

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TOPOLOJİK OLARAK ZENGİN MERKEZLİ BANACH
LATİSLERDE MAHARAM OPERATÖRLERİ**

Yüksek Matematikçi Fatma ÖZTÜRK ÇELİKER

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi : 03 Mart 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer GÖK (YTÜ)

Tez Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yasemin KAHRAMANER (İTİCÜ)

: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ (YTÜ)

: Doç. Dr. Ünsal TEKİR (MÜ)

: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT (YTÜ)

İSTANBUL, 2011

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
3. TOPOLOJİK OLARAK ZENGİN MERKEZLİ BANACH LATİSLERDE MAHARAM OPERATÖRLERİ	23
4. SONUÇLAR	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGE LİSTESİ

E	Banach latisi
E'	E 'nin topolojik duali
E^+	E 'nin pozitif konisi
E_u	u elemanı ile üretilen esas ideal
$\wedge$	İnfimum
$\vee$	Supremum
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in mutlak değeri
$\ x\ $	x 'in normu
$x_\alpha \uparrow x$	x_α neti yukarı doğru yönlendirilmiş artan supremumu x
$x_\alpha \downarrow x$	x_α neti aşağı doğru yönlendirilmiş azalan infimumu x
A^d	A kümesinin ayrık tümleyeni
N_T	T 'nin sıfır ideali
C_T	T 'nin taşıyıcısı
$\sum$	Toplam simgesi
$[x, y]$	Sıralı aralık
$x > 0$	x kesin pozitif
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\text{Orth}(E)$	E 'den E 'ye giden ortomorfizmaların f -cebiri

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı hazırlamam sırasında bana yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Ömer Gök'e teşekkür ederim.

ÖZET

TOPOLOJİK OLARAK ZENGİN MERKEZLİ BANACH LATİSLERDE MAHARAM OPERATÖRLERİ

Bu çalışmada, Archimedean f-cebirlerinde Banach f-modülleri üzerindeki Maharam operatörleri ile ilgilenildi. W.A.J. Luxemburg ve B. De Pagter (2002)'in bazı neticeleri Banach f-modüllerinde tartışıldı. Bu çalışmadaki yapı Arens çarpımı ve topolojik olarak zengin merkeze dayandırıldı. Bununla birlikte, dual Banach f-modüllerinde Maharam operatörlerinin özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Banach latis, Banach f-modül, Archimedean f-cebir, Maharam operatörü, ideal.

ABSTRACT

ON MAHARAM OPERATORS ON BANACH LATTICES WITH TOPOLOGICALLY RICH CENTER

In this study, we are interested in the Maharam operators on the Banach f -modules over the Archimedean f -algebras. Some results of W.A.J. Luxemburg and B. De Pagter (2002) are discussed on Banach f -modules. Construction is based on Arens multiplication and topologically rich center. Moreover, we investigated the properties of Maharam operators on dual Banach f -modules.

Keywords: Banach lattice, Banach f -module, Archimedean f -algebra, Maharam operator, ideal.

1.GİRİŞ

Banach Latisleri son yüzyılda bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Özellikle 1971 yılında W.A.J. Luxemburg ile A.C. Zaanen'in yazdıkları "Riesz Spaces I" kitabı ile H.H. Schefer'in 1974 yılında yazdığı "Banach Lattices and Positive Operators" adlı kitapla birlikte bu konudaki çalışmalar hız kazanmıştır. Maharam operatörleri ile ilgili ilk çalışma, 1953 yılında Dorothy Maharam tarafından "The representation of abstract integrals" adlı makalesinde tanımlanmıştır. Bu makalede D. Maharam, L ve M Archimedean Riesz uzayları M Dedekind tam ve $T:L \rightarrow M$ sıralı sınırlı lineer bir operatör olmak üzere, $z \in M$ ve $0 \leq z \leq |T|u$ için $z = |T|v$ ve $0 \leq v \leq u$ olacak şekilde bir $v \in L$ varsa T operatörünü Maharam operatörü olarak tanımlar. D. Maharam bu makalesinde ölçüm teorisinin temel teoremlerinden biri olan Radon-Nikodym teoreminin bir versiyonunu tam değerli F -integralleri için ispatladı. Radon-Nikodym teoreminin Maharam operatörlerindeki sonucuna göre; L ve M Dedekind tam Riesz uzayları, $T:L \rightarrow M$ Maharam (pozitif ve aralık koruyan) ve sıralı sürekli bir operatör olmak üzere $0 \leq S \leq T$ ise $Z(L)$ (L 'nin merkezi) içindeki bazı $0 \leq \pi \leq I$ (I , birim operatör) için $S = T\pi$ 'dir.

W.A.J. Luxemburg ve A. R. Schep 1978 yılında yaptıkları çalışmada, Maharam operatörlerinin bazı özelliklerini incelediler. İlk olarak, L ve M Dedekind tam uzayları arasında tanımlı sıralı sürekli T Maharam operatörü için $Z(M)$ 'den $Z(L)$ 'ye her $\pi \in Z(M)$ için $\pi T = Th(\pi)$ olarak tanımlı bir h latis homomorfizmasının ve cebirinin var olduğunu ispatladılar. Daha sonra da Radon-Nikodym tipi teoremi Maharam operatörleri için elde ettiler.

W.A.J. Luxemburg ve B. De Pagter (2002), pozitif operatörlerin verilen bir koleksiyonunun Radon-Nikodym teoremi kullanılarak Maharam operatörlerine genişlemesinin yapısını incelediler ve bu yapıyı f -modüllerinin özelliklerine dayandırdılar. Vektör latislere arasındaki pozitif lineer operatörlerin keyfi koleksiyonları için bazı aralık koruyan genişlemelerinin yapısını inşa ettiler. Verilen pozitif operatörlerin herhangi bir koleksiyonunu genişletilmiş operatörler için Radon-Nikodym kuramını sağlayan operatörleri içeren bir tanım uzayına genişletmenin mümkün olduğunu gösterdiler. Sıralı sınırlı lineer operatörlerin idealleri için Maharam genişleme uzaylarının yapısını incelediler. Bu yapıyı incelerken özellikle latis

homomorfizmalarının ve çekirdek operatörlerinin üzerinde durdular ve bazı genişleme uzayları içindeki band koruyanların Boolean cebirlerini tanımladılar.

Biz bu çalışmada, W.A.J. Luxemburg ve B. De Pagter (2002)'in Riesz uzayları üzerindeki bir çalışmaları, E Banach latis ve A Archimedean f -cebir olmak üzere E 'nin A üzerinde bir f -modül olduğu kullanılarak Banach latislerin dualinde bir f -modül yapısı kurularak A'' 'ne göre topolojik olarak zengin merkez özelliğinden yararlanılmak suretiyle Maharam operatörlerinin bir yapısı incelendi.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda kullandığımız kavramların temel tanımlarını, teoremleri ve önermeleri vereceğiz.

Tanım 2.1: K bir küme ve K üzerinde toplama (+) ve çarpma (.) işlemleri tanımlı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan K kümesine bir cisim denir.

i. Her $x, y \in K$ için $x + y \in K$ ve $xy \in K$.

ii. Her $x, y \in K$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$.

iii. K içerisinde bir tek sıfır (0) elemanı bulunabilir ki her $x \in K$ için $x + 0 = 0 + x = x$ eşitliği sağlanır.

iv. Her $x \in K$ için bir tek $-x \in K$ bulunabilir ki $x + (-x) = (-x) + x = 0$ eşitliği sağlanır.

v. Her $x, y \in K$ için $x + y = y + x$.

vi. Her $x, y \in K$ için $xy = yx$.

vii. Her $x, y, z \in K$ için $x(yz) = (xy)z$.

viii. Her $x \in K$ için $x \cdot 1 = x$ eşitliğini sağlayan K nin bir tek $0 \neq 1$ (bir) elemanı vardır.

ix. Her $0 \neq x \in K$ ya karşılık $xx^{-1} = 1$ eşitliğini sağlayan K içinde bir tek x^{-1} elemanı vardır.

x. Her $x, y, z \in K$ için $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$ eşitlikleri sağlanır.

Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ve kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ yukarıdaki aksiyomları sağladığından cisimlerdir.

Tanım 2.2: Boştan farklı bir X kümesi içinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa kısmi sıralama adını alır.

i) Her $x \in X$ için $x \leq x$ dir.

ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ dir.

iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ dir.

Tanım 2.3: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa $y \in \mathbb{R}$ 'ye A için bir üst sınır denir. Her $x \in A$ için $x \leq z$, $z \in \mathbb{R}$ olduğunda $y \leq z$ ise y 'ye A 'nın en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup A$ ile gösterilir.

Tanım 2.4: $\emptyset \neq B \subset \mathbb{R}$ olsun. Her $x \in B$ için $y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in \mathbb{R}$ varsa B kümesine alttan sınırlı bir küme denir. Her $x \in B$ için $z \leq x$, $z \in \mathbb{R}$ olduğunda $z \leq y$ oluyorsa y 'ye B kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $\inf B$ ile gösterilir.

Tanım 2.5: E boş olmayan bir küme ve K cismi $\mathbb{R}$ (reel sayılar kümesi) veya $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar kümesi) olsun.

$$+ : E \times E \rightarrow E, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\cdot : K \times E \rightarrow E, \quad (a, x) \rightarrow a \cdot x,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemleri tanımlansın.

i. Her $x, y, z \in E$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$,

ii. Her $x, y \in E$ için $x + y = y + x$,

iii. Her $x \in E$ için $x + 0 = x$ eşitliğini sağlayan E içinde bir tek 0 (sıfır) elemanı vardır.

iv. Her $x \in E$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in E$ vardır.

v. Her $x \in E$ için $1 \cdot x = x$.

vi. Her $x \in E$ ve $a, b \in K$ için $(ab)x = a(bx)$.

vii. Her $x, y \in E$ ve $a \in K$ için $a(x + y) = ax + ay$.

viii. Her $x \in E$ ve $a, b \in K$ için $(a + b)x = ax + bx$.

koşulları sağlanıyorsa E 'ye K üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) ve elemanlarına da vektör adı verilir. $K = \mathbb{R}$ alınırsa E 'ye bir reel vektör uzayı ve $K = \mathbb{C}$ alınırsa E 'ye bir kompleks vektör uzayı adı verilir.

Örnek 2.6: $E = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$ olsun.

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$ için toplama işlemini şu şekilde tanımlayalım:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı ile $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ vektörünün çarpımı

$$a \cdot x = (ax_1, \dots, ax_n)$$

ile tanımlansın. Bu çarpma ve toplama tanımları ile $\mathbb{R}^n$ bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.7: E bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \|x\|$, tanımlı dönüşümüne aşağıdaki koşulları sağlarsa E üzerinde bir norm adı verilir.

1. Her $x \in E$ için $\|x\| \geq 0$,
2. $x \in E$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. Her $x \in E$ ve $a \in K$ için $\|ax\| = |a| \|x\|$,
4. Her $x, y \in E$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği).

Bu durumda $(E, \|\cdot\|)$ çiftine bir normlu vektör uzayı adı verilir. Üzerinde norm tanımlanmış bir uzaya normlu bir uzay adı verilir.

Örnekler 2.8:

1. $E = \mathbb{R}$ olsun. $x \in E$ için $\|x\| = |x|$ olarak alındığında E bir normlu uzay olur.
2. $X = \mathbb{R}^n$ n boyutlu Euclid uzayı olsun. $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in X$ ise

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p \right]^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

normları ile X bir normlu uzaydır.

3. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun.

$$B(X) = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$$

$f, g \in B(X)$, $x \in X$ ve $a \in \mathbb{R}$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = a f(x).$$

$\|\cdot\| : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$ şeklinde tanımlanırsa $B(X)$ normlu uzay olur.

Önerme 2.9: E bir $\mathbb{R}$ üzerinde $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuyla bir normlu uzay olsun. Bu durumda $\|\cdot\|$ süreklidir.

İspat: $x, y \in E$ olsun. $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ özelliğinden ispatlanabilir.

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (1)$$

$x \rightarrow y$ yazalım;

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\| \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ olur.

$\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı bulalım.

$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\|x\| - \|x_0\|\| < \varepsilon$ olsun. $\delta = \varepsilon$ alınırsa $\|\|x\| - \|x_0\|\| < \varepsilon$ elde edilir. Bundan dolayı norm sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 2.10: E bir küme olmak üzere E 'nin iki elemanlı her alt kümesi bir infimum ve supremuma sahip ise E 'ye latis denir.

Tanım 2.11: E bir reel vektör uzayı olsun. $f, g \in E$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa E 'ye sıralı bir vektör uzayı denir.

- i. $f \leq g$ ise her $h \in E$ için $f + h \leq g + h$ 'dir.
- ii. $0 \leq f$ için her $0 \leq a$ reel sayısı için $0 \leq af$ 'dir.

Tanım 2.12: E bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\sup\{x, y\} \in E$ ve $\inf\{x, y\} \in E$ ise E 'ye bir vektör latis veya Riesz uzayı denir. $\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde de gösterilir.

$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine E 'nin pozitif konisi denir.

Örnekler 2.13:

1. $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) tüm reel $f = (f_1, \dots, f_n)$ n lilerden oluşan ve koordinatsal toplama ve reel sayılarla çarpmaya göre bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $f \leq g$ ifadesini $1 \leq k \leq n$ için $f_k \leq g_k$ olacak şekilde tanımlarsak $\mathbb{R}^n$, buradaki kısmi sıralamaya göre bir Riesz uzayıdır.

2. $B(X)$, boştan farklı herhangi bir X kümesi üzerindeki tüm sınırlı reel değerli fonksiyonların koleksiyonu olsun. $B(X)$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = a f(x) \quad a \in \mathbb{R}$$

işlemlerine göre bir reel vektör uzayıdır. $B(X)$ 'in pozitif konisi

$$B(X)_+ = \{f \in B(X) : f(t) \geq 0 \text{ tüm } t \in X \text{ için.}\}$$

şeklindedir. $f \geq g$ olması için gerek ve yeter koşul $f - g \in B(X)_+$ olmasıdır. Her $t \in X$ ve $f, g \in B(X)$ için

$$(f \vee g)(t) = \sup\{f(t), g(t)\} = \max\{f(t), g(t)\},$$

$$(f \wedge g)(t) = \inf\{f(t), g(t)\} = \min\{f(t), g(t)\}$$

dir. $B(X)$ bir Riesz uzayıdır.

Tanım 2.14: E bir Riesz uzayı olsun. Bir $x \in E$ elemanı için,

i) x 'in mutlak değeri $|x| = \sup\{x, -x\} = x \vee (-x)$

ii) x 'in pozitif kısmı $x^+ = x \vee 0$

iii) x 'in negatif kısmı $x^- = (-x) \vee 0$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.15: (Luxemburg, 1971) E bir sıralı vektör uzayı olsun.

i. $f, g \in E^+$ ise $f + g \in E^+$ olur.

ii. $f \in E^+$ ve tüm $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in E^+$ olur.

iii. $f, -f \in E^+$ ise $f = 0$ 'dır.

Teorem 2.16: (Luxemburg, 1971) E bir sıralı vektör uzayı olsun.

i. $f \geq g \Leftrightarrow f - g \in E^+$.

ii. $f \geq g \Leftrightarrow f = \sup(f, g)$ ve $g = \inf(f, g)$.

iii. $f \geq g \Leftrightarrow \alpha > 0$ için $\alpha f \geq \alpha g$ ve $\alpha < 0$ için $\alpha f \leq \alpha g$.

iv. $\sup(f, g)$ mevcut ise $\inf(-f, -g)$ mevcuttur ve $\inf(-f, -g) = -\sup(f, g)$ 'dir.

v. $f, g \in E$ olmak üzere E 'de $\sup(f, g)$ mevcut olması için gerek ve yeter koşul E 'de $\inf(f, g)$ mevcut olması ve herhangi bir $h \in E$ için

$$\sup(f + h, g + h) = \sup(f, g) + h,$$

$$\inf(f + h, g + h) = \inf(f, g) + h$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

vi. $\sup(f, g)$ mevcut ise,

$$\alpha \geq 0 \text{ için } \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g)$$

$$\alpha \leq 0 \text{ için } \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g)$$

$$\alpha \geq 0 \text{ için } \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f, g)$$

$$\alpha \leq 0 \text{ için } \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f, g)$$

eşitlikleri vardır.

vii. E bir Riesz uzayı ise $f, g, h \in E$ için

$$\sup\{\sup(f, g), h\} = \sup\{\sup(f, h), \sup(g, h)\} = \sup(f, g, h)$$

$$\inf\{\inf(f, g), h\} = \inf\{\inf(f, h), \inf(g, h)\} = \inf(f, g, h)$$

eşitlikleri vardır.

Teorem 2.17: (Luxemburg, 1971) E bir Riesz uzayı olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$$\textbf{i)} \quad x = x^+ - x^-$$

$$\textbf{ii)} \quad |x| = x^+ + x^-$$

$$\textbf{iii)} \quad x^+ \wedge x^- = 0$$

$$\textbf{iv)} \quad x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\textbf{v)} \quad |x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$$

$$\textbf{vi)} \quad |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$$

İspat :

$$\textbf{i)} \quad x = x + 0 = x \vee 0 + x \wedge 0 = x \vee 0 - (-x) \vee 0 = x^+ - x^-.$$

$$\textbf{ii)} \quad x = x \vee (-x) = (2x) \vee 0 - x = 2(x \vee 0) - x$$

$$= 2x^+ - x = 2x^+ - (x^+ - x^-) = x^+ + x^-.$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad x^+ \wedge x^- &= (x^+ - x^-) \wedge 0 + x^- = x \wedge 0 + x^- \\ &= -[(-x) \vee 0] + x^- = -x^- + x^- = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad x + y + |x - y| &= x + y + (x - y) \vee (y - x) \\ &= [(x + y) + (x - y)] \vee [(x + y) + (y - x)] \\ &= (2x) \vee (2y) = 2(x \vee y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{v)} \quad |x + y| + |x - y| &= [x + y] \vee [-x - y] + |x - y| \\ &= [x + y + |x - y|] \vee [-x - y + |x - y|] \\ &= 2([x \vee y] \vee [(-x) \vee (-y)]) \\ &= 2([x \vee (-x)] \vee [y \vee (-y)]) \\ &= 2(|x| \vee |y|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad \|x + y| - |x - y|\| &= 2(|x + y| \vee |x - y|) - (|x + y| + |x - y|) \\ &= 2(|x| + |y|) - 2(|x| \vee |y|) \\ &= 2(|x| \wedge |y|). \end{aligned}$$

Teorem 2.18: (Luxemburg, 1971) E bir sıralı vektör uzayı ve $f, g \in E$ olsun. $\sup(f, g)$

mevcut ise, $(f - g)^+, (g - f)^+$ ve $|f - g|$ mevcuttur ve

$$\text{i.} \quad \sup(f, g) = (f - g)^+ + g = (g - f)^+ + f,$$

$$\text{ii.} \quad \inf(f, g) = f - (f - g)^+ = g - (g - f)^+,$$

$$\text{iii.} \quad \sup(f, g) + \inf(f, g) = f + g,$$

$$\text{iv.} \quad \sup(f, g) - \inf(f, g) = |f - g|,$$

$$\text{v.} \quad 2\sup(f, g) = f + g + |f - g|,$$

vi. $2 \inf(f, g) = f + g - |f - g|,$

eşitlikleri sağlanır.

Gösterim: E bir Riesz uzayı ve (x_n) E’de bir dizi olsun.

i. (x_n) artandır $\Leftrightarrow x_n \leq x_{n+1}$ ve $x_n \uparrow$ ile gösterilir.

ii. (x_n) azalandır $\Leftrightarrow x_n \geq x_{n+1}$ ve $x_n \downarrow$ ile gösterilir.

iii. $x_n \uparrow x \Leftrightarrow (x_n)$ artandır ve $\sup_n x_n = x$ ’dir.

iv. $x_n \downarrow x \Leftrightarrow (x_n)$ azalandır ve $\inf_n x_n = x$ ’dir.

Tanım 2.19: I Yönlendirilmiş $\Leftrightarrow \alpha, \beta \in I$ için bir $\gamma \in I$ vardır ki $\gamma \geq \alpha$ ve $\gamma \geq \beta$ ’dir.

i. $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$: I indeks kümesi.

ii. (x_α) neti artandır $\Leftrightarrow [\alpha \leq \beta \text{ ise } x_\alpha \leq x_\beta] : x_\alpha \uparrow$

iii. (x_α) neti azalandır $\Leftrightarrow [\alpha \leq \beta \text{ ise } x_\alpha \geq x_\beta] : x_\alpha \downarrow$

I indeks kümesi doğal sayılar kümesi ise net, dizi olur.

Tanım 2.20: E bir Riesz uzayı olsun. $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa E içinde bir yarınorm adını alır.

i) Tüm $f \in E$ için $\rho(f) \geq 0$, $f = 0$ için $\rho(f) = 0$.

ii) Tüm $f, g \in E$ için $\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$.

iii) $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $f \in E$ için $\rho(af) = |a|\rho(f)$.

E içindeki ρ yarınormu tüm $f, g \in E$ olmak üzere $|f| \leq |g|$ için $\rho(f) \leq \rho(g)$ şartını sağlıyorsa Riesz yarınormu adını alır. ρ yarınormu yukarıdakine ek olarak sadece $f = 0$ için $\rho(f) = 0$ oluyorsa Riesz norm adını alır.

Tanım 2.21: E bir Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ve y elemanlarına ayırık elemanlar denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.22: E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. $x^+ \wedge x^- = 0$ olduğundan $x^+ \perp x^-$ 'dir.

Tanım 2.23: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. A kümesinin ayırık tümleyeni $A^d = \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } |x| \wedge |y| = 0\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.24: E bir Riesz uzayı, $x, y \in E$ ve $x \leq y$ olsun. $[x, y]$ sıralı aralığı $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Tanım 2.25: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. $A \subset [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa A kümesine sıralı sınırlı küme denir.

Tanım 2.26: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyor ise A 'ya katı (solid) küme denir.

Tanım 2.27: E bir Riesz uzayı, $A \subset E$ olsun. A kümesi katı alt uzay ise A 'ya ideal denir.

Tanım 2.28: E bir Riesz uzayı A da E içerisinde bir ideal olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ oluyorsa A 'ya E 'de bir band denir.

Tanım 2.29: E bir Riesz uzayı, $x \in E$ ve $\{x_\alpha\}$, E 'de bir net olsun. Eğer $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ eşitsizliğini sağlayan $\sup\{x_\alpha\}$ E 'nin elemanı ise E 'ye Dedekind tam denir.

Tanım 2.30: E bir Riesz uzayı olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa E Riesz uzayına Archimedean'dır denir.

Tanım 2.31: E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. T operatörünün lineer olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in E$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ olmasıdır.

Tanım 2.32: E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. T operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter koşul $0 \leq x$ için $0 \leq Tx$ olmasıdır.

Tanım 2.33: E, F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ oluyorsa T operatörüne aralık koruyan operatör denir.

Tanım 2.34: E, F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir pozitif operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ oluyorsa T operatörüne bir latis homomorfizması (veya Riesz homomorfizması) denir. Bir latis homomorfizması bire-bir ise latis izomorfizması adını alır.

Örnekler 2.35:

1. K_1 ve K_2 kompakt Hausdorff uzayı, $\varphi: K_2 \rightarrow K_1$ sürekli bir fonksiyon ve $g \in C(K_2)_+$ olsun. $Tf = g \cdot f \circ \varphi$ şeklinde tanımlanan $T: C(K_1) \rightarrow C(K_2)$ operatörü bir latis homomorfizmasıdır.

$f, h \in C(K_1)$ olsun.

$$\begin{aligned} T(f \vee h) &= g \cdot (f \vee h) \circ \varphi \\ &= (g \cdot f \vee g \cdot h) \circ \varphi \\ &= g \cdot f \circ \varphi \vee g \cdot h \circ \varphi \\ &= Tf \vee Th \end{aligned}$$

2. $t \in [0, 1]$ için $Tf(t) = tf(t)$ şeklinde tanımlanan $T: C[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ operatörü bir latis homomorfizmasıdır.

$t \in [0, 1]$ ve $f, g \in C[0, 1]$ olsun.

$$\begin{aligned} T(f \vee g)(t) &= t((f \vee g)(t)) \\ &= t(f(t) \vee g(t)) \\ &= tf(t) \vee tg(t) \\ &= Tf \vee Tg \end{aligned}$$

Yardımcı Teorem 2.36: E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ bir latis homomorfizması olsun. TE bir ideal ise her katı $A \subset E$ kümesi için TA , katıdır (solid) (Meyer, 1991).

İspat: $x \in A$ için $|y| \leq |Tx|$ olacak şekilde bir $y \in F$ alalım. TE bir ideal olduğundan $y \in TE$ 'dir. $y = Tz$ olacak şekilde $z \in E$ ve

$$u = z^+ \wedge |x| - z^- \wedge |x|$$

olsun. A katı olduğundan, $u \in A$ ve

$$Tu = (Tz)^+ \wedge |Tx| - (Tz)^- \wedge |Tx| = y^+ \wedge |Tx| - y^- \wedge |Tx| = y$$

elde edilir.

Tanım 2.37: E ve F iki Riesz uzayı olsun. Bu iki uzay arasındaki latis izomorfizması örten ise E ve F uzaylarına Riesz izomorfiktir denir.

Teorem 2.38: (Aliprantis, 1985) E ve F Riesz uzayları $T: E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

i. T latis homomorfizmasıdır.

ii. Her $x \in E$ için $Tx^+ = (Tx)^+$ 'dır.

iii. Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ 'dir.

iv. $x \wedge y = 0$ ise $Tx \wedge Ty = 0$ 'dır.

v. Her $x \in E$ için $|Tx| = T|x|$ 'dir.

İspat:

i $\Rightarrow$ ii: $x \in E$ olsun. $x^+ = x \vee 0$

$$Tx^+ = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 = (Tx)^+$$

ii $\Rightarrow$ iii: $x, y \in E$ olsun.

$$x + y = x \vee y + x \wedge y$$

$$x \wedge y = x + y - x \vee y = x + (y - x) \wedge 0$$

$$= x - (x - y) \vee 0$$

$$= x - (x - y)^+$$

$$T(x \wedge y) = T\left[x - (x - y)^+\right]$$

$$= Tx - T(x - y)^+ = Tx - [Tx - Ty]^+$$

$$= Tx \wedge Ty$$

iii $\Rightarrow$ iv: $x, y \in E$ ve $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ olsun. $x \wedge y = 0$ için

$$T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty = T0 = 0$$

elde edilir.

iv $\Rightarrow$ v: $x \wedge y = 0$ için $Tx \wedge Ty = 0$ olsun.

$$|Tx| = |T(x^+ - x^-)| = |Tx^+ - Tx^-|$$

$$|x - y| = x \vee y - x \wedge y \text{ olduğu kullanılırsa}$$

$$|Tx^+ - Tx^-| = Tx^+ \vee Tx^- - Tx^+ \wedge Tx^-$$

olur. $x^+ \wedge x^- = 0$ olduğundan $Tx^+ \wedge Tx^- = 0$ 'dır.

$$|Tx| = Tx^+ \vee Tx^-$$

$x \wedge y = 0$ için $x + y = x \vee y$ olur ve sonuç olarak

$$|Tx| = Tx^+ + Tx^- = T(x^+ + x^-) = T|x|$$

elde edilir.

v $\Rightarrow$ i: $x, y \in E$ olsun. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ olduğu kullanılırsa

$$T(x \vee y) = T\left[\frac{1}{2}(x + y + |x - y|)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[Tx + Ty + T|x - y|]$$

$$= \frac{1}{2}[Tx + Ty + |Tx - Ty|]$$

$$= T_x \vee T_y$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.40: E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun. $\text{Çek } T = \{x \in E : Tx = 0\}$ kümesine T'nin çekirdeği denir.

Teorem 2.41: E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir latis homomorfizması olsun. Bu durumda $\text{Çek } T$ bir (sıralı) idealdir (Aliprantis, 1985).

İspat: İdeal olduğunu göstermek için alt uzay ve katı olduğu gösterilmelidir.

$x, y \in \text{Çek } T$ olsun.

$$T(x + y) = Tx + Ty = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in \text{Çek } T \text{ 'dir.}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in \text{Çek } T$ olsun.

$$T(\lambda x) = \lambda Tx = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda x \in \text{Çek } T \text{ 'dir.}$$

O halde $\text{Çek } T$ bir alt uzaydır.

$|x| \leq |y|$ ve $y \in \text{Çek } T$ olsun.

$$|x| \leq |y| \Rightarrow |y| - |x| \geq 0$$

T bir latis homomorfizması olduğundan pozitifdir.

$$T(|y| - |x|) \geq T0$$

$$T|y| - T|x| \geq 0$$

$$|Ty| - |Tx| \geq 0$$

$$|Tx| \leq |Ty|$$

$y \in \text{Çek } T$ olduğundan $Ty = 0$ 'dır. Dolayısıyla $Tx = 0$ olur. Buradan da $x \in \text{Çek } T$ elde edilir.

$\text{Çek } T$, hem alt uzay hem de katı olduğundan bir idealdir.

Tanım 2.42: E bir Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow E$ operatörü E -invariantların tüm bantlarını ayrıştırıyorsa, yani, E 'nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T operatörüne band koruyan operatör denir.

Gösterim: E 'den F 'ye giden tüm lineer operatörlerin (reel) vektör uzayı $L(E, F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.43: E ve F iki Riesz uzayı olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü E 'nin sıralı sınırlı alt kümelerini F 'nin sıralı sınırlı alt kümelerine götürüyorsa T operatörüne sıralı sınırlı operatör denir. E 'den F 'ye giden tüm sıralı sınırlı lineer operatörlerin vektör altuzayı $L_b(E, F)$ ile gösterilir.

Tanım 2.44: E ve F iki Riesz uzayı olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T \leq S$ şartını sağlayan bir $S: E \rightarrow F$ pozitif operatör varsa T operatörüne regüler operatör denir. E 'den F 'ye giden tüm regüler operatörlerin vektör altuzayı $L_r(E, F)$ ile gösterilir. Aşağıdaki kapsama açık olarak vardır (Aliprantis, 1985):

$$L_r(E, F) \subseteq L_b(E, F) \subseteq L(E, F) \quad (2.1)$$

Yardımcı Teorem 2.45: E ve F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam ise $L_b(E, F) = L_r(E, F)$ 'dir (Aliprantis, 1985).

Tanım 2.46: E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ pozitif bir operatör olsun. E 'de $x_\alpha \downarrow 0$ oluyorken F 'de $Tx_\alpha \downarrow 0$ oluyorsa T operatörüne sıralı sürekli operatör denir. E 'den F 'ye giden tüm sıralı sürekli lineer operatörlerin vektör alt uzayı $L_n(E, F)$ ile gösterilir.

$$L_n(E, F) = \{T \in L_b(E, F) : T \text{ sıralı sürekli}\}$$

Teorem 2.47: (Aliprantis, 1985) E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve $T: E \rightarrow F$ sıralı sınırlı operatör olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktir:

i. T sıralı sürekli dir.

ii. E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ 'dır.

iii. E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ ise F içinde $\inf \{|Tx_\alpha|\} = 0$ 'dır.

iv. T^+ ve T^- sıralı süreklidir.

v. $|T|$ sıralı süreklidir.

Teorem 2.48: E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olmak üzere $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde bir banttır (Aliprantis, 1985).

İspat: $T \in L_n(E, F)$ için $L_b(E, F)$ 'de $|S| \leq |T|$ sağlanırsa Teorem 2.47'den $S \in L_n(E, F)$ olur, yani; $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ 'nin bir deali olur.

$L_n(E, F)$ 'nin bir band olduğunu gösterelim. $L_b(E, F)$ içinde $\{T_\lambda\} \subseteq L_n(E, F)$ olacak şekilde $0 \leq T_\lambda \uparrow T$ ve E içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ olsun. λ 'yı sabit tutarsak

$$0 \leq T(x - x_\alpha) \leq (T - T_\lambda)(x) + T_\lambda(x - x_\alpha)$$

olur. $x - x_\alpha \downarrow 0$ ifadesinden tüm λ 'lar için

$$0 \leq \inf \{T(x - x_\alpha)\} \leq (T - T_\lambda)(x)$$

sağlanır. $T - T_\lambda \downarrow 0$ ifadesinden de $\inf \{T(x - x_\alpha)\} = 0$ olur ve buradan da $T(x_\alpha) \uparrow T(x)$ elde edilir. Sonuç olarak, $T \in L_n(E, F)$ bulunur ve $L_n(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde bir band olduğu görülür.

Tanım 2.49: E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ sıralı sınırlı bir operatör ve F Dedekind tam olsun. T 'nin sıfır ideali,

$$N_T = \{x \in E : |T|(|x|) = 0\} \quad (2.2)$$

olarak tanımlanır. N_T E 'nin bir idealidir. N_T 'nin ayrık tümleyenine T 'nin taşıyıcısı denir ve

$$C_T = N_T^d = \{x \in E : x \perp N_T\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. $0 < x \in C_T$ için $0 < |T|(x)$ sağlanır.

Tanım 2.50: A bir vektör uzayı ve her $x, y, z \in A$, her α skaleri için,

$$(1) (xy)z = x(yz) \text{ ve } (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy) \quad (2.4)$$

$$(2) x(y+z) = xy + xz \text{ ve } (x+y)z = xz + yz \quad (2.5)$$

özelliklerini sağlayan bir ikili işlem $(x, y) \rightarrow xy$ (çarpım) ile donatılmış ise, A'ya bir cebir denir.

Tanım 2.51: A birleşme özelliğine sahip (değişme özelliğine sahip olması gerekli olmayan) bir vektör latis cebir olsun. Her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq xy$ ise A'ya bir latis sıralı cebir (veya l- cebiri, Riesz cebiri) denir. Her $0 \leq x, y \in A$ için $0 \leq xy$ olması $|xy| \leq |x| \cdot |y|$ olmasına denktir.

Tanım 2.52: Bir Riesz cebir A'ya eğer $x \wedge y = 0$ ve $0 \leq z \in A$ iken $xz \wedge y = zx \wedge y = 0$ oluyorsa A'ya bir f-cebir denir.

Tanım 2.53: E bir Riesz uzayı olmak üzere $T: E \rightarrow E$ sıralı sınırlı bir operatör olsun. $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ oluyorsa T operatörüne bir ortomorfizma denir. E den E ye giden tüm ortomorfizmaların f-cebiri Orth(E) ile gösterilir.

Tanım 2.54: $(E, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) E içinde bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için bir n_0 bulunduğunda her $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E içinde bir Cauchy dizisi denir. Eğer E içindeki her Cauchy dizisi E'deki norma göre yakınsak ise E uzayına bir Banach uzayı (veya Tam uzay) adı verilir.

Örnekler 2.55:

1. $\mathbb{R}$ bir Banach uzayıdır.

2. X, boştan farklı bir küme olmak üzere $B(X) = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sınırlı fonksiyon}\}$ ve $f \in B(X)$ için $\|\cdot\|: B(X) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ olarak tanımlansın. $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: (f_n) , $B(X)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n, m \geq n_0$ şartını sağlayan $\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in X} |(f_n - f_m)(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 vardır. $B(X)$ bir vektör uzayı olduğu için

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in X} |(f_n - f_m)(x)| = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| < \varepsilon \quad (n, m \geq n_0)$$

olur. Buradan, $(f_n(x))$ $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir ve $\mathbb{R}$ bir Banach uzayı olduğundan her Cauchy dizisi yakınsar. Her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ tanımını yapalım. $f \in B(X)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ olduğu gösterilirse $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

$(f_n(x))$ $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır, yani $|f_n(x)| < M$ eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \Rightarrow |f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$|f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq M < M + 1$$

Buradan $f \in B(X)$ olur.

n 'yi sabit tutup $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = f(x)$ alalım.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad n, m \geq n_0$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\| \leq \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$$

O halde $B(X)$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.56: $(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $(E, \|\cdot\|, \leq)$ sıralı vektör uzayı olsun. $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa E 'ye Banach latisi denir.

Örnek 2.57: X bir kompakt Hausdorff uzayı ve $C(K)$ da X üzerindeki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların Banach uzayı olsun. $C(K)$ üzerindeki kısmi sıralama her $t \in K$ ve $f, g \in C(K)$ için $f \leq g \Leftrightarrow f(t) \leq g(t)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $(C(K), \leq)$ bir Banach latistir.

Tanım 2.58: E bir Banach latis, $T: E \rightarrow E$ bir operatör olsun. $x \geq 0$ iken $Tx \geq 0$ ise T operatörüne pozitif operatör denir.

Teorem 2.59: E bir Banach latis ve F bir normlu Riesz uzayı olsun. Her $T: E \rightarrow F$ pozitif operatörü sürekli (Aliprantis, 1985).

İspat: Varsayalım ki, T sürekli olmasın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| \leq 2^{-n}$ ve $n \leq \|Tx_n\|$ şartlarını sağlayan bir $x_n \in E$ mevcuttur. Buradan her $x \in E$ için $\|Tx\| \leq \|T|x|\|$ olur. $x_n \geq 0$ kabul edelim.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in E_+$$

olsun. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|Tx\| \geq \|Tx_n\| \geq n$$

elde edilir, bu bir çelişkidir. Buradan T sürekli sonucı çıkar.

Tanım 2.60: Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı latis yarınormu p olsun. $x_\alpha \downarrow 0$ iken $p(x_\alpha) \downarrow 0$ sağlanıyorsa p yarınormuna sıralı sürekli denir. Bir E Banach latisi üzerindeki norm sıralı sürekli ise E , sıralı sürekli norma sahiptir denir.

Tanım 2.61: E ve F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. Her bir $0 \neq x \in E$ için $T(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $T \in L_b(E, F)$ mevcut ise $L_b(E, F)$ E 'nin noktalarını ayrıştırıyor denir.

3. TOPOLOJİK OLARAK ZENGİN MERKEZLİ BANACH LATİSLERDE MAHARAM OPERATÖRLERİ

Tanım 3.1: A , Archimedean f -cebiri ve E bir Banach latis olsun. Eğer $A \times E \rightarrow E$, $(a, f) \rightarrow a \cdot f$ bilineer tasviri aşağıdaki şartları sağlıyorsa E 'ye A üzerinde sol Banach f -modül denir:

- (i) Her $a, b \in A$, $f \in E$ için $a \cdot (b \cdot f) = (ab) \cdot f$
- (ii) $0 \leq a \in A$ ve $0 \leq f \in E$ için $0 \leq a \cdot f$
- (iii) E 'de $f \perp g$ ise tüm $a \in A$ için E 'de $a \cdot f \perp g$ 'dir.

Bu çalışmada, sol Banach f -modülünü kısaca Banach f -modül olarak adlandıracamız.

Varsayalım ki E , A f -cebiri üzerinde bir Banach f -modülü olsun. $a \in A$ ve tüm $f \in E$ için $m(a)(f) = a \cdot f$ tanımını yapalım. Banach f -modül tanımından $m(a) \in \text{Orth}(E)$ olduğu açıktır.

Yardımcı Teorem 3.2: (Luxemburg, 2002) E , A f -cebiri üzerinde bir Banach f -modülü olsun.

- i. Her $a, b \in A$ ve $0 \leq f \in E$ için $(a \vee b)f = (af) \vee (bf)$ ve $(a \wedge b)f = (af) \wedge (bf)$ 'dir.
- ii. Her $a \in A$ ve $f \in E$ için $|af| = |a| \cdot |f|$ 'dir.
- iii. $a, b \in A$ için $a \perp b$ ise tüm $f, g \in E$ için $af \perp bg$ 'dir.

Tanım 3.3: $0 < 1 \in A$ birim eleman kabul edelim. Eğer tüm $f \in E$ için $1 \cdot f = f$ ve $0 < 1 \in A$ ise o zaman E 'ye birimsel Banach f -modül denir.

Bu çalışmadaki tüm Banach f -modüllerini birimsel Banach f -modül olarak kabul edeceğiz.

Tanım 3.4: E bir Banach latis olmak üzere E nin merkezi $Z(E)$

$$Z(E) = \{T \in E : |T| \leq \lambda I, \text{ } I \text{ birim operatör, } \lambda \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.5: $E = \mathbb{R}$ ise $Z(E) = \mathbb{R}$ olur.

Örnek 3.6: E bir Banach latis olsun. E 'nin merkezi $Z(E) = C(K)$ (K , kompakt Hausdorff uzayı) birimli f -cebiri. O zaman, $Z(E) \times E \rightarrow E$, $(T, x) \rightarrow T \cdot x = T(x)$ tasviriyle E , $C(K)$ üzerinde Banach f -modüldür.

Tanım 3.7: (Gök, 2002) E , A üzerinde bir Banach f -modül olsun. $x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ olmak üzere $\lim_{\alpha} \|a_{\alpha} \cdot y - x\| = 0$ ve $0 \leq a_{\alpha} \uparrow \leq 1$ koşulunu sağlayan A içinde bir (a_{α}) neti varsa E 'ye A 'ya göre topolojik olarak zengin denir. Benzer tanım Abromovich (1992)'de bulunabilir.

Tanım 3.8: A , Archimedean f -cebir ve E ile F , A üzerinde Banach f -modül olsunlar. $T: E \rightarrow F$ lineer tasviri eğer her $f \in E$ ile her $a \in A$ için $T(a \cdot f) = a \cdot Tf$ şartını sağlıyorsa A -lineer olarak adlandırılır.

Teorem 3.9: E , F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. $L_b(E, F)$, E 'den F 'ye giden tüm sıralı sınırlı lineer operatörlerin Dedekind tam Riesz uzayıdır. $L_r(E, F)$ ise, tüm regüler operatörlerin kümesidir (Zaanen, 1983).

Teorem 3.10: E ve F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam ise $L_b(E, F) = L_r(E, F)$ 'dir (Aliprantis, 1985).

$T \in L_b(E, F)$ için T 'nin sıfır ideali $N_T = \{f \in E : |T|(|f|) = 0\}$ şeklinde tanımlanır ve $C_T = N_T^d$ T 'nin taşıyıcısı (carrier) olarak adlandırılır. $L_n(E, F)$, E 'den F 'ye giden tüm sıralı sürekli lineer operatörlerin kümesidir.

Önerme 3.11: E , F Banach latis ve F Dedekind tam olsun. $L_r(E, F)$ regüler operatör normlu bir Banach latistir, (Meyer, 1991).

Tanım 3.12: E ve F A f -cebiri üzerinde Banach f -modül olsunlar.

$$L_b^A(E, F) = \{T \in L_b(E, F) : T \text{ } A\text{-lineerdir.}\} \quad (3.1)$$

ve

$$L_n^A(E, F) = L_b^A(E, F) \cap L_n(E, F) \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.13: E ve F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. $z \in F$ ve $u \in E$ için $0 \leq z \leq |T|u$ olsun. $z = |T|v$ olacak şekilde $0 \leq v \leq u$ şartını sağlayan bir $v \in E$ var ise $T \in L_b(E, F)$ operatörüne Maharam operatörü (Maharam özelliğine sahip, aralık koruyan) denir. T pozitif operatörü Maharam ise $x \in E$ için $T[0, x] = [0, Tx]$ olmalıdır.

Örnek 3.14: $t \in [0, 1]$ için

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

şeklinde tanımlanan $\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif lineer fonksiyoneli bir Maharam operatörüdür.

$f \in C[0, 1]$ için $\phi[0, f] = [0, \phi f]$ ise ϕ bir Maharam operatörüdür.

$0 \leq g \leq f$ olacak şekilde bir $g \in C[0, 1]$ alalım. $\phi(g) = \int_0^1 g(t) dt$ için $0 \leq \phi(g) \leq \phi(f)$ olur buradan $\phi(g) \in [0, \phi f]$ elde edilir yani,

$$\phi[0, f] \subset [0, \phi f] \quad (1)$$

olur. Şimdi de $x \in [0, \phi f]$ alalım.

$$0 \leq x \leq \phi f$$

$$0 \leq x \leq \int_0^1 f(t) dt$$

$0 \leq \int_0^1 g(t) dt \leq \int_0^1 f(t) dt$ olacak şekilde $g(t) \leq f(t)$ şartını sağlayan bir $g(t)$ fonksiyonu vardır. $x = \int_0^1 g(t) dt$ alınırsa $x = \phi(g)$ olur. Buradan $x = \phi(g) \in \phi[0, f]$ yani, $[0, \phi f] \subset \phi[0, f]$ (2)

dir. (1) ve (2)'den $\phi[0, f] = [0, \phi f]$ elde edilir. Dolayısıyla ϕ bir Maharam operatörüdür.

Tanım 3.15: E ve F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam olmak üzere $h:Z(F) \rightarrow Z(E)$ bir f -cebir homomorfizması olsun.

$$L_n^h(E, F) = \{T \in L_n(E, F) : \pi T = Th(\pi) \quad \forall \pi \in Z(F)\}.$$

Yardımcı Teorem 3.16: $L_n^h(E, F)$, $L_n(E, F)$ içinde bir banttır (Luxemburg, 2002).

İspat: $\pi \in Z(F)$, $\sigma \in Z(E)$ ve tüm $T \in L_n(E, F)$ için $L_\pi(T) = \pi T$ ve $R_\sigma(T) = T\sigma$ olacak şekilde $L_\pi, R_\sigma \in Z(L_n(E, F))$ operatörlerini tanımlayalım. O zaman,

$$L_n^h(E, F) = \bigcap \left\{ \text{Çek}(L_\pi - R_{h(\pi)}) : \pi \in Z(F) \right\}$$

olur. Herhangi bir operatörün merkezinin çekirdeği bir band olduğundan $L_n^h(E, F)$, $L_n(E, F)$ içinde bir banttır.

Önerme 3.17: (Luxemburg, 2002) E ve F Archimedean Riesz uzayları ve F Dedekind tam olmak üzere $h:Z(F) \rightarrow Z(E)$ bir f -cebir homomorfizması olsun. $S, T \in L_n^h(E, F)$ için aşağıdakiler birbirine denktir.

i. $S \perp T$

ii. $C_S \perp C_T$

Önerme 3.18: (Luxemburg, 2002) E ve F Dedekind tam Riesz uzayları ve $h:Z(F) \rightarrow Z(E)$ bir f -cebir homomorfizması olsun. $0 \leq T \in L_n^h(E, F)$ olsun.

i. S, T 'nin komponenti ise, yani, $S \wedge (T - S) = 0$ ise $S = TC_S$ 'dir.

ii. $0 \leq S \leq T$ ise $S = T\pi$ olacak şekilde $Z(E)$ içinde bir $0 \leq \pi \leq I$ mevcuttur.

Önerme 3.19: E ve F Dedekind tam Riesz uzayları olsun. $J \subseteq L_n(E, F)$ Maharam operatörlerini içeren bir ideal olduğunu varsayalım. O zaman $J \subseteq L_n^h(E, F)$ olacak şekilde $h:Z(F) \rightarrow Z(E)$ bir f -cebir homomorfizması vardır (Luxemburg, 2002).

Önerme 3.20: (Luxemburg, 2002) E ve F Dedekind tam Riesz uzayları ve $T \in L_n(E, F)$ olsun.

- i. T bir Maharam operatörü ise her $\pi \in Z(F)$ için $\pi T = Th_T(\pi)$ ve $h_T(\pi)C_T = h_T(\pi)$ şartlarını sağlayan tek bir $h_T : Z(F) \rightarrow Z(E)$ f-cebir homomorfizması vardır.
- ii. Tüm $\pi \in Z(F)$ için $\pi T = Th(\pi)$ şartını sağlayan tek bir $h : Z(F) \rightarrow Z(E)$ f-cebir homomorfizması varsa T bir Maharam operatörüdür.

İspat:

- i. $T\pi_1 = T\pi_2$ ve $\pi_j C_T = \pi_j$ ($j=1,2$) şartlarını sağlayan $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)$ ise $\pi_1 = \pi_2$ 'dir.
 $T(\pi_1 - \pi_2) = 0$ ise $|T| \cdot |\pi_1 - \pi_2| = 0$ ve buradan

$$|\pi_1 - \pi_2| = |\pi_1 C_T - \pi_2 C_T| = |\pi_1 - \pi_2| C_T = 0$$

elde edilir.

- ii. $\pi \in Z(F)$ için $S \mapsto Sh(\pi)$ ve $S \mapsto \pi S$, $L_n(E, F)$ içindeki operatörlerin merkezi olsunlar.
 Buradan

$$\{S \in L_n(E, F) : \pi S = Sh(\pi)\}$$

kümesi $L_n(E, F)$ içinde bir banttır. Hipotezimizden tüm $\pi \in Z(F)$ için $\pi|T| = |T|h(\pi)$ sağlanır. Şimdi $0 \leq u \in E$ ve F 'de $0 \leq w \leq |T|u$ olduğunu varsayalım. F Dedekind tam olduğundan $Z(F)$ içinde

$$w = \pi|T|u = |T|(h(\pi)u)$$

şartını sağlayan bir $0 \leq \pi \leq I$ vardır. Dahası, $0 \leq h(\pi) \leq h(I) \leq I$ ve böylece $0 \leq h(\pi)u \leq u$ olur. Sonuç olarak T bir Maharam operatörüdür.

Yardımcı Teorem 3.21: (Luxemburg, 2002) E ve F Archimedean Riesz uzayları F Dedekind tam olmak üzere E ve F , A Archimedean f-cebiri üzerinde f-modül olsunlar. O zaman $L_b^A(E, F) \subset L_b(E, F)$ içinde bir band ve $L_n^A(E, F)$ de $L_n(E, F)$ içinde bir banttır.

Yardımcı Teorem 3.22: (Gök, 2002) E ve F A f -cebiri üzerinde Banach f -modül olsunlar. E 'yi sıralı sürekli norma sahip ve F 'yi de A 'ya göre topolojik olarak zengin kabul edelim. O zaman, $L_n^A(E, F)$ Maharam (aralık koruyan) operatörlerinden meydana gelir.

Yardımcı Teorem 3.23: (Bernau, 1995) Archimedean f -cebiri A 'nın sıralı duali A' , ikinci sıralı duali de A'' olsun. A'' de Archimedean f -cebiridir.

Yardımcı Teorem 3.24: (Meyer, 1991) E Banach latisinin sıralı duali E' de bir Banach latistir.

E bir Banach latis, A bir Archimedean f -cebiri ve E, A üzerinde Banach f -modül olsun.

$$(1) A \times E \rightarrow E, (a, x) \rightarrow a \cdot x$$

Bu durumda aşağıdaki tasvirleri tanımlayabiliriz:

$$(2) E \times E' \rightarrow A' \quad a \in A$$

$$(x, x') \rightarrow (x \cdot x')(a) = x'(ax)$$

$$(3) A'' \times E' \rightarrow E' \quad x \in E$$

$$(a'', x') \rightarrow (a'' \cdot x')(x) = a''(x \cdot x')$$

A'' Archimedean f -cebiri ve E' Banach latistir.

Teorem 3.25: A'' Archimedean f -cebiri ve E' Banach latis olsun. $A'' \times E' \rightarrow E'$, $(a'', x') \rightarrow (a'' \cdot x')(x)$ bilinear tasviri aşağıdaki şartları sağlıyorsa E', A'' üzerinde Banach f -modüldür:

$$(i) \text{ Tüm } a'', b'' \in A'', x' \in E' \text{ için } a'' \cdot (b'' \cdot x') = (a'' b'') \cdot x'$$

$$(ii) 0 \leq a'' \in A'' \text{ ve } 0 \leq x' \in E' \text{ olduğunda } 0 \leq a'' \cdot x'$$

$$(iii) E' \text{ 'de } x' \perp y' \text{ ise tüm } a'' \in A'' \text{ için } E' \text{ 'de } a'' \cdot x' \perp y' \text{ 'dir.}$$

İspat:

(i) $a'', b'' \in A''$, $f \in E'$ ve $x \in E$ olsun.

$$\begin{aligned}
 (a'' \cdot (b'' \cdot f))(x) &= a'' \cdot (b'' \cdot f)(x) \\
 &= a''((b'' \cdot f)(x)) \\
 &= a''(b''(f \cdot x)) \\
 &= (a''b'')(f \cdot x) \\
 &= [(a''b'') \cdot f](x)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Her $x \in E$ için olduğundan,

$$a'' \cdot (b'' \cdot f) = (a''b'') \cdot f \tag{3.4}$$

olur.

(ii) $0 \leq a'' \in A''$, $0 \leq f \in E'$, $t \in A$ ve $x \in E$ olsun.

$$(a'' \cdot f)(x) = a''(f \cdot x) \tag{3.5}$$

$$(f \cdot x)(t) = f(xt) \tag{3.6}$$

E , A üzerinde Banach f -modül olduğundan $0 \leq x \in E$ ve $0 \leq t \in A$ için $0 \leq xt$ 'dir. Her $t \in A$ için doğru olduğundan $0 \leq f \cdot x$ 'dir.

$(a'' \cdot f)(x) = a''(f \cdot x)$ her $0 \leq x \in E$ için doğru olduğundan

$$0 \leq a'' \cdot f \tag{3.7}$$

elde edilir.

(iii) $f, g \in E'$, $a'' \in A''$ ve $e \in A''$ (birim eleman) olsun (A'' 'nin birim elemanı aynı zamanda A 'nın da birim elemanıdır.).

$$f \perp g \Rightarrow |f| \wedge |g| = 0 \tag{3.8}$$

$$|a'' \cdot f| \leq |a''| \cdot |f| \tag{3.9}$$

$a'' \cdot f \perp g$, denklem (3.8)'den $0 \leq a'' \cdot f \perp g = |a'' \cdot f| \wedge |g|$ olur. Burada denklem (3.9)'dan

$$\begin{aligned} 0 &\leq |a'' \cdot f| \wedge |g| \leq |a''| \cdot |f| \wedge |g| \\ &\leq (|a'' + e|)(|f|) \wedge (|a'' + e|)(|g|) \\ &\leq (|a'' + e|)(|f| \wedge |g|) \\ 0 &\leq |a'' \cdot f| \wedge |g| \leq 0 \\ |a'' \cdot f| \wedge |g| &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan da $a'' \cdot f \perp g$ elde edilir.

Tanım 3.26: E A üzerinde Banach f -modül olsun. $x', y' \in E'$ için $0 \leq x' \leq y'$, $0 \leq a_\alpha \uparrow \leq 1$ öyle ki $\lim_\alpha \|a_\alpha \cdot y' - x'\| = 0$ olacak şekilde A'' 'de bir (a_α) neti varsa $E' \subset A''$ 'ne göre topolojik olarak zengindir denir.

Tanım 3.27: A Archimedean f -cebiri ve E ve F A üzerinde Banach f -modül olsunlar. $T: E' \rightarrow F'$ linear tasviri tüm $x' \in E'$ ve tüm $a'' \in A''$ için $T(a'' \cdot x') = a'' \cdot Tx'$ şartını gerçekleştiriyorsa A'' -lineer olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 3.28: E ve F A üzerinde Banach f -modül iseler o zaman, $L_b^{A''}(F', E')$ $L_b(F', E')$ içinde ve $L_n^{A''}(F', E')$ de $L_n(F', E')$ içinde bir banttır.

İspat: $a \in A''$, tüm $f \in F'$ ve tüm $g \in E'$ için $\pi_a f = af$ ve $\sigma_a g = ag$ tanımlarını yapalım. $\pi_a \in \text{Orth}(F')$ ve $\sigma_a \in \text{Orth}(E')$ olsun. Şimdi de her $T \in L_b(F', E')$ için

$$R_a(T) = T\pi_a, \quad L_a(T) = \sigma_a T$$

olacak şekilde

$$R_a: L_b(F', E') \rightarrow L_b(F', E') \text{ ve } L_a: L_b(F', E') \rightarrow L_b(F', E')$$

operatörlerini tanımlayalım. O zaman $R_a, L_a \in \text{Orth}(L_b(F', E'))$ olur ve

$$L_b^{A'}(F', E') = \{T \in L_b(F', E') : (R_a - L_a)(T) = 0 \quad \forall a \in A''\}$$

$$= \bigcap \{\text{Çek}(R_a - L_a) : a \in A''\}$$

dir. $R_a - L_a$ ortomorfizmasının çekirdeği $\text{Çek}(R_a - L_a)$ bir band olduğundan $L_b^{A'}(F', E')$ de bir banttır.

Yardımcı Teorem 3.29: E ve F bir A Archimedean f -cebiri üzerinde Banach f -modül olsunlar. E' sıralı sürekli norma sahip ve F' A'' 'ne göre topolojik olarak zengin olsun. $L_n^{A'}(F', E')$ aralık koruyan (Maharam) operatörlerden meydana gelir.

İspat: $T : E \rightarrow F$ pozitif bir operatör ve E' 'de $0 \leq y' \leq T'x'$ olsun. A'' 'de $0 \leq a_\alpha \uparrow \leq 1$ olacak şekilde bir (a_α) neti vardır öyle ki,

$$\lim_\alpha a_\alpha \cdot T'x' = y' \quad (3.10)$$

dir. Varsayımımızdan $T'(a_\alpha \cdot x') = a_\alpha \cdot T'x'$ ve $0 \leq a_\alpha \cdot x' \leq x'$, $a_\alpha \cdot x' \uparrow \leq x'$ ve F' Dedekind tamdır. O zaman, $a_\alpha \cdot x' \uparrow u' \leq x'$ olacak şekilde $u' \in F'$ mevcuttur. E' sıralı sürekli norma sahip olduğundan

$$\lim_\alpha a_\alpha \cdot x' = u' \quad (3.11)$$

sağlanır. T' sürekli olduğundan

$$\lim_\alpha T'(a_\alpha \cdot x') = T'u'$$

olur. Hausdorff özelliğinden (limitin tekliği) $T'u' = y'$, $0 \leq u' \leq x'$ alırız. Buradan T' aralık koruyan (Maharam) operatörüdür.

E Archimedean Riesz uzayı ve F A f -cebiri üzerinde Dedekind tam f -modül olsun. O zaman $L_b(E, F)$ aşağıdaki $a \cdot T$ tanımıyla doğal f -modül yapısına sahiptir:

Tüm $f \in E$ için $a \in A$ ve $T \in L_b(E, F)$ için

$$(a \cdot T)(f) = a \cdot Tf \quad (3.12)$$

Buradan $L_n(E, F) \subseteq L_b(E, F)$ 'nin içinde bir band olur. $L_n(E, F)$ 'nin $L_b(E, F)$ 'nin f -altmodülü olduğu açıktır. Eğer E ve F A Archimedean f -cebiri üzerinde Banach f -modül ve F Dedekind tam ise o zaman Yardımcı Teorem 3.21'den $L_b^A(E, F)$, $L_b(E, F)$ içinde bir band ve $L_n^A(E, F)$ de $L_n(E, F)$ 'nin içinde bir band olur. $a \in A$ ve $T \in L_n^A(E, F)$ ($T \in L_b^A(E, F)$), tüm $f \in E$ için ve $m: A \rightarrow \text{Orth}(F)$ için $m(a)x = a \cdot x$ olmak üzere $(a \cdot T)(f) = a \cdot Tf = m(a)(Tf)$ şeklinde tanımlanan $a \cdot T$ çarpımıyla $L_n^A(E, F)$ ve $L_b^A(E, F)$ A üzerinde Banach f -modüldürler. E ve F A f -cebiri üzerinde Banach f -modül, $F' \subseteq A''$ 'ne göre topolojik olarak zengin ve E' sıralı sürekli norma sahip olduğunu varsayalım ve $J \subseteq L_n^A(E, F)$ içindeki sıralı sürekli norm ile kapalı bir ideal olsun. Genişleme tasviri vasıtasıyla $J \subseteq L_n^{A''}(F', E')$ 'nin Banach f -altmodülüdür.

Yardımcı Teorem 3.30: $f \in F'$ için $f^\sim: J \rightarrow E'$ tasvirini tüm $T \in J$ için

$$f^\sim(T) = Tf$$

şeklinde tanımlayalım. Tüm $f \in F'$ için $f^\sim \in L_n^{A''}(J, E')$ 'dir.

İspat:

$$f^\sim = (f^+)^\sim - (f^-)^\sim$$

ve

$$(f^+)^\sim, (f^-)^\sim \geq 0$$

dan $f^\sim \in L_b(J, E')$ olduğu açıktır. J 'de $T_\alpha \downarrow 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $L_n(F', E')$ 'de $T_\alpha \downarrow 0$ 'dır ve böylece F' 'de $T_\alpha |f| \downarrow 0$ 'dır. Buradan $|f^\sim(T_\alpha)| = |T_\alpha(f)| \leq T_\alpha |f|$ olur ve $\inf_\alpha |f^\sim(T_\alpha)| = 0$ sağlanır. Bundan dolayı $f^\sim \in L_n(J, E')$ 'dir.

$a \in A$ ve $T \in J$ olsun. O zaman

$$f^{\sim}(a \cdot T) = (a \cdot T)(f) = a \cdot Tf = m(a)(Tf) = m(a)(f^{\sim}(T)) = a \cdot f^{\sim}(T) \quad (3.13)$$

ve böylece $f^{\sim}$ bir A'' -lineerdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yardımcı Teorem 3.31: Tüm $f \in F'$ için

$$\alpha(f) = f^{\sim} \quad (3.14)$$

olacak şekilde bir $\alpha: F' \rightarrow L_n^{A''}(J, E')$ tasviri tanımlayalım. α bir F' 'den $L_n^{A''}(J, E')$ 'ye giden sıralı sürekli A'' -linear Riesz homomorfizmasıdır.

İspat: α bir pozitif lineer tasvirdir. Varsayalım ki F' 'de $f_{\beta} \downarrow 0$ ve $0 \leq T \in J$ olsun. T sıralı sürekli olduğundan E' 'de $Tf_{\beta} \downarrow 0$ yani, $f_{\beta}^{\sim}(T) \downarrow 0$ 'dır. Bundan dolayı $L_n(J, E')$ 'de $\alpha(f_{\beta}) \downarrow 0$ 'dır. $f \in F'$, $a \in A''$ ve tüm $T \in J$ için

$$\alpha(a \cdot f)(T) = (a \cdot f)^{\sim}(T) = T(a \cdot f) = a \cdot Tf = a \cdot f^{\sim}(T) = a \cdot \alpha(f)(T) \quad (3.15)$$

ve böylece $\alpha(a \cdot f) = a \cdot \alpha(f)$ olduğundan α 'nın A'' -lineer olduğunu göstermiş olduk. Zaanen (1983)'den α bir Riesz homomorfizmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.32: α 'nın bire bir olması için gerek ve yeter koşul J 'nin F' 'nin noktalarını ayırıştırmasıdır, yani, her bir $0 \neq f \in F'$ için $Tf \neq 0$ olacak şekilde bir $T \in J$ olmasıdır. α bire bir ise yukarıdaki yardımcı teoremden F' ve $\alpha(F')$ A'' üzerinde izomorfik f -modüllerdir.

İspat: α bire bir olsun. $f, g \in F'$ ve $T \in J$ için

$$f \neq g \Rightarrow Tf \neq Tg$$

$$Tf - Tg \neq 0$$

$$T(f - g) \neq 0$$

$0 \neq f - g \in F'$ için $T(f - g) \neq 0$ elde edilir. Buradan J , F' 'nin noktalarını ayırıştırır.

J , F' 'nün noktalarını ayırıştırın, yani, $0 \neq f \in F'$ için $Tf \neq 0$ olacak şekilde bir $T \in J$ olsun. $g, s \in F'$ için $f = g - s$ alalım. $f \neq 0$ olduğundan $g \neq s$ yani, $g - s \neq 0$ olur.

$$Tf = T(g - s) \neq 0$$

$$T(g) - T(s) \neq 0$$

$$T(g) \neq T(s)$$

Sonuç olarak α bire bir homomorfizmadır.

Yardımcı Teorem 3.33: Eğer $0 < \Lambda \leq f^-$ olacak şekilde $0 \leq f \in F'$ ve $0 \leq \Lambda \in L_n^{A'}(J, E')$ var ise o zaman $0 < g^- \leq \Lambda$ olacak şekilde $0 \leq g \in F'$ vardır.

İspat: $0 < \Lambda \leq f^-$ için $\Lambda_0 = (\Lambda - \varepsilon f^-)^+ > 0$ olacak şekilde $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ mevcuttur. $\Lambda_0 > 0$ ise taşıyıcı $C_{\Lambda_0} \neq \{0\}$ ve Λ_0 sıralı süreklidir. $0 < T_0 \in C_{\Lambda_0}$ alalım. $0 < \Lambda_0 \leq \Lambda \leq f^-$ olduğundan

$$T_0 f = f^-(T_0) \geq \Lambda_0(T_0) > 0$$

olur. $C_{T_0} \oplus N_{T_0}$ ideali F' içinde sıralı yoğundur. $T_0 \in J$ olduğundan T_0 sıralı süreklidir. $T_0 f > 0$ ifadesinden $0 < f_0 \leq f$ olacak şekilde bir $f_0 \in C_{T_0}$ mevcuttur. J Dedekind tam olduğundan, $J = C_{\Lambda_0} \oplus N_{\Lambda_0}$ 'dır. Herhangi bir $0 \leq T \in J$ alalım. $0 \leq T_1 \in C_{\Lambda_0}$ ve $0 \leq T_2 \in N_{\Lambda_0}$ için $T = T_1 + T_2$ yazabiliriz. $L_n^{A'}(J, E')$ içinde

$$(\Lambda - \varepsilon f^-)^- \perp (\Lambda - \varepsilon f^-)^+ = \Lambda_0$$

oldüğundan ve Önerme 3.17'den

$$C_{\Lambda_0} \subseteq N_{(\Lambda - \varepsilon f^-)^-}$$

olur.

$$(\Lambda - \varepsilon f^-)(T_1) = (\Lambda - \varepsilon f^-)^+(T_1) \geq 0$$

yani, $\varepsilon f^{\sim}(T_1) \leq \Lambda(T_1)$ 'dir. $0 \leq T_0 \in C_{\Lambda_0}$ ve $0 \leq T_2 \in N_{\Lambda_0}$ olduğundan $J \subseteq L_n^{A'}(F', E')$ içinde $T_2 \wedge T_0 = 0$ olur. Önerme 3.17'yi kullanırsak $C_{T_0} \subseteq N_{T_2}$ 'dir buradan $T_2 f_0 = 0$ ve böylece $T f_0 = T_1 f_0$ sağlanır.

$$\begin{aligned} \Lambda(T) &\geq \Lambda(T_1) \geq \varepsilon f^{\sim}(T_1) = \varepsilon T_1 f \\ &\geq \varepsilon T_1 f_0 = \varepsilon T f_0 = (\varepsilon f_0^{\sim})(T) \end{aligned}$$

olur. $g = \varepsilon f_0$ alırsak, tüm $0 \leq T \in J$ için

$$0 \leq g^{\sim}(T) \leq \Lambda(T)$$

yani, $L_n^{A'}(J, E')$ içinde $0 \leq g^{\sim} \leq \Lambda$ 'dir. Son olarak, $g(T_0) = \varepsilon T_0 f_0 > 0$ olduğundan $0 \leq g^{\sim} \leq \Lambda$ olur.

Teorem 3.34: E ve F bir A f-cebirinin üzerinde Banach f-modül olsun. F' Dedekind tam olmak üzere E' de A'' 'ne göre topolojik olarak zengin ve sıralı sürekli norma sahip olsun. J de $L_n^{A'}(F', E')$ içindeki sıralı sürekli norm ile kapalı bir ideal olsun ve F' 'nin noktalarını ayırıştırın.

- (i) $L_n^{A'}(J, E')$ içinde $\alpha(F')$ tarafından üretilen band $L_n^{A'}(J, E')$ 'ye eşittir.
- (ii) $\alpha(F')$, $L_n^{A'}(J, E')$ içinde bir idealdir.
- (iii) $\alpha(F') = L_n^{A'}(J, E')$ olması için gerek ve yeter koşul F' 'de $0 \leq f_{\beta} \uparrow$ şartını sağlayan tüm $T \in J$ için E' 'de mevcut olan $\sup_{\beta} T f_{\beta}$ 'ya karşılık $0 \leq f_{\beta} \uparrow f$ olacak şekilde bir $0 \leq f \in F'$ olmasıdır.

İspat:

- (i) $S \in L_n^{A'}(J, E')$ alalım. Tüm $f \in F'$ için $S \perp \alpha(f) = f^{\sim}$ olsun. Luxemburg (2002)'den $C_S \perp C_{f^{\sim}}$, yani, tüm $f \in F'$ için $C_S \subseteq N_{f^{\sim}}$ 'dir. Buradan, $0 \leq T \in C_S$ ise tüm $f \in F'$ için

$$T f = f^{\sim}(T) = 0$$

ve $T = 0$ olur. Böylece $C_s = 0$ ve $S = 0$ elde edilir.

(ii) F' sıralı sürekli norma sahip olduğundan Dedekind tamdır. Bazı $0 \leq f \in F'$ için $L_n^{A'}(J, E')$ içinde $0 \leq S \leq \alpha(f)$ olduğunu varsayalım.

$$g = \sup \{ 0 \leq h \in F' : 0 \leq \alpha(h) \leq S \} \quad (3.16)$$

şeklinde bir tanım yapalım. $0 \leq \alpha(h) \leq S \leq \alpha(f)$ eşitsizliğinden $0 \leq h \leq f$ sağlanır. Yardımcı Teorem 3.31'den α sıralı sürekli bir Riesz homomorfizmasıdır, buradan $0 \leq \alpha(g) \leq S$ 'dir. $\alpha(g) = S$ olduğunu kabul edelim. Gerçekten $\alpha(g) < S$ olsun. O zaman

$$0 < S - \alpha(g) \leq \alpha(f - g)$$

olur. Yardımcı Teorem 3.33'den $0 < \alpha(g_0) \leq S - \alpha(g)$ şartını sağlayan $0 < g_0 \in F'$ vardır. O zaman $0 < \alpha(g + g_0) \leq S$ 'dir. Denklem (3.16)'dan $g + g_0 \leq g$ olur ve bu bir çelişkidir. Sonuç olarak

$$S = \alpha(g) \in \alpha(F') \quad (3.17)$$

ve $\alpha(F') \subset L_n^{A'}(J, E')$ içinde bir idealdir.

(iii) $\alpha(F') = L_n^{A'}(J, E')$ ve tüm $0 \leq T \in J$ için F' 'de $0 \leq f_\tau \uparrow$ şartını sağlayan $\sup_\tau T f_\tau$ 'nin mevcut olduğunu kabul edelim. Her $0 \leq T \in J$ için

$$S(T) = \sup_\tau T f_\tau \quad (3.18)$$

tanımını yapalım. Buna göre $S: J^+ \rightarrow E'^+$ toplamsaldır ve bu yüzden S tek bir pozitif lineer $S: J \rightarrow E'$ operatörüne genişler (Zaanen, 1983). Denklem (3.18)'den $L_b(J, E')$ içinde bir $0 \leq f_\tau \uparrow S$ alırız. $f_\tau^- \in L_n^{A'}(J, E')$ ve $L_n^{A'}(J, E') \subset L_b(J, E')$ içinde bir band olduğu için $0 \leq S \in L_n^{A'}(J, E')$ sağlanır. Varsayımımızdan $S = f^- = \alpha(f)$ şartını sağlayan $0 \leq f \in F'$ mevcuttur. α bir Riesz izomorfizması olduğu için $\alpha(f_\tau) \uparrow \alpha(f)$ ise F' 'de $f_\tau \uparrow f$ sağlanır.

Tersine, hipotezimizden F' Dedekind tam olduğundan ve (ii)'den $\alpha(F') \in L_n^{A''}(J, E')$ içinde bir idealdir. $0 \leq S \in L_n^{A''}(J, E')$ alalım. (i)'den $L_n^{A''}(J, E')$ içinde $0 \leq f_\tau^- \uparrow S$ şartını sağlayan F' 'de $0 \leq f_\tau^- \uparrow$ mevcuttur. Her $0 \leq T \in J$ için $0 \leq Tf_\tau^- = f_\tau^- \uparrow S(T)$ ve böylece tüm $0 \leq T \in J$ için $\sup_\tau Tf_\tau^- \in F'$ mevcuttur. Varsayımımızdan, $f_\tau^- \uparrow f$ şartını sağlayan $0 \leq f \in F'$ vardır. Böylece, $L_n^{A''}(J, E')$ içinde $0 \leq f_\tau^- \uparrow f^-$ 'dir. Buradan

$$S = f^- = \alpha(f) \quad (3.19)$$

ve

$$L_n^{A''}(J, E') = \alpha(F') \quad (3.20)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 3.35: E ve F , A f -cebiri üzerinde Banach f -modül ve $F' \in A''$ 'ne göre topolojik olarak zengin olsun. O zaman tüm $a \in A''$ ve $T \in L_r(F', E')$ için

$$(a \cdot T)f = a \cdot Tf$$

tanımıyla $L_r(F', E') \in A''$ üzerinde bir Banach f -modüldür.

İspat: E ve F bir A f -cebiri üzerinde Banach f -modül olduğundan Teorem 3.25'e göre E' ve F' , A'' f -cebiri üzerinde Banach f -modül olurlar. $a, b \in A''$, $T, S \in L_r(F', E')$ ve $f \in F'$ olsun.

$$\text{i. } a \cdot (b \cdot T)(f) = a \cdot (b \cdot Tf)$$

$$= ab \cdot Tf$$

Her $f \in F'$ için eşitlik doğru olduğundan,

$$a \cdot (b \cdot T) = (ab) \cdot T$$

elde edilir.

ii. $0 \leq a \in A''$ ve $0 \leq T \in L_r(F', E')$ olsun ve $0 \leq f \in F'$ alalım. T pozitif bir operatör olduğundan $0 \leq Tf \in E'$ olur. E' ve F' , A'' üzerinde Banach f -modül olduğundan $a \cdot Tf \geq 0$ olur ve $(a \cdot T)f = a \cdot Tf$ tanımı dikkate alınırsa buradan

$$a \cdot T \geq 0$$

elde edilir.

iii. $T, S \in L_r(F', E')$ için $T \perp S$ olsun. O zaman her $f \in F'$ için

$$|T|(f) \wedge |S|(f) = 0$$

$$|Tf| \wedge |Sf| = 0 \quad (1)$$

olur.

$$0 \leq (|a \cdot T| \wedge |S|)(f) = |a \cdot T|(f) \wedge |S|(f)$$

$$= |a \cdot T(f)| \wedge |S(f)|$$

$$= |a \cdot Tf| \wedge |Sf|$$

$$= |a| \cdot |Tf| \wedge |Sf|$$

E' A'' üzerinde Banach f -modül, $Tf, Sf \in E'$ olduğundan ve (1) eşitliğinden

$$|a| \cdot |Tf| \wedge |Sf| = 0$$

elde edilir. Her $f \in F'$ için doğru olduğundan

$$|a| \cdot |T| \wedge |S| = |a \cdot T| \wedge |S| = 0$$

ve buradan da

$$a \cdot T \perp S$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sıralı sürekli norma göre kapalı bir $J \subseteq L_r(F', E')$ idealini alalım. J A'' üzerinde bir Banach f -modüldür. $a \in A''$ ve $f \in F'$ için

$$a \otimes f : J \rightarrow E' \quad (3.21)$$

tasvirini tüm $T \in J$ için

$$(a \otimes f)(T) = a \cdot Tf$$

şeklinde tanımlayalım. $a \otimes f \in L_n^{\Lambda'}(J, E')$ olduğu açıktır.

$$\psi : A'' \times F' \rightarrow L_n^{\Lambda'}(J, E') \quad (3.22)$$

tasvirini

$$\psi(a, f) = a \otimes f \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlayalım.

Yardımcı Teorem 3.36: ψ bir Riesz bimorfizmasıdır, yani, ψ bilineerdir ve tüm $a \in A''$ ve $f \in F'$ için $|\psi(a, f)| = \psi(|a|, |f|)$ 'dir.

İspat: ψ 'nin bilineer olması açıktır. $a \in A''$, $f \in F'$ ve $0 \leq T \in J$ alalım. Zaanen (1983)'den

$$\begin{aligned} |a \otimes f|(T) &= \sup \{ |(a \otimes f)(S)| : S \in J, |S| \leq T \} \\ &= \sup \{ |a \cdot (Sf)| : S \in J, |S| \leq T \} \\ &= \sup \{ |a| \cdot |Sf| : S \in J, |S| \leq T \} \\ &= \sup \{ m(|a|) \cdot (|Sf|) : S \in J, |S| \leq T \}, \quad (m : A'' \rightarrow \text{Orth}(E'), m(a)x' = a \cdot x') \\ &= m(|a|) \sup \{ |Sf| : S \in J, |S| \leq T \} \\ &= m(|a|) (T|f|) \\ &= |a| \cdot (T|f|) \\ &= (|a| \otimes |f|) \cdot (T) \end{aligned} \quad (3.24)$$

bulunur. Böylece $L_r^{\Lambda'}(J, E')$ 'de $|a \otimes f| = |a| \otimes |f|$, yani,

$$|\psi(a, f)| = \psi(|a|, |f|) \quad (3.25)$$

elde edilir.

$a \otimes f$ şeklindeki operatörler tarafından üretilen $L_n^{A'}(J, E')$ 'nin lineer alt uzayını $A'' \otimes_J F'$ şeklinde gösterelim, yani,

$$A'' \otimes_J F' = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i : a_i \in A'', f_i \in F', i = 1, 2, \dots, n \ n \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.26)$$

olsun.

$L_n^{A'}(J, E')$ içindeki $A'' \otimes_J F'$ tarafından üretilen ideali de $A'' \otimes_J^- F'$ şeklinde gösterelim. Tüm $f \in F'$ için $\chi_0 f = 1 \otimes f$ şeklinde tanımlanan $\chi_0 : F' \rightarrow L_n^{A'}(J, E')$ tasvirini ele alalım. Yardımcı Teorem 3.36'dan χ_0 bir Riesz homomorfizmasıdır ve χ_0 tasviri F' 'den $A'' \otimes_J^- F'$ 'ye gider. Böylece $\chi_0 : F' \rightarrow A'' \otimes_J^- F'$ olur.

Yardımcı Teorem 3.37: $A'' \otimes_J^- F' = L_n^{A'}(J, E')$ içindeki $\chi_0(F')$ tarafından üretilen ideale eşittir, yani,

$$A'' \otimes_J^- F' = \left\{ \theta \in L_n^{A'}(J, E') : |\theta| \leq 1 \otimes u, \text{ bazı } 0 \leq u \in F' \text{ için} \right\} \quad (3.27)$$

olur.

İspat: $\theta \in A'' \otimes_J^- F'$ alalım.

$$|\theta| \leq \left| \sum_{i=1}^n a_i \otimes f_i \right|$$

şartını sağlayan $a_1, a_2, \dots, a_n \in A''$ ve $f_1, f_2, \dots, f_n \in F'$ vardır.

$$u = \sum_{i=1}^n |f_i|$$

ve

$$a = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

tanımlarını yapalım. $0 \leq a \in A''$ olduğu için $0 \leq k \in \mathbb{R}$ reel sayısı vardır öyle ki $0 \leq a \leq k \cdot 1$ (1 birim eleman)'dir. Buradan,

$$|\theta| \leq \sum_{i=1}^n |a_i \otimes f_i| = \sum_{i=1}^n |a_i| \times |f_i| \leq a \otimes u$$

$$\leq (k1) \otimes u = 1 \otimes (ku) = \chi_0(ku) \quad (3.28)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Banach f -modülleri üzerinde Maharam operatörleri incelendi.

Ayrıca, E bir Banach latis ve A Archimedean f -cebiri olmak üzere E 'nin A üzerinde Banach f -modül olmasından yararlanıldı. W.A.J. Luxemburg ve B. De Pagter'in Riesz uzaylarındaki bazı çalışmaları Banach f -modüllerinde ve dual uzayda doğru olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A., Arenson, E.L. ve Kitover, A.K., (1992), Banach $C(K)$ -modules and Operators Preserving Disjointness, Pitman Res. Notes in Math. Series, 277, Wiley, Essex.
- Akilov, G.P., Kolesnikov, E.V. ve Kusraev, A.G., (1988), "Order-continuous extention of a positive operator", Siberian Math. J., 29: 707-716.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1985), Positive Operators, Academic Press, Orlando, London.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (2003), Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics, American Mathematical Society.
- Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., (1978), Locally Solid Riesz Spaces, Academic Press, New York.
- Bernau, S.J. ve Huijmans, C.B., (1995), "The Order Bidual of Almost f -algebras and d -algebras", Transactions of the American Mathematical Society, 11(347): 4259-4275.
- De Pagter, B., (1983), "The components of a positive operator", Indag. Math., 45: 229-241.
- De Pagter, B., (1986), "A note on integral operators", Acta Sci. Math. Szeged, 50: 225-230.
- Giles, J. R., (2000), Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, Cambridge University Press, Cambridge.
- Giles, J. R., (1987), Introduction to the Analysis of Metric Spaces, Cambridge University Press, Cambridge.
- Gök, Ö., (2002), "On Maharam Extensions of Positive Operators on Banach f -modules", International Journal of Applied Mathematics, 11(3): 309-321.
- Gök, Ö., (2010), Fonksiyonel Analize Giriş, 3. Baskı, YTÜ Yayınları.
- Luxemburg, W.A.J. ve De Pagter, B., (2002), "Maharam extensions of positive operators and f -module", Positivity, 6: 147-190.
- Luxemburg, W.A.J., (1989), "The work of Dorothy Maharam on kernel representations of linear operators, in: Measure and measurable dynamics (Rochester, NY, 1987)", Am. Math. Soc., 177-183.
- Luxemburg, W.A.J. ve Zaanen, A. C., (1971), Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.
- Luxemburg, W.A.J. ve Schep, A. R., (1978), "A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual.", Indag. Math., 40: 357-375.
- Maharam, D., (1984), "On positive operators. In Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982)" Am. Math. Soc., 263-277.
- Maharam, D., (1955), "On kernel representation of linear operators.", Trans. Am. Math. Soc., 79: 229-255.
- Maharam, D., (1953), "The representation of abstract integrals.", Trans. Am. Math. Soc., 75: 154-184.
- Meyer-Nieberg, P., (1991), Banach Lattices, Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Rynne, B. P. ve Youngson, M. A., (2006), Linear Functional Analysis, Springer-Verlag, London.
- Schaefer, H.H., (1974), Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Zaanen, A.C., (1983), Riesz Spaces II, North-Holland, Amsterdam, London.

Zaanen, A.C., (1997), Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 23.12.1979

Doğum yeri İstanbul

Lise 1993–1997 Fatih Yedikule Lisesi

Lisans 1997–2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik BölümüYüksek Lisans 2003–2005 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnabilimdalıDoktora 2005-2011 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilimdalı**Çalıştığı Kurum**

2001-2002 MEB Cebeci Sultançiftliği İlköğretim Okulu

2002-Devam ediyor YTÜ Matematik Araştırma Görevlisi