

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KÜRE ÜZERİNDEKİ KONİKLERE YENİ BİR YAKLAŞIM**

**Esra EMİR**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2010**

**Her hakkı saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜRE ÜZERİNDEKİ KONİKLERE YENİ BİR YAKLAŞIM

Esra EMİR

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde çemberlerle ilgili kavramlar verilmiş ve önemli noktaların ispatları yapılmıştır.

İkinci bölümde, koniklerle ilgili geometrik problemler üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, Ayakkabıcı Bıçağı problemi üzerinde durulmuştur. Oluşan koniklerin durumları değerlendirilmiştir. Ayrıca bu inceleme şekillerle desteklenmiştir.

Dördüncü bölümde küre üzerindeki koniklerin tanımları verilmiş ve bu tanımlar, ilgili şekiller üzerinde gösterilmiştir.

Son bölümde ise, düzlemde bulunan Ayakkabıcı Bıçağı küre üzerine taşınmış ve Küresel Ayakkabıcı Bıçağı tanımı ifade edilmiştir. İlaveten bu tanım yardımı ile küre üzerindeki koniklere yeni bir yaklaşım getirilmiştir .

**Temmuz 2010, 60 sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** Konik, Ayakkabıcı Bıçağı, Küresel Ayakkabıcı Bıçağı, Küresel konik

## **ABSTRACT**

Master Thesis

### **A NEW APPROACH TO THE SPHERICAL CONICS**

Esra EMİR

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the definitions about circles are given and proofs of the important points are given.

In the second chapter, the geometric problems of conics are mentioned.

In the third chapter, the problem of the Shoemaker's Knife is presented. The conics which are consisted, are evaluated. Moreover this investigation is stayed by graphics.

In the fourth chapter, the definitions of conics which are clarified and this definitions are shown on the graphics.

The last chapter, the Shoemaker's Knife which is on the plane, is moved to sphere and the definitions of the Spherical Shoemaker's Knife is explained. Moreover with status this definition, A New Approach To The Spherical Conics is given on the sphere .

**July 2010, 60 pages**

**Key Words:** Conic, Shoemaker's Knife, Spherical Shoemaker's Knife, Spherical Conic

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarımı esirgemeyen, büyük bir sabır ve titizlikle beni yönlendiren saygı değer hocam, Sayın Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'na, yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği burs ile beni destekleyen TÜBİTAK'a ve hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra EMİR

Ankara, Temmuz 2010

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vi
1. ÇEMBERLERLE İLGİLİ ÖNEMLİ NOKTALAR .....	1
2. KONİKLERLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR .....	20
2.1 Koniklerle İlgili Problemler .....	20
3. AYAKKABICI BIÇAĞI .....	32
3.1 Ayakkabıcı Bıçağı ve Konikler .....	32
3.2 Ayakkabıcı Bıçağının Diğer Bazı Özellikleri .....	47
4. KÜRE ÜZERİNDEKİ KONİKLER .....	50
4.1 Küre Üzerinde Çember (Küresel Çember) .....	50
4.2 Küre Üzerinde Elips (Küresel Elips) .....	50
4.3 Küre Üzerinde Hiperbol (Küresel Hiperbol) .....	51
4.4 Küre Üzerinde Parabol (Küresel Parabol) .....	51
5. KÜRESEL AYAKKABICI BIÇAĞI .....	52
5.1 Küresel Ayakkabıcı Bıçağı ve Konikler .....	52
KAYNAKLAR .....	60
ÖZGEÇMİŞ .....	61

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Çemberin içindeki noktanın çembere göre kuvveti .....	1
Şekil 1.2 Çemberin dışındaki noktanın çembere göre kuvveti .....	2
Şekil 1.3 Çembere teğet olan noktanın çembere göre kuvveti .....	3
Şekil 1.4 P noktasının çembere göre kuvveti .....	3
Şekil 1.5 Noktanın çembere göre kuvveti .....	4
Şekil 1.6. Kuvvet ekseni .....	5
Şekil 1.7. Kuvvet ekseni ve çemberler .....	6
Şekil 1.8 Değme noktası .....	8
Şekil 1.9 Harmonik ortalama .....	9
Şekil 1.10 Harmonik set .....	10
Şekil 1.11 Aritmetik ortalama .....	15
Şekil 1.12 Geometrik ortalama .....	16
Şekil 1.13 Çember .....	17
Şekil 2.1 İçten teğet çember ve elips .....	20
Şekil 2.2 Dıştan teğet çember ve elips .....	21
Şekil 2.3 Dıştan teğet çember ve hiperbol .....	22
Şekil 2.4 İçten teğet çember ve hiperbol .....	22
Şekil 2.5 Hiperbol .....	23
Şekil 2.6 Elips .....	24
Şekil 2.7 Kesişen çemberler ve hiperbol .....	25
Şekil 2.8 Kesişen çemberlere dıştan teğetçemberler ve hiperbol .....	25
Şekil 2.9 Parabol .....	27
Şekil 2.10 İçten teğet çember ve parabol .....	28
Şekil 2.11 İki çemberde dıştan teğet çemberler .....	29
Şekil 2.12 Çemberlerden birine içten diğerine dıştan teğet çemberler .....	30
Şekil 2.13 Çemberlerden ikisinde içten teğet çemberler .....	31
Şekil 2.14 Üç teğet çemberin durumları .....	32

Şekil 3.1 Ayakkabıcı bıçağı .....	33
Şekil 3.2 $O_2$ merkezli çembere teğet çember ve elips .....	34
Şekil 3.3 $O_3$ merkezli çembere teğet çember ve elips .....	35
Şekil 3.4 $O_2$ ve $O_3$ merkezli çemberlere teğet çember ve hiperbol .....	37
Şekil 3.5 $O_3$ merkezli çemberlere teğet çember ve parabol .....	39
Şekil 3.6 Ayakkabıcıbıçağı ve parabol .....	40
Şekil 3.7 Ayakkabıcıbıçağı ve parabol (ispat) .....	40
Şekil 3.8 Ayakkabıcıbıçağı ve parabol .....	41
Şekil 3.9 $O_2$ merkezli çemberlere teğet çember ve parabol .....	42
Şekil 3.10 $O_2$ merkezli çemberlere teğet çember ve parabol (ispat) .....	42
Şekil 3.11 x eksenine teğet çember ve parabol .....	43
Şekil 3.12 Parabol .....	44
Şekil 3.13 Parabol (ispat) .....	45
Şekil 3.14 x ekseni ve parabol .....	46
Şekil 3.15 x ekseni ve parabol (ispat) .....	46
Şekil 3.16 Koniklerin ayakkabıcı bıçağındaki görüntüsü .....	47
Şekil 3.17 Ayakkabıcı bıçağının alanı .....	48
Şekil 3.18 Arşimed çemberi .....	49
Şekil 4.1 Küresel çember .....	50
Şekil 4.2 Küresel elips .....	50
Şekil 4.3 Küresel hiperbol .....	51
Şekil 4.4 Küresel parabol .....	51
Şekil 5.1 Küresel ayakkabıcı bıçağı .....	52
Şekil 5.2 Küresel ayakkabıcı bıçağı ve elips .....	53
Şekil 5.3 $O_3$ merkezli küresel çemberlere teğet küresel çemberler .....	54
Şekil 5.4 Küresel ayakkabıcı bıçağı ve hiperbol .....	55
Şekil 5.5 Küresel ayakkabıcı bıçağı ve parabol .....	55

Şekil 5.6 CD 'ye teğet çemberler ve parabol .....	57
Şekil 5.7 CD 'ye teğet çemberler ve parabol (ispat) .....	57
Şekil 5.8 Küresel parabol (ispat) .....	58

## 1.ÇEMBERLERLE İLGİLİ ÖNEMLİ KAVRAMLAR

Bu bölümde çemberlerle ilgili önemli noktaların tanımları verilmiştir.(Tahir 2007 a, Tahir 2007 b, Hacısalihoğlu 1983)

### Tanım 1.1 (Noktanın çembere göre kuvveti)

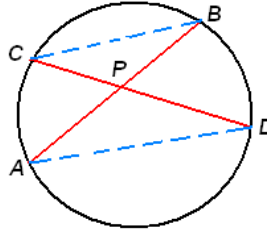
Merkezi  $O$ , yarıçap uzunluğu  $R$  olan bir çember alalım. Çemberin üzerindeki  $A$  ve  $B$  noktaları çemberin içindeki bir  $P$  noktadan geçecek şekilde doğrusal olarak birleştirilsin.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

değerine  $P$  noktasının çembere göre kuvveti denir.

**Teorem 1.1:** Bir çemberde  $AB$  ve  $CD$  kirişleri çemberin içindeki bir  $P$  noktasında kesişiyorsa,  $\overline{AP}$  ile  $\overline{PB}$  nin çarpımı  $\overline{CP}$  ile  $\overline{PD}$  nin çarpımına eşittir.

**İspat:**



Şekil 1.1 Çemberin iç bölgesindeki noktanın çembere göre kuvveti

$\overline{CB}$  ve  $\overline{AD}$  yi çizersek.  $ADP$  ve  $CPB$  üçgenleri benzer olur. Dolayısı ile

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$$

veya

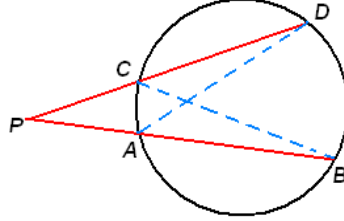
$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD} \quad \text{dir.} \blacksquare$$

**Teorem 1.2:** Merkezi  $O$ , yarıçap uzunluğu  $R$  olan bir çember alalım. Bu çemberde  $AB$  ve  $CD$  kirişleri çember dışındaki bir  $P$  noktasında kesişiyorsa

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

dir.

**İspat:**



Şekil 1.2 Çemberin dışındaki noktanın çembere göre kuvveti

Bu durumda ise  $PBC$  ve  $PDA$  üçgenleri benzer olup;

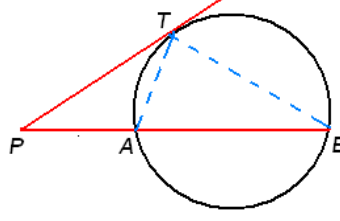
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

dir.  $\blacksquare$

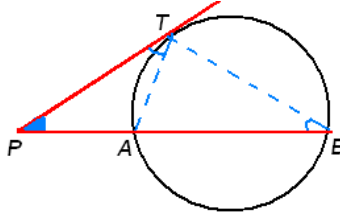
**Teorem 1.3:** Merkezi  $O$ , yarıçap uzunluğu  $R$  olan bir çember alalım. Bu çemberin dışındaki bir  $P$  noktasından çembere çizilen teğet  $\overline{PT}$  ise,  $P$  noktasının çembere göre kuvveti  $\overline{PT}^2$  dir.

İspat:



Şekil 1.3 Çembere teğet olan noktanın çembere göre kuvveti

$T$  çember üzerinde bir nokta olsun.  $P$  noktasından geçen ve çemberi  $A$  ve  $B$  noktalarında kesen doğruyu alalım.  $A$  ve  $B$  noktalarını ayrı ayrı  $T$  ile birleştirelim.



Şekil 1.4  $P$  noktasının çembere göre kuvveti

$PTA$  ve  $PBT$  üçgenleri benzerdir. (Açı -kenar-açı benzerliği)

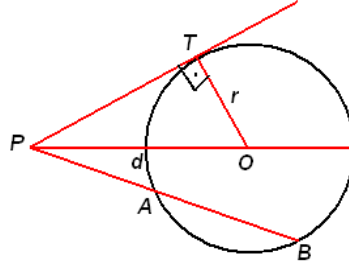
$$\begin{aligned}\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} &= \frac{\overline{TA}}{\overline{BT}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \\ \overline{PT}^2 &= \overline{PB} \cdot \overline{PA}\end{aligned}$$

dir. ■

**Teorem 1.4:**  $O$  merkezli,  $R$  yarıçaplı çemberin dışındaki bir  $P$  noktasının çemberin merkezine olan uzaklığını  $d$  ile gösterelim.

$P$  den geçen ve çemberi  $A, B$  noktalarında kesen bir doğru için

$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2 \quad \text{dir.}$$



Şekil 1.5 Noktanın çembere göre kuvveti

**İspat:** Şekle göre

$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

$\overline{PT}^2$  değeri  $P$  den geçen kesenin seçilişinden bağımsız olduğundan kesen olarak  $PO$  yu seçelim. Bu kesen çemberi  $K$  ve  $L$  noktalarında kessin. O zaman

$$\overline{PT}^2 = \overline{PK} \cdot \overline{PL}$$

olur. Burada

$$\overline{PK} = d - r$$

ve

$$\overline{PL} = d + r$$

dir.

$$\overline{PT}^2 = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2$$

olur. ■

**İrdeleme:**

$d > r$  ise P çemberin dışında (Bu durumda *kuvvet* pozitiftir.)

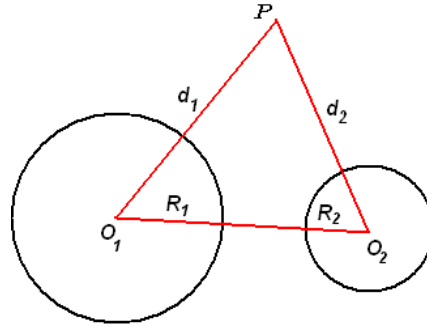
$d = r$  ise P çemberin üzerinde (Bu durumda *kuvvet* nötrdür.)

dir.

**Tanım 1.2 :**  $(O_1, R_1)$  ve  $(O_2, R_2)$  çemberlerine göre kuvvetleri eşit olan  $P$  noktalarının geometrik yeri bu iki çemberin merkezlerini birleştiren doğruya dik bir doğrudur. Bu doğruya *kuvvet ekseni* denir.

**Teorem 1.5:** Kuvvet ekseni merkezleri birleştiren doğruya diktir.

**İspat:**

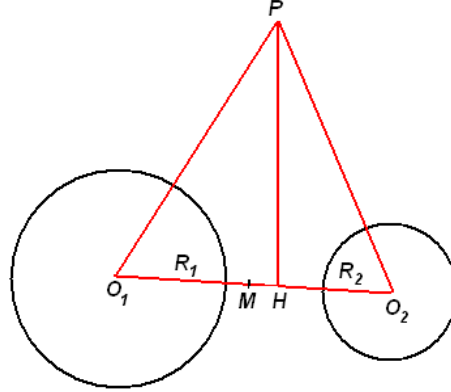


Şekil 1.6 Kuvvet ekseni

$$\overline{PO_1} = d_1$$

$$\overline{PO_2} = d_2$$

$O_1$  ve  $O_2$  yi birleştirelim.



Şekil 1.7 Kuvvet eksenini ve çemberler

$O_1$  ve  $O_2$  yi birleştiren doğru parçasının orta noktası  $M$  ve  $P$  den  $O_1O_2$  ye indirilen dikmenin ayağı  $H$  olsun.  $(O_1, R_1)$  ve  $(O_2, R_2)$  çemberlerine göre kuvvetleri eşit olan  $P$  noktalarının geometrik yeri bu iki çemberin merkezlerini birleştiren doğruya dik bir doğru ise  $PO_1H$  ve  $PO_2H$  üçgenleri dik üçgenler olmalıdır. Yani

$$\begin{aligned} d_1^2 - (\overline{O_1H})^2 &= (\overline{PH})^2 \\ d_2^2 - (\overline{O_2H})^2 &= (\overline{PH})^2 \\ d_1^2 - (\overline{O_1H})^2 &= d_2^2 - (\overline{O_2H})^2 \\ d_1^2 - d_2^2 &= (\overline{O_1H})^2 - (\overline{O_2H})^2 \end{aligned}$$

$$d_1^2 - d_2^2 - (\overline{O_1H})^2 + (\overline{O_2H})^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$(\overline{O_1H})^2 = (\overline{MH} + \overline{O_1M})^2$$

$$(\overline{O_1H})^2 = (\overline{MH})^2 + (\overline{O_1M})^2 + 2\overline{MH} \cdot \overline{O_1M} \quad (1.2)$$

$$(\overline{O_2H})^2 = (\overline{MO_2} - \overline{MH})^2$$

$$(\overline{O_2H})^2 = (\overline{MO_2})^2 + (\overline{MH})^2 - 2\overline{MH} \cdot \overline{MO_2} \quad (1.3)$$

1.1 de 1.2 ve 1.3 denklemini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
d_1^2 - d_2^2 - (\overline{MH})^2 - (\overline{O_1M})^2 - 2\overline{MH} \cdot \overline{O_1M} + (\overline{MO_2})^2 + (\overline{MH})^2 - 2\overline{MH} \cdot \overline{MO_2} &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 - [(\overline{O_1M})^2 + 2\overline{MH} \cdot \overline{O_1M} - (\overline{MO_2})^2 + 2\overline{MH} \cdot \overline{MO_2}] &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 - [(\overline{O_1M})^2 - (\overline{MO_2})^2 + 2\overline{MH} \cdot \overline{O_1M} + 2\overline{MH} \cdot \overline{MO_2}] &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 - \{[(\overline{O_1M} + \overline{MO_2}) - (\overline{O_1M} + \overline{MO_2})] + 2\overline{MH} \cdot (\overline{O_1M} + \overline{MO_2})\} &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 - [(\overline{O_1M} + \overline{MO_2})(\overline{O_1M} - \overline{MO_2} + 2\overline{MH})] &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 - [(\overline{O_1M} + \overline{MO_2}) \{ \overline{O_1M} + \overline{MH} - (\overline{MO_2} - \overline{MH}) \}] &= 0 \\
d_1^2 - d_2^2 &= (\overline{O_1M} + \overline{MO_2})(\overline{O_1H} - \overline{HO_2}) \\
d_1^2 - d_2^2 &= \overline{O_1O_2} \cdot (\overline{O_1H} - \overline{HO_2}) \tag{1.4}
\end{aligned}$$

$P$  nin çemberlere göre kuvvetleri eşit olduğundan;

$$\begin{aligned}
(d_1 - R_1)(d_1 + R_1) &= (d_2 - R_2)(d_2 + R_2) \\
d_1^2 - R_1^2 &= d_2^2 - R_2^2 \\
d_1^2 - d_2^2 &= R_1^2 - R_2^2 \tag{1.5}
\end{aligned}$$

$H$  ,  $P$  nin geometrik yeri üzerinde olduğundan

$$\begin{aligned}
(\overline{O_1H} - R_1)(\overline{O_1H} + R_1) &= (\overline{O_2H} - R_2)(\overline{O_2H} + R_2) \\
(\overline{O_1H})^2 - R_1^2 &= (\overline{O_2H})^2 - R_2^2 \\
(\overline{O_1H})^2 - (\overline{O_2H})^2 &= R_1^2 - R_2^2 \\
(\overline{O_1H} - \overline{O_2H})(\overline{O_1H} + \overline{O_2H}) &= R_1^2 - R_2^2 \\
(\overline{O_1H} - \overline{O_2H}) \cdot \overline{O_1O_2} &= R_1^2 - R_2^2 \\
(\overline{O_1H} - \overline{O_2H}) &= \frac{R_1^2 - R_2^2}{\overline{O_1O_2}} \tag{1.6}
\end{aligned}$$

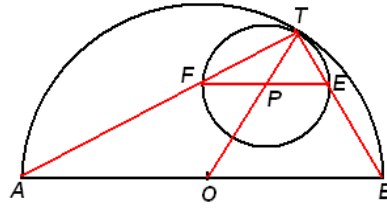
1.5 ve 1.6 denklemlerini 1.4 te yerine yazarsak;

$$R_1^2 - R_2^2 = \frac{\overline{O_1O_2} R_1^2 - R_2^2}{\overline{O_1O_2}}$$

$$R_1^2 - R_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$

olduğundan 1 eşitliği sağlanmış olur .Bu eşitlikten  $\overline{PH}$  ın  $\overline{O_1O_2}$  ye dikliği bulunmuş olur.■

**Teorem 1.6 :**



Şekil 1.8 Değme noktası

Merkezleri, sırası ile,  $O$  ve  $P$  olan içten teğet iki çemberin çap uzunlukları, sırası ile,  $AB$  ve  $EF$  olmak üzere iki doğru parçasıdır. Eğer  $T$  bu iki çemberin şekildeki gibi değme noktası ise;

$A$ ,  $F$  ve  $T$  doğrusaldır.

**İspat:**

$$\widehat{AOT} \cong \widehat{FPT} \quad \text{ve} \quad \frac{\overline{OA}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PT}} = 1$$

Bu yüzden  $OAT$  üçgeni ile  $PFT$  üçgeni benzerdir.

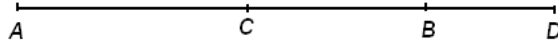
$$\widehat{PFT} \cong \widehat{OAT} \quad \text{ve} \quad \widehat{AFP} + \widehat{OAT} = 180^\circ$$

$$\widehat{AFP} + \widehat{PFT} = 180^\circ$$

$AT$  ve  $FT$  doğrusal olup diğer bir anlamda  $A, T$  ve  $F$  aynı doğru üzerindedir. ■

**Tanım 1.3: (Harmonik Ortalama)**

$A, B, C$  ve  $D$  doğrusal dört nokta olmak üzere noktalardan  $C$  ve  $D$  biri  $AB$  doğru parçasının üzerinde ve diğeri bu doğru parçasının uzantısı üzerinde olacak şekilde yerleştirilsin. Bu durumda  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$  bağıntısı verildiğinde,  $\overline{AB}$ ,  $C$  ve  $D$  tarafından *harmonik* olarak bölünmüştür denir.



Şekil 1.9 Harmonik ortalama

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k & \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k & \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k \\ & \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \end{aligned}$$

Bu durum göz önüne alınırsa  $\overline{AB}$  yi *harmonik* olarak bölen;  $C$  ve  $D$  olmak üzere bu dört noktaya *harmonik set* veya *harmonik range* adı verilir. Bu oran  $H(AB, CD)$  ile gösterilir.  $AB$  ve  $CD$  nin herbiri bir *harmonik çift* olarak adlandırılır.

**Teorem 1.7:** Eğer  $C$  ve  $D$  noktaları  $AB$  doğru parçasını *harmonik* olarak bölüyorsa,  $A$  ve  $B$  noktaları da  $CD$  doğru parçasını *harmonik* olarak böler.

**İspat:**

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \text{ya da} \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} = -\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}$$
$$\overline{CA} = -\overline{AC} \quad \overline{DA} = -\overline{AD} \quad \overline{CB} = -\overline{BC} \quad \overline{DB} = -\overline{BD}$$

olduğundan

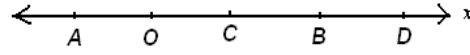
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

Yani  $A$  ve  $B$ ,  $CD$  yi *harmonik* olarak böler. ■

**Tanım 1.4: (Harmonik ortalama)**

$p$  ve  $q$  gibi iki reel sayının  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  değerine  $p$  ile  $q$  nun *harmonik ortalaması* denir.

**Tanım 1.5: (A, B, C, D Harmonik set noktalarının koordinatları arasındaki ilişki) ;**



Şekil 1.10 Harmonik set

$A$ ,  $B$ ,  $C$  ve  $D$  aynı doğru üzerinde ( bu doğru  $x$  *ekseni* ) olsun ve  $O$  orijin olmak üzere

$A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $C(c, 0)$  ve  $D(d, 0)$  noktaları  $x$  *ekseni* üzerinde olduklarından

$$\overline{CA} = a - c \quad \overline{CB} = b - c \quad \overline{DA} = a - d \quad \overline{DB} = b - d$$

dir.  $AB$  ve  $CD$  *harmonik çift* olduklarından

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{d - a}{b - d}$$

$$ab - cb - ad + cd = bd - cd - ab + ac$$

$$2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$$

yazılabilir. Bundan sonra gösterilecek her bir teoremdeki her bir doğrusal nokta dörtlüsü için bu formül harmonik olmaları özeliği olarak alınacaktır.

**Teorem 1.8:**

Aynı doğru üzerindeki dört noktanın oluşturduğu  $H(AB, CD)$  oranı bir *harmonik oran* olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

olmasıdır.

**İspat :**

( $\implies$ )

$H(AB, CD)$  bir *harmonik set* olsun. Harmonik set olma bağıntısından bu dört nokta arasında

$$(a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$$

olduğunu biliyoruz.  $A$  noktası orijin alınırsa

$$a = 0$$

olur. O zaman

$$b(c + d) = 2cd$$

$$bc + bd = 2cd$$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \text{ ve } a = 0 \text{ ise}$$

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \text{ ve } \overline{AC} = c \quad \overline{AD} = d$$

olduğundan

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

olur.

( $\Leftarrow$ ) Tersine

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

doğru olsun.  $D$  den farklı bir  $D'$  gibi bir nokta alalım. Eğer ( $C$  ve  $D'$ ) ikilisi bir *harmonik çift* ise bu durumda

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD'}}$$

ve bu iki eşitlikten

$$\overline{AD} = \overline{AD'}$$

olur. Yani bu durumda  $D$  ve  $D'$  çakışır. İki nokta aynı olduğundan

$$H(AB, CD) = H(AB, CD')$$

olur. ■

**Teorem 1.9:**

$O$  (orijin),  $\overline{AB}$  nin orta noktası olmak üzere, aynı doğru üzerindeki dört noktanın harmonik set olması için gerek ve yeter koşul

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$$

olmasıdır.

**İspat:**

( $\Rightarrow$ )

Eğer orijin orta nokta ise

$$b = -a$$

dır. Buradan *harmonik* ortanın koordinatlarla ilişkisi kullanılırsa

$$\underbrace{(a+b)}_0(c+d) = 2(ab+cd)$$

olduğundan

$$2(-a^2 + cd) = 0$$

$$a^2 = cd$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$$

dir.

( $\Leftarrow$ ) Tersine

Farzedelim ki

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC} \times \overline{OD}$$

olsun.  $\overline{AB}$  yi bölen *harmonik çift*  $C$  ve  $D'$  olsun. Bu durumda

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC} \times \overline{OD'}$$

olur.

$$\overline{OD} = \overline{OD'}$$

$$D = D'$$

olur.Yani

$$H(AB, CD) = H(AB, CD')$$

dir. ■

### **Tanım 1.6:**

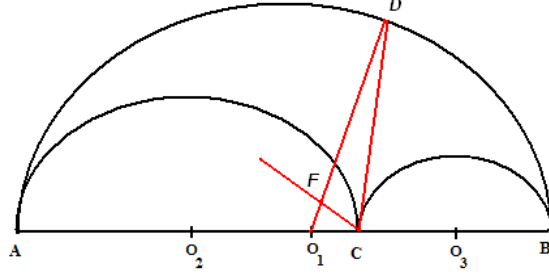
Yarım çemberde aritmetik ve geometrik ortalama, sırası ile,

aşağıdaki şekildedir.

a) Şekil 1.11' e göre  $\overline{AC}$  ve  $\overline{CB}$  nin aritmetik ortalaması  $\overline{O_1B}$  dir.

b) Şekil 1.12 'ye göre  $\overline{AC}$  ve  $\overline{CB}$  nin geometrik ortalaması  $\overline{CD}$  dir.

a)

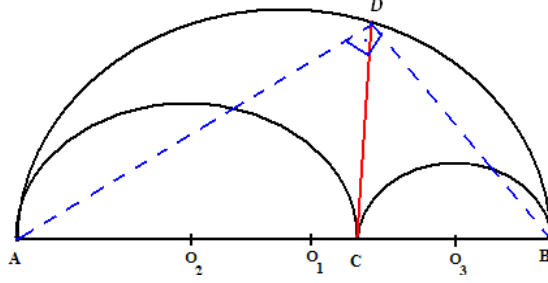


Şekil 1.11 Aritmetik ortalama

$$\frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{2} = \frac{2R_2 + 2R_3}{2} = R_2 + R_3 = R_1$$
$$\overline{O_1B} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{2}$$

dir. ■

b)



Şekil 1.12 Geometrik ortalama

$\triangle$   
( $ABD$ ) bir *dik üçgen* olup;

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{CB} = 2R_2 \times 2R_3 = 4R_2R_3$$

dir. ■

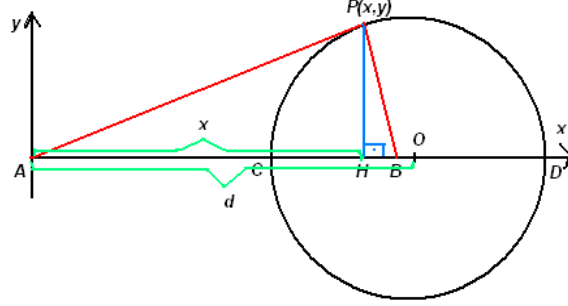
**Teorem 1.10:**

a) Verilen iki noktaya uzaklıkları aynı olan tüm noktaların geometrik yeri bir çembendir.

b) Verilen iki nokta ( $A, B$ ) ve çemberlerin  $O_X$  eksenini kestiği noktalar ( $C, D$ ) olmak üzere verilen  $A, B$  noktaları  $C, D$  noktaları ile bir *harmonik set* oluşturur.

İspat:

a)



Şekil 1.13 Çember

Kabul edelim ki  $A$  ve  $B$  verilen iki nokta ve  $P$ ,  $AB$  üzerinde olmayan bir nokta ve  $k$  sabit oran olmak üzere

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k$$

$H$ ,  $AB$  doğrusuna  $P$  den indirilen dikmenin ayağı ve  $A$ ,  $B$  arasındaki uzaklık  $d$  olmak üzere

$$\overline{PB} = t \quad \overline{AP} = kt$$

$$k^2 t^2 = x^2 + y^2$$

$$t^2 = y^2 + (d - x)^2$$

$$y^2 = k^2 t^2 - x^2$$

$$y^2 = t^2 - (d - x)^2$$

Eğer ikinci eşitliği  $k^2$  ile çarpar ve ilk eşitlikten çıkarırsak;

$$\begin{aligned}
k^2 y^2 &= k^2 t^2 - k^2 (d-x)^2 \\
y^2 - k^2 y^2 &= k^2 (d-x)^2 - x^2 \\
y^2 (1-k^2) &= k^2 (d^2 + x^2 - 2dx) - x^2 \\
y^2 (1-k^2) &= -x^2 (1-k^2) + k^2 (d^2 - 2dx) \\
(x^2 + y^2) (1-k^2) &= k^2 d^2 - 2k^2 dx \\
x^2 + y^2 &= -\frac{k^2 d^2}{k^2 - 1} + \frac{2k^2 dx}{k^2 - 1} \\
x^2 + y^2 &= -\frac{k^2 d^2 (k^2 - 1)}{(k^2 - 1)^2} + \frac{2k^2 dx}{k^2 - 1} \\
x^2 + y^2 &= -\frac{k^4 d^2}{(k^2 - 1)^2} + \frac{k^2 d^2}{(k^2 - 1)^2} + \frac{2k^2 dx}{k^2 - 1} \\
x^2 + y^2 - \frac{2k^2 dx}{k^2 - 1} + \frac{k^4 d^2}{(k^2 - 1)} &= \left(\frac{kd}{k^2 - 1}\right)^2 \\
\left(x - \frac{k^2 d}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{kd}{k^2 - 1}\right)^2
\end{aligned}$$

Bu ifade ise merkezi

$$O\left(\frac{k^2 d}{k^2 - 1}, 0\right)$$

ve yarıçapı

$$r = \frac{kd}{k^2 - 1}$$

olan bir çemberdir. Bu çeşit çemberlere *Apollonian çemberler* denir.

**b)**

$C$  ve  $D$ ,  $x$  ekseninde olduğundan  $y = 0$  dır.

$$\left(x - \frac{k^2 d}{k^2 - 1}\right)^2 = \left(\frac{kd}{k^2 - 1}\right)^2$$

dir.

$C$  noktası için

$$\begin{aligned}\frac{k^2d}{k^2-1} - \frac{kd}{k^2-1} &= \frac{kd(k-1)}{(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{kd}{k+1}\end{aligned}$$

$$C\left(\frac{kd}{k+1}, 0\right)$$

$D$  noktası için

$$\begin{aligned}\frac{k^2d}{k^2-1} + \frac{kd}{k^2-1} &= \frac{kd(k+1)}{(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{kd}{k-1}\end{aligned}$$

$$D\left(\frac{kd}{k-1}, 0\right)$$

dir.

$$\begin{aligned}\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} &= ? \\ \overline{DA} &= \frac{kd}{k-1} \\ \overline{DB} &= \overline{DA} - \overline{AB} \\ &= \frac{kd}{k-1} - d = \frac{kd - kd + d}{k-1} = \frac{d}{k-1} \\ \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} &= \frac{kd}{k-1} \times \frac{k-1}{d} = k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} &= ? \\ \overline{CA} &= \frac{kd}{k+1} \\ \overline{CB} &= d - \frac{kd}{k+1} = \frac{d}{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} &= k \text{ olup} \\ \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} &= \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k \text{ olup}\end{aligned}$$

$H(AB, CD)$  dir. ■

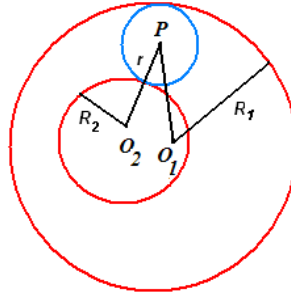
## 2. KONİKLERLE İLGİLİ TEMEL TANIMLAR ve TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde koniklerle ilgili geometrik problemler üzerinde durulmuştur. (Tahir 2007 a, Tahir 2007 b, Namikawa, Y.1958 a, Hacısalihoğlu 1983)

### 2.1 Koniklerle İlgili Geometrik Problemler

**Problem 1:**  $C(O_1, R_1)$  ve  $C(O_2, R_2)$  çemberlerinden biri diğerrinin içine yerleştirilmiş olsun. Şekil 2.1 bu çemberlerden birine içten, diğerrine dıştan teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri odakları  $O_1$  ve  $O_2$  olan, asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  ve  $2b = R_1 - R_2$  olan, aynı odaklı iki elipstir.

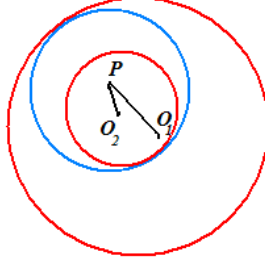
**Çözüm:**



Şekil 2.1 İçten teğet çember ve elips

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = R_1 - r \\ |PO_2| = R_2 + r \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_1| + |PO_2| = R_1 + R_2$$

$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan bir elipstir.



Şekil 2.2 Dıştan teğet çember ve elips

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = R_1 - r \\ |PO_2| = r - R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_1| + |PO_2| = R_1 - R_2$$

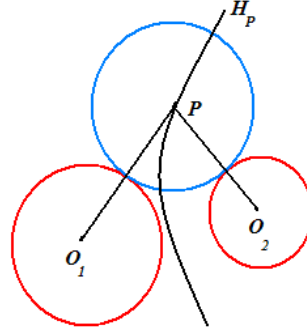
$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2b = R_1 - R_2$  olan bir diğer elipstir.

**Problem 2:**  $C(O_1, R_1)$  ve  $C(O_2, R_2)$  herhangi iki çember verilsin.

**a.**  $C(O_1, R_1), C(O_2, R_2)$  çemberlerinin her ikisine de dıştan teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

**b.**  $C(O_1, R_1), C(O_2, R_2)$  çemberlerinin her ikisine de içten teğet olan  $C(P', r')$  çemberlerinin  $P'$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2b = R_1 - R_2$  ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

Çözüm: a.

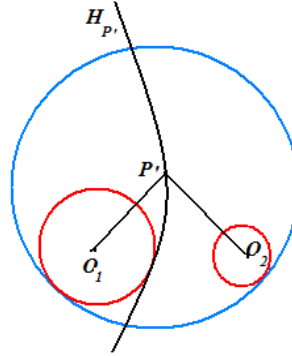


Şekil 2.3 Dıştan teğet çember ve hiperbol

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = R_1 + r \\ |PO_2| = R_2 + r \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_1| - |PO_2| = R_1 - R_2$$

$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  olan bir hiperboldür.

b.



Şekil 2.4 İçten teğet çember ve hiperbol

$$\left. \begin{array}{l} |P'O_1| = r' - R_1 \\ |P'O_2| = r' - R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |P'O_1| - |P'O_2| = R_2 - R_1$$

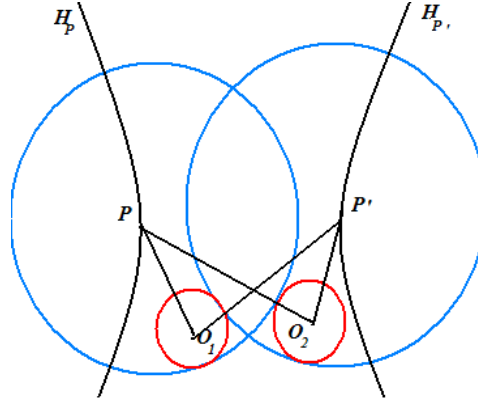
$P'$  merkezlerinin geometrik yeri odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  olan bir hiperboldür.

**Problem 3:**  $C(O_1, R_1)$  ve  $C(O_2, R_2)$  herhangi çemberleri veriliyor.

a.  $C(O_1, R_1)$  çemberine içten teğet ve  $C(O_2, R_2)$  çemberine dıştan teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

b.  $C(O_1, R_1)$  çemberine dıştan teğet ve  $C(O_2, R_2)$  çemberine içten teğet olan  $C(P', r')$  çemberlerinin  $P'$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

**Çözüm:**



Şekil 2.5 Hiperbol

a.

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = r - R_1 \\ |PO_2| = r + R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_2| - |PO_1| = R_1 + R_2$$

$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan bir hiperboldür.

b.

$$\left. \begin{array}{l} |P'O_1| = r' + R_1 \\ |P'O_2| = r' - R_2 \end{array} \right\} \Rightarrow |P'O_1| - |P'O_2| = R_1 + R_2$$

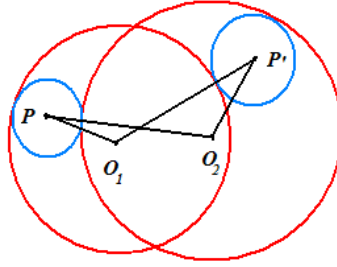
$P'$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan bir hiperboldür.

**Problem 4:** Kesişen iki  $C(O_1, R_1)$  ve  $C(O_2, R_2)$  çemberleri veriliyor.

a. çemberlerden  $C(O_1, R_1)$  e içten ve  $C(O_2, R_2)$  ye dıştan teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  ve odak noktaları  $O_1, O_2$  olan bir elipstir.

b. çemberlerden  $C(O_1, R_1)$  e dıştan ve  $C(O_2, R_2)$  ye içten teğet olan  $C(P', r')$  çemberlerinin  $P'$  merkezlerinin geometrik yeri; asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  ve odak noktaları  $O_1, O_2$  olan bir elipstir.

**Çözüm:**



Şekil 2.6 Elips

a.

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = R_1 - r \\ |PO_2| = R_2 + r \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_1| + |PO_2| = R_1 + R_2$$

$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan bir elipstir.

b.

$$\left. \begin{array}{l} |P'O_1| = R_1 + r' \\ |P'O_2| = R_2 - r' \end{array} \right\} \Rightarrow |P'O_1| + |P'O_2| = R_1 + R_2$$

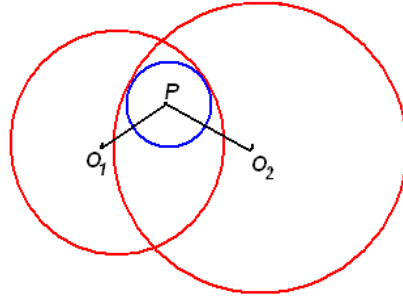
$P'$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 + R_2$  olan bir elipstir.

**Problem 5:** Kesişen iki  $C(O_1, R_1)$  ve  $C(O_2, R_2)$  çemberleri veriliyor.

a. çemberlerden her ikisine de içten teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin merkezlerinin geometrik yeri asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

b. çemberlerden her ikisine de dıştan teğet olan  $C(P', r')$  çemberlerinin merkezlerinin geometrik yeri asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  ve odakları  $O_1, O_2$  olan bir hiperboldür.

**Çözüm:**



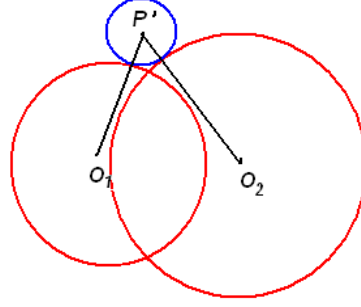
Şekil 2.7 Kesişen çemberler ve hiperbol

a.

$$\left. \begin{array}{l} |PO_1| = R_1 - r \\ |PO_2| = R_2 - r \end{array} \right\} \Rightarrow |PO_1| - |PO_2| = R_1 - R_2$$

$P$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  olan bir hiperboldür.

b.



Şekil 2.8 Kesişen çemberlere dıştan teğet çember

$$\left. \begin{array}{l} |P'O_1| = R_1 + r' \\ |P'O_2| = R_2 + r' \end{array} \right\} \Rightarrow |P'O_1| - |P'O_2| = R_1 - R_2$$

$P'$  merkezlerinin geometrik yeri; odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $2a = R_1 - R_2$  olan bir hiperboldür.

**Problem 6:** Aynı düzlemde bir  $l$  doğrusu ile onu kesmeyen bir  $C(O, R)$  çemberine teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri nedir?

**Çözüm:**

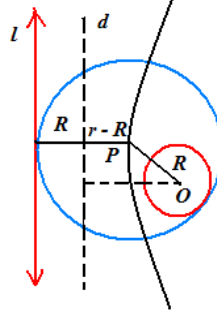
a.  $C(P, r)$  nin  $C(O, R)$  ye dıştan teğet olması hali:

$l$  doğrusuna ve  $C(O, R)$  çemberine teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri *paraboldür*.

Bu parabolün odağı, verilen  $C(O, R)$  çemberinin  $O$  merkezi ve doğrultmanında,  $l$  ye göre  $C(O, R)$  nin bulunmadığı yarı düzlemde  $l$  den  $R$  kadar uzaklıkta  $l$  ye paralel



paralel  $d$  doğrusudur.



Şekil 2.10 İçten teğet çember ve parabol

Benzer şekilde  $l$  doğrusunu  $y$  -ekseni olarak seçelim.

$O$  dan  $l$  ye dik doğru  $x$  -ekseni ve  $C(R, 0)$  olsun. O zaman  $P$  noktasının apsisi

$$\begin{aligned}
 x &= r \\
 y &= \sqrt{(r - R)^2 - (a - r)^2} \\
 y^2 &= r^2 - 2Rr + R^2 - a^2 + 2ar - r^2 \\
 y^2 &= 2(a - r)r + R^2 - a^2 \\
 r &= x \\
 y^2 &= 2(a - R)x + R^2 - a^2
 \end{aligned}$$

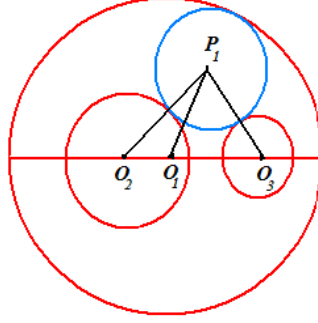
**Problem 7:**  $C(O_1, R_1)$ ,  $C(O_2, R_2)$ , ve  $C(O_3, R_3)$  çemberleri veriliyor. Bu üç çemberin her birine teğet olan  $C(P, r)$  çemberlerinin  $P$  merkezlerinin geometrik yeri nedir?

**Çözüm:**

$C(P, r)$  çemberinin konumuna göre sekiz hal vardır. bunlardan dördünü ele alalım.

a.  $C(O_2, R_2)$ ,  $C(O_3, R_3)$  ye dıştan teğet,  $C(O_1, R_1)$  ye içten teğet olarak çizilen

$C(P_1, r)$  çemberlerin  $P_1$  merkezlerinin geometrik yeri:



Şekil 2.11 İki çemberede dıştan teğet çemberler

$$|P_1O_1| = R_1 - r$$

$$|P_1O_2| = R_2 + r$$

$$|P_1O_3| = R_3 + r$$

$$|P_1O_1| + |P_1O_2| = R_1 + R_2$$

i) odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_2$  olan bir  $E_1$  elipsi vardır.

$$|P_1O_1| + |P_1O_3| = R_1 + R_3$$

ii) odakları  $O_1, O_3$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_3$  olan bir  $E_4$  elipsi vardır.

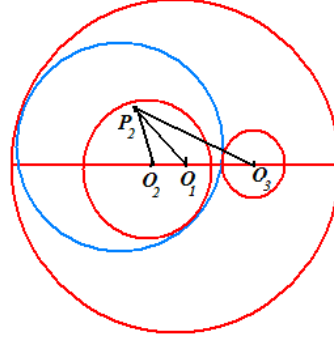
iii)

$$|P_1O_2| - |P_1O_3| = R_2 - R_3$$

hiperbol hali geçerli değildir. Çünkü  $P_1$  in geometrik yeri  $C(O_1, R_1)$  in içindedir.

b.  $C(O_2, R_2)$ ,  $C(O_3, R_3)$  ye dıştan teğet,  $C(O_1, R_1)$  ye içten teğet ve  $C(O_2, R_2)$  yi

kapsayan  $C(P_2, r)$  çemberlerin  $P_2$  merkezlerinin geometrik yeri:



Şekil 2.12 Çemberlerden birine içten diğerine dıştan teğet çemberler

$$|P_2O_1| = R_1 - r$$

$$|P_2O_2| = r - R_2$$

$$|P_2O_3| = r + R_3$$

$$|P_2O_1| + |P_2O_2| = R_1 - R_2$$

i) odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 - R_2$  olan bir  $E_3$  elipsi vardır.

$$|P_2O_1| + |P_2O_3| = R_1 - R_3$$

ii) odakları  $O_1, O_3$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 - R_3$  olan bir  $E_4$  elipsi vardır.

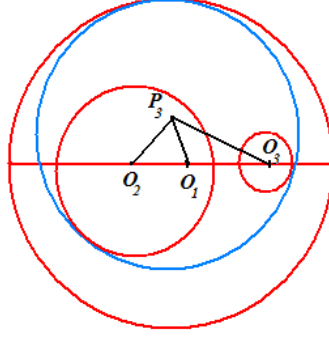
iii)

$$|P_2O_3| - |P_2O_2| = R_2 + R_3$$

hiperbol hali geçerli değildir. Çünkü  $P_2$  nin geometrik yeri  $C(O_2, R_2)$  in içindedir.

c.  $C(O_2, R_2)$ ,  $C(O_3, R_3)$  ye dıştan teğet,  $C(O_1, R_1)$  ye içten teğet ve  $C(O_2, R_2)$ ,

$C(O_3, R_3)$  yi kapsayan  $C(P_3, r)$  çemberlerin  $P_3$  merkezlerinin geometrik yeri:



Şekil 2.13 Çemberlerden ikisinede içten teğet çemberler

i) odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 - R_2$  olan bir  $E_3$  elipsi vardır.

$$|P_3O_1| + |P_3O_2| = R_1 - R_2$$

ii) odakları  $O_1, O_3$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 - R_3$  olan bir  $E_2$  elipsi vardır.

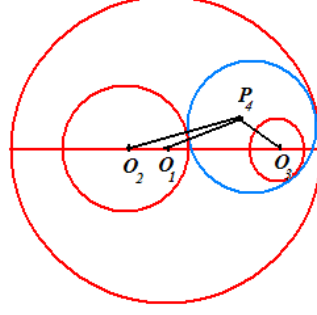
$$|P_3O_1| + |P_3O_3| = R_1 - R_3$$

iii)

$$|P_3O_1| - |P_3O_2| = R_1 + R_2$$

hiperbol hali geçerli değildir. Çünkü  $P_3$  ün geometrik yeri  $C(O_1, R_1)$  in içindedir.

d.  $C(O_2, R_2)$ ,  $C(O_3, R_3)$  ye dıştan teğet,  $C(O_1, R_1)$  ye içten teğet ve  $C(O_3, R_3)$  ü kapsayan  $C(P_4, r)$  çemberlerin  $P_4$  merkezlerinin geometrik yeri:



Şekil 2.14 Üç teğet çemberin durumları

$$|P_4O_1| + |P_4O_3| = R_1 - R_2$$

i) odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_2$  olan bir  $E_1$  elipsi vardır.

$$|P_4O_1| + |P_4O_3| = R_1 - R_3$$

ii) odakları  $O_1, O_3$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 - R_3$  olan bir  $E_2$  elipsi vardır.

iii)

$$|P_4O_2| - |P_4O_3| = R_2 + R_3$$

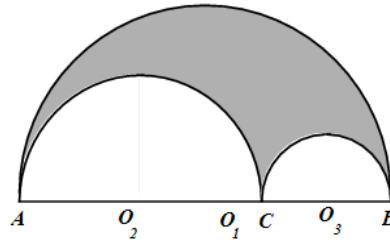
hiperbol hali geçerli değildir. Çünkü  $P_4$  ün geometrik yeri  $C(O_1, R_1)$  in içindedir.

### 3. AYAKKABICI BIÇAĞI

Bu bölümde ayakkabıcı bıçağı problemi üzerinde durulmuştur. Oluşan koniklerin durumları değerlendirilmiştir. (Tahir 2007 a, Tahir 2007 b, Hacısalihoğlu 1983, Namikawa, Y.1958 c)

#### Tanım 3.1: Ayakkabıcı Bıçağı (Shoemaker's Knife):

$O_1, O_2$  ve  $O_3$  merkezli yarı çemberler verilsin.  $O_2$  ve  $O_3$  merkezleri,  $O_1$  merkezli çemberin çapı üzerinde yer alsın.  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli çemberler,  $O_1$  merkezli çemberinin çapının uç noktalarından  $O_1$  merkezli çembere içten teğet, birbirlerine de dıştan teğet olsunlar. Bu üç yarı çember arasında kalan kapalı bölgeye *ayakkabıcı bıçağı* denir. Ayakkabıcı bıçağı geometride kullanılan en ilginç şekillerdendir. Ayakkabıcı bıçağı üzerinde ilk olarak *Arşimed* (287 – 212 BC) çalışmıştır. Bu isim, ayakkabıcılar tarafından kullanılan bıçağa benzerliği sebebiyle verilmiştir. Ayakkabıcı bıçağının bir diğer adı da yunanca olarak *Arbelos* tur. Bir çok kaynakta bu isimle anılmaktadır.



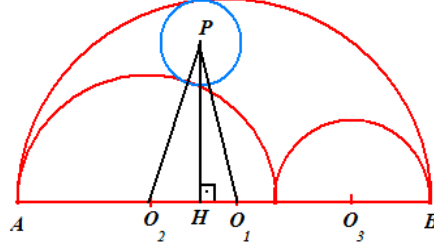
Şekil 3.1 Ayakkabıcı bıçağı

#### 3.1 Ayakkabıcı Bıçağı ve Konikler

**Teorem 3.1:** Şekil 3.2 ayakkabıcı bıçağında,  $O_1$  merkezli yarı çembere içten,  $O_2$  merkezli yarı çembere dıştan teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri

odakları  $O_1, O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_2$  olan bir *elipstir*.

**İspat:**



Şekil 3.2  $O_2$  merkezli çembere teğet çember ve elips

$$|PO_1| = R_1 - r$$

$$|PO_2| = R_2 + r$$

$$\begin{aligned} |PO_1| + |PO_2| &= R_1 - r + R_2 + r \\ &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri elipstir. Bu elipsin odakları  $O_1$  ve  $O_2$ , asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_2$  dir.

Bu elipsi  $E_1$  ile adlandıralım.

$E_1$  eşitliğini hesaplırsak;

$$\begin{aligned}
y^2 &= (R_1 - r)^2 - (R_1 - x)^2 \\
y^2 &= (R_2 + r)^2 - (x - R_2)^2 \\
(R_1 - r)^2 - (R_1 - x)^2 &= (R_2 + r)^2 - (x - R_2)^2 \\
R_1^2 + r^2 - 2R_1r - R_1^2 - x^2 + 2R_1x &= R_2^2 + r^2 - 2R_2r - R_2^2 - x^2 + 2R_2x \\
-2R_1r + 2R_1x &= -2R_2r + 2R_2x \\
x(R_1 - R_2) &= R_1r + R_2r \\
x &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}r \\
R_3 &= R_1 - R_2 \\
x &= \frac{R_1 + R_2}{R_3}r
\end{aligned}$$

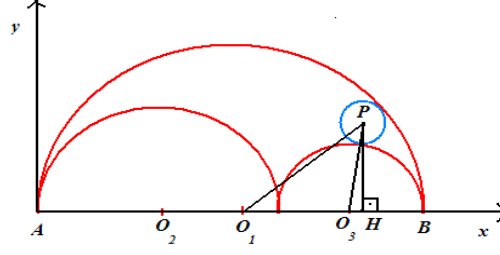
$x$  i yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{R_1 + R_2} \sqrt{R_1 R_2 (R_1 + R_2 - x) x} \\
y &= \frac{2}{R_3} \sqrt{R_1 R_2 (R_1 + R_2 - x) x}
\end{aligned}$$

dir. ■

**Teorem 3.2:** Şekil 3.3 ayakkabıcı bıçağında,  $O_1$  merkezli yarı çembere içten,  $O_3$  merkezli yarı çembere dıştan teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri odakları  $O_1$ ,  $O_2$  ve asal eksen uzunluğu  $R_1 + R_2$  olan bir *elipstir*.

İspat:



Şekil 3.3  $O_3$  merkezli çembere teğet çemberve elips

$$|PO_1| = R_1 - r$$

$$|PO_3| = R_3 + r$$

$$\begin{aligned} |PO_1| + |PO_3| &= R_1 - r + R_3 + r \\ &= R_1 + R_3 \end{aligned}$$



$$|PO_2| = R_2 + r$$

$$|PO_3| = R_3 + r$$

$$\begin{aligned} |PO_2| - |PO_3| &= R_2 + r - R_3 - r \\ &= R_2 - R_3 \end{aligned}$$

Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri hiperboldür. Bu hiperbolün odakları  $O_2$  ve  $O_3$  , asal eksen uzunluğu  $R_2 - R_3$  dür.

$HN$  eşitliğini hesaplırsak;

$$y^2 = (R_2 - r)^2 - (x - R_2)^2$$

$$y^2 = (R_3 + r)^2 - (2R_1 - R_3 - x)^2$$

$$(R_2 - r)^2 - (x - R_2)^2 = (R_3 + r)^2 - (2R_1 - R_3 - x)^2$$

$$2R_3r - 4R_1^2 + 4R_1R_3 + 4R_1x - 2R_3x = 2R_2r + 2R_2x$$

$$R_3r - 2R_1^2 + 2R_1R_3 + 2R_1x - R_3x = R_2r + R_2x$$

$$x = \frac{R_2 - R_3}{R_1}r + 2(R_1 - R_3)$$

$$x = \frac{R_2 - R_3}{R_1}r + 2R_2$$

$x$  i yerine yazarsak;

$$y = \frac{2}{R_2 - R_3} \sqrt{R_2R_3(x - 2R_2)(x - R_1)}$$

$$y = \frac{2}{R_1} \sqrt{R_2R_3(R_1 + r)r}$$

dir.

**Teorem 3.4:** Şekil 3.5 ayakkabıcı bıçağında  $O_2$  merkezli çembere dıştan teğet ve  $|CD|$  ye teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri doğrultmanı  $L$  ,merkezi  $O_2$  ve tepe noktası  $C$  olan bir *paraboldür*.

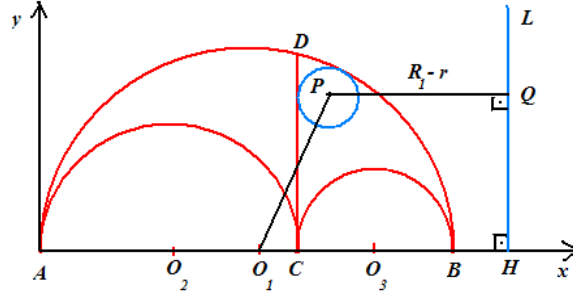


a. çember  $|CD|$  nin sağında ise

b. çember  $|CD|$  nin solunda ise

**İspat:**

a.



Şekil 3.6 Ayakkabıcı bıçağı ve parabol

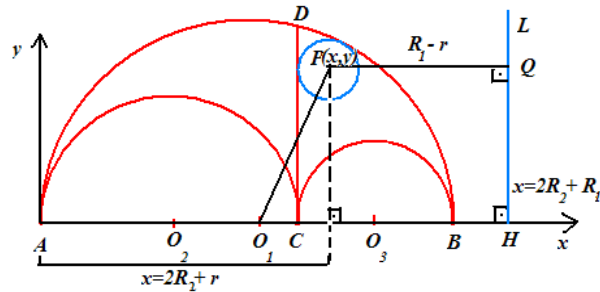
$O_1$  ve  $P$  arasındaki uzunluk  $P$  ile  $L$  arasındaki uzaklığa eşit olacak şekilde bir  $L$  doğrusu bulunabilir.  $L$ ,  $|CD|$  ile paralel olup;

$$|PQ| = |PO_1| = R_1 - r$$

$L$  parabolünün doğrultmanı,  $O_1$  merkezi,  $O_3$  tepe noktası olmak üzere;

$$x = R_1 + 2R_2$$

Doğrultman denklemi olup,



Şekil 3.7 Ayakkabıcı bıçağı ve parabol (ispat)

Parabolün eşitliği;

$$(R_1 - r)^2 = (x - R_1)^2 + y^2$$

$$x = 2R_2 + r$$

$$R_1^2 + r^2 - 2R_1r = x^2 - 2R_1x + R_1^2 + y^2$$

$$R_1^2 - 2R_1r + r^2 = 4R_2^2 + r^2 + 4R_2r - 4R_1R_2 - 2R_1r + R_1^2 + y^2$$

$$y^2 = 4R_1R_2 - 4R_2r - 4R_2^2$$

$$R_1 = R_2 + R_3$$

$$= 4R_2^2 + 4R_2R_3 - 4R_2r - 4R_2^2$$

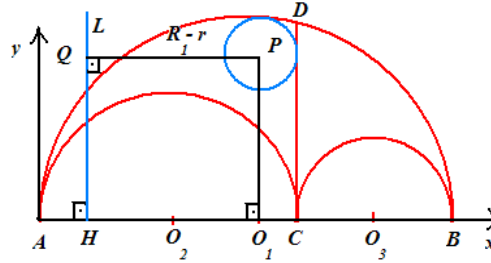
$$= 4R_2(R_3 - r)$$

$$h = y = 2\sqrt{R_2(R_3 - r)}$$

$$y = 2\sqrt{R_2(R_1 + R_2 - x)}$$

dir.

b.

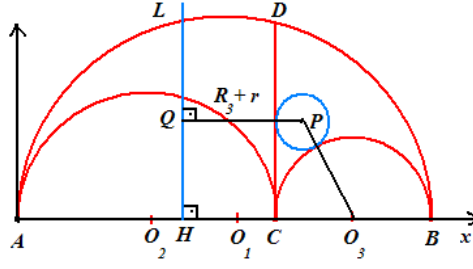


Şekil 3.8 Ayakkabıcı bıçağı ve parabol

ispat a.ile aynı şekildedir.■

**Teorem 3.6:** Şekil 3.9 ayakkabıcı bıçağında  $O_3$  merkezli çembere dıştan ve  $|CD|$  ye teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri doğrultmanı  $L$ , merkezi  $O_3$  ve tepe noktası  $C$  olan bir parabolüdür.

**İspat:**



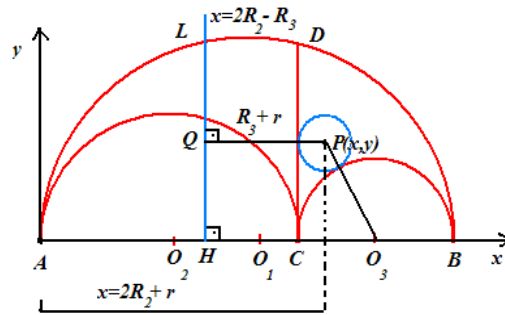
Şekil 3.9  $O_2$  merkezli çemberlere teğet çember ve parabol

$O_3$  ve  $P$  arasındaki uzunluk  $P$  ile  $L$  arasındaki uzaklığa eşit olacak şekilde bir  $L$  doğrusu bulunabilir.  $L$ ,  $|CD|$  ile paralel olup

$$|PQ| = |PO_3| = R_3 + r$$

$L$  parabolünün doğrultmanı,  $O_3$  merkezi,  $C$  tepe noktası olmak üzere;

$$x = 2R_2 - R_3$$



Şekil 3.10  $O_2$  merkezli çemberlere teğet çember ve parabol (ispat)



Parabolün eşitliği;

$$\begin{aligned}(R_1 - r)^2 &= r^2 + (R_1 - x)^2 \\ R_1^2 + r^2 - 2R_1r &= r^2 + R_1^2 - 2R_1x + x^2 \\ r &= \frac{-2R_1x + x^2}{-2R_1} \\ h = y = r &= x - \frac{x^2}{2R_1}\end{aligned}$$

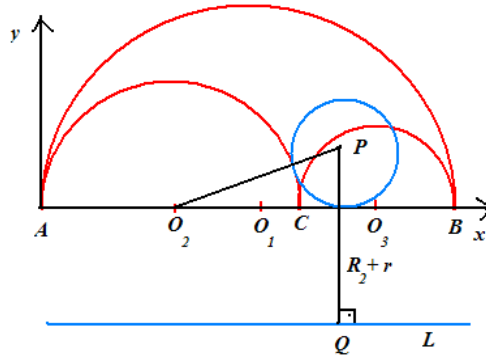
Tepe noktası yerine yazılırsa;

$$y = \frac{-1}{2R_1}(x - R_1)^2 + \frac{R_1}{2}$$

dir. Bu parabolü  $P_5$  ile isimlendirelim.■

**Teorem 3.8:**Şekil 3.12 ayakkabıcı bıçağında  $O_2$  merkezli çembere dıştan teğet ve  $O_1$  merkezli çemberin çapına teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri doğrultmanı  $L$ ,merkezi  $O_2$  ve tepe noktası  $(R_2, \frac{R_2}{2})$  olan bir *paraboldür*.

**İspat:**



Şekil 3.12 Parabol

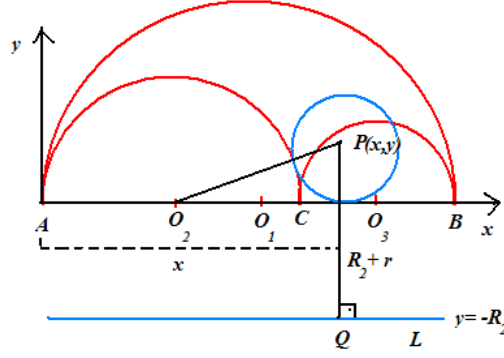
$$|PQ| = |PO_2| = R_2 + r$$

$L$  nin eksene olan uzaklığı;

$$y = -R_2$$

Parabolün tepe noktası;

$$\left(R_2, \frac{R_2}{2}\right)$$



Şekil 3.13 Parabol (ispat)

Parabolün eşitliği;

$$(R_2 + r)^2 = y^2 + (x - R_2)^2$$

$$y = r$$

$$R_2^2 + y^2 - 2R_2y = y^2 + R_2^2 - 2R_2x + x^2$$

$$h = y = r = \frac{x^2}{2R_2} - x$$

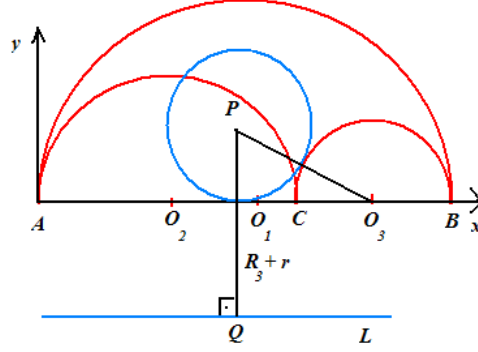
Tepe noktası yerine yazılırsa;

$$y = \frac{1}{2R_2} (x - R_2)^2 + \frac{R_2}{2}$$

dir. Bu parabolü  $P_6$  ile isimlendirelim.■

**Teorem 3.9:**Şekil 3.13 ayakkabıcı bıçağında  $O_3$  merkezli çembere dıştan teğet ve  $O_1$  merkezli çemberin çapına teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri doğrultmanı  $L$ , merkezi  $O_3$  ve tepe noktası  $(R_1 + R_2, \frac{-R_2}{2})$  olan bir *paraboldür*.

**İspat:**



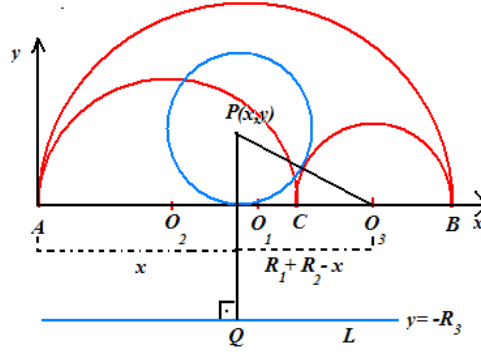
Şekil 3.14 x eksenini ve parabol

$L$  nin eksene olan uzaklığı;

$$y = -R_3$$

Parabolün tepe noktası;

$$\left( R_1 + R_2, \frac{-R_2}{2} \right)$$



Şekil 3.15 x eksenini ve parabol (ispat)

Parabolün eşitliği;

$$(R_3 + r)^2 = y^2 + (R_1 + R_2 - x)^2$$

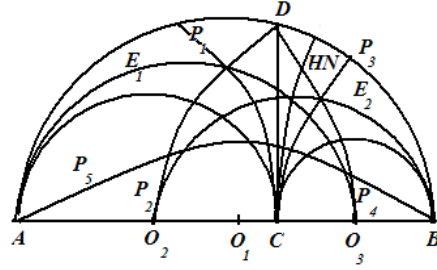
$$y = r$$

$$R_3^2 + y^2 + 2R_3y = y^2 + (R_1 + R_2)^2 - 2(R_1 + R_2)x + x^2$$

$$y = \frac{1}{2R_3} (x - R_1 - R_2)^2 - \frac{R_3}{2}$$

dir. Bu parabolü  $P_7$  ile isimlendirelim ■.

**Sonuç:**



Şekil 3.16 Koniklerin ayakcabıcı bıçağındaki görüntüsü

$$P_1 ; y = 2\sqrt{R_2 r}$$

$$P_2 ; y = 2\sqrt{R_3 (R_2 - r)}$$

$$P_3 ; y = 2\sqrt{R_3 r}$$

$$P_4 ; y = 2\sqrt{R_2 (R_3 - r)}$$

$$P_5 ; y = r$$

$$HN ; y = \frac{2}{R_1} \sqrt{R_2 R_3 (R_1 + r) r}$$

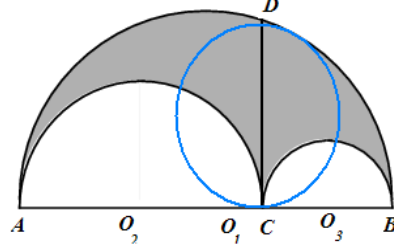
$$E_1 ; y = \frac{2}{R_3} \sqrt{R_1 R_2 (R_3 - r) r}$$

$$E_2 ; y = \frac{2}{R_2} \sqrt{R_1 R_3 (R_2 - r) r}$$

### 3.2 Ayakkabıcı Bıçağının Diğer Bazı Özellikleri

1) Ayakkabıcı bıçağında,  $|CD|$  doğru parçasını çap kabul eden çemberin alanı ile ayakkabıcı bıçağın alanı eşittir.

Ayakkabıcı bıçağın alanı:



Şekil 3.17 Ayakkabıcı bıçağın alanı

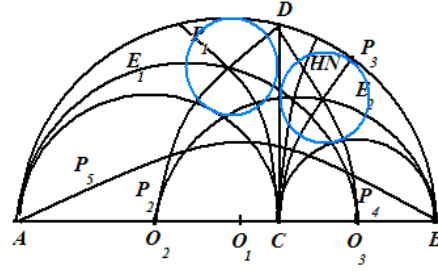
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi R_1^2 - \pi R_2^2 - \pi R_3^2}{2} \\
 R_1 &= R_2 + R_3 \\
 &= \frac{\pi (R_2^2 + R_3^2 + 2R_2R_3 - R_2^2 - R_3^2)}{2} \\
 &= \pi R_2R_3
 \end{aligned}$$

dir. Çapı  $|CD|$  olan çemberin alanı:

$$\begin{aligned}
 |CD|^2 &= |AC| |CB| \\
 |CD|^2 &= 4R_2R_3 \\
 |CD| &= 2\sqrt{R_2R_3} \\
 \frac{|CD|}{2} &= \sqrt{R_2R_3}
 \end{aligned}$$

yarıçap  $\sqrt{R_2R_3}$  olduğundan, çapı  $|CD|$  olan çemberin alanı  $\pi R_2R_3$  dir. ■

2) Ayakkabıcı bıçağında;  $O_1$  merkezli çembere içten,  $O_2$  merkezli çembere dıştan teğet,  $|CD|$  ye teğet ve  $P_1, P_2$  ve  $E_1$  koniklerinin kesiştiği noktayı merkez kabul eden  $O$  merkezli  $r$  yarıçaplı çember ile  $O_1$  merkezli çembere içten,  $O_3$  merkezli çembere dıştan teğet,  $|CD|$  ye teğet ve  $P_3, P_4$  ve  $E_2$  koniklerinin kesiştiği noktayı merkez kabul eden  $O'$  merkezli  $r'$  yarıçaplı çember özdeşdir. Bu çemberler, *Arcsimed* çemberleri olarak anılırlar.



Şekil 3.18 Arşimed çemberi

$O$  merkezli çember için  $P_1$  ve  $P_2$  yi kullanırsak;

$O'$  merkezli çember için  $P_3$  ve  $P_4$  ü kullanırsak;

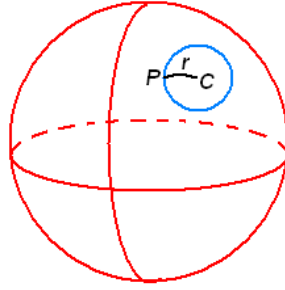
$$\begin{aligned}
 P_3; y &= 2\sqrt{R_3 r} \\
 P_2; y &= 2\sqrt{R_2(R_3 - r')} \\
 2\sqrt{R_2 r'} &= 2\sqrt{R_3(R_2 - r')} \\
 R_2 r' + R_3 r' &= R_2 R_3 \\
 r' &= \frac{R_2 R_3}{R_1}
 \end{aligned}$$

#### 4. KÜRE ÜZERİNDEKİ KONİKLER

Tıpkı düzlemde olduğu gibi küre üzerinde de konikleri ele alabiliriz.(Tahir 2007 a, Tahir 2007 b, Namikawa, Y.1958 a, Namikawa, Y.1958 c, Hacısalihoğlu 1983)

##### 4.1 Küre Üzerinde Çember ( Küresel Çember)

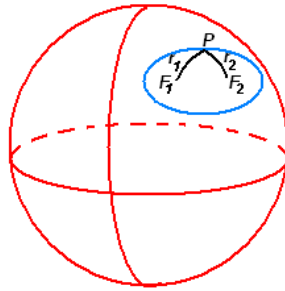
Küre üzerinde tesbit edilmiş bir  $C$  noktasından sabit küresel  $r$  uzaklığındaki  $P$  noktalarının geometrik yerine bir *küresel çember* denir ( Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Küresel çember

##### 4.2 Küre Üzerinde Elips ( Küresel Elips)

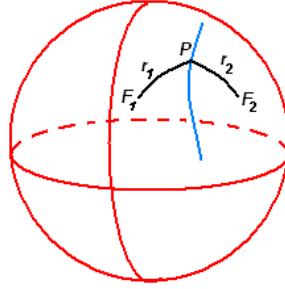
Küre üzerinde  $F_1$  ve  $F_2$  gibi tesbit edilmiş iki noktaya olan küresel uzaklıkları (*sırası ile*  $r_1$  ve  $r_2$ ) toplamı sabit  $2a$  olan ( $r_1 + r_2 = 2a$ )  $P$  noktalarının geometrik yeri bir *küresel elipstir* (Şekil 4.2).



Şekil 4.2 Küresel elips

### 4.3 Küre Üzerinde Hiperbol ( Küresel Hiperbol)

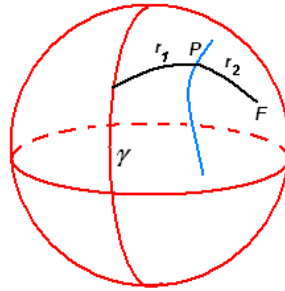
Küre üzerinde  $F_1$  ve  $F_2$  gibi tesbit edilmiş iki noktaya olan küresel uzaklıkları (*sırası ile*  $r_1$  ve  $r_2$ ) farklarının mutlak değeri sabit  $2a$  olan ( $|r_1 - r_2| = 2a$ ) P noktalarının geometrik yeri bir *küresel hiperboldür* (Şekil 4.3).



Şekil 4.3 Küresel hiperbol

### 4.4 Küre Üzerinde Parabol ( Küresel Parabol)

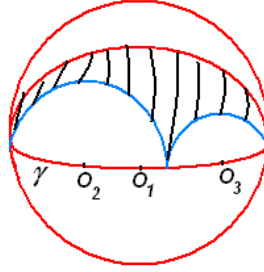
Küre üzerinde bir  $F$  noktası (*odak*) ve bir  $\gamma$  büyük çember eğrisi verilmiş olsun.  $\gamma$  büyük çember eğrisine ve  $F$  noktasına olan küresel uzaklıkları oranı sabit olan P noktalarının geometrik yerine bir *küresel parabol* denir ( Şekil 4.4)



Şekil 4.4 Küresel parabol

## 5. KÜRESEL AYAKKABICI BIÇAĞI

Küre üzerinde  $O_1, O_2$  ve  $O_3$  noktalarından geçen bir büyük çember yayı  $\gamma$  olan  $O_1, O_2$  ve  $O_3$  merkezli yarı küresel çemberler verilsin.  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli küresel çemberler,  $O_1$  merkezli  $\gamma$  küresel çemberinin çapının uç noktalarından  $\gamma$  ya içten teğet ve birbirine de dıştan teğet olsunlar. Bu üç yarı küresel çember arasında kalan kapalı küresel bölgeye *küresel ayakkabıcı bıçağı* denir (Şekil 5.1), (Namikawa, Y.1958 b, Tahir 2007 a, Tahir 2007 b, Hacısalihoğlu 1983).

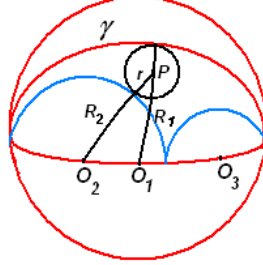


Şekil 5.1 Küresel ayakkabıcı bıçağı

### 5. 1 KÜRESEL AYAKKABICI BIÇAĞI VE KONİKLER

**Teorem 5.1:** Şekil 5.2 de küresel ayakkabıcı bıçağında,  $O_1$  merkezli büyük küresel çembere içten,  $O_2$  merkezli küresel yarı çembere dıştan teğet olan çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir *küresel elipstir*.

İspat:



Şekil 5.2 Küresel ayakkabıcı bıçağı ve elips

$$|PO_1| = R_1 - r$$

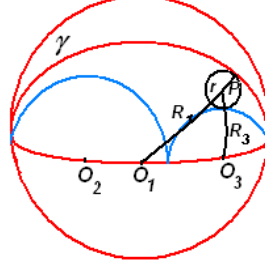
$$|PO_2| = R_2 + r$$

$$\begin{aligned} |PO_1| + |PO_2| &= R_1 - r + R_2 + r \\ &= R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri odakları  $O_1$  ve  $O_2$  olan bir *küresel elipstir* (Şekil 5.2) ■

**Teorem 5.2:** Şekil 5.3 de küresel ayakkabıcı bıçağında  $O_1$  merkezli büyük küresel çembere içten,  $O_3$  merkezli küresel yarı çembere dıştan teğet olan küresel çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir *küresel elipstir*

İspat:



Şekil 5.3  $O_3$  merkezli küresel çemberlere teğet küresel çemberler

$$|PO_1| = R_1 - r$$

$$|PO_3| = R_3 + r$$

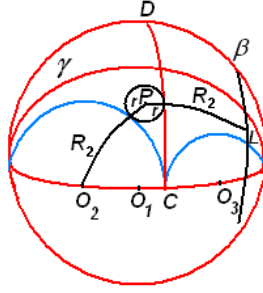
$$\begin{aligned} |PO_1| + |PO_3| &= R_1 - r + R_3 + r \\ &= R_1 + R_3 \end{aligned}$$

Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri odak noktaları  $O_1$  ve  $O_2$  olan bir küresel elipstir (Şekil 5.3). ■

**Teorem 5.3:** Şekil 5.4 küresel ayakkabıcı bıçağında  $O_2$  ve  $O_3$  merkezli küresel yarı çemberlere dıştan teğet olan küresel çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir *küresel hiperboldür*.



İspat:



Şekil 5.5 Küresel ayakcabıcı bıçağı ve parabol

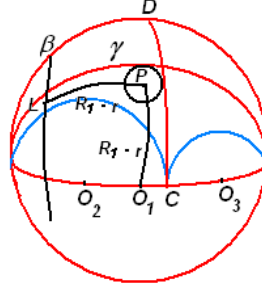
$|\widehat{PL}| = |\widehat{PO}_2|$  olacak şekilde bir  $\beta$  küresel eğrisi üzerinde bir  $L$  noktası daima bulunabilir. Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri bir küresel paraboldür (Şekil 5.5).■

**Teorem 5.5:** Şekil 5.6 da küresel ayakcabıcı bıçağında,  $O_1$  merkezli küresel  $\gamma$  çemberine içten teğet ve  $|\widehat{CD}|$  büyük çember eğrisine teğet olan küresel çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir *küresel paraboldür*.

- a. küresel çember  $|CD|$  nin solunda ise
- b. küresel çember  $|CD|$  nin sağında ise

İspat:

a.



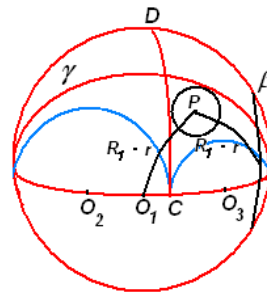
Şekil 5.6 CD 'ye teğet çemberler ve parabol

$O_1$  ile  $P$  arasındaki küresel yay uzunluğu  $P$  ile  $L$  arasındaki küresel yay uzunluğuna eşit olacak şekilde bir  $L$  küresel eğrisi bulunabilir.

$$|PL| = |PO_1| = R_1 - r$$

Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri bir küresel paraboldür.

b.

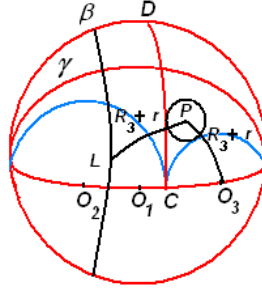


Şekil 5.7 CD 'ye teğet çemberler ve parabol (ispat)

ispat a.ile aynı şekildedir.■

**Teorem 5.6:** Şekil 5.8 de küresel ayakkabıcı bıçağında,  $O_3$  merkezli küresel yarı çembere dıştan teğet ve  $\widehat{CD}$  büyük çember eğrisine teğet olan küresel çemberlerin merkezlerinin geometrik yeri bir *küresel parabol*dür.

**İspat:**



Şekil 5.8 Küresel parabol (ispat)

$\widehat{PL} = \widehat{PO_3}$  olacak şekilde bir  $\beta$  küresel eğrisi üzerinde bir  $L$  noktası daima bulunabilir. Bu yüzden  $P$  lerin geometrik yeri bir küresel paraboldür (Şekil 5.8).■

## KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H. H 1983. Hareket geometrisi ve kuantenionlar teorisi,

Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Mat No:2.

Namikawa, Y.1958 a. The Application of geometric calculus to sailing system, Kobe  
Marcantile Marine Colledge.

Namikawa, Y.1958 b. About Terrestrial Geodezic Distance Mathematics 9, (1958),  
237.

Namikawa, Y.1958 c. Same Loren Accuancy Conteuras, J. İns.Of navigation ,  
Londan, 11,304 - 317

Tahir, Hussein 2007 a. A new approach to the conics 1., Melbourne, 2008

Tahir, Hussein 2007 b. A new approach to the conics 2., Melbourne, 2008

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Esra EMİR  
**Doğum Yeri** : Ankara  
**Doğum Tarihi** : 30. 07. 1985  
**Medeni Hali** : Bekar  
**Yabancı Dili** : İngilizce

### Eğitim Durumu

**Lise** : Nermin Mehmet Çekiç Anadolu Lisesi (2003)  
**Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2007)  
**Yüksek Lisans** : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2007-Temmuz 2010)