

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ZAMAN SKALASINDA ÜÇÜNCÜ MERTEBE
LİNEER OLMAYAN P-LAPLACIAN
SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Nermin YOLCU

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.03.01

Sunuş Tarihi : 03/06/2011

Bornova-İZMİR
20011

Nermin YOLCU tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “**Zaman Skalasında Üçüncü Mertebe Lineer Olmayan p-Laplacian Sınır Değer Problemleri**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 03/06/2011 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı : Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

Raportör Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA ÜÇÜNCÜ MERTEBE LİNEER OLMAYAN P-LAPLACIAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

YOLCU, Nermin

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL
Haziran 2011, 64 sayfa

Bu tez, giriş bölümü hariç, esas olarak üç bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde zaman skalası ile ilgili temel kavramlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde zaman skalası üzerinde tanımlı üçüncü mertebe lineer olmayan p-Laplacian sınır değer problemi ele alınmıştır. İlk olarak problemin çözümünün yapısı incelenmiş ardından sabit nokta teoremleri yardımıyla pozitif çözümlerin varlığı ispatlanmıştır ve bir örnekle pekiştirilmiştir.

Dördüncü bölümde ise zaman skalasında üçüncü mertebe öz değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Son olarak reel sayılar üzerinde tanımlı bir örnek verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, aşık olmayan çözüm, sabit nokta teoremleri.

ABSTRACT**NONLINEAR THIRD ORDER P-LAPLACIAN
BOUNDARY VALUE PROBLEMS
ON TIME SCALES**

YOLCU, Nermin

MSc. in Mathematics.

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

June 2011, 64 pages

Except the introduction, this thesis contain in three main sections.

In the second section some basic rules and theorems of calculus have been given on time scales.

In the third section nonlinear third-order p -Laplacian boundary value problems have been examined on time scales. First of all the solution of the problem structure examined and then with the help of fixed point theorems proved the existence of positive solutions and reinforced with an example.

In the fourth section when the scale of existence and uniqueness of the third-order solution to the problem of self-worth were examined. Finally, an example is defined on real numbers.

Keywords: Time scales, nontrivial solution, fixed-point theorems.

TEŞEKKÜR

İki yıllık bir çalışmanın sonucu olan bu tezin hazırlanması sırasında bilimsel her türlü yardımı sağlayan, kısa zamanda bana çok şey öğreten, aklımdan geçen her şeyi rahatça paylaşabildiğim sevgili hocam Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL'a, ilk günden itibaren desteğini esirgemeyen bölüm başkanımız Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN'a, ne zaman bir sorum olsa yanıtı bırakmayan hocam Araş. Gör. Erbil ÇETİN'e ve son olarak maddi manevi her zaman yanımda olan canım anneme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	v
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	ix
SİMGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Türev ve İntegral.....	5
3. ÜÇÜNCÜ MERTEBE SINIR DEĞER PROBLEMİ.....	17
3.1 Temel Bilgiler	17
3.2 Pozitif Çözümün Varlığı.....	24
4. ÜÇÜNCÜ MERTEBE ÖZ DEĞER PROBLEMİ.....	39
4.1 Temel Bilgiler	39
4.2 Pozitif Çözümün Varlığı.....	42
4. SONUÇ	51
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ	64

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{R}$	Reel sayılar.
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar.
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar.
T	Zaman skalası.
T^k	Δ -türevlenebilirlik bölgesi.
T_k	∇ -türevlenebilirlik bölgesi.
σ	İleri sıçrama operatörü.
ρ	Geri sıçrama operatörü.
f^Δ	f fonksiyonunun Δ -türevi.
f^∇	f fonksiyonunun ∇ -türevi.
$\mathbb{C}_{\text{ld}}([a, b])$	$[a, b]$ aralığındaki sol yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi.
$\mathbb{C}_{\text{rd}}([a, b])$	$[a, b]$ aralığındaki sağ yoğun sürekli fonksiyonlar kümesi.
$L^1([a, b])$	$[a, b]$ aralığındaki integrallenebilir fonksiyonlar kümesi.

1. GİRİŞ

Zaman skalasının ilk olarak Hilger (1988) tarafından ortaya atılması ve Aulbach ve Hilger tarafından bilim dünyasına sunulmasının ardından ilk çalışmalar diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin ve kuantum denklemlerinin zaman skalasına taşınması olmuştur. Bu üç türde denklemin genelleştirilmesi *dinamik denklem* olarak adlandırılır. Diferansiyel denklem ve fark denkleminin dinamik denklem çatısı altında toplanması zaman skalasının *birleştirme*, ek olarak kuantum denklemlerinin de dinamik denklem olarak düşünülmesi ise zaman skalasının *genişletme* özelliğini ortaya koyar.

İki nokta, üç nokta ve m-nokta p-Laplacian sınır değer problemleri sürekli ve diskret halde bir çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Bunun yanı sıra son zamanlarda, herhangi bir zaman skalasında tanımlı olan ikinci mertebe ve üçüncü mertebe lineer olmayan sınır değer problemleri hızlı bir şekilde çalışılmaktadır. Fakat zaman skalasında p-Laplacian sınır değer problemleri üzerine çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Y. Guo, C. Yu, J. Wang (2009), sonsuz aralıkta ikinci mertebe m-nokta p-Laplacian sınır değer probleminin üç pozitif çözümünün varlığı üzerine koşulları incelemiştir. S. Liang, J. Zhang, Z. Wang (2009), sonlu aralıkta ikinci mertebe m-nokta p-Laplacian denklemleri genelleyen sınır değer problemlerini herhangi bir zaman skalasında ele alarak üç pozitif çözümün varlığını göstermiştir. Z. He (2005), zaman skalasında üçüncü mertebe üç nokta p-Laplacian problemin en az iki pozitif çözümünün olduğunu göstermişler. Bu ve benzeri incelenen makaleler ışığı altında yaptığımız bu tez çalışmasında, üçüncü mertebe m-nokta p-Laplacian sınır değer problemi ele alınmıştır.

Dört bölümden oluşan tezin ikinci bölümünde zaman skalasında analiz, tezin diğer bölümlerine yardımcı olacak şekilde tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde,

$$(\Phi_p(u^{\Delta\nabla}))^\nabla(t) + p(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T]_{T_{k^2} \cap T^k}$$

$$u^{\Delta\nabla}(\rho(0)) = 0, u^\Delta(T) = 0, u(\rho(0)) = B \left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u^\Delta(\xi_i) \right)$$

üçüncü mertebe m-nokta p-Laplacian sınır değer problemi ele alınarak, sabit nokta teoremleri yardımıyla bu problemin bir, en az iki ve üç pozitif çözüme sahip olduğu gösterilmiş ve bir örnekle pekiştirilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde,

$$\left(\Phi_p\left(u^{\Delta\nabla}(t)\right)\right)^\nabla + \lambda f\left(t, u(t), u^\Delta(t)\right) = 0 \quad t \in (0, T) \quad (4.1)$$

$$\gamma u(0) - \beta u^\Delta(0) = 0, u(T) = \sum_1^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (4.2)$$

üçüncü mertebe özdeğer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş ve bir örnek verilmiştir.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Stefan Hilger (1988) tarafından geliştirilen Zaman Skalası Analizi tanıtılmıştır. Bir zaman skalası, $\mathbb{R}$ 'nin boştan farklı ve kapalı keyfi bir alt kümesidir. T ile gösterilir.

$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, [0,1] \cup [2,4]$ birer zaman skalası örnekleridir

$\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, (0,1)$ birer zaman skalası değildir.

Zaman skalası üzerinde, Δ ve ∇ türev kavramları tanıtılarak bu türevlerle ilgili örnekler incelenmiştir. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ ve ∇ integralleri ve bunların özelliklerini yine bu bölümde inceleyeceğiz (Bohner and Peterson, 2001).

Tanım 2.1. T bir zaman skalası olsun.

$\forall t \in T, t < \max T$ için $\sigma: T \rightarrow T$ ileri sıçrama operatörü

$$\sigma(t) = \inf\{s: s \in T, s > t\}$$

olarak tanımlıdır.

$\forall t \in T, t > \min T$ için $\rho: T \rightarrow T$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) = \sup\{s: s \in T, s < t\}$$

olarak tanımlıdır. Kapalılıktan dolayı $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ noktaları T kümesine aittir.

$\min T < \infty$ ise $\rho(\min T) = \sup \emptyset = \inf T$ olduğundan $\rho(\min T) = \min T$. Benzer şekilde $\sigma(\max T) = \inf \emptyset = \sup T$ olduğundan $\sigma(\max T) = \max T$ ile tanımlanır.

Tanım 2.2. T bir zaman skalası olsun.

- i) Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına “sağ yayılmış”(right scattered) nokta denir.
- ii) Eğer $\sigma(t) = t$ ise t noktasına “sağ yoğun” (right dense) nokta denir.
- iii) Eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına “sol yayılmış” (left scattered) nokta denir.
- iv) Eğer $\rho(t) = t$ ise t noktasına “sol yoğun” (left dense) nokta denir.
- v) Hem sağ yayılmış hem de sol yayılmış noktalar “ayrık” (isolated) olarak adlandırılırlar.
- vi) Hem sağ yoğun hem de sol yoğun olan noktalar “yoğun” (dense) olarak adlandırılırlar.

Tanım 2.3. Eğer $\max T < \infty$ ve $\max T$ sol yayılmış ise $T^k = T - \{\max T\}$ ile tanımlanır, aksi durumda $T^k = T$ olur.

Eğer $\min T > -\infty$ ve $\min T$ sağ yayılmış ise $T_k = T - \{\min T\}$ ile tanımlanır, aksi durumda $T_k = T$ olur.

Son olarak $T^* = T^k \cap T_k$ ile tanımlanır.

Örnek 2.1. $T = [0,1] \cup \{2,4\} \cup [6,7] \cup 8$ ise, o zaman $T^k = [0,1] \cup \{2,4\} \cup [6,7]$ ve $T_k = T$ dir.

Örnek 2.2. $T = [0,1] \cup \{2,4\} \cup [6,7]$ olsun.

$t \in (0,1) \Rightarrow \sigma(t) = t = \rho(t)$ olup, bu aralıktaki noktalar yoğundur.

$t = 1 \Rightarrow \sigma(t) = 2, \rho(t) = 1$ dir.

Örnek 2.3. T zaman skalasını

$$T = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

olarak alalım. Bu durumda

- $t = 0$ için $\sigma(0) = 0$ sağ yoğun, $\rho(0) = 0$ sol yoğun noktadır,
- $t = 1$ için $\sigma(1) = 1$ sağ yoğun, $\rho(1) = \frac{1}{2}$ sol yayılmış noktadır,
- $t \in \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} / \{1\}$ için $\sigma(t) = \frac{t}{1-t}, \rho(t) = \frac{t}{1+t}$ olur.

Zaman skalasında süreklilik ve türevi tanımlayabilmek için önce komşuluk kavramını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 2.4. $U \subset T$ olsun. Her $\delta > 0$ için,

$$U_\delta(t) = \{s \in T : |s - t| < \delta\}$$

kümesine t 'nin δ komşuluğu denir. t 'nin sol ve sağ komşulukları sırasıyla

$$U_\delta^-(t) = \{s \in T : t - \delta < s < t\}, \quad U_\delta^+(t) = \{s \in T : t < s < t + \delta\}$$

ile tanımlanır.

Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) \neq \emptyset$ ise, o halde t 'ye U için soldan limit noktası ve $U_\delta^+(t) \neq \emptyset$ ise, o halde t 'ye U için sağdan limit noktası denir.

Eğer bir $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) = \emptyset$ ise t' 'ye U için soldan ayrılmış nokta ve $U_\delta^+(t) = \emptyset$ ise t' 'ye U için sağdan ayrılmış nokta denir.

Tanım 2.5. $t_0 \in T$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U_\delta(t_0)$ için,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U_\delta(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

2.1. Türev ve İntegral

Zaman skalasında türev tanımını vermeden önce T^k ve T_k diferansiyellenebilirlik kavramlarını açıklayalım. Eğer $\max T < \infty$ ve $\max T$ sol yayılmış ise $T^k = T - \{\max T\}$ ile tanımlanır, aksi halde $T^k = T$ olur. Benzer şekilde eğer $\min T < \infty$ ve $\min T$ sağ yayılmış ise $T_k = T - \{\min T\}$ ile tanımlanır, aksi halde $T_k = T$ olur.

Tanım 2.1.1. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in T^k$ noktası verilsin. Eğer sonlu bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna t noktasında Δ -türevlenebilir denir. Bu eşitsizlikteki a reel sayısına da f fonksiyonunun t noktasındaki Δ türevi denir ve $a = f^\Delta(t)$ 'dir.

Başka bir ifadeyle,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

yazılabilir.

Tanım 2.1.2. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in T_k$ noktası verilsin. Eğer sonlu bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$|f(\rho(t)) - f(s) - a(\rho(t) - s)| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|, \quad \forall s \in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna t noktasında ∇ -türevlenebilir denir. Bu eşitsizlikteki a reel sayısına da f fonksiyonunun t noktasındaki ∇ türevi denir ve $a = f^\nabla(t)$ 'dir.

Başka bir ifadeyle,

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

yazılabilir.

Örnek 2.1.1. T herhangi bir zaman skalası olsun. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall t \in T^k$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

dir.

i) $T = \mathbb{R}$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

ii) $T = \mathbb{Z}$ olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+1) - f(s)}{(t+1) - s} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olur.

iii) $T = h\mathbb{Z}$ olsun.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+h) - f(s)}{(t+h) - s} \\ &= \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \Delta^h f(t) \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.1.2. T keyfi bir zaman skalası olmak üzere, $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ $f(t) = t^3$ olarak seçelim.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t)^3 - s^3}{\sigma(t) - s} = \sigma(t)^2 + t\sigma(t) + t^2$$

olur. Özel olarak,

i) $T = \mathbb{R}$ ise,

$$f^\Delta(t) = t^2 + t^2 + t^2 = 3t^2 = f'(t)'dir.$$

ii) $T = \mathbb{Z}$ ise,

$$f^\Delta(t) = (t+1)^2 + t(t+1) + t^2 = 3t^2 + 3t + 1 = \Delta f(t)'dir.$$

iii) $T = h\mathbb{Z}$ ise,

$$f^\Delta(t) = (t+h)^2 + t(t+h) + t^2 = 3t^2 + 3th + h^2 = \Delta^h f(t)'dir.$$

Önerme 2.1.2. (Agarwal and Bohner, 1999) Eğer $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in T^k$ noktasında türevlenebilir ise $f^\Delta(t)$ değeri tektir.

Önerme 2.1.3. (Agarwal and Bohner, 1999) Eğer $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in T_k$ noktasında türevlenebilir ise $f^\nabla(t)$ değeri tektir.

Aşağıda ispatsız ifade edeceğimiz teoremler (Agarwal and Bohner, 1999; Bohner and Peterson, 2001; Guseinov, 2000-2001) referanslarında bulunabilir.

Teorem 2.1.1. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in T^k$ olsun.

i) f fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilir ise, o noktada süreklidir.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış ise, o noktada Δ -türevlenebilir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

olur.

iii) t sağ yoğun ise, o zaman f fonksiyonun t' 'de Δ -türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

iv) Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilir ise, o zaman

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)(\sigma(t) - t)$$

eşitliği doğru olur.

Teorem 2.1.2. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in T_k$ olsun.

i) f fonksiyonu t noktasında ∇ -türevlenebilir ise, o noktada süreklidir.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sol yayılmış ise, o noktada ∇ -türevlenebilir ve

$$f^\nabla(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

olur.

iii) t sol yoğun ise, o zaman f fonksiyonun t' 'de ∇ -türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

iv) Eğer f fonksiyonun t noktasında ∇ -türevlenebilir ise, o zaman

$$f(\rho(t)) = f(t) + f^{\nabla}(t)(\rho(t) - t)$$

eşitliği doğru olur.

Örnek 2.1.3. Aşağıda verilen her $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ fonksiyonu ve $t \in T = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \{0\}$ için $f^{\Delta}(t)$ değerini bulunuz.

Çözüm $T = \left\{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}_0\right\} \cup \{0\}$ 'dir. Örnek 2.3'den $\sigma(t) = \frac{t}{1-t}$ olduğunu bulmuştuk. O halde

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t)^2 - s^2}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \sigma(t) + s \\ &= \sigma(t) + t \\ &= \frac{t}{1-t} + t \\ \Rightarrow f^{\Delta}(t) &= \frac{2t - t^2}{1-t} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.1.3. (Agarwal and Bohner, 1999) $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in T^k$ noktasında Δ -türevlenebilir olsunlar.

i) $f + g$ toplam fonksiyonu da $t \in T^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

ii) Her k sabiti için kf fonksiyonu da $t \in T^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(kf)^\Delta(t) = kf^\Delta(t).$$

iii) $f \cdot g$ fonksiyonu da $t \in T^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

iv) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise, o halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in T^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Teorem 2.1.4. (Agarwal and Bohner, 1999) $f, g: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in T_k$ noktasında ∇ -türevlenebilir olsunlar.

i) $f + g$ toplam fonksiyonu da $t \in T_k$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t).$$

ii) Her k sabiti için kf fonksiyonu da $t \in T_k$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$(kf)^\nabla(t) = kf^\nabla(t).$$

iii) $f \cdot g$ fonksiyonu da $t \in T_k$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$(fg)^\nabla(t) = f^\nabla(t)g(t) + f(\rho(t))g^\nabla(t) = f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g(\rho(t)).$$

iv) $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise, o halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in T_k$ noktasında ∇ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla(t) = \frac{f^\nabla(t)g(t) - f(t)g^\nabla(t)}{g(t)g(\rho(t))}.$$

Tanım 2.1.3. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için; eğer f^Δ , $T^k \cap T_k$ üzerinde $(f^\Delta)^\nabla: T^k \cap T_k \rightarrow \mathbb{R}$ ile ∇ -türevlenebilir ise f 'nin ikinci mertebeden türevi vardır denir.

Benzer şekilde eğer $f^{\Delta\nabla}$, $T^k \cap T_{k_2}$ üzerinde $(f^{\Delta\nabla})^\nabla: T^k \cap T_{k_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ile ∇ -türevlenebilir ise f 'nin üçüncü mertebeden türevi vardır denir.

Önerme 2.1.4. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b] \subset T'$ de monoton artan ise

- i) $\forall t \in [a, b] \cap T^k$ için $f^\Delta(t) \geq 0$,
- ii) $\forall t \in [a, b] \cap T_k$ için $f^\nabla(t) \geq 0$ 'dır.

İspat

i) Durum 1: Eğer t sağ yayılmış ise $\sigma(t) > t$ olduğundan

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

bulunur. f fonksiyonu monoton artan olduğundan $f(\sigma(t)) - f(t) \geq 0$ 'dır. O halde

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \geq 0$$

elde edilir. Ancak son nokta için bir şey söyleyemeyiz.

Durum 2: Eğer t sağ yoğun ise $\sigma(t) = t$ olduğundan Δ -türevi

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde f fonksiyonu monoton artan olduğundan $f(t) - f(s) \leq 0$ ve $t - s < 0$ olur. O halde $f^\Delta(t) \geq 0$ 'dır.

ii) Durum 1: Eğer t sol yayılmış ise $\rho(t) < t$ olduğundan

$$f^\nabla(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t}$$

bulunur. f fonksiyonu monoton artan olduğundan $f(\rho(t)) - f(t) \leq 0$ 'dır. O halde

$$f^\nabla(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t} \geq 0$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer t sol yoğun ise $\rho(t) = t$ olduğundan ∇ -türevi

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklinde yazabiliriz. Benzer şekilde f fonksiyonu monoton artan olduğundan $f(t) - f(s) \geq 0$ ve $t - s > 0$ olur. O halde $f^\nabla(t) \geq 0$ 'dır.

Önerme 2.1.5. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $[a, b] \subset T'$ de monoton azalan ise

i) $\forall t \in [a, b] \cap T^k$ için $f^\Delta(t) \leq 0$,

ii) $\forall t \in [a, b] \cap T_k$ için $f^\nabla(t) \leq 0$ 'dır.

İspat Önerme 2.1.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Zaman Skalası Analizinde çok önemli olan iki teoremin ifadesini verelim.

Teorem 2.1.5. Rolle Teoremi

$f(t)$, $[a, b] \subset T'$ de sürekli ve $[a, b] \cap T^{**}$ da Δ ve ∇ -türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f(a) = f(b) = 0$ ise, o zaman $f^\Delta(t_0)f^\nabla(t_0) \leq 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in [a, b] \cap T^*$ noktası vardır.

Teorem 2.1.6. Ortalama Değer Teoremi

Eğer $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b] \subset T'$ de sürekli ve $[a, b] \cap T^{k'}$ de Δ -türevlenebilir ise $\exists \xi, \tau \in [a, b)$ öyle ki

$$f^\Delta(\xi) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\tau)$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 2.1.7. Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları $[a, b] \subset T'$ de sürekli ve $[a, b] \cap T^{**}$ da Δ ve ∇ -türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca; her $t_0 \in [a, b] \cap T^*$ için $g^\Delta(t_0)g^\nabla(t_0) > 0$ şartı sağlansın. Bu durumda;

$$\frac{f^\Delta(t_0)}{g^\Delta(t_0)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \leq \frac{f^\nabla(t_0)}{g^\nabla(t_0)}$$

ya da

$$\frac{f^\nabla(t_0)}{g^\nabla(t_0)} \leq \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \leq \frac{f^\Delta(t_0)}{g^\Delta(t_0)}$$

olacak şekilde $t_0 \in [a, b] \cap T^*$ vardır.

Tanım 2.1.4. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu T^k kümesi üzerinde Δ -türevlenebilir ise ve her $t \in T^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun Δ -anti türevi ya da Δ -ilkeli denir. Benzer şekilde, $F: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu kümesi T_k üzerinde ∇ -türevlenebilir ise ve her $t \in T_k$ için $F^\nabla(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna $f(t)$ fonksiyonunun ∇ -anti türevi ya da ∇ -ilkeli denir.

Tanım 2.1.5. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(t)$ fonksiyonunun Δ -anti türevi var ise, o zaman a ve b noktaları T zaman skalasının $a < b$ şartını sağlayan noktaları olmak üzere;

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

ile $f(t)$ fonksiyonunun a 'dan b 'ye Δ -integrali tanımlanır. Benzer şekilde eğer $f(t)$ fonksiyonunun ∇ -anti türevi var ise, o zaman a ve b noktaları T zaman skalasının $a < b$ şartını sağlayan noktaları olmak üzere; $f(t)$ fonksiyonunun a 'dan b 'ye ∇ -integrali

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a)$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.1.8. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları Δ -integrallenebilir fonksiyonlar ve $a, b, c \in T$ olsunlar. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$
- ii) Her k sabiti için $\int_a^b kf(t) \Delta t = k \int_a^b f(t) \Delta t$
- iii) $\int_a^a f(t) \Delta t = 0$
- iv) $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$
- v) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$
- vi) $\int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(t) \Delta t$
- vii) $\int_a^b f(t)g^\Delta(t) \Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t)) \Delta t$
- viii) $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \Delta t \leq (\sup_{a \leq t \leq \rho(b)} |f(t)|)(b - a)$
- ix) $\int_t^{\sigma(t)} f(s) \Delta s = [\sigma(t) - t]f(t).$

Teorem 2.1.9. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ∇ -integrallenebilir fonksiyonlar ve $a, b, c \in T$ olsunlar. O halde aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) $\int_a^b [f(t) + g(t)] \nabla t = \int_a^b f(t) \nabla t + \int_a^b g(t) \nabla t$
- ii) Her k sabiti için $\int_a^b kf(t) \nabla t = k \int_a^b f(t) \nabla t$

$$\text{iii)} \int_a^a f(t) \nabla t = 0$$

$$\text{iv)} \int_a^b f(t) \nabla t = - \int_b^a f(t) \nabla t$$

$$\text{v)} \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^c f(t) \nabla t + \int_c^b f(t) \nabla t$$

$$\text{vi)} \int_a^b f(\rho(t)) g^\nabla(t) \nabla t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t) g(t) \nabla t$$

$$\text{vii)} \int_a^b f(t) g^\nabla(t) \nabla t = f(t) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t) g(\rho(t)) \nabla t$$

$$\text{viii)} \left| \int_a^b f(t) \nabla t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \nabla t \leq (\sup_{\rho(a) \leq t \leq b} |f(t)|)(b - a)$$

$$\text{ix)} \int_t^{\rho(t)} f(s) \nabla s = [\rho(t) - t] f(t).$$

Önerme 2.1.6. $\forall t \in T$ için $f(t) \geq 0$ ise $a < b$ ve $a, b \in T$ için $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ eşitsizliği doğrudur. Benzer şekilde $\int_a^b f(t) \nabla t \geq 0$ 'dır.

Teorem 2.1.10. $a, b \in T$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\text{i)} \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t) \Delta t + [b - \rho(b)] f(\rho(b))$$

$$\text{ii)} \int_a^b f(t) \Delta t = [\sigma(a) - a] f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t) \Delta t$$

$$\text{iii)} \int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t) \nabla t + [b - \rho(b)] f(b)$$

$$\text{iv)} \int_a^b f(t) \nabla t = [\sigma(a) - a] f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t) \nabla t.$$

Teorem 2.1.11. $a, b \in T$ ve $a < b$ olacak şekilde iki nokta ve $f(t), g(t)$ fonksiyonları T' 'de Δ -integrellenebiliyor olsunlar. Her $t \in [a, b]$ için $f(t) \leq g(t)$ ise, o halde

$$\int_a^b f(t) \Delta t \leq \int_a^b g(t) \Delta t$$

eşitsizliği doğrudur. Benzer şekilde $f(t), g(t)$ fonksiyonları T' de ∇ -integrallenebiliyor olsunlar. Her $t \in [a, b]$ için $f(t) \leq g(t)$ ise, o halde

$$\int_a^b f(t) \nabla t \leq \int_a^b g(t) \nabla t$$

eşitsizliği doğrudur.

Teorem 2.1.12. Eğer f, f^Δ ve f^∇ fonksiyonları iki değişkenli fonksiyonlar olarak sürekli ise, o halde aşağıdaki formüller doğrudur.

- i) $\left(\int_a^t f(t, s) \Delta s \right)^\Delta = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \Delta s$
- ii) $\left(\int_a^t f(t, s) \Delta s \right)^\nabla = f(\rho(t), \rho(t)) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \Delta s$
- iii) $\left(\int_a^t f(t, s) \nabla s \right)^\Delta = f(\sigma(t), \sigma(t)) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \nabla s$
- iv) $\left(\int_a^t f(t, s) \nabla s \right)^\nabla = f(\rho(t), t) + \int_a^t f^\nabla(t, s) \nabla s.$

Sonuç 2.1.1. $\Phi(t)$ fonksiyonu T üzerinde sürekli ise aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) $\left(\int_a^t \Phi(s) \Delta s \right)^\Delta = \Phi(t)$
- ii) $\left(\int_a^t \Phi(s) \Delta s \right)^\nabla = \Phi(\rho(t))$
- iii) $\left(\int_a^t \Phi(s) \nabla s \right)^\Delta = \Phi(\sigma(t))$
- iv) $\left(\int_a^t \Phi(s) \nabla s \right)^\nabla = \Phi(t).$

3. ÜÇÜNCÜ MERTEBE SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde

$$(\Phi_p(u^{\Delta\nabla}))^\nabla(t) + p(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0, T]_{T_{k^2} \cap T^k} \quad (3.1)$$

$$u^{\Delta\nabla}(\rho(0)) = 0, u^\Delta(T) = 0, u(\rho(0)) = B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i u^\Delta(\xi_i) \right) \quad (3.2)$$

üçüncü mertebeden m-nokta lineer olmayan p-Laplacian sınır değer problemi ele alınarak (MSDP), öncelikle bu problemin çözümünün şekli, Krasnosel'skii Sabit Nokta Teoremi (1964) yardımıyla problemin tek çözüme sahip olduğu, Avery-Henderson Sabit Nokta Teoremi (2001) yardımıyla problemin iki çözüme sahip olduğu, son olarak Avery-Peterson Sabit Nokta Teoremi (Liang et al 2009) yardımıyla problemin üç çözüme sahip olduğu incelenmiştir.

3.1. Temel Bilgiler

Çözümün formunu bulmak için,

$$(\Phi_p(u^{\Delta\nabla}))^\nabla(t) + h(t) = 0, \quad t \in [0, T]_{T_{k^2} \cap T^k} \quad (3.1.1)$$

$$u^{\Delta\nabla}(\rho(0)) = 0, u^\Delta(T) = 0,$$

$$u(\rho(0)) = B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i u^\Delta(\xi_i) \right) \quad (3.1.2)$$

lineer sınır değer problemini ele alacağız. Burada $\Phi_p(s)$ operatörü, $p > 1$ için $\Phi_p(s) = |s|^{p-2}s$ eşitliğini sağlar ve bu operatöre p-Laplacian operatör denir. $\Phi_p(s)$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\text{i) } \Phi_p(xy) = \Phi_p(x) \Phi_p(y)$$

$$\text{ii) } \Phi_p(x + y) \leq \Phi_p(x) + \Phi_p(y)$$

$$\text{iii) } \Phi_p^{-1}(x) = \Phi_q(x), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Tanım 3.1.1. T bir zaman skalası ve $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sol yoğun noktalarda sürekli ve f 'nin sağ yoğun noktalarda limiti var ise f fonksiyonuna sol-yoğun sürekli fonksiyon denir.

Tanım 3.1.2. (Liang et al 2009) X bir Banach uzay olsun. $P \subset X$ kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa koni olarak adlandırılır.

i) P, X içinde kapalı ve konveks bir kümedir,

ii) $x \in P \Rightarrow \lambda x \in P, \lambda \geq 0$,

iii) $x \in P, x \neq 0 \Rightarrow -x \notin P$.

Tanım 3.1.3. $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $\forall x, y \in A, t \in (0,1)$ için $tx + (1-t)y \in A$ ise A kümesine konveks küme denir.

Problemin çözümünün varlığını ve yapısını gösterirken aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

(H1) $\alpha_i \in [0, \infty), i = 1, 2, 3, \dots, m-2$ ve $f: [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sol-yoğun sürekli fonksiyon,

(H2) $p: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$ sol-yoğun sürekli fonksiyon,

(H3) $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $\exists B_0 \geq B_1 \geq 0$ öyle ki $s \in [0, \infty)$ için, $B_0 s \leq B(s) \leq B_1 s$.

Lemma 3.1.1. $h \in \mathbb{C}_{\text{ld}}([0, T] \times \mathbb{R})$ olmak üzere (3.3)-(3.4) probleminin tek çözümü

$$u(t) = B \left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

ile verilir.

İspat: (3.1.1) denkleminden kolayca aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz

$$(\Phi_p(u^{\Delta\nabla}))^\nabla(t) = -h(t).$$

Her iki taraftan $\rho(0)$ 'dan s 'ye ∇ integrale geçerse,

$$\int_{\rho(0)}^s (\Phi_p(u^{\Delta\nabla}))^\nabla(\tau) \nabla\tau = - \int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau$$

olur. $u^{\Delta\nabla}(\rho(0)) = 0$ olduğundan,

$$u^{\Delta\nabla}(s) = -\Phi_q\left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau\right)$$

olur. Tekrar her iki taraftan r 'den T 'ye ∇ integral alalım ve $u^\Delta(T) = 0$ olduğundan,

$$u^\Delta(r) = \int_r^T \Phi_q\left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau\right) \nabla s$$

olur. Bu nedenle buradan

$$u(t) = u(\rho(0)) + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q\left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau\right) \nabla s \right) \Delta r$$

(3.4) deki sınır değer koşullarını yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} u(t) = & B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q\left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau\right) \nabla s \right) \\ & + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q\left(\int_{\rho(0)}^s h(\tau) \nabla\tau\right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned}$$

olur. Buradan p -Laplacian ($MSDP$)'nin çözümünün tekliği kolayca kontrol edilebilir.

$t \in [\rho(0), T]$ olmak üzere $\|u\| = \sup|u(t)|$ normu ile normlanmış $X = \mathbb{C}_{\text{Id}}([\rho(0), T], [0, \infty))$ Banach uzayını ele alalım. Bu uzay da

$$P = \{u \in X: u(t) > 0, u^\Delta(t) > 0, t \in [\rho(0), T], u \text{ konkav}\} \quad (3.1.3)$$

konusini tanımlayalım. $u \in P$ için L operatörü,

$$\begin{aligned} Lu(t) = & B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\ & + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

olsun. L 'nin tanımından açıkça gösterebiliriz ki; $Lu(t) \geq 0$, ve $t \in [\rho(0), T]$ için

$$(Lu)^\Delta(t) = \int_t^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \geq 0$$

dır. $(Lu)^{\Delta^\nabla}(t) = -\Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^t p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \leq 0$ olduğundan Lu konkavdır.

Ayrıca $L: P \rightarrow P$ ve $\|Lu\| = \sup|Lu(t)| = Lu(T)$, $t \in [\rho(0), T]$ dir.

Şimdi Arzela-Ascoli Teoremi yardımıyla L operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterelim.

Tanım 3.1.4. Eğer bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen sürekli denir.

Tanım 3.1.5. Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi elde edilebiliyorsa bu kümeye pre kompakt küme denir. Yakınsadığı değer, küme içinde ise bu kümeye kompakt küme denir.

Teorem 3.1.1. (Deimling, 1985) Bir $M \subset C[a, b]$ kümesinin sürekli fonksiyon ailesinin pre-kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul M' 'ye ait fonksiyonların aynı dereceden sürekli ve sınırlı olmasıdır.

Tanım 3.1.6. $M, C[a, b]$ içinde bir küme olsun.

- $\forall x \in M, \forall t \in [a, b]$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.
- $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir.

Şimdi L operatörünün hem sürekli olduğunu hem de kompakt olduğunu gösterelim. Öncelikle $L: P \rightarrow P$ operatörünün sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\varepsilon) \text{ öyle ki } \|u - u_0\| < \delta \text{ iken } \|Lu - Lu_0\| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak bir δ 'nın varlığını araştıracağız.

$$\begin{aligned}
|Lu - Lu_0| &= \left| B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \right. \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&\quad - B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u_0(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\
&\quad \left. + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u_0(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \\
&= \left| u(\rho(0)) + \int_{\rho(0)}^t u^\Delta(r) \Delta r - u_0(\rho(0)) - \int_{\rho(0)}^t u_0^\Delta(r) \Delta r \right| \\
&= |u(\rho(0)) + u(t) - u(\rho(0)) - u_0(\rho(0)) - u_0(t) - u_0(\rho(0))| \\
&= |u(t) - u_0(t)|.
\end{aligned}$$

$$|Lu - Lu_0| = |u(t) - u_0(t)| \Rightarrow \|Lu - Lu_0\| = \|u(t) - u_0(t)\| < \delta = \varepsilon \text{ dur.}$$

O halde L operatörü süreklidir. Şimdi ise L operatörünün kompakt olduğunu yani $L(P)$ 'ye ait elemanların aynı dereceden sürekli ve aynı dereceden sınırlı olduğunu gösterelim. $L(P)$ 'ye ait elemanlar aynı dereceden sürekli ise,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall t_1, t_2 \in [0, T] \text{ ve } \forall u \in P \text{ için } \|t_1 - t_2\| < \delta \text{ iken } \|Lu(t_1) - Lu(t_2)\| < \varepsilon \text{ dur.}$$

$$\begin{aligned} |Lu(t_1) - Lu(t_2)| &= \left| B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \right. \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^{t_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\ &\quad - B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\ &\quad \left. - \int_{\rho(0)}^{t_2} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \end{aligned}$$

Kabul edelim ki $t_1 > t_2$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} |Lu(t_1) - Lu(t_2)| &= \left| \int_{t_2}^{t_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \\ &\leq \int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \left| \int_{t_2}^{t_1} \Delta r \right| \\ &= \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) (T - \rho(0)) \left| \int_{t_2}^{t_1} \Delta r \right| \end{aligned}$$

$\Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) (T - \rho(0))$ ifadesi sonlu bir sayı olduğundan, $\Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) (T - \rho(0)) = A$ dersek,

$$= A|t_1 - t_2| < A\delta = \varepsilon.$$

dur. Burada $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ seçersek $L(P)$ 'ye ait elemanlar aynı dereceden sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

$L(P)$ 'ye ait elemanlar aynı dereceden sınırlı ise $\forall Lu \in L(P)$ ve $\forall t \in [0, T]$ için $|Lu(t)| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısının varlığını araştıracağız.

$$\begin{aligned} |Lu(t)| &= \left| B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \\ &\leq \left| B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \\ &\leq B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\ &\leq B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^t \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade sonlu bir sayı olduğundan $|Lu(t)| \leq c$ olacak şekilde pozitif bir c sayısı vardır.

Lemma 3.1.2. $u \in P$ ve $t \in [\rho(0), T]$ için,

$$u(t) \geq \frac{t - \rho(0)}{T - \rho(0)} \|u\|$$

olur.

İspat u , $[0, T]$ üzerinde konkav olduğundan $u^\Delta(t)'$ nin $[\rho(0), T]$ üzerinde azalan olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $t \in [\rho(0), T]$ için $u^\Delta(t) \geq u^\Delta(T) = 0$ ve böylece $u(t)$ $[\rho(0), T]$ üzerinde artandır yani $u(T) \geq u(t) \geq u(\rho(0)) \geq 0$ olur.

$x(t) = u(t) - \frac{t - \rho(0)}{T - \rho(0)} \|u\|$ olarak tanımlayalım. $x(t) \geq 0$ olduğunu gösterirsek eşitsizliği sağlamış oluruz.

$$x^\Delta(t) = u^\Delta(t) - \frac{1}{T - \rho(0)} \|u\|, x^{\Delta\nabla}(t) = u^{\Delta\nabla}(t) \leq 0 \text{ yani } x(t) \text{ konkavdır.}$$

Aralığın uçlarında $x(t)$ fonksiyonu nonnegatif değerler aldığından $x(t) \geq 0$ 'dır.

3.2. Pozitif Çözümün Varlığı

Bu bölümde problemimizin çoklu pozitif çözümünün varlığını ispatlayacağız. (3.1)-(3.2) p-Laplacian ($MSDP$)'nin en az bir pozitif çözümünün varlığını ispatlamak için Krasnosel'skii Sabit Nokta teoremine ihtiyaç duyacağız

Teorem 3.2.1. (Krasnosel'skii, 1964) X bir Banach uzay ve $P \subset X$ bir koni olsun. Ω_1 ve Ω_2 nin, P 'nin açık sınırlı alt kümeleri ve $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ olduğunu kabul edelim.

$L: P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow P$ tamamen sürekli operatör olmak üzere

i) $u \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Lu\| \leq \|u\|$ ve $u \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Lu\| \geq \|u\|$

ya da

ii) $u \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Lu\| \geq \|u\|$ ve $u \in P \cap \partial\Omega_2$ için $\|Lu\| \leq \|u\|$

koşullarından biri sağlanıyorsa L operatörünün $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ 'de bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.2.2. Kabul edelim ki (H1)-(H3) koşulları sağlansın. Ek olarak

$$\textbf{i)} \text{ eğer } 0 \leq u \leq r \text{ ise } f(\tau, u(\tau)) \leq \Phi_p\left(\frac{u}{k_1}\right),$$

ve

$$\textbf{ii)} \text{ eğer } R \leq u \leq \infty \text{ ise } f(\tau, u(\tau)) \geq \Phi_p\left(\frac{u}{k_2}\right),$$

olacak şekilde $0 < r < R < \infty$ sayıları olsun. Burada

$$k_1 = B_1 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s + \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r,$$

$$k_2 = \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{\tau - \rho(0)}{T - \rho(0)} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

dır. O halde (3.1) – (3.2) p-Laplacian *MSDP* bir pozitif çözüme sahiptir.

İspat P konisini (3.1.3)'deki gibi, $L: P \rightarrow P$ operatörünü ise (3.1.4)'deki gibi tanımlayalım. L 'nin tamamen sürekli olduğunu ve P 'nin L altında invariant kaldığını kontrol etmek kolaydır. Eğer $u \in P$, $\|u\| < r$ ise o halde

$$\begin{aligned} \|Lu\| &\leq B \left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) |f(\tau, u(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\ &\leq B_1 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{u}{k_1} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{u}{k_1} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{u}{k_1} \left(B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
&\quad \left. + \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right) \\
&= \|u\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\Omega_1 = \{u \in \mathbb{C}_{\text{Id}}([\rho(0), T], [0, \infty)): \|u\| \leq r\}$ olacak şekilde tanımlarsak, $u \in P \cap \partial\Omega_1$ için $\|Lu\| \leq \|u\|$ olur.

$\Omega_2 = \{u \in \mathbb{C}_{\text{Id}}([\rho(0), T], [0, \infty)): \|u\| \leq R\}$ olacak şekilde tanımlarsak $u \in P$ için $\|u\| = R$,

$$\begin{aligned}
\|Lu(t)\| &= \left| B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right| \\
&\geq \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&> \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{u}{k_2} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&\geq \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{\tau - \rho(0)}{T - \rho(0)} \frac{\|u\|}{k_2} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&= \frac{\|u\|}{k_2} \int_{\rho(0)}^T \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) \Phi_p \left(\frac{\tau - \rho(0)}{T - \rho(0)} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&= \|u\|
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.2.1'in tüm koşulları sağlanmış olur. O halde L operatörü bir sabit noktaya sahiptir. Buradan (3.1)-(3.2) p -Laplacian ($MSDP$)'nin bir pozitif çözümü vardır.

(3.1)-(3.2) p -Laplacian ($MSDP$)'nin en az iki pozitif çözümünün varlığını ispatlamak için Avery-Henderson Sabit Nokta teoremine ihtiyaç duyacağız.

Teorem 3.2.3. (Avery and Henderson, 2001) X bir reel Banach uzayı, $P \subset X$ bir koni ve

$$P(\psi, z) = \{u \in P : \psi(u) < z\}$$

olsun. η ve ψ P üzerinde artan, negatif olmayan sürekli fonksiyoneller ve θ P üzerinde $\theta(0) = 0$ koşulunu sağlayan, negatif olmayan sürekli bir fonksiyonel olsun öyle ki bazı pozitif z ve γ sabitleri için

$$\psi(u) \leq \theta(u) \leq \eta(u) \text{ ve } \|u\| \leq \gamma\psi(u),$$

eşitsizliği tüm $u \in P(\overline{\psi}, z)$ için sağlansın. Kabul edelim ki

$$\text{her } 0 < \lambda < 1 \text{ ve } u \in P(\theta, y) \text{ için } \theta(\lambda u) \leq \lambda\theta(u).$$

olacak şekilde $x < y < z$ pozitif sayılar var olsun. Eğer $L: P(\overline{\psi}, z) \rightarrow P$ tamamen sürekli operatör aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa

$$\text{i) } \forall u \in \partial P(\psi, z) \text{ için, } \psi(Lu) > z$$

$$\text{ii) } \forall u \in \partial P(\theta, y) \text{ için } \theta(Lu) < y$$

$$\text{iii) } \forall u \in \partial P(\eta, x) \text{ için } P(\eta, x) \neq \emptyset \text{ ve } \eta(Lu) > x.$$

O halde L operatörü u_1 ve u_2 olacak şekilde en az iki pozitif sabit noktaya sahiptir öyle ki,

$$x < \eta(u_1) < \theta(u_1) < y \text{ ve } y < \theta(u_2) < \psi(u_2) < z.$$

Teorem 3.2.4 Kabul edelim ki (H1)- (H3) koşulları sağlansın ve $x < \frac{F}{E}y < \frac{\xi_1 F}{TE}z$ olacak şekilde pozitif sayılar var olsun böylece f fonksiyonu bazı pozitif D, E, F sabitleri için aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\textbf{i)} s \in [\xi_1, T] \text{ ve } u \in \left[z, \frac{T-\rho(0)}{\xi_1-\rho(0)}z \right] \text{ için, } f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{z}{D}\right),$$

$$\textbf{ii)} s \in [\rho(0), T] \text{ ve } u \in \left[0, \frac{T-\rho(0)}{\xi_1-\rho(0)}y \right] \text{ için, } f(s, u) < \Phi_p\left(\frac{y}{E}\right),$$

$$\textbf{iii)} s \in [\rho(0), \xi_{m-2}] \text{ ve } u \in \left[0, \frac{T-\rho(0)}{\xi_{m-2}-\rho(0)}x \right] \text{ için, } f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{x}{F}\right).$$

O halde (3.1) – (3.2) p-Laplacian *MSDP* 'nin

$$u_1(\xi_1) < y \text{ ve } u_1(\xi_{m-2}) > x, u_2(\xi_1) > y \text{ ve } u_2(\xi_1) < z$$

olacak şekilde en az iki u_1 ve u_2 pozitif çözümü vardır.

Şimdi pozitif D, E, F sabitlerini tanımlayalım,

$$D = B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\xi_1}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r,$$

$$E = B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r,$$

$$F = B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s + \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\xi_{m-2}}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

İspat P konisini (3.1.3)'de, L operatörünü ise (3.1.4)'de tanımladığımız gibi alalım. $LP \subset P$ ve L operatörünün tamamen sürekli olduğunu biliyoruz. P konisi üzerinde negatif olmayan, artan, sürekli ψ, θ ve η fonksiyonellerini

$$\psi(u) = \min_{t \in [\xi_1, \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_1),$$

$$\theta(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_1]} u(t) = u(\xi_1),$$

$$\eta(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_{m-2}),$$

şeklinde tanımlayalım. $\forall u \in P$ için

$$\psi(u) = \theta(u) \leq \eta(u)$$

eşitsizliği fonksiyonellerin tanımından elde edilir. Ek olarak $\forall u \in P$ için Lemma 3.1.2'den

$$\psi(u) = u(\xi_1) \geq \frac{\xi_1 - \rho(0)}{T - \rho(0)} \|u\|$$

eşitsizliği elde edilir. $u \in P$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\theta(0) = 0$ ve $\theta(\lambda u) = \lambda \theta(u)$ olur.

Şimdi Teorem 3.2.3'ün koşullarının sağlandığını göstereceğiz.

Eğer $u \in \partial P(\psi, z)$ ise o halde $\psi(u) = \min_{t \in [\xi_1, \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_1) = z$ 'dir.

Böylece $t \in [\xi_1, T]$ için $u(t) \geq z$ 'dir ve Lemma 3.1.2'den

$$z < u(t) \leq \|u\| \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} z$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (i) koşulundan $s \in [\xi_1, T]$ için $f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{z}{D}\right)$ olur. $Lu \in P$ olduğundan

$$\begin{aligned} \psi(Lu) &= Lu(\xi_1) = B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\ &> B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\xi_1}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{z}{D} \left\{ B_0 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
&\quad \left. + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\xi_1}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right\} \\
&= z
\end{aligned}$$

elde edilir. $\psi(Lu) > z$ olduğundan Teorem 3.2.3'ün (i) koşulu sağlanmış olur.

İkinci olarak Teorem 3.2.3'ün (ii) şıkkının sağlandığını gösterelim. Bunun için $u \in \partial P(\theta, z)$ seçelim. O halde $\theta(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_1]} u(t) = u(\xi_1) = y$ 'dir. Lemma 3.1.2'den $t \in [\rho(0), T]$ için

$$0 < u(t) \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} y$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (ii) koşulundan $s \in [\rho(0), T]$ için $f(s, u) < \Phi_p\left(\frac{y}{E}\right)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\theta(Lu) &= Lu(\xi_1) = B \left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&< B_1 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&< \frac{y}{E} \left\{ B_1 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \Bigg\} \\
& = y
\end{aligned}$$

olur. $\theta(Lu) < y$ olduğundan Teorem 3.2.3'ün (ii) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak Teorem 3.2.3'ün son koşulunun da sağlandığını gösterelim. $0 \in P$ ve $x > 0$ olduğundan $P(\eta, x) \neq \emptyset$, yani $\eta(0) = 0 < x$. Şimdi $u \in \partial P(\eta, x)$ olsun. O halde $\eta(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_{m-2}) = x$ 'dir. Lemma 3.1.2'den $t \in [\rho(0), \xi_{m-2}]$ için

$$0 < u(t) \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_{m-2} - \rho(0)} x$$

eşitsizliği elde edilir. O halde kabulümüz olan (iii) koşulundan $s \in [\rho(0), \xi_{m-2}]$ için $f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{x}{F}\right)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\eta(Lu) &= Lu(\xi_{m-2}) = B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\
&+ \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&> B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&+ \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\xi_{m-2}}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&> \frac{x}{F} \left\{ B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\xi_{m-2}}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \Bigg\} \\
& = x
\end{aligned}$$

dir. Teorem 3.2.3'ün tüm koşulları sağlandığından L operatörü en iki pozitif çözüme sahiptir. Buradan (3.1) -(3.2) p-Laplacian $MSDP$ 'nin

$$u_1(\xi_1) < y \text{ ve } u_1(\xi_{m-2}) > x, u_2(\xi_1) > y \text{ ve } u_2(\xi_1) < z$$

koşullarını sağlayan en az iki pozitif $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ çözümü vardır.

Şimdi aşağıdaki Avery-Peterson Sabit Nokta Teoremini kullanarak (3.1)-(3.2) p-Laplacian $MSDP$ 'nin en az üç pozitif çözümünün varlığını ispatlayacağız.

Teorem 3.2.5. (Liang et al 2009) P , X Banach uzayında bir koni olsun.

$$P(\gamma, c) = \{u \in P : \gamma(u) < c\}.$$

α , β ve γ P konisi üzerinde artan, negatif olmayan ve sürekli üç fonksiyonel olsun. Bazı $c > 0$ ve $A > 0$ sayıları ve $u \in \overline{P(\gamma, c)}$ için

$$\gamma(u) \leq \beta(u) \leq \alpha(u), \|u\| \leq A\gamma(u)$$

eşitsizliği sağlansın. Kabul edelim ki $L: \overline{P(\gamma, c)} \rightarrow P$ tamamen sürekli operatör ve $0 < a < b < c$ sayıları var olsun öyle ki

$$\text{i) } \forall u \in \partial P(\gamma, c) \text{ için } \gamma(Lu) < c,$$

$$\text{ii) } \forall u \in \partial P(\beta, b) \text{ için } \beta(Lu) > b,$$

$$\text{iii) } \forall u \in \partial P(\alpha, a) \text{ için } P(\alpha, a) \neq \emptyset \text{ ve } \alpha(Lu) < a \text{ 'dır.}$$

O halde L operatörü $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ olacak şekilde en az üç pozitif sabit noktaya sahiptir öyle ki,

$$0 \leq \alpha(u_1) < a < \alpha(u_2), \beta(u_2) < b < \beta(u_3), \gamma(u_3) < c \text{ 'dir.}$$

Teorem 3.2.6. Kabul edelim ki (H1)-(H3) koşulları sağlansın ve $a < b < c$ olacak şekilde pozitif sayılar var olsun. Böylece f fonksiyonu bazı pozitif D, E, K sabitleri için aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\text{i) } \forall u \in \left[0, \frac{T-\rho(0)}{\xi_1-\rho(0)} c\right] \text{ için, } f(s, u) < \Phi_p\left(\frac{c}{E}\right),$$

$$\text{ii) } \forall u \in \left[0, \frac{T-\rho(0)}{\xi_1-\rho(0)} b\right] \text{ için, } f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{b}{D}\right),$$

$$\text{iii) } \forall u \in \left[0, \frac{T-\rho(0)}{\xi_{m-2}-\rho(0)} a\right] \text{ için, } f(s, u) < \Phi_p\left(\frac{a}{K}\right).$$

O halde (3.1)-(3.2) p -Laplacian $MSDP$ 'nin

$$0 \leq \alpha(u_1) < a < \alpha(u_2), \beta(u_2) < b < \beta(u_3), \gamma(u_3) < c$$

olacak şekilde en az üç u_1, u_2, u_3 pozitif çözümü vardır.

Buradaki D ve E sabitlerini daha önce Teorem 3.2.4'de tanımlamıştık. K sabit sayısını ise

$$K = B_1 \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s + \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

şeklinde alacağız.

İspat L operatörünü ve P konisini Teorem 3.2.4'deki gibi tanımlayalım. $u \in \partial P(\gamma, c)$ olsun. O halde $t \in [0, T]$ için $Lu(t) \geq 0$ olur. $L: \overline{P(\gamma, c)} \rightarrow P$ olduğunu biliyoruz. P konisi üzerinde γ, β ve α artan, negatif olmayan, sürekli fonksiyonellerini

$$\gamma(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_1]} u(t) = u(\xi_1),$$

$$\beta(u) = \min_{t \in [\xi_1, \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_1),$$

$$\alpha(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_{m-2}),$$

şeklinde tanımlayalım. $\forall u \in P$ için

$$\gamma(u) = \beta(u) \leq \alpha(u),$$

eşitsizliği tanımdan rahatça görülebilir ve Lemma 3.1.2'den

$$\gamma(u) = u(\xi_1) \geq \frac{\xi_1 - \rho(0)}{T - \rho(0)} \|u\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Teorem 3.2.5'in tüm koşullarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için öncelikle $u \in \partial P(\gamma, c)$ seçelim. O halde $\gamma(u) = \max_{t \in [\rho(0), \xi_1]} u(t) = u(\xi_1) = c$ 'dir. Lemma 3.1.2 yardımıyla

$$\|u\| \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} \gamma(u) = \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} c$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$0 \leq u(t) \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} c$$

olur. O halde Teorem 3.2.6'nın (i) şikkından $s \in [\rho(0), T]$ için $f(s, u) < \Phi_p\left(\frac{c}{E}\right)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \gamma(Lu) = Lu(\xi_1) &= B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\ &+ \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\ &< B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &+ \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{c}{E} \left\{ B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
&\quad \left. + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \right\} \\
&= c
\end{aligned}$$

dir. Böylece Teorem 3.2.5'in (i) koşulu sağlanmış olur.

İkinci olarak $u \in \partial P(\beta, b)$ seçelim. O halde $\beta(u) = \min_{t \in [\xi_1, \xi_{m-2}]} u(t) = u(\xi_1) = b$ 'dir. $u \in P$ olduğundan, tüm $t \in [\xi_1, T]$ için Lemma 3.1.2'den

$$b \leq u(t) \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_1 - \rho(0)} b$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 3.2.6'nın (ii) koşulundan $s \in [\xi_1, T]$ için $f(s, u) > \Phi_p\left(\frac{b}{D}\right)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\beta(Lu) = Lu(\xi_1) &= B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&> B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\xi_1}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&> \frac{b}{D} \left\{ B_0 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\rho(0)}^{\xi_1} \left(\int_{\xi_1}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^{\xi_1} p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \Big\} \\
& = b
\end{aligned}$$

olur. Böylece Teorem 3.2.5'in (ii) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak Teorem 3.2.5'in (iii) koşulunu sağlatalım. $t \in [\rho(0), T]$ için $u(t) \equiv \frac{a}{2}$ $P(\alpha, a)$ 'nın bir elemanıdır ve $\alpha(u) = \frac{a}{2} < a$. Böylece $P(\alpha, a) \neq \emptyset$.

Şimdi $u \in \partial P(\alpha, a)$ olsun. O halde $\alpha(u) = a$. $\forall t \in [\rho(0), \xi_{m-2}]$ için Lemma 3.1.2'den

$$\|u\| \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_{m-2} - \rho(0)} \alpha(u) = \frac{T - \rho(0)}{\xi_{m-2} - \rho(0)} a$$

elde edilir. Buradan

$$0 \leq u(t) \leq \frac{T - \rho(0)}{\xi_{m-2} - \rho(0)} a$$

olur . O halde

$$\begin{aligned}
\alpha(Lu) &= Lu(\xi_{m-2}) = B \left(\sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \\
&+ \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_r^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^s p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&\leq B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&+ \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) f(\tau, u(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \\
&= \frac{a}{K} \left\{ B_1 \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_{\xi_i}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\rho(0)}^{\xi_{m-2}} \left(\int_{\rho(0)}^T \Phi_q \left(\int_{\rho(0)}^T p(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r \Bigg\} \\
& = a
\end{aligned}$$

dır. Böylece Teorem 3.2.5'in son koşulu da sağlanmış olur. Dolayısıyla L operatörü $u_1, u_2, u_3 \in \overline{P(\gamma, c)}$ olacak şekilde en az üç pozitif sabit noktaya sahiptir. Buradan (3.1)-(3.2) p-Laplacian $MSDP$ 'nin

$$0 \leq \alpha(u_1) < a < \alpha(u_2), \beta(u_2) < b < \beta(u_3), \gamma(u_3) < c.$$

koşullarını sağlayan en az üç u_1, u_2, u_3 pozitif çözümü vardır.

Örnek 3.1. $T = [0,1] \cup [2,3]$ olsun. Aşağıdaki p-Laplacian denklemini ele alalım,

$$(\Phi_p(u^{\Delta \nabla}))^\nabla(t) + p(t)f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0,3]_{T_{k^2} \cap T^k} \quad (3.2.1)$$

ve aşağıdaki sınır koşullarını sağlasın.

$$u^{\Delta \nabla}(0) = 0, u^\Delta(3) = 0, u(0) = \sum_1^2 \alpha_i u^\Delta(\xi_i) \quad (3.2.2)$$

Burada $p = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, m = 4, p(t) \equiv 1, B_0 = B_1 = 1$ ve

$$f(t, u) = f(u) = \begin{cases} \frac{u^2}{10^4} + \frac{6}{10} & , \quad 0 \leq u \leq 10^3 \\ 100,6 + 2(u - 10^3) & , \quad u \geq 10^3 \end{cases}$$

$x = 1, y = 10, z = 10^4, \xi_1 = \frac{1}{2}, \xi_2 = \frac{5}{2}$ 'dir. O halde Teorem 2.1.10 ve Teorem 2.1.11 kullanılarak $D = \frac{15}{8}, E = 12, F = 10$ bulunur. Buradan $x < \frac{F}{E}y < \frac{F}{6E}z$ ve

$$f(u) > \Phi_2\left(\frac{z}{D}\right) = 5334 \quad u \in [10^4, 6 \cdot 10^4],$$

$$f(u) < \Phi_2\left(\frac{y}{E}\right) = 0,84 \quad u \in [0, 60],$$

$$f(u) > \Phi_2\left(\frac{x}{F}\right) = 0,1 \quad u \in \left[0, \frac{6}{5}\right],$$

olur. Teorem 3.2.4.'ü kullanarak (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) < 10 \text{ ve } u_1\left(\frac{5}{2}\right) > 1, u_2\left(\frac{1}{2}\right) > 10 \text{ ve } u_2\left(\frac{5}{2}\right) < 10^4$$

olacak şekilde pozitif en az iki u_1 ve u_2 çözüme sahip olduğunu görebiliriz.

4. ÜÇÜNCÜ MERTEBE ÖZDEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde

$$\left(\Phi_p\left(u^{\Delta\nabla}(t)\right)\right)^\nabla + \lambda f\left(t, u(t), u^\Delta(t)\right) = 0 \quad t \in (0, T) \quad (4.1)$$

$$\gamma u(0) - \beta u^\Delta(0) = 0, u(T) = \sum_1^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (4.2)$$

m-nokta p-Laplacian özdeğer problemini ele alacağız. Burada $\lambda > 0$ bir parametre, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-2} < \sigma(T)$ zaman skalasının noktaları, $\gamma \geq 0, \beta \geq 0$ sabitlerdir. α_i sabitleri, f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\mathbf{A1)} \alpha_i \in [0, \infty), i = 1, 2, 3 \dots m-2 \text{ ve } f \in \mathbb{C}_{ld}([0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}),$$

$$\mathbf{A2)} d = \gamma(T - \sum_1^{m-2} \alpha_i \xi_i) + \beta(1 - \sum_1^{m-2} \alpha_i) > 0.$$

4.1. Temel Bilgiler

Bu bölümde

$$\left(\Phi_p\left(u^{\Delta\nabla}(t)\right)\right)^\nabla + \lambda h(t) = 0 \quad t \in (0, T) \quad (4.1.1)$$

$$\gamma u(0) - \beta u^\Delta(0) = 0, u(T) = \sum_1^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), u^{\Delta\nabla}(0) = 0 \quad (4.1.2)$$

lineer özdeğer problemini inceleyeceğiz.

Lemma 4.1.1. Eğer $d \neq 0$ ise, o halde $h \in \mathbb{C}_{ld}([0, T], \mathbb{R})$ için (4.1.1)-(4.1.2) problemi tek çözüme sahiptir ve

$$\begin{aligned} u(t) = & - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \\ & + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \end{aligned}$$

$$-\frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

şeklindedir.

İspat (4.1.1) denkleminde

$$\left(\Phi_p \left(u^{\Delta \nabla}(t) \right) \right)^{\nabla} = -\lambda h(t)$$

olduğunu biliyoruz. Her iki taraftan ∇ -integral alalım.

$$\int_0^s \left(\Phi_p \left(u^{\Delta \nabla}(\tau) \right) \right)^{\nabla} \nabla \tau = -\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau$$

olur. Buradan

$$\Phi_p \left(u^{\Delta \nabla}(s) \right) - \Phi_p \left(u^{\Delta \nabla}(0) \right) = -\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau$$

olur. Sınır değer koşullarından ve Φ_p fonksiyonunun özelliğinden

$$u^{\Delta \nabla}(s) = -\Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right)$$

elde edilir. Her iki taraftan tekrar ∇ -integral alalım.

$$\int_0^t u^{\Delta \nabla}(s) \nabla s = - \int_0^t \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

ve

$$u^{\Delta}(t) = u^{\Delta}(0) - \int_0^t \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

olur. Son olarak her iki taraftan Δ -integral alalım,

$$\int_0^t u^\Delta(r) \Delta r = u^\Delta(0) \int_0^t 1 \Delta r - \int_0^t \left(\int_0^r \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

elde edilir. İntegrali çözdüğümüzde

$$u(t) = u(0) + u^\Delta(0)t - \int_0^t \left(\int_0^r \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right) \Delta r$$

olur. İntegrallerin sınırlarını değiştirdiğimizde

$$u(t) = u(0) + u^\Delta(0)t - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

elde edilir. Şimdi notasyon kolaylığı için $u(0) = A$ ve $u^\Delta(0) = B$ olsun. O halde

$$u(t) = A + Bt - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

olur. Sınır değerleri ve Cramer kuralı yardımıyla;

$$d = \begin{vmatrix} 1 - \sum_1^{\gamma} \alpha_i & T - \sum_1^{m-2} \alpha_i \xi_i \\ T - \sum_1^{m-2} \alpha_i \xi_i & 1 - \sum_1^{m-2} \alpha_i \end{vmatrix} = \gamma \left(T - \sum_1^{m-2} \alpha_i \xi_i \right) + \beta \left(1 - \sum_1^{m-2} \alpha_i \right) \neq 0$$

$$A = \frac{\beta \left[\int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s - \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right]}{d}$$

$$B = \frac{\gamma \left[\int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s - \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \right]}{d}$$

bulunur. Şimdi elde ettiklerimizi yerine yazıp düzenleyelim,

$$u(t) = - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& - \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s h(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s
\end{aligned}$$

olur.

4.2. Pozitif Çözümün Varlığı

Lemma 4.2.1. (Guo and Lakshmikantham, 1988) Y bir Banach uzayı ve Ω Y 'nin alt uzayı, $0 \in Y$ olsun. $F: \bar{\Omega} \rightarrow Y$ tamamen sürekli operatör olsun. O halde;
ya $\exists x \in \Omega$, $\lambda > 1$ öyle ki $Fx = \lambda x$
ya da F operatörü bir sabit noktaya sahiptir ve $x^* \in \bar{\Omega}'$ dir.

Lemma 4.2.1 yardımıyla (4.1)-(4.2) özdeğer probleminin çözümünün varlığını göstermeden önce $\|u\|_1 = \|u\| + \|u^\Delta\|$ ile normlanmış $Y = \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]$ uzayını ele alalım. Burada $\|u\| = \max_{t \in [0, T]} |u(t)|$ 'dir. Kolayca gösterebiliriz ki $(Y, \|\cdot\|_1)$ Banach uzaydır.

Şimdi kolaylık için aşağıdaki notasyonları oluşturalım.

$$\varphi(s) = \Phi_q \left(\int_0^s (p(\tau) + q(\tau)) \nabla \tau \right),$$

$$\psi(s) = \Phi_q \left(\int_0^s r(\tau) \nabla \tau \right),$$

$$\begin{aligned}
M = \int_0^T \varphi(s) \nabla s & + \frac{\gamma T + \beta + \gamma}{d} \int_0^T (T - s) \varphi(s) \nabla s \\
& + \frac{\gamma T + \beta + \gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \varphi(s) \nabla s,
\end{aligned}$$

$$N = \int_0^T \psi(s) \nabla s + \frac{\gamma T + \beta + \gamma}{d} \int_0^T (T-s) \psi(s) \nabla s \\ + \frac{\gamma T + \beta + \gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \psi(s) \nabla s.$$

Teorem 4.2.1. (A1)-(A2) koşullarının sağlandığını kabul edelim.

$f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sol-yoğun sürekli fonksiyon olsun. $t \in [0, T]$ için $f(t, 0, 0) \neq 0$ ve $(t, u, v) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere, negatif olmayan $p, q, r \in L^1[0, T]$ fonksiyonları vardır öyle ki;

$$|f(t, u, v)| \leq p(t)|u|^{p-1} + q(t)|v|^{p-1} + r(t)$$

eşitsizliği sağlanır ve $\exists t_0 \in [0, T]$ öyle ki $p(t_0) \neq 0$ veya $q(t_0) \neq 0$ 'dır. O halde $\lambda^* > 0$ olacak şekilde bir sabit vardır öyle ki herhangi $0 < \lambda \leq \lambda^*$ için (4.1)-(4.2) problemi en az bir aşikar olmayan $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1([0, T] \times \mathbb{R})$ çözümüne sahiptir.

İspat Lemma 4.1.1'e göre (4.1)-(4.2) problemi bir $u(t)$ çözümüne sahiptir ancak ve ancak u, Fu 'nun bir çözümü ise

$$Fu(t) := - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ - \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s$$

elde edilir. Böylece Y' 'de F' 'nin sabit noktasını aramaya ihtiyaç duyacağız.

Arzela-Ascoli Teoremini uygulayarak F operatörünün tamamen sürekli olduğunu gösterebiliriz. Bunun için öncelikle $F: Y \rightarrow Y$ operatörünün sürekli olduğunu yani

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) \text{ öyle ki } \|u - u_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|Fu - Fu_0\|_1 < \varepsilon$$

olduğunu gösterelim. O halde

$$\begin{aligned}\|u - u_0\|_1 &= \|u(t) - u_0(t)\| + \|u^\Delta(t) - u_0^\Delta(t)\| < \delta \\ \Rightarrow \|u(t) - u_0(t)\| &< \frac{\delta}{2}, \|u^\Delta(t) - u_0^\Delta(t)\| < \frac{\delta}{2}\end{aligned}$$

olur.

$$\|Fu - Fu_0\|_1 = \|Fu - Fu_0\| + \|Fu^\Delta - Fu_0^\Delta\|$$

$Fu = u$ olacak şekilde tanımladığımızdan,

$$\|Fu - Fu_0\|_1 = \|u - u_0\| + \|u^\Delta - u_0^\Delta\| < \delta = \varepsilon$$

dur. Böylece F operatörünün sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

Şimdi F operatörünün kompakt olduğunu yani $F(Y)$ 'ye ait elemanların aynı dereceden sürekli ve aynı dereceden sınırlı olduğunu gösterelim. $F(Y)$ 'ye ait elemanlar aynı dereceden sürekli ise

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$ ve $\forall u \in Y$ için

$$\|t_1 - t_2\|_1 < \delta \Rightarrow \|Fu(t_1) - Fu(t_2)\|_1 < \varepsilon$$

dur. O halde

$$\begin{aligned}|Fu(t_1) - Fu(t_2)| &= \left| - \int_0^{t_1} (t_1 - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\ &\quad + \frac{\gamma t_1 + \beta}{d} \int_0^T (T - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad - \frac{\gamma t_1 + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\quad \left. + \int_0^{t_2} (t_2 - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\gamma t_2 + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma t_2 + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \Bigg|
\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
|Fu(t_1) - Fu(t_2)| &= \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1 - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
& \quad \left. - \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Ardından

$$f(t, u, u^\Delta) \leq p(t)|u|^{p-1} + q(t)|u^\Delta|^{p-1} + r(t)$$

eşitsizliğini yerine yazalım. Ayrıca işlem kolaylığı için

$$\Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \quad \text{ifadesini} \quad \text{kısaca} \quad \vartheta(s)$$

notasyonu ile gösterelim.

$$|Fu(t_1) - Fu(t_2)| \leq \left| \int_0^{t_2} (t_2 - s) \vartheta(s) \nabla s - \int_0^{t_1} (t_1 - s) \vartheta(s) \nabla s \right|$$

$$+ \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \int_0^T (T - s) \vartheta(s) \nabla s - \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \vartheta(s) \nabla s \Bigg|$$

elde edilir. Şimdi varsayalım ki $t_2 > t_1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} |Fu(t_1) - Fu(t_2)| &\leq \left| \int_0^{t_1} (t_2 - t_1) \vartheta(s) \nabla s + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) \vartheta(s) \nabla s \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \int_0^T (T - s) \vartheta(s) \nabla s \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \vartheta(s) \nabla s \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} (t_2 - t_1) \vartheta(s) \nabla s + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s) \vartheta(s) \nabla s \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \vartheta(s) \nabla s \right| \\ &\leq |t_1 - t_2| \int_0^{t_1} |\vartheta(s)| \nabla s + \int_{t_1}^{t_2} |t_2 - s| |\vartheta(s)| \nabla s \\ &\quad + \frac{|\gamma(t_1 - t_2)|}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} |\xi_i - s| |\vartheta(s)| \nabla s \\ &\leq |t_1 - t_2| \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \int_0^{t_1} 1 \nabla s \\ &\quad + \max_{0 < s < t_2} |t_2 - s| \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \int_{t_1}^{t_2} 1 \nabla s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma|t_1 - t_2|}{d} \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} |\xi_i - s| \nabla s \\
& < |t_1 - t_2| \left[\max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| T + \max_{0 < s < t_2} |T - s| \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma}{d} \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} |\xi_i - s| \nabla s \right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|Fu(t_1) - Fu(t_2)\| & < |t_1 - t_2| \left[\max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| T + \max_{0 < s < t_2} |T - s| \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \right. \\
& \quad \left. + \frac{\gamma}{d} \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} |\xi_i - s| \nabla s \right]
\end{aligned}$$

olur. Şimdi de $|(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)|$ ifadesini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
|(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)| & = \left| - \int_0^{t_1} \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{t_2} \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right|
\end{aligned}$$

dir. Kabul edelim ki $t_2 > t_1$ olsun. O halde

$$|(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right|$$

olur. Ardından

$$f(t, u, u^\Delta) \leq p(t)|u|^{p-1} + q(t)|u^\Delta|^{p-1} + r(t)$$

eşitsizliğini yerine yazalım. Ayrıca işlem kolaylığı için

$$\Phi_q \left(\lambda \int_0^s \left(p(\tau) |u|^{p-1} + q(\tau) |u^\Delta|^{p-1} + r(\tau) \right) \nabla \tau \right)$$

ifadesini kısaca $\vartheta(s)$ notasyonu ile gösterelim.

$$\begin{aligned} |(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \vartheta(s) \nabla s \right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} |\vartheta(s)| \nabla s \\ &\leq \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \int_{t_1}^{t_2} 1 \nabla s \\ &= \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| |t_1 - t_2| \end{aligned}$$

olur. Buradan her iki tarafın maximumuna geçtiğimizde

$$\|(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)\| < \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| |t_1 - t_2|$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \|Fu(t_1) - Fu(t_2)\|_1 &= \|Fu(t_1) - Fu(t_2)\| + \|(Fu)^\Delta(t_1) - (Fu)^\Delta(t_2)\| \\ &< |t_1 - t_2| \left[\max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| T + \max_{0 < s < t_2} |T - s| \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{d} \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} |\xi_i - s| \nabla s + \max_{0 < \tau < s} |\vartheta(s)| \right] \end{aligned}$$

olur. Köşeli parantez içindeki ifade sonlu bir sayı olduğundan bu değeri A ile gösterelim. O halde $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ seçersek $F(Y)$ ait elemanların aynı dereceden sürekli olduğunu göstermiş oluruz.

Son olarak $F(Y)$ ait elemanların aynı dereceden sınırlı olduğunu gösterelim. O halde $\|Fu\|_1 \leq c$ olacak şekilde bir sabitin varlığını araştıracağız.

$$\begin{aligned}
\|Fu\| &= \max_{t \in [0, T]} |Fu(t)| = \left| - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
&\quad + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad \left. - \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right| \\
&\leq \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\leq \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\leq \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s \|u\|_1^{p-2} (p(\tau) + q(\tau)) \nabla \tau + \int_0^s r(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s \|u\|_1^{p-2} (p(\tau) + q(\tau)) \nabla \tau + \int_0^s r(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s \|u\|_1^{p-2} (p(\tau) + q(\tau)) \nabla \tau + \int_0^s r(\tau) \nabla \tau \right) \nabla s$$

$\Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|Fu\| &\leq \int_0^T (T - s) [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s \\ &\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T - s) [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s \\ &\quad + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s \\ &= \Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \left[\int_0^T (T - s) \varphi(s) \nabla s + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T - s) \varphi(s) \nabla s \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \varphi(s) \nabla s \right] \\ &\quad + \Phi_q(\lambda) \left[\int_0^T (T - s) \psi(s) \nabla s + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T - s) \psi(s) \nabla s \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \psi(s) \nabla s \right] \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\|(Fu)^\Delta\|'$ yı hesaplayalım.

$$\|(Fu)^\Delta\| = \max_{t \in [0, T]} |(Fu)^\Delta| = \left| - \int_0^t \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right|$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& - \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \Bigg| \\
& \leq \int_0^T \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& \leq \int_0^T \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(\tau)|u|^{p-1} + q(\tau)|u^\Delta|^{p-1} + r(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& \leq \int_0^T [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s \\
& + \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) [\Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \varphi(s) + \Phi_q(\lambda) \psi(s)] \nabla s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi_q(\lambda) \|u\|_1 \left[\int_0^T \varphi(s) \nabla s + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \varphi(s) \nabla s + \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \varphi(s) \nabla s \right] \\
&+ \Phi_q(\lambda) \left[\int_0^T \psi(s) \nabla s + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \psi(s) \nabla s + \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \psi(s) \nabla s \right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|Fu\|_1 = \|Fu\| + \|(Fu)^\Delta\| \leq \Phi_q(\lambda) \|u\|_1 M + \Phi_q(\lambda) N$$

elde edilir. Böylece F operatörü aynı dereceden sınırlı olmuş olur.

$t \in [0, T]$ için $|f(t, 0, 0)| \leq r(t)$, $\int_0^T \psi(s) \nabla s = \int_0^T \Phi_q(\int_0^s r(\tau) \nabla \tau) \nabla s > 0$ ve $p(t_0) \neq 0$ veya $q(t_0) \neq 0$ olduğundan $\int_0^T \varphi(s) \nabla s = \int_0^T \Phi_q(\int_0^s (p(\tau) + q(\tau)) \nabla \tau) \nabla s > 0$ olduğu kolayca görülür.

Şimdi operatörümüzün sabit noktasının varlığını Lemma 4.2.1 yardımıyla araştıralım. Bunun için $m = \frac{N}{M}$ ve $\Omega = \{u \in \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]: \|u\|_1 < m\}$ olsun. Kabul edelim ki $u \in \partial\Omega$, $\mu > 1$ olsun öyle ki $Fu = \mu u$. O halde

$$\mu m = \mu \|u\|_1 = \|Fu\|_1 = \|Fu\| + \|(Fu)^\Delta\| \text{ olur. Az önce yukarıda}$$

$$\|Fu\|_1 = \|Fu\| + \|(Fu)^\Delta\| \leq \Phi_q(\lambda) \|u\|_1 M + \Phi_q(\lambda) N$$

olduğunu gösterdik. Buradan

$$\|Fu\|_1 \leq \Phi_q(\lambda) \|u\|_1 M + \Phi_q(\lambda) N$$

olur. Burada $\lambda^* = \left(\frac{1}{2M}\right)^{p-1}$ seçersek, $0 < \lambda < \lambda^*$ olduğu zaman

$$\mu m = \mu \|u\|_1 = \|Fu\|_1 \leq \frac{1}{2M} M \|u\|_1 + \frac{N}{2M}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\mu \leq \frac{1}{2} + \frac{N}{2Mm} = 1$$

olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde Lemma 4.2.2'ye göre F operatörü bir sabit noktaya sahiptir. O halde (4.1)-(4.2) problemi aşikar olmayan bir $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]$ çözümüne sahiptir.

Sonuç 4.2.1. (A1)-(A2) koşullarının sağlandığını varsayalım. $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0]$ veya $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sol-yoğun sürekli fonksiyon ve $t \in [0, T]$ için $f(t, 0, 0) \neq 0$ olsun. negatif olmayan $p, q \in L^1[0, T]$ fonksiyonları $(t, u_i, v_i) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $i = 1, 2$ için

$$|f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)| \leq p(t)|u_1 - u_2|^{p-1} + q(t)|v_1 - v_2|^{p-1}$$

eşitsizliği sağlasın. Ayrıca $\exists t_0 \in [0, T]$ için $p(t_0) \neq 0$ veya $q(t_0) \neq 0$ olsun. O halde $\lambda^* > 0$ olacak şekilde bir sabit λ^* değeri vardır öyle ki herhangi $0 < \lambda < \lambda^*$ için (4.1)-(4.2) problemi aşikar olmayan bir $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]$ çözümüne sahiptir.

İspat Eğer $u_2 = v_2 = 0$ ise o halde;

$$\begin{aligned} ||f(t, u_1, v_1)| - |f(t, 0, 0)|| &\leq |f(t, u_1, v_1) - f(t, 0, 0)| \\ &\leq p(t)|u_1|^{p-1} + q(t)|v_1|^{p-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$|f(t, u_1, v_1)| \leq p(t)|u_1|^{p-1} + q(t)|v_1|^{p-1} + |f(t, 0, 0)|$$

olur. Teorem 4.2.1'den (4.1)-(4.2) problemi aşikar olmayan bir $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]$ çözümüne sahip olduğunu biliyoruz. Fakat bu koşulda çözümün tekliğine konsantre olmayı tercih edeceğiz. Bunun için iki farklı u_1, u_2 çözümünün var olduğunu kabul edelim. O halde

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_1 = \|u_1 - u_2\|_1$$

olur. Şimdi bu eşitliğin sağlanmadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
|Fu_1 - Fu_2| &= \left| - \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \right. \\
&\quad + \int_0^t (t-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \left[\Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right] \nabla s \\
&\quad - \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \left[\Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right] \nabla s \right| \\
&\leq \int_0^T (T-s) \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right. \\
&\quad \left. - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right| \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right. \\
&\quad \left. - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right| \nabla s \\
&\quad + \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right.
\end{aligned}$$

$$-\Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \Big| \nabla s$$

elde edilir. Bir sonraki adımda $\Phi_q(x) - \Phi_q(y) \leq \Phi_q(x - y)$ eşitsizliğini kullanacağız, böylece

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\ &+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\ &+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \right. \\ &\quad \left. - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\ &\leq \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(t) |u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} \right. \\ &\quad \left. + q(t) |u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1}) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(t) |u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} \right. \\ &\quad \left. + q(t) |u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1}) \nabla \tau \right) \nabla s \\ &+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \\ &\quad \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(t) |u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} + q(t) |u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1}) \nabla \tau \right) \nabla s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T (T-s)\Phi_q(\lambda)\|u_1 - u_2\|_1\varphi(s)\nabla s \\
&+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s)\Phi_q(\lambda)\|u_1 - u_2\|_1\varphi(s)\nabla s \\
&+ \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)\Phi_q(\lambda)\|u_1 - u_2\|_1\varphi(s)\nabla s \\
&= \Phi_q(\lambda)\|u_1 - u_2\|_1 \left\{ \int_0^T (T-s)\varphi(s)\nabla s \right. \\
&\left. + \frac{\gamma t + \beta}{d} \int_0^T (T-s)\varphi(s)\nabla s + \frac{\gamma t + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)\varphi(s)\nabla s \right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\|Fu_1 - Fu_2\| &\leq \Phi_q(\lambda)\|u_1 - u_2\|_1 \left\{ \int_0^T (T-s)\varphi(s)\nabla s \right. \\
&\left. + \frac{\gamma T + \beta}{d} \int_0^T (T-s)\varphi(s)\nabla s + \frac{\gamma T + \beta}{d} \sum_1^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)\varphi(s)\nabla s \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $\|(Fu_1)^\Delta - (Fu_2)^\Delta\|$ ifadesini inceleyelim.

$$\|(Fu_1)^\Delta - (Fu_2)^\Delta\| = \max_{t \in [0, T]} |(Fu_1)^\Delta(t) - (Fu_2)^\Delta(t)| \text{ 'dir}$$

$t = T$ yazalım ve üçgen eşitsizliğini uygulayalım,

$$\leq \int_0^T \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right| \nabla s$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right. \\
& \quad \left. - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right| \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \\
& \left| \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) - \Phi_q \left(\lambda \int_0^s f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau)) \nabla \tau \right) \right| \nabla s \\
& \leq \int_0^T \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \\
& \Phi_q \left(\lambda \int_0^s |f(\tau, u_1(\tau), u_1^\Delta(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau), u_2^\Delta(\tau))| \nabla \tau \right) \nabla s \\
& \leq \int_0^T \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(t)|u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} + q(t)|u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1}) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q \left(\lambda \int_0^s (p(t)|u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} \right. \\
& \quad \left. + q(t)|u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1}) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_q \left(\lambda \int_0^s \left(p(t) |u_1(\tau) - u_2(\tau)|^{p-1} + q(t) |u_1^\Delta(\tau) - u_2^\Delta(\tau)|^{p-1} \right) \nabla \tau \right) \nabla s \\
& \leq \int_0^T \Phi_q(\lambda) \|u_1 - u_2\|_1 \psi(s) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \int_0^T (T-s) \Phi_q(\lambda) \|u_1 - u_2\|_1 \psi(s) \nabla s \\
& + \frac{\gamma}{d} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \Phi_q(\lambda) \|u_1 - u_2\|_1 \psi(s) \nabla s \\
& = \Phi_q(\lambda) \|u_1 - u_2\|_1 \left\{ \int_0^T \psi(s) \nabla s \right. \\
& \left. + \frac{\gamma}{d} \left[\int_0^T (T-s) \psi(s) \nabla s + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \psi(s) \nabla s \right] \right\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_1 \leq \Phi_q(\lambda) \|u_1 - u_2\|_1 M$$

olur. Eğer $\lambda^* = \left(\frac{1}{2M}\right)^{p-1}$ seçersek $0 < \lambda < \lambda^*$ için

$$\|Fu_1 - Fu_2\|_1 \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_1$$

olur. Bu ise çelişkidir. O halde (4.1)-(4.2) probleminin aşikar olmayan $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1[0, T]$ çözümü yoktur.

Teorem 4.2.2. Kabul edelim ki (A1)-(A2) koşulları sağlansın ve $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sol-yoğun sürekli, $t \in [0, T]$ için $f(t, 0, 0) \neq 0$ ve

$$0 \leq L = \lim_{|u|+|v| \rightarrow \infty} \sup \max_{t \in [0, T]} \frac{|f(t, u, v)|}{|u|^{p-1} + |v|^{p-1}} < \infty \quad (4.1.3)$$

olsun. O halde $\lambda^* > 0$ sabiti vardır öyle ki herhangi $0 < \lambda \leq \lambda^*$ için (4.1)-(4.2) problemi $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1([0, T], \mathbb{R})$ olacak şekilde en az bir aşıkır olmayan çözüme sahiptir.

İspat $\varepsilon > 0$ olsun öyle ki $L + 1 - \varepsilon > 0$. (4.1.3)'den $\exists H > 0$ öyle ki

$$|f(t, u, v)| \leq (L + 1 - \varepsilon)(|u|^{p-1} + |v|^{p-1})$$

burada $|u| + |v| \geq H, 0 \leq t \leq T$ 'dir.

$$K = \max_{t \in [0, T], |u| + |v| \leq H} |f(t, u, v)|$$

olsun. O halde $\forall (t, u, v) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$$|f(t, u, v)| \leq (L + 1 - \varepsilon)(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}) + K$$

eşitsizliği yazılabilir. Teorem 4.2.1'den biliyoruz ki (4.1)-(4.2) denkleminin en az bir aşıkır olmayan çözümü vardır.

Sonuç 4.2.2. (A1)-(A2) koşulları sağlansın ve $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sol-yoğun sürekli, $t \in [0, T]$ için $f(t, 0, 0) \not\equiv 0$ ve

$$0 \leq L = \lim_{|u| + |v| \rightarrow \infty} \sup \max_{t \in [0, T]} \frac{|f(t, u, v)|}{|u|^{p-1}} < \infty$$

$$0 \leq L = \lim_{|u| + |v| \rightarrow \infty} \sup \max_{t \in [0, T]} \frac{|f(t, u, v)|}{|v|^{p-1}} < \infty$$

olsun. O halde $\lambda^* > 0$ sabiti vardır ve herhangi $0 < \lambda \leq \lambda^*$ için (4.1)-(4.2) problemi en az bir aşıkır olmayan çözüme sahiptir.

Örnek 4.2.1. Aşağıdaki üçüncü mertebe özdeğer problemini düşünelim

$$(\Phi_3(u''))' + \lambda \left(\frac{u^2 t \sin t}{t^2 + 1} - t(\cos u')^2 + t(1 + t) \right) = 0, t \in (0, 1) \quad (4.1.4)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{1}{2}u\left(\frac{3}{4}\right), \quad u''(0) = 0 \quad (4.1.5)$$

$f: [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tamamen sürekli olduğunu kontrol etmek kolaydır. Burada $p = 3, m = 3, a_1 = \frac{1}{2}, \xi_1 = \frac{3}{4}, \alpha = 1, \beta = 0$ 'dır. O halde

$$\left| \frac{u^2 t \sin t}{t^2 + 1} - t(\cos u')^2 + t(1 + t) \right| \leq \frac{t}{t^2 + 1} |u|^2 + t|u'|^2 + t^2$$

yazabiliriz. Aşağıdaki hesaplamalar yapıldığında

$$\varphi(s) = \Phi_q \left(\int_0^s \left(\frac{\tau}{\tau^2 + 1} + \tau \right) d\tau \right) = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2} \ln s^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d = \frac{5}{8},$$

$$M = \int_0^T \varphi(s) ds + \frac{\alpha T + \beta + \alpha + d}{d} \int_0^T (T - s) \varphi(s) ds$$

$$+ \frac{\alpha T + \beta + \alpha}{d} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\xi_i} (\xi_i - s) \varphi(s) ds$$

$$= \int_0^1 \varphi(s) ds + \frac{1.1 + 1 + \frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} \int_0^1 (1 - s) \varphi(s) ds + \frac{1.1 + 1}{\frac{5}{8}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4} - s \right) \varphi(s) ds$$

$$= 0.4772 + 0.6792 + 0.1104$$

$$= 1.2668.$$

olur. Böylece

$$\lambda^* = \left(\frac{1}{2M} \right)^2 = 0.1558$$

olur. O halde Teorem 4.2.1'den $\lambda \in (0, 0.1558]$ için (4.1.4) -(4.1.5) probleminin herhangi aşıkâr olmayan bir $u^* \in \mathbb{C}_{ld}^1([0,1], \mathbb{R})$ çözümüne sahip olduğunu biliyoruz.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalasında p -Laplacian üçüncü mertebeden sınır değer problemi ve özdeğer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini verecek sonuçlar ispatlanmıştır. Ardından bu problemlerin pozitif çözümlerinin varlığı ispatlanmış ve birer örnek verilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Agarwal, R. and Bohner, M.**, 1999, Basic calculus on time scales and some of its applications , Results Math., 35(1-2):3-22 p.
- Agarwal, R. P. and O'Regan, D.**, 2000, Triple solutions to boundary value problems on time scales, Appl. Math. Lett., 13, 7-11p.
- Anderson, R.**, 2002, Solutions to second order three point problems on time scales, J. Difference Equ. Appl., 8, 673-688p.
- Avery, R. and Henderson, J.**, 2001, Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Comm. Appl. Nonlinear Anal., 8, 27-36p.
- Bohner, M. and Peterson, A.**, 2001, Dynamic Equations on time scales, An Introduction with Applications, Birkhäuser.
- Bohner, M. and Peterson, A.**, 2003, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, Boston.
- Cabada, A.**, 2001, Finite Extremal solutions for the difference ϕ -Laplacian problem with nonlinear functional boundary conditions, Comput. Math. Appl., 42, 593-601p.
- Deimling, K.**, 1985, Nonlinear Functional Analysis, Springer, Newyork .
- Guo, D. and Lakshmikantham, V.**, 1988, Nonlinear Problems in Abstract Cones, Academic Press, San Diego.
- Guo, Y., Yu, C. and Wang, J.**, 2009, Existence of three positive solutions for m-point boundary value problems on infite intervals, Nonlinear Anal., 71 (3-4), 717-722p.
- Guseinov, G. Sh.**, 2000-2001, Zaman Skalasında dinamik sistemler I-II, Ders Notları
- Hang, W. and Liu, M.**, 2009, Existence and uniqueness of a nontrivial solution for a class of third-order nonlinear p-Laplacian m-point eigenvalue problems on time scales, Nonlinear Anal., 70 (5), 1877-1889p.
- Hao, Z.C. and Debnath, L.**, 2005, On eigenvalue intervals and eigenfunctions of fourth-order singular boundary value problems, Appl. Math. Lett., 18, 543-553p.
- He, X.M.**, 2003, The existence of positive solutions of p- Laplacian equation, Acta Math. Sin., 46 (4), 805-810p

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- He, Z.M.**, 2005, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p -Laplacian equations on time scales, J. Comput. Appl. Math., 182 (2), 304 – 315p.
- Hilger, S.**, 1988, Ein Masskettenkalkül mit Anwendug auf zentrumsmanningfaltigkeiten, Phd Thesis, Universitat Würzburg
- Krasnosel'skii, M.A.**, 1964, Positive Solutions of Operator Equations.
- Legget, R.W. and Williams, L.R.**, 1979, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Indiana Univ. Math. J., 28, 673-688p.
- Liang, S., Zhang, J., and Wang, Z.**, 2009, The existence of three positive solutions of m -point boundary value problems for some dynamic equations on time scales, Math. Comput. Modelling, 49, 1386-1393p.
- Liu, B.**, 2004, Positive solutions three-points boundary value problems for one dimensional p -Laplacian with infinitely many singularities, Appl. Math. Lett., 17, 655-661p.
- Li, S.H.**, 2006, Positive solutions of nonlinear singular third-order two-point boundary value problem, J. Math. Anal. Apply., 323, 413-425p.
- Song, C. and Weng, P.**, 2008, Multiple positive solutions for p -Laplacian functional dynamic equations on time scales, Nonlinear Analysis, 68, 208-215p.
- Sun, H.R. and Li, W.T.**, 2007, Positive solutions of singular third-order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Apply., 306, 589-603p.
- Sun, Y.P.**, 2005, Existence theory for positive solutions to one dimensional p -Laplacian boundary value problems on time scales, J. Differential Equations, 240, 217-248p.

ÖZGEÇMİŞ

10.05.1987 tarihinde Adana’da doğdu. İlköğrenimi, orta öğrenimini ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2009 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu.

2009 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.