



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR GRAFIN TERS WIENER ENERJİSİ VE
TERS WIENER-ESTRADA İNDEKSİ**

Sezin ÇİZMECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

OCAK-2011
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Sezin ÇİZMECİ tarafından hazırlanan “Bir grafin ters Wiener enerjisi ve ters Wiener-Estrada indeksi” adlı tez çalışması 11/02/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL

Danışman

Doç. Dr. Ayşe Dilek MADEN (GÜNGÖR)

Üye

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Bayram SADE
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Sezin ÇİZMECİ

Tarih:11.02.2011

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR GRAFIN TERS WIENER ENERJİSİ VE TERS WIENER-ESTRADA İNDEKSİ

Sezin ÇİZMECİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Dilek MADEN (Güngör)

2011, 41 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. A. Dilek MADEN
Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Bu çalışma tarafımızdan ilk defa tanımlanan basit bağlantılı bir grafin ters Wiener enerjisi ve ters Wiener-Estrada indeksi üzerinedir. Öncelikle bir grafin ters Wiener enerjisi ve ters Wiener-Estrada indeksi tanımlanmış ve daha sonra bu invariantlar için bazı sınırlar elde edilmiştir. Sonuç olarak elde edilen bu sınırlar örnekler üzerinde değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ters Wiener Matris, Enerji, Ters Wiener Enerji, Estrada İndeks, Ters Wiener-Estrada İndeks.

ABSTRACT

MSC THESIS

**BOUNDS FOR THE REVERSE WIENER ENERGY AND THE REVERSE
WIENER-ESTRADA INDEX OF A GRAPH**

Sezin ÇİZMECİ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. A. Dilek MADEN (Güngör)

2011, 41 Pages

Jury

**Doç. Dr. A. Dilek MADEN
Prof. Dr. İ. Naci CANGÜL
Prof. Dr. A. Sinan ÇEVİK**

In this study, as the first time in the literature, it has been defined and studied the reverse Wiener energy and the reverse Wiener-Estrada index for a simple connected graph. First of all, the reverse Wiener energy and the reverse Wiener-Estrada index of a graph have been defined. Then some bounds over these invariants have been constructed. Consequently, it has been given some examples for these above results that are obtained.

Keywords: Reverse Wiener Matrix, Energy, Reverse Wiener Energy, Estrada Index, Reverse Wiener-Estrada Index.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. A. Dilek MADEN (Güngör) yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ilk olarak konuların öneminden bahsedilmiş ve çalışmamızda yararlanacağımız tanım ve teoremlerle birlikte literatür hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde basit bağlantılı bir grafın *ters Wiener enerjisi* ve *ters Wiener-Estrada indeksi* tanımlanmış olup, bu enerji ve indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca *ters Wiener enerji* ve *ters Wiener-Estrada indeks* arasında bir bağıntı elde edilmiştir. Üçüncü bölümde bulunan sınırlar bir örnek üzerinde irdelenmiştir. Dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Çalışma süresince bana yol gösteren ve tüm kolaylığı sağlayan danışman hocam sayın Doç. Dr. A. Dilek MADEN (Güngör)' e ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Sinan ÇEVİK'e ve de her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Sezin ÇİZMECİ
KONYA-2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
ÖNSÖZ	VI
İÇİNDEKİLER	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	VIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Graf Teori	1
1.2. Tanımlar ve Parametreler.....	2
1.2.1. Graf, nokta derecesi, regüler (düzenli) graf ve tam graf	2
1.2.2. Grafta yol ve bağlantılılık	4
1.2.3. Komşuluk, uzaklık, Laplacian ve ters Wiener matrisler	5
1.2.4. Bir grafın enerji ve Estrada indeks çeşitleri.....	8
1.2.5. Bazı lineer cebir tanımları	10
1.2.6. Bazı reel sayı eşitsizlikleri ve artan-azalan fonksiyonlar.....	12
1.3. Kaynak araştırması	14
2. BİR GRAFIN TERS WIENER ENERJİSİ VE TERS WIENER-ESTRADA İNDEKSİ.....	17
2.1. Bir Grafın Ters Wiener Enerjisi	17
2.2. Bir Grafın Ters Wiener-Estrada İndeksi	24
2.3. Bir Grafın Ters Wiener Enerjisi ve Ters Wiener-Estrada İndeksi Arasındaki Bağınıtı.....	30
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	32
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	37
5. KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	41

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{R}	Reel sayılar
$\text{iz}(A)$	A matrisinin izi
$M_n(\mathbb{C})$	$n \times n$ tipindeki kompleks elemanlı matrislerin kümesi
\mathbb{C}	Karmaşık sayılar
G	Herhangi bir graf
V_G	G grafının nokta kümesi
A_G	G grafının komşuluk matrisi
$\dots \lambda_{\min}$	A_G nin en küçük özdeğeri
$\dots \lambda_{\max}$	A_G nin en büyük özdeğeri
$\dots \lambda_i$	A_G nin i - inci özdeğeri
x^T	x vektörünün transpozu
x^*	x vektörünün eşlenik transpozu
D_G	G grafının nokta derecelerinin köşegen matrisi
d_1, d_2, \dots, d_n	G grafının derece dizisi
D_1, D_2, \dots, D_n	G grafının uzaklık derece dizisi
T_1, T_2, \dots, T_n	G grafının ikinci uzaklık derece dizisi
Z_G	Zagreb indeksi
K_n	n noktalı tam graf
N_n	Boş graf (Kenar içermeyen graf)
L_G	G grafının Laplacian matrisi
$\dots \alpha_i$	L_G nin i - inci özdeğeri
U_G	G grafının uzaklık matrisi
$\dots \mu_i$	$U(G)$ nin i - inci özdeğeri
$\dots u_{ij}$	i ve j noktaları arasındaki en kısa uzaklık
$G V_i$	G nin i - inci bileşeni

d_{\max}	Maksimum derece
d_{\min}	Minimum derece
$RW\ G$	G grafinın Ters Wiener matrisi
$\dots \beta_i$	$RW\ G$ nin i - inci özdeğeri
$\dots R$	$RW\ G$ nin elemanlarının toplamı
$\dots \nabla$	$RW\ G$ nin determinantının mutlak değeri
$\dots rw_{ij}$	i ve j noktaları arasındaki ters Wiener uzaklığı
Δ	G grafinın apı
$E\ G$	G grafinın enerjisi
$LE\ G$	G grafinın Laplacian enerjisi
$EE\ G$	G grafinın Estrada indeksi
$LEE\ G$	G grafinın Laplacian-Estrada indeksi
$UE(G)$	G grafinın uzaklık enerjisi
$UEE(G)$	G grafinın uzaklık Estrada indeksi
$RWE\ G$	G grafinın Ters Wiener enerjisi
$RWEE\ G$	G grafinın Ters Wiener-Estrada indeksi

1. GİRİŞ

1.1. Graf Teori

Graf teori gerçekte 20. yüzyılda gelişme göstermesine rağmen, aslının Königsberg (bugün Rusya'da Kaliningrad) Köprüleri denilen probleme dayandığı kabul edilir. 1736'da *Euler'in* çözdüğü bulmacaya benzer bir problem olan Königsberg Köprüleri problemi şöyle ifade edilebilir; kentin herhangi bir yerinden yola çıkıp, kentteki yedi köprüden yalnızca bir kez geçerek başlangıç noktasına geri dönmek mümkün müdür?

Graf teori her şeyden önce çözümünü aranan bir problemi ya da bir işi en etkin şekilde temsil edebilmeye ve düzenlemeye yardımcı olur. Bunun için bir problem, graf yapısına dönüştürüldükten sonra, problemin tüm amaçlarını yerine getirecek en hızlı veya en az masraflı yolu bulmak için sistematik yöntemler aranır. Bu durumun doğal bir sonucu olarak, graf teori pek çok değişik uygulama alanlarına sahiptir. Bunlardan bazıları; ulaşım ağlarının optimizasyonunda (yol ya da bilgi ulaşımı), elektrik şebekeleri kavramında, haberleşme ağlarında, istatistiksel mekanikte, kimyasal formüllerde, bilgisayar kuramında, toplumsal bilimlerde, coğrafyada, mimarlıkta,...vb. *Çizgi kuramı* olarak da bilinen graf teorisinin gelişmesinin en önemli nedeni, diğer pek çok bilim dallarına uygulanabilir olmasıdır. Çünkü örneğin; teorik bilgisayar bilimlerindeki karmaşık problemlerin çoğu, graf teori problemlerine dönüştürülerek çözülebilmektedir. Bunun dışında, matematiğin diğer bilim dallarıyla ortak alana sahip olması da graf teorisinin önemini arttırmaktadır.

Graflar; matematik alanında, temel matris yapılarını, formülleri, hesaplamaları, fikirleri ve sonuçları aydınlatmada kullanılır. Bu şekildeki bir yaklaşım ise, matris teori ve bazı örneklerdeki konuların daha iyi anlaşılmasına ve daha iyi tanımlanmasına katkı sağlar.

Spectral graf teori; grafi temsil eden bazı matrislerin *özdeğerleri* ve *özvektörlerinin* kullanılarak incelendiği graf teorisinin önemli alt dallarından biridir. Buradaki amaç, grafın belirli özellikleri hakkında bilgi edinmektir.

Bir grafın *enerjisi* ve *Estrada indeksi* parametreleri grafın özdeğerlerini ihtiva ettiğinden bu konular da *spectral graf teori* alanına girmektedir.

Şimdi bunlardan biraz bahsedelim.

G nin enerjisi *Ivan Gutman* tarafından 1978 yılında ortaya atılmış ve teorik kimya sonuçlarından esinlenilerek graf teoriye kazandırılmıştır.

Grafın enerjisi son zamanlarda popüler bir konu olmasından dolayı bu tanıma benzer birçok tanım yapılmıştır. Bunlardan biri de bir grafın *Estrada indeksi* kavramıdır.

Ernesto Estrada tarafından 2000 yılında tanımlanan bu kavram özellikle proteinlerin ve diğer uzun zincirli biyopolimerlerin bağ derecelerinin karakterizasyonlarında kullanılmıştır. Bir grafın Estrada indeksi son zamanlarda yine üzerinde yoğun bir şekilde çalışılan diğer bir konudur.

Şimdi çalışmamızda yararlanacağımız bazı temel kavramları örnekleri ile birlikte vererek, bunları teoremler yardımı ile kuvvetlendirelim.

Aksi belirtilmedikçe, aşağıda tanımları verilen kavramların kaynağı ‘Aldous ve ark., (2000)’ dir.

1.2. Tanımlar ve Parametreler

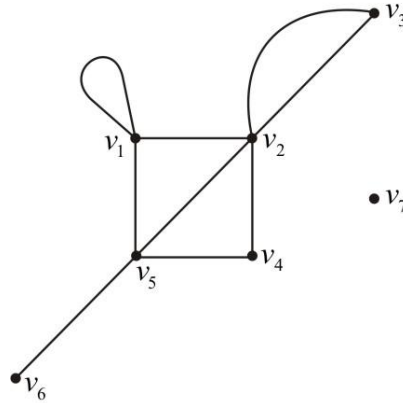
1.2.1. Graf, Nokta Derecesi, Regüler (Düzenli) Graf ve Tam Graf

V boştan farklı bir küme ve E , her elemanı V nin elemanlarının oluşturduğu sıralı olmayan ikililerden oluşan bir küme olmak üzere V ve E kümelerinden oluşan yapıya graf denir. Kısaca $G = V, E$ biçiminde gösterilir. V nin elemanlarına *noktalar*, E nin elemanlarına *kenarlar* denir.

Bir grafıta farklı iki noktayı birleştiren iki ya da daha fazla kenara *çoklu kenar*, bir noktayı kendisi ile birleştiren kenara ise *ilmek* denir. İlmeği ya da çoklu kenarı olmayan grafa da *basit graf* denir. Ayrıca çoklu kenar ve ilmeklere sahip grafa *çoklu graf (multigraph)* denir.

Herhangi bir $G = V, E$ grafında, nokta kümesi V nin alt kümesi ve kenar kümesi de E nin alt kümesi olan grafa G nin bir *alt grafi* denir. G grafi, nokta kümesi $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ olan bir graf olmak üzere v_i ve v_j noktaları kenar oluşturuyor ise bu noktalara komşudur denir ve $v_i \square v_j$ veya $v_i, v_j \in E$ şeklinde gösterilir. Aksi takdirde komşu değildir denir ve $v_i \not\square v_j$ veya $v_i, v_j \notin E$ şeklinde gösterilir.

Herhangi bir v_i noktasının derecesi v_i ye komşu olan noktaların sayısı olup d_i ile gösterilir. Derecesi 0 olan noktaya *izole nokta* ve derecesi 1 olan noktaya ise *pendant (asılı) nokta* denir.



Şekil 1.2.1.1

Yukarıdaki grafın noktalarının dereceleri, $d_1 = 4$, $d_2 = 5$, $d_3 = 2$, $d_4 = 2$, $d_5 = 4$, $d_6 = 1$ ve $d_7 = 0$ olup v_7 izole nokta ve v_6 pendant (asılı) noktadır.

Graf teoride Euler teoremi adı altında geçen ve çalışmamızda sıklıkla kullanacağımız teoremi ifade edelim.

Herhangi bir grafta nokta derecelerinin toplamı, kenar sayısının iki katı olup; tek dereceli noktaların sayısı da çifttir.

Özel bir graf olan düzenli (regüler) grafın tanımı da aşağıdaki gibi verilebilir.

Bir G grafının her bir noktası aynı dereceye sahipse bu grafa *düzenli (regüler) graf* denir. Her bir nokta derecesi r olan graf *r -düzenli graf (r -regüler graf)* olarak adlandırılır.

Farklı noktalarının her bir çifti komşu olan G grafına ise *tam graf* denir. n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir.

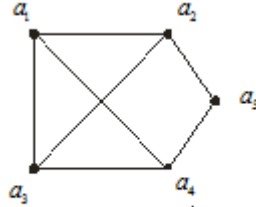
1.2.2. Grafta Yol ve Bağlantılılık

Bir grafın nokta kümesi $V G = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n$ olsun. Grafın herhangi a_i noktasından başlayıp ardı ardına k kenarın dizilmesiyle oluşan

$$\underbrace{v_1 v_3, v_3 v_2, v_2 v_1, \dots, v_{n-1} v_n}_k$$

formuna, G de k uzunluğunda bir *yürüme* denir. Aynı noktada başlayıp biten bir yürümeye G de *kapalı yürüme*, eğer bu yürümede $i \neq j$ için $v_i \neq v_j$ oluyorsa bu yürümeye de *yol* denir. Başlangıç ve bitiş noktaları hariç bütün noktaları farklı olan kapalı bir yürüme ise G grafında bir *devir* denir.

Aşağıdaki gibi bir graf verilsin.



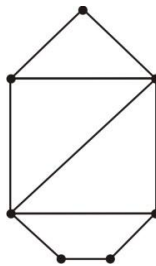
Şekil 1.2.2.1

Bu grafta $a_2a_3a_2a_3a_4$ yazımı *beş* uzunluğunda bir yürüme, $a_3a_4a_1a_2a_3$ *kapalı bir yürüme*, son olarak $a_1a_2a_3a_4a_3$ yazımı bir *yol* ve $a_1a_4a_3a_3a_1$ ise bir *devirdir*.

G nin v_i ve v_j noktaları arasında bir yol var ise bu noktalara bağlantılıdır denir. Eğer G grafının her nokta çifti arasında bir yol var ise bu grafa da *bağlantılı graf* denir.

Bağlantılılık bağıntısı V üzerinde bir denklik bağıntısıdır. V_1, V_2, \dots, V_r denklik sınıfları olmak üzere $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_r]$ alt graflarına G nin bileşenleri denir. $r = 1$ olması durumunda graf bağlantılıdır. Aksi takdirde r bileşene sahip bağlantısız bir graftır.

Aşağıda bağlantılı bir graf örneği verilmiştir.



Şekil 1.2.2.2

1.2.3. Komşuluk Matrisi, Uzaklık Matrisi, Laplacian ve Ters Wiener Matrisleri

Bu kısımda, kullanacağımız basit bir grafın *komşuluk*, *uzaklık*, *Laplacian* ve *ters Wiener matrislerinin* tanımlarını verip bu tanımların bir örnek üzerinde uygulamasını verelim.

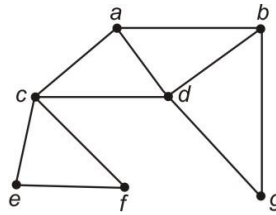
G grafı, nokta kümesi $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olan bir graf olsun. G nin *komşuluk matrisi*

$$A_G = [a_{ij}] = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $n \times n$ simetrik bir matristir.

Aşağıdaki gibi bir G grafı verilsin.

Örnek 1.2.3.1.



Şekil 1.2.3.1

Bu grafın *komşuluk matrisi*

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Şekil 1.2.3.1 göz önüne alındığında bu grafın noktalarının dereceleri $d_a = 3$, $d_b = 3$, $d_c = 4$, $d_d = 4$, $d_e = 2$, $d_f = 2$, $d_g = 2$ olup nokta derecelerinin matrisi

$$D G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $A G$ ve $D G$ matrisleri yardımıyla, verilen bir G grafının *Laplacian matrisi*

$$L G = D G - A G$$

olacak şekilde yine $n \times n$ simetrik bir matris olarak tanımlanır. Aynı zamanda bu $L G$ matrisinin

$$L G_{ij} = \begin{cases} d_i, & v_i = v_j \text{ ise} \\ -1, & v_i \neq v_j \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilebileceği açıktır. Böylece Şekil 1.2.3.1 in *Laplacian matrisi*

$$L G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & -3 & -1 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & -1 & -3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

G nin herhangi v_i ve v_j noktaları arasındaki en kısa yolun uzunluğu, bu noktalar arasındaki en kısa uzaklık olup u_{ij} ile gösterilir. Bu takdirde, G nin uzaklık matrisi, $U = [u_{ij}]$ olacak şekilde tanımlı $n \times n$ simetrik bir matristir.

Şekil 1.2.3.1 grafını göz önüne alalım. Bu grafın uzaklık matrisi

$$U \ G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Bir grafta her nokta çifti arasındaki uzaklıkların maksimumuna G grafinin çapı denir ve Δ ile gösterilir.

$$G \text{ nin } RW = RW \ G = [\Delta - d_{ij}] \text{ ters Wiener matrisi}$$

$$RW_{ij} = \begin{cases} \Delta - d_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $n \times n$ simetrik bir matristir (Zhou ve ark., 2007).

Tekrar Şekil 1.2.3.1 grafini göz önüne alırsak $\Delta = 3$ olduğu için bu grafin *ters Wiener matrisi*

$$RW = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Çalışmamızda sıkça kullanacağımız bir grafin bazı *enerji ve Estrada indeks* çeşitlerini tanımlayalım.

1.2.4. Bir grafın enerji ve Estrada indeks çeşitleri

G grafi, *komşuluk matrisi* A_G olan bir graf olsun. Bu takdirde A_G nin özdeğerlerine G grafının özdeğerleri denir.

G grafi, n noktalı ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan bir graf olmak üzere G nin *enerjisi* (Gutman, 1978)

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

ve *Estrada indeksi* (Estrada, 2000)

$$EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$$

biçiminde tanımlanır.

G grafi *uzaklık matrisi* U_G olan bir graf olsun. Bu takdirde U_G nin özdeğerlerine G grafının *uzaklık özdeğerleri* denir.

G grafi *uzaklık özdeğerleri* $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ olan n noktalı bir graf olsun. Bu takdirde G nin *uzaklık enerjisi* (Indulal ve ark., 2008)

$$UE(G) = \sum_{i=1}^n |\mu_i|$$

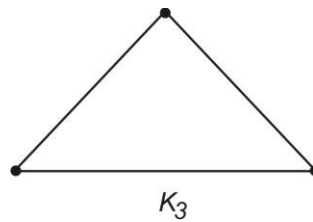
ve *uzaklık Estrada indeksi* (Güngör ve ark., 2009)

$$UEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\mu_i}$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki grafi göz önüne alalım.

Örnek 1.2.4.1.



Şekil 1.2.4.1

Bu grafın *komşuluk matrisi*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2 \text{ ve } \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

dir. Böylece bu grafın *enerjisi* ve *Estrada indeksi*

$$E(G) = \sum_{i=1}^3 |\lambda_i| = 4$$

ve

$$EE(G) = \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i} \cong 8.12$$

olarak elde edilir. Uzaklık enerjisi ve uzaklık Estrada indeksi de

$$UE(G) = \sum_{i=1}^3 |\mu_i| = 4$$

$$UEE(G) = \sum_{i=1}^3 e^{\mu_i} \cong 8.12$$

şeklindedir. ■

G grafı, *Laplacian matrisi* $L(G)$ olan bir graf olsun. Bu takdirde $L(G)$ nin özdeğerlerine G grafının *Laplacian özdeğerleri* denir.

G grafı, n noktalı ve m kenarlı bir graf ve G nin *Laplacian özdeğerleri* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i - \frac{2m}{n} \right|$$

ifadesine G grafının *Laplacian enerjisi* (Gutman ve ark., 2006) ve

$$LEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i}$$

ifadesine de G grafının *Laplacian-Estrada indeksi* denir (Li ve ark., 2009).

Şekil 1.2.4.1 grafını göz önüne alırsak bu grafın *Laplacian matrisi*

$$L G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olup, *Laplacian özdeğerleri*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 3 \text{ ve } \alpha_3 = 0$$

dir. Böylece bu grafın *Laplacian enerjisi* ve *Laplacian-Estrada indeksi*, nokta ve kenar sayısı sırasıyla $n = 3$ ve $m = 3$ olmak üzere

$$LE G = \sum_{i=1}^3 |\alpha_i - 2| = 4$$

ve

$$LEE G = \sum_{i=1}^3 e^{\alpha_i} \cong 41.17$$

olarak elde edilir.

1.2.5. Bazı lineer cebir tanımları

Tanım 1.2.5.1. (Bozkurt ve ark., 2003) $A : T \rightarrow T$ lineer dönüşümü vektör uzayı ve $x \in T$ sıfırdan farklı bir vektör olmak üzere

$$A x = \lambda x$$

eşitliğini sağlayan bir λ sayısına A dönüşümünün *özdeğeri*, x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* denir.

Özdeğer ve özvektörler için aşağıdaki özellikler vardır.

a A matrisi tekil ise, en az bir özdeğeri sıfırdır. A tekil değil ise tüm özdeğerleri sıfırdan farklıdır.

b Birim matrisin bütün özdeğerleri 1 dir.

c A köşegen bir matris ise, özdeğerler bu matrisin köşegen elemanlarıdır.

d A simetrik bir matris ise, tüm özdeğerleri reeldir.

e A Hermityen bir matris ise, tüm özdeğerleri reeldir.

f A^{-1} matrisinin özdeğerleri, A nın özdeğerlerinin tersine eşittir.

g Reel simetrik bir matrisin tüm özvektörleri karşılıklı ortogondur.

h A ve A^T matrislerinin özdeğerleri aynıdır.

i Bir matrisin özdeğerlerinin toplamı o matrisin köşegen elemanları toplamına (izine) eşittir.

j Eğer bir A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektör v ise, c bir sabit olmak üzere cv de A matrisinin özvektörüdür.

Teorem 1.2.5.1. (Zhang F., 1999) (Schur Teoremi)

$A = [a_{jk}]_{n \times n}$ tipinde bir matris ve A matrisinin özdeğerleri de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun.

Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2$$

olur.

Lemma 1.2.5.1. (Zhou B. ve ark., 1998) $n \geq 2$ için $B = B_{ij}$ matrisi, negatif olmayan, indirgenemez, simetrik bir matris ve satır toplamları B_1, B_2, \dots, B_n olsun. $\lambda_1(B)$, B nin en büyük özdeğeri olmak üzere

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n B_i^2}{n}} \leq \lambda_1(B) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n B_{ij} \sqrt{\frac{B_j}{B_i}}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $B_1 = B_2 = \dots = B_n$ olmasıdır.

1.2.6. Bazı Reel Sayı Eşitsizlikleri ve Artan - Azalan Fonksiyonlar

Teorem 1.2.6.1. (Cauchy Schwartz Eşitsizliği) a_1, a_2, \dots, a_n ve b_1, b_2, \dots, b_n reel sayı

dizileri olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin eşitlik olması için gerek ve yeter şart her bir $1 \leq i \leq n$ için $a_i = r b_i$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{R}$ olmasıdır.

Teorem 1.2.6.2 (Marshall ve ark., 1979) (Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği) Negatif olmayan n tane a_1, a_2, \dots, a_n reel sayıları için

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olmasıdır.

Teorem 1.2.6.3 (Horn ve ark., 1985) (Rayleigh Rit'z Oranı) $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermityen ve A nın özdeğerleri

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$$

olacak şekilde sıralı verilsin. Bu takdirde, $\forall x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_1 x^* x \leq x^* A x \leq \lambda_n x^* x$$

dir. Yani

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \max_{x^* x = 1} x^* A x$$

ve

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^* A x}{x^* x} = \min_{x^* x = 1} x^* A x$$

dir.

Şimdi de artan-azalan fonksiyonlardan bahsedelim.

$f : B \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ iken

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

ise $f(x)$ fonksiyonuna B üzerinde *monoton artan* fonksiyon,

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ise $f(x)$ *kesin artan* fonksiyondur denir. Benzer şekilde, her $x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ iken

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

ise $f(x)$ B üzerinde *monoton azalan* fonksiyon,

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ise $f(x)$ *kesin azalan* fonksiyondur denir.

Bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta *monoton artan*, eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta *monoton azalan* fonksiyondur.

Bir aralıkta monoton artan veya kesin artan fonksiyona kısaca *artan fonksiyon*, benzer şekilde monoton azalan veya kesin azalan fonksiyona da *azalan fonksiyon* denir. Buna göre bir aralık üzerinde türevlenebilen bir fonksiyonun türevinin işaretine bakarak fonksiyonun bu aralık üzerinde artan veya azalan olup olmadığına karar verilebilir.

1.3. Kaynak Araştırması

Bu kısımda çalışmalarımız ile ilgili literatür hakkında bilgiler verelim.

M. Edelberg ve arkadaşları (1974) çalışmalarında, n noktalı bir T ağacının uzaklık matrisinin karakteristik polinomunun bir dizi özelliklerini araştırmışlar ve bu polinomun ilk birkaç ve son birkaç katsayısı için basit ifadeler bulmuşlardır.

J. A. Rodriguez (2005) çalışmasında, basit bir grafın Laplacian matrisinin farklı bir versiyonunu tanımlamış ve Laplacian veya komşuluk matrisinin özdeğerlerinden oluşan Randic indeks üzerine sınırlar elde etmiştir.

I. Gutman ve B. Zhou (2006) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı bir G grafının Laplacian enerjisini tanımlamışlar daha sonra bu grafın enerjisi ve Laplacian enerjisi arasındaki bazı önemli farklar üzerinde durmuşlardır.

B. Zhou ve N. Trinajstić (2007) çalışmalarında, bağlantılı bir grafın ters Wiener matrisinin en büyük özdeğeri için bazı sınırlar elde etmişler ve bu sonuçları Nordhaus-Gaddum cinsinden ifade etmişlerdir.

J. A. De La Pena ve arkadaşları (2007) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı bir G grafının Estrada indeksi için nokta ve kenar sayısını ihtiva eden bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca Estrada indeks için grafın enerjisini de ihtiva eden bazı üst sınırlar elde etmişlerdir.

I. Gutman (2008) çalışmasında, n noktalı, m kenarlı bir G grafının Estrada indeksi için nokta ve kenar sayısını ihtiva eden bazı alt sınırlar elde etmiştir.

H. S. Ramane ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı bir G grafının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

H. S. Ramane ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı bir T ağacının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

G. Indulal ve arkadaşları (2008) çalışmalarında, n noktalı ve çapı ikiyi geçmeyen bir G grafının uzaklık enerjisi için bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

G. Indulal (2009) çalışmasında, uzaklık derece dizisi D_1, D_2, \dots, D_n ve ikinci uzaklık derece dizisi T_1, T_2, \dots, T_n olan n noktalı bir G grafının uzaklık enerjisi için bu değerlerin kareleri toplamını ihtiva eden bir üst sınır elde etmiştir.

B. Zhou ve I. Gutman (2009) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı ve derece dizisi d_1, d_2, \dots, d_n olan bir G grafının Laplacian-Estrada indeksi için nokta sayısını,

kenar sayısını ve grafın ilk Zagreb indeksi olan $Z G = \sum_{i=1}^n d_i^2$ yi ihtiva eden bazı alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

C. Adiga ve M. Smitha (2009) çalışmalarında, yönlendirilmiş bağlantılı bir G grafının ters Laplacian enerjisini tanımlamışlar ve nokta sayısı ikiden küçük olmayan bu G grafının enerjisi için nokta sayısını ihtiva eden bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir.

C. Adiga ve Z. Khoshbakht (2009) çalışmalarında, yönlendirilmiş bir grafın ters Laplacian enerjisini tanımlamışlar ve bu yönlendirilmiş grafın ters Laplacian enerjisi için sınırlar elde etmişlerdir.

K. Das ve S. Lee (2009) çalışmalarında, bazı bağlantılı graflar için ($m \geq 1.8n + 4$ veya $m \geq n^2 / 6$) minimum Estrada indekse sahip yollar ve bu bağlantılı grafların Estrada indeksi için en iyi alt sınır elde etmişlerdir.

A. Dilek Güngör ve Ş. Burcu Bozkurt (2009) çalışmalarında, n noktalı bir G grafının uzaklık Estrada indeksi için nokta sayısını ihtiva eden alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca uzaklık Estrada indeksi için grafın enerjisini de içeren bir üst sınır vermişlerdir.

J. Li ve arkadaşları (2009) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı, maksimum derecesi d_{\max} ve minimum derecesi d_{\min} olan bir G grafının Laplacian-Estrada indeksi için nokta sayısı, kenar sayısı, maksimum ve minimum dereceyi ihtiva eden alt ve üst sınırlar ve de Laplacian Estrada indeksi için grafın Laplacian enerjisini içeren alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

J. Liu ve B. Liu (2010) çalışmalarında, n noktalı, m kenarlı iki parçalı bir G grafının Estrada indeksi için nokta ve kenar sayısını ihtiva eden alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

A. Dilek Güngör, A. Sinan Çevik, Eylem G. Karpuz, Fırat Ateş ve I. Naci Gangül (2010) çalışmalarında, n mertebeli A hermityen matrisinin Estrada indeksi için $iz(A)$ ifadesini içeren bir alt ve bir üst sınır elde etmişlerdir. Ayrıca bu A hermityen matrisinin Estrada indeks ve enerjisi arasında bir bağıntı elde etmişlerdir.

A. Dilek Güngör ve A. Sinan Çevik (2010) çalışmalarında, bir G grafının Harary enerjisini ve Harary-Estrada indeksini tanımlamışlar ve bu yeni enerji ve Estrada indeks için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

Ş. Burcu Bozkurt, A. Dilek Güngör, I. Gutman ve A. Sinan Çevik (2010) çalışmalarında, Randic enerjisi randic matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerleri

toplamı olarak tanıtmışlar ve bazı özelliklerini saptayarak bu enerji için alt ve üst sınırlar elde etmişlerdir.

I. Gutman (2007) çalışmasında, $E(G) \geq n$ şartını sağlayan n noktalı grafların çeşitli sınıflarını karakterize etmiştir.

2. BİR GRAFIN TERS WIENER ENERJİSİ VE TERS WIENER-ESTRADA İNDEKSİ

Bu bölümde, ilk defa literatüre kazandırdığımız tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir. Öncelikle ters Wiener matrisinden yararlanılarak yeni yapı tanımlayıcıları olarak da nitelendirebileceğimiz enerji ve Estrada indeks çeşidi tanımlanmış, bu parametreler için sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra ise bu iki parametre arasında bir bağıntı kurulmuştur.

2.1. Bir Grafın Ters Wiener Enerjisi

Öncelikle basit bağlantılı bir grafın *ters Wiener enerjisini* tanımlayarak bu enerji için elde ettiğimiz sınırları verelim.

Çalışmamız boyunca, G grafı n noktalı, m kenarlı, basit bağlantılı bir graf olarak düşünülecektir.

Tanım 2.1.1. G nin *ters Wiener özdeğerleri* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ olsun. Bu takdirde $RWE(G)$ ile gösterilen G grafının *ters Wiener enerjisi*

$$RWE(G) = \sum_{i=1}^n |\beta_i|$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 2.1.1. G nin *ters Wiener özdeğerleri* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ olsun. Buradan

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$$

ve

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2$$

eşitlikleri vardır.

İspat. Ters Wiener matrisin tanımından açıktır.

Şimdi *ters Wiener enerji* için ilk sınırlamızı verelim.

$$\text{Teorem 2.1.1.} \quad \sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2} \leq RWE \ G \leq \sqrt{2n \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2} \quad (2.1.1)$$

İspat. *Cauchy Schwartz eşitsizliğinden*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

dir. $a_i = 1$ ve $b_i = |\beta_i|$ seçersek

$$\left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \right)^2 \leq n \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i^2$$

olur. Buradan *ters Wiener enerji* tanımı ve Lemma 2.1.1'den

$$RWE^2 \ G \leq 2n \cdot \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2$$

elde edilir. Bu ise bize $RWE \ G$ için bir üst sınır verir. Ayrıca

$$RWE^2 \ G = \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n |\beta_i|^2 = 2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2$$

olup, böylece $RWE \ G$ için bir alt sınır elde edilir. ▀

Şimdi daha iyi bir alt sınır verelim.

Teorem 2.1.2. G nin *ters Wiener matrisinin* determinantının mutlak değeri ∇ ile gösterilsin. Bu takdirde

$$\sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2 + n \ n - 1 \ \nabla^{\frac{2}{n}}} \leq RWE \ G \quad (2.1.2)$$

dir.

İspat. *Ters Wiener enerjinin* tanımından

$$\begin{aligned}
RWE^2 G &= \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + 2 \sum_{i<j} |\beta_i| |\beta_j|, \\
&= 2 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + 2 \sum_{i<j} |\beta_i| |\beta_j|, \\
&= 2 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j|
\end{aligned}$$

olur. *Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| &\geq \left(\prod_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{i=1}^n |\beta_i|^{\frac{2}{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\
&= \left(\prod_{i=1}^n |\beta_i|^{\frac{2}{n}} \right) = \nabla^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$RWE^2 G \geq 2 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + n-1 \nabla^{\frac{2}{n}}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise istenen sonuçtur. ▀

Sırada $RWE G$ için farklı bir üst sınır yer almaktadır.

Teorem 2.1.3.

$$RWE G \leq \frac{2}{n} \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + \sqrt{n-1 \left[2 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 - \left(\frac{2}{n} \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 \right)^2 \right]} \quad (2.1.3)$$

İspat. *Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden*

$$\left(\sum_{i=2}^n |\beta_i| \right)^2 \leq n-1 \sum_{i=2}^n \beta_i^2$$

yazılabilir. Buradan

$$RWE G - \beta_1^2 \leq n-1 \left(2 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 - \beta_1^2 \right)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$RWE \ G \leq \beta_1 + \sqrt{n-1 \left(2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2 - \beta_1^2 \right)}$$

yazılır. Şimdi

$$f \ x = x + \sqrt{n-1 \left(2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2 - x^2 \right)}$$

diyelim. Burada $\beta_1 \geq 0$, $\beta_1 = x$ ve

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2$$

olduğundan

$$x^2 = \beta_1^2 \leq 2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2$$

ve böylece

$$x \leq \sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2}$$

elde edilir. $f' \ x = 0$ eşitliğinden

$$x = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2}$$

dir. Burada $f \ x$ azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2} \leq x \leq \sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2}$$

ve

$$\sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2} \leq \frac{2}{n} \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2 \leq \beta_1$$

olur. Böylece

$$f \ \beta_1 \leq f \left(\frac{2}{n} \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2 \right)$$

eşitsizlik sağlanmış olur. ▣

Lemma 2.1.2. $\Delta = 2$ ve G nin ters Wiener özdeğerleri de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^2 = 2m$$

dir.

İspat. G grafının ters Wiener matrisinde $2m$ tane eleman 1 ve $n^2 - 2m$ tane eleman da 0 olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r w_{ij} r w_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r w_{ij}^2, \\ &= 2m \cdot 1^2 + (n^2 - 2m) \cdot 0^2, \\ &= 2m \end{aligned}$$

elde edilir. ▣

Teorem 2.1.4. $\Delta = 2$ ve $RW(G)$ nin en büyük özdeğeri β_1 olsun. Bu durumda

$$\beta_1 \geq \frac{2m}{n}$$

eşitsizliği vardır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart G nin *regüler* olmasıdır.

İspat. $\Delta = 2$ olduğundan $RW(G)$ nin i . satırında d_i tane 1 ve $n - d_i$ tane 0 bulunmaktadır. $x = 1, 1, 1, \dots, 1$ bir vektör olsun. *Rayleigh Rit'z oranından*

$$\beta_1 \geq \frac{xRWx^T}{xx^T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{2m}{n}$$

elde edilir. G r -regüler (r -düzenli) ise $RW(G)$ nin her bir satır toplamı r ve buradan $\beta_1 = r$ olup eşitlik sağlanır. Tersini düşünülürse, yani eğer eşitlik var ise; x , β_1 e karşılık gelen bir özvektör ve böylece $RW(G)$ nin her satır toplamı eşit olur. i . satır toplamı d_i olduğundan bu durum her i için d_i lerin aynı değere sahip olmasını gerektirir, yani G nin regüler (düzenli) olmasını gerektirir. ▣

Aşağıda arka arkaya verilen 3 teoremden çapı 2 olan grafların *ters Wiener enerjisi* için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 2.1.5. $\Delta = 2$ ve G nin *ters Wiener matrisinin* determinantının mutlak değeri ∇ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\sqrt{2m + n(n-1)\nabla^{2/n}} \leq RWE(G) \leq \sqrt{2mn} \quad (2.1.4)$$

dir.

İspat. RWE tanımından ve Lemma 2.1.2 den

$$\begin{aligned} RWE^2 G &= \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n \beta_i^2 + \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j|, \\ &= 2m + \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

olur. *Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \sum_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| &\geq \left(\prod_{i \neq j} |\beta_i| |\beta_j| \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\prod_{i=1}^n |\beta_i|^{\frac{2}{n-1}} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \\ &= \left(\prod_{i=1}^n |\beta_i|^{\frac{2}{n}} \right) = \nabla^{\frac{2}{n}} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

elde edilir. (2.1.5) ve (2.1.6) dan alt sınır elde edilmiş olur. Üst sınır için

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[|\beta_i| - |\beta_j| \right]^2$$

ifadesi düzenlenerek RWE tanımından

$$n \sum_{i=1}^n \beta_i^2 - 2RWE(G)^2 + n \sum_{i=1}^n \beta_j^2 \geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik çözüldüğünde üst sınıra ulaşılabacaktır. ▀

Şimdi Lemma 2.1.2 i kullanarak RWE için farklı bir üst sınır verelim.

Teorem 2.1.6. G , r -regüler ve $\Delta = 2$ olsun. Bu takdirde

$$RWE \leq r + \sqrt{r(n-1)(n-r)} \quad (2.1.7)$$

dir.

İspat. G , r -regüler olsun. Teorem 2.1.4 den RW nin en büyük özdeğeri $\beta_1 = r$ idi. *Cauchy-Schwartz eşitsizliği*, $n-1$ bileşenli $1, 1, \dots, 1$ ve $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ vektörlerine uygulanırsa

$$\left(\sum_{i=2}^n |\beta_i| \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n \beta_i^2$$

yani

$$RWE - \beta_1^2 \leq (n-1)(2m - \beta_1^2)$$

veya

$$RWE \leq \beta_1 + \sqrt{(n-1)(2m - \beta_1^2)}$$

bulunur.

$\beta_1 = r$ ve $2m = rn$ olduğundan

$$RWE \leq r + \sqrt{r(n-1)(n-r)}$$

elde edilir. ▀

Teorem 2.1.7. $\Delta = 2$ olsun. Bu takdirde

$$RWE \leq \frac{1}{n} \left[2m + \sqrt{2m(n-1)(n^2 - 2m)} \right] \quad (2.1.8)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. *Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden*, Teorem 2.1.6 nin ispatında

$$RWE \leq \beta_1 + \sqrt{(n-1)(2m - \beta_1^2)}$$

elde edilmişti. Şimdi

$$\frac{2m}{n} \leq x \leq 2m$$

için

$$f(x) := x + \sqrt{(n-1)(2m-x^2)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan

$$\frac{2m}{n} \geq 1$$

ve böylece

$$\frac{2m}{n} \leq x^2$$

için $f(x)$ azalan fonksiyondur. Böylece $x \geq 1$ iken $\frac{2m}{n} \leq x \leq x^2$ olup, sonuç olarak

$f(x) \leq f\left(\frac{2m}{n}\right)$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ▀

2.2. Bir Grafın Ters Wiener-Estrada İndeksi

Bu alt bölümde diğer bir yapı tanımlayıcısı olan basit bağlantılı bir grafın *ters Wiener-Estrada indeksi* tanımlanmış ve bu indeks için bazı sınırlar elde edilmiştir.

Öncelikle bir grafın *ters Wiener-Estrada indeksini* tanımlayalım.

Tanım 2.2.1. G nin *ters Wiener özdeğerleri* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ olsun. Bu takdirde $RWEE(G)$

ile gösterilen G grafının *ters Wiener-Estrada indeksi*

$$RWEE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\beta_i} \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$M_k = \sum_{i=1}^n \beta_i^k$$

olmak üzere e^x 'in seri açılımından

$$RWEE(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{k!}$$

eşitliği de yazılabilir.

Aşağıda ispatı ile birlikte verilen Lemma 2.2.1. bu bölümde verilecek sınır değerlerinin ispatında yardımcı rol oynamaktadır.

Lemma 2.2.1. G nin çapı Δ olsun. Bu durumda

$$m - \Delta^2 \frac{n-1}{2} \leq \sum_{i \neq j} (\Delta - d_{ij})^2 \leq 2m\Delta(\Delta - 1) \quad (2.2.2)$$

dir.

İspat: $d_{ij} \geq 1$ $i \neq j$ ve $d_{ij} \leq \Delta$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} (\Delta - d_{ij})^2 &= \sum_{i \neq j} (\Delta^2 - 2\Delta d_{ij} + d_{ij}^2), \\ &= \sum_{i \neq j} \Delta^2 - 2\Delta \sum_{i \neq j} d_{ij} + \sum_{i \neq j} d_{ij}^2, \\ &\geq \frac{n-1}{2} \Delta^2 - 2\Delta^2 \frac{n-1}{2} + m \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\sum_{i \neq j} (\Delta - d_{ij})^2 \geq m - \Delta^2 \frac{n-1}{2}$$

yazılır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} (\Delta - d_{ij})^2 &= \sum_{i \neq j} (\Delta^2 - 2\Delta d_{ij} + d_{ij}^2), \\ &\leq m\Delta^2 - 2\Delta m + m\Delta^2, \\ &\leq 2m\Delta(\Delta - 1) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece istenen elde edilmiş olur. ▀

Şimdi $RWEE$ için elde ettiğimiz sınırları verelim.

Teorem 2.2.1. G grafının çapı Δ olsun. Bu durumda

$$\sqrt{n^2 + 4 \left(m - \Delta^2 \frac{n-1}{2} \right)} \leq RWEE(G) \leq n - 1 + e^{2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)}} \quad (2.2.3)$$

dir.

İspat: Öncelikle alt sınırı ispatlayalım, (2.2.1) eşitliğinin karesi alınırsa

$$RWEE^2 G = \sum_{i=1}^n e^{2\beta_i} + 2 \sum_{i<j} e^{\beta_i} e^{\beta_j} \quad (2.2.4)$$

elde edilir ve *aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i<j} e^{2\beta_i} e^{\beta_j} &\geq n(n-1) \left(\prod_{i<j} e^{\beta_i} e^{\beta_j} \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}, \\ &= n(n-1) \left[\prod_{i=1}^n e^{\beta_i} \right]^{\frac{2}{n(n-1)}}, \\ &= n(n-1) e^{M_1 \frac{2}{n}}, \\ &= n(n-1) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

olur. Kuvvet serisinin açılımından ve

$$M_0 = n,$$

$$M_1 = 0$$

ve

$$M_2 = 8 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2$$

olduğundan

$$\sum_{i=1}^n e^{2\beta_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{2\beta_i^k}{k!} = n + 4 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 3} \frac{2\beta_i^k}{k!}$$

elde edilir. Mümkün olduğu kadar iyi bir alt sınır elde etmek için

$$\sum_{k \geq 3} \frac{2\beta_i^k}{k!}$$

ifadesi yerine

$$4 \sum_{k \geq 3} \frac{\beta_i^k}{k!}$$

yazılabilir. Ayrıca aşağıdaki ifadeyi elde etmek için $4 = 2^2$ yerine $s \in (0, 4)$ çarpanı

kullanılırsa böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n e^{2\beta_i} &\geq n + 4 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + s \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 3} \frac{\beta_i^k}{k!}, \\
&= n + 4 \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 - s \cdot n - s \sum_{i<j} \Delta - d_{ij} + s \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 0} \frac{\beta_i^k}{k!}, \\
&= n(1-s) + 4-s \sum_{i<j} \Delta - d_{ij}^2 + s \cdot RWEE \ G
\end{aligned}$$

olur. Lemma 2.2.1.'den

$$\sum_{i=1}^n e^{2\beta_i} \geq n(1-s) + 4-s \left(m - \Delta^2 \frac{n(n-1)}{2} \right) + s \cdot RWEE \ G \quad (2.2.6)$$

elde edilir. (2.2.5) ve (2.2.6) eşitsizlikleri (2.2.4)'de yerine yazılır ve elde edilen denklem $RWEE \ G$ ye göre çözülrse

$$RWEE \ G \geq \frac{s}{2} + \sqrt{\left(n - \frac{s}{2}\right)^2 + (4-s) \left(m - \Delta^2 \frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

elde edilir. $n \geq 2$ ve $m \geq 1$ için

$$f(x) = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(n - \frac{s}{2}\right)^2 + (4-s) \left(m - \Delta^2 \frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

fonksiyonu $0,4$ aralığında monoton azalandır. Böylece $RWEE \ G$ için en iyi alt sınır $s = 0$ için elde edilir.

Şimdi de üst sınırı ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
RWEE \ G &= n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{\beta_i^k}{k!}, \\
&= n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\beta_i|^k}{k!}, \\
&= n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^n \beta_i^{2 \frac{k}{2}}, \\
&\leq n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \right]^{\frac{k}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left[2 \sum_{i \sqcup j} \Delta - d_{ij}^2 \right]^{\frac{k}{2}}, \\
&= n - 1 + \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\sqrt{2 \sum_{i \sqcup j} \Delta - d_{ij}^2} \right)^k}{k!}, \\
&= n - 1 + e^{\sqrt{2 \sum_{i \sqcup j} \Delta - d_{ij}^2}}
\end{aligned}$$

olup, Lemma 2.2.1.den

$$RWEE G \leq n - 1 + e^{2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)}}$$

elde edilir. ▣

Lemma 2.2.2. G grafi, $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun. r_i sembolü, $RW G$ matrisinin i . satır elemanlarının toplamını göstermek üzere

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n}} \leq \beta_1 G \quad 2.2.7$$

eşitsizliği vardır. 2.2.7 eşitsizliğinin eşit olması için gerek ve yeter şart $r_1 = r_2 = \dots = r_n$ olmasıdır.

İspat. $n \geq 2$ için RW matrisinin indirgenemez olduğu (Zhou ve ark., 2007) açıktır. Lemma 1.2.5.1 den (2.2.7) eşitsizliği elde edilir. ▣

Teorem 2.2.2. G grafi, $n \geq 2$ noktalı bir graf olsun. Bu takdirde

$$RWEE G \geq e^{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n}}} + \frac{n-1}{e^{\frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n}}}} \quad 2.2.8$$

eşitsizliği vardır.

İspat. G grafi, N_n grafına (boş graf) eşit olsun. Her bir $1 \leq i \leq n$ için $r_i = 0$ ve $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$ olur. Bu takdirde

$$RWEE G = \sum_{i=1}^n e^{\beta_i} = n$$

eşitliği geçerlidir ve böylece 2.2.8 eşitsizliği sağlanmış olur. Şimdi

$$RWEE G = n$$

olduğunu kabul edelim. *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinin* eşitlik koşulu gereği

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$$

olur. O halde $G = N_n$ dir. (Yani G grafi boş bir graftır.)

Diğer taraftan $G \neq N_n$ ve $\beta_1 > 0$ olduğu kabul edilirse

$$RWEE G = e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_n}$$

olur ve yine *Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden*

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n e^{\beta_i} \geq \left(\prod_{i=2}^n e^{\beta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$\sum_{i=2}^n e^{\beta_i} \geq n-1 \left(\prod_{i=2}^n e^{\beta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$e^{\beta_1} + \sum_{i=2}^n e^{\beta_i} \geq e^{\beta_1} + n-1 \left(\prod_{i=2}^n e^{\beta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

$$RWEE G \geq e^{\beta_1} + n-1 \left(\prod_{i=2}^n e^{\beta_i} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad 2.2.9$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^n \beta_i = 0$ olduğundan

$$\beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = -\beta_1$$

olduğu açıkça görülür. Buradan

$$RWEE G \geq e^{\beta_1} + n-1 e^{-\beta_1 \frac{1}{n-1}} \quad 2.2.10$$

yazılır. $\beta_1 = x$ olmak üzere

$$f(x) = e^x + \frac{n-1}{e^{\frac{x}{n-1}}} \quad x > 0$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun birinci türevi

$$f'(x) = e^x - e^{-\frac{x}{n-1}} \quad x > 0$$

olarak bulunur. f fonksiyonu $x > 0$ için, artan bir fonksiyondur. O halde Lemma 2.2.2 ve (2.2.7) ifadesinden

$$RWEE(G) \geq e^{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n}}} + \frac{n-1}{e^{\frac{1}{n-1} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n}}}}$$

olur ve istenen elde edilmiş olur. ▣

Aşağıda bağlantılı bir grafın *ters Wiener-Estrada İndeks* ve *ters Wiener Enerji* arasındaki ilişki ortaya konarak bu parametrelere bağlı iki sınır elde edilmiştir.

2.3. Ters Wiener-Estrada İndeks ve Ters Wiener Enerji Arasındaki Bağını

Teorem 2.3.1. G grafının çapı Δ olsun. Bu takdirde

$$RWEE(G) - RWE(G) \leq n-1 - 2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)} + e^{2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)}} \quad (2.3.1)$$

ve

$$RWEE(G) \leq n-1 + e^{RWE(G)} \quad (2.3.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik olması için gerek ve yeter şart $G \square K_1$ olmasıdır.

İspat. Teorem 2.2.2.'nin ispatından

$$RWEE(G) = n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{\beta_i^k}{k!} \leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\beta_i|^k}{k!}$$

yazılabilir. *Ters Wiener enerji* tanımından

$$RWEE(G) \leq n + RWE(G) + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 2} \frac{|\beta_i|^k}{k!}$$

yazılır. Burada Teorem 2.1.3.'deki işlemlerin benzeri yapılırsa

$$\begin{aligned} RWEE G - RWE G &\leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 2} \frac{|\beta_i|^k}{k!}, \\ &\leq n - 1 - \sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2} + e^{\sqrt{2 \sum_{i < j} \Delta - d_{ij}^2}} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

eşitsizliği kolay bir şekilde görülür. $f(x) = e^x - x$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında monoton artan olduğundan ve Teorem 2.2.1.'den

$$RWEE G - RWE G \leq n - 1 - 2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)} + e^{2\sqrt{m\Delta(\Delta-1)}} \quad (2.3.4)$$

eşitsizliği elde edilir.

$RWEE G$ ve $RWE G$ arasındaki diğer bir bağıntı ise

$$\begin{aligned} RWEE G &\leq n + \sum_{i=1}^n \sum_{k \geq 1} \frac{|\beta_i|^k}{k!}, \\ &\leq n + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^k \right), \\ &= n + \sum_{k \geq 1} \frac{RWE G^k}{k!}, \\ &= n - 1 + \sum_{k \geq 0} \frac{RWE G^k}{k!} \end{aligned}$$

biçimindedir. Böylece

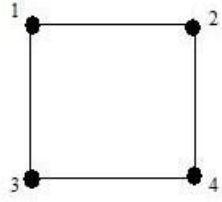
$$RWEE G \leq n - 1 + e^{RWE G}$$

eşitsizliği elde edilip ispat tamamlanmış olur. ▀

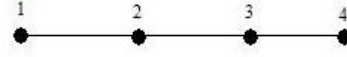
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bulunan sınırlar örneklendirilerek bir tablo üzerinde karşılaştırılmıştır. İlk olarak Bölüm 2.1 de yeni tanımladığımız *ters Wiener enerji* için bulduğumuz sınırları bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 3.1. Şekil 3.1.1 ve Şekil 3.1.2’de gösterilen G_1 ve G_2 grafi verilsin.



Şekil 3.1.1



Şekil 3.1.2

G_1 grafinin uzaklık matrisi

$$U(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin özdeğerleri

$$\mu_1(G_1) = 0, \quad \mu_2(G_1) = 4, \quad \mu_3(G_1) = \mu_4(G_1) = -2$$

olarak bulunur. $\Delta = 2$ olduğundan bu grafin ters Wiener matrisi

$$RW(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\beta_1(G_1) = \beta_2(G_1) = 0, \quad \beta_3(G_1) = \beta_4(G_1) = -2$$

olur. Bu değerlere bağlı uzaklık enerjisi

$$UE(G_1) = \sum_{i=1}^n |\mu_i| = 8$$

ve ters Wiener enerji

$$RWE(G_1) = \sum_{i=1}^n |\beta_i| = 4$$

şeklindedir.

G_2 grafinin uzaklık matrisi

$$U(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu matrisin özdeğerleri

$$\mu_1(G_2) = -0.585, \quad \mu_2(G_2) = -3.414, \quad \mu_3(G_2) = 5.162, \quad \mu_4(G_2) = -1.162$$

olarak bulunur. $\Delta = 3$ olduğundan bu grafin ters Wiener matrisi

$$RW(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri

$$\beta_1(G_2) = 4.162, \quad \beta_2(G_2) = -2.162, \quad \beta_3(G_2) = 0.414, \quad \beta_4(G_2) = -2.414$$

olur. Bu değerler kullanılarak uzaklık enerjisi

$$UE(G_2) = \sum_{i=1}^4 |\mu_i| = 10.323$$

ve ters Wiener enerji

$$RWE(G_2) = \sum_{i=1}^4 |\beta_i| = 9.152$$

şeklindedir.

Bu grafların ters Wiener enerjileri için Bölüm 2.1'de bahsedilen sınırlar

(2.1.1) için,

$$2.8284 \leq RWE(G_1) \leq 5.6568$$

ve

$$5.2915 \leq RWE(G_2) \leq 10.583$$

(2.1.2) için,

$$2.8284 \leq RWE(G_1)$$

ve

$$5.2915 \leq RWE(G_2)$$

(2.1.3) için,

$$RWE(G_1) \leq 5.6568$$

ve

$$RWE(G_2) \leq 14$$

(2.1.4) için,

$$RWE(G_1) \leq 5.6568$$

(2.1.7) için,

$$RWE(G_1) \leq 5.4641$$

(2.1.8) için,

$$RWE(G_1) \leq 5.4641$$

şeklinde elde edilir. Tabloda bu değerleri yerleştirirsek

Tablo 3.1.1

	RWE	(2.1.1)	(2.1.3)	(2.1.4)	(2.1.7)	(2.1.8)
G_1	4	5.6568	5.6568	5.6568	5.4641	5.4641
G_2	9.152	10.583	14			

	RWE	(2.1.2)
G_1	4	2.8284
G_2	9.152	5.2915

olur. Şimdi de Bölüm 2.2’de tanımladığımız ters Wiener-Estrada indeks için bulduğumuz sınırların uygulamasını yapalım. Örnek 3.1’de verilen G_1 ve G_2 graflarını göz önüne alalım.

G_1 grafinin ters Wiener özdeğerleri

$$\beta_1(G_1) = \beta_2(G_1) = 0, \quad \beta_3(G_1) = \beta_4(G_1) = -2$$

olup G_1 grafinin ters Wiener-Estrada indeksi

$$RWEE(G_1) = \sum_{i=1}^n e^{\beta_i} \cong 2.27067$$

şeklindedir. Benzer şekilde G_2 grafinin ters Wiener özdeğerleri

$$\beta_1(G_2) = 4.162, \quad \beta_2(G_2) = -2.162, \quad \beta_3(G_2) = 0.414, \quad \beta_4(G_2) = -2.414$$

olup bu özdeğerleri yerine koyarsak G_2 grafinin ters Wiener-Estrada indeksi için

$$RWEE(G_2) = \sum_{i=1}^4 e^{\beta_i} \cong 65.9169$$

bulunur.

Bu grafların ters Wiener-Estrada indeksleri için Bölüm 2.2’de bahsedilen sınırlar

ise

(2.2.3) için,

$$RWEE(G_1) \leq 80.2134$$

ve

$$RWEE(G_2) \leq 573.5344$$

(2.2.8) için,

$$RWEE(G_2) \geq 62.5093$$

şeklinde olup, tablo değerleri

Tablo 3.1.2

	RWEE	(2.2.3)
G_1	2.27067	80.2134
G_2	65.9169	573.5344

	RWEE	(2.2.8)
G_1	2.27067	
G_2	65.9169	62.5093

olur.

Son olarak da Bölüm 2.3’de verdiğimiz ters Wiener-Estrada indeks ile ters Wiener enerji arasındaki bağıntı için elde ettiğimiz sınırları, Örnek 3.1’de ele aldığımız G_1 ve G_2 grafları üzerinde inceliyelim.

Yukarıda bulunduğu üzere G_1 ve G_2 graflarının ters Wiener enerjileri ve ters Wiener-Estrada indeksleri kullanılarak

(2.3.1) için,

$$RWEE(G_1) - RWE(G_1) \leq 18.2425$$

ve

$$RWEE(G_2) - RWE(G_2) \leq 565.0491$$

(2.3.2) için,

$$RWEE(G_1) \leq 57.5981$$

ve

$$RWEE(G_2) \leq 9.436.2881$$

olup tablo değerleri aşağıdaki gibidir.

Tablo 3.1.3

	$RWEE - RWE$	(2.3.1)	RWEE	(2.3.2)
G_1	-1.72933	18.2425	2.27067	57.5981
G_2	56.7676	565.0491	65.9169	9.436.2881

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Çalışmamızda, yeni bir enerji türü olan *ters Wiener enerji* için Teorem 2.1.1 de (2.1.1), Teorem 2.1.2 de (2.1.2), Teorem 2.1.3 de (2.1.3), Teorem 2.1.5 de (2.1.4), Teorem 2.1.6 da (2.1.7) ve Teorem 2.1.7 de (2.1.8) eşitsizlikleri ile verilen sınırlar elde edilmiş ve bu sınırlar Tablo 3.1.1 de karşılaştırılmıştır. Benzer şekilde Teorem 2.2.1 de (2.2.1) ve Teorem 2.2.2 de (2.2.8) *ters Wiener-Estrada indeks* için verilen sınırların uygulaması da Tablo 3.1.2 de sunulmuştur. Teorem 2.3.1 de (2.3.1 ve 2.3.2) ise *ters Wiener enerji* ile *ters Wiener-Estrada indeks* arasındaki bağıntı ortaya konmuş olup bulunan bu sınırlara bağlı karşılaştırmalar ise Tablo 3.1.3 de gösterilmiştir.

Ters Wiener-Estrada indeks için elde edilen sınırlar çok iyi değerler vermemesine rağmen bu sınırların *ters Wiener-Estrada indeks* ve *ters Wiener enerji* arasında bağıntılar kurması açısından önemli olduğunu düşünüyoruz. Bu nedenle bir grafin *ters Wiener-Estrada indeksi* daha detaylı bir şekilde çalışılabilir ve daha iyi sınırlar elde edilebilir.

Bunun yanısıra bir grafin *enerjisi*, *uzaklık enerjisi* ve *ters Wiener enerjisi* arasında ve *Estrada indeks*, *uzaklık Estrada indeks* ve *ters Wiener-Estrada indeksi* arasında bağıntılar elde edilerek yeni çalışma alanları oluşturulabilir.

5. KAYNAKLAR

- Adiga, C., Khoshbakht, Z., 2009, On some inequalities for the skew Laplacian energy of digraphs, *Journal Of Inequaities In Pure and Applied Mathematics*, **10**, 1443-5756.
- Aldous, J. M., Wilson R. J. 2000, *Graphs and Applications*, The Open University, Printed in Great Britain.
- Bapat, R., Kirkland, S. T., Neumann, M. 2005, On distance matrices and Laplacians, *Linear Algebra Appl.* **401**, 193-209.
- Bozkurt, Ş. B., Güngör, A. D., Gutman I., Çevik, A. S., 2010, Randic matrix and Randic energy, *MATCH Commun. Math.Comput. Chem.* **64**, 239-250.
- Bozkurt, D., Türen, D., 2003, *Lineer Cebir*, S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, S.D.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi, Konya.
- Buckley, F., Harary F. 1990, *Distance in Graphs*, Addison Wesley, Redwood.
- Cavers, M., Fallat, S., Kirkland, S., 2010, On The Normalized Laplacian Energy and general Randic index R_{-1} of graphs, *Linear Algebra and Its Applications*, **433**, 172-190.
- Cvetkovic, D., Doob, M., Sachs, H. 1999. *Spectra of Graphs-Theory and Application*, third ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg Leipzig.
- Das, K.,Lee, S.,2009, On the Estrada index conjecture, *Linear Algebra and its Application*, **431**, 1351-1359.
- De La Pena, J., Gutnam, I., Rada, J., 2007, Estimating the Estrada index, *Linear Algebra and Its Applications* **427**, 70-76.
- Du, W., Li, X., Li, Y., 2010, The Laplacian energy of Random graphs, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **368**, 311-319.
- Edelberg, M., Garey, N. R., Graham, R. L. 1976, On the distance matrix of a tree, *Discrete Math.* **14**, 23-29.
- E. Estrada, 2000, Characterization of 3D Molecular Structure, *Chem. Phys. Lett.* **319**, 713-718.
- Fiedler, M., 1975, A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory, *Czechoslovak Math. J.* **67**, 619-633.
- Grossman, S. I., 1984, *Elementary Linear Algebra*, Printed in the United States of America

- Gutman, I. 1978, The energy of a graph, Ber. Math. Statist. Sect. Forschungszentrum Graz **103**, 1-22.
- Gutman, I., Zhou, B. 2006, Laplacian energy of a graph, Linear Algebra Appl. **414**, 29-37.
- Gutman, I., 2007, On graphs whose energy exceeds the number of vertices, Linear Algebra and Its Applications, **429**, 2670-2677.
- Gutman, I., 2008, Lower bounds for Estrada index, Publ. Inst. Math. Beograd, **83**, 1-7.
- Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B., Zhou, B., 2010, A note on the distance energy of graphs, MATCH Commun. Math. Comput Chem. **64**, 129-134.
- Güngör, A. D., Çevik, A.S., 2010, On the Harary energy and Harary Estrada index of a graph, MATCH Comput. Chem. **64**, 281-296.
- Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B., On the distance spectral radius and the distance energy of a graphs, Linear and Multilinear Algebra, basımda.
- Güngör, A. D., Bozkurt, Ş. B., 2009, On the distance Estrada index of graphs, Journal of Mathematics and Statistics, **38(3)**, 277-283.
- Horn, R. A., Johnson, C. R. 1985, Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York.
- Indulal, G., Gutman. I., Vijaykumar, A. 2008, On the distance energy of a graph, MATCH Commun. Math. Comput Chem **60**, 461-472.
- Indulal, G., 2009, Sharp Bounds on the distance spectral radius and the distance energy of graphs, Linear Algebra Appl. **430**, 106-113.
- Li, X., Li, Y., Shi, Y., 2010, Note on the energy of regular graphs, Linear Algebra and Its Applications, **432**, 1144-1146.
- Marshall, A. W., Olkin, I., 1979, Inequalities, Theory of Majorization and Its Applications, Academic, New York.
- Mitrinovic, D. S. 1970, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Nikiforov, V., 2007, The energy of graphs and matrices, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **326**, 1472-1475.
- Ramane, H. S., Revankar, D. S., Gutman, I., Rao, S. B., Acharya, B. D., Walikar, H. B., 2008, Bounds for the distance energy of a graph, Kragujevac J. Math. **31** 59-62 .
- Rodriguez, J. A., 2005, A spectral approach to the Randic index, Linear Algebra and its Applications **400**, 339-344.
- Zhang, F., *Matrix Theory*, 1999, Basic Results and Techniques, North America.

- Zhou, B., Trinajstić, N., 2007, Maximum eigenvalues of the reciprocal distance matrix and the reverse Wiener matrix, *Int. J. Quant. Chem.*, **108**, 858-864.
- Zhou, B., Gutman, I., Aleksić, T., 2008, A note on the Laplacian energy of graphs, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* **60**, 441-446.
- Zhou, B., Gutman, I., 2009, More on the Laplacian Estrada index, *Appl. Anal. Discrete Math.* **3**, 371-378.
- Zhou, B., 2000, On the spectral radius of nonnegative matrices, *Australas. J. Comb.* **22**, 301-306
- Zhou, B., Liu, B., 1998, On almost regular matrices, *Util. Math.* **54**, 151-155

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Sezin ÇİZMECİ
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : KONYA-1985
Telefon : 0332 3201371
Faks :
e-mail :

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: MERAM ANADOLU LİSESİ	2003
Üniversite	: SELÇUK ÜNİVERSİTESİ	2008
Yüksek Lisans	: SELÇUK ÜNİVERSİTESİ	2011
Doktora	:	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
------------	--------------	---------------

UZMANLIK ALANI**YABANCI DİLLER****BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER****YAYINLAR**