyel fonksiyon) sağladı ve araştırma ve fonksiyon kavramının final aşamasını oluşturdu. Eksik olan, bir denklemde bağımsız ve bağımlı değişkenlerin tanımlanmasıydı (Kleiner, 1989).

Değişkenler fonksiyon değildirler. Fonksiyon kavramı “bağımsız” ve “bağımlı” değişken arasında tek yönlü bir ilişkiyi gösterir. Fakat değişkenlerin matematiksel ya da fiziksel problemlerde meydana çıktığı durumlarda, böyle bir rol bölünmesine gerek yoktur. Ve özel bağımsız rol dahil olan değişkenlerin birine verilmediği sürece, değişkenler fonksiyon değil sadece basit değişkendirler (Bos, s.348; Akt. Kleiner, 1989).

Euler 17. Yüzyıldaki değişkenler ve denklemler hesabını (kalkülüsünü) bir fonksiyon hesabına (kalkülüsüne) dönüştürdü. Onun fonksiyon tanımı, onun ünlü 1748 “Introduction in analiysin infinitorum” kitabında vermiştir, aşağıdaki gibidir (24).

Değişken niceliğinin bir fonksiyonu; sabit ya da sayı nicelikleri ve değişken niceliklerinden oluşan bir analitik ifadedir.

Euler’in söylediği bir “analitik ifade” dört cebirsel işlem artı fonksiyonun bileşimi ve n. köklerin alınması ile cebirsel ve transandantal fonksiyonlardan (örneğin polinom, trigonometrik, ters trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar) oluşturulan (meydana getirilen) bir cebirsel formüldür (Kleiner, 1993).

Fonksiyonun gelişimine diğer önemli bir katkı, maddesel kütlelerin içindeki ısı akışı problemi ile ilgilenen Fourier’in (1768–1830) çalışmalarından gelir. Fourier, sıcaklığı iki değişkenli (zaman ve mekân) bir fonksiyon olarak değerlendirdi. Bir noktada, uygun bir aralıkta, trigonometrik bir serideki herhangi bir fonksiyonun bir gelişme elde etmesinin mümkün olduğunu kabul etti. Problem daha sonra, yeterli

koşulların oluşturulmasıyla bir fonksiyonu bir Fourier serisi olarak ifade edebilen Dirichlet (1805–1859) tarafından ele alındı.

Cantor (1845–1918) öncülüğünde Küme Teorisinin gelişmesi ile fonksiyon kavramı gelişmeye devam etti. 1939'da Bourbaki ise aşağıdaki tanımı vermiştir:

E ve F, eş olabilir iki küme olsunlar. Verilen bağıntıda x ile bağlı tek bir y var ise, E nin bir x elemanı ile F nin bir y elemanı arasında bağıntıya fonksiyon bağıntısı denir.

Biz fonksiyon adını, bu yolla x ile ilişki içinde verilen her $x \in E$ ve $y \in F$ elemanına vermekteyiz, y, x elemanında fonksiyon değeri olarak belirtilir ve fonksiyon da verilen fonksiyonel ilişki ile belirlenir. İki eşit fonksiyonel ilişki aynı fonksiyonu belirler.

Bourbaki daha sonra fonksiyon kavramının tanımını, $E \times F$ kartezyen çarpım kümesinin belli alt kümeleri olarak vermiştir (Kleiner, 1989).

2.2. FONKSİYON KAVRAMINA İLİŞKİN SIK RASTLANAN ÖĞRENCİ GÜÇLÜKLERİ VE YANILGILARI

Bu çalışmada ‘Öğrenci zorlukları’ öğrencilerin fonksiyon kavramını algılama, anlama ve anlamlandırma süreçlerinde yaşadıkları zihinsel güçlükleri ifade etmektedir. ‘Kavram yanılığı’ ise bireylerin fonksiyon kavramına ilişkin geliştirmiş olduğu eksik ve/veya yanlış bilgiler olarak kabul edilmektedir. Öğrenciler bir fonksiyon türüne ait belirli bir özelliği tüm fonksiyonlara genellemek gibi farklı sebeplerden dolayı kavram yanılıgıları geliştiriyor olabilirler Ancak kavram yanılıgılarının asıl sebebi öğrenme sürecinde yaşanan güçlüklerdir. Çünkü öğrenciler, yaşadıkları güçlükler neticesinde eksik ve yanlış bilgiler ediniyorlar; süreç içerisinde de bu eksik ve yanlış bilgilerin doğru olduğuna dair çok güçlü kanaatler (bir manada inançlar) geliştiriyorlar ki biz bunlara kavram yanılıgıları diyoruz (Beyazıt, 2008).

Fonksiyon kavramı ile ilgili literatür incelendiğinde, öğrencilerde görülen zorluklar ve geliştirdikleri kavram yanılıgıları bir çok başlık altında incelenebilir. Ancak fonksiyon kavramına ilişkin bazı zorluklar ve yanılıgılar, kavram üzerine yapılmış

hemen hemen tüm çalışmalarda çeşitli biçimlerde ortaya çıkar. Genel olarak ifade edilirse, kavrama ilişkin zorluklar ve yanılgılar;

1. Fonksiyon kavramını yorumlamalarına ilişkin,
2. Fonksiyonunun temsilleri (cebirsel, grafiksel, geometrik, nümerik,...) ile fonksiyon kavramını ayırt edememe,
3. Temsiller arasındaki geçişlere ilişkin,
4. Fonksiyon konusunda kullanılan sembol ve simgelere ilişkin olmak üzere dört sınıfta belirtilebilir.

Bu bölümde bu sınıflama altında, pek çok araştırmada rastlanan ve kavrama ilişkin ortak yanılğı haline gelmiş olan zorluklar ve yanılgılardan söz edilecektir.

2.2.1. Öğrencilerin Fonksiyon Kavramlarını Yorumlamaları

Tall ve Vinner (1981) ve Vinner (1983) geliştirdiği kuramsal çerçevede kavram tanımı ve kavram imajı ele alınır. Vinner (1983) kavram tanımını o kavramı kesin bir şekilde belirleyen kelimeler ve semboller bütünü olan ve matematik camiası tarafından kabul gören ifadeler olarak açıklar.

Fonksiyon kavramına ilişkin, kaynaklarda karşılaşılan öğrenci tanımlamaları, genel olarak, Vinner ve Dreyfus'un (1989) çalışmasında elde ettiği ve aşağıdaki biçimde altı kategoride topladıkları tanımlamalar ile uyuşmaktadır. Vinner ve Dreyfus (1989), çeşitli alanlarda üniversite öğrenimi gören öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin sahip oldukları “kavram tanımı” ve “kavram imajlarını” araştırmışlardır. Araştırmada öğrencilere yöneltilen açık uçlu testte, biri grafik temsilden oluşan altı farklı durumun fonksiyon olup olmadığını sorgulamışlar ve son soruda da fonksiyon kavramının tanımını istemişlerdir. Elde ettikleri veriler sonucu öğrencilerin kavramın tanımına ilişkin verdikleri cevaplar altı kategoride toplanmıştır.

1. Fonksiyon, birinci kümedeki her elemanı ikinci kümede tek bir elemana eşleyen bir eşlemedir (Formal Dirichlet-Bourbaki tanımı).
2. Fonksiyon iki değişken arasında bağıllık ilişkisidir (y , x e bağlı).

3. Fonksiyon bir kuraldır. Kural olarak ele alınan fonksiyonda eşleme keyfidir.
4. Fonksiyon bir işlemdir.
5. Fonksiyon bir formül, bir cebirsel ifade ya da bir denklemdir.
6. Fonksiyon grafik ya da sembolik temsillerinden biri ile ilişkilendirilir.

Vinner (1983), Barnes (1988) ve Bakar ve Tall (1992) öğrencilerin nasıl bir fonksiyon kavramı geliştirdiklerini öğrenmek için 16–17 yaş grubunda öğrenci grubuna fonksiyon kavramıyla ne düşündüklerini bir cümleyle açıklamalarını istemişler. Sonuç itibariyle öğrencilerden hiçbiri istenilen tanımlamayı yapamamıştır. Öğrencilerin çoğunun fonksiyonları, bir sayı değer girildiğinde yeni bir sayıyı veren bir tür girdi-çıkı makinesi gibi düşünerek; hiçbirinin fonksiyonları tanım, değer ve görüntü kavramlarıyla ilişkilendiremediği belirtilmektedir. Çoğu terim, ardışık, seri ve küme, gibi matematikte çokça kullanılan ifadeleri kullanarak kendilerince yapmış oldukları tanımlamayı matematiksel bilgilere transfer etmede zorluklar yaşadıkları anlaşılmıştır.

Öğrenciler her zaman tanımdan yola çıkarak muhakeme yapmazlar. Bu durumu açıklamak için Tall ve Vinner (1981) ‘kavram imajı’ terimini kullanırlar. Kavram imajı, o kavramla ilgili zihnimizdeki bütün zihinsel görüntüler, kavramla ilgili özellikler ve oluşumlardır. Vinner (1983), kavramın görüntüsü ile ilişkilendirilmiş görsel temsillerin, zihinsel resimlerin, izlenim ya da deneyimlerin sözel formlara dönüştürülebileceğini, ancak bu sözel formları, kavram adı ile zihnimizde ilk oluşan etki olmayıp bir sonraki aşamada ortaya çıkarlar. Örneğin ‘fonksiyon’ kelimesini ilk duyduğunuzda ‘ $y=f(x)$ ’ matematiksel ifadesini hatırlayabilir ya da zihninizde bir fonksiyon grafiğini canlandırabilirsiniz. Belki de $y=x^2$, $y=\sin x$, $y=\ln x$ gibi özel bir fonksiyonu hatırlayabiliriz. Öğrenciler bu eğilimin sonucu olarak sık sık hata yapmakta ve değişik yanılgılar sergilemektedirler.

Vinner (1983) öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kavram görüntülerini incelemiştir ve aşağıda belirtilen kavram görüntülerini gözlemlemiştir:

1. Bir fonksiyon tek bir kuralla verilmelidir. İki kural varsa, iki ayrı fonksiyon vardır.

2. İşaret ve tam değer fonksiyonları için, fonksiyon olma koşullarını dikkate almama.
3. Cebirsel olarak ifade edilmeyen fonksiyonları, özel olarak adlandırılmadıkları takdirde, fonksiyon olarak kabul etmemek.
4. Bir fonksiyonun "makul (düzgün)" bir grafiği olmalıdır.
5. Fonksiyon tanımını bire-bir olma ile karıştırma.
6. Her fonksiyon birebirdir.

Bu fazlaca dar görüşler öğrencilerin çok özel prototipik örnekler haricinde fonksiyonelliği belirleme yeteneğine engel olmaktadır.

2.2.2. Grafik Temsille İlgili Öğrenci Yanılgıları

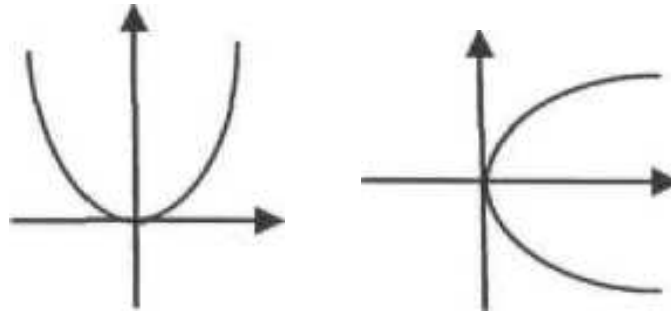
Araştırmalarda, öğrencilerin fonksiyon temsillerine ilişkin yanılgıları genellikle verilen çeşitli temsil durumlarının birer fonksiyon belirtip belirtmediği sorulduğunda ortaya çıkmaktadır. Çalışmalarda ortak olarak ortaya çıkan yanılgılara bakıldığında bir kısım yanılgının nedeni, öğrencilerin temsil durumlarının fonksiyon olup olmadığını belirlemede, verilen temsilin onlar için “*bilindik*” ya da diğer bir deyişle “*alışılmış*” olup olmamasına göre karar vermeleridir. Örneğin çemberi “*tanındık*” gerekçesi ile bir fonksiyon grafiği ya da verilen bir parabolü, kollarının hangi değişkene ait eksenini sardığını göz önüne almaksızın fonksiyon grafiği olarak belirleme davranışına sıklıkla rastlanmaktadır (Kabael, 2010).

Tall ve Vinner'a göre (1981) öğrenciler kendilerinden fonksiyon olanların belirlenmesi istenildiğinde, sahip oldukları kavram imajları ve prototiplerin yönlendirmesiyle, kavramın formal tanımını göz ardı ederek cevap verirler. Bakar ve Tall (1992) bu konuda öğrencilerin $y=x^2$ gibi bir fonksiyon, ya da bir polinom, ya da $1/x$, ya da bir sinüs fonksiyonu gibi fonksiyon kavramının prototip örneklerini zihinlerinde geliştirdiklerini ve grafiğin bir fonksiyon olup olmadığı sorulduğunda, geçerli bir fonksiyon tanımı olmadığından, zihin bu zihinsel prototipleri göstererek cevaplamaya yelteniyor. Yani öğrenciler zihinlerinde geliştirdikleri prototip

fonksiyon grafik örnekleriyle verilen bir grafiği karşılaştırarak benzeyenlerin fonksiyon olacağını, benzemeyenlerin fonksiyon olmayacağını düşünmektedirler.

Clement (2001)'e göre fonksiyon prototipik olarak verilmemiş ise öğrenciler daha çok zorlukla karşılaşmaktadır. Örneğin çoğu öğrenci sürekli olmayan fonksiyonların grafiklerini, kulüp üyelerinin isimlerinin ve sahip oldukları paraların miktarının gösterildiği grafikleri her ikisi de fonksiyon olmasına rağmen fonksiyon olarak düşünmemektedirler. Bu aşamada öğrenciler fonksiyonun resmi tanımını yerine kendi kavram imajlarını kullanmaktadırlar. Birinci gruptaki öğrenciler sürekli olma şartını içeren kavram imajına, ikinci gruptaki öğrenciler ise analitik gösterimi olma şartını içeren kavram imajına sahiptir.

Bakar ve Tall (1992) İngiltere'de lise ve üniversite öğrencileri ile yaptıkları bir çalışmada, aşağıdaki grafiklerin fonksiyon belirtip belirtmediğinin belirlenmesi konusunda aşağıdaki verileri elde etmişlerdir.

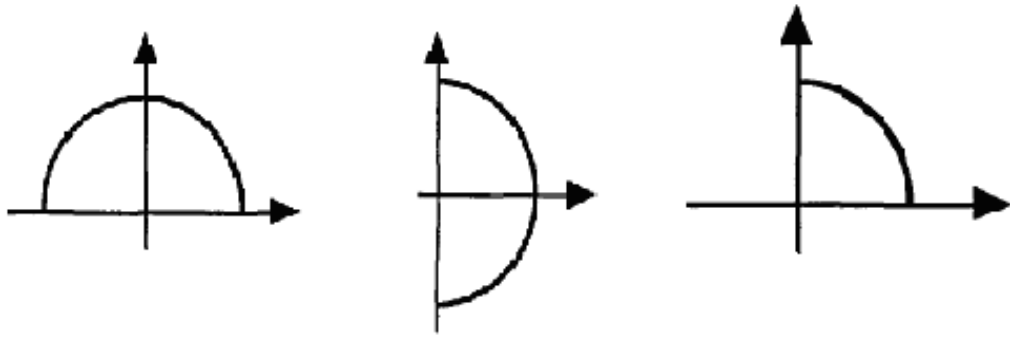


Şekil 2.1. Bakar ve Tall'un kullandığı parabol

	%evet	%hayır
Okul	100	0
Üniversite	97	3

	%evet	%hayır
Okul	95	4
Üniversite	80	20

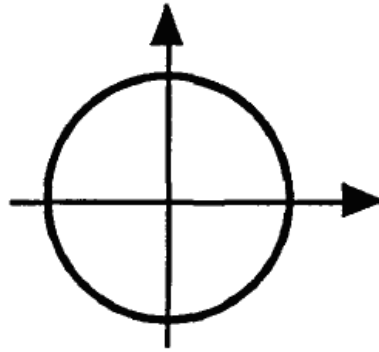
Yalnızca iki üniversite öğrencisinin hangi değişkenin bağımsız değişken olarak ele alındığını önemseydiğini belirterek, birinin “*farklı bir yolla bakmayı iddia ederek*” ve diğer öğrencinin “ $f(y)=x$ ” diyerek grafiği bu şekilde yorumladı. Her iki duruma pozitif olarak cevap veren öğrenciler, her iki grafikte öğrencilerin fonksiyon için zihinsel prototipleriyle uyduğu için pozitif cevap verdiler.



Şekil 2.2. Yarım daire ve çeyrek daire grafikleri

Araştırmacıların parabolere benzer biçimde yarı-çemberlerin fonksiyon grafiği olup olmadıklarına ilişkin sorusuna verilen yanıtlarda ise parabolden yarı daireye, yarı daireden çeyrek daireye geçerken, okul öğrencilerinin grafiğin fonksiyon olduğuna dair inançları %100'den, %61, %61'den %29'a düşüyor.

Çoğu öğrenci tarafından (bir fonksiyonun grafiği olan) bir dairenin çeyreği fonksiyon olarak düşünülmemesine rağmen, durum bütün bir daire ile tersine çevrildi. Neredeyse okul ve üniversitedeki öğrencilerin üçte ikisi, bir çemberi fonksiyon grafiği olarak kabul etmişlerdir.



Şekil 2.3. Bakar ve Tall'un kullandığı çember grafiği

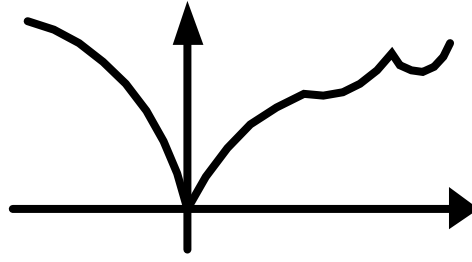
	%evet	%hayır
Okul	64	29
Üniversite	65	35

Katılımcıların ancak üçte birlik kısmı, çemberle temsil edilen bir bağıntının tanım kümesindeki bir elemanı değer kümesinde iki elemana eşlediğini ve dolayısıyla bir fonksiyon olamayacağı gerçeğini görebilmiştir. Bazı öğrenciler, düşey doğru testi uygulayarak bu tür grafiklerin fonksiyon belirtmeyeceğini tespit etmektedir. Ancak bu test tekniğine ilişkin bilgileri tamamen işlemsel düzeyde kalmakta ve testin fonksiyon kavramıyla ilişkisini kuramamaktadırlar (Bakar ve Tall, 1992).

Öğrenciler verilen bir grafiğin fonksiyon olup olmayacağını anlamak için sıklıkla başvurulmuş bir yöntem olan kesen doğrular testi olarak biline; x eksenine indirilen dikmelerin grafiği tek noktada kestiğinde, fonksiyon, birden fazla noktada keserse fonksiyon olamayacağı testinin yapılarak grafiğin değerlendirilmesi, öğrencilerin zayıf bir grafik bilgilerinin olmasına neden olmaktadır. Monk bunun, fonksiyonu yeni öğrenen öğrenciler için oldukça kullanışlı bir yöntem olmasına rağmen ilerleyen problem durumlarında sıkıntılara neden olduğunu belirtmektedir (Monk, 1990).

Öğrenciler genellikle onlara tanıdık (bildik) gelen fonksiyonları tanıma eğilimindedirler. Bu, fonksiyon prototiplerinin fonksiyonelliğin belirlenmesinde, dikey-doğru testinden daha büyük bir etken olduğunu göstermektedir (Clement, 2001).

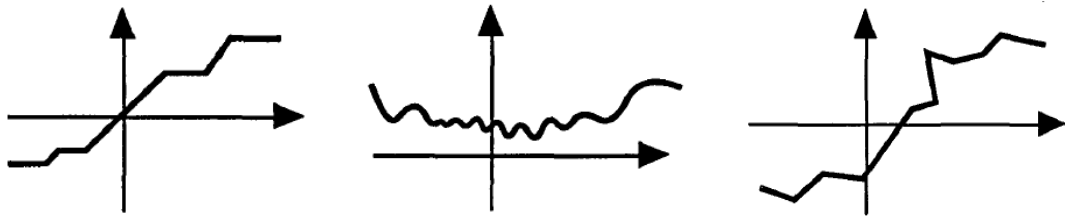
Bir fonksiyon grafiğinin düzgün ve sürekli bir eğri veya doğru olması gerektiği gibi yanlış bir düşünce öğrenciler arasında oldukça yaygındır (Vinner, 1983; Leinhardt vd., 1990; Tall ve Bakar, 1992). Yine öğrencilerin çok büyük bir kısmı, şekli bozuk olan grafiklerin, ayırık noktalardan oluşan grafiklerin ve eğri veya doğru parçalarından oluşan grafiklerin (parçalı fonksiyon grafikleri) bir fonksiyon belirtmeyeceği gibi yanlış bir kanaate sahiptirler (Vinner, 1983; Dubinsky ve Harel, 1992). Vinner (1994) yapmış olduğu çalışmada matematikten A ya da B notunu almış 10 uncu ve 11 inci sınıftan 147 öğrenciye grafiği aşağıdakine benzeyen bir fonksiyon var mıdır? Sorusuna,



Şekil 2.4. Bu grafik bir fonksiyondan mı meydana gelmiştir?

Birçok öğrenci Şekil 2.4’deki grafiğin bir fonksiyon grafiği olduğunu reddetti çünkü onlar bir fonksiyonun grafiği düzgün, sürekli düzgün artan vb. olması gerektiğini inanmaktadırlar.

Hitt (1998) yaptığı araştırmada, matematik öğretmen adaylarının düzensiz şekilde verilen grafiklerin fonksiyon olup olmadığını belirlemede zorluklara sahip olduklarını ve eğri şeklindeki grafiğin fonksiyon belirtmeyeceğini ifade ettiklerini bulmuştur. Buna karşın diğer öğretmenler, verilen bir grafiğe dikey (y) eksen çizerek ve grafiği tek noktada kesip kesmediğine bakarak fonksiyon olup olmadığına karar vermişlerdir. Bunun yanında öğretmenler fonksiyonun sözel tanımını başarıyla yapmışlardır.



Şekil 2.5. Öğrencilerin doğru ve eğri grafiklerine göre karşılaştırdıkları grafikler

Yukarıda verilen grafikler farklı gözüktükleri için hiçbir öğrencinin zihinsel prototiplerine uymuyor. Çok düzensiz gözüktüklerinden ya da grafikleri göstermek için bir formül bulamadıklarından fonksiyon temsil etmediklerini söylüyorlar. Son grafikte sadece üç öğrenci her x değeri için üç y değerinin olduğu grafiğin bir bölümüne odaklanıyorlar. Her x için sadece bir y olabilir sınırlandırmasını gündeme

getiriyorlar fakat bu testi tutarlı bir şekilde ilk örneklerine uygulayamıyorlar (Bakar ve Tall, 1992).

Even (1990) yapmış olduğu çalışmada, öğretmen adaylarının çok büyük bir kısmı

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rasyonel sayı ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel sayı ise.} \end{cases}$$

ifadesini fonksiyon olarak kabul ederken, bu fonksiyonun grafiksel formunu reddetmişlerdir. Gerekçe olarak da, fonksiyon grafiğinin düzgün artan veya azalan sürekli bir eğri veya doğru olmayışını belirtmişlerdir (Dede ve diğerleri, 2010).

Yine verilen grafiğin fonksiyon grafiği olup olmadığının istendiği durumlarda kimi öğrenciler fonksiyon grafiklerinin orijinden geçmesi gerektiğini, fonksiyon grafiklerinin genellikle doğrusal veya kollarının simetrik olmaları gerektiğini düşünmektedir (Baki, 2008).

Markovits, Eylon ve Bruckheimer (1986) de çalışmasında öğrencilere A ve B gibi iki nokta verip birleştirmelerini istemiş; öğrencilerin noktaları çoğunlukla bir doğru ile bileştirdiklerini ve diğer birleştirmelerin fonksiyon olmadığını düşündüklerini tespit etmiştir. Okul matematik müfredatında da vurgulanan fonksiyonların doğrusal olarak ifade edilmesi öğrencilerde bu yönde bir önyargı oluşturmaktadır. Öğrencilerin fonksiyonların doğrusal olduğundaki bu ısrarlarını, iki noktadan geçen bir fonksiyon grafiğini, doğru grafiği olarak ifade etme istemelerinden anlaşılabilmektedir. Markovits öğrencilerin bunu yapmalarının ardında insan zihninin düz çizgiyi tercih etmeye eğilimli olmasının da neden olduğunu psikolojik yapıyı vurgulamaktadır (Markovits ve diğerleri, 1986).

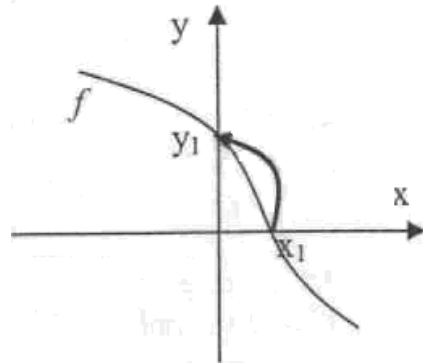
Schwarz ve Hershkowitz (1999) çoğu öğrencinin fonksiyonları lineer (1. dereceden) veya kuadratik (2. dereceden) olduğunu varsayma eğilimde olduğunu belirtmiştir (Ural, 2006). Carlson ve Oehrtman (2005) bu durumun nedenini fonksiyonların tipik olarak okul müfredatlarında çoğu zaman lineer veya kuadratik olarak tanıtılmasına bağlamaktadır (Ural, 2006).

Bu bulgular, öğrencilerin fonksiyonların grafiksel formlarına ilişkin kavram imajlarının sadece düzgün ve sürekli doğru veya eğri şeklindeki grafiklere kısıtlanmış olduğunu göstermektedir.

Öğrenciler arasında bir fonksiyon grafiğinin x ve y eksenlerinin her ikisini kesen bir doğru olması gerektiği gibisinden yanlış algılamaya da sıkça rastlanılmaktadır (Markovits ve diğerleri, 1986). Bu tür yanılgıların zihinsel sebepleri hakkında farklı görüş ve düşünceler ileri sürülebilir ancak bizim kanaatimize göre bu yanılgının sebebini öğrencilerin geçmişten getirdikleri bilgilerde aramak isabetli olacaktır. İlköğretim yıllarında öğrencilere doğru grafikleri öğretilmekte ve özellikle de $y=x-3$ gibi lineer doğru grafikleri çizdirilmektedir. Bu tür grafiklerin x ve y eksenlerinin her ikisini de kestiği dikkate alınırsa öğrenciler ilköğretim yıllarında edinmiş oldukları bilgilerini adapte etmeden fonksiyonlar konusuna aktarıyor ve dolayısıyla da bir fonksiyon grafiği x ve y eksenlerinin her ikisini de kesmelidir gibi bir kavram yanılgısı sergiliyor olabilirler (Beyazıt, 2008).

Kitaplarda ve ders işlenişi sırasında belirli fonksiyon örnekleri üzerinde etkinlik yapılması; öğrencilerin yalnız bu örneklerin fonksiyon olabileceği yönünde zihinlerinde prototip örnekler geliştirmesine neden olmaktadır.

Baki'ye (2008) göre öğrenciler yorumlama yanılgıları yaparken; koordinat sisteminde fonksiyon ox - eksenini kesmiş olduğu noktayı oy - eksenini kesmiş olduğu noktaya eşleyeceğini düşünmektedir. Öğrenciler (x, y) ikilileri için $f(x)=y$ gösterimini yanlış anlamaktadırlar.

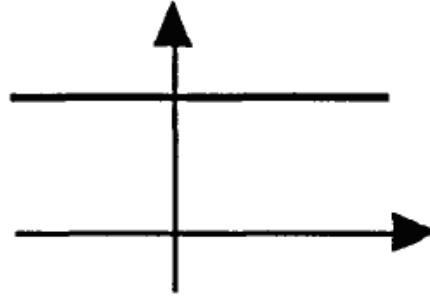


Şekil 2.6. Grafiksel ortamda eleman eşlenirken yapılan bir hatanın temsili

Öğrenci bu düşünce yapısını geliştirirken x- eksenindeki bir reel sayıyı fonksiyon y- eksenindeki bir reel sayıya eşlenebileceğini düşünmektedir. Öğrencilerin bu yanılgılarına fonksiyonları sıralı ikililerle ilişkilendirmede sahip oldukları yanılgılar da neden olmaktadır.

Matematik eğitimi kaynaklarda sıklıkla belirtilen yanılgıların bir diğeri de sabit fonksiyonlara ilişkindir. Vinner (1983), sabit fonksiyonlar ile ilgili iki yanlış kavrama tanımlamıştır: Üniversite öğrencileri, (i) sabit fonksiyonları fonksiyonun denkleminin bir x değişkeni içermediği ve (ii) sabit fonksiyonun grafiğinin x eksenine paralel olduğu ve hiç değişmediği için, yani x'in her değeri için aynı değeri alması nedeniyle, fonksiyon olmayacaklarını iddia ettikleri belirtilmektedir.

Bakar ve Tall (1992) çalışmalarında kullandıkları sabit fonksiyon grafiğinin fonksiyon belirtip belirtmediği sorusu karşısında aşağıdaki verileri elde etmişlerdir:

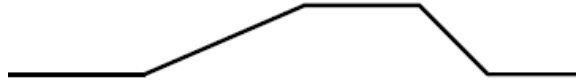


Şekil 2.7. Sabit fonksiyon grafiği

	% evet	% hayır
Okul	Verilmedi	Verilmedi
Üniversite	55	44

Bakar ve Tall (1992), sabitin fonksiyon olmadığı yorumunu, okul matematiğinde fonksiyon kavramında, değişkenin varlığının şart olduğu iması nedeni ile ortaya çıkan "eğer bir değişken yoksa ifadenin fonksiyon olmadığı" yanılgısına bağlamaktadırlar.

Öğrencilerin fonksiyonlarda yaşadığı bir başka zorluk ise fiziksel bir olayın görsel nitelikleri ile olayı modelleyen bir fonksiyonun grafiğinin benzer niteliklerini karıştırmalarıdır. Bir fonksiyonun grafiğini, girdi değerlerinin bir kümesinden çıktı değerlerinin bir kümesine bir dönüşüm olarak düşünmekten ziyade konu olan fiziksel durumun bir resmi olarak düşünürler. Reel yaşamda somut durumları modellemede fonksiyonları kullanırken sık sık topografiksel yapılar kullanılır ve öğrenciler bir fonksiyonel ilişkinin grafiğini çizerken bu topografiksel şeklin belirgin özelliklerinden etkilenebilirler. Böylece öğrencilerin yapabileceği çeşitli hata tipleri ortaya çıkar (Carlson, 1998; Monk, 1992; Monk ve Nemirovsky, 1994; Akt. Ural, 2006). Örneğin Şekil 1’de inişli-çıkışlı bir arazinin yandan grafiksel bir resmi verilmiştir. Bu arazide bisiklet süren bir sürücünün hız-konum grafiğini çizerken öğrenciler çizecekleri grafiğe verilen arazi şeklinin özelliklerini yansıtabilirler (Monk, 1992; Akt. Ural, 2006).



Şekil 2.8. Bir arazinin yandan topografiksel resmi

Bir tırtıl aşağıda gösterildiği gibi, bir parça grafik kâğıdı etrafında sürünüyor. Eğer biz bu hayvanın kâğıttaki konumunu zaman bakımından belirlemek isteseydik bu konum, zamanın bir fonksiyonu olabilir miydi? Neden olurdu ya da olamazdı?



Şekil 2.9. Tırtılın grafik kâğıdı üzerinde izlemiş olduğu yol

Kalkulus bilmeyen öğrencilerin %60’ı, bu tırtılın konumunun zamanın bir fonksiyonu olup olmadığını belirlemek için tırtılın izlemiş olduğu yola direkt olarak dikey-doğru testi uygulamıştır. Görüşme yapılan üç öğrenci, tırtılın çizdiği yola grafik gibi bakmış ve dikey-doğru testine göre bunun bir fonksiyon olmadığını

söylemişlerdir. Fakat diğer iki öğrenci konum-zaman grafiği çizmiş ve tırtılın konumunun zamana göre bir fonksiyon olduğuna karar vermişlerdir. Bir öğrenci *“bunun fonksiyon olmasının sebebi zamanda geri gidilememesidir, yani tırtıl etrafta daireler çizmiş olsa bile bunlar değişik zamanlarda olmuştur...”* şeklinde açıklamıştır (Clement, 2001).

Diğer bazı araştırmacılar ise grafik çizme ve yorumlama sürecinde yaşanan zorluklarla ilgili farklı bulgulara ulaşmışlardır. Hadjidemetriou ve Williams (2002)’de bu bulguları, şu şekilde özetlemiştir:

- Eğim-yükseklik karışıklığı: öğrenciler en yüksek değer ve en büyük eğim arasında ayırım yapamazlar, çünkü eğimin yorumlanmasında yükseklik güçlü bir çeldirici görevi yapmaktadır (Bell ve Janvier, 1981; Clement, 1985; McDermott, 1987).
- Öğrencilerin doğrusal grafik çizme ve bazı formlar ya da düzgün simetrik ve sürekli grafikler gibi uygun grafikler düşünme eğilimindeki prototipleri.
- Öğrenciler genellikle doğrusal (lineer) grafikler çizme eğilimindedir. Düzgün, simetrik ve kesikli olmayan/süreklilik içeren grafiklerle karşılaşmayı beklerler (Leinhart ve diğerleri, 1990).
 - *y=x örneği:* Öğrenciler uygun olmayan durumlarda bile $y=x$ grafiği çizme eğilimindedir.
 - *Orijin örneği:* Orijin öğrenciler için grafiğin vazgeçilmez noktasıdır ve öğrenciler grafiği orijinden başlatma eğilimindedir (örneğin; bir kişinin doğumdan 30 yaşına kadar boyundaki değişimi gösteren grafiği çizerken sıfır noktasından başlatması gibi).
- *Resim gibi grafik:* Çoğu öğrenci grafiği, ilişkileri gösteren soyut sunumlar olarak görmekten çok, bir durumun gerçekteki resmini ifadesi olarak düşünmektedir (Örneğin; konum- zaman grafiğinde iki doğrunun birbiri ile kesişmesi iki arabanın birbiri içinden geçtiği şeklinde yorumlanması gibi) (Clement, 1985).

- Öğrencilerin x ve y koordinatlarını ters çevirme eğilimleri vardır ve yabancı bir durumla karşılaştıklarında bilgilerini düzenlemek konusunda yeteneksizdirler (Kerslake, 1993).
- *Ölçeği yanlış okuma*: Öğrenciler ölçeği okurken/kullanırken daha çok 1’lik veya 10’luk ölçeği kullanma eğilimindedirler (Williams ve Ryan, 2000).

Birçok matematik sürecine benzer olarak, grafik çizimi yorumlama ve inşayı içerir. Yorumlama genellikle öğrencilerin bir grafiği okumaları ve anlamlandırmaları veya ondan anlam çıkarmaları demektir (Leinhardt ve diğerleri, 1990). Wainer (1992) grafik yorumlamaya ait bilgi sürecinin üç seviyesini tanımlamıştır: a) veri elde etmeyi içeren temel seviye (örneğin, sınıfta en yüksek notu alanlar) b) grafiğin parçalarında görülen trendleri içeren orta seviye (örneğin, 1990 ve 1993 yılları arasında, hangi firma en büyük gelişme oranını göstermiştir?) ve c) verinin derinlemesine yapısının anlaşılmasını içeren kapsamlı seviye (örneğin, verilen grafik ışığında, kızlar erkeklerden daha hızlı mı kilo alırlar?) (Mevarech ve Kramarsky, 1997).

Yorumların aksine, inşa yeni bir şey üretme hareketi, verilerden (veya bir fonksiyon ifadesinden veya bir tablodan) noktalar çıkarma veya bir grafik inşa etme. Tam anlamıyla, inşa kaba veriden (veya soyut fonksiyondan) seçim süreci ve eksenleri işaretleme, ölçü seçimi, birimlerin tanımlanması ve çizimini ifade eder (Leinhardt ve diğerleri, 1990). Leinhardt ve diğerleri ilaveten “inşa yorumlamaktan epey farklıdır. Yorumlama verilen bir parça veri gerektirirken ve ona dayanırken, inşa verilmemiş olan yeni parçalar üretmeyi gerektirir” der.

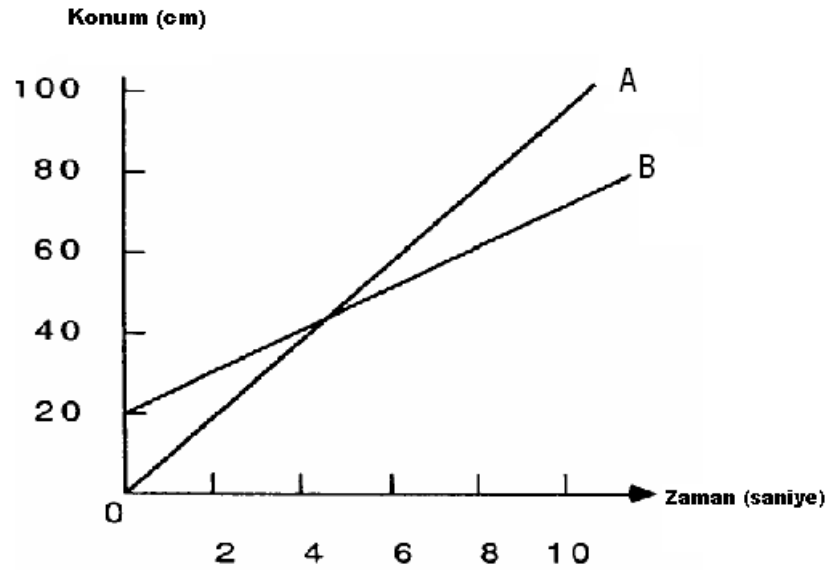
Leinhardt ve diğerleri (1990) kavram yanılgısını “açıkça ve tekrarlanabilir şekildeki öğrenci bilgilerinin özelliklerinin yanlışlığı” olarak tanımlar. Kavram yanılgısı terimini kullanmış olan Leinhardt ve diğerleri (1990), bu alandaki öğrenci güçlüklerini dört tür kategoride sınıflandırmıştır:

- Eğim ve yüksekliği karıştırma;
- Bir aralık ve bir noktayı karıştırma;
- Grafiği bir resim veya harita gibi görme;

- Bir grafiği ayırık noktalardan oluşmuş noktalar olarak algılama

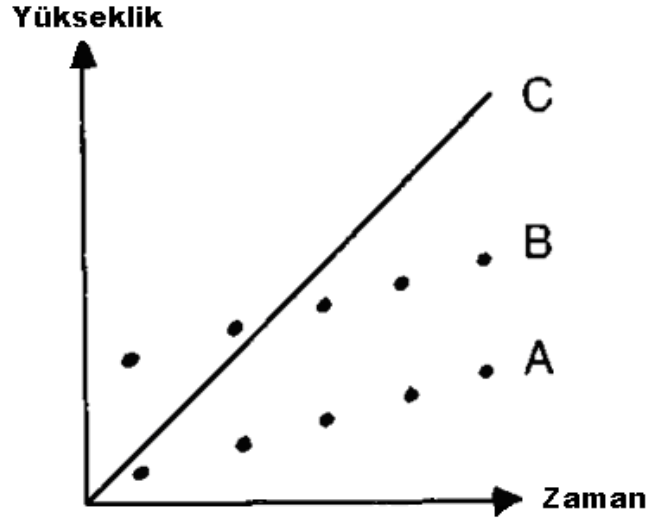
2.2.2.1.Eğim/Yükseklik Kavram Yanılgısı

Eğim/yükseklik karmaşası, öğrenciler yanlışlıkla eğimin yerine maksimum veya minimum değerlerini yazdıklarında ortaya çıkar (Brassel and Rowe, 1993; Beichner, 1993; Bell, Brekke ve Swan, 1987a, 1987b; Bell ve Janvier, 1981; McDermott ve diğerleri, 1987: Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997). Bu karışıklık hem yorumlamada (McDermott vd., 1987) hem de inşada (Janvier, 1978) bulunur. Mesela, McDermott ve diğerleri. (1987) fizik öğrencilerine kesişen iki doğrunun iki nesneyi temsil ettiği mesafe-zaman grafiğini sunmuştur. İki doğrunun eğimi farklı olduğundan iki nesnenin hızı asla aynı olmamasına rağmen, “A ve B nesneleri hiç aynı hızda giderler mi?” sorusu sorulduğu zaman, birçok öğrenci yanlışlıkla iki doğrunun kesiştiği noktayı iki nesnenin hızlarının eşit olduğu zaman olarak seçmiştir (Mevarech ve Kramarsky, 1997).



Şekil 2.10. Öğrencilerin eğim/yükseklik kargaşasını gösterdiği görevlerin grafiği.

Benzer şekilde, yükseklik ve eğim arasındaki karışıklık, öğrencilerin iki farklı ebattaki sürahinin doldurulmasına ilişkin zaman- yükseklik grafiğini hatalı bir şekilde inşa etmelerine sebep olmuştur. Janvier (1978) de öğrencilere aşağıdaki grafik verildi ve A'nın suyla dolduruluyor olan geniş bir sürahiye temsil ettiği söylendi.

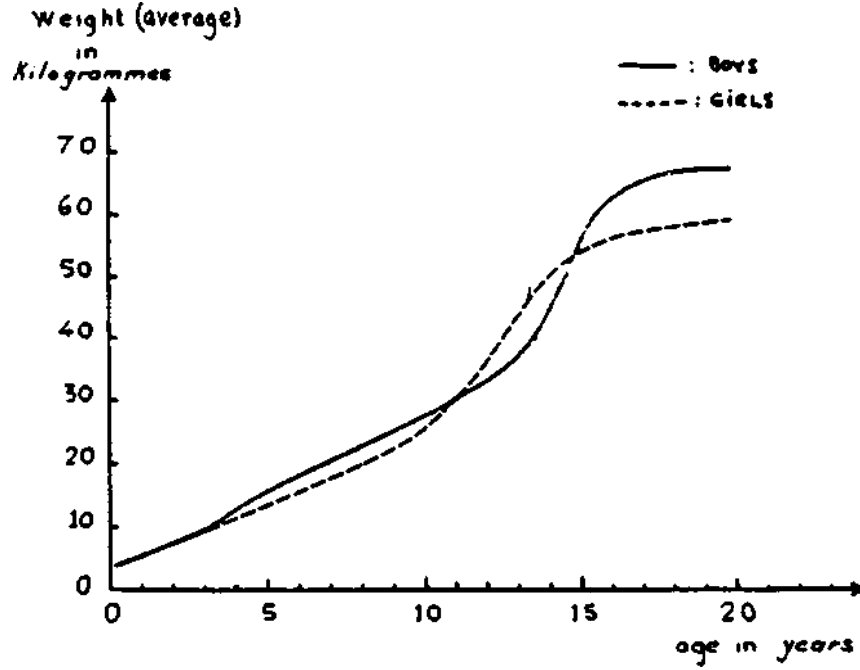


Şekil 2.11. Öğrencilerin eğim/yükseklik kargaşasını gösterdiği görevlerin grafiği.

Daha sonra, onlardan, suyla dolduruluyor olan daha dar bir sürahi için bir grafik çizmeleri istendi. Doğru grafik C'yi çizmek yerine, öğrencilerin çoğu grafik B'yi çizdi. Öğrenciler, suyun daha dar sürahide daha yüksek olduğu gerçeğinin hesabını yaptı, ama grafiğin eğiminin aynı zamanda daha büyük olacak olduğunu belirtmekte başarısız oldular (Leinhardt ve diğerleri, 1990).

2.2.2.2.Aralık/Nokta Kavram Yanılgısı

Aralık nokta karışıklığı, öğrenciler hata ile bir aralıktan ziyade tek bir noktaya yoğunlaşırlarsa ortaya çıkar. Örneğin, iki topluluğun büyümesinin karşılaştırılmasında(örneğin, kızlar ne zaman erkeklerden daha hızlı büyürler?), öğrenciler bir aralıktan ziyade, bir tek noktaya(genellikle maksimum noktası) bakarlar (Bell ve Janvier, 1981; Bell ve diğerleri., 1987a, 1987b; Preece, 1983a: Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997).

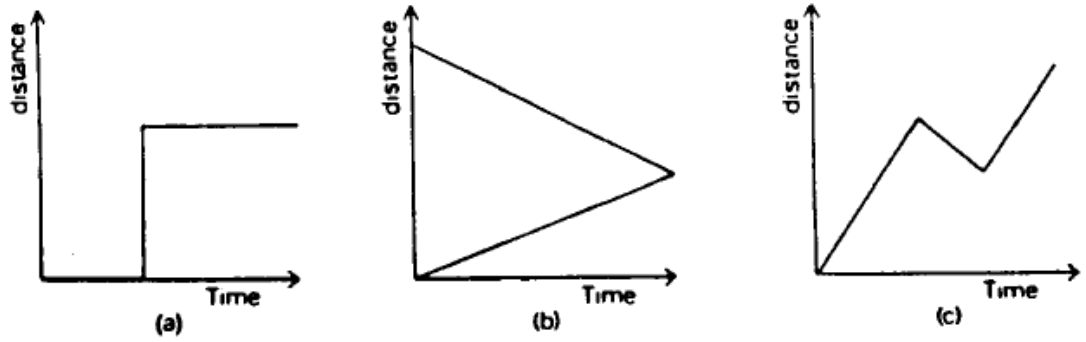


Şekil 2.12. Kızların ve erkeklerin büyüme grafiği

Grafiğe göre, Preece (1983b), “Ne zaman kızlar erkeklerden daha ağırdır?” ve “Ne zaman kızlar erkeklerden daha hızlı büyüyor?” soruları sorulduğunda öğrencilerin sıklıkla tek bir noktaya cevap verdiğini buldu. Preece (1983b)’ye göre öğrenciler kesin olmayan bir ifadeyle “ne zaman ve en kolay seçeneği aldı ve cevap olarak tek bir nokta verdi” sözcüğünü buldu (Leinhardt ve diğerleri, 1990). Bell ve Janvier(1981) öğrencilerin, iki mikrop kültürünün nüfuslarında değişiklikleri beslemenin onların zamanlarına ilişkin değişimini gösteren bir grafiği yorumluyor olduğunda benzer bir eğilimi belirledi. Öğrencilere B popülasyonun A popülasyonundan ne zaman daha büyük olduğu sorulduğunda, onlar B popülasyonunun A popülasyonundan daha büyük olduğu tam aralığın yerine B’nin maksimumunu vermeye yöneldiler (Leinhardt ve diğerleri, 1990).

2.2.2.3.Resim Gibi Grafik Kavram Yanılgısı

Grafiğe bir resim olarak yaklaşma, öğrenciler durumun bir sözlü resmi olarak bir durumun grafiğini yorumlarken/inşa ederken ortaya çıkar (Bell ve diğerleri, 1987a, 1987b; Leinhardt ve diğerleri, 1990; Strauss ve Schneider, 1993; Vandeputte, 1993: Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997). Örneğin, Kerslake (1981) öğrencilere Şekil13 deki gibi konum zaman grafikleri verildiği zaman,



Şekil 2.13. Resim Gibi Grafik Kavram Yanılgısına bir örnek

öğrenciler (ilk grafik için) “ileri, yukarı ve ileri gitme” veya “dik bir duvara tırmanma” veya “doğuya, sonra kuzeye daha sonra doğuya gitme” gibi şeyler söylediler. Son grafik için bazı öğrenciler, “tepe yukarı, tepe aşağı sonra tekrar tepe yukarı gitme” veya “bir dağa tırmanma” gibi şeyler söylediklerini ifade etmiştir (Leinhardt ve diğerleri, 1990).

Aynı zamanda inşa sırasında, birçok öğrenci, konum-zaman grafiğinden ziyade nesnelerin hareket yollarını gösteren verinin sunumlarını ikonik olarak çizme eğilimindedirler (Brassel ve Rowe, 1993; Strauss ve Schneider, 1993: Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997).

2.2.2.4. Bir Grafiği Ayırık Noktalardan Oluşmuş Noktalar Olarak Algılama

Nispeten konuşmak gerekirse, öğrencilerin büyük bir oranı grafikleri nokta şeklinde okuma eğilimindedir (Kerslake, 1981; Bell ve diğerleri, 1987a; Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997). Bu eğilim özellikle önemlidir, çünkü sıralı ikililerden oluşmuş bir setten grafik üretebilme yeteneğine sahip birçok öğrencinin sürekli olan bir grafiğin anlamını kavrama becerilerinde oldukça yetersiz olduğunu gösteren sayısız örnek vardır (Kerslake, 1981: Akt. Mevarech ve Kramarsky, 1997). Bir doğrusal grafikte kaç nokta bulunduğu sorulduğu zaman, öğrenciler çizmiş oldukları kesin sayıda noktayı vermişler, diğerleri doğruların kesişme sayısını saymış ve hala diğerleri tamsayı noktalarının sayısını vermiştir. Aynı şekilde, verilmiş bir sayı setinden bir grafik oluşturulması istendiği zaman, 6–12 arası sınıflardaki öğrenciler sıralı ikilileri yerleştirmede zorluk yaşamamışlar, fakat en uygun doğruyu çizerken (Padilla ve

diğerleri, 1986) veya değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlarken (Wavering, 1989) zorluklar sergilemişlerdir. Grafikleri nokta şeklinde okuma, öğrencilerin reel sayıların sürekliliği fikrini anlamada zorlanmalarıyla ilişkilendirilebilir (Mevarech ve Kramarsky, 1997).

i. Fonksiyonun Temsilleri Arasındaki Manasal İlişkilerin Anlaşılmasına İlişkin Zorluklar

Öğrencilerin fonksiyon kavramının temsilleri (grafikler, cebirsel ifadeler, v.s.) arasında ilişkilendirmeler yapabilmeleri, gerektiğinde birinden diğerine rahat bir şekilde geçebilmeleri fonksiyon denilen soyut matematiksel düşünceyle ilgili bilgi derinliklerinin en önemli göstergelerinden biridir (Thompson, 1994).

Ancak yapılan çalışmalar çok az sayıda öğrencinin bu bilgi derinliğini ve düşünce esnekliğini yakalayabildiğini göstermektedir. Sfard (1992) çalışmasında, öğrencilerin cebirsel ve grafik gösterimler arasında ilişki kurmakta zorlandıklarını tespit etmiştir (Tekin ve diğerleri, 2009). Markovits, Eylon ve Bruckleimer (1986) yapmış olduğu çalışmada, dokuzuncu sınıf düzeyindeki öğrencilerin ancak üçte biri grafiği verilen bir fonksiyonun, x ve y eksenlerini sırasıyla 2 ve -2 noktasında kesen lineer fonksiyon grafiği, cebirsel formunu elde edebilmişlerdir. Yine aynı çalışmada öğrencilerin dörtte birinden daha az bir kısmı verilen bir parçalı fonksiyonun,

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 4, & x \neq 2 \text{ ise}, \\ 1, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

Grafiğini çizebilmiştir. Markovits, Eylon ve Bruckleimer (1986), öğrencilerin fonksiyonun cebirsel formunu grafiğe geçirirken daha az zorlandıklarını; grafiği cebirsel forma dönüştürürken ise daha fazla zorlandıklarını belirlemiştir. Buna sebep olarak öğrencilere derslerde verilen örneklerde daha çok cebirsel formdan grafiğe dönüştürme şeklinde bir sürecin takip edilmesini göstermiştir.

Even'ın (1988) yaptığı çalışmada, öğretmen adaylarının çok az bir kısmının fonksiyonların cebirsel ve grafiksel formları arasında ilişkilendirmeler yapabildiklerini ve fonksiyon bilgilerini adapte ederek farklı alanlardaki problem

çözümlerinde kullanabilme becerisi geliştirmiş olduklarını göstermektedir (Dede ve diğerleri, 2010). Bayazit'in (2006) çalışması ise meslekte uzun yıllar çalışmış tecrübeli öğretmenlerin bile kendilerini tek tür temsile (cebirsal ifadelerle) kısıtladıklarını ve fonksiyonların cebirsel ve grafiksel formları arasında ilişkilendirme yapmakta oldukça zorlandıklarını ortaya koymuştur (Dede ve diğerleri, 2010).

Diğer bir zorluk ise öğrencilerin bir durumu veya modeli açıklayıcı bir fonksiyona ait tabloyu tamamlamaya çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Ayrıca öğrenciler fonksiyonel değişkenler olan semboller tablodan denkleme dönüştürürken de zorluk yaşarlar (Herscovics, 1989; Akt. Ural, 2006). Kieran (1992) öğrencilerin denklemlerden ve tablolardan hareketle grafik çizmede ve grafiği yorumlamada da zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir (Ural, 2006).

ii. Fonksiyon Konusunda Kullanılan Sembol Ve Simgelere İlişkin Zorluklar

Fonksiyonlar konusunda kullanılan sembollerden her biri bu kavrama ilişkin bir manayı temsil etmektedir. Sembollerde var olan mananın anlaşılması ise öğrencilerin fonksiyon düşüncesini anlamalarında belirleyici olmaktadır. Ancak, yapılan çalışmalar sadece öğrencilerin değil, meslekte tecrübe kazanmış öğretmenlerin dahi sembollerdeki manayı anlamakta zorlandıklarını göstermektedir. Norman'ın (1992) yapmış olduğu nitel çalışmada yer alan lise öğretmenlerinin çoğu bir fonksiyonu temsil için kullanılan ' f ' sembolü ile x gibi bir değişkenin bu fonksiyon altındaki görüntüsünü temsil için kullanılan $f(x)$ sembolü arasındaki mana farkını anlamakta yetersiz kalmışlardır (Beyazıt, 2008).

Öğrenci yanılgıları $y=f(x)$ gösteriminin ve ' f ' sembolü ile ' $f(x)$ ' gösterimi arasındaki ayırımın yorumu ile başlar. $f(x)$ gösterimi, üzerinde hesaplama yapılan bir cebirsel ifadeyi yani Gray ve Tall (1994)'un kuramında ele aldığı gibi süreci, yalnız f ise matematiksel nesne olarak bir fonksiyonu temsil eder. Ancak, zaman zaman, hem süreç hem de nesne ' $f(x)$ ' gösterimi ile temsil edilir. Öğrencilerde bu bağlamda sıklıkla görülen güçlük ' $f(x)$ ' ve ' f ' sembollerini farklılaştırmama durumudur (Kabael, 2010).

Diğer taraftan, öğrenciler fonksiyonel değişkenleri göstermek için seçilen harflerin keyfiyetinin de farkında değildirler. Onlar literatürde kullanılan bir sembolü değiştirmenin bir fonksiyon tablosunun değerlerinde bir değişikliğe neden olabileceğine inanırlar (Herscovics, 1989; Akt. Ural, 2006). Öğrenciler fonksiyonu genellikle $f(x)$, $g(x)$ gibi sembollerle öğrendiklerinden $\square(\sigma)=2\sigma+k$ gibi bir ifadeyi fonksiyon olarak algılamakta güçlük çekerler (Ural, 2006).

2.3. ÇALIŞMANIN KURAMSAL TEMELLERİ

Bu çalışmada kuramsal çerçeve olarak iki farklı kavram kullanılmıştır. Bunlar, Brousseau tarafından geliştirilen Didaktik Antlaşması ve farklı matematik eğitimcileri (Tall, Duval gibi) tarafından geliştirilen çoklu temsiller kavramlarıdır. Şimdi bu kavramlar sırasıyla açıklanarak çalışma da nasıl kullanıldığı hakkında bilgi verilecektir.

2.3.1. Didaktik Antlaşması Tarihçe

Matematik didaktiği kavramı 1974 yıllarında Fransa’da kullanılmaya başlandı. Bu teorik çalışma alanı, eğitim/öğretim durumlarının matematik özelinde ve okul çerçevesi içerisinde ele alınması üzerinde durmaktadır. Bu çalışmalarda, matematik dersine özgü başarısızlığın nedenlerinin öğretim sürecinin dışında değil de bu öğretim sürecinin bir parçası olduğu ifade edilmektedir.

“Didaktik antlaşması” kavramı ise, matematik didaktiğinin önemli teorilerinden biri olan Didaktiksel Durum Teorisi’nin bir alt başlığı olarak, ilk defa 1978 yılında G. Brousseau tarafından, matematik dersine özgü başarısızlıkların olası bir nedeni olarak ifade edilmiştir. Didaktik Antlaşması kavramına geçmeden önce Didaktiksel Durum Teorisi’nden kısaca bahsedilecektir.

2.3.2. Didaktiksel Durum Teorisi

Didaktiksel Durum Teorisi, ilgili disiplinin konu alan bilgisi üzerinden öğrenme etkinlikleri, ortamı ve öğelerini dikkate alan bir yaklaşım içerir. Teori, öğrenme ve öğretme üzerine bazı varsayımlar üzerine kurulmuştur. Bu varsayımlar oyun metaforu kullanılarak şöyle ifade edilebilir: Öğretmen, didaktik ortamı ve öğrenciden oluşan bir sistem içerisinde bir oyuncudur. Öğrenci, didaktik ortamında oynanan

oyunda kendisini oynamaktadır. Öğrenci için bilgi, oyunun temel kurallarını ve stratejileri kavramak ve kazanan stratejiye ulaşmaktır. Öğretmenin amacı, oyunun kurallarını, stratejilerini ve daha sonra da kazanan stratejiyi anlamaya yarayacak en uygun araçlara sahip bir oyunu tasarlamak, bu oyunun oynanacağı öğrenci - didaktik ortamı sistemini kurmak ve öğrenciyi oyuna katmaktır.

Didaktiksel Durum Teorisi'nde *didaktik ortamı*, ekolojik bakış açısından “balığın yaşadığı doğal çevre” tanımında olduğu şekilde anlaşılmalıdır. Dolayısıyla “*ortam*” öğrencinin içinde bulunduğu doğal ortamdır. Her bir dersin kendine has didaktik ortamı olduğu gibi, bir dersin farklı konularının işlendiği ders saatlerinde oluşan ortam da o zaman dilimine has bir ortamdır. Öğrenci her bir ortam ile başa çıkmak zorundadır. Öğrenci söz konusu ortamda hayatta kalabilmek için oyunun kurallarını bilmeli ve kazanan stratejileri geliştirmelidir. Bu teoriye göre öğrenme, öğretmenden öğrenciye bilgi aktarımının sonucuna indirgenemez. Öğrenme, içinde bulunulan didaktik ortamında oluşan durumların anlamlandırılması ve bu durumlarla başa çıkılması olarak düşünülmektedir. Bir bilginin öğretilmesi, öğrencinin hayatta kalmak için söz konusu bilgiyi kullanmak zorunda kalacağı bir didaktik ortamın oluşturulmasını gerektirir. Eğer oluşturulan ortamda hayatta kalmak için herhangi bir matematiksel bilginin kullanılması gerekmiyorsa, sadece sosyal davranışlar hayatta kalmak için yeterli ise böyle bir ortamda öğrenci sadece sosyal davranışlarda bulunmayı öğrenebilir ancak matematiksel bir bilgi öğrenemez. Eğer öğretmen öğrencilerine bir problemi çözer ve onlardan da sadece sonucu bulmalarını isterse, öğrenciler problemin sonucunu bulmayı öğrenir, nasıl çözüldüğünü öğrenmez. Didaktik ortamda öğrencilerin oynamak zorunda oldukları oyunun türü ve bu ortamda hayatta kalmak zorunda olmaları, öğrencilerin hangi tür bilgileri öğrenmek zorunda kalacaklarını belirler. Dolayısıyla Didaktik Durum Teorisi'nde bilgi, öğretmen tarafından düzenlenmiş özel ortamda öğrencilerin etkileşimlerinin bir sonucudur ya da öyle anlaşılmalıdır (Balacheff, 1993, 133).

Oyunlarda amaç oynayanların oyunu kazanmasıdır. Oyunu kazanma arzusu etrafında geliştirilen stratejilerle oyunlar şekillenmektedir. Oyunu ilginç ve oynanabilir yapan şeyler de oyunun kuralları ve o oyunu kazanmak için oynayanların kullandıkları (ya da geliştirdikleri) stratejilerdir. Her oyunda olduğu gibi bu oyunun da kuralları ve

stratejileri vardır. Öğretmen ile öğrenci-didaktik ortamı arasında, işlenen konuya özgü olarak tanımlanan bu kurallar ve stratejiler öğretmen ve öğrenci arasında yapılmış olan *didaktik antlaşması*’nı oluşturmaktadır.

2.3.3.Didaktik Antlaşması Kavramı

1981 yılında, G.Brousseau ve J.Peres matematik didaktiği alanında “Gael Durumu” olarak ün kazanan ve Gael adında bir öğrenci üzerinde yapılan durum çalışması hakkında gözlemlerini yayınlamışlardır. Bu gözlemlerinin kısaca özeti aşağıdaki gibidir:

Gael, 9 yaşında ilköğretim 3.sınıf öğrencisidir ve sınıf tekrarı yapmaktadır. Diğer derslerde yeterince başarılı ancak matematikten sürekli başarısız olması araştırmacıların dikkatini çeker. Gael, sorulara verdiği cevapları “bana öyle öğretildi”, “öğretmenim bana böyle yapmamı söyledi” ya da “sınıfta hep böyle yapıliyordu” şeklinde açıklamaktadır. Dolayısıyla “bir şeyi bilmek öğretmenin modellediği eylemlerin tekrarı demektir” algısına uygun olarak hareket etmekte ve matematik öğretmenin istediği yanıtı bulmaya çalıştığı gözlenmektedir. Öğrencinin başarısızlığının temelinde aslında herhangi bir sorun bulunmamaktadır. Ancak sahip olduğu algılar öğrenciyi matematik öğrenmekten alıkoymaktadır. Bu nedenle, yapılan seanslar Gael’in bu didaktik durum algısında bir değişiklik meydana getirmeyi amaçlamıştır. Daha ileriki dönemlerde, Gael yaşadığı bu duruma karşı olan duruşunu, kendisine sorulan probleme adapte olarak değiştirmeye başlamıştır (Buradaki problem, bir torbadaki toplam nesne sayısını ve torbadan alınan nesne sayısını bildiğimiz durumda, torbada kalan nesne sayısının hesaplanmasıdır. Gael, torba ve nesnelere somut olarak sahiptir). Bu davranış değişimi sürecinde Gael soruyu çözmeye çalışmış ve çözümü önce tahmin etmiş, sonra kontrol etmiştir. Bu süreç boyunca, Gael daha önceden yaptığı gibi uygulanması gereken bazı algoritmaların ya da prosedürlerin arkasına saklanmadan, sorulara cevap ararken kendi bilgilerini adapte etmeye ve kendi düşüncesini ön plana çıkarmaya çalışmıştır.

G.Brousseau (1984, 1986, 1987,1988a, 1988b, 1991, 1994)“*didaktik antlaşması*”nın tanımını, öğretmen, öğrenci ve bilgi temelleri üzerinde şu şekilde ifade etmektedir: “Öğretmenin öğrenciden ve öğrencinin öğretmeninden beklediği davranışlar topluluğu.

Bu davranışların çok az bir kısmı açık bir şekilde ifade edilir, birçok davranış ise kapalı bir şekildedir”. Bu ifade, sözleşme gibi işleyen ve öğretmen-öğrenci-bilgi (bu durumda matematik) arasındaki üç yönlü etkileşimi/iletişimi düzenleyen gizli normların bulunduğunu dile getirmektedir. Bu antlaşmanın büyük bir kısmı, öğretmen ve öğrencinin konuyla uğraşmak için bir araya geldiği ilk anda oluşmaktadır. Öğretmen ve öğrenci arasında karşılıklı bir zorunluluk vardır: Matematik için baktığımızda, öğretmen öğrenciye matematik öğretmelidir, öğrenci de öğretmenin yardımıyla matematik öğrenmelidir. Brousseau böyle bir sözleşmenin belirli ifade şekillerinin kullanılırken aynı zamanda sürekli gözden geçirildiğini de var sayar. Didaktik antlaşmasının bu şekilde gözden geçirilmesi, öğretmen ve öğrenciye beraber çalışma fırsatı verir aynı zamanda kendilerine düşen çalışmaları yaparken, sorumluluklarını da yerine getirme imkânı sağlar.

Didaktiksel Durum Teorisi’nin en temel varsayımlarından biri belli bir bilginin öğretimi üzerine odaklanmasıdır. Bu nedenle didaktiksel antlaşmayı oluşturan kural ve stratejilerde doğal olarak öğretilecek bilgi ile az ya da çok ilişkili olacaktır. Ya da en azından öğretilecek bilginin değişmesi halinde kurallarda değişecektir. Örnek olarak sonsuz kavramının öğretimi sırasında yapılan didaktik antlaşmasının kuralları ve stratejileri ile limit konusunun öğretimi sırasında yapılan didaktik antlaşmasının kuralları ve stratejileri farklıdır.

Satranç, dama vb. gibi alışılmış oyunlarda, oyunun başlangıcında oyunun kuralları belirlidir. Didaktik antlaşmasının kuralları ise açık değildir. Örneğin dersin başında öğretmen ve öğrenciler uyulması gerekli kurallar listesi hazırlamaz. Ancak hem öğretmen hem de öğrenciler bilirler ki açık olarak ifade edilmiş olmasa da kurallar vardır ve uyulmak zorundadır. Kuralın varlığı bu kuralı bozan bir davranışın sergilenmesiyle ortaya çıkar. Bu kurallar sınıftan sınıfa, kültürden kültüre değişebileceği gibi, aynı sınıfta öğrenciler ve öğretmen aynı olsa bile zaman içinde değişebilir. Pek çok kuralın değişken olması yanında sınıftan ve kültürden bağımsız olarak değişmeyen kurallar da vardır. Örneğin öğretmenden sınıfta öğretme sürecinde çeşitli etkinliklerde bulunması, öğrencilerden de bu etkinliklere katılmaları beklenir. Eğer öğretmen sınıfta kendisinden beklenen öğretme davranışlarını sergilemezse örneğin sınıfta ders anlatmayı bırakıp müzik dinlerse ya da gazete

okursa, didaktik anlaşmasının dışına çıkmış olur. Büyük ihtimalle öğrenciler ailelerine, onlarda okul yönetimine öğretmeni şikâyet ederler. Eğer didaktik anlaşmasını bozan davranışın sahibi bir öğrenci ise, bu durumda da öğretmen tarafından uyarılır ya da cezalandırılır. Didaktik anlaşmasının delinmesine müsaade edilmez.

Didaktik anlaşması öğrencilerin başarısızlıklarının altında yatan nedenlerin sadece çevresel faktörlerden, zekâ seviyesinden ya da kuralsal anlamalardan kaynaklanmadığını öngörmekte ve yeni bir etkileşimsel perspektif sunmaktadır. Bu perspektif bağlamında başarı ya da başarısızlık, eğitim ortamında etkileşimler aracılığıyla oluşur. Etkileşimciliğin didaktik anlaşma üzerindeki etkisi alttaki örnekle daha iyi anlaşılabilir. Aşağıda yer alan diyalog bir hazırlık sınıfında geçmektedir (Sarazy, 1995). Bir öğretmen adayı birkaç haftadır bu sınıfa matematik dersi vermektedir. Öğrencilerden tahtaya yazılı olan “38, 24, 49, 46, 51” sayılarını artan bir şekilde sıralanması istenmektedir. Öğretmen adayı tahtadaki iki sayıyı göstererek şu soruyu sorar:

— Öğretmen: Niçin 46 ve 49 sayılarını buraya koyduk? (imalı biçimde, bu sırada: 46 ve 49)

— A öğrencisi: Çünkü aksi halde, sadece diğerleri olsaydı soru çok kolay olurdu.

— Öğretmen : (Sert bir ses tonuyla) Sana sorulan bu değil!... Yani? (bütün sınıfa dönerek)

— A öğrencisi : (Çekingen bir ses tonuyla) Bilmiyorum...

— B öğrencisi: Çünkü 46, 49’dan daha küçüktür.

— Öğretmen: Aferin! (İki sayı arasına “<” işareti yazar ve düzeltmeye devam eder)

Yaşanan diyalog incelendiğinde, genç öğretmen adayı öğrenciler için pek zorluk içermeyen bir alıştırmaya örneği seçmiştir. A öğrencisi için öğretmenin sorduğu sorunun nedeni onun basit bir yanıt beklemiyor oluşudur; çünkü alıştırmaya asıl zorluğu, onlar basamağı aynı fakat birler basamağı farklı olan bu iki sayının (46, 49) yer almasından kaynaklanmaktadır. Öğrenci verdiği yanıtla sorunun zorluğunun nereden kaynaklandığını açıklayarak öğretmenin bu alıştırmayı hazırladığı didaktiksel değişkenleri belirtmiştir. Ancak, öğretmenin bu yanıtla gösterdiği tepkiyle ortaya konulduğu gibi, öğrencinin bu davranışı onun “öğrencilik görevi”

kapsamına girmemektedir. A öğrencisinin bu yanıtı, öğretmenin sadece “46<49” şeklinde basit bir yanıt beklemeyecek oluşunu düşünmesi ile açıklanabilir.

1970’lerde yaygın olan, problemi psikolojik açıdan değil de sosyolojik açıdan ele alma anlayışının da etkisiyle, Brousseau, yukarıda bahsedilen öğrencinin (Gael) probleminin kaynaklarını zekâ, kişilik özellikleri gibi psikolojik gerekçelere dayandırmak yerine, didaktik antlaşması gibi sosyolojik ve kültürel gerekçelere dayandırmıştır. Etkileşimcilik (interactionism) yaklaşımının yaygınlaştığı dönemde her olayı sosyolojik etkileşimlerle açıklamak çok yadırganacak bir durum değildir. Çünkü okul ortamında soru sorulması ile didaktik olmayan bir konuda soru sorulması oldukça farklı şeylerdir. İkincisinde insanlar yanıtlarını bilmedikleri bir soruyu karşılarındakine yöneltirken gerçekten bir şeyler öğrenmeye çalışmaktadır. Oysa okulda bir öğretmen öğrencisine kesin olarak sadece yanıtını bildiği soruları sormaktadır. Bu nedenle okula ilk defa gelen bir öğrencinin şaşırması kaçınılmazdır. Ancak bu durumu kabullendiği zaman, kendisinin ve öğretmenin davranışlarını kısıtlayan didaktik antlaşmanın varlığını da kavramış olmaktadır.

Didaktik antlaşması birçok değişkene bağlıdır. Bunlardan en önemlisi uygulanan öğretim yöntemidir. Pedagojik seçimler, öğrencilerden istenilen çalışma stili, formasyonun amaçları, öğretmenin epistemolojisi, değerlendirmenin özellikleri vb. tüm bileşenler bu öğretim yöntemi kapsamındadır. Özellikle bilinen bir antlaşma değiştirildiğinde veya bir üst aşamaya geçildiğinde didaktik antlaşmasının etkisi ortaya çıkmaktadır. Brousseau, öğrenci zorluklarının büyük bir kısmının bu etkilerle açıklanabileceğini belirtmektedir. Örneğin, öğrenciler, ilköğretimin başlangıcında geometrik şekillerle somut olarak karşılaşır. Daha sonra soyut ve zihinsel olarak geometrik şekilleri inceleme dönemine girerler. “Verilen AB ve CD doğru parçalarının uzunlukları eşit midir?” sorusuna başlangıçta ölçerek, karşılaştırarak, görselliklerden yararlanarak vb. teknikler kullanılırken daha sonra öğrencilerden bazı teori ve çıkarımlar yardımıyla bu soruya cevap vermeleri istenmektedir. Dolayısıyla aynı soruyla ilgili beklentiler zamanla değişebilmekte ve didaktik antlaşması bir üst aşamaya geçmektedir.

2.3.4.Didaktik Antlaşması ile İlgili Örnek Çalışmalar

Didaktik antlaşması kavramı ve bu kavramın öğretime yansması üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Özellikle Fransa’da matematik eğitimi alanındaki çalışmaların birçoğunda teorik çerçeve olarak kullanılan bu kavramla ilgili öne çıkan bazı çalışmalardan örnekler sunulacaktır.

Baruk (1985), “Kaptanın Yaşı” ile ünlenen çalışmasında, ilköğretim 6 ve 7. Sınıf öğrencilerine şu soruyu sormuştur:

Bir gemide 26 koyun ve 10 keçi vardır. Bu geminin kaptanının yaşı kaçtır?

Bu soru, sınıf ortamında ve bir matematik öğretmeni tarafından sorulduğunda öğrencilerin % 82 si soruda verilen rakamları kullanarak kaptanın yaşını bulmaya çalışmıştır (bu öğrencilerin neredeyse tamamı verilen bu iki sayıyı toplayarak 36 cevabını vermiştir. Çünkü diğer işlemlerle bir kaptanın yaşına uygun bir rakam elde edilememektedir!). Ancak aynı soru aynı seviyedeki başka öğrencilere, sınıf dışında ve matematik öğretmeninden farklı birisi tarafından sorulduğunda öğrencilerin büyük çoğunluğu “böyle saçma sorumu olur? Bu verilerle kaptanın yaşını bulamayız” ifadesine benzer cevaplar vermişlerdir.

Araştırmacı, bu çalışmadan yola çıkarak matematik öğretiminin öğrencileri “otomatematik” leştirdiğini ve dolayısıyla böyle absürt bir soruya absürt cevaplar verdiklerini dile getirmektedir. Bunun sebebini (öğrencilerle yapmış olduğu mülakatlar neticesinde) öğrencilerin sınıf ortamında matematik öğretmeni ile kapalı ya da açık olarak bazı antlaşma maddeleri oluşturmalarına bağlamaktadır. Araştırmacı, bu antlaşma maddelerini şu şekilde sıralamaktadır:

- Bir problem “4 işlem” yapılarak çözülür. Yapılması gereken uygun işlemi bulup, hata yapmadan uygulamaktır.
- Problem metnindeki bazı kelimeler bize hangi işlemi yapmamız gerektiğini tahmin etmemizi sağlar.
- Her ne kadar gündelik kavramlar kullanılsa da sorulan sorunun genellikle gerçek hayatla hiçbir ilişkisi yoktur.

- Problem cümlesinde problemi çözmek için gerekli tüm veriler vardır ve bu verilerin hepsini kullanmak gerekir.
- Problem cümlesinde çözüm aşamasında kullanılmayacak gereksiz veri bulunmaz.
- Verilen sayılar karmaşık olmayan “basit” sayılardır, o halde çözüm de basit olmalıdır. Yoksa yanılma ihtimali olabilir!
- Her durumda matematikte bir problem için her zaman bir cevap vardır ve o cevabı öğretmen bilir. Dolayısıyla, biraz sonra öğretmen tarafından kontrol edileceğinden bir cevap vermek gerekir.
- Matematikte bir problemin cevabı sayısal olmalıdır. Cevabı bilinmeyen, cevabı sözel olan ya da birçok farklı cevabı olan bir problem yoktur.

Başka bir çalışmada ise ilköğretim 6. Sınıf öğrencilerine aşağıdaki soru sorulmuştur (Claché P., Salin M-H., Sarazy B., 2005):

Aşağıda boş bırakılan yerlere $\subset$, $\not\subset$, $\in$, $\notin$ sembollerinden uygun olanı yerleştiriniz.

$\{a\} \dots \{a,b,c\}$

$b \dots \{a,b,c\}$

Öğrencilerin hemen hemen hepsi soruya doğru cevap vermiştir. Ancak öğrencilerle yapılan görüşmeler neticesinde birçok cevabın kavramsal anlamadan bağımsız olarak verildiği ve öğrencilerin kendilerince bir kural geliştirerek soruyu cevaplandırıdıkları fark edilmiştir. “Doldurulması gereken boşluğun hem sağında hem solunda küme parantezi işareti varsa ‘ $\subset$ ’ sembolü, sadece sağında küme parantezi varsa ‘ $\in$ ’ sembolü yerleştirilir” olarak ifade edilen bu kural o seviyede buna benzer sorulan tüm sorulara doğru cevap vermekte geçerli olabilmektedir. Dolayısıyla öğrenciler böyle bir kural geliştirerek kendileri için ekonomik bir yol tercih etmişlerdir. Fakat böyle kurallar öğrencilerin kavramsal öğrenmelerine engel olacağından öğretmenlerin aynı konuyla ilgili farklı problem tipleriyle öğrencilerin öğrenme durumlarını kontrol etmeleri gereklidir.

Brousseau ve Centeno (1991) özdeşliklerle ilgili yapmış olduğu çalışmasında ise; öğretmenlerin $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ özdeşliği akabinde $16x^2 - 4 = ?$ Sorusu için

beklediği cevabın $(4x-2)(4x+2)$ olduğunu ifade etmektedir. Çünkü öğretmenler verilen özdeşliği pekiştirmek için hemen onun uygulanmasını arzu ederler. Brousseau, $2(8x^2-2)$ veya $3(16/3x^2-4/3)$ vb. cevapları, öğretmenlerin beklentilerinin dışında olduğundan genellikle cevap olarak kabul etmediklerini dile getirmektedir.

2.3.5.Didaktik Anlaşmanın Paradoksları

Brousseau, şu iki paradoks çerçevesinde didaktik anlaşmasını sorgulamaktadır:

- İnanç paradoksu: Bana daha fazla güvenmeyiniz ama kendi muhakemenize güvenmeniz için bana güvenin” (Clanché, 1994)

Öğretmen öğrenciden beklentilerini deklare etmemelidir ki öğrenci kendisi bulsun, keşfetsin ve bilgileri yapılandırsın. Fakat aynı zamanda beklediği cevabı alabilmesi için de bir şeyler yapmalıdır. Aksi takdirle öğrenci başarısız olacak!

- Gelişim paradoksu: “ Öğretmen kendi beklentisini öğrencisine ne kadar fazla aktarırsa ve öğrencisinin ne kadar fazla yapması gerektiğini söylerse, o derece gerçekleştirmek istediği öğrenmeyi kaybetme riski ile karşı karşıya kalır.” (Brousseau, 1986)

Benzer şekilde öğrenci eğer öğretmenden cevapları almayı beklerse bilgileri kendisi oluşturamayacak, dolayısıyla öğrenme gerçekleşmeyecek. Buna karşılık, öğretmenden gelebilecek tüm bilgileri (cevapları) almayı reddederse o zaman da antlaşmayı bozmuş olacak!

Gael örneğinde olduğu gibi, öğrenciler genellikle bu paradoksların içerisinde kalırlar. Öğrenciler öğretmenden ders anlatmasını bekler; bazı öğrenciler için bu basit olarak sorunun nasıl çözüldüğünün ve verecekleri yanıtın ne olduğunun söylenmesi olarak algılanır. Eğer öğretmen bu beklentiye uygun hareket ederse öğrenciler hiçbir şey öğrenemezler. Çünkü bu durum, sorunun çözümü için kullanılabilecek olası yöntemler arasından bir seçim yapılmasını ya da olası yorumlar içinden birinin gerekçelendirilerek seçilmesini gerektirmez. Nasıl çözüleceğini bildiğiniz bir soruyu çözmek sizin bilgi birikiminize yenisini eklemeyi.

Öğretmen öğrencilerini belli bir davranışa yönleltmek için çaba sarf ettikçe öğrenciler, öğretmenin beklentilerini karşılayacak davranışları sergileme noktasında daha çok teşvik edilirler. Hatta öğrencilerinize ne istediğinizi açıkça belirttiğiniz de, istediğinizi elde etmeniz imkânsızlaşır. Bu çelişkili durum göz önüne alındığında öğretme amaçlı her çabanın öğretmeni amacından daha da uzaklaştırdığı bir ortamda, öğrencilerin öğrenmeleri nasıl mümkün olabilir? Didaktiksel Durum Teorisi, okulda gerçekleşen öğrenmeyi, öğretilmesi hedeflenen bilginin öğrenci tarafından gerçekleştirilmek zorunda kalındığı ortamlara uyum olarak tanımlamaktadır. Öyleyse öğretmen öğrencilerin uyum sağlamak zorunda kalacakları ve bu uyumun sonunda da hedeflenen bilgiyi oluşturacakları ortamlar hazırlamak zorundadır. Söylemesi kolay olsa da bu tür ortamların hazırlanması her zaman kolay değildir.

Didaktik Antlaşması Kavramının Gelişimi

1978 yılında, didaktik antlaşması kavramı, etkileşimciliğin etkisinde, bir öğrenme durumunun ürünü olarak görülmüştü. Bu öğrenme durumu ürünleri, antlaşmanın uygulanması aşamalarında ortaya çıkmaktadır: öğrenci öğretmenin belirli alışkanlıklarını tekrar etmektedir ve verilen bilgileri anlamlandırmaya çalışmaktadır. Bu anlamlandırmalar, didaktik antlaşmasının tekrar edilen eylemlerinin sonuçlarına çok bağlıdır. Özel bir durum üzerinde öğretmenin alışıldık davranışlarının belirtisi olarak görülür. Bu nedenle, didaktik antlaşması, bir didaktiksel iletişimin özel bir durumunun ürünü olarak görünür ve bu ürün öğrencilerin matematik bilgisi ile didaktiksel durum arasında bir ilişki oluşturur. Brousseau'nun sormuş olduğu “acaba bazı didaktik antlaşmaları öğrencilerin öğrenim sürecine girmelerini engellemekte midir?” sorusuna göre öğretme düşüncesi değiştirilebilir. Bu soru uyarınca, bazı antlaşmaların bilgi edinimi konusunda engel teşkil ettiği düşüncesi oluşabilir. Buna paralel olarak da bazı “iyi” ya da “daha iyi antlaşmaların” var olduğu ve bu antlaşmalar çerçevesinde de öğrencilerin, özellikle başarısız olanların, bilgiye karşı bakış açıları değişmektedir. Böylelikle didaktiksel antlaşmanın değişimi matematikteki başarısızlığın olası nedeni olarak algılanabilir.

Günümüzde birçok araştırma bu ilk kavramdan türemektedir. Charnay ve Mante (1992) didaktik antlaşmasının kurallarına bağlı olarak ortaya çıkan hataların iyileştirilebileceğini önermektedirler. Cerquetti-Aberkane (1992)' ye göre ise

öğrenme durumunun açıkça belirtilmesi ve öğrenci ile öğretmen arasındaki didaktiksel antlaşmanın açıklıkla tanımlanması gereklidir. Bu görüşlerle aynı doğrultuda olarak ERMEL grubu (Colomb, 1991) öğretmenlere, antlaşmanın kurulmasını önermekte ve öğrencilerin problem çözme sürecinde, beklenenlerin açık bir şekilde ifade edilmiş olması gerekliliğini önermektedir. Bu açıklamalar yalnızca “didaktik antlaşması” ile “talimatlar” arasında bir karışıklık göstermekle kalmıyor, ayrıca “antlaşmanın açıklanması” paradoksal bir durum meydana getiriyor. Daha doğrusu, eğer “antlaşmanın açıklanması” öğrencilere “belli beklentiler” olduğunu belirtmeyi içermekteyse, bu açıklamalar öğrenmenin tüm olasılığını yok etmektedir. Böylelikle, problem durumu artık problematik olmaktan uzaklaşır: “belli beklentiler” sadece öğretmen tarafından yönlendirilen bilginin kullanımını öngören, açıkça ifade edilmeyen davranımlardır!

1984 senesinin başlangıcı ikinci bir dönem olarak düşünülebilir. Antlaşma artık didaktiksel durumlarla ilişkin olası müzakerelerin sonucu olarak algılanmamaktadır; fakat sürmektedir çünkü eğer bilgilerin kazanımı meydana gelmiyorsa, hem öğrencinin kendisinden yapması beklenen şeyler dışında bir şey yapmadığı hem de öğretmenin mecbur olduğu şeyler dışında bir şey yapmadığı bir süreç oluşmaktadır. Böylelikle öğretim yalnızca didaktik antlaşmasının gereksinimlerinin tatmini olarak algılanır. Ama bu sürecin sonrasında şu düşüncenin de kesintiye uğraması ortaya çıkar: Öğrenmek, öğrencinin anlaşmayı reddetmesi fakat problem durumunu kontrol altına almayı kabul etmesine yol açar. Böylelikle öğrenme sadece antlaşmanın iyi çalışması sonucunda değil, kesintiye uğraması sonucunda da ortaya çıkacaktır. Başka bir ifadeyle, öğretimin sosyal tasarısı bir paradoksal antlaşma üzerinde yer almaktadır. Bu tasarı öğretmeni, er ya da geç, öğretme zorunluluklarından uzaklaştıracak, öğrenciyi öğretmenin bilgisi altında mahkûm kalmaya zorlayacaktır. Böylelikle öğrenci öğrenene dönüşecektir. Bu algı, iyi ya da kötü gibi nitelendirilen anlaşmaların varlığı düşüncesi ile yıkılacaktır, bu düşünceler didaktiksel sürecin optimize edilmesi için vardır. Didaktik antlaşması, temel didaktiğin içinde müzakereleri, bozuklukları analiz etmek için bir kavram oluşturmaktadır. Bu gelişme hem kişilerin didaktiksel ilişki içerisinde birbirleriyle olan etkileşimleri hem de didaktiksel sistemin amacı göz önünde bulundurularak açıklanır.

Antropolojik yaklaşım çerçevesinde ise, didaktiksel anlaşma, genellikle öğrencinin öğretisel kurum içerisinde bir öğretisel özneye dönüşmesine neden olan sembolik bir eylem olarak görülür. Chevallard'ın bu konuda yaptığı çalışmalarında (1988) “ilk didaktik anlaşması” öğretimin sosyal tasarısı içerisinde kaynaklanan bir sosyal anlaşmadır. Bu sosyal anlaşma öğrenci, öğretmen ve bilginin birleşiminden kaynaklanan didaktiksel ilişkiyi içerir. Bu çalışmalar Fılloux'un yapmış olduğu (1974) çalışmalar ile karşılaştırılabilir. Fılloux “pedagojik anlaşma” kavramının doğuşunda etkin olmuştur ve öğrencilerle öğrenciler arasındaki ilişkilerin pedagojik alandaki ilişkilerini açıklamak için çalışmıştır. Bu çalışmalara göre, pedagojik ilişkiler bir karşılıklı anlaşma fikri üzerine inşa edilmiştir. Bu anlaşma kurumsal kökenlidir. Bu anlaşma uyarınca öğrenci ve öğretmenlerin sosyal yapı içerisindeki konumları ve statüleri açıklanmıştır: öğretmen öğretmekle, öğrenci ise öğretilmekle yükümlüdür. Bu pedagojik anlaşma “iki tarafın arasında gerçekleşen alış-verişin kurallarını, kısıtlı süreli görev ve haklar doğrultusunda açıklamaktadır.” Bu tanımla birlikte “didaktiksel anlaşma” ile “pedagojik anlaşma” arasındaki analogi, “didaktiksel anlaşma”nın şu tanımı ile verilebilir: “didaktik anlaşması öğrencilerin ve öğretmenlerin haklarını ve görevlerini tanımlar; her bir taraf diğerinin sorumluluğunu paylaşır ve kısıtlar” (Chevallard, 1988). Fılloux'un çalışmalarına benzeyen fakat didaktik üzerine epistemolojik yansımaya daha çok yönelen bir perspektif çerçevesinde, Blanchard-Laville (1989) objektiflik problemi üzerinde durmuştur.

Brousseau farklı eğitim teorileri arasında var olan ilişkilerin kuramsallaştırılması gerekliliğinin altını çizmiştir. Didaktik üzerine psikanalitik yönelimli çalışmaların, özellikle Blanchard-Laville'in çalışmaları, bilginin doğası üzerine odaklanmamışlardır. Ancak Brousseau ısrarla didaktik anlaşmasının genellikle bir pedagojik anlaşma olmadığını dile getirmiş ve bu anlaşmanın, mevcut bilgilere göre değişim gösterdiğini ifade etmiştir (Brousseau, 1986).

Didaktik Anlaşmasının Olumsuz Etkileri

Öğretmenler doğal olarak öğrencilerinin başarılı olmasını arzular. Bunun için öğrencilere farklı şekillerde yardımcı olmaya çalışırlar. Cevapla ilgili çok fazla açıklamalarda bulunmak, küçük ipuçları vermek, cevabı bazı bölümlere ayırarak bir kısmını aktarmak ya da algoritmalarla ve küçük notlarla öğrencilerin doğru cevabı

vermelerini sağlamak bu yardım şekillerinden bazılarıdır. Brousseau tarafından öğretmenler için çıkış yolları diye adlandırılan bu davranışlar didaktik antlaşmasının olumsuz etkileri olarak ifade edilmektedir. Bunlardan bazıları aşağıda detaylandırılmıştır.

Topaze Etkisi

Brousseau yapmış olduğu çalışmalarında şu durumu gözlemlemiştir: Genellikle öğrencilere sorulan soruların daha kolay çözümleri de vardır. Ancak öğrenciler kavranması zor olan çözümleri tercih etmektedir. Bunun temelinde kendilerinden beklenenin bu olması yatmaktadır. Öğrenci kavranması zor olan yöntemi kullanarak soruyu çözmekte ancak aslında kendisinden beklenen kavrayışı geliştirmemektedir. Aslında bu yöntemin uygulanması gerektiği soru kökünde açık/gizli ifade edilmektedir. Öğrenciye başka bir çözüm yolunu tercih etme ya da çözüm yöntemleri içinde herhangi birini seçme hakkı tanınmamaktadır. Öğrencilerin hiçbir makul gerekçe olmadan kavranması kolay yöntemler dururken, kavranması zor olan yöntemleri tercih etmesi ve bunu da soruda ya da öğretmen tarafından verilen ipuçları nedeniyle bilinçsizce (zorunda kalarak) yapmaları Brousseau tarafından “topaze etkisi” olarak adlandırılmıştır.

Topaze kelimesi bir tiyatro oyununda geçen sahneden alınmıştır. Oyunda öğretmen öğrencilerine dikte (yazma) uygulaması yaptırmaktadır. Topaze, dikteyi yaptıran öğretmenin adıdır. Oyun fransızcadır ve dikte’de fransızca yapılmaktadır. Fransızca’da takıların sonundaki “s” harfi okunmaz. Bu takı “de” ise “dö” diye okunur ve “s” yoktur, “des” ise “de” diye okunur ve kelimenin sonunda “s” vardır. Dikte edilen metinde geçen bir kelimenin başında “des” vardır. Topaze bu takıyı “de” olarak okuduktan sonra kelimeyi ekler. Ancak öğrencilerden biri sadece “de” yazarak hata yapmıştır. Topaze öğrenciye yardım etmek amacıyla bir kaç kez daha “de ...” şeklinde kelimeyi okur ancak öğrenci ipucundan durumu kavrayıp hatasını düzeltemez. Bunun üzerine Topaze öğrenciye biraz daha yardım etmek amacıyla kelimeyi tekrarlar. Ancak bu kez kelimenin sonunda bulunan ama okunmaması gereken “s” harfini okumuştur, hem de vurgulayarak (des ...). Bunun üzerine öğrenci hatasını düzeltir. Topaze’de huzurlu bir şekilde dersine ve dikteye devam eder!

Bu olay “öğrenciye ne yapması gerektiğini söylemenin aslında öğrenme ya da öğretme anlamına gelmediğini” ortaya koymaktadır. Diğer bir deyişle anlamının, ne yapılacağını ya da ne yapacağını bilmek demek olmadığını hatırlatmaktadır. Topaze etkisi, öğretmenler tarafından sıklıkla kullanılan bir yöntemdir ve özellikle öğrenciyi karşılaşmış olduğu zorluktan atlatmak için uygulanmaktadır. Ancak öğretmenler, böyle bir davranışın öğrenmeye olumsuz etkileri hakkında bilinçli olmalıdırlar.

Jourdaine Etkisi

Jourdaine etkisi sıradan bir etkinliğe bilimsel bir hava verilmesi olarak tanımlanabilir. Kökenini Moliere’in bir oyunundan almaktadır. Oyunda Jourdaine sıradan, çok iyi bir eğitim almamış ancak iyi bir vatandaşdır. Dönemin özelliği olan aristokrasi sınıfına kan bağıyla olmasa da kültürüyle girmek ister. Bu amaçla müzikten felsefeye pek çok alanda kendini yetiştirmek için özel öğretmenler tutar. Olaya adının verilmesine felsefe öğretmeni ile arasında geçen ve tüm hayatı boyunca farkında olmadan nesir tarzında konuştuğunu öğrendiği diyalog neden olmuştur. Jourdaine felsefe öğretmeninden kendisi için çok değerli olan ve âşık olduğu birine aşkını anlatmak için bir yol göstermesini ister. Felsefe öğretmeni yapmak istediğinin sevdiği kadına aşkını anlatan bir şiir yazmak olup olmadığını sorar. Hayır, yanıtını alır ve o zaman nesir mi diye sorar. Ona da hayır yanıtını alır. Bunun üzerine felsefe öğretmeni ya biri ya da diğeri olmalı diye cevap verir. Jourdaine neden ikisinden biri diye sorunca da hissettiklerinizi karşınızdakine anlatmak için sadece iki yol vardır ya şiirle ya da nesirle ifade edersiniz der. Jourdaine bu ikisi dışında bir yol yok mu diye sorar. “Hayır, şiir olmayan her şey nesir, nesir olmayan her şey ise şiirdir” yanıtını alır. Bunun üzerine birinin konuşmasının hangi gruba girdiğini sorar. Nesir yanıtını alır. “Eğer Nicola bana terliklerimi getir, gece içkimi ver dersem, bu nesir midir?” diye sorar. Buna da evet yanıtını alınca büyük bir şaşkınlık geçirir ve heyecanını “Aman tanrım! 40 yıldır nesir konuşuyor muşum!” diye dile getirir.

Her defasında, temelinde kavramsal bir etkinlik olduğuna dair delilimiz olmadan, öyle olduğunu varsayarak, öğrencilerin ürettiklerini matematiksel terimlerle ifade ederken Jourdaine etkisine yol açıyoruz. Aslında öğrencinin bölme işaretini çarpma işaretine çevirdiğini, payda bulunan kesir ile paydada bulunan kesri ters çevirip

çarptığını söylemek daha makul ve mantıklı iken, öğrencinin iki kesri birbirine böldüğünü söylüyoruz. Benzer şekilde pek çok öğrenci cebirsel işlemleri takip ederek denklemleri çözebilirken, aslında Jourdain'e'nin nesir hakkında fikrinin olmaması gibi, onların eşitlik kavramı hakkında hiç bir fikri olmayabiliyor, sadece ezberlemiş olduğu algoritmaları kullanıyor olabilirler.

Dienes Etkisi

Zoltan P. Dienes, Macar kökenli, İngilizce, Fransızca, Almanca ve İtalyancayı akıcı konuşabilen, ilkokulda kullanılan kendi adıyla bilinen ve sayıların farklı tabanlara göre yazılmasında ve mantık öğretiminde kullanılan “Dienes Bloklarının” mucididir.

Dienes'de Brousseau gibi matematik eğitime ve kullanılan öğretim yöntemlerine verilen öneme göre elde edilen matematiksel kavramların anlaşılması üzerine çalışmalar yapar. Ancak gerekçeler üzerine değil kullanılan öğretim yöntemleri üzerine yoğunlaşır. Brousseau öğretmenin rolü, hareket tarzı, öğretmen-öğrenci ve matematik müfredatı etkileşimini anlamak ve didaktiksel ortamı kavramların anlaşılabilmesi için değiştirmeyi düşünürken, Dienes kötü öğretimi sorumlu tutarak öğretmene rağmen işleyecek bir öğretim teorisi ve ders materyali üretmek üzerine yoğunlaşır. Ona göre öğretmene verilecek ayrıntılı direktiflere harfiyen uyularak uygulanacak böyle bir materyal öğretmenden bağımsız olarak istenen matematiksel kavramın öğrenciler tarafından oluşturulmasını sağlayabilir. Onun bu inancından yola çıkılarak, öğrenim sürecinde, öğretmenin kişisel uygulamalarından bağımsız olarak bir matematiksel kavramın hatasız olarak oluşturulabileceği inancı Dienes etkisi olarak adlandırılmıştır.

Sonuç olarak, matematik öğrenmek problemleri çözmeyi başarmaktır. Eğer matematiği kavramsal olarak öğrenmezsek, problemleri nasıl çözeriz? Tüm didaktiksel durumlar bu çıkmaz üzerine kurulmuştur. Bu çıkmazdan dolayı, didaktik antlaşmasının yapı taşları olan iki paradoks doğmuştur: gelişim ve inanç paradoksu. İnanç paradoksuna göre, öğretmen öğrencisine “İnan bana, kendi bilgini kullanma cesaretini gösterirsen, öğreneceksin” şeklinde yaklaşır. Bu ifade üstü kapalı kalmalıdır ve ancak öğrenci problemi benimseyip içine girebildiği durumlarda açıklık kazanır. Öğrenci bu durumlarda kararlarının sorumluluğunu da kabul etmiş

sayılacaktır. Bu durumda, öğrenciyi zorlayacak olgu, bir didaktik anlaşılmaya yönelim değil, öğrenme isteği olur. Yine de öğrenciyi bir anlaşılmaya yöneltmeden söz etmemek mümkün müdür? Aksine, öğretmen didaktik anlaşmasının sosyal, duyuşsal ve öğretisel şartlarda kesintiye uğramasını sağlamalı ve öğrenciyi kendi bilgilerini kullanmaya teşvik etmelidir.

Fonksiyonlar ve Fonksiyonlarda Grafik Kullanımı ile İlgili Didaktik Antlaşma Maddeleri

— Fonksiyonlarla ilgili sorularda; sorunun ilk kısmı (yani tanım kümesinin verildiği kısım) önemli değildir. Önemli olan fonksiyonun formülüdür.

— Fonksiyonlardaki işlemler daima formüllerle yapılır. Fonksiyon başka bir temsille ifade edilmiş olsa da işlem yapmak için öncelikle formül bulunmalıdır.

— Grafikler genellikle verilen tanımları görselleştirmek için kullanılır. Grafikleri yorumlama ile ilgili pek fazla uygulama yapılmaz.

— Grafikler sonsuz bir küme de ($\mathbb{R}$ de ya da bir alt kümesinde) tanımlanır ve her yerde süreklidir. Birkaç noktadan oluşan bir grafik kullanılmaz.

— Grafikler görsel olarak belli bir düzendedir (doğrusal, parabolik, v.b.). Bunların dışında belli bir aralıkla sıklıkla yön değiştiren grafikler bir fonksiyonun grafiği olarak kabul edilmez.

— Tanım, teorem ve özellikler öncelikle cebirsel temsil yardımıyla açıklanır.

— Temsiller arası geçiş etkinliklerine pek fazla yer verilmez.

— Tablolar sadece yardımcı bir nesne olarak kullanılır. Sadece tabloların kullanıldığı ve başka bir bilginin yer almadığı etkinlikler kullanılmaz.

— Bir tablo bir grafiği ifade eder.

— Bir tablo fonksiyonun tüm özelliklerini yansıtır.

— Bir fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri bu fonksiyon ait değerler tablosundaki en büyük ve en küçük değerlerdir.

— Grafikler üzerinde kullanılan semboller ve anlamları üzerine etkinlik ve sorular yapılmaz. Sorulan sorularda rakamlar kullanılır ve çelişkili ifadelerden kaçınılır ki öğrenci direk doğru cevabı verebilsin.

— Cevabı bilinmeyen ya da birden fazla cevabı olan sorulara yer verilmez. “Her sorunun daima tek bir cevabı vardır” ilkesine uygun sorular seçilir ve kullanılır.

—Kullanılan değerler tablosunda verilen x değerleri belli bir düzende olmalıdır (Küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe doğru sıralama gibi). Ayrıca verilen değerler arasında genellikle sabit bir adım söz konusudur.

— Verilen şartlar net olmalıdır. Yani öğrenciye birden fazla seçenek ya da inisiyatif bırakacak şekilde sorular sorulmaz.

— Birden fazla kavramı ilgilendiren sorular pek fazla kullanılmaz. Örneğin eşitsizlik ve fonksiyon kavramını ilgilendiren bir soru yerine sadece eşitsizlik ya da fonksiyon kavramı ile ilgili sorular seçilir.

2.3.6. Çoklu Temsil Kavramı

Matematiksel düşüncede görsel imgelerin çok önemli olduğuna dair bir inanış söz konusudur. Matematiği dillerin oluşturduğu bir kompozisyon olarak düşünebiliriz (Kaput, 1989, p.167; Akt. Elia ve diğerleri, 2009). Bilgilerin paylaşımı ve anlaşılmasını sağlamak amacıyla yaygın gösterimlerin kullanıldığı bir alan olarak görebiliriz matematiği (Greeno & Hall, 1997, p. 362; Akt. Elia ve diğerleri, 2009). Doğanın dili olarak tanımlanan matematiğin, doğa olayları ve diğer bilimlerle ilişkisi, matematikteki farklı gösterimlerin kullanımıyla sağlanmaktadır (Janvier, 1987; Akt. Delice ve Sevimli, 2010). Matematik eğitimi alan yazınında kullanılan bu farklı dillerin ve gösterimlerin hepsi çoklu temsiller olarak adlandırılmaktadır. En genel anlamıyla temsiller, soyut kavram veya sembolleri, gerçek dünya içinde somutlaştırma yoluyla modelleme işlemi olarak tanımlanabilir (Kaput, 1998; Akt. Delice ve Sevimli, 2010).

Bir kavramla ilgili farklı temsillerin olması matematik eğitiminde çok önem arz etmektedir. Farklı bakış açılarıyla ifade edilen bir kavramın öğretimi daha zengin hale getirilerek öğrencilere farklı alternatifler sunulmuş olacaktır.

Matematiksel kavramların öğrenciler tarafından kavramsal olarak anlaşılması için araştırmacıların önerdiği yöntemlerinden en etkililerinden bir tanesi öğretimde çoklu temsillerin/gösterimlerin kullanılmasıdır (Brenner ve diğerleri, 1997; Porzio, 1994; Akt. Bingölbali, 2008).

Hilbert ve Carpenter (1992), Kaput (1989), Porzio (1999) gibi pek çok araştırmacı, kavramların farklı temsillerini dikkate alarak yapılan öğretimin, öğrencilerin öğrenmelerine yardım edeceğini ve matematiksel kavramları ve aralarındaki ilişkileri anlamalarını geliştireceğini ifade etmektedir (Baştürk, 2010). Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger (1987), çoklu temsillerin matematiğin doğal bir parçası olduğu; öğrenciler karmaşık konuları öğrenmeye çalışırken kaçınılmaz güçlükleri azaltabileceği ve matematiği daha cazip ve ilgi çekici hale getirebileceği sonucuna vardılar (Patterson ve Norwood, 2004).

Ayrıca, aynı matematiksel kavram ya da problemlerde, temsiller, kendi içerisinde ya da birbirleri ile geçişlerin yapılabildiği durumlarda, problem çözümü için esnek bir araç olarak kullanılabilir (Monaghan, Sun & Tall, 1994; Delice ve Sevimli, 2010).

Herhangi bir gösterim Matematiksel bir yapıyı hiçbir zaman tam olarak ifade edemez ama her bir gösterimin kendine özgü avantajları olduğunu söyleyebiliriz. Aynı matematiksel durumla ilgili farklı gösterimler kullanılması matematiksel kavramı kolaylaştırıcı bir rol üstlenebilir (Duval, 2002; Elia, Panaoura, Eracleous, Gagatsis, 2007; Akt. Elia ve diğerleri, 2009). Farklı gösterim kombinasyonlarıyla, öğrencilerin tek bir gösterimin yetersizliğiyle oluşabilecek problemlerden kurtulmalarını sağlayabiliriz. Kaput'un (1992) iddia ettiğine göre farklı notasyon ve gösterimlerin kullanılması öğrencilerin matematiksel kavramları kafalarında daha iyi resmedebilmelerine yardımcı bir metot olarak değerlendirebiliriz. Böylelikle, belirli bir kavramı ayırt edebilme ve farklı şekillerde ifade edebilme yeteneğini belirli bir kavramı anlayabilmek için öncül bir gereklilik olarak değerlendirebiliriz (Duval, 2002; Even, 1998; Akt. Elia ve diğerleri, 2009). Bunun yanında, aynı kavramı farklı

gösterim sistemlerinde ayırt edebilmek, kavramları bu gösterim sistemleri içerisinde esnek bir şekilde ifade yeteneği, kavramların farklı gösterim sistemleri arasındaki geçişlerinin yapılması kadar gerekli bir olgudur. Bu sayede kavramlar arasındaki bağlantılar netleştirilebilir (Elia ve diğerleri, 2009).

Matematik eğitimcileri pedagojilerini güçlendirme ve enerjilerini arttırma yollarını keşfederken ve teknoloji sınıflarda daha yaygın hale gelirken, matematik müfredatında çoklu temsillerin kullanımı daha önem kazanmaktadır (Piez & Voxman, 1997; Akt. Nikita ve diğerleri, 2004).

Mayer ve Hegarty (1996'dan aktaran Brenner ve diğerleri, 1997) matematik öğretiminin aşağıda belirtilen dört aşamada ilerlemesi gerektiğini söylemektedirler:

1. Bir tek temsil kullanma;
2. Birden fazla temsil kullanma;
3. Farklı temsiller arasında ilişkiler kurma;
4. Bu farklı temsiller arasında kolay geçişler ve kaynaştırmaların olması (Baştürk, 2010).

Bu bağlamda Driscoll (1999) de matematiksel kavramların çoklu temsilleri arasında yapılacak eşleştirme ve geçişlerin akıcılığının matematiksel anlamının gelişiminde kritik bir önemi olduğunu belirtmektedir (Baştürk, 2010).

Bir öğrenme boyunca kullanılan bir temsille ilgili bilgilerin oluştuğu düşünülebilir. Bu bilgiler kullanılan temsille ilgili olup ancak o temsille ilgili problemlerde kullanılır. Fakat bir temsilden diğerine geçiş etkinliklerinde daha farklı bilgiler oluşur. Bu bilgilerin bazıları kullanılan temsillerle ilgili bazıları ise sadece geçişle ilgili olmaktadır. Dolayısıyla her temsil kavramın bazı özelliklerini ön plana çıkarmakta ve böylece kavramın tüm özellikleri ancak bu temsillerin hepsinin kullanılması ile ancak öğrenciye aktarılabilir. Aslında bu durum kavramın öğretiminde gerekli bir koşul fakat yeterli bir koşul değildir. Az önce de ifade ettiğimiz gibi temsiller arasındaki geçişlerde yeni bilgilerin öğretilmesi söz konusu olduğundan öğretimde

geçiş etkinliklerinin de önemli olduğu ifade edilmektedir (Duval 2003; Akt. Yavuz ve Baştürk, 2008).

Öte yandan, Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi'nin yayınladığı Okul Matematiği için Standartlar ve Prensipler Bildirisi ile (NCTM, 2000) matematik eğitim programlarının tüm öğrencilere sağlamasını istediği bazı tavsiyeler şunlardır:

- Matematiksel fikirlerin organize edilmesi, kaydedilmesi ve iletilmesi için temsiller oluşturun ve kullanın,
- Problemleri çözmek için matematiksel temsiller arasından uygun olanları seçmek, uygulamak ve aralarında dönüşümler yapmak;
- Fiziksel, sosyal ve matematiksel fenomenleri açıklamak ve modellemek için temsilleri kullanın (Patterson ve Norwood, 2004).

NCTM (1989,2000) standartlarında da belirtildiği gibi, bir kavramın cebirsel ifadesi, grafiği ve tablosu gibi çoğul temsilleri arasında bağlar kurmak o kavramın öğrenilmesi açısından önem taşır. Çoğul temsillerin her biri kavramın farklı yönünü vurgular ve matematiksel kavrama daha geniş bir bakış açısı kazandırır (Kieran, 1994; Brenner ve Diğerleri., 1997; O'Callaghan, 1998; DeMarois & Tall, 1999; Akt. Akkoç, 2006).

Herkesin bir temsilden aynı kavramı anlamasını ya da bir temsilin herkese aynı oranda anlamlı gelmesini düşünmenin hatalı olacağını ifade eden birçok matematik eğitimcisi, birden fazla temsilin bulunduğu ortamlardaki öğrenmenin tabiatını ve bileşenlerini incelemiştir (Özgün-Koca, 2004; Delice ve Sevimli, 2010).

Çoklu temsillerin kullanıldığı bir öğretimde sözel betimleme, grafik, tablo ve matematiksel sembol gibi değişik gösterimlerden etkin olarak yararlanılır ve öğrencilere bu temsillerin arasındaki bağlantıları kurma fırsatı sağlanır. Bu şekilde aynı sınıf içerisinde farklı öğrenme stili ve farklı baskın zekâ türlerine (Gardner, 1983 ve 1993) sahip geniş yelpazedeki öğrencilere hitap eden bir öğretimin uygulanması mümkün olabilecektir (Bingölbali, 2008). Araştırmacılar çoklu temsillerin kullanıldığı böyle bir öğretimin öğrencilere matematiksel kavramların

farklı yönlerini göstermeleri, kavramı daha geniş bir bakış açısıyla değerlendirmeleri ve farklı temsiller arası dönüşümlerle kavramı daha sağlıklı öğrenmeyi sağlayacağını belirtmişlerdir (Kieran, 1994; O'Callaghan, 1998; Adu-Gyamfi, 1993; Akt. Bingölbalı, 2008).

Sayısız araştırmacı, kavramların çoklu temsillerinin kullanılmasının eğitime etkilerini incelemiştir (Dreyfus & Eisenberg, 1982; Harvey, 1991; Keller & Hirsch, 1998; LaLomia, Coovert & Salas, 1988; Lloyd & Wilson, 1998; Noble et al., 2001; Porzio, 1999; Stein et al. 1990; Akt. Patterson ve Norwood, 2004). Araştırmacılar, çoklu temsillerin, öğrencilerin işlevsel düşünmede yüksek bilişsel düzeye ulaşmalarını sağladığını bulmuşlardır. Bu yaklaşım öğrencilere, içsel bilgi ağlarını daha iyi oluşturmalarına yardımcı olan, kavramların zihinsel temsillerini oluşturma fırsatları sağlar. Araştırmacı, pek çok öğrencinin grafik temsilleri kullanarak problem çözebildiğini fakat sembolik temsilleri tanıma ve onlarla ilişkilendirmede bazı zorlukları olduğunu bulmuştur. Eğitimcilerin kavramları tanıtırken çoklu temsilleri kullanmasına rağmen, öğrencilere, temsil hakkında kendi bilgilerini yapılandırmaları gerektiğinde, düşüncelerini soyutlaştırmaları için yeterli zaman verilmemektedir (Patterson ve Norwood, 2004).

Temsiller üzerinden ele alınan temel konulardan biri fonksiyon kavramıdır. Fonksiyonlar konusunda Grafikler, cebirsel ifadeler, liste biçiminde yazılımlar, Venn-şemaları ve Değerler tablosu gibi çok sayıda temsiller kullanılmaktadır. Bu temsillerden bazılarına aşağıda kısaca değinilmiştir.

1. Değerler tablosu

Sierpinska (1992), değerler tablosu fonksiyonların en eski gösterim biçimlerinden birisi olduğunu hatırlatmaktadır. Bazı matematik tarihçileri milattan önce 2000 yıllarında Babillerin bu tür tablolar kullandığını dile getirmektedirler. Sierpinska, fonksiyonlar eğer tablolarla ifade edilirse, fonksiyonun birbirini devam eden sayılar olarak algılanabileceğini belirtmektedir. Böyle algılandığı takdirde tabloda verilmeyen değerleri yorumlama ile sanki veriliyormuş gibi işlem yapılabilir. Buna paralel olarak araştırmacı tarafından öğrencilerin tablo kullanımı ile ilgili

yaklaşımlarını ve hatalarını tespit etmek için aşağıdaki soru lise son sınıf öğrencilerine uygulanmıştır;

“ f , $[-2; 2]$ aralığında tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki tablo verilmektedir:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-3	-1	1	3	5

a) Bu şartlara uygun f fonksiyonunun bir grafiğini çiziniz.

b) a şıkkında çizdiğiniz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse hangi grafik? Hayırsa nedenini açıklayınız.”

c) Size göre f fonksiyonun $[-2; 2]$ aralığındaki en büyük ve en küçük değeri hakkında ne söylenebilir? Neden?

Alınan cevapta öğrencilerin büyük çoğunluğu a) şıkkı için noktaları koordinat düzlemine yerleştirdikten sonra, bu noktaları doğrusal olarak birleştirerek bir doğru parçası oluşturmuşlar, fakat b) şıkkında ise öğrencilerin büyük çoğunluğu bu şartlara uygun başka bir grafik çizilemeyeceğini belirterek hayır cevabını vermişlerdir. Açıklama olarak ise fonksiyonun bir doğru parçası oluşturduğu ve bir fonksiyon için yalnız bir grafiğin çizilebileceğini belirtmişlerdir. Aynı öğrenciler a) ve b) şıklarında vermiş oldukları cevaplara paralel olarak c) şıkkı için fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini tabloda verilen değerler içerisinde bulmaya çalışmışlardır. Dolayısıyla öğrenciler fonksiyonun tipini ve derecesini bilmeseler dahi verilen bir tablodan fonksiyonun tüm özelliklerine ulaşabileceklerini sanmaktadırlar. Bu riskten kurtulmak için birçok gösterimi bir arada kullanmayı gerektiren didaktiksel bir yaklaşımın kullanılması gerekmektedir. Bu yaklaşımlardan bir tanesi de grafiğin dinamik bir yapıya sahip olduğunun hissettirilmesidir. Ayrıca bu yaklaşım sayesinde temsillerin sınırlılıkları da ortaya konulmuş olur.

2. Grafikler

Grafikler fonksiyon kavramının en önemli temsillerinden bir tanesidir. Görsel olması itibariyle grafiklerin fonksiyon kavramını temsil etme noktasında cebirsel ifadelerden çok daha etkili olduğunu söyleyebiliriz. Cebirsel ifadelerde gizli kalan ve öğrencilerin görmekte zorlanabileceği eşleme ve dönüştürmeler grafikler vasıtasıyla çok daha açık ve anlaşılır bir şekilde öğrencilerin dikkatlerine sunulabilir.

Fonksiyon kavramının oluşmasında grafiklerin kullanımı ve grafiklerle çalışma önemli bir rol oynamıştır. Analizde kullanılan yöntem ve metotların büyük çoğunluğu grafikler yardımı ile ortaya çıkarılmıştır. Jean Bernoulli tarafından ortaya atılan ilk fonksiyon tanımını da böyle bir kontekste geliştiği bilinmektedir. Fakat günümüz eğitim sistemlerinde grafik iki değişken arasındaki ilişkiyi ifade eden bir objeden ziyade geometrik bir obje ya da bir etiket (doğru, parabol, vb.) gibi kullanıldığından ifade ettiği fonksiyonun özelliklerini ortaya koymaktan ziyade bir resim olarak algılanmaktadır. Yavuz (2005) tarafından yapılan bir uygulama kapsamında öğrencilerden verilen bir grafiği tarif etmeleri istenmiştir. Alınan cevapta öğrencilerin tamamının grafiği tarif ederken kullandıkları tek yöntem noktalar kümesi olmuştur. Dolayısıyla grafik birkaç noktadan oluşan ve aralarda boşlukların bulunduğu bir resim gibi algılanmakta, koordinat düzlemi sadece noktaları oluştururken kullanılan yardımcı bir obje olarak görülmektedir (Yavuz 2005, Bloch 2000). Bu tür yanlış kavramsallaştırmaları önleyebilmek için öğretimde grafiğin değişimini gösteren dinamik programlar ön plana çıkarılmalıdır.

3. Cebirsel Gösterim

Cebirsel gösterim potansiyel olarak fonksiyonun tüm özelliklerini barındırmakla birlikte bir çok işlemten sonra ancak direk olarak temsil edilen fonksiyonun bazı özelliklerine ulaşılabilir. Fonksiyonların öğretiminde çok kullanılması bazı yanlış kavramsallaştırmalara sebep olmaktadır. Örneğin öğrencilerin hatta bazı öğretmenlerin bile “fonksiyon = formül” eşitliğini savunmaları araştırmacılar tarafından dikkat çekilen bir durumdur. Burada en önemli problem kavramla temsilin birbirine karıştırılması olup bu durum matematik eğitiminde önemli problemlerden bir tanesidir. Bunun için sürekli aynı temsili kullanmak yerine mümkün olan farklı

temsilleri kullanmak ve hatta bu temsiller arasında geçişler gerektiren etkinlikler yapılması önerilmektedir (Duval 2003; Akt. Yavuz ve Baştürk, 2008). Ayrıca cebirsel olarak yapılan çoğu işlem algoritma şeklinde öğrenciler tarafından ezberlenmektedir. Öğretmenler bu işlemleri fonksiyon kavramı bağlamında öğrenciye sunmakta, öğrenciler ise kavramdan bağımsız olarak işlemleri yapmaktadır.

4. Diğer Temsiller

Fonksiyonları ifade etmek için diğer bazı temsiller de mevcuttur. Bunlardan doğal dil temsillerin başında gelmektedir ve diğer temsillerde farklı ölçülerde kullanılmaktadır. Yine geometrik temsil de fonksiyon kavramında kullanılmaktadır. Bu çalışmada bu temsille ilgili herhangi bir deneyim de bulunmadığımız için ayrıntılara girilmemiştir.

Çoklu temsiller üzerine yapılan çalışmalar, temsiller arasındaki geçişlerle temsiller arası bağların kuvvetlendiğini ve dolayısıyla fonksiyonların kavramsal olarak öğrenilmesine önemli katkılarda bulunduğunu ifade etmektedirler (Brenner ve diğerleri, 1997; Confrey, 1994; Kaput, 1992; Keller ve Hirsch, 1998; Leinhardt ve diğerleri, 1990; Özgün-Koca, 2004; Akt. Baştürk, 2010).

Schwarz ve Dreyfus (1995)'un belirttiği gibi, matematikte öğrenme, aynı soyut konuyu belirten birçok gösterim sistemleri arasındaki eşleşmeye dönüştürüldü. Aynı makalede, fonksiyonları ve grafikleri öğrenme hakkındaki araştırmaların değişik gösterim sistemlerine bağlı olarak, sürekli zorluklar gösterdiğine işaret etmektedirler. Schwarz ve Dreyfus, öğrencilerin farklı yapılarıdaki (formülden grafiğe ve hatta bir grafikten diğer grafiğe...) bilgiyle alakalı görevlerde başarılı olmadıklarını; onların bilgilerinin bölümlere ayrılmış olduğunu vurgulamışlardır. Öğrenciler grafik, tablo ve formülleri kendi kendilerine oluşturmakta büyük zorluklar çektiklerinde, öğretmenler genelde yapılandırma görevlerinden kaçınmak için, öğrencilerin verilen gösterim sistemlerinde çalışmalarını sağlarlar. Schwarz ve Dreyfus bütün fonksiyon temsillerinin belirsizliği ve öğretimin çoğu zaman bu belirsizliği açıkça gösteremediği konusunda ısrar etmektedirler (Schwarz ve Dreyfus 1995 s. 263; Akt. Bloch, 2003).

Bazı araştırmacılar matematik eğitimi araştırmalarında "temsil" olgusuna yüklenen anlamı sorgularlar. Duval (1993,1996) temsillerin belirsizliği ve yanlışlığı üzerinde çalışmış (her temsil ne gösteriyorsa ondan yanadır ve yanlışlık belirsizliğe sebep olur) ve kavramı oluşturmada kesinlikle gerekli olan matematiksel konuların farklı temsilleri arasındaki etkileşimleri dikkate almamız gerektiği sonucuna ulaşmıştır (Bloch, 2003). Sierpinska'ya (1992) göre, her temsilin sınırlılıklarının farkında olmak fonksiyon kavramını anlamak açısından önemlidir. Thompson (1994) ise, hiçbir temsilin fonksiyon kavramını birebir yansıtamayacağını söylemektedir. Thompson'a (1994) göre, öğrenciler bir temsilden diğerine geçerken neyin sabit kalıp neyin değiştiğinin farkına varamamaktadırlar ve her temsili öğrenilmesi gereken bağımsız bir konu olarak görmektedirler.

Çok az öğrenci fonksiyonların cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki ilişkinin farkına varabilir, grafikleri yanlışsız çevirebilir veya fonksiyonları ve grafik olarak temsillerini anlamak için sezgisel bir yaklaşım geliştirebilir (Clement, 1985; Eisenberg & Dreyfus, 1991 Fey, 1984; Goldenberg, 1987; Goldenberg & Kilman, 1990; Harvey, 1991; Akt. Patterson ve Norwood, 2004).

BÖLÜM III

YÖNTEM

3.1.TEORİK ÇERÇEVE

Değerler ve değişkenler tablosunun okunup yorumlanmasının ön plana çıktığı bu çalışmada öğrenci hatalarının temelinde didaktik antlaşması yattığı öngörüldüğünden teorik çerçeve olarak didaktik antlaşması; konunun farklı temsiller arası geçişleri kapsamından dolayı da çoklu temsiller kavramları kullanılacaktır.

3.2.ARAŞTIRMA MODELİ

Çalışma yorumlayıcı paradigmaya dayalı nitel bir çalışmadır. Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin fonksiyonlarda değerler ve değişkenler tablosunun kullanımı ve temsiller arası geçiş konusundaki uygulamalarının farkındalık düzeyleri araştırılacaktır. Belirli bir grup ve zamanla sınırlı olduğundan bir özel durum çalışmasıdır.

3.3.ARAŞTIRMANIN ÖRNEKLEMİ

Araştırmanın örneklemini 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Bursa’da bir anadolu lisesinden rastgele seçim yöntemi ile seçilmiş 50 öğrenci oluşturmaktadır. Bunlardan 26’sı 9’uncu sınıf ve 24’ü 12’nci sınıf öğrencisidir. Öğrenciler rastgele seçim yöntemi ile seçilmiş olup başarı durumlarının çeşitlilik gösterdiği tespit edilmiştir.

3.4.VERİLERİN TOPLANMASI

Verilerin toplanması aşamasında öğrencilere tablo kullanımı ve tablo-grafik geçişleriyle ilgili açık uçlu bir soru kağıdı uygulanmıştır. Soru kağıdı hazırlama aşamasında matematik öğretmenleri ile informal görüşme yapılmış, öğretmenlerin soruların uygunluğu ve benzer sorular sorup sormadıklarıyla ilgili düşünceleri alınmıştır. Bu doğrultuda öğretmenler soruları sıra dışı fakat uygun olarak nitelendirirken sınıfta bu tarz sorular sormadıklarını ifade etmişlerdir. 9’uncu Sınıf soru kağıdı 3 sorudan oluşurken 12’nci Sınıf soru kağıdında ilave 2 soru ile toplam 5 soru sorulmuştur. İlave 2 soru değişkenler tablosu ile ilgili olduğundan ve 9’uncu sınıf öğrencileri bu tabloyu henüz öğrenmedikleri için bu sorular onlara

sorulmamıştır. Hem 9’uncu sınıflarda hem de 12’nci sınıflarda A ve B olmak üzere iki grup oluşturulmuştur. Farklı gruplar için sorularda verilen tablo değerleri değiştirilerek sorulmuştur. Sorulan sorular araştırmanın sonundaki ekler bölümünde yer almaktadır. Öğrencilerin sorulara verdikleri cevaplar kategorize edilerek, farklı kategorilerden öğrencilerle mülakat yapılmıştır.

3.5.VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ VE YORUMLANMASI

Veriler elde edildikten sonra nitel çalışmalarda kullanılan sınıflandırma yöntemi (Robson, 1993) ve betimsel istatistik kullanılmıştır. Öğrencilerin cevapları toplandıktan sonra ortak kategoriler oluşturulmuş ve farklı kategorilerden öğrencilerle mülakat yapılmıştır. Ayrıca verilen cevapların incelenmesi aşamasında öğrencilerin cevaplarına göre mülakata yön verilerek açıklamaları daha derinlemesine anlaşılmasına çalışılmıştır.

3.6. GEÇERLİK VE GÜVENİRLİK

Nicel araştırmalarda bilimselliği belirleyen temel iki öge olan geçerlik ve güvenirlik nitel araştırmalarda farklı anlamlarda yorumlanmaktadır. Nitel araştırmanın doğası gereği geçerlik ve güvenirlik kavramları anlam ve alınacak önlemler bakımından nicel araştırmalardan farklılık arz etmektedir. Nicel araştırmalarda araştırmacıdan araştırma sorusuna uygun araştırma deseninin oluşturulması ve doğru istatistiksel yöntemler ve tanımlar kullanarak sonucu rapor etmesi beklenir. Nitel araştırmada ise toplanan verilerin ayrıntılı olarak rapor edilmesi ve araştırmacının sonuçlara nasıl ulaştığını ayrıntılı olarak açıklaması geçerlik ve güvenirliğin önemli bir ölçütü kabul edilmektedir (Cohen ve diğerleri, 2000, s.123).

Lincoln ve Guba (1985) (Aktaran, Yıldırım ve Simsek, 2005, s.264) nitel bir araştırmada iç geçerlik yerine “inandırıcılık”, dış geçerlik yerine “aktarılabilirlik” kavramlarını, iç güvenirlik yerine “tutarlılık” ve dış güvenirlik (tekrar edilebilirlik) yerine ise “teyit edilebilirlik” kavramlarını kullanmayı tercih etmektedirler.

Bu çalışmada veri toplama ve veri analizi yöntem ve metodu bakımından yorumlayıcı nitel araştırma özelliği taşımaktadır, genelleme yapma gibi bir amacı yoktur. Dolayısı ile bu çalışmada geçerlik güvenirlik kavramlarından nitel

araştırmalardaki anlamları ile bahsedilecektir. Bu doğrultuda araştırmada geçerliğin ve güvenirliğin sağlanabilmesi için bir takım önlemler alınmıştır. Bu nlemler şu şekilde ifade edilebilir:

- Araştırmacı soru kağıtlarının uygulanması esnasında inanılır ve güvenilir veriler toplamak amacıyla sınıf ortamında bulunmuştur.
- Araştırmada katılımcıların, veri toplama araçlarının ve uygulama sürecinin özellikleri ayrıntılı bir biçimde tanımlanmıştır.
- Bulguların raporlaştırılmasında veriler açık, net ve ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır.
- Verilerin yorumlanmasında veri kaynaklarından doğrudan alıntılar yapılmıştır.
- Araştırmadan elde edilen veriler arasındaki tutarlılık öğrencilerin soru kağıdındaki benzer sorulara verdikleri cevaplar incelenerek kontrol edilmiştir.
- Araştırmadan elde edilen sonuçlar birbirleriyle ve ilgili alan yazınıyla ilişkilendirilerek raporlaştırılmıştır.

BÖLÜM IV

VERİLERİN ANALİZİ, BULGULAR VE YORUM

4.1. UYGULAMA ÖNCESİ ANALİZ

4.1.1. Milli Eğitim Sisteminde Tabloların Yeri

Bu bölümde müfredatta tabloların hangi konularla ilişkili olduklarına ve 2010 yılına ait M.E.B. kitaplarında ne şekilde ele alındığına dair ön bilgi verilmiş, bu sayede öğrencilerin verdikleri cevaplar daha derinlemesine değerlendirilmek istenmiştir.

Fonksiyonlar konusu ilk olarak 9'uncu sınıfta işlenmektedir. Tablolar kapsamında ele alındığında ise öğrencilerin 9'uncu sınıf bilgileri değerler tablosu düzeyinde olmaktadır. Bununla birlikte M.E.B.'e ait ders kitabında 9'uncu sınıf etkinliklerinde sadece mantıktaki doğruluk tablosuna ve işlemdeki denklik sınıfları tablosuna yer verilmiştir. Bu ikisinin dışındaki sorularda boşluk doldurma tipinde olup değerler tablosuna ait herhangi bir soru ya da etkinliğe rastlanmamıştır.

10'uncu sınıfta ise ikinci dereceden denklemler ve eşitsizlikler konusu ile birlikte işaret tabloları karşımıza çıkmaktadır. Verilen fonksiyon için işaret tablosu oluşturma tipinde etkinliklere M.E.B. 10'uncu sınıf kitabında yer verildiğini görmekteyiz. Ayrıca tablodan yola çıkarak denkleme dair yorum yapma tipinde etkinliklerde görülmüştür. Değerler tablosu ise ismiyle yer almasa da aşağıdaki gibi bir uygulamada tablodaki boşlukları doldurunuz şeklinde bir etkinlikte geçmiştir.

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$						

Yukarıdaki türde örneklere 11'nci sınıf kitabında da yer verilmekle birlikte değerler tablosu ifadesinin kullanılmadığı dikkati çekmektedir.

Son olarak 12'nci sınıflar tabloların en fazla kullanıldığı sınıf olarak karşımıza çıkmaktadır.

x in 1 e soldan yaklaşıırken ($x \rightarrow 1^-$), fonksiyonun görüntülerinin hangi sayıya yaklaştığı aşağıdaki çizelgede çıkarılmıştır.

x	0,9	0,95	0,98	0,99	0,998	...
$h(x)$	2,8	2,9	2,96	2,98	2,996	...

Limit kavramına girişte yaklaşma konusu anlatılırken değerler tablosuna yukarıdaki gibi yer verilmiştir. Ayrıca türev konusuna giriş yaparken de benzer şekilde tablolardan yararlanılmıştır.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$		$f(2)$	$+\infty$

Son olarak türevin uygulamaları bölümünde grafik çizimleri öncesinde değişkenler tablosu incelenmiştir. Değişkenler tablosu kullanılarak artan-azalanlık kavramlarının işlendiğini ardından grafik çizimlerinde bu bilgilerin kullanıldığını görmekteyiz.

Sonuç olarak M.E.B. kitapları incelendiğinde işaret tablosu belli düzeyde kullanılıyor olsa da değerler ve değişkenler tablosuna ait etkinliklerin zayıf kaldığı görülmüştür. Etkinlik tipleri incelendiğinde verilen bir fonksiyona ait değişkenler tablosunun bulunarak artan-azalanlığın yorumlanması şeklinde etkinlikler olduğu tespit edilmiş, değişkenler tablosundan yola çıkarak fonksiyona dair çıkarımlarda bulunma tipinde örneklere rastlanmamıştır. Benzer şekilde değerler tablosu içinde verilen bir fonksiyon için tablonun doldurulması şeklinde etkinlikler gözlenirken, tablodan hareketle fonksiyona dair yorum yapma tipinde etkinliklere rastlanmamıştır. Ayrıca değerler tablosunun isim olarak da geçmediği görülmüştür.

4.1.2. 9'uncu Sınıflar 1. Soru A Grubu

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Birinci sorunun a şıkında öğrencilerin tabloda verilen değerleri koordinat düzlemine yerleştirdikten sonra fonksiyon tanımına uygun bir grafik çizmeleri istenmektedir. B şıkında ise “çizilebilir” yanıtını vererek, verilen nokta değerlerinden geçen fakat farklı bir grafik çizmeleri istenmektedir. Bununla birlikte soruda verilen değerler orantılı değerler olduğundan öğrencilerin bu değerleri koordinat düzlemine yerleştirdiğinde doğrusal bir grafik çizmeleri beklenmektedir. Bazı öğrenciler bu grafiğin denklemini hesaplamayı da deneyebilirler. B şıkında sorulduğu gibi alternatif grafik çizme konusunda ise çoğu öğrencinin hayır cevabı vermesi beklenmektedir. Çünkü öğrencilere fonksiyonların öğretiminde kullanılan yöntem denklemini verilen fonksiyonların grafiklerinin çizilmesine yönelik olduğundan ve bir denklem sadece bir fonksiyon ifade edeceğinden, öğrencilerin alternatif çizimlere yönelmeyeceği değerlendirilmektedir. Bu çalışmada da özellikle öğrencilerin tabloları anlama ve yorumlamada eksiklikleri olduğu hipotezinden yola çıkılmıştır. Dolayısıyla tablodan yola çıkarak alternatif grafik çizme konusunda öğrencilerin çoğunun çizilemez yorumunu yapması beklenmektedir. Bunun yanında öğrencilerin paraboller konusunu görmemiş olmaları dolayısıyla ve verilen ifadeler orantılı olduğundan doğru parçaları ile çizim yapacakları değerlendirilmektedir.

4.1.3.9'uncu Sınıflar 1. Soru B Grubu

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

B grubunda A'dan farklı olarak tablo değerleri orantılı olmayan değerler şeklinde verilmiştir. Dolayısıyla A grubunda beklenen sonuçlar burada da beklense de değerler orantılı olmadığından alternatif grafik çizme konusunda bu gruptaki öğrencilerin daha başarılı olabilecekleri değerlendirilmektedir. Sonuçta öğrencilere doğrusal değerler verilince öğrencinin doğrusal bir çizgi çizmesi ne kadar beklendik

bir sonuçsa, doğrusal olmayan noktalar için farklı yollardan birleştirmeye kalkması da aynı düzeyde beklendiktir. Bunun karşısında yer alan durumsa didaktik antlaşmasıdır. Öğrencileri alternatif şekiller çizmekten alıkoyacak bir sebep grafik çizimleri ve fonksiyonlarla ilgili kafasında oluşan didaktik anlaşması maddeleri olabilir. Bunun yanında öğrencilerin denklem kurmayacağı değerlendirilmiştir.

4.1.4. 9'uncu Sınıflar 2. Soru A Grubu

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

İkinci soruda, verilen tablo sadece nokta değerlerini ifade ettiğinden ve bu değerlere bakarak fonksiyonun diğer noktalarda nasıl hareket ettiğİ bilinemeyeceğinden en büyük ve en küçük değeri hakkında net bir şey söylenemeyeceğini belirtmeleri istenmiştir. Birinci soruda A grubuna verilen orantılı değerler B grubuna, benzer şekilde birinci soruda B grubuna verilen orantısız değerler ikinci soruda A grubuna verilmiştir. A grubunda öğrencilerden beklenen cevap tablo haricindeki değerler hakkında düşünmeden tabloda verilen en büyük ve en küçük değeri yazmasıdır. Buna göre en büyük değeri 29, en küçük değeri -7 olacaktır. Bunun yanında fonksiyonun aldığı en küçük ve en büyük değerlerden hareketle en büyük değeri 29, en küçük değeri 5 yanıtı da gelebilir.

4.1.5. 9'uncu Sınıflar 2. Soru B Grubu

2)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

A grubu ile benzer şekilde en büyük ve en küçük değeri olarak tablo değerlerini vermeleri beklenmekle birlikte bazı öğrenciler fonksiyonun doğrusal hareketi ile + ve - sonsuza gidebileceğİ cevabını da verebilir. Bunların yanında bazı öğrencilerin verilen her hangi iki tablo değeri arasında fonksiyonun sonsuz sayıda yol alabileceğini düşünmeleri beklenmemektedir. Bu soruda da en büyük 3, en küçük -5 olur cevabı en çok verilmesi beklenen cevaptır. Aynı zamanda bazı öğrenciler değerlerin doğrusallığından hareketle fonksiyonu denklemlereleştirebilir.

4.1.6. 9’uncu Sınıflar 3. Soru A Grubu

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Üçüncü soruda öğrencilerin verilen değerlerin her ayın ilk gün değerleri olduğu fark etmeleri ve diğer günler hakkında net bir şey söylenemeyeceğini ifade etmeleri istenmiştir. Tabloları günlük hayatla ilişkilendirerek değerlerin sürekli iniş-çıkış yaşayabileceğini yorumlamaları istenmiştir. Bu gruba verilen değerler koordinat düzlemine yerleştirilip doğrusal şekilde birleştirilecek olursa şubat ayı içinde değerleri kesişecektir. Burada bir çizim yapmasalar bile bir çok öğrencinin bu şekilde düşüneceği ve bu cevabı vereceği beklenmektedir. Üç soruda ortak nokta sadece tablo değerlerine bakarak iki değer arasında fonksiyonun nasıl hareket edeceğinin bilinmiyor olmasıdır. Bununla birlikte didaktik antlaşmasının etkileriyle öğrencilerin bu gerçeğin dışında eğilimler göstermesi beklenmektedir. Ayrıca “eşit değer olmadığı için kesişmez” cevabını veren öğrencide çıkabilir.

4.1.7.9’uncu Sınıflar 3. Soru B Grubu

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Önceki bölümde anlatıldığı gibi öğrenciler verilen değerleri doğrusal olarak birleştirme yoluna giderlerse bu kez ocak ve nisan aylarında birer kez kesiştiğini ifade edeceklerdir. Bu durum en beklenen cevaptır. Bunun yanında bu tabloda şirketlere ait mart ayının ilk gün değerlerinin birbirine çok yakın olması öğrencilere daha farklı cevaplar verdirebilir. Dolayısıyla bazı öğrenciler tablo değerlerinin eşit olmadığından verilen tarihler arasında da eşit olamayacağı yanılgısına düşebilir. Son olarak verilen değerlerin virgülden sonra iki hane ile ifade edilmesi öğrencilerden farklı cevaplar gelmesine neden olabilir.

4.1.8. 12'nci Sınıflar 1. Soru A Grubu

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

12'nci sınıflarında 9'larla benzer cevaplar vermesi beklenmekle birlikte grafik çizimlerinde 9'lardan daha başarılı olmaları beklenmektedir. 12'nci sınıfta verilen tabloya uygun olabilecek bir grafik çizemeyen bir öğrencinin ciddi eksikleri olduğu söylenebilir. Öte yandan 10'uncu sınıfta parabolleri görmüş olmaları dolayısıyla çizimlerinde eğrilere yer vermeleri beklenen bir durumdur. Fakat verilen değerlerin A grubunda doğrusal olduğu dikkate alındığında 12'nci sınıfta olsa öncelikle doğrusal çizimler yapması beklenmektedir. Bu sınıfta alternatif bir grafik çizme konusunda ise 9'lara kıyasla daha başarılı olabilecekleri değerlendirilmekte, buna rağmen çizen oranının gayet düşük olacağı sanılmaktadır. Çünkü tablolar konusundaki yetersizliklerinin zihinsel olgunluktan çok öğretim tekniklerimizden kaynaklandığı öngörülmektedir. Dolayısıyla 9 ve 12'lerde çok farklı sonuçlar çıkmaması çok da şaşırtıcı olmayacaktır.

4.1.9.12'nci Sınıflar 1. Soru B Grubu

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Bu gruba verilen değerler orantısız olduğundan öğrencilerin eğrilerle bu noktaları birleştirme ihtimali gayet yüksek görülmektedir. Çünkü gerek 12'nci sınıfta gerekse son yıllarında gördükleri bir çok çizimde eğrileri kullanmışlardır. Bunun yanında verilen değerlerin doğrusal olmaması bu öğrencilerin çizilebilecek alternatif grafik üretme konusunda A grubuna göre daha başarılı olabilecekleri beklentisini doğurmaktadır. En basit ifadesi ile verilen iki noktayı konkav ve konveks birleştirmeleri bile farklı iki grafik üretmeleri için yeterli olacaktır.

4.1.10. 12'nci Sınıflar 2. Soru A Grubu

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Bu soruda öğrencilerin verilen değerler içinden en büyük ve en küçük olanını seçme yanılışına düşebileceği değerlendirilmektedir. 9'uncu sınıflardan farklı olarak 12'nci sınıflarda tanım kümesi görüldüğünden öğrenciler bu şekilde bir arayış içine girebilirler. Bununla birlikte verilecek cevapların çoğunun en büyük 29, en küçük -7 şeklinde olması beklenmektedir.

4.1.11.12'nci Sınıflar 2. Soru B Grubu

2)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Bu grubun değerleri doğrusal olduğundan verilecek cevaplar içinde denklem yer alması olasılığı gayet yüksektir. Özellikle 12'nci sınıf öğrencileri fonksiyonlar ve grafik çizme konusunda 9'lara göre daha fazla uygulama yaptıklarından denklem üretmeleri doğal bir sonuç olarak görülebilir. Öte yandan soruda grafiğin denklemi sorulmamasına rağmen böyle bir şey yazarlarsa bu da didaktik anlaşmasının bir sonucu olarak yorumlanabilir. “ne kadar çok yazarsak o kadar çok puan alırız.” Bu düşünce bazen öğrencilerin soruda sorulmayan denklem veya formülleri kağıda yazmasına sebep olmaktadır.

4.1.12. 12'nci Sınıflar 3. Soru A Grubu

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Bu grupta yer alan öğrencilerden en çok beklenen cevap şubat ayı içinde bir kez cevabıdır. Bu noktada 9'uncu sınıflar ile 12'nci sınıfların benzer cevaplar vermeleri beklenmekle birlikte 12'nci sınıfların basit yanılgılar yapmamaları beklenmektedir.

Özellikle 9'uncu sınıflarda fonksiyonlar yeni öğrenilen bir konu olduğundan fonksiyonların tanımına ters örnekler vermeleri ya da kavram yanlışları göstermeleri ihtimali daha yüksektir.

4.1.13.12'nci Sınıflar 3. Soru B Grubu

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

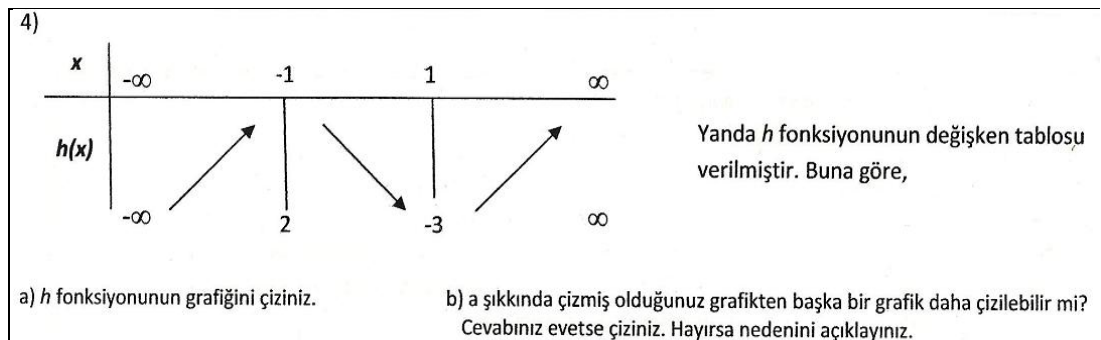
Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Bu gruptaki öğrencilerden en çok beklenen cevap ocak ve nisan ayında birer kez cevabıdır. Bu cevapta önceki bölümlerde anlatıldığı gibi verilen değerleri doğrusal birleştirme yanlışına düşecek öğrencilerden beklenmektedir.

Sorularda görüldüğü gibi ilk sorusu orantılı olan grubun ikinci sorusu orantısız olacak şekilde bir soru kağıdı hazırlanmıştır. İçeriğine bakıldığında üç soruda da ortak bir algı araştırılmaktadır. Bu algı verilen herhangi iki tablo değeri arasında fonksiyonun çok farklı yollar izleyebileceği, sonsuz sayıda değer alabileceği gerçeğidir. İşte bu noktada merak uyandıran durum öğrencilerin bu üç sorudan herhangi birinde bunu fark etmeleri halinde diğer sorulara da uyarlayıp uyarlayamayacaklarıdır. Olması gereken öğrencilerin üç soruda da paralel cevaplar vermesidir. Bu durum ayrıca incelenecektir.

12'nci sınıflarda 4. ve 5. soruda her iki gruba da aynı sorular sorulduğundan ayrıca grup incelemesi yapılmayacaktır.

4.1.14. 12'nci Sınıflar 4. Soru



Dördüncü soruda verilen nokta değerlerine uygunluğun yanında artan azalanlıkla ilgili özellikte incelenmiştir. B şıkında ise öğrencilerden aynı durumları sağlayan ikinci bir grafik çizmeleri istenmektedir. Bu soruda artan, azalan durumları da verildiğinden öğrencilerin daha çok eğrileri kullanarak çizim yapmaları beklenmektedir. Çünkü son sınıfta yaptıkları çizimlerde genellikle eğrileri kullanmışlardı. Bununla birlikte alternatif bir grafik çizebilme konusunda ilk soruya verdikleri cevaba paralel bir cevap vermeleri ve açıklama yapmaları beklenen durumdur. Bunun yanında artan azalanlık konusunda kavram yanılgıları olan öğrencilerden sıra dışı çizimler gelmesi de muhtemeldir. Ayrıca bu soruda değerler tablosu ayrıca verilmeyip değişkenler tablosunun içinde verildiğinden bazı öğrencilerin bunu algılamakta güçlük çekmesi olasılığı vardır. Bu da değerler tablosunun ne derece doğru okunabildiğinin ayrı bir göstergesi olacaktır. Öte yandan ilk sorudan farklı olarak bu soruda artan azalanlık ilişkileri de verildiğinden grafiğin kabaca hareketi ilk sorudan daha net bilinecektir.

4.1.15. 12'nci Sınıflar 5. Soru

5)

x	-5	-3	2	7
$k(x)$	6	0	3	-1

Yandaki verilen tabloya göre k fonksiyonu için bir değerler tablosu oluşturunuz.

Bu soruda öğrencilerin en çok yazacakları tahmin edilen cevap tabloda verilen değerleri ayrı bir tablo olarak yeniden yazmalarıdır. Bunu dahi yazamayacak öğrenci olması 12'nci sınıflar için büyük bir eksiklik olarak yorumlanabilir. Asıl merak edilen durum ise artan azalan durumlarını da dikkate alarak tabloda verilenler dışında bir değer yazılıp yazılmayacağıdır.

4.2.SORULARIN ANALİZİ

4.2.1. 9'uncu Sınıflar

9'uncu sınıflarda toplamda 26 öğrenci olup bunlardan 12 öğrenci A grubuna, 14 öğrencide B grubuna ait soruları çözmüşlerdir.

4.2.1.1. 1'inci Soru A Grubu

A şıkında gruptaki 12 öğrenciden 8 tanesi grafiği doğru çizerken, 4 öğrenci grafik çiziminde yanlış yapmıştır. B şıkında ise 3 öğrenci çizilebilir derken, 9 öğrenci çizilemeyeceğini ifade etmiştir.

1)

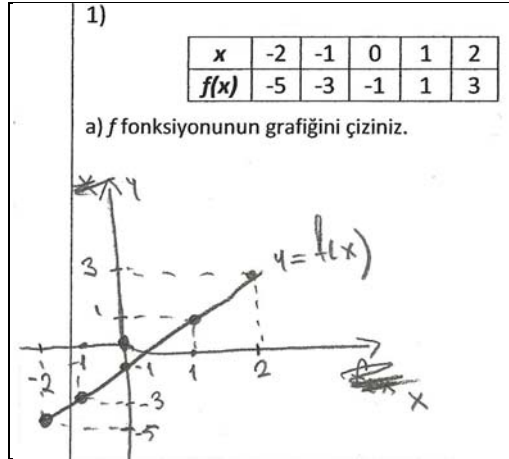
x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

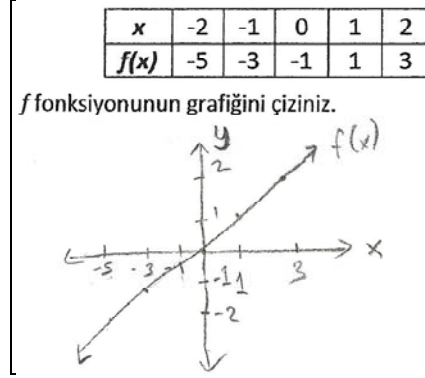
a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

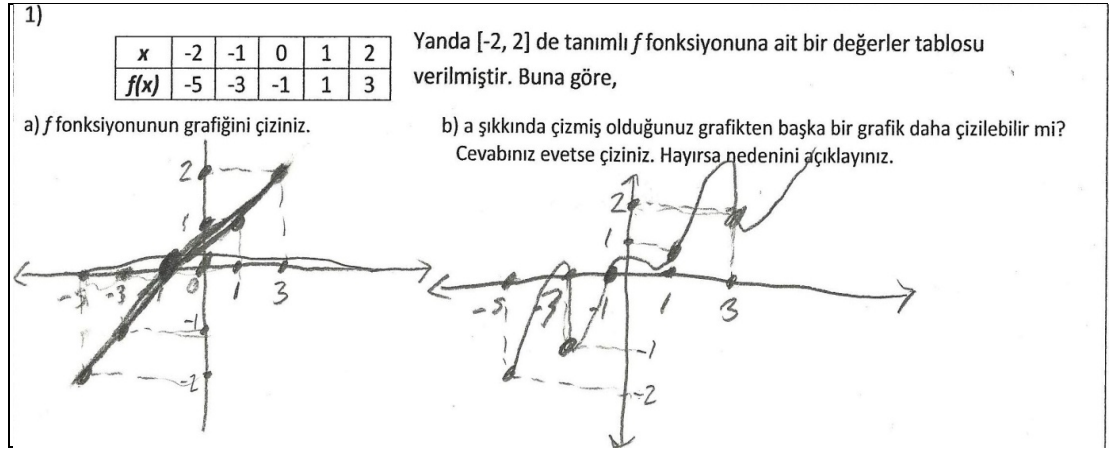
Bu grupta tüm öğrencilerin grafiği oluşturmada doğrusal çizgiler kullanması dikkat çekmektedir. Tabloda verilen değerlerin doğru orantılı olmasından hareketle öğrenciler doğrusal çizime yönelmişlerdir. Aşağıda verilen tabloya uygun çizimlerden birine yer verilmiştir:



Yanlış çizimleri incelediğimizde eksenlere yanlış değer yazmaktan kaynakladığını görmekteyiz. Bu duruma aşağıda bir örnek verilmiştir.



Aynı sorunun b şıkında ise 3 öğrenci çizilebilir derken, 9 öğrenci çizilemeyeceğini ifade etmiştir. Çizilebilir diyen 3 öğrenciden biri bunu çizerek göstermiştir.



Öğrencinin çizimi incelendiğinde ilk grafikte de hata yaptığı görülmektedir. Ayrıca b şıkında x ve y eksenlerine yazılacak değerleri ters yazdığı dikkati çekmektedir. Öğrenciyle yapılan görüşmede bu çizimi yapmasında ters fonksiyon mantığı ile yaklaşmasının etkili olduğu tespit edilmiştir.

Bir diğer öğrenci “eğimlerini değiştiririz.” yazmasına rağmen çizim yapmamış. Üçüncü öğrenci ise çizilebilir ama nasıl çizileceğini bilmiyorum demiştir. Nasıl çizileceğini bilmediği halde öğrencinin çizilebilir demesi didaktik antlaşmasındaki soru sorulduğuna göre cevabı olmalı düşüncesi ile ilişkilendirilebilir.

Çizilemez diyen 3 öğrenci açıklama yazmazken açıklama yazan öğrenciler “bir tablonun bir grafiği olur” başlığında toplanabilecek ifadeler kullanmışlardır. Bu

öğrencilerden biri yapılan görüşmede şimdiye kadar gördükleri tüm fonksiyonların sadece bir grafiği olduğundan hareketle bu cevabı verdiği anlaşılmıştır.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Hayır çünkü sayılar belirli olduğu için çizilen grafik aynı olmak zorundadır.

Öğrencilerin bu soruda gözden kaçırdıkları nokta verilen tablonun sadece nokta değerleri olduğu halde öğrencilerin bir tabloya karşılık gelebilecek sadece bir grafik olduğunu düşünmeleri olmuştur. Bu durum öğrencilerin öğrendikleri bilgiler kapsamında doğal görülse de

B şıkında çizilemez diyen öğrencilerden biri “Fonksiyonun belli bir kuralı vardır ve bu kurala göre girenler farklı bir şekilde çıkar. Bu yüzden çizilemez” demiştir.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Hayır. Çünkü fonksiyonun belli bir kuralı vardır ve bu kurala göre girenler farklı şekilde çıkar. Bu yüzden çizilemez.

Verilen değerlere bakıldığında x 'e karşılık gelen $f(x)$ değerlerinin farklı değerler olduğu görülmektedir. Bu durumun öğrencinin yanılmasında etkili olduğu değerlendirilmiştir. Öte yandan birim fonksiyon öğrencinin açıklamasını yanlış kılmaktadır. Birim fonksiyon yukarıdaki ifadenin genellenebilirliğini engellediği gibi öğrencinin açıklaması doğru bile olsa sorulan soruya gerekçe olarak gösterilemez.

Bu da yine tablo-grafik ilişkilerinin iyi kavranmamış olmasından kaynaklanan bir eksikliklerdir.

Verilen cevaplarda dikkati çeken bir diğer noktada bazı öğrencilerin “çizilir ama nasıl çizileceğini bilmiyorum.” ya da “çizilemez bilmiyorum.” şeklinde yazmasıdır. Öğrencinin bir konuda bilgisi eksikse çizilip çizilemeyeceğine dair yorum yapamaması gerekir. Buna rağmen öğrenciler öncesinde çizilebilirliği irdeleyip ardından bilmiyorum yazmıştır. Bunu didaktik antlaşmasındaki öğrencinin sorulan soruya illaki cevap verme zorunluluğu hissetmesi ile ilişkilendirebiliriz.

4.2.1.2. 1’inci Soru B Grubu

A şıkında gruptaki 14 öğrenciden 5 tanesi grafiği doğru çizerken, 9 öğrenci grafik çiziminde yanlış yapmıştır. B şıkında ise 4 öğrenci çizilebilir derken, 10 öğrenci ise farklı nedenlerle çizilemeyeceğini ifade etmiştir. 1 öğrenci ise bu şıkta açıklama yazmamıştır. Çizimi doğru yapan öğrencilerden 2 tanesi, yanlış yapanlardan 3 tanesi verilen noktaları birleştirmede parabolle kullanmışlardır. Diğer yandan yanlış çizim yapanlardan 5, doğru çizim yapanlardan 3 öğrenci noktaları doğrularla birleştirmiştir. 1 öğrenci ise sadece noktaları işaretleyip bırakmıştır.

1)

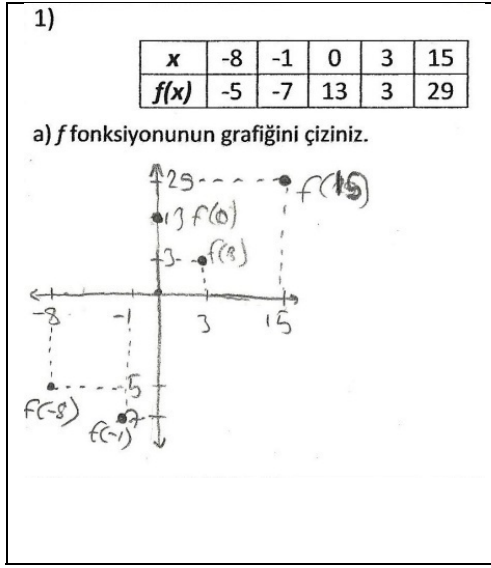
x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

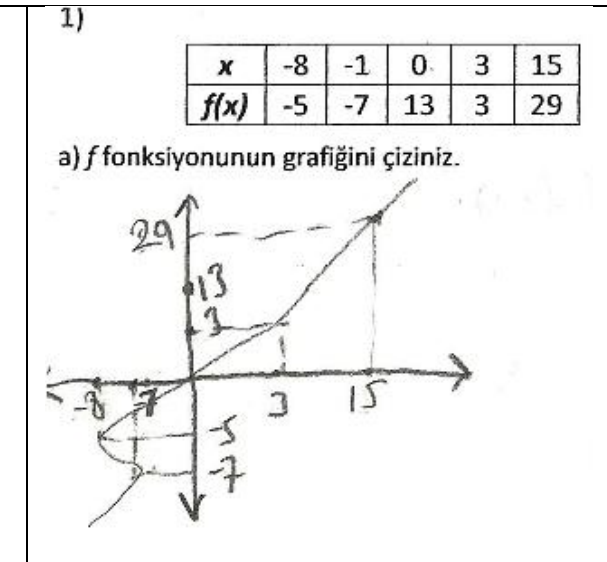
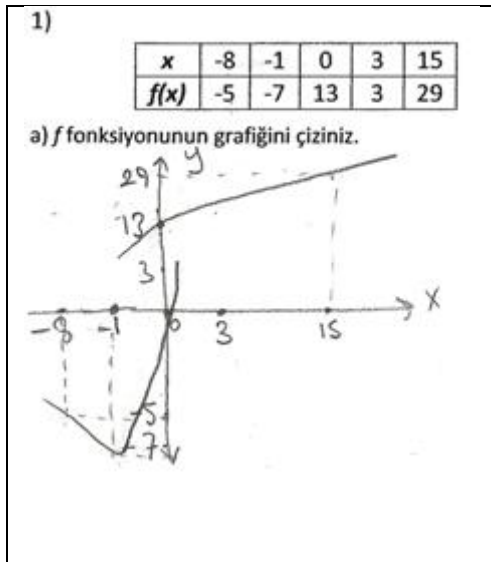
a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

A grubundan farklı olarak B grubunun değerler tablosunda doğru orantılı olmayan değerler verilmiştir. Nicel değerlerde belirtildiği gibi gruptaki 14 öğrenciden sadece 5 tanesi verilen tabloya uygun bir çizim yapabilmıştır. A grubundaki 12 öğrencinin 8’i verilen tabloya uygun grafik çizerken; B grubundaki 14 öğrenciden sadece 5 tanesi değerler tablosuna uygun bir grafik çizebilmiştir. Bu açıdan kıyaslandığında 9’uncu sınıflarda fonksiyon değerleri orantılı verilmediğinde öğrencilerin grafiği çizmede zorlandıkları görülmüştür. Diğer yandan A grubunda tüm öğrenciler çizimde doğruları kullanırken B grubunda 5 öğrenci parabolle kullanarak grafik çizmeyi tercih etmiştir. Her iki grubu da ortak değerlendirdiğimizde 9’uncu sınıflarda 26 öğrencinin 20’si çizimlerinde doğruları kullanmayı tercih etmişlerdir.

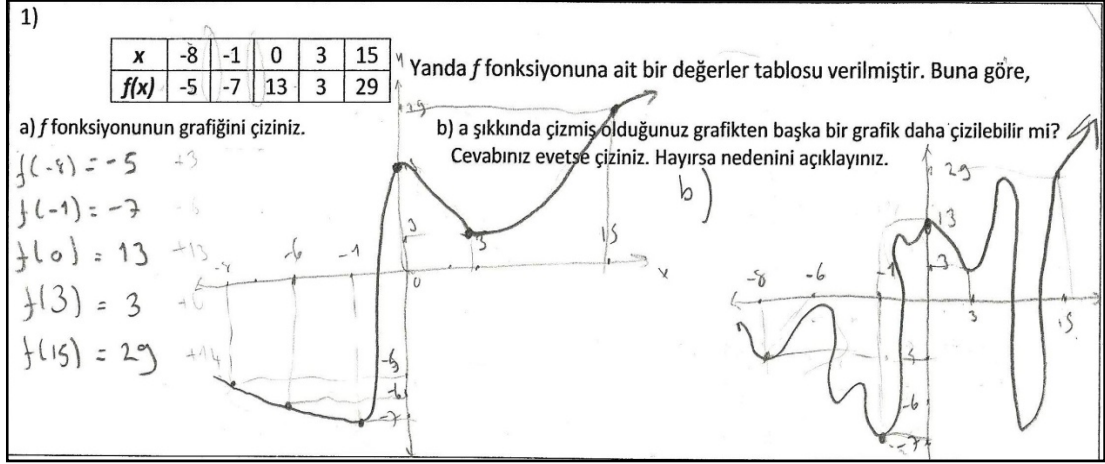


Yanda çizimi verilen öğrencinin sadece noktaları işaretleyip bırakması istenilen durum olmasa da eğitim sistemimizdeki didaktik antlaşma ile örtüşmektedir. Çünkü öğrenciler tablo değerlerinin sadece nokta değerleri olduğunu öğrenmişler bunun ötesinde uygulamalara hazırlanmamışlardır. Öğrenci ile yapılan görüşmede sadece nokta değerleri verildiği için böyle bir grafik gösterimi yaptığını belirtmiştir.



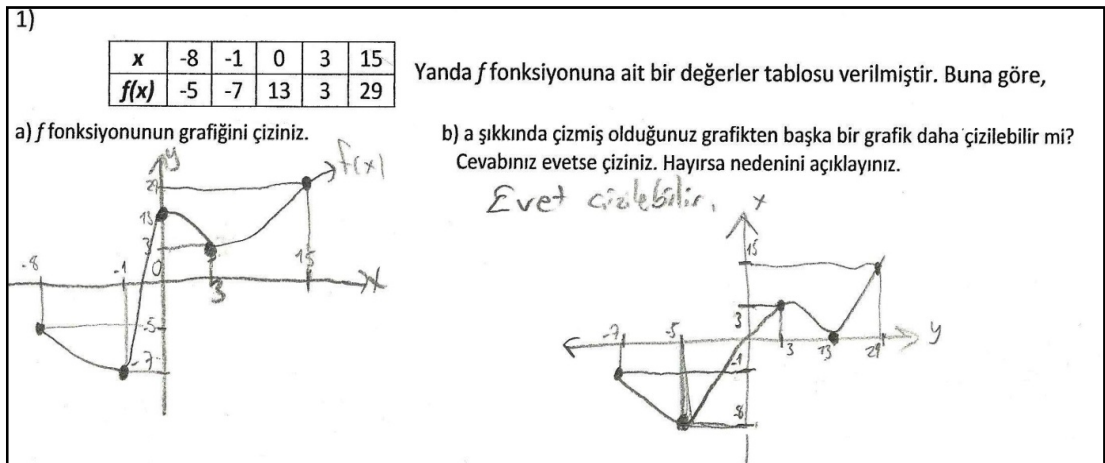
Yukarıda iki ayrı yanlış çizime yer verilmiştir. Birinci öğrenci grafiği orijinden geçirmek için uğraşmış, olmayınca parçalı fonksiyonlara geçiş yapmıştır. İkinci öğrencinin de grafiği orijinden geçirdiği görülmektedir. Yapılan incelemede her iki grupta yanlış çizim yapan 12 öğrenciden 8'inin grafiği orijinden geçirdiği görülmüştür. Buna bağlı olarak öğrencilerin "fonksiyonların grafiği orijinden geçer." gibi bir didaktik kabul içinde oldukları değerlendirilmiştir. Öğrencilerden biri ile yapılan görüşmede sınıfta çizdikleri grafiklerin orijinden geçtiğini hatırladığından bu şekilde olması gerektiğini ifade etmiştir.

Aynı grubun b şıkkına verdikleri yanıtları incelediğimizde 4 öğrencinin çizilebilir 10 öğrencinin çizilemez yanıtını verdiği görülmüştür. Çizilebilir diyen 4 öğrenciden 1'i bunu çizerek göstermiştir.



Sağdaki çizimde x değerlerine karşılık birden fazla $f(x)$ değeri geliyor gibi görünse de öğrenci ile yapılan görüşmede bunun düzgün çizememekten kaynaklandığı öğrencinin fonksiyon tanımını bildiği anlaşılmıştır.

Çizilebilir cevabını veren diğer üç öğrenciden birisi çizim olarak $f(x)$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu kastettiğini belirtmiş fakat çizim yapmamıştır. Bir diğer öğrenci ise soruyu aşağıdaki şekilde cevaplamıştır:



Her ne kadar beklenen çizim bu olmasa da öğrencinin eldeki nokta değerleri ile bu şekilde bir alternatif grafik düşünmesi fazlasıyla özgün olarak değerlendirilebilir. Öğrenci x ve y eksenlerinin yerlerini değiştirerek noktaları yeniden işaretlemiş ve bu

noktalardan geçen grafiği çizmiştir. Eksenler görmezden gelindiğinde gayet nizami bir fonksiyon gibi görünse de tanım kümesinde aynı elemanın görüntü kümesinde birden fazla elemana gittiği görülmektedir. Öğrenci ile sonradan yapılan mülakatta öğrenci hatasının farkına varmakla birlikte, verilen tablo değerleri ile alternatif bir grafik çizilemeyeceğini ifade etmiştir.

Çizilebilir diyen son öğrencide bunun $f(x)$ yerine $f(x+1)$ vb. değişik değerler yazarak $f(x)$ fonksiyonunun kaydırılması ile mümkün olduğunu ifade etmiştir. Öğrenci ile yapılan görüşmede sadece verilen tablo için düşünceleri sorulduğunda aynı değerlerle farklı tablo çizilemeyeceğini ifade etmiştir.

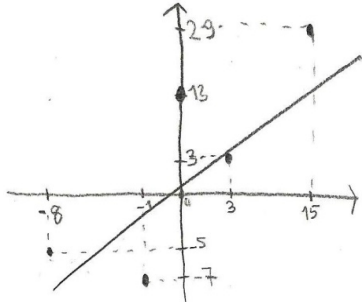
Çizilemez yanıtını veren 9 öğrenci incelendiğinde bunların A grubunda olduğu gibi “bir tablonun bir grafiği olur.” kategorisinde değerlendirilebilecek cevaplar verdiği görülmüştür. Bu bağlamda A grubunu da dikkate alarak 9’uncu sınıf öğrencilerinin tablo-grafik geçişleri konusunda sıkıntı yaşadıkları değerlendirilebilir. Aşağıda bu grup kapsamında değerlendirilen bir örneğe yer verilmiştir:

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Bence çizemeyiz. Çünkü bir fonksiyonda bütün değerlerin sağlandığı tek bir grafik vardır.

Burada öğrencinin a şıkında yaptığı yanlış çizim daha çok dikkati çekmektedir. Öğrenci ile yapılan görüşmede verilen tablo değerleri bu şekilde olduğunda (orantılı olmayan değerler) aralarından geçen bir grafik çizildiğini ifade etmiştir. Doğrusal yaklaşma kavramını çağrıştıran bu çizimin arka planında yine tablo-grafik problemleri yattığı söylenebilir. B şıkında ise öğrencinin açık şekilde bir tablonun bir grafiği olacağı yanılgısına düştüğü görülmektedir.

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Bu çek bu soruyu karıştırdım.
Bence çizilemez!
Her fonksiyonun 1 grafiği vardır.

Her fonksiyonun bir grafiği olur cevabını veren bu öğrencide $x-f(x)$ farkını x değerleri olarak, verilen x değerlerini de y değerleri gibi görerek işlem yapmıştır. Kendi sistemi içinde $x=3$ iken $f(x)=3$ değerini yorumlayamadığı da görülmektedir. Öğrenciyle yapılan görüşmede önceden karşılaştığı fonksiyonların x değerlerini bir işleminden geçirdikten sonra sonucu veriyor olmasından yola çıkarak böyle bir işlem yaptığını belirtmiştir.

9'uncu sınıflarda ilk soruda A ve B grubunda verilen cevaplar incelendiğinde tablo değerlerinin orantılı olması ile olmaması durumunun ilk grafik çiziminde fark yaratsa da, verilen tabloya uygun başka bir grafik çiziminde dikkate değer bir farklılık oluşturmadığı görülmektedir.

4.2.1.3. 2'nci Soru A Grubu

Gruptaki 9 öğrenci en büyük 29, en küçük -7 değerlerini alabileceğini ifade etmiştir. 2 öğrenci E.K.= 5, E.B.=29 derken, bir öğrencide E.B. ve E.K. değerler hakkında bir şey söylenemeyeceğini, tanım kümesindeki farklı sayıların görüntüsünün daha küçük ya da daha büyük değerlere gidebileceğini ifade etmiştir.

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Bir önceki soruda B grubuna verilen değerler tablosu bu kez A grubuna verilmiştir. Benzer şekilde A grubunun ilk sorudaki değerler tablosu da B grubunun ikinci sorudaki değerler tablosu olarak verilmiştir.

Nicel değerler de belirtildiği gibi bu gruptaki öğrencilerin 9'u E.K.= -7 , E.B.= 29 değerlerini alacağını ifade etmiştir. Uygulama öncesi analiz bölümünde de böyle bir sonuç beklenildiği ifade edilmiştir. Bu gruptaki bir öğrenci ile yapılan görüşmede, öğrenci verilen tabloya göre fonksiyonun alabileceği en büyük ve en küçük değerın yazılması gerektiğini ifade etmiştir.

2)

x	-8	-1	0	3	15
g(x)	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

En büyük değeri 29 en küçük -7'dir. Çünkü fonksiyonun değeri x'in g(x)'e bakılır.

Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi öğrencilerin doğrudan verilen nokta değerleri üzerinden yorum yaptıkları fonksiyonun diğer noktadaki hareketine dair düşünce yürütmedikleri anlaşılmaktadır.

Bununla birlikte 2 öğrenci E.K.= 5, E.B.= 29 cevabını vermiştir. Bu öğrencilerde fonksiyon imajıyla ilgili ciddi sorunlar olduğu söylenebilir. Sadece x'in aldığı E.K. ve E.B. değerlere bakarak soruyu cevaplamak fonksiyonlardaki girdiler ile çıktılar arasındaki ilişkinin iyi kavranılmadığının göstergesidir.

2)

x	-8	-1	0	3	15
g(x)	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

g fonksiyonun en büyük ve en küçük değeri soruludur. Çünkü "x" sayısına herhangi bir sayı verebiliriz.

Üstte görülen cevabı veren öğrenci ile yapılan görüşmede x'in -8'den daha küçük ya da 15'ten daha büyük değerler alabileceğini bu yüzden sonsuz yazdığını belirtmiştir. $[-8,15]$ kapalı aralığında E.B. ve E.K. değerler sorulduğunda ise E.K.= 5, E.B.= 29 cevabını vermiştir. Bu öğrencilerde x'in aldığı E.K. ve E.B. değerlerin fonksiyonunda E.K. ve E.B. değerleri olacağı yanlışlığının olduğu görülmektedir.

Bu grupların yanında tabloya uyan yorumda bulunan öğrencilerde olmuştur.

2)

x	-8	-1	0	3	15
g(x)	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

En büyük ve en küçük değerler hakkında kesin birşey söylenemez. Tanım kümesindeki sayılar 0 arasında garantiyi daha büyük ve daha küçük değerlere gidebilir.

Yukarıda yazılanlardan öğrencinin sorunun sorulmasındaki amaca dönük bir farkındalık içinde olduğu söylenebilir. Aynı öğrenci 1. Soruda x ve y eksenlerinin yerlerini değiştirerek alternatif grafik çizmeye çalışan öğrencidir.

4.2.1.4. 2'nci Soru B Grubu

10 öğrenci E.B.=3 , E.K.=-5 derken; 1 öğrenci en büyükten en küçüğe giderken 3'er artış vardır; 1 öğrenci E.B.=1 , E.K.=-3 farkları alarak buluruz; 1 öğrenci E.K. değer x'ten küçüktür, E.B. değer x'e eşit ya da x'ten büyüktür; 1 öğrencide $g(x)=x$ olduğuna göre $g(x)$ max = 2 ve E.K.=-2 olur demiştir.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Bu gruptaki öğrencilere doğru orantılı değerler verilmesine rağmen gelen cevapların daha çok çeşitlilik gösterdiği görülmektedir. Yine de 10 kişi ortak olarak E.B.=3 , E.K.=-5 cevabını vermiştir. E.B.=3 , E.K.=-5 cevabını veren öğrencilerde A grubunda açıklandığı gibi sadece tablo değerleri ile sınırlı düşünüp verilmeyen noktalara dair yorum üretememişlerdir.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

$g(x) = x - (x+1) \Rightarrow x \leq 0$ Fonksiyon hiç bir sınırlama koymadığı için
 $g(x) = x + (x-1) \Rightarrow x > 0$ artışı sonsuzdaneksi sonsuza kadargidebilir

Yukarıda cevabı verilen öğrencide yapılan mülakatta -2'ye 2 kapalı aralığında E.K.=-5 , E.B.= 3 yanıtını vermiştir. Bununla birlikte 9'uncu sınıflarda her iki soruda

verilen tablodan yola çıkarak öğrencilerin aklına gelebilecek ilk fonksiyonu sadece bu öğrenci yazmıştır. Bu yazıma da dikkat ettiğimizde öğrenci parçalı fonksiyonlar konusunu bilmiyor olmasına rağmen cebirsel anlamda mutlak değeri çok doğru kullanarak $2x-1$ ’e karşılık gelen ifadeleri yazmıştır.

Bir öğrenci en büyükten en küçüğe giderken 3’er artış vardır yanıtını vermiştir.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

En küçükten en büyüğe doğru giderken 3’er artış vardır.

Verilen cevap incelendiğinde öğrencinin x değerleriyle g(x) değerlerini toplayarak yeni sayılar elde ettiğini ve bunlar üzerinden bir yorum yaptığını görmekteyiz. Aslında bu cevabında E.K.=-5, E.B.=3 kategorisiyle benzeştiğini değerlendirebiliriz. Yinede her durumda öğrenci verilen tablo değerlerini yorumlarken bunları sadece doğrusal bir fonksiyona aitmiş gibi yorumlayarak hata yapmıştır.

Bir öğrenci E.B.=1 , E.K.=-3 farkları alarak buluruz yanıtını vermiştir.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

+1 dir. Çünkü bir sayıyı g(x)
-3 -2 -1 0 1 işlemlerinden geçiriyor.
Bunların arasında en büyük +1

Bir önceki öğrenciye benzer şekilde bu öğrencide g(x) değerinden x’i çıkararak farklı bir yaklaşım sergilemiştir. Öğrenci ile yapılan görüşmede bu tipteki soruların farkları olarak yapılacağını buna göre E.B.= 1 E.K.= -3 olacağını ifade etmiştir. g(x) değerleri hazır olarak verilmesine rağmen öğrenci bu fonksiyonun yaptığı işi, sıralı olarak -3, -2, -1, 0 ve 1 ile toplamak olarak yorumladığından, g(x) değerleri olarak da farklara yoğunlaşmıştır. Mevcut durum öğrencinin tablo-grafik ilişkilerinde önemli

eksikleri olduğu şeklinde değerlendirilebilir. Aynı öğrenci ilk soruda farkları x değeriymiş gibi işlem yapan öğrencidir.

Bir diğer öğrenci “E.K. değer x 'ten küçüktür, E.B. değer x 'e eşit ya da x 'ten büyüktür.” yanıtını vermiştir. Öğrencinin verdiği yanıt sayısal olarak herhangi bir değer ifade etmiyor olsa da yapılan görüşmede verilen tablo değerlerine göre -5 ve 3'ü kastettiği anlaşılmıştır. Ayrıca öğrenciye E.B. ve E.K. kelimelerinin eşitsizlikleri çağrıştırdığı buna bağlı olarak bu yönde bir cevap verdiği görülmüştür. E.B., E.K. kelimeleri ile eşitsizlikler arasında öğrencinin kurduğu ilişki yeni bir didaktik antlaşması maddesini ortaya koymuştur. “E.K., E.B. varsa eşitsizlik vardır.”

Son öğrencide “ $g(x) = x$ olduğuna göre $g(x)_{\max} = 2$ ve E.K. = -2 olur” demiştir.

2)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

$g(x) = x$ olduğuna göre

$g(x)$ en büyük $\Rightarrow g(x)_{\max} = 2$ olur. Fakat sadece bu tabloya göre $g(x)$ 'e verilen değerlere göre bu şekilde olacaktır.

$g(x)$ en küçük $\Rightarrow g(x)_{\min} = -2$

Fakat grafik olarak $\Rightarrow$ fonksiyonda bir kısıtlama olmaması ise alabileceği en büyük değeri düşünürsek bilemeyiz.

Öğrencinin cevabı açıklamalı olmakla birlikte özellikle tablo ile cebirsel ilişki kurma konusunda gayet eksik olduğu görülmektedir. Her ne kadar bu tabloya bakılarak cebirsel bir fonksiyon yazmak doğrudan mümkün olmasa da yazılabilecek fonksiyon $g(x)=x$ kesinlikle olamazdı. Buda çoklu temsillerle ilişkili öğrencinin eksiklerini göstermektedir. Öğrencinin tablodan denklem bulmaya kıyasla verilen tabloya uygun grafik çizme konusunda daha iyi olduğu söylenebilir. Çizdiği grafik içinde kısıtlama olmaması ise alacağı en büyük değeri bilemeyiz demiştir. Diğer öğrencilerde olduğu gibi iki nokta arasını doğrusal olarak birleştirmiştir.

İkinci soru için A ve B gruplarını ortak değerlendirdiğimizde öğrencilerin 19'u verilen tablodaki E.K. ve E.B. $g(x)$ değerlerini yazmışlar, tabloda verilmeyen ara değerler hakkında sadece A grubundan 1 öğrenci değişebileceğini düşünerek cevap yazmıştır. Başta da belirtildiği gibi A grubunun tablo değerleri orantılı olmayan

değerlerdi. B grubu sayıca daha fazla olmasına rağmen ara değerleri düşünen hiçbir öğrenci çıkmamıştır. Yani öğrencilere doğru orantılı tablo değerleri verildiğinde öğrenciler ağırlıklı olarak bunu doğrusal grafik şeklinde düşündüklerinden ara değerler için olabilecek muhtemel değişiklikleri gözden kaçırmaktadırlar.

İlk soruda doğrusal olmayan değerler verildiğinde alternatif grafiği çizebilen B grubundaki öğrenci ikinci soruda doğrusal değerler verildiğinde E.K.= -5 E.B.= 3 yanıtını vermiştir. Bu durumda yukarıda ifade edilen çıkarımı destekler niteliktedir. Bunun yanında uygulama öncesi analizde de ifade edildiği gibi öğrenci bu durumların çelişkili olduğunu fark edememiştir.

4.2.1.5.3 üçüncü Soru A Grubu

Bu soruda 1 öğrenci hiç eşit olmayacağını söylerken, 5 öğrenci şubat ile mart arasında bir defa kesişeceğini ifade etmiştir. Bunlardan başka 1 öğrenci şubat ayında bir nisan ayında bir kez; 2 öğrenci şubat ayında bir ve mart ayında bir kez ; 2 öğrenci mayıs ayında bir kez cevabını vermiştir. 1 öğrencide eşit olabileceğini ama ne zaman ve kaç defa olduğunun bilinemeyeceğini ifade etmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Bu soruda 1 öğrenci hiç eşit olmayacağını söylerken bunun nedenini değerler tablosunda hiçbir aynı değer olmaması şeklinde ifade etmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Hayır. Çünkü burada hiçbir zaman aynı değerle karşılaşılmemiştir. Bu yüzden aynı değer yoktur.

A şirketinin hisseleri mayıs ayının ilk gününe göre azalırken B şirketinin artmıştır. Fakat bu mantıkla öğrencinin ocak ayında da kesişir demesi beklenirdi. Öğrenci ile sonradan yapılan görüşmede örnek olarak hangi değerde kesişebileceği sorulduğunda öğrenci “14,40 olabilir” yanıtını vermiştir. Bu durumda diğer aylarda eşit olmuş olabilir mi? diye yeniden sorulduğunda ise “aslında olabilir.” cevabını vermiştir. Bu öğrencinin doğrusal birleştirmenin ötesinde aralıklara göre artan azalanlık durumundan yorum yaptığı görülmüştür. Çünkü doğrusal birleştirildiğinde nisan ayı içinde kesişme olmamaktadır.

Aynı soruya 2 öğrenci şubat ayında bir ve mart ayında bir kez cevabını vermiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Eşit olmuştur çünkü Şubat ve Mart aylarında B'de hem düşüş hem yükseliş vardır. Ama A'da yükseliş vardır. Bu nedenle ilk defa eşit olmuş olabilirler.

Örneğin yukarıdaki öğrenci aylar arasındaki farkları hesaplayarak ilişki durumunu incelemiştir. Buna göre B'de hem düşüş hem yükseliş A'da ise sadece yükseliş olmasından hareketle şubat ve mart aylarında birer kez yanıtını vermiştir. Aslında bu öğrencinin şubat mart arasında bir kez cevabını veren öğrencilerden daha zayıf olduğu söylenebilir. Çünkü verilen değerler doğrusal birleştirilirse mart ayında bir kesişim olmayacaktı. Eğer öğrenci verilmeyen değerlerde hızlı iniş-çıkışlar yapabileceğini görmüşse diye düşünülse bu kez diğer aylarda da benzer kesişimler olduğunu ifade etmesi beklenirdi.

Grupta 2 öğrenci “mayıs ayında bir kez” cevabını vermiştir. Bu cevabı veren öğrencilerden biri ile yapılan görüşmede mayıs ayı sonuna doğru eşitlenmiş olabilir yanıtını vermiştir. Aslında bu öğrenciler ile hiç kesişim olmamıştır diyen öğrenci aynı grupta değerlendirilebilir. Sonuçta verilen aralıklara göre öğrencilerin yorum yapması beklenirken öğrenciler tanım aralığını dışına dair yorumda bulunmuşlardır.

İlk gün değerlerine göre nisandan mayısa doğru A şirketinin değerleri azalırken B artışta görüldüğünden öğrenci ilerleyen aylarda eşit bir değerde buluşacaklarını değerlendirmiştir.

1 öğrencide eşit olabileceğini ama ne zaman ve kaç defa olduğunu bilinemeyeceğini, ayın açılış gününe bakılarak ayın içindeki değerlerin bilinemeyeceğini ifade etmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Evet olmuş olabilir. Ama ne zaman ve kaç defa olduğu bilinemez. Çünkü ayın açılış gününe bakılarak ayın içindeki değerler bilinemez. Eşit olmuş da olabilir olmamış da olabilir.

Bu öğrenci ikinci soruda da E.B. ve E.K. değerler hakkında bir şey söylenemez yanıtını veren öğrencidir. Buradan hareketle öğrencinin soyut olarak kurduğu ilişkileri gerçek hayat durumlarına uyarlayabildiği söylenebilir.

4.2.1.6. 3 üncü Soru B Grubu

Bu grupta da bir öğrenci eşit olamaz derken, 13 öğrenci olabilir demiştir. 2 öğrenci şubat-mart arasında eşit olabilir derken; 4 öğrenci ocak-şubat arasında olabilir, şubat-mart arasında olabilir, mart-nisan arasında olamaz, nisan-mayıs arasında olabilir yanıtını vermiştir. 6 öğrenci çeşitli cevaplar verirken, bir öğrenci tüm aralıklarda bir veya daha çok kez eşit olabileceğini çünkü açılış gününe bakılarak ayın içindeki değerlerin bilinemeyeceğini ifade etmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

A grubundakine benzer şekilde bu grupta da bir öğrenci eşit olmaz yanıtını vermiştir. Bir öğrencide eşit olabilir derken bunun Temmuz ayında olacağını dolayısıyla

verilen aralıklarda böyle bir kesişim olmayacağını belirtmiştir. Olamaz cevabını veren öğrencinin açıklamalı yanıtı aşağıda verilmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Olamaz. Çünkü her ay hisselerde artış ve azalış farklı. Zaten son ay ile ilk ay arasındaki hisse farkları ortada. Farklar farklı iken aynı değerlere sahip olma olasılığı bulunmaz.

Aynı öğrencinin ilk iki soruya verdiği yanıtlarda benzer şekilde farklardan işlem ve çıkarım yapmaya çalıştığı görülmüştür. Örneğin ikinci soruda (örnek olarak verilen) $g(x)$ fonksiyonunun sırasıyla -3,-2,-1,0,1'le toplama işlemi yaptığını ifade etmiştir. Öğrenciyle yapılan görüşmede benzer tipte çözülen bir sorudan hareketle tablolularlarda çıkarma işlemi yapılması gerektiği yanılışına düştüğü tespit edilmiştir.

2 öğrenci şubat-mart arasında eşit olabilir yanıtını vermiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Evet Şubat 2010 ile Mart 2010 arası
 $39 - 23 = 16$ defa olabilir

Bu öğrencilerden biri şubat-mart arasında 16 defa cevabını vermiştir. Öğrenci ile yapılan görüşmede aşağıdaki diyalog yaşanmıştır:

Öğretmen : Neden 16 defa olacağını düşündün?

Öğrenci : Ben yanlış düşünmüşüm. Aslında en fazla 1 olabilir.

Öğretmen : Başka aralıklarda eşit olmuş olabilir mi?

Öğrenci : Nisan – Mayıs arasında olabilir.

Öğretmen : Bunu nasıl anlarız?

Öğrenci : Artış azalış miktarlarından kesişim noktaları bulunur.

Öğretmen : Peki bunları neden yazmadın?

Öğrenci : Zaman kalmadı.

İlk durumda öğrencinin 16 cevabını vermesinin 14,23 ile 14,39'un farkından kaynaklandığı görülmektedir. Bununla birlikte mülakatta öğrenci başka aralıklarda da eşitlik olabileceğini ifade etmiş olsa da hala sorunun mantığını kavramadığı görülmektedir. Çünkü ilk günlere ait artış azalış miktarları ile kesişim noktalarının bulunmasına imkan yoktur.

Yukarıdaki örneğe kısmen benzer şekilde 4 öğrenci ocak-şubat arasında olabilir, şubat-mart arasında olabilir, mart-nisan arasında olamaz, nisan-mayıs arasında olabilir yanıtını vermiştir. Kaç defa olacağı ise çeşitlilik göstermiştir.

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Olabilir, Ocak ayı ve Şubat ayı arasında bir defa
Şubat ayı ve Mart ayı arasında 17 defa
Mart ve Nisan ayı arasında olmaz
Nisan ve Mayıs ayı arasında 46 defa.

Örneğin yukarıdaki yanıtı veren öğrenci ile yapılan görüşmede neden 17 defa ve 46 defa yazdığı sorulmuştur. Öğrenci 14,23 ile 14,39 arasında toplam 17 değer olduğunu ifade etmiştir. (Bir önceki incelemedeki öğrenci bu sayıyı 16 olarak ifade etmişti.) 13 gibi bir değerde eşit olup olamayacağı sorulduğunda ise olamaz yanıtını vermiştir. Soruda hisse değerlerinin virgülden sonra iki haneden fazla olamayacağına dair herhangi bir bilgi verilmese de öğrenciler genel olarak bu doğrultuda hareket etmiştir. Bu da öğrenci ile öğretmen arasındaki didaktik antlaşmasının bir parçası olarak görülebilir. Gerçekte 14,23 ve 14,39 arasında sonsuz tane sayı varken öğrenci bunların bir çoğunu göz ardı etmiştir. Bunun yanında 13 değerinde eşit olamayacağını ifade ederek verilen nokta değerlerini doğrusal olarak birleştirdiğini ortaya koymuştur. Çünkü verilen değerler her ayın ilk gününe ait olduğundan geri kalan günlerde hızlı düşüşler veya çıkışlar olabileceğini fark edememiştir. Aynı grupta değerlendirilen bir diğer öğrenci Mart – Nisan arasında neden eşit

olamayacağını “Kesiştikleri nokta yok. Biri artıyor, biri azalıyor.” şeklinde açıklamıştır.

Diğer cevaplar incelendiğinde bir öğrenci Ocak – Şubat arasında bir kez yanıtını vermiştir. Öncede açıkladığımız doğrusal düşünme sınırlılığının etkisinde kalmıştır. Benzer şekilde Ocak – Mart arasında bir kez cevabını veren öğrencide Ocak ayından Mart’a kadar A şirketinde yükseliş B de düşüş olduğundan bu cevabı verdiğini belirtmiştir. “Şubat ayında 11 defa, Nisan ayında 47 defa” cevabını veren öğrenci ile yapılan görüşmede Ocak – Şubat arasında 14,12 – 14,23 aralığındaki değerleri alabileceğini belirtmiştir. Ek olarak, aslında her ay arasında sonsuz defa olabileceğini ifade etmiştir. İki öğrenci Ocak – Şubat arasında bir kez ve Nisan – Mayıs arasında bir kez cevabını vermiştir. Buna gerekçe olarak da bu aralıklarda şirketlerden birinin hisseleri artıya iken diğerinin azalıyor olmasını söylenmiştir. Aslında bu cevabı daha çok öğrencinin vermesi beklenirdi. Öğrenci ile yapılan görüşmede aslında her ay arasında kesişimler olabileceğini, ilk günden sonra hisselerin hızlı iniş çıkışlar yapabileceğini belirtmiştir.

Bir öğrenci tüm aralıklarda bir veya daha çok kez eşit olabileceğini çünkü açılış gününe bakılarak ayın içindeki değerlerin bilinemeyeceğini ifade etmiştir.

3)		Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A		12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B		15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Bütün tarihler arasında olmuş olabilir. Çünkü bu değerler her ayın ilk açılış günü değerleriydi.
Bu değerler arasında bir kaç tane değer birbirine yakın veya eşit olması ortalama değeri etkileyecektir. Bu şekilde eşit olmuş değerler tüm tarihler arasında bir veya birden çok kez eşit olmuş olabilir.

Aynı öğrenci önceki sorularda daha cebirsel yaklaşım sergilediğinden değerler tablosunun ara değerlerini düşünememiş olmasına rağmen günlük hayatla ilişkilendirilebilecek bir konu şeklinde karşısına çıktığında net bir cevap vermiştir.

Üçüncü soru için A ve B gruplarını ortak olarak değerlendirdiğimizde sadece iki öğrencinin her aralıkta ve çok sayıda kesişebileceğini ifade ettiği görülmüştür. Bunun dışında öğrencileri ortak bir başlık altında toplamak genel olarak mümkün

olmamıştır. Yinede öğrencilerin verilen değerler arasında hisselerin doğrusal hareket ettiklerini düşündükleri söylenebilir. Örneğin düzenli artış ya da düzenli azalış olarak ifade ettikleri gibi... Gerçekte ise böyle bir doğrusallığa ait herhangi bir ön bilgi verilmemiştir. Ayrıca öğrencilerle yapılan görüşmelerde birkaç öğrencinin ara değerlerde de kesişimler olabileceğini fark ettikleri görülmüştür.

9'uncu sınıf öğrencilerinin cevapları genel olarak değerlendirildiğinde tablo okuma ve yorumlamada hatalara düştükleri görülmüştür. Verilen değerlere göre grafik çizmede öğrencilerin çoğu tabloya uygun bir grafik çizerken, alternatif grafik çizme konusunda aynı performansı yansıtamamışlardır. Burada öğrencilerin en çok hata yaptıkları konunun verilmeyen tablo değerlerini yorumlayamadıkları olduğu görülmüştür. Öğrencilerin çoğu verilen değerlerden hareketle doğrusal birleştirme mantığı ile işlem yapmıştır. Çizilen grafiklerde de görüldüğü gibi öğrenciler eğrilerden çok doğruları kullanarak çizim yapmışlardır. Daha önce benzer sorularla da karşılaşmadıklarından öğrenciler durumları geçmiş yaşantılarına uyarlamaya çalışmışlardır. Bunun sonucunda didaktik antlaşması ile ilişkilendirilebilecek “bir tablonun bir grafiği olur” türünde cevaplar vermişlerdir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar ile uygulama öncesi analiz bölümündeki beklenen yanlışların genel olarak örtüştüğü görülmektedir.

4.2.2. 12'nci Sınıflar

12'nci sınıfların ilk üç sorusu 9'uncu sınıflarla aynı olup değişkenler tablosunu yorumlamaya dayalı fazladan iki soru daha sorulmuştur. Değişkenler tablosu 9'uncu sınıflarda müfredatta yer almadığından ilave iki soru sadece 12'nci sınıflara sorulmuştur. 9'uncu sınıflarda olduğu gibi sorular A ve B gruplarından oluşmakta olup, fazladan sorulan iki soruda her iki gruba da aynı sorular sorulmuştur.

4.2.2.1. 1'inci Soru A Grubu

A şıkkında gruptaki 11 öğrenciden 10 tanesi grafiği doğru çizerken, 1 öğrenci grafik çiziminde yanlış yapmıştır. B şıkkında ise 8 öğrenci bu değerler tablosuna ait başka bir grafik çizilemeyeceğini ifade ederken 2 öğrenci bu bölümü cevapsız bırakmıştır. Bir öğrencide $f(x)$ 'in ikinci türevine göre değişebilir şeklinde açık uçlu cevap vermiştir.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

 Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a) şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

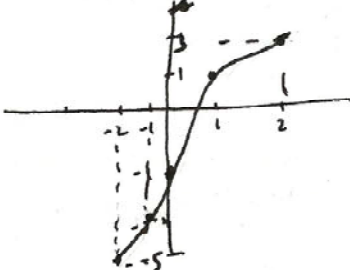
84

5 öğrenci “bir tablonun bir grafiği olur.” ifadesine paralel cevaplar vermiştir.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Hayır -
Çünkü bu değerler
tablosu sadece bir grafik
ifade eder

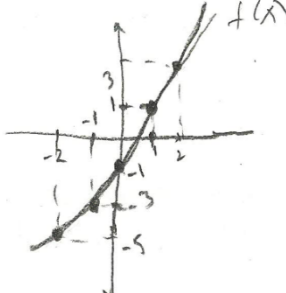
Benzer açıklamalar 9’uncu sınıflarda da gözlenmişti. Bu tablonun sadece bir grafiği olmayacağı daha öncede açıklanmıştı. Burada dikkati çeken bir diğer nokta daha vardır. Öğrencinin grafiği oluştururken x değerlerini orantısız aldığından grafiğin son hali hiç de doğrusal gözükmemektedir.

Bir diğer öğrenci “Çizilemez. Birebirdir. Aynı zamanda artandır.” yanıtını vermiştir.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

- Çizilemez, Çünkü bire birdir. Aynı
zamanda artandır.

A şıkındaki çizimle beraber değerlendirdiğimizde öğrenci diğerleri gibi noktaları doğrusal birleştirmiştir. Kendi çizimi için birebir ve artan ifadesi doğru olsa da bu tablo ile çizilebilecek alternatif grafikleri görememiştir. Bu anlamda farklı bir grafiğin birebir olmadığı yerler olabileceği gibi illaki artan olma zorunluluğu da yoktur. Bu öğrencide verilen noktaları doğrusal şekilde birleştirme yanılgısına düşmüştür. Öğrenci görüşmede a şıkında çizmiş olduğu grafiğin sınırlılığında kalarak bu cevabı verdiğini belirtmiştir.

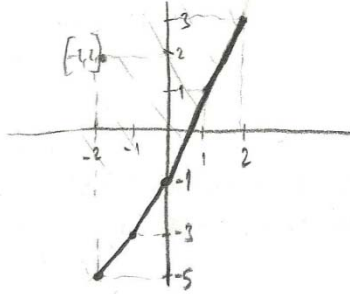
Bu gruptaki son öğrenci mutlak değer fonksiyonu olmadığından çizilemeyeceğini belirtmiştir.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Hayır çünkü bu bir mutlak değer fonksiyonu değildir.



Öğrenci ile yapılan görüşmede mutlak değer fonksiyonu olsa bunun nasıl yapılacağı sorulmuş öğrencide yandaki çizimi yapmıştır.

Verilen cevap özgün bir cevaptır. Buna rağmen yanlıştır. Bir fonksiyonun mutlak değerli hali başlı başına bir grafiğe sahiptir. Mutlak değer bir fonksiyonu iki grafikli yapmaz. Bunun ötesinde bu soruda öğrenciden beklenen cevaplar önceki bölümlerde açıklanmıştır. Herşeye rağmen öğrencinin mutlak değer fonksiyonunun işlevi ile ilgili bilgisi doğru görünmektedir.

4.2.2.2. 1'inci Soru B Grubu

A şıkında gruptaki 13 öğrenciden 10 tanesi grafiği doğru çizerken, 3 öğrenci grafik çiziminde yanlış yapmıştır. B şıkında ise 13 öğrenciden 10 tanesi çizilemez derken 3 öğrenci çizilebileceğini belirtmiş ve istenilen grafiği çizmiştir.

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

B grubundaki 13 öğrenciden a şıkında 11 öğrenci belirtilen noktaları parabolik şekilde birleştirirken, 2 öğrenci doğrularla birleştirmiştir. Yanlış çizim yapan 3 öğrenci parabolik çizgiler kullanmıştır. 12'nci sınıflarda orantılı olmayan değerleri birleştirmede öğrencilerin çoğunlukla parabolik çizgiler kullandıkları görülmüştür.

1)

x	-8	-1	0	3	15
f(x)	-5	-7	13	3	29

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Özellikle yandaki çizimin birden çok yanlış içerdiği söylenebilir. Birincisi (0,13) noktasını öğrenci (13,0) gibi işaretlemiştir. Bunu yanlış yapmış olsa da grafik çizimi esnasında ortaya çıkan şeklin fonksiyon olmayacağını fark edememiştir.

Sorunun b şıkında ise 3 öğrenci çizilebilir cevabını vererek bir çizimle bunu göstermiştir.

1)

x	-8	-1	0	3	15
f(x)	-5	-7	13	3	29

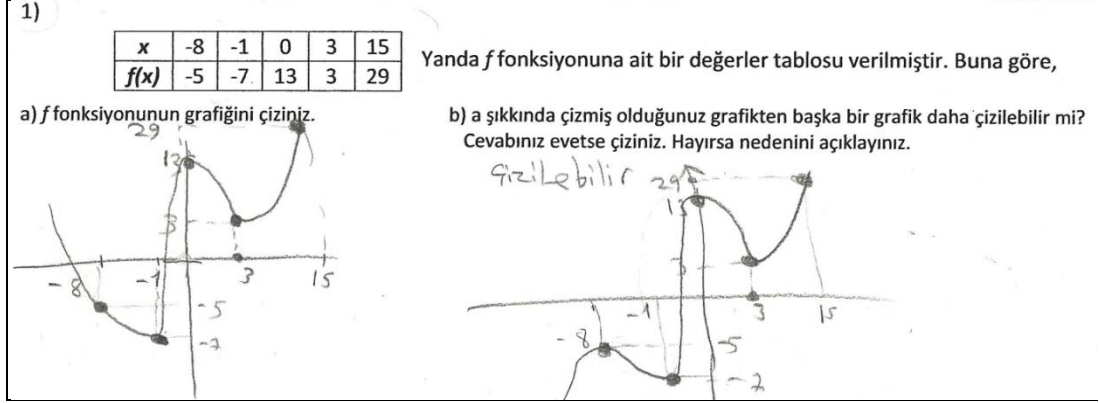
a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Değerler tablosunda olmayan değerler farklı olabilir, değerler farklı olabilir, veya fonksiyon parçalı fonksiyon biçiminde olabilir.

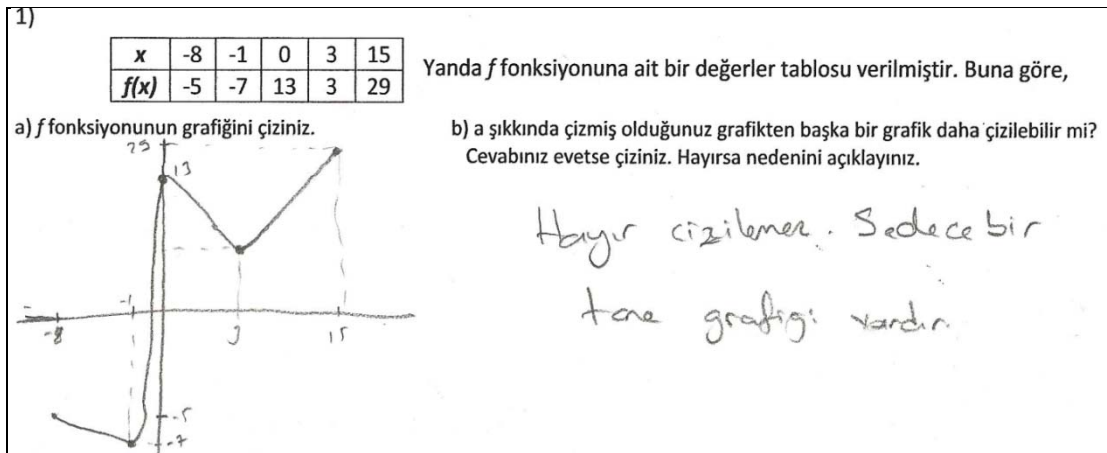
Değerler tablosunda olmayan değerler farklı olabilir diyerek öğrenci soruyu cevaplamıştır. Alternatif çizimi de gayet düzgün yaptığı görülmektedir. İkinci öğrenci sadece çizim yapıp açıklama yazmazken; üçüncü öğrenci çizilir diyerek x'in -8'den küçük değerleri için fonksiyonun aldığı değerleri değiştirmiştir.



Yukarıdaki cevabı veren öğrenciyle yapılan görüşmede $[-8,15]$ aralığında başka bir fonksiyon çizilip çizilemeyeceği sorulduğunda ise bu kez çizilemez cevabını vermiştir. Diğer bir deyişle öğrenci bu tablo ile sadece bir fonksiyonun çizilebileceğini ifade etmiştir.

Çizilemez yanıtını veren 4 öğrenci herhangi bir açıklama yazmazken bunlardan bir tanesi açıklama olarak bilmiyorum yazmıştır. 9’uncu sınıflarda da değinildiği gibi bilmediği halde öğrencinin çizilemez ifadesini kullanması öğrencinin kendini cevap vermek zorundaymış gibi hissetmesi ile açıklanabilir. Sadece bilmiyorum yazması, ya da soruyu boş bırakması beklenirken bu durumdaki öğrenciler önce çizilirliğini yorumlayarak ardından bilmiyorum yazmışlardır. Bu da didaktik antlaşmasının bir parçası olarak görülebilir.

Diğer 6 öğrencide “bir tablonun bir grafiği olur” başlığında toplanabilecek cevaplar vermişlerdir. Bunlardan bir tanesine aşağıda yer verilmiştir.



4.2.2.3. 2'nci Soru A Grubu

Gruptaki 11 öğrenciden, 7 öğrenci E.B.= 29, E.K.= -7 değerlerini alabileceğini ifade etmiştir. 2 öğrenci E.K.= 5, E.B.= 29 derken 1 öğrencide $x=15$ iken $g(x)=29$ 'un yerel maksimum olduğunu belirtmiştir. 1 öğrencide E.B. değerin $+\infty$ olduğunu belirtmiştir.

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Verilen tabloya göre $g(x)$ 'in E.B. değeri 29 E.K. değeri -7 olduğundan 11 öğrencinin 7'si bu cevabı vermiştir.

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

en büyük değeri 29, en küçük değeri -7 dir

Yukarıdaki cevabı veren öğrenci ile yapılan görüşmede öğrenciye x 'in $[-8,15]$ aralığında daha küçük ya da daha büyük değerler alıp alamayacağı sorulmuştur. Öğrencide grafiğe göre değişebileceğini söylemiştir. Daha büyük kaç olabileceği sorulduğunda ise “ $x=14$ 'te $g(x)=30$ olup 15'te tekrar 29'a düşmüş olabilir.” yanıtını vermiştir. Kağıttaki cevabında verilen tablonun sınırları içinde kalmış olsa da öğrencinin bu cevabı verebiliyor olması farklı değerlerinde olabileceğini düşündüğünü göstermiştir. Öğrenci daha önce bu tip sorularla karşılaşmadığından yanlış yapmamak için verilenlerden hareketle soruyu yanıtladığını ifade etmiştir. Bunu da didaktik antlaşmasındaki sorulan sorunun cevaplanmasında eldeki verileri kullanırız durumuna benzetebiliriz.

İki öğrenci E.K.= 5, E.B.= 29 cevabını vermiştir. Bu cevaplardaki hata x 'in en küçük ve en büyük değerlerine karşılık gelen ifadelerin yazılmış olmasıdır. 9'uncu sınıflarda fonksiyon kavramı yeni oturmakta olduğundan bu şekilde bir cevap düzeltilebilir görünse de 12'nci sınıf öğrencisinin hala fonksiyonun en küçük değerini anlayamamış olması fonksiyon imajında ciddi eksiklerinin olduğunun göstergesidir.

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

en küçük = 5
 en büyük = 29
 Zorluk tablosu
 ayle yapıyor
 y'ye bakılır her zaman

Diğer yandan bu cevabı veren öğrencilerden biri açıklamasında “her zaman y 'ye bakılır.” İfadesine yer vermiştir. Dolayısıyla bilgisizlikten çok dikkatsizlikten E.K.= 5 yanıtını vermiş olabilir.

$x=15$ iken $g(x)=29$ 'un yerel maksimum olduğunu belirten öğrencinin kağıdı ilgisiz cevapladığı söylenebilir.

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

yerel maksimum değer

Bakıldığında sadece en büyüğe dair yorum yapması, en küçüğünü görmezden gelmesi öğrencinin ilgisizliği ile açıklanabilir. Zaten öğrencinin diğer sorulara verdiği cevaplarda da en kısa yoldan soruyu geçmek istediği görülmektedir.

Bu gruptaki son öğrencide “En büyük değeri $+\infty$ 'dur.” cevabını vermiştir.

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

en büyük değeri $+\infty$ 'dur.

Öğrenci ile yapılan görüşmede x 'in artan değerleri için $+\infty$ 'a kadar gidebileceğini söylemiştir. Dolayısıyla verilen aralık dışında düşündüğünden bu aralıktaki iniş-çıkışlar olması ihtimalini görememiştir.

4.2.2.4. 2'nci Soru B Grubu

13 öğrenciden 12'si E.B.=3 , E.K.=-5 derken, 1 öğrencide soruyu cevapsız bırakmıştır.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

Buraya kadar incelenen sorularda ilk kez tüm öğrencilerin aynı cevaba yöneldikleri görülmüştür. Bu cevaplardan bazılarının açıklamaları aşağıda incelenmiştir. Soruyu cevapsız bırakan öğrencinin uygulamaya sonradan başladığı ve sadece ilk soruyu cevaplayarak teslim ettiği tespit edilmiştir.

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

En büyük değeri ve en küçük değeri fonksiyonun uç noktaları ya da y. max ve y. min noktalarından -5 min 3 max'tır.

Öğrenci en büyük ve en küçük değerlerin fonksiyonun uç noktaları ya da yerel maksimum veya minimum noktaları olduğunu ifade etmiştir. Buraya kadar yapılan tanımlamalar doğrudur. Fakat öğrencinin burada verilen değerler tablosunun sadece nokta değerleri olduğunu, ara değerlerde fonksiyonun daha büyük ya da küçük değerlere ulaşabileceğini gözden kaçırdığı görülmüştür.

Öğrencilerden sadece birinin g(x) fonksiyonunu $2x-1$ şeklinde yazarken, ilk soruda doğru çizim yapabilen iki öğrencinin de bu soruyu E.B.=3, E.K.=-5 olarak cevaplamaları dikkat çeken diğer noktalar olmuştur. Zaten çizimlere dönüp bakıldığında öğrencilerin fazladan herhangi bir yerel maksimum ya da minimum oluşturmadığı sadece iki nokta arasındaki hareket yönlerini değiştirdikleri görülmüştür.

4.2.2.5. 3'üncü Soru A Grubu

Gruptaki 11 öğrenciden 1 öğrenci hiç eşit olmayacağını söylerken, 7 öğrenci şubat ile mart arasında bir defa kesişeceğini ifade etmiştir. 3 öğrencide eşit olabileceğini belirtirken kaç defa olacağını yazmamıştır.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Hiç eşit olamayacağını belirten öğrenci açıklama olarak hiç eşit değer olmadığını yazmıştır.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Hayır. Çünkü hisse eşit değeri yok

9'uncu sınıflarda A grubunun aynı sorusunda bu duruma açıklama yazılmıştır. Bununla birlikte öğrenci ile yapılan görüşmede aslında soruyu anlamadığı anlaşılmış olup yeniden cevaplama istendiğinde Şubat – Mart arasında bir kez yanıtı vermiştir.

Olabilir diyen diğer bir öğrencide açıklama olarak Nisan ve Mayıs aylarında değerler tekrar yaklaşmıştır yazmış, fakat ne tarz bir eşitlik kastettiğini detaylandırmamıştır. Benzer şekilde 2 öğrenci daha olabilir dediği halde ne zaman ve kaç defa olacağını belirtmemiştir.

3)

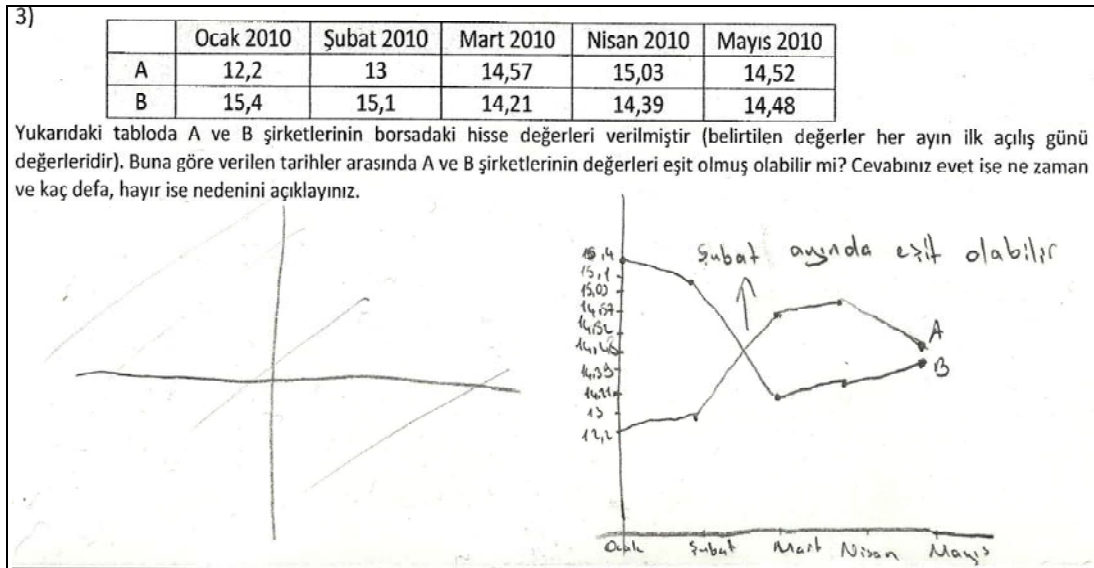
	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Evet. Çünkü A'nın 1 ay artarken B'nin azalırsa.
Diğer ayda da tersi olursa eşit olur.

Yukarıda tam tarih belirtmeyen öğrencilerden birinin yazdıkları verilmiştir. Açıklamada da görüldüğü gibi A'nın değeri artarken B'nin azalır ve diğer ayda tam tersi olursa eşit olur demiştir. Öğrenciyle yapılan görüşmede doğrusal birleştirilmesi durumunda ortada bir yerde kesişim olacağını ifade etmiştir.

Diğer 7 öğrenci Şubat ve Mart arasında bir defa kesişir yanıtını verirken bir öğrenci bunu aynı zamanda çizerek göstermiştir.



Öğrenciler daha önce de belirtildiği gibi sadece doğrusal düşünme yanlılığına düşmüşlerdir. Bunun dışında diğer aylarda bir kesişim olup olmadığı sorgulanabilirken Şubat ayında bu kesişim mecburen olmak durumundadır. Öğrenciler en azından bunu görmeyi başarmışlardır.

4.2.2.6. 3'üncü Soru B Grubu

Bu grupta da bir öğrenci eşit olamaz derken, 2 öğrenci soruyu cevapsız bırakmıştır. Olabilir diyen 10 öğrenciden sadece 3 tanesi ortak olarak “şubat ve mayısta birer kez” cevabı verirken 7 öğrenci farklı cevaplar vermiştir. Ayrıca A grubundan farklı olarak bir öğrenci değerler tablosundakilerin sadece nokta değeri olduğunu söylerken bir öğrencide kaç kez eşit olacağının sayısının bilinemeyeceğini ifade etmiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Diğer gruplarda da olduğu gibi bu grupta da bir öğrenci değerlerin aynı verilmediği zaman eşit olamayacağı hatasına düşmüştür.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Eşit olamamıştır. Çünkü değerlerin hepsi farklıdır.

Bir öğrenci soruyu boş bırakırken başka bir öğrenci sorunun ne demek istediğini anlamadığını yazmıştır.

Üç öğrenci Şubat ayında bir kez ve Mayıs ayında bir kez yanıtını vermiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Evet

A

Şubat ayında 1 kez
Mayıs ayında 1 kez

Grafiğini de çizmeye çalıştığı cevabı incelediğimizde öğrencinin aslında Ocak Şubat ayları arasındaki dilimi kastettiğini görmekteyiz. Aynı mantıkla düşünüldüğünde diğer kesişimde Nisan – Mayıs arasında olacaktır. Bu öğrenciler verilen değerler arasında iniş çıkış olabileceğini düşünmedikleri gibi yapılan görüşmede de sadece iki kez ve iki aralıkta kesişim olabileceğini ifade etmişlerdir. Benzer şekilde bir öğrencide “Ocak ve Mayıs aylarında aynı olmuş olabilir.” cevabını vermiştir.

9’uncu sınıf öğrencilerine benzer şekilde bir öğrenci “ Ocak – Şubat arası olabilir. Şubat – Mart arası olabilir. Mart – Nisan arası olamaz. Nisan – Mayıs arası olabilir.” Cevabını vermiştir.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Ocak - Şubat arasında olabilir
Şubat - Mart //
Mart - Nisan // olamaz
Nisan - Mayıs // olabilir

Daha öncede açıklandığı gibi öğrenciler Mart – Nisan ayları arasında A hisselerinin yükselirken B hisselerinin düşüşünü herhangi bir şekilde kesişemeyeceklerine yormuşlardır.

Bir öğrenci “Ocak – Şubat arası ve Şubat – Mart arası iki defa olabilir.” cevabını vermiştir. Yapılan görüşmede belirtilen aylarda hisse değerlerinin yaklaşmış olmasından yola çıkarak böyle bir yorum yaptığı tespit edilmiştir. Bu öğrenciye benzer şekilde bir öğrenci “Şubat ve Mart aylarında değerler birbirine yakın” derken, başka bir öğrencide “Mart aylarında hisse artış değerleri aynıdır.” yazmıştır.

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Mart aylarında hisse artış değerleri aynıdır.
1 defa

Verilen cevap başta belirtilen hiç aynı değer yoktur cevabına oldukça benzemektedir. Hisse artışların aynı olduğu ifade edilmiş olsa da farklar incelendiğinde bu şekilde bir ilişki hiçbir aralıkta görülmemiştir. Öğrenci muhtemelen verilen değerleri artış değerleri olarak yorumlamış ve Mart ayında bu değerler birbirine çok yakın olduğundan bu cevabı vermiştir.

Farklı bir öğrenci iki şirketin grafiklerini incelemeyi yorum yapılamayacağını yazmıştır.

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Bu iki şirketin grafiklerini incelemek gerekir. Bu şekilde somut verileri inceleyerek yorum yapmak tam bir sonuç vermezdir.

Burada öğrenci “Bu şekilde somut verileri inceleyerek yorum yapmak tam bir sonuç vermeyecektir.” demiştir. Matematiksel içeriğinin yanında öğrencinin somut verilerle bir yere varılamayacağını belirtmesi ilginç olmuştur. Çünkü elle tutulan yorumlanabilirliği daha objektif olan somut verilerdir. Soyut verilerse subjektif değerlendirmelere daha açıktır. Dolayısıyla öğrenci kendi içinde tutarsız bir cümle kurmuştur. Öte yandan grafiklerin incelenmesi düşüncesi gayet yerinde bir yaklaşım olup öğrencinin soruda sorulanı anladığı şeklinde değerlendirilebilir. Zaten öğrenci ile yapılan görüşmede de bu değer aralıklarında eşitlik ihtimali sorulduğunda “Olabilir. Bunlar sadece birer nokta değeri...” cevabını vermiştir.

Son öğrenci ise soruyu gayet güzel şekilde cevaplandırmıştır.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Ocak ile Şubat arasında A şirketi yükselişte B şirketi düşüştedir. En az bir kere aynı değerde olurlardır. Şubat ile Mart arasında iki şirket de yükselişe geçmiştir ve A şirketi B şirketinden daha yüksek bir değere başlayıp daha yüksek bir değere bitirir. Aynı şekilde Şubat ile Nisan arasında da aynı şey geçerlidir. Nisan ile Mayıs arası A şirketi daha yüksek bir değere başlayıp daha az bir değere bitirir. Bu nedenle en az bir kere aynı değerde olurlardır.

Yukarıdaki açıklamalarda görüldüğü gibi öğrenci en az bir kez eşit olması zorunlu olan aralıkları belirtmiş, diğer aralıklar içinde olması ihtimali olduğunu yazmıştır. Bu öğrencinin cevap kağıdında ilginç olan ilk soruda orantılı olmayan değerler verildiğinde alternatif grafiği çizebilmiş ve bu soruda gayet açıklamalı bir cevap yazabilmişken, ikinci soruda orantılı değerler verildiğinde iki nokta arasında olması muhtemel iniş çıkışları düşünememiş E.K.= -5, E.B.=3 yanıtını vermiştir.

4.2.2.7. 4'üncü Soru (A-B Grubu)

A şıkında 24 öğrenciden 20 öğrenci verilen değerlere uygun çizim yaparken, 3 öğrenci yanlış çizim yapmıştır. 1 öğrenci ise soruyu cevapsız bırakmıştır. B şıkında ise 22 öğrenci “çizilemez” derken, 1 öğrenci soruyu cevapsız bırakmıştır. Bir öğrenci ise “artan azalan aralık türe ve bağlıdır” diyerek örnek bir çizimle çizilebileceğini göstermiştir.

4)

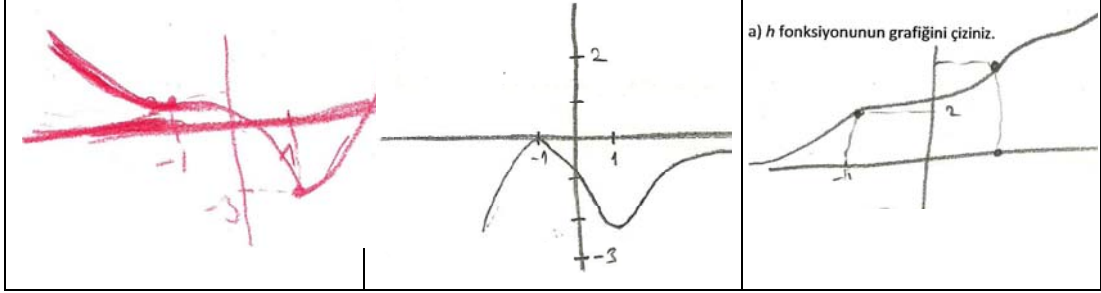
Yanda h fonksiyonunun değişken tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) h fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Sorunun a şıkkı incelendiğinde 24 öğrenciden 20'si çizimlerinde parabolleri kullanmışlardır. Ön analizde de bu tarz bir sonuç çıkmasının beklendiği belirtilmişti.

Bunda son sınıfların çizdikleri grafiklerde eğrileri ağırlıklı olarak kullanmalarının etkili olduğu görülmüştür. Bunun yanında 3 öğrencinin eğrileri kullanarak yanlış çizim yapmasına karşılık verilen değerleri doğrusal olarak birleştiren diğer 3 öğrencinin çizimlerinin tabloya uygun olduğu görülmüştür.



Yanlış çizim yapan öğrenciler incelendiğinde ise ilk öğrencinin değerleri koordinat düzleminde doğru yazmasına rağmen artan azalanlık konusunda eksikleri olduğu gözlenmektedir. İkinci öğrenci ise değerleri bile doğru işaretleyememiştir. Bir 12'nci sınıf öğrencisi için ciddi eksikleri olduğu söylenebilir. Öte yandan artan azalan ilişkilerinin uygun sıralamada olması da ayrıca dikkati çekmektedir. Üçüncü öğrencinin ise hem nokta işaretleme hem de artan azalanı yorumlamada problemler yaşadığı görülmektedir. Öğrenci ile yapılan görüşme sonrası artan azalanlık ile konveks-konkav olma durumlarını karıştırdığı anlaşılmıştır.

B şıkkını incelediğimizde 22 öğrenci a şıkkından farklı bir grafik çizilemeyeceğini ifade etmiştir. Açıklamalarını incelediğimizde 3 öğrencinin yeterli bilgi olmadığını ifade ettiği görülmektedir. Bu öğrencilerden birincisi sadece bilgi eksikliği olduğunu ifade ederken diğer öğrenci asimptota dair bilgi verilmediğini bu nedenle başka bir çizim yapılamayacağını söylemiştir.

b) a şıkkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

b) Eğer asimptot varsa çizilebilir
ama asimptotunu bilmiyorum.
Bunun için çizemem.

Öğrenci ile yapılan mülakatta öğrenci $x = 1$ değeri için asimptot olması durumunda başka bir grafik çizilebileceğini ifade etmiştir. Fakat tablodaki verilerden $x = 1$ de asimptot olmamasına rağmen farklı grafikler çizilebileceği görülmektedir. Burada öğrenci $x = 1$ değerinde asimptot olması durumunda çizilecek grafiğin verilen tabloya ters düşeceğini gözden kaçırmaktadır. Yapılan görüşmede öğrenciden bu grafiği çizmesi istenmiş ve öğrenci aşağıdaki grafiği çizmiştir.

1'de asimptot olsa 	Öğrencinin çiziminden asimptottan kastettiğinin dikey asimptot olduğunu anlıyoruz. Bununla birlikte artan azalanlık durumları dikkate alındığında asimptot varsayımına göre uygun bir grafik olduğu söylenebilir.
---	--

Bu kategorideki son öğrenci ise fonksiyonun mutlak değer fonksiyonu olarak verilmesi halinde farklı bir grafiğin çizilebileceğini ifade etmiştir. Mutlak değer fonksiyonunda fonksiyonun negatif değerlerinin x-eksenine göre simetriği alındığından öğrencinin bunu alternatif bir grafik olarak düşündüğü anlaşılmıştır. Öğrenci ile yapılan görüşmede öğrenci aşağıdaki çizimi yapmıştır. Öğrenci ilk soruda da benzer cevabı veren öğrencidir.

mutlak değer fonk. saydık sekinde çizilebilirdi 
--

Bu bölümde ortaya çıkan bir diğer kategoride öğrenciler bilmediklerini ifade etmişlerdir. 4 öğrenci sadece “bilmiyorum” derken iki öğrencide “mümkün değildir.” ifadesini kullanmıştır. Öğrencilerin soruyu geçiştirmek için böyle cevaplamış olmaları ihtimali olduğu gibi, bu uygulamanın dönem sonunda yapıldığını da dikkate aldığımızda ezbere veya sınav öncesi çalışarak elde edilen bilgilerin kısa sürede unutulmasından kaynaklandığı da düşünülebilir. Diğer yandan önceki bölümlerde de incelendiği gibi öğrencilerin bilmiyor olmasına rağmen “hayır çizilemez.” gibi yorumda bulunmalarını da didaktik antlaşması durumları ile ilişkilendirebiliriz.

1 öğrenci “bize böyle öğretildi” yanıtını vermiştir. Öğrenci-öğretmen ilişkisinde sıkça karşımıza çıkan ifadelerden birisi de “*öğretmenimiz bize böyle öğretti.*” ya da “*bize böyle öğretildi.*” diyebileceğimiz yaklaşımdır. Didaktik anlaşması açısından inceleyecek olursak; öğretmenler öğrencilere konuyu açıklamak için çeşitli örnekler çözerler. Genellikle öğretmenler “*bu soru sadece bu şekilde yapılır.*” gibi ifadeler kullanmasalar da öğrenciler edindikleri bilgileri genelleme yoluna giderler. Bu durumda da öğrenci geçmişte bu tarz bir soru ile karşılaşmamasına rağmen “*bize böyle öğretildi.*” demektedir. Çünkü öğrencinin geçmişte çözdükleri soruların sadece bir tek cevabı vardır. Cevap farklı yollardan bulunabilir ama sonuçta tektir. Uygulama ise açık uçlu sorulardan oluştuğundan bir değişkenler tablosuna ait birden fazla grafik olabileceği çoğu öğrenci tarafından imkansız görülmüştür.

Didaktik anlaşmasında sıkça karşılaşılan durumlardan birisi de “*bir sorunun yalnız bir cevabı olur.*” yaklaşımıdır. Öğretmenler genellikle açık uçlu olmayan tek cevaplı sorular sorduğundan, özellikle “*her sorunun bir tek cevabı vardır*” diye belirtmemiş olsalar da öğretmen ile öğrenci arasındaki didaktik anlaşmasına göre öğrenci bu kanıya varmıştır. Buna bağlı olarak öğrenciler “bir sorunun bir cevabı olduğuna göre bir tablonun da bir grafiği olacaktır.” şeklinde bir yaklaşım sergilemişlerdir.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Hayır çizilemez
değerler belli dir

Çizilebilecek muhtemel grafiklerden bir tanesi aşağıda gösterilmiştir.

a) h fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

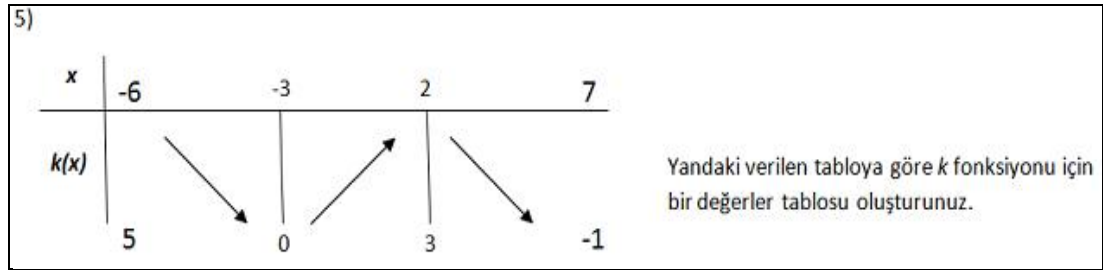
b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

Anteni azalan oraklık fonsiyonu başlıdır.
 $f(x) = 3x^2 + 4$ fonsiyonu fonsiyonu ile
 $g(x) = 3x^2 + 40$ fonsiyonu fonsiyonu

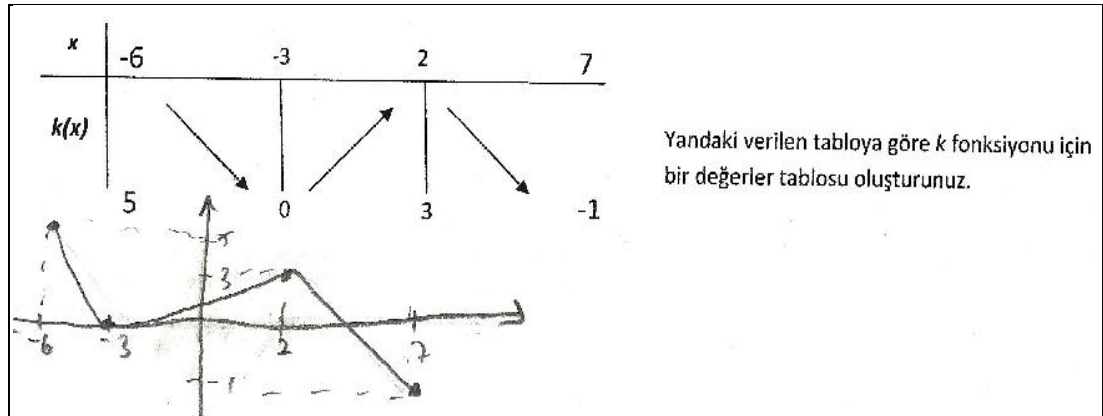
Açık uçlu soruda sadece bir doğru cevap yoktur. Yukarıda çizilebilecek muhtemel grafiklerden sadece bir tanesi gösterilmiştir. Verilen cevaba kısaca göz attığımızda öğrencinin artan azalan tablosu ile türevi ilişkilendirdiğini görmekteyiz. Buda daha ilk grafiğin çiziminde karşılaştığımız durumla kısmen benzer bir didaktik antlaşması durumu sergilemektedir. *Öğretmen genellikle son öğrettiği konulardan sorar.* Dolayısıyla 9. sınıf öğrencileri doğruları kullanırken 12'nci sınıf öğrencilerinin de eğrileri kullanmış olmaları ve türevle ilişkilendirmeleri beklendik bir durumdur.

4.2.2.8. 5'inci Soru (A-B Grubu)

19 öğrencinin değişkenler tablosunda verilenlere karşılık gelen bir değerler tablosu oluşturdukları görülmüştür. Bunun yanında 4 öğrenci soru ile alakası olmayacak şekilde verilen tabloya ait grafik çizimi yapmıştır. 1 öğrencide soruyu boş bırakmıştır.



Nicel değerler incelendiğinde en çok dikkati çeken nokta bazı öğrencilerin tablo istenmesine rağmen grafik çizimleri olmuştur. Bu çizimlerden birine aşağıda yer verilmiştir.



Öğrencinin çizdiği grafik tabloya uygun olmakla birlikte soruda istenmeyen bir bilgidir. Öğrenci değerler tablosunun ne olduğunu bilmeseydi önceki sorulara

bakarak çıkarımda bulunabilirdi. Buna rağmen öğrencinin grafik üzerindeki gösterimlerde değerler görüldüğünden bunu istenilen durum olarak yorumlamıştır.

Öğrenciler beklenen şekilde sadece verilen değerlerden hareketle değerler tablosu oluşturdıklarından 11 öğrenci ile uygulamaya ilave olarak mülakat yapılmıştır. Bu mülakatla öğrencilerin tabloda verilmeyen ara değerler hakkındaki görüşleri öğrenilmeye çalışılmıştır.

Yapılan görüşmelerde 9 öğrenci x 'in tabloda verilmeyen ara değerleri için de $k(x)$ değerleri alabileceğini fakat bunları net bir şekilde bilemeyeceğimizi ifade ederken iki öğrenci ara değerler alamayacağını belirtmiştir.

Verilen cevapları didaktik anlaşması çerçevesinde değerlendirecek olursak öğrenciler değerler tablosuna ara değerleri katmayarak beklenen bir çözüm sunmuşlardır. Bununla birlikte yukarıdaki tablonun sadece bir grafiği olmadığından eğer aradaki sayılara karşılık gelen değerler yazsalar, artan azalan olma ile çelişmeyecek şekilde olması durumunda yanlış yaptıkları söylenemezdi. Buda bize göstermektedir ki hiç bir öğrenci yorum yapılarak ulaşılabilecek bir değeri yazmamıştır. Sadece hazır görülen değerler ile sınırlı kalmıştır. Çünkü yazılan değerlerin doğruluğu garantidir. Diğer durumda ise yanlış yapma ihtimali söz konusudur. Buda didaktik antlaşmasının “*Verilen sayılar karmaşık olmayan basit sayılardır, o halde çözümde basit olmalıdır. Yoksa yanlışma ihtimali olabilir.*” yaklaşımı ile birebir örtüşmektedir.

Sonuç olarak 12’nci sınıfların tablolardan yola çıkarak grafik çizme konusunda 9’uncu sınıflara oranla daha başarılı oldukları görülmüştür. Bunun yanında alternatif grafik çizme konusunda 12’nci sınıflarda gayet yetersiz görülmektedir. 12’nci sınıflarda kavram yanılgıları incelendiğinde en sık karşılaşılan durum verilmeyen değerlere dair doğrusal düşünme yanılgısıdır. 9’uncu sınıflarla benzer şekilde 12’nci sınıflarda ara değerlerde fonksiyonun ani iniş-çıkışlar yapabileceğini düşünememişlerdir. Dolayısıyla değerler tablosunun sadece nokta değerlerini ifade ettiğini çizimlerde gösterebiliyor iken ara değerleri yorumlamada aynı performansı sergileyememişlerdir. Çizimlerde eğrilerin daha çok ön plana çıktığı görülmektedir. 9’uncu sınıflarınsa daha çok doğruları kullanarak çizimler yaptıkları belirtilmişti.

12'nci sınıflarda değişkenler tablosu da incelenmiş ve öğrencilerin bu konudaki yanıtlarının birinci soru ile paralellik gösterdiği görülmüştür. Yani ğrenciler verilen değişkenler tablosuna uygun grafik izebilirken, çoğunluğu itibariyle bu grafiği yorumlayarak alternatif grafik çizmeyi başaramamışlardır. Öyle ki artan azalanlığı konveks-konkav olma durumları ile karıştıranlarda olmuştur. 5'inci soruda da incelendiği gibi öğrenciler değişkenler tablosundan hareketle değerler tablosunu szebilirken, ara değerlere dair yoruma girmekten kaçınmışlardır. Sonuç olarak tablo okuma konusunda belli ölçüde başarılı olsalar da tablo yorumlama konusunda 12'nci sınıfların yetersiz olduğu görülmektedir. Aslında bu durum bizim ğretim yöntemimizin doğal bir sonucu olarak görülebilir. Yani milli antlaşmamıza uygundur. Bu da bizlere değişmesi gereken teknikler üzerine bir fikir vermektedir.

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Tablolar sadece matematiğin değil, günlük hayatımızın vazgeçilmezleri arasındadır. Önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi tabloların doğru anlaşılması, yorumlanması büyük bir öneme sahiptir. Durum böyle iken yapılan değerlendirmeler göstermiştir ki öğrencilerin tablo ile temsil konusunda eksiklikleri vardır. Bu durum gerek alt sınıflarda gerekse üst sınıflarda belirgin bir şekilde kendini göstermiştir. Öğrenciler tarafından tablolarla ilgili en çok karşılaşılan yanlışın; tabloda verilmeyen değerlerin verilenlerin doğrusal birleştirilmesi ile elde edilebileceği sınırlılığı olduğu görülmüştür. Bu yaklaşım sonucu öğrencilerin çoğu verilen tablolara ait sadece bir grafik olabileceğini düşünmüşlerdir. Bu yanlışın arka planında fonksiyonları öğretirken kullandığımız tekniğin etkin olduğu değerlendirilebilir. M.E.B. kitaplarında yapılan ön inceleme bölümünde de değinildiği gibi aslında öğrencilerin verdikleri cevaplar milli eğitimimizin didaktik antlaşması şartlarını sağlamaktadır. Fakat genel anlamda yetersiz kalmaktadır. Buradan yola çıkarak milli eğitimimizde tablolarla temsilin gözden geçirilerek yeniden düzenlenmesi sonucuna ulaşılabilir.

Öğretim yöntemleri incelendiğinde fonksiyonlarda öncelikle cebirsel ve grafiksel gösterimlere ağırlık verildiği görülecektir. Geçmişte cebirsel gösterimin daha yoğun işlenmesine kıyasla günümüz öğretim yöntemleri daha başarılı görülse de tablolar konusunda hala eksiklerimiz olduğu gerçektir. Bir çok öğrencinin fonksiyon imajı “girdiler-girdiler üzerine yapılan bir işlem/işlemler-çıktılar” şeklindedir. Bu imajda değerler tablosunun yeri nerededir? sorusunu sorduğumuzda değerler tablosunun sadece girdi ve çıktıları verebildiğini, fonksiyonun daha net bilinmesi için ekstra bilgiler gerektiğini görmekteyiz. Buna rağmen bazı öğrenciler geçmişte öğrenmiş oldukları grafik temsillerinden uyarlayarak “bir tablonun bir grafiği olur” sonucunu savunmuşlardır.

Değerler tablosunun fonksiyonlarda kullanılış şekli verilen noktaların koordinat düzlemindeki karşılıklarını belirtmek olmakla birlikte bazı öğrencilerin bu gösterimler konusunda dahi yetersiz kaldıkları görülmüştür. Bu ilk paragrafta

belirtilenden daha ciddi bir eksiklikler. Özellikle bazı 12'nci sınıflarda bu gibi eksiklerin olması temelde büyük kavram yanlışlarına işaret etmektedir.

Değerler tablosunun yanında değişkenler tablosu konusu da 12'nci sınıfta grafik çizimlerinde detaylı şekilde incelenmektedir. Buradaki en büyük eksikliğin ise öğrencilere belli bir sistematikğin ezberletilmesi olarak görülebilir. Bir çok öğrenci verilen denkleme ait değişkenler tablosunu oluştururken sistematik bir yol izler. Fakat değişkenler tablosundan hareketle fonksiyona dair çıkarımlarda bulunma konusunda eksikler olduğu önceki bölümlerde de görülmüştür. Bunun da arka planında yine milli antlaşmamızın sonuçlarının yattığı görülmektedir.

Her iki durumda da gösterilecek en faydalı yaklaşım değerler tablosunun sadece nokta değerlerine karşılık geldiğinin vurgulanması olacaktır. Değişkenler tablosu ise fonksiyonun aldığı farklı değerler için işaretini belirtmektedir. Bunların dışında oluşabilecek kavram yanlışlarına karşı öğrencilerin uyarılması faydalı olacaktır.

Öğretmen-öğrenci arasında kelimelere dökülmeyen bir didaktik anlaşma her zaman vardır. Bu anlaşmada taraflar birbirlerinin beklentilerini gerçekleştirdiği sürece tablo iyiye seyredecektir. Öğretmen öğrencisinden çeşitli cevaplar vermesini, tavır ve davranışlarında belli kurallara dikkat etmesini bekleyecektir. Öğrenci bunu gerçekleştirdiği takdirde öğretmen memnuniyetini takdir şeklinde ifade edecek bu da öğrencinin memnuniyetini doğuracaktır. Günümüzde mevcut sistemlerde bu iyi bir durum olarak yorumlanmakla birlikte didaktik anlaşma yaklaşımı bu tarz bir ilişkiye dayalı öğrenmenin daha alt düzeylerde gerçekleşeceği iddiasını savunmaktadır. Didaktik anlaşmaya göre öğretmen öğrenciden beklentilerini ne kadar açık bir şekilde ifade ederse öğrenciler o kadar kısıtlı bir çerçeve ile yetişecek ve başkası gibi düşünen, hareket eden, istenilen yöntemi ezberleyen topluluklar olacaktır.

Yavuz(2011)'un "Didaktik anlaşması ve öğretime yansıması : Değerler tablosu örneği" isimli çalışmasında değerler tablosu ile ilgili benzer bir araştırmayı öğretmen adaylarına uyguladığı gözlenmiştir. Adaylara f fonksiyonuna ait verilen bir değerler tablosundan hareketle fonksiyonun $x=0$ noktasındaki limiti, türevi ve sürekliliği hakkındaki düşünceleri sorulmuştur. Araştırmanın bulguları incelendiğinde

oluşturulan cevap kategorilerine ve frekanslarına aşağıda yer verilmiştir:

1. Cevap olarak soruda geçen kavramlarla ilgili açıklamalarda bulunmak (7 kişi)
2. Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun formülüne ulaşarak soruya cevap vermek (16 kişi)
3. Tablodaki veriler yardımıyla fonksiyonun grafiğini çizerek soruya cevap vermek (12 kişi)
4. Bu verilerle bu soruya cevap verilemez (3 kişi)(beklenen cevap)
5. Cevapsız (2 kişi)

Verilen cevaplar bu araştırmadaki bulgularla büyük ölçüde paralellik göstermektedir. Aslında bu durum sıra dışı ya da şaşırtılacak bir durum değildir. Çünkü temel problemin öğretim yöntemlerimize bağlı didaktik antlaşmasında yattığı daha öncede belirtilmişti.

Öğretim sistemimizde fonksiyonlarda özellikle cebirsel ve grafik ilişkiler üzerinde çok fazla durulurken tablolar için aynı genellemeyi yapmak mümkün olmayacaktır. Aslında gerçek hayatta tablolar denklemlerden daha fazla yer tutmaktadırlar. Bunun bir sonucu olarak da öğrencilerde tablo okuma ve yorumlama konusunda eksiklikler olduğu göze çarpmaktadır.

Yavuz ve Baştürk (2011) Fransız ve Türk ders kitaplarında fonksiyonların işlenişini incelemiştir. Araştırmaları sonucunda Fransız ders kitapları temsiller ve kullanımlarıyla ilgili ayrıntılı bir bilgi ve farklı problem tiplerine yer verirken, ülkemiz ders kitaplarında bu bilgiler bulunmadığını ve sadece klasik olarak adlandırabileceğimiz problem tiplerine yer verildiğini tespit etmişlerdir. Öğrencilerin öğrenmeleri üzerine yapılan araştırmaların, matematiksel kavramlar için anlam oluşturmada çoklu temsilleri kullanmanın, bu temsillerin özelliklerini ve sınırlılıklarını bilerek aralarında ilişkiler kurabilmenin önemine değindiği düşünülecek olursa eğitim kitaplarımızın yeniden gözden geçirilerek gerekli düzenlemelerin yapılması yerinde olacaktır.

Bunların yanında didaktik anlaşmanın birer ögesi olarak kazandıkları “doğal öğretilerin” (“bir sorunun yalnız bir cevabı olur.” vb) öğrencilerin sorulara yaklaşımını kısıtladığı da görülmüştür. Buradan yola çıkarak zaman zaman açık uçlu

sorularla öğrencilerin standart olmayan soru tipleriyle de tanıştırılmasının etkili olacağı değerlendirilmektedir.

Eğitim ortamındaki didaktik anlaşıma öğretmen-öğrenci var olduğu sürece devam edecektir. Elbetteki bu anlaşıma kapsamında ki her şeyin olumsuz olduğu söylenemez. Aksine milli kültürümüzün bir gereği olarak didaktik anlaşımanın bazı öğeleri son derece önemlidir. Asıl vurgulanan nokta eğitimde öğrencilerin anlamalarını sınırlandıran ya da daha üst öğrenmelere imkan tanımayan kalıpların ortadan kaldırılmasıdır. Bunun gerçekleştirilmesi ile öğrencilerin daha geniş bir bakış açısı ile problemlere yaklaşacakları değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

- Akkoç H., Fonksiyon Kavramının Çoklu Temsillerinin Çağrıştırdığı Kavram Görüntüleri, H.Ü. Eğitim fakültesi dergisi (h.u. Journal of education). 30 (2006), 1–10.
- Altunışık, R., Coşkun, R., Bayraktaroğlu, S., Yıldırım, E. (2004). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri*. Sakarya Kitabevi, Sakarya.
- Arıkan, R. (1995). *Araştırma teknikleri ve rapor yazma*. Ankara: Tutubay Ltd. Şti
- Aziz, A. (1994). *Araştırma yöntemleri, teknikleri ve iletişim* (2. baskı). Ankara: Turhan Kitabevi.
- Bakar, M., ve Tall, D., “Students’ Mental Prototypes For Functions And Graphs”, *Proceedings Of PME 15*, Assisi, 1: 104–111 (1991).
- Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*. Harf Yayınları, Ankara.
- Balacheff, N. (1993). Artificial Intelligence and Real Teaching. In C. Keitel and K. Ruthven (Eds.), *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin: Springer-Verlag, pp. 131–158.
- Baruk, S. (1985). *L’âge du capitaine*, ed. Seuil. İrem de Grenoble.
- Baştürk, S. Yavuz, İ. (2011) “*Ders Kitaplarında Fonksiyon Kavramı : Türkiye ve Fransa Örneği*”, Kastamonu Eğitim Dergisi, Cilt 19, No:1, 199-220
- Baştürk, S. (2010). “*Öğrencilerinin Fonksiyon Kavramının Farklı Temsillerindeki Matematik Dersi Performansları*”, GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 30, Sayı 2 (2010) 1–16.
- Baştürk, S. (2007). Fonksiyon Kavramının Öğretiminin 9. Sınıf Ders Kitapları Bağlamında İncelenmesi. Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, 9, 270–283.

- Beyazıt, İ. (2008). Öğrencilerin Grafik Okuma, Yorumlama ve Oluşturma Hakkındaki Kavram Yanılgıları, Fonksiyonlar Konusunun Öğreniminde Karşılaşılan Zorluklar ve Çözüm Önerileri, M. F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Edt.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri içinde* (91–119). Ankara: PegemA.
- Bingölbali, E. (2008). Türev kavramına ilişkin öğrenme zorlukları ve kavramsal anlama için öneriler. M. F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Edt.), *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri içinde* (223–255). Ankara: PegemA.
- Blanchard-Laville C. (1989). Questions à la didactique des mathématiques, *Revue Française de Pédagogie*, INRP, n° 89, 63–70.
- Bloch, I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse doctorat, Université Bordeaux I.
- Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms Of knowledge enable students to conjecture and prove?, *Educational Studies in Mathematics* 52: 3–28, 2003.
- Brousseau G. (1988a). Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, 3, 309-336.
- Brousseau G. (1988b). Traitement de la mémoire des élèves dans le contrat didactique, in C. Laborde (ed.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble : La pensée sauvage.
- Brousseau G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques, in M. Artigue et col. (eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France : Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 51-66.

- Brousseau G., Perez J. (1981). *Le cas Gaël*, Université de Bordeaux I: IREM, 59 p.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. La Pensée Sauvage éditions Grenoble, 1998 Collection: Recherches en Didactique des Mathématiques.
- Chevallard, Y. : 1992, ‘Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique’, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, pp. 73–112, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Colomb J. (1991). Apprentissages numériques et résolution de problèmes : cours préparatoire, Paris : Hatier / INRP-ERMEL, 358 p. *Didactique des Mathématiques*, vol. 11, n° 2–3, p. 167–210.
- Clement, L., “What Do Students Really Know About Functions?”, *The Mathematics Teacher*, 94(9): 745 (2001).
- Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education*, (5th edition). London: Routledge.
- Ekiz, D. (2004). Eğitim paradigmasının nitel araştırma paradigmasıyla incelenmesi: Doğal ya
- Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), (sf. 94–116).
- Işık, C., Albayrak, M. ve İpek, A.S. (2005). Matematik Öğretiminde Kendini Gerçekleştirme. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 13(1), 129–138.
- Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 79–103.
- Karasar, N. (1990). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

- Kleiner, I. (1989). Evolution Of The Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, 20(4), 282–300.
- Kleiner, I. (1993). Function: Historical and Pedagogical Aspect. *Kluwer Academic, Science & Education*, 2, 183–209.
- Sarazy, B. (2005). Le contrat didactique, *Revue Française de Pédagogie*, Note de synthèse, 1995, n° 112, p. 85–118.
- Sevimli, E., Delice, A.(2010). Öğretmen Adaylarının Çoklu Temsil Kullanma Becerilerinin Problem Çözme Başarıları Yönüyle İncelenmesi: Belirli İntegral Örneği, Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri / Educational Sciences: Theory & Practice, 10 (1).
- Sfard, A. (1991). ‘On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin’, *Educational Studies in Mathematics*
- Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate mathematics curriculum. (ed. E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld ve J. J. Kaput), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1 (Issues in Mathematics Education. 4, 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Ural, A. (2006). “Fonksiyon Öğreniminde Kavramsal Zorluklar”, *Ege Eğitim Dergisi* 2006 (7) 2, 75–94.
- Uzuner, Y. (1999). Niteliksel araştırma yöntemlerinin özellikleri. *IV. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi*, 3 (428–439). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.
- Vinner, S. (1983). Concept Definition Concept Image And The Notion Of Function. *International Journal For Mathematics Education In Science And Technology*, 14 (3), 293–305.
- Vinner, S. ve Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20(4), 356–366.

- Yıldırım, A., Simsek, H. (2005). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, (5.Baskı). Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Yavuz, İ., ve Baştürk, S. (2008b). Fonksiyon kavramının cabri geometri yardımı ile öğretimi: öğretmen adaylarının görüşleri. *International Conference on Educational Science ICES'08*, Famagusta, North Cyprus.
- Yavuz, İ. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41/4, 1–19.
- Yavuz, İ. Arslan, S. Kepçeoğlu, İ.(2011) “*Didaktik Antlaşması ve Öğretime Yansıması : Değerler Tablosu Örneği*”, *Uluslararası İnsan Bilimleri Dergisi*, Cilt : 8, Sayı :1

EKLER

Ek - 1 : 9'uncu Sınıf A Grubu Sorular

ANKET FORMU-A

Bu anket Marmara Üniversitesinde bir tez araştırması için hazırlanmış olup, sizlere fonksiyonlarda grafik çizimi ile işaret tablosu, değerler tablosu ve değişkenler tablosu arasındaki geçişlerle ilgili sorular sorulmuştur.

Doldurduğunuz ankete ait bilgiler bütünüyle gizli tutulacak olup, hiçbir şekilde herhangi bir kişiye veya makama verilmeyecektir. Bu anket sözlü ya da yazılı sınav olmayıp, herhangi bir not değerlendirmesi yapılmayacaktır. Anketteki tüm soruları, ilgili açıklamaları dikkatlice okuyarak ve boş soru bırakmadan cevaplayınız. Cevaplarınızı açıklayarak yazmaya özen gösteriniz. Anketi doldurmak için kurşun kalem yada tükenmez kalem kullanabilirsiniz. Yanlış yazmanız durumunda yanlışın sadece üstünü çiziniz, silmeyiniz. Verilen kağıt yetmezse ilave kağıt isteyebilirsiniz.

Araştırmaya katıldığınız için çok teşekkür ederiz.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Ek - 2 : 9'uncu Sınıf B Grubu Sorular

ANKET FORMU-B

Bu anket Marmara Üniversitesinde bir tez araştırması için hazırlanmış olup, sizlere fonksiyonlarda grafik çizimi ile işaret tablosu, değerler tablosu ve değişkenler tablosu arasındaki geçişlerle ilgili sorular sorulmuştur.

Doldurduğunuz ankete ait bilgiler bütünüyle gizli tutulacak olup, hiçbir şekilde herhangi bir kişiye veya makama verilmeyecektir. Bu anket sözlü ya da yazılı sınav olmayıp, herhangi bir not değerlendirmesi yapılmayacaktır. Anketteki tüm soruları, ilgili açıklamaları dikkatlice okuyarak ve boş soru bırakmadan cevaplayınız. Cevaplarınızı açıklayarak yazmaya özen gösteriniz. Anketi doldurmak için kurşun kalem yada tükenmez kalem kullanabilirsiniz. Yanlış yazmanız durumunda yanlışın sadece üstünü çiziniz, silmeyiniz. Verilen kağıt yetmezse ilave kağıt isteyebilirsiniz.

Araştırmaya katıldığınız için çok teşekkür ederiz.

1)

x	-8	-1	0	3	15
$f(x)$	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

- a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

2)

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

Ek - 3 : 12'nci Sınıf A Grubu Sorular

ANKET FORMU-A

Bu anket Marmara Üniversitesinde bir tez araştırması için hazırlanmış olup, sizlere fonksiyonlarda grafik çizimi ile işaret tablosu, değerler tablosu ve değişkenler tablosu arasındaki geçişlerle ilgili sorular sorulmuştur.

Doldurduğunuz ankete ait bilgiler bütünüyle gizli tutulacak olup, hiçbir şekilde herhangi bir kişiye veya makama verilmeyecektir. Bu anket sözlü ya da yazılı sınav olmayıp, herhangi bir not değerlendirmesi yapılmayacaktır. Anketteki tüm soruları, ilgili açıklamaları dikkatlice okuyarak ve boş soru bırakmadan cevaplayınız. Cevaplarınızı açıklayarak yazmaya özen gösteriniz. Anketi doldurmak için kurşun kalem yada tükenmez kalem kullanabilirsiniz. Yanlış yazmanız durumunda yanlışın sadece üstünü çiziniz, silmeyiniz. Verilen kağıt yetmezse ilave kağıt isteyebilirsiniz.

Araştırmaya katıldığınız için çok teşekkür ederiz.

1)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Yanda $[-2, 2]$ de tanımlı f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

2)

x	-8	-1	0	3	15
$g(x)$	5	-7	13	3	29

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,2	13	14,57	15,03	14,52
B	15,4	15,1	14,21	14,39	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

4)

x	$-\infty$	-1	1	∞
$h(x)$	$-\infty$	2	-3	∞

Yanda h fonksiyonunun değışken tablosu verilmiştir. Buna göre,

- a) h fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

5)

x	-5	-3	2	7
$k(x)$	6	0	3	-1

Yandaki verilen tabloya göre k fonksiyonu için bir değerler tablosu oluşturunuz.

Ek - 4 : 12'nci Sınıf B Grubu Sorular

ANKET FORMU-B

Bu anket Marmara Üniversitesinde bir tez araştırması için hazırlanmış olup, sizlere fonksiyonlarda grafik çizimi ile işaret tablosu, değerler tablosu ve değişkenler tablosu arasındaki geçişlerle ilgili sorular sorulmuştur.

Doldurduğunuz ankete ait bilgiler bütünüyle gizli tutulacak olup, hiçbir şekilde herhangi bir kişiye veya makama verilmeyecektir. Bu anket sözlü ya da yazılı sınav olmayıp, herhangi bir not değerlendirmesi yapılmayacaktır. Anketteki tüm soruları, ilgili açıklamaları dikkatlice okuyarak ve boş soru bırakmadan cevaplayınız. Cevaplarınızı açıklayarak yazmaya özen gösteriniz. Anketi doldurmak için kurşun kalem yada tükenmez kalem kullanabilirsiniz. Yanlış yazmanız durumunda yanlışın sadece üstünü çiziniz, silmeyiniz. Verilen kağıt yetmezse ilave kağıt isteyebilirsiniz.

Araştırmaya katıldığınız için çok teşekkür ederiz.

1)

x	-8	-1	0	3	15
f(x)	-5	-7	13	3	29

Yanda f fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre,

- a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a şıkkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

2)

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	-5	-3	-1	1	3

Yanda g fonksiyonuna ait bir değerler tablosu verilmiştir. Buna göre g fonksiyonun en büyük ve en küçük değerleri hakkında ne söylenebilir? Neden? Lütfen cevabınızı açıklayınız.

3)

	Ocak 2010	Şubat 2010	Mart 2010	Nisan 2010	Mayıs 2010
A	12,25	14,23	14,40	15,03	14,00
B	15,42	14,12	14,39	14,02	14,48

Yukarıdaki tabloda A ve B şirketlerinin borsadaki hisse değerleri verilmiştir (belirtilen değerler her ayın ilk açılış günü değerleridir). Buna göre verilen tarihler arasında A ve B şirketlerinin değerleri eşit olmuş olabilir mi? Cevabınız evet ise ne zaman ve kaç defa, hayır ise nedenini açıklayınız.

4)

x	$-\infty$	-1	1	∞
$h(x)$	$-\infty$	2	-3	∞

Yanda h fonksiyonunun değışken tablosu verilmiştir. Buna göre,

- a) h fonksiyonunun grafiğini çiziniz. b) a şıkında çizmiş olduğunuz grafikten başka bir grafik daha çizilebilir mi? Cevabınız evetse çiziniz. Hayırsa nedenini açıklayınız.

5)

x	-5	-3	2	7
$k(x)$	6	0	3	-1

Yandaki verilen tabloya göre k fonksiyonu için bir değerler tablosu oluşturunuz.