

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN LACUNARY  
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

**Tezi Hazırlayan  
Funda KOCABIYIK**

**DANIŞMAN  
Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2011  
KAYSERİ**

**T.C.  
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN LACUNARY  
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Hazırlayan  
Funda KOCABIYIK**

**Danışman  
Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

**Haziran 2011  
KAYSERİ**

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kurallar ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.



Funda KOCABIYIK

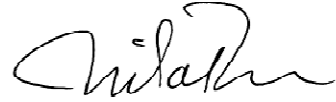
**YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI**

**FUZZY SAYI DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**  
adlı yüksek lisans tezi Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma  
Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



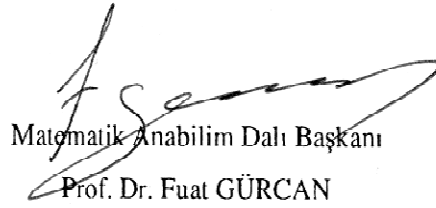
Tezi Hazırlayan

Funda KOCABIYIK



Danışman

Yrd. Doç. Dr. A.Nihal TUNCER



Matematik Anabilim Dalı Başkanı  
Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER danışmanlığında **Funda KOCABIYIK** tarafından hazırlanan “**Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

**JÜRİ:**

Danışman : Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 28/06/2011 tarih ve 2011/22-13 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28/06/2011.

  
Prof. Dr. Necmettin MARAŞLI

Enstitü Müdürü

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tamamlanmasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve çalışmalarım süresince değerli fikir ve tecrübeleri ile bana büyük destek sağlayan saygıdeğer hocam **Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**'e içtenlikle teşekkür ederim.

Çalışmalarım süresince gösterdikleri anlayış, maddi ve manevi yönden desteklerini hiç eksik etmeyen sevgili aileme ve Bozok Üniversitesi öğretim elemanlarından Sayın Arş. Gör. Murat BABAARSLAN 'a en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

# FUZZY SAYI DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

**Funda KOCABIYIK**

**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**

**Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2011**

**Danışman: Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER**

## ÖZET

Fuzzy sayılarının sınırlı ve yakınsak dizileri ilk olarak Matloka (1986) tarafından tanımlanmıştır. Reel değerli diziler için lacunary yakınsaklık ve lacunary istatistiksel Cauchy dizisi kavramları J. Fridy ve C. Orhan tarafından 1993 te verilmiştir. Nuray ve Savaş (1995) fuzzy sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını tanımlamış, F. Nuray (1998) fuzzy sayılarının lacunary istatistiksel yakınsak dizi cümleleri ile istatistiksel yakınsak dizi cümleleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde aralık sayıları, aritmetik işlemler, fuzzy sayıları, yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık ve lacunary istatistiksel yakınsaklık gibi tezimizle ilgili olan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Aynı zamanda fuzzy sayılarının lacunary kuvvetli  $\Delta$ -yakınsaklığı incelenmiş,  $\sigma$ -asimptotiksel lacunary istatistiksel denk diziler ile fuzzy sayılarının genelleştirilmiş fark dizilerinin ve çift dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramları tanımlanmıştır.

İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık ile fuzzy sayılarının lacunary istatistiksel yakınsaklığı, lacunary kuvvetli  $\Delta$ -yakınsaklığı ve genelleştirilmiş fark dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde  $\sigma$ -asimptotiksel lacunary istatistiksel denk diziler ile fuzzy sayılarının çift dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramları ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Fuzzy sayıları; lacunary istatistiksel yakınsaklık; fuzzy sayılarının genelleştirilmiş fark dizileri ve çift dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı; lacunary kuvvetli  $\Delta$ -yakınsaklık;  $\sigma$ -asimptotiksel lacunary istatistiksel denk diziler.

# LACUNARY STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

**Funda KOCABIYIK**

**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**

**M. Sc. Thesis, June 2011**

**Supervisor: Assistant Professor A. Nihal TUNCER**

## ABSTRACT

Bounded and convergent sequences of fuzzy numbers have been introduced by Matloka, in 1986. Then, the concepts such as lacunary convergence and lacunary statistical Cauchy sequences for real numbers sequences have been defined by J. Fridy and C. Orhan (1993). Nuray and Savaş (1995) have defined the concepts of statistical convergence and statistical Cauchy sequences of fuzzy numbers. Nuray (1998) has studied the relations between lacunary statistical convergence and statistical convergent sequences sets of fuzzy numbers.

This study consists of three chapters:

In the first chapter, some basic definitions and theorems about interval numbers, density, fuzzy numbers, statistical convergence and lacunary statistical convergence that will be used throughout the study have been given. Then lacunary strongly convergence of fuzzy numbers have been studied,  $\sigma$ - asymptotically lacunary statistical equivalent sequences, generalized difference and double sequences of fuzzy numbers have been defined.

In the second chapter, the relations between statistical convergence and lacunary statistical convergence of generalized difference and lacunary strongly  $\Delta$ -convergent sequences of fuzzy numbers have been given.

In the final chapter, the relations theorems about  $\sigma$ - asymptotically lacunary statistical equivalent sequences and double sequences of fuzzy numbers have been proved.

**Keywords:** Fuzzy numbers; lacunary statistical convergent; lacunary strongly convergence of generalized difference and double sequences of fuzzy numbers; lacunary strongly  $\Delta$ -convergent and  $\sigma$ - asymptotically lacunary statistical equivalent sequences.

## İÇİNDEKİLER

### FUZZY SAYI DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK .....	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI .....	iii
KABUL VE ONAY .....	iv
TEŞEKKÜR .....	v
ÖZET .....	vi
ABSTRACT .....	viii
KISALTMALAR LİSTESİ .....	xii
GİRİŞ .....	1

## 1. BÖLÜM

### TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1.Aralık Sayıları .....	2
1.1.1.Aritmetik İşlemler .....	3
1.1.2.Aralıklar Arasındaki Uzaklık .....	4
1.2.Fuzzy Sayıları.....	5
1.3.Yoğunluk kavramı ve İstatistiksel Yakınsaklık .....	6
1.4.Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık .....	10
1.5.Fuzzy Sayı Dizilerinde Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık .....	10
1.6.Fuzzy Sayılarının Kuvvetli Lacunary $\Delta$ -yakınsak dizileri .....	11
1.7.Fuzzy Sayılarının Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı .....	12
1.8. $\sigma$ – Asimptotik Lacunary İstatistiksel Denk Diziler .....	15
1.9.Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı .....	17

## 2. BÖLÜM

### FUZZY SAYILARININ LACUNARY KUVVETLİ $\Delta$ -YAKINSAKLIĞI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİ

2.1. Fuzzy Sayılarının Lacunary Kuvvetli $\Delta$ -Yakınsaklığı ve Genelleştirilmiş Fark Dizileri .....	20
--	----

## 3. BÖLÜM

### FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\sigma$ – ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

3.1. Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\sigma$ – Asimptotik Lacunary İstatistiksel Denk Diziler .....	38
---	----

## 4. BÖLÜM

### TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1.Sonuç.....	46
----------------	----

KAYNAKLAR .....	47
-----------------	----

ÖZGEÇMİŞ

## KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$ A $	: $A$ cümlesinin eleman sayısı
$\delta$	:Yoğunluk fonksiyonu
$S$	:İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$st - limx$	: $x$ dizisinin istatistiksel limiti
$L(R)$	:Fuzzy sayılar kümesi
$\sigma_1$	:Kuvvetli Cesaro Toplanabilme
$S_\theta - limx$	: $x$ dizisinin lacunary istatistiksel limiti
$N_\theta$	: $x$ dizisinin kuvvetli lacunary limiti
$S(\Delta)$	: $\Delta$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_\theta(\Delta^m)$	: $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi
$N_\theta(\Delta_p^m)$	:Kuvvetli lacunary $\Delta_p^m$ -yakınsak dizi kümesi
$x \sim y$	: $x$ ile $y$ asimptotik istatistiksel denk
$x \overset{S_\theta}{\sim} y$	:Asimptotik lacunary istatistiksel denk
$P - limx$	: $x$ dizisinin Pringsheim limiti
$st_2$	:İstatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi
$l_\infty$	:Sınırlı dizilerin uzayı
$c$	:Yakınsak dizilerin uzayı
$m(\Delta)$	:Sınırlı fark dizilerinin kümesi
$\omega$	:Bütün fuzzy sayı dizisinin kümesi

## GİRİŞ

Klasik bir küme, bazı özelliklere sahip nesnelerin bir topluluğu, bir sınıfı, bir koleksiyonu olarak düşünülebilir. Kümeyi meydana getiren nesnelere o kümenin elemanları denir. Bir kümenin verilmesi için o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan karakteristik özelliklerin verilmesi gerekir. Ancak günlük hayatta, bazı nesnelerin sınıfı için karakteristik kriter kesin olarak belirlenemeyebilir. Örneğin “orta yaş” kavramı kişiden kişiye değiştiği için kümenin sınırları değişkendir. Böylece bir nesnenin bir kümeye ait olup olmadığı belirsizliği ortaya çıkar. Bu sebepten dolayı, ilk olarak 1965 yılında L. A. Zadeh fuzzy küme kavramını tanımlamış, bir nesnenin kümeye ait olup olmadığını veya kısmen ait olduğunu belirleyen, değer kümesi  $[0,1]$  olan üyelik fonksiyonu ile bir üyelik derecesi tanımlamıştır. Fuzzy kümeler; son yıllarda birçok mühendislik dallarında, uzay araştırmaları ve havacılık endüstrisinde kullanılmaktadır.

Fuzzy küme kavramı sadece uygulamalı bilimde değil, aynı zamanda teorik bilimde de son derece önemli bir yere sahiptir. İlk olarak 1986 da Matloka [1] “Sequences of fuzzy numbers’ adlı makalesinde fuzzy sayı dizisinin tanımını yapmış, reel sayı dizilerindeki yakınsaklık ve sınırlılık gibi birçok özelliğin fuzzy sayıları için de geçerli olduğunu ifade etmiştir. 1995 de Nuray ve Savaş [2], fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanımlamış, 1998 de Nuray [3] fuzzy sayı dizilerinde lacunary istatistiksel yakınsaklığı tanımlayarak fuzzy sayı dizileri ile lacunary istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiyi vermiştir. 2004 yılında Bilgin [4] fuzzy sayılarının lacunary kuvvetli  $\Delta$ -yakınsaklığını tanımlamış, Savaş ve Patterson [5]  $\sigma$ -asimptotiksel lacunary istatistiksel denk dizileri incelemiştir.

2006 da Altın, Et ve Çolak [6] fuzzy sayılarının genelleştirilmiş fark dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı üzerine çalışmalar yapmışlardır.

# 1. BÖLÜM

## TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili olan bazı tanım ve notasyonları vererek bir giriş yapalım.

### 1.1. Aralık Sayıları

Bütün reel sayıların kümesini  $\mathbb{R}$  ile gösterelim. Herhangi bir reel sayının  $a$  ve  $b$  gibi iki reel sayı arasında olduğu bilinir. Buna göre  $x$  reel sayısının  $a \leq x \leq b$  veya  $x \in [a, b]$  şeklinde  $[a, b]$  kapalı sınırlı aralığa dahil olduğu kabul edilir.  $a$  ve  $b$ , aralığın sınırları veya bitim noktaları olarak adlandırılır. Bir aralık; kapalı, açık, alttan sınırsız (soldan), üstten sınırsız (sağdan) olabilir.  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesi de bir aralıktır ve  $(-\infty, \infty)$  şeklinde gösterilir.  $A$  aralık sayısı,  $a \leq x \leq b$  olacak şekildeki  $x$  reel sayılarının kümesidir. Yani  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $x \in [a, b]$  veya  $A = [\underline{A}, \overline{A}] = \{x: \underline{A} \leq x \leq \overline{A}, x \in \mathbb{R}\}$  şeklindedir. Bir  $A$  aralık sayısının alt sınırı  $\underline{A}$ , üst sınırı ise  $\overline{A}$  şeklinde gösterilir.

Özel olarak  $a = b$  alınırsa  $A$  aralık sayısı bir reel sayıya indirgenir ki, bu da  $a = [a, a]$  gibi nokta aralık veya tek nokta kümesi olarak adlandırılır. Böylece bir aralık sayısı bir reel sayının (tek nokta kümesinin) genelleştirilmişidir denir.

Herhangi bir  $A$  aralık sayısı için, genişlik, büyüklük, yansıma ve tersi kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{Genişlik (Width)} : W(A) = W[\underline{A}, \overline{A}] = \overline{A} - \underline{A}$$

$$\text{Büyüklük (Magnitude)} : |A| = |[\underline{A}, \overline{A}]| = \max(|\underline{A}|, |\overline{A}|)$$

$$= \begin{cases} |\underline{A}|, & |\underline{A}| \geq |\overline{A}| \\ |\overline{A}|, & |\underline{A}| \leq |\overline{A}| \end{cases}$$

$$\text{Yansıma} : A^- = [\underline{A}, \overline{A}]^- = [-\overline{A}, -\underline{A}]$$

$$\text{Ters (İnvers)} \quad : A^{-1} = [\underline{A}, \overline{A}]^{-1} = \left[ \frac{1}{\overline{A}}, \frac{1}{\underline{A}} \right], \quad 0 \notin [\underline{A}, \overline{A}].$$

**Örnek 1.1.1.**  $A = [2,5]$  aralık sayısı için

$$\text{Genişlik (Width)} \quad : W(A) = W[2,5] = 5 - 2 = 3$$

$$\text{Büyüklik (Magnitude)} : |A| = |[2,5]| = \max(2,5) = 5$$

$$\text{Yansıma} \quad : A^{-} = [2,5]^{-} = [-5, -2]$$

$$\text{Ters (İnvers)} \quad : A^{-1} = [2,5]^{-1} = \left[ \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right].$$

Reel sayıların aralıkları üzerindeki “ $\leq$ ” sıralama bağıntısı

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \quad \text{ve} \quad \overline{A} \leq \overline{B}$$

şeklinde tanımlanır.

### 1.1.1. Aritmetik İşlemler

$A = [\underline{A}, \overline{A}]$  ve  $B = [\underline{B}, \overline{B}]$  aralıkları için  $\underline{A} = \underline{B}$  ve  $\overline{A} = \overline{B}$  yazılabiliyorsa  $A$  aralık sayısı  $B$  aralık sayısına eşittir denir.  $A = [\underline{A}, \overline{A}]$  ve  $B = [\underline{B}, \overline{B}]$  aralık sayıları için aşağıdaki işlemler tanımlanabilir.

$$\text{Toplama: } A + B = [\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

$$\text{Çıkarma: } A - B = [\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

$$\begin{aligned} \text{Çarpma : } A \cdot B &= AB = [\underline{A}, \overline{A}] \cdot [\underline{B}, \overline{B}] \\ &= [\min(\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B}), \max(\underline{A} \cdot \underline{B}, \overline{A} \cdot \overline{B}, \underline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A} \cdot \underline{B})] \end{aligned}$$

$$\text{Bölme : } A : B = A / B = \frac{A}{B} = [\underline{A}, \overline{A}] : [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A}, \overline{A}] \cdot \left[ \frac{1}{\overline{B}}, \frac{1}{\underline{B}} \right]$$

- i)  $A + A^{-} = [\underline{A}, \overline{A}] + [-\overline{A}, -\underline{A}] = [-(\overline{A} - \underline{A}), \overline{A} - \underline{A}] \neq 0$  fakat  $0 \in A + A^{-}$  ve  $A + A^{-}$  yeni aralığın uç noktaları 0 a göre simetriktir.
- ii)  $A \cdot A^{-1} = [\underline{A}, \overline{A}] \cdot \left[ \frac{1}{\overline{A}}, \frac{1}{\underline{A}} \right] \neq 1$  fakat  $1 \in A \cdot A^{-1}$  dir.

Eğer  $A$ ,  $A = [a, a]$  reel sayısına (tek nokta aralığına) indirgenirse, bu durumda yansıması ve tersi sırasıyla  $A^{-}$  ve  $A^{-1}$  olmak üzere  $A^{-} = [-a, -a] = -A$  ve

$A^{-1} = \left[ \frac{1}{a}, \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{A}$  şeklindedir. (i) ve (ii) kullanılarak cebirdeki temel sonuçlar özel bir durum olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a + (-a) = 0 \quad \text{ve} \quad a \cdot a^{-1} = 1$$

Nokta aralıkları  $0 = [0, 0]$  ve  $1 = [1, 1]$ , sırasıyla aralıklar üzerindeki toplama ve çarpma işlemleri için etkisiz (birim) elemanlardır.

$$A = A + 0 = 0 + A$$

$$A = A \cdot 1 = 1 \cdot A$$

$A = [a, a]$  tek nokta aralığı için dağılma özelliği sağlanır. Buna göre

$$A(B + C) = AB + AC$$

dir.

### 1.1.2. Aralıklar Arasındaki Uzaklık

$A = [\underline{A}, \overline{A}]$  ve  $B = [\underline{B}, \overline{B}]$  aralık sayılarının aralarındaki uzaklık

$$d(A, B) = \max(|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer  $A$  ve  $B$  tek nokta aralıkları ise yani  $A = [a, a]$ ,  $B = [b, b]$  ise bu durumda, (1.1) ifadesi reel sayılar arasındaki uzaklığa indirgenir. Gerçekten,

$$d([a, a], [b, b]) = \max(|a - b|, |a - b|) = |a - b|$$

(1.1) tanımından

$$d(A, B) = d(B, A),$$

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

olduğu söylenebilir.

**Örnek 1.1.2.**  $A=[1,6]$  ,  $B = [3,7]$  aralık sayıları arasındaki uzaklık (1.1) tanımına göre

$$d(A,B) = \max(|1 - 3|, |6 - 7|) = \max(2,1) = 2$$

elde edilir.

## 1.2. Fuzzy Sayıları

İlk olarak fuzzy sayısı kavramını tanımlayacak daha sonra da fuzzy sayıları için lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını inceleyeceğiz.

**Tanım 1.2.1.** Fuzzy sayısı  $X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  şeklinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur;

- i)  $X$  normaldir, yani  $X(t_0) = 1$  olacak şekilde  $\exists t_0 \in \mathbb{R}$  vardır,
- ii)  $X$  fuzzy konvektir, yani  
 $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$  için  $X(\lambda t_1 + (1 - \lambda t_2)) \geq \min\{X(t_1), X(t_2)\}$ ,
- iii)  $X$  üst yarı süreklidir, yani  $\forall t \in [0,1]$  için  $\{x: X(x) < t\}$  cümlesi açık olmalı,
- iv)  $X^0 = \{t \in \mathbb{R} : X(t) > 0\}$  cümlesinin kapanışı kompakt olmalıdır [7].

Fuzzy sayılarının kümesi  $L(\mathbb{R})$  ile gösterilir.

**Örnek 1.2.1.** 5 sayısının karakteristik fonksiyonunda bu özellikleri inceleyelim.

$$A(X) = \begin{cases} 1, & X = 5 \\ 0, & X \neq 5 \end{cases}$$

- i)  $X = 5$  için  $A(5) = 1$  olduğundan normaldir,
- ii)  $A(\lambda t_1 + (1 - \lambda t_2)) \geq \min\{A(t_1), A(t_2)\}$   
fuzzy konveks,  $\min\{X(t_1), X(t_2)\} = 0$  olduğundan sağlanır,
- iii)  $A$  üstten yarı süreklidir;  $\{x: A(x) < t\}$  açık,  $A^{-1}(-\infty, t)$  açık, dolayısıyla  
 $(-\infty, 5) \cup (5, \infty)$  açık olup  $A$  üst yarı süreklidir.
- iv)  $A^0 = 5 = [5,5]$  kompaktır.

Her reel sayı kendi karakteristik fonksiyonu ile gösterilebilir. Ayrıca fuzzy sayısı tanımından, her karakteristik fonksiyonun bir fuzzy sayısı olduğu söylenebilir.

Böylece reel sayılar kümesi fuzzy sayılar kümesinin bir alt kümesidir ve fuzzy sayıları için gözlemlenen bütün özellikler reel sayılar için de geçerli olacaktır. Fakat fuzzy sayıları kümesi kısmi sıralı ve grup yapısı oluşturmayan bir kümedir.

Fuzzy sayıları üzerindeki  $\bar{d}$  Hausdorff metriği de  $\bar{d}: L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  olmak üzere

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha|\}$$

şeklinde tanımlanır.  $X^\alpha = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ ,  $X$  fuzzy sayısının  $\alpha$  kesmesidir. Burada  $\bar{d}$ ,  $L(\mathbb{R})$  üzerinde bir metriktir.  $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$  tam metrik uzaydır [8].

Fuzzy sayıları için sıralama bağıntısı

$$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X}^\alpha \leq \overline{Y}^\alpha \text{ ve } \underline{X}^\alpha \leq \underline{Y}^\alpha$$

olarak tanımlanır. Bu ' $\leq$ ' bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$X < Y \Leftrightarrow X \leq Y, \exists \alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{X}^\alpha < \overline{Y}^\alpha \text{ veya } \underline{X}^\alpha < \underline{Y}^\alpha$$

şeklinde [9]. Eğer  $X \leq Y$  ve  $Y \leq X$  bağıntılarından her ikisi de sağlanmıyor ise,  $X$  ve  $Y$  fuzzy sayıları karşılaştırılmaz denir ve  $X \not\sim Y$  şeklinde gösterilir.

### 1.3.Yoğunluk Kavramı ve İstatistiksel Yakınsaklık

**Tanım 1.3.1.**  $A, B$  doğal sayılar kümesinin herhangi iki altkümesi olmak üzere  $A \Delta B$  simetrik farkı sonlu ise  $A$  asimptotik olarak  $B$  ye eşittir denir ve  $A \sim B$  şeklinde gösterilir [10].

**Tanım 1.3.2.**  $A, B$  doğal sayılar kümesinin herhangi iki altkümesi olsun. Eğer,

$$\mathbf{D1)} A \sim B \Rightarrow \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B),$$

$$\mathbf{D2)} A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B),$$

$$\mathbf{D3)} \forall A, B \text{ için } \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B),$$

$$\mathbf{D4)} \underline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$$

özellikleri sağlanıyorsa,  $\underline{\delta}: A \rightarrow [0,1]$  fonksiyonuna alt asimptotik yoğunluk denir [10].

**Tanım 1.3.3.**  $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(\mathbb{N} \setminus A)$  şeklinde tanımlanan  $\overline{\delta}$  yoğunluğuna birleştirilmiş üst yoğunluk denir [10].

Alt ve üst yoğunluğun temel özelliklerini aşağıdaki teoremle vereceğiz.

**Teorem 1.3.1.**  $\underline{\delta}$  alt asimptotik yoğunluk ve  $\overline{\delta}$ ,  $\underline{\delta}$  nin birleştirilmiş üst yoğunluğu olsun.

Herhangi iki  $A, B$  doğal sayı kümeleri için;

- i)  $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$ ,
- ii)  $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$ ,
- iii)  $\forall A, B$  için  $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$ ,
- iv)  $\overline{\delta}(\emptyset) = \underline{\delta}(\emptyset) = 0$ ,
- v)  $\overline{\delta}(\mathbb{N}) = 1$ ,
- vi)  $A \sim B \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$ ,
- vii)  $\underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A)$ ,

şeklindedir [10].

**Tanım 1.3.4.** Doğal sayıların herhangi bir  $A$  altkümesi için  $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$  oluyorsa  $A$  kümesi  $\delta$  yoğunluğuna göre doğal yoğunluğa sahiptir denir. Bu özelliğe sahip kümelerin kümesini  $\eta_\delta$  ile göstereceğiz. Yani,

$$\eta_\delta = \{A: \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)\}$$

dır.  $\eta_\delta^0$  uzayı da,

$$\eta_\delta^0 = \{A: \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = 0\}$$

olarak tanımlanır. Yani  $A \in \eta_\delta$  demek  $\delta(A) = \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$  demektir [10].

Bir  $A$  kümesindeki  $n$  e eşit veya daha küçük pozitif tam sayıların sayısı  $A(n)$  ile gösterilsin. Yani  $A(n) = |\{k \leq n: k \in A, n \in \mathbb{R}\}|$  dir.  $|\cdot|$  ise kardinal (eleman) sayısını gösterir. Örneğin,  $A$  kümesi çift sayılardan oluşuyorsa  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$  dir. Bu durumda  $A(1) = 0$ ,  $A(2) = 1$ ,  $A(3) = 1$ , ... ,  $A(7) = 3$ ,  $A(8) = 4$ ,  $A\left(\frac{17}{2}\right) = 4$ .

Burada açıkça  $n \geq 0$  için  $A(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  olduğu elde edilir.

**Tanım 1.3.5.** Bir  $A$  kümesinin asimptotik yoğunluğu,

$$\underline{d}_0(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır.  $\frac{A(n)}{n}$  dizisinin limitinin var olması durumunda  $A$  kümesinin doğal yoğunluğu  $d_0(A)$  ile gösterilir.

Böylece  $A$  doğal yoğunluğa sahipse,

$$\underline{d}_0(A) = d_0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$$

dir [10].

**Örnek 1.3.1.**  $A = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$  ise  $\underline{d}_0(A) = d_0(A) = 1$  dir.

**Örnek 1.3.2.**  $A = \{2, 4, 6, \dots\}$  olsun.  $\frac{A(n)}{n}$  dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \dots$$

şeklinde olup

$$\underline{d}_0(A) = d_0(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

dir.

### Tanım 1.3.6. İstatistiksel Yakınsaklık

Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\delta(\{k: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x$  dizisi  $L$  ye istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st - \lim x = L$  veya  $x_k \rightarrow L(S)$  ile gösterilir. Dikey çubuklar kapalı kümede elemanların sayılarını gösterir. Aynı zamanda  $S$  bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini göstermek için de kullanılır [11].

**Örnek 1.3.4.**  $x = (x_k)$  dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \neq n^2, \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $\frac{1}{2}$  den küçük olacak şekilde herhangi bir  $\varepsilon > 0$  için

$$K = \{k: |x_k - L| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

alınır. Burada  $K$  kümesinin yoğunluğu  $\delta(K) = 0$  dır. Dolayısıyla  $x$  dizisi  $L = 0$  a istatistiksel yakınsaktır, yani  $st - \lim x = 0$  dır. Aynı zamanda bu dizinin  $\varepsilon$  komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan yakınsak değildir. O halde istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olamayacağı söylenebilir. Diğer taraftan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu sonlu sayıdaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan söylenebilir [12].

#### 1.4. Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

##### Tanım 1.4.1. Kuvvetli Cesaro Toplanabilirlik

$$|\sigma_1| = \left\{ x: \text{bazı } L \text{ için, } \lim_n \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bir lacunary dizisi ile  $k_0 = 0, r \rightarrow \infty$  iken  $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$  olacak şekilde  $\theta = \{k_r\}$  artan tamsayı dizisi ifade edilir.  $\theta$  tarafından belirlenen aralıklar

$I_r = (k_{r-1}, k_r]$  ile gösterilir ve  $\frac{k_r}{k_{r-1}}$  oranı  $q_r$  olarak kısaltılır [13].  $|\sigma_1|$  ile

$$N_\theta = \left\{ x: \text{bazı } L \text{ için, } \lim_r \left( \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan  $N_\theta$  dizi uzayı arasında kuvvetli bir bağ vardır.

**Tanım 1.4.2.**  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $x$  sayı dizisi  $L$  ye lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda

$S_\theta - \lim x = L$  veya  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  olarak gösterilir ve

$S_\theta := \{x: \text{bazı } L \text{ için, } S_\theta - \lim x = L\}$  olarak tanımlanır [13].

#### 1.5. Fuzzy Sayı Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Önce fuzzy sayı dizilerinin istatistik yakınsaklığını tanımlayalım.

##### Tanım 1.5.1. Fuzzy Sayılarında İstatistiksel Yakınsaklık

Her  $\varepsilon > 0$  için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise bir  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0(S)$  olarak gösterilir. Fuzzy sayılarının bütün istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi  $S$  ile gösterilir [2].

**Tanım 1.5.2.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise bir  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0(S_\theta)$  şeklinde gösterilir. Fuzzy sayılarının bütün lacunary istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi  $S_\theta$  ile gösterilir [3].

**Tanım 1.5.3.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_{k'(r)}) \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (1.2)$$

ve her bir  $r$  için  $\lim_r X_{k'(r)} = X_0$  ve  $k'(r) \in I_r$  olacak şekilde  $X$  in bir  $\{X_{k'(r)}\}$  altdizisi varsa  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisine lacunary istatistiksel Cauchy dizisi denir [3].

## 1.6. Lacunary Kuvvetli $\Delta$ -Yakınsak Fuzzy Sayı Dizileri

### Tanım 1.6.1. Fuzzy Sayılarında $\Delta$ -İstatistiksel Yakınsaklık

Eğer her  $\varepsilon > 0$  için,  $\Delta X_k = X_k - X_{k+1}$  olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani hemen hemen her  $k$  için  $\bar{d}(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon$  ise bir  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0(S(\Delta))$  olarak gösterilir. Bütün  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi  $S(\Delta)$  ile gösterilir [14].

**Tanım 1.6.2.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise bir  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına lacunary  $\Delta$ -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0(S_\theta(\Delta))$  şeklinde gösterilir.

Bütün lacunary  $\Delta$ -istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi  $S_\theta(\Delta)$  ile gösterilir [4].

**Tanım 1.6.3.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi ve  $X = (X_k)$  bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  sayısı varsa  $X$  dizisine kuvvetli lacunary  $\Delta$ -toplanabilir denir. Fuzzy sayılarının bütün kuvvetli lacunary  $\Delta$ -yakınsak dizilerinin kümesi  $N_\theta(\Delta)$  ile gösterilir [4].

### 1.7. Fuzzy Sayılarının Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı ve Kuvvetli Lacunary Yakınsaklığı

$C(R^n) = \{A \subset R^n : A \text{ kompakt ve konveks}\}$  olsun.  $C(R^n)$  uzayının,  $A, B \in C(R^n)$  ve  $\mu \in \mathbb{R}$  için  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$  ve  $\mu A = \{\mu a : a \in A\}$  işlemleri ile tanımlanan lineer bir yapısı vardır.  $C(R^n)$  de  $A$  ile  $B$  arasındaki Hausdorff uzaklığı

$$\delta_\infty(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\right\}$$

olarak tanımlanır.  $(C(R^n), \delta_\infty)$  tam bir metrik uzaydır.

Bir fuzzy sayısı,  $X: R^n \rightarrow [0,1]$  aralığında tanımlı, normal, fuzzy konveks, üst yarı sürekli ve  $\{x \in R^n : X(x) > 0\}$  kümesinin kapanışı kompakt olacak şekildeki bir  $X$  fonksiyonudur.

Fuzzy sayıları için  $d_q$  ve  $d_\infty$  Hausdorff metrikleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$d_q(X, Y) = \left( \int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)^q d\alpha \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leq q < \infty)$$

$$d_\infty(X, Y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)$$

Eğer  $q \leq s$  ise  $d_q(X, Y) \leq d_s(X, Y)$  ve  $d_\infty(X, Y) = \lim_{q \rightarrow \infty} d_q(X, Y)$  dir [15]. Notasyonda basitlik için  $1 \leq q < \infty$  olmak üzere  $d_q$  yerine  $d$  yazalım.  $d$  metriği aşağıdaki iki özelliği sağlar.

$$d(cX, cY) = |c|d(X, Y) \quad (1.3)$$

$$d(X + Z, Y + Z') \leq d(X, Y) + d(Z, Z') \quad (1.4)$$

$\omega$ , bütün fuzzy sayılarının dizisinin kümesi olsun.  $\Delta^r: \omega \rightarrow \omega$  operatörü

$$\begin{aligned} (\Delta^0 X)_k &= X_k \\ (\Delta^1 X)_k &= \Delta^1 X_k = X_k - X_{k+1}, \quad ((m \geq 2), \forall k \in \mathbb{N}) \\ (\Delta^m X)_k &= (\Delta^1(\Delta^{m-1})X)_k \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 1.7.1.**  $X = (X_k)$  bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer fuzzy sayılarının  $\{\Delta^m X_k: k \in \mathbb{N}\}$  kümesi sınırlı ise  $X = (X_k)$  dizisine  $\Delta^m$ -sınırlı denir. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için ve  $\forall k > k_0$  için

$$d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir  $k_0$  pozitif tamsayısı varsa  $X = (X_k)$  dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına  $\Delta^m$ -yakınsak denir ve  $\lim_k \Delta^m X_k = X_0$  olarak gösterilir.

$l_\infty(\Delta^m)$  ve  $c(\Delta^m)$ , sırasıyla fuzzy sayılarının bütün  $\Delta^m$ -sınırlı dizileri ve  $\Delta^m$ -yakınsak dizilerinin kümesini gösterir [6].

**Tanım 1.7.2.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizisi olsun.  $X = (X_k)$  fuzzy sayılarının bir dizisi olmak üzere eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına lacunary  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta(\Delta^m))$  veya  $S_\theta - \lim \Delta^m X_k = X_0$  olarak gösterilir. Bütün lacunary  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi  $S_\theta(\Delta^m)$  ile gösterilir [6].

**Tanım 1.7.3.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi,  $X = (X_k)$  bir fuzzy sayı dizisi ve  $p = (p_k)$  tamamıyla pozitif reel sayıların herhangi bir dizisi olsun.

Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir  $X_0$  sayısı varsa  $X$  dizisine kuvvetli lacunary  $\Delta_{(p)}^m$ -yakınsaktır denir. Bu durumda  $X_k \rightarrow X_0 (N_\theta(\Delta_{(p)}^m))$  veya  $N_{\theta(p)} - \lim \Delta^m X_k = X_0$  olarak gösterilir. Fuzzy sayılarının bütün kuvvetli lacunary  $\Delta_{(p)}^m$ -yakınsak dizilerinin kümesi  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  ile gösterilir.  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $\theta = (2^r)$  ve  $p_k = p$  durumunda,  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  yerine sırasıyla  $|\sigma(\Delta_{(p)}^m)|$  ve  $N_\theta(\Delta_p^m)$  yazılabilir. Aynı şekilde  $\forall k \in \mathbb{N}$  için,  $p_k = 1$  durumunda  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  yerine  $N_\theta(\Delta^m)$ ;  $\theta = (2^r)$  için  $N_\theta(\Delta^m)$  yerine  $|\sigma(\Delta^m)|$  yazılabilir [6].

Eğer bir fuzzy sayı dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına  $\Delta^m$ -yakınsak ise  $X_0$  fuzzy sayısına  $\Delta^m -$  istatistiksel yakınsaktır ancak tersi doğru değildir.

Örneğin,

$$\bar{1}(t) = \begin{cases} 1, & t = 1 \\ 0, & t \neq 1 \end{cases}$$

olmak üzere

$$\Delta^m X_k = \begin{cases} \bar{1}, & k = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \bar{0}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olacak şekilde  $X = (X_k)$  tanımlayalım.

Bu takdirde  $X = (X_k)$ ,  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak ancak  $\Delta^m -$  yakınsak değildir.

**Tanım 1.7.4.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi ve  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisi olsun.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_{k'(r)}) \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (1.5)$$

ve her bir  $r$  için

$$\lim_r \Delta^m X_{k'(r)} = X_0$$

ve  $k'(r) \in I_r$  olacak şekilde  $X$  in bir  $(X_{k'(r)})$  alt dizisi varsa,  $X = (X_k)$  fuzzy sayı dizisine lacunary  $\Delta^m -$ istatistiksel Cauchy dizisi denir [6].

### 1.8. $\sigma$ -Asimptotiksel Lacunary İstatistiksel Denk Diziler

Sırasıyla  $l_\infty$  ve  $c$ ,  $\|x\| = \sup_k |x_k|$  normu ile verilen  $x = (x_k)$  sınırlı ve yakınsak dizilerin Banach uzayları olsun ve  $\sigma$ , doğal sayılar kümesinden kendi içine birebir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa,  $l_\infty$  üzerinde bir  $\phi$  sürekli lineer fonksiyoneline invaryant anlam veya  $\sigma$ -anlam denir [5].

- i) Her  $k$  için  $x_k \geq 0$  olacak şekildeki  $x = (x_k)$  dizisi için  $\phi(x) \geq 0$ ,
- ii)  $e = (1,1,1, \dots)$  olmak üzere  $\phi(e) = 1$ ,
- iii) Her  $x \in l_\infty$  için  $\phi(x) = \phi(x_{\sigma(k)})$  dır.

**Tanım 1.8.1.**  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olmak üzere, eğer

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise bu iki dizi asimptotik olarak denktir denir.  $x \sim y$  ile gösterilir [16].

**Tanım 1.8.2.**  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olmak üzere, eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise bu iki diziye  $L$  katlısının istatistiksel asimptotik denki denir.  $(x \underset{\sim}{\sim}^L y)$  ile gösterilir [17].

**Tanım 1.8.3.**  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olsun.

Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  dizilerine  $L$  katlısının lacunary istatistiksel asimptotik denki denir.  $(x \underset{\sim}{\sim}^{\theta L} y)$  ile gösterilir [18].

**Tanım 1.8.4.**  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  dizilerine  $L$  katlısının kuvvetli lacunary asimptotik denki denir.  $(x \underset{\sim}{\sim}^{N_{\theta L}} y)$  ile gösterilir [18].

**Tanım 1.8.5.**  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olsun.  $\sigma^k(m)$ ,  $m$  de  $\sigma$  nın  $k$ . iterasyonu olmak üzere, eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için ve  $m = 1, 2, \dots$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  dizilerine  $L$  katlısının  $S_{\sigma}$ -asimptotik denkidir denir.  $(x \underset{\sim}{\sim}^S y)$  ile gösterilir [5].

**Tanım 1.8.6.**  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  dizilerine  $L$  katlısının  $S_{\sigma,\theta}$ -asimptotik denkidir denir.  $(x \stackrel{S_{\sigma,\theta}}{\sim} y)$  ile gösterilir [5].

**Tanım 1.8.7.**  $\theta$  bir lacunary dizisi ve  $x$  ve  $y$  sıfırdan farklı iki dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

ise  $x$  ve  $y$  dizilerine  $L$  katlısının kuvvetli lacunary  $\sigma$ -asimptotik denki denir.  $(x \stackrel{N_{\sigma,\theta}}{\sim} y)$  ile gösterilir [5].

### 1.9. Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

**Tanım 1.9.1.**  $k, l \geq N$  olmak üzere  $x = (x_{kl})$  bir çift dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $|x_{kl} - L| < \varepsilon$  olacak şekilde  $N \in \mathbb{N}$  varsa  $x = (x_{kl})$  Pringsheim limit  $L$  ye sahiptir, denir ve  $P - \lim x = L$  şeklinde gösterilir [19].

**Tanım 1.9.2.**  $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  pozitif sayıların iki boyutlu bir kümesi olsun.  $i \leq n$  ve  $j \leq m$  olacak şekilde  $K$  da  $(i, j)$  nin sayıları  $K(n, m)$  olsun. Bu takdirde doğal yoğunluğun iki boyutlu benzerliği aşağıdaki gibi tanımlanır.

$K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  kümesinin alt asimptotik yoğunluğu

$$\underline{\delta}_2(K) = \liminf_{n,m} \frac{K(n, m)}{nm}$$

olarak tanımlanır.  $\left(\frac{K(n,m)}{nm}\right)$  dizisi Pringsheim anlamında bir limite sahip olduğu durumda  $K$  bir çift doğal yoğunluğa sahiptir denir ve

$$\lim_{n,m} \frac{K(n,m)}{nm} = \delta_2(K)$$

dır.

Örneğin  $K = \{(i^2, j^2): i, j \in \mathbb{N}\}$  olsun. Bu takdirde

$$\delta_2(K) = \lim_{n,m} \frac{K(n,m)}{nm} \leq \lim_{n,m} \frac{\sqrt{n}\sqrt{m}}{nm} = 0$$

yani  $\{(i, 2j): i, j \in \mathbb{N}\}$  kümesi  $\frac{1}{2}$  çift doğal yoğunluğa sahip iken  $K$  kümesi sıfır çift doğal yoğunluğa sahiptir [20].

**Tanım 1.9.3.** Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $k, l \geq N$  olduğunda  $d(X_{kl}, X_0) < \varepsilon$  olacak şekilde  $N \in \mathbb{N}$  varsa  $X = (X_{kl})_{kl=0}^{\infty}$  fuzzy sayılarının bir çift dizisine Pringsheim anlamında yakınsaklık veya P-yakınsaklık denir ve  $P - \lim X = X_0$  ile gösterilir.  $X_0$  sayısına  $X_{kl}$  nin Pringsheim limiti denir [20].

**Tanım 1.9.4.** Eğer  $\forall k, l$  için  $d(x_{kl}, x_0) < M$  olacak şekilde bir  $M$  pozitif sayısı varsa yani  $\|x\|_{(\infty, 2)} = \sup_{k,l} d(x_{kl}, x_0) < \infty$  ise  $X = (X_{kl})$  çift dizisi sınırlıdır. Bütün sınırlı çift dizilerin kümesi  $l_{\infty}^2(F)$  ile gösterilir [20].

**Tanım 1.9.5.**  $X = (X_{kl})$  bir fuzzy sayılarının dizisi ve  $X_0$  fuzzy sayısı olsun.

Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$P - \lim_{n,m} \frac{1}{mn} |\{k \leq m \text{ ve } l \leq n: d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $X = (X_{kl})$  fuzzy sayılarının dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve  $st_2 - \lim X_{k,l} = X_0$  şeklinde gösterilir. Bütün istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi  $st_2$  ile gösterilir.

Şimdi bir lacunary çift diziyi aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$k_0 = 0, \quad h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty \quad (r \rightarrow \infty)$$

ve

$$l_0 = 0, \quad \bar{h}_s = l_s - l_{s-1} \rightarrow \infty \quad (s \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların artan bir dizisi  $\theta_{r,s} = \{(k_r, l_s)\}$  dir [21].

**Notasyon:**  $k_{r,s} = k_r l_s$  ve  $h_{r,s} = h_r \bar{h}_s$  olarak;  $\theta_{r,s}$  tarafından belirlenen aralıklar ise  $I_{r,s} = \{(k, l) : k_{r-1} < k \leq k_r \text{ veya } l_{s-1} < l \leq l_s\}$  ile gösterilsin.

Ayrıca  $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ ,  $\bar{q}_s = \frac{l_s}{l_{s-1}}$  ve  $q_{r,s} = q_r \bar{q}_s$  şeklinde olsun.

**Tanım 1.9.6.**  $X = (X_{kl})$  bir fuzzy sayılarının dizisi ve  $X_0$  fuzzy sayısı olsun.

Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$P - \lim_{r,s} \frac{1}{h_{r,s}} |\{(k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise  $X = (X_{kl})$  fuzzy sayılarının dizisi  $X_0$  fuzzy sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve  $s_{\theta} t_2 - \lim X_{k,l} = X_0$  şeklinde gösterilir. Bütün lacunary istatistiksel yakınsak çift dizilerin cümlesi  $s_{\theta} t_2$  ile gösterilir [22].

## 2. BÖLÜM

### FUZZY SAYILARININ LACUNARY KUVVETLİ $\Delta$ -YAKINSAKLIĞI VE GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİ

İlk olarak  $N_\theta$  ve  $S_\theta$ -yakınsaklık arasındaki kapsama ilişkilerini ve sınırlı diziler için bunların denkliğini vereceğiz. Aynı zamanda  $\theta = \{k_r\}$  üzerinde belirli kısıtlamalar altında  $S \subseteq S_\theta$  ve  $S_\theta \subseteq S$  kapsamalarını göstereceğiz.

#### 2.1. Fuzzy Sayılarının Lacunary Kuvvetli $\Delta$ -Yakınsaklığı ve Genelleştirilmiş Fark Dizileri

**Teorem 2.1.1.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi olsun. Bu takdirde

- i) (a)  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  ise  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ,  
(b)  $N_\theta, S_\theta$  nın özel bir alt kümesidir,
- ii)  $x \in l_\infty$  ve  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  ise  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$ ,
- iii)  $S_\theta \cap l_\infty = N_\theta \cap l_\infty$  [13].

**İspat.**

(i-a) Eğer  $\varepsilon > 0$  ve  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  ise

$$\sum_{k \in I_r} |x_k - L| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \geq \varepsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

yazılabilir. Her taraf  $\frac{1}{h_r}$  ile çarpılırsa ve  $r$  ye göre limit alınırsa;

$$\lim_r \left( \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) \geq \lim_r \left( \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| \right)$$

$$\geq \lim_r \left( \frac{1}{h_r} \varepsilon |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \right)$$

elde edilir.  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  olduğundan eşitsizliğin sol tarafı sifıra eşittir dolayısıyla sağ tarafı da sifıra eşittir. Sonuç olarak  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  dir.

**(i-b)**  $N_\theta \subseteq S_\theta$  olduğunu gösterelim.  $\theta$  verilsin ve  $x_k$  aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$x = (x_k) = \begin{cases} \lfloor \sqrt{h_r} \rfloor, & k = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{h_r} \rfloor \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor}{h_r}$$

$r \rightarrow \infty$  iken  $\frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor}{h_r} \rightarrow 0$  olduğundan;

$$\lim_r \left( \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \right) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla  $x_k \rightarrow 0(S_\theta)$  dır. Diğer taraftan

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - 0| = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k| = \frac{1}{h_r} \frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor \lfloor \sqrt{h_r} \rfloor + 1}{2}$$

olup

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \frac{\lfloor \sqrt{h_r} \rfloor \lfloor \sqrt{h_r} \rfloor + 1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan  $x_k \not\rightarrow 0(N_\theta)$  dır. Yani  $x_k \rightarrow L(N_\theta) \Rightarrow x_k \rightarrow L(S_\theta)$  dır fakat  $x_k \rightarrow L(S_\theta) \Rightarrow x_k \rightarrow L(N_\theta)$  değildir. Sonuç olarak  $N_\theta \subset S_\theta$  dır.

**ii)** ( $x \in l_\infty$  ve  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$ ) ise  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  olduğunu gösterelim.  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  ve  $x \in l_\infty$  olsun. Her  $k$  için  $|x_k - L| \leq M$  alalım.  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L| + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L| \\ &\leq \frac{M}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \\ \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| &\leq \lim_r \frac{M}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

bulunur.  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  olduğundan, eşitsizliğin sağ tarafı sıfırdır, dolayısıyla sol taraf da sıfıra eşit olur. Buradan  $x_k \rightarrow L(N_\theta)$  olduğu gösterilmiş olur.

**iii) (i)** ve **(ii)** şıklarının açık bir sonucudur.

**Lemma 2.1.1.**  $\theta$  bir lacunary dizisi olmak üzere,  $\liminf_r q_r > 1$  ise  $S - \lim x = L$  iken  $S_\theta - \lim x = L$  dir [13].

**İspat.** Öncelikle  $\liminf_r q_r > 1$  olduğu varsayalım. Sonra yeterince uzunluktaki  $r$  için  $q_r \geq 1 + \delta$  olacak şekilde  $\delta > 0$  olsun. Bu durumda  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1 + \delta}$  sağlanır.

Eğer  $x_k \rightarrow L(S)$  ise bu takdirde  $\forall \varepsilon > 0$  için ve yeterince uzunlukta  $r$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın limiti alınırsa;

$$\lim \left( \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \right) \geq \lim \left( \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \right)$$

bulunur.  $S - \lim x = L$  kabulünden, eşitsizliğin sol tarafının limiti sıfıra eşit olduğu için sağ tarafın limiti de sıfırdır, yani  $S_\theta - \lim x = L$  dir.

**Lemma 2.1.2.**  $\theta$  bir lacunary dizisi olmak üzere,  $\limsup_r q_r < \infty$  ise  $S_\theta - \lim x = L$  iken  $S - \lim x = L$  dir [13].

**İspat.** Eğer  $\limsup_r q_r < \infty$  ise her  $r$  için  $q_r < H$  olacak şekilde  $H > 0$  vardır.  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  olduğunu varsayalım.

$$N_r = |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

olarak kabul edelim.  $x_k \rightarrow L(S_\theta)$  olduğundan verilen bir  $\varepsilon > 0$  için ve  $\forall r > r_0$  için  $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$  olacak şekilde  $r_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

Şimdi  $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$  ve  $n$  de  $k_{r-1} < n \leq k_r$  şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} \cdot r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} \cdot r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left( \sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &\leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\ &\leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot q_r \leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot H \end{aligned}$$

dır. Her tarafın limiti alınarak sonuca ulaşılır.

**Teorem 2.1.2.**  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun.  $S = S_\theta$  olması için gerek ve yeter şart  $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$  olmasıdır. Böylece  $S - \lim x = L$  iken  $S_\theta - \lim x = L$  dir [13].

**İspat.** Lemma 2.1.1 ve Lemma 2.1.2 den ispat açıktır.

**Teorem 2.1.3.** Fuzzy sayılarının bir  $X = (X_k)$  dizisinin lacunary istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $X = (X_k)$  dizisi lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [3].

**İspat.**

**Gereklilik.**  $st_\theta - \lim X_k = X_0$  olsun. Her bir  $j \in \mathbb{N}$  için

$$K^j = \left\{ k \in \mathbb{N} : \bar{d}(X_k, X_0) < \frac{1}{j} \right\}$$

olarak alınsın. Böylece her bir  $j$  için  $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$  ve

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{K^{(j)} \cap I_r}{h_r} \rightarrow 1$$

dir.

$\frac{K^{(1)} \cap I_r}{h_r} > 0$  şartını sağlayan  $r \geq m(1)$  olacak şekilde  $m(1)$  seçilsin. Yani  $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$  dir.  $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$  şartını sağlayan  $r \geq m(2)$  için  $m(2) > m(1)$  seçelim. Daha sonra  $m(1) \leq r \leq m(2)$  şartını sağlayan her bir  $r$  için  $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$  olacak şekilde  $k'(r) \in I_r$  seçilsin. Yani  $\bar{d}(X_{k'(r)}, X_0) < 1$ . Genel olarak  $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$  şartını sağlayan ve  $r > m(p+1)$  olacak şekilde  $m(p+1) > m(p)$  seçelim. Bu taktirde  $m(p) \leq r \leq m(p+1)$  olacak şekildeki her  $r$  için  $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$  seçilsin. Yani

$$\bar{d}(X_{k'(r)}, X_0) < \frac{1}{p} \tag{2.1}$$

olsun. Böylece  $k'(r) \in I_r$  elde edilir ve (2.1) den  $\lim_r X_{k'(r)} = X_0$  sağlanır. Buradan  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_{k'(r)}) \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \bar{d}(X_0, X_{k'(r)}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

dır.  $st_\theta - \lim X_k = X_0$  ve  $\lim_r X_{k'(r)} = X_0$  varsayımları kullanılarak (1.2) elde edilir, dolayısıyla  $X$  bir lacunary istatistiksel Cauchy dizisidir.

**Yeterlilik.**  $X$  bir lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_{k'(r)}) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \\ &\quad + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_{k'(r)}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak  $st_\theta - \lim X_k = X_0$  dır.

**Teorem 2.1.4.** Bir  $\theta$  lacunary dizisi için,  $\liminf_r q_r > 1$  ise bu takdirde  $S \subseteq S_\theta$  dir [3].

**İspat.** Öncelikle  $\liminf_r q_r > 1$  olsun. Sonra yeterince uzunluktaki  $r$  için  $q_r \geq 1 + \delta$  olacak şekilde  $\delta > 0$  var olsun. Bu durumda  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$  sağlanır. Eğer  $X_k \rightarrow X_0(S)$  ise bu takdirde  $\forall \varepsilon > 0$  için ve yeterince uzunlukta  $r$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın limiti alınırsa;

$$\lim \left( \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \right) \geq \lim \left( \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \right)$$

bulunur.  $X_k \rightarrow X_0(S)$  kabulünden, eşitsizliğin sol tarafı sıfır olduğu için sağ tarafın limiti de sıfırdır, yani  $X_k \rightarrow X_0(S_\theta)$  dir.

**Teorem 2.1.5.** Bir  $\theta$  lacunary dizisi için,  $\limsup_r q_r < \infty$  ise bu takdirde  $S_\theta \subseteq S$  dir [3].

**İspat.** Eğer  $\limsup_r q_r < \infty$  ise her  $r$  için  $q_r < M$  olacak şekilde  $M > 0$  vardır.  $X_k \rightarrow X_0(S_\theta)$  olduğunu varsayalım.

$$N_r = |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

olarak alınsın.  $x_k \rightarrow (S_\theta)$  olduğundan verilen bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\forall r > r_0 \text{ için } \frac{N_r}{h_r} < \varepsilon \quad (2.2)$$

olacak şekilde  $r_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

Şimdi  $M = \max\{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$  ve  $n$  de  $k_{r-1} < n \leq k_r$  şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \in I_r : \bar{d}(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} \cdot r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} \cdot r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left( \sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &\leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}}, \quad (2.2)'den \\ &\leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot q_r \leq \frac{r_0 \cdot M}{k_{r-1}} + \varepsilon \cdot K \end{aligned}$$

bulunur. Her tarafın limiti alınarak sonuca ulaşılır.

**Teorem 2.1.6.**  $\theta$  bir lacunary dizisi olsun.  $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$  ise bu takdirde  $S = S_\theta$  dir [3].

**İspat.** Teorem 2.1.4. ve Teorem 2.1.5. den ispat açıktır.

**Teorem 2.1.7.**  $N_\theta(\Delta)$ ,

$$\delta(X, Y)_\Delta = \bar{d}(X_1, Y_1) + \sup_r \left( h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i, \Delta Y_i) \right)$$

metriği ile tam bir metrik uzaydır [4].

**İspat.** Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(X^n) = (X_i^n) = (X_1^n, X_2^n, \dots) \in N_\theta(\Delta)$  olmak üzere  $N_\theta(\Delta)$  da  $(X^n)$  bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$\delta(X^n, X^m)_\Delta = \bar{d}(X_1^n, X_1^m) + \sup_r \left( h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^n, \Delta X_i^m) \right) \rightarrow 0$$

dir. Böylece her bir  $i \in \mathbb{N}$  için  $m, n \rightarrow \infty$  iken  $\bar{d}(X_i^n, X_i^m) \rightarrow 0$  dir.

Bu durumda  $(X_i^n) = (X_i^1, X_i^2, X_i^3, \dots)$  dizisi  $L(R)$  de bir Cauchy dizisidir.  $L(R)$  tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Her bir  $i \in \mathbb{N}$  için

$$\lim_n X_i^n = X_i$$

diyelim.  $(X^n)$  bir Cauchy dizisi olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  için ve her  $m, n \geq n_0$  için

$$\delta(X^n, X^m)_\Delta < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  vardır. Bundan dolayı

$$\bar{d}(X_1^n, X_1^m) \leq \varepsilon$$

ve her  $r \in \mathbb{N}$ , her  $m, n \geq n_0$  için

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^n, \Delta X_i^m) = h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}((X_{i+1}^n - X_{i+1}^m), (X_i^n - X_i^m)) \leq \varepsilon$$

dır. Böylece

$$\lim_m \bar{d}(X_1^n, X_1^m) = \bar{d}(X_1^n, X_1) \leq \varepsilon$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_m h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}((X_{i+1}^n - X_{i+1}^m), (X_i^n - X_i^m)) \\ &= h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}((X_{i+1}^n - X_{i+1}), (X_i^n - X_i)) \\ &= h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^n, \Delta X_i) \leq \varepsilon \quad (\forall r \text{ ve } n \leq n_0 \text{ için}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her  $n \geq n_0$  için

$$\delta(X^n, X)_\Delta < 2\varepsilon$$

anlamına gelir. Yani  $X = (X_i)$  olmak üzere  $N_\theta(\Delta)$  da  $n \rightarrow \infty$  iken  $X^n \rightarrow X$  demektir. Şimdi  $X \in N_\theta(\Delta)$  olduğunu gösterelim. Her  $n$  için  $X^n$ ,  $N_\theta(\Delta)$  olduğundan her bir sabit  $N_0 \geq n_0$  için  $r \rightarrow \infty$  iken  $h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^{N_0}, X_0) \rightarrow 0$  olacak şekilde  $X_0$  fuzzy sayısı vardır.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) &= h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [\bar{d}(\Delta X_i^{N_0}, \Delta X_i) + \bar{d}(\Delta X_i^{N_0}, X_0)] \\ &\leq h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^{N_0}, X_0) + h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i^{N_0}, \Delta X_i) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. Bu da bize  $X = (X_i) \in N_\theta(\Delta)$  sonucunu verir. Böylece  $N_\theta(\Delta)$  tam bir metrik uzaydır.

$$w(\Delta) = \left\{ X = (X_i): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{d}(\Delta X_i, X_0) = 0, \text{ bazı } X_0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanmış  $w(\Delta)$  dizi uzayı ile  $N_\theta(\Delta)$  arasında kuvvetli bir bağ vardır.

**Teorem 2.1.8.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi ve  $X = (X_k)$  bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur [4].

- i)  $\liminf_r q_r > 1$  ise  $w(\Delta) \subseteq N_\theta(\Delta)$ ,
- ii)  $\limsup_r q_r < \infty$  ise  $N_\theta(\Delta) \subseteq w(\Delta)$ ,
- iii)  $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$  ise  $N_\theta(\Delta) = w(\Delta)$  dir.

**İspat.**

(i) Öncelikle  $X \in w(\Delta)$  ve  $\liminf_r q_r > 1$  olsun. Sonra yeterince uzunluktaki  $r$  için  $q_r \geq 1 + \delta$  olacak şekilde  $\delta > 0$  var olsun dolayısıyla  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$  sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \\ &= \left(\frac{h_r}{k_r}\right) \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Her tarafın limiti alınarak  $X \in N_\theta(\Delta)$  bulunur.

(ii) Eğer  $\limsup_r q_r < \infty$  ise her  $r$  için  $q_r < K$  olacak şekilde  $K > 0$  vardır.  $X \in N_\theta(\Delta)$  ve  $\varepsilon > 0$  olduğunu varsayalım. Her  $m \geq m_0$  için

$$H_m = \frac{1}{h_m} \sum_{i \in I_m} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) < \varepsilon$$

eşitliğini sağlayan  $m_0$  var olsun. Aynı zamanda her  $m$  için  $H_m \leq T$  olacak şekilde  $T > 0$  vardır. Diğer taraftan  $n$ ,  $k_{r-1} < n \leq k_r$  şartını sağlayan bir tamsayı olsun.

Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{d}(\Delta X_i, X_0) &\leq \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \left( \sum_{m=1}^{m_0} + \sum_{m=m_0+1}^{k_r} \right) \sum_{i \in I_m} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{i \in I_m} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) + \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{m=m_0+1}^{k_r} \sum_{i \in I_m} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) \\
&\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{i \in I_m} \bar{d}(\Delta X_i, X_0) + \varepsilon(k_r - k_{m_0}) \frac{1}{k_{r-1}} \\
&= \frac{1}{k_{r-1}} (h_1 H_1 + h_2 H_2 + \dots + h_{m_0} H_{m_0}) + \varepsilon(k_r - k_{m_0}) \frac{1}{k_{r-1}} \\
&\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left( \sup_{1 \leq i \leq m_0} H_i k_{m_0} \right) + \varepsilon K < \frac{1}{k_{r-1}} k_{m_0} T + \varepsilon K
\end{aligned}$$

bulunur. Her tarafın limiti alınarak  $X \in w(\Delta)$  sonucu elde edilir.

**Teorem 2.1.9.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizi ve  $X = (X_k)$  bir fuzzy sayı dizisi olsun. Fuzzy sayıların bütün sınırlı fark dizilerinin kümesi  $m(\Delta)$  ile gösterilsin. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i)  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta))$  ise  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta))$
- ii)  $(X \in m(\Delta)$  ve  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta))$ ) ise  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta))$
- iii) Eğer  $X \in m(\Delta)$  ise  $(S_\theta(\Delta)) = (N_\theta(\Delta))$

dır [4].

**İspat.**

i) Eğer  $\varepsilon > 0$  ve  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta))$  ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \\ &\geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta))$  dir.

ii)  $X \in m(\Delta)$  ve  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta))$  olduğunu kabul edelim.  $X \in m(\Delta)$  olduğundan her  $k$  için  $\bar{d}(\Delta X_k, X_0) \leq T$  yi sağlayan  $T$  sabiti vardır. Böylece  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ \bar{d}(\Delta X_k, X_0) < \varepsilon}} \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \\ &\leq T \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : \bar{d}(\Delta X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| + \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir.  $r \rightarrow \infty$  iken limit alınırsa sonuca kolaylıkla ulaşılır.

iii) (i) ve (ii) maddelerinden sonuç açıktır.

**Teorem 2.1.10.**  $l_\infty(\Delta^m)$ ,  $c(\Delta^m)$ ,  $N_\theta(\Delta_p^m)$  ve  $S_\theta(\Delta^m)$  toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır [6].

**İspat.**

i) Sadece  $S_\theta(\Delta^m)$  için ispatlayalım. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir.  $X \in S_\theta(\Delta^m)$  ve  $c \in \mathbb{R}$  olsun.  $d$  metriğinin (1.3) ve (1.4) özellikleri kullanılarak

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(c\Delta^m X_k, cX_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|$$

yazılabilir. Böylece  $cX \in S_\theta(\Delta^m)$  dir.

ii)  $X, Y \in S_\theta(\Delta^m)$  olsun. (1.3) özelliği ile Minkowski eşitsizliği birleştirilerek

$$d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \leq d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0)$$

elde edilir. Böylece verilen bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

dir. Böylece  $X + Y \in S_\theta(\Delta^m)$  olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.

**Teorem 2.1.11.**  $N_\theta(\Delta_p^m)$ ,  $1 \leq p < \infty$  olmak üzere

$$\delta(X, Y)_\Delta = \sum_{i=1}^m d(X_i, Y_i) + \sup_r \left( h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i, \Delta^m Y_i)]^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

metriği ile tam bir metrik uzaydır [6].

**İspat.** Her  $s \in \mathbb{N}$  için  $(X^s) = (X_i^s) = (X_1^s, X_2^s, \dots) \in N_\theta(\Delta_p^m)$  olmak üzere  $N_\theta(\Delta_p^m)$  da  $(X^s)$  bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$\delta(X^s, X^t)_\Delta = \sum_{i=1}^m d(X_i^s, X_i^t) + \sup_r \left( h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i^s, \Delta^m X_i^t)]^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

Böylece her bir  $i \in \mathbb{N}$  için,  $s, t \rightarrow \infty$  iken  $\sum_{i=1}^m d(X_i^s, X_i^t) \rightarrow 0$  ve  $d(\Delta^m X_i^s, \Delta^m X_i^t) \rightarrow 0$  dır. Şimdi

$$d(X_{i+m}^s, X_{i+m}^t) \leq d(\Delta^m X_i^s, \Delta^m X_i^t) + \binom{m}{0} d(X_i^s, X_i^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{i+m-1}^s, X_{i+m-1}^t)$$

olduğundan her bir  $i \in \mathbb{N}$  için  $s, t \rightarrow \infty$  iken  $d(X_i^s, X_i^t) \rightarrow 0$  dır.

Böylece  $(X_i^s)_s = (X_i^1, X_i^2, X_i^3, \dots)$   $L(R)$  de bir Cauchy dizisidir.  $L(R)$  tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Her bir  $i \in \mathbb{N}$  için

$$\lim_s X_i^s = X_i$$

diyelim.  $(X^s)$  bir Cauchy dizisi olduğundan  $\forall \varepsilon > 0$  için ve her  $s, t \geq n_0$  için

$$\delta(X^s, X^t)_\Delta < \varepsilon$$

olacak şekilde  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  vardır. Bu durumda

$$\lim_t \sum_{i=1}^m d(X_i^s, X_i^t) = \sum_{i=1}^m d(X_i^s, X_i) < \varepsilon$$

ve her  $r \in \mathbb{N}$ , her  $s \geq n_0$  için

$$\lim_t h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i^s, \Delta^m X_i^t)]^p = h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i^s, \Delta^m X_i)]^p \leq \varepsilon^p$$

olur. Bu da her  $s \geq n_0$  için

$$\delta(X^s, X)_\Delta < 2\varepsilon$$

anlamına gelir. Yani  $X = (X_i)$  olmak üzere  $s \rightarrow \infty$  iken  $X^s \rightarrow X$  demektir.

$r \rightarrow \infty$  iken

$$\begin{aligned} & h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i, X_0)]^p \\ & \leq 2^p \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i^{n_0}, X_0)]^p + h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} [d(\Delta^m X_i^{n_0}, \Delta^m X_i)]^p \right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $X \in N_\theta(\Delta_p^m)$  sağlanır. Sonuç olarak  $N_\theta(\Delta_p^m)$  tam bir metrik uzaydır.

**Teorem 2.1.12.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizisi ve  $X = (X_k)$  fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Bu takdirde,

- i)  $|\sigma(\Delta_{(p)}^m)| \subset N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  için gerek ve yeter şart  $\liminf_r q_r > 1$ ,
- ii)  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m) \subset |\sigma(\Delta_{(p)}^m)|$  için gerek ve yeter şart  $\limsup_r q_r < \infty$ ,
- iii)  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m) = |\sigma(\Delta_{(p)}^m)|$  için gerek ve yeter şart

$$1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$$

olmasıdır.[6].

Bir sonraki teoremden  $S_\theta(\Delta^m)$  ile  $N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  arasında bazı kapsamalar vereceğiz ve fuzzy sayılarının  $\Delta^m$ -sınırlı dizileri için benzer olduğunu göstereceğiz.

**Teorem 2.1.13.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizisi ve  $X = (X_k)$  fuzzy sayılarının bir dizisi olsun. Bu takdirde,

- i)  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta_{(p)}^m))$  ise  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta^m))$ ,
- ii)  $(X \in l_\infty(\Delta^m) \text{ ve } X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta^m)))$  ise  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta_{(p)}^m))$ ,
- iii)  $l_\infty(\Delta^m) \cap S_\theta(\Delta^m) = l_\infty(\Delta^m) \cap N_\theta(\Delta_{(p)}^m)$  dir [6].

**İspat.**

- i)  $\varepsilon > 0$  ve  $X_k \rightarrow X_o(N_\theta(\Delta_{(p)}^m))$  olsun.  $0 < h = \inf p_k \leq \sup p_k = H$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \varepsilon^{p_k} \geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \min(\varepsilon^h, \varepsilon^H) \\ &\geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \min(\varepsilon^h, \varepsilon^H) \end{aligned}$$

elde edilir.

- ii)  $X \in l_\infty(\Delta^m)$  ve  $X_k \rightarrow X_o(S_\theta(\Delta^m))$  olsun.  $X \in l_\infty(\Delta^m)$  olduğundan

$d(\Delta^m X_k, X_0) \leq M$  sağlanacak şekilde sabit bir  $M > 0$  vardır.

Bir  $\varepsilon > 0$  verildiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} \\
&\quad + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \max(M^h, M^H) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \varepsilon^{p_k} \\
&\leq \max(M^h, M^H) \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\
&\quad + \max(\varepsilon^h, \varepsilon^H)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $X_0 \in N_\theta(\Delta_p^m)$  dir.

iii) (i) ve (ii) maddelerinden sonuç açıktır.

**Teorem 2.1.14.** Eğer  $X = (X_k) \in N_\theta(\Delta^m) \cap |\sigma(\Delta^m)|$  ise

$N_\theta - \lim \Delta^m X_k = |\sigma| - \lim \Delta^m X_k$  dir [6].

**İspat.**  $|\sigma| - \lim \Delta^m X_k = X_0$  ve  $N_\theta - \lim \Delta^m X_k = X_0'$  olsun.  $X_0 \neq X_0'$  olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\tau_r + \tau_r' = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(\Delta^m X_k, X_0) + \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(\Delta^m X_k, X_0') \geq \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(X_0, X_0') = d(X_0, X_0')$$

yazılabilir.  $X \in N_\theta(\Delta^m)$  olduğundan  $r \rightarrow \infty$  iken  $\tau_r \rightarrow 0$  dir. Böylece yeterli uzunlukta  $r$  için  $\tau_r > \left(\frac{1}{2}\right) d(X_0, X_0')$  vardır. Yeterli uzunlukta  $r$  için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} d(\Delta^m X_k, X_0) &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0) = \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \tau_r \\
&= \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \tau_r > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) d(X_0, X_0')
\end{aligned}$$

olduğu gözlemlenir.  $X \in |\sigma(\Delta^m)|$  olduğundan üstteki eşitsizliğin sol tarafı sıfıra eşittir. Dolayısıyla  $q_r \rightarrow 1$  olmak zorundadır yani  $\limsup_r q_r < \infty$  dir. Bu durumda Teorem 2.1.13. (ii) den  $N_\theta(\Delta^m) \subset |\sigma(\Delta_p^m)|$  dir.  $N_\theta - \lim \Delta^m X_k = X_0'$  olduğundan  $|\sigma| - \lim \Delta^m X_k = X_0'$  olur. Böylece  $t \rightarrow \infty$  iken

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_k, X_0') \rightarrow 0$$

ancak

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_k, X_0') + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_k, X_0) \geq d(X_0, X_0') > 0$$

dır ve soldaki terimler sıfıra yakınsak olduklarından  $d(X_0, X_0')=0$  , dolayısıyla  $X_0 = X_0'$  dır.

**Teorem 2.1.15.** Fuzzy sayılarının bir  $X = (X_k)$  dizisinin lacunary  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $X = (X_k)$  dizisinin lacunary  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [6].

**İspat.**

**Gereklilik.**  $X = (X_k)$  lacunary  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olsun. Her bir  $j \in \mathbb{N}$  için

$$K^j = \left\{ k \in \mathbb{N} : d(\Delta^m X_k, X_0) < \frac{1}{j} \right\}$$

yazalım. Böylece her bir  $j$  için  $K^{(j)} \supseteq K^{(j+1)}$  ve

$$r \rightarrow \infty \text{ iken } \frac{K^{(j)} \cap I_r}{h_r} \rightarrow 1$$

dir.

$\frac{K^{(1)} \cap I_r}{h_r} > 0$  şartını sağlayan  $r \geq m(1)$  olacak şekilde  $m(1)$  seçelim. Yani  $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$  dir.  $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$  şartını sağlayan  $r \geq m(2)$  için  $m(2) > m(1)$  seçelim. Daha sonra  $m(1) \leq r \leq m(2)$  yi sağlayan her bir  $r$  için  $k'(r) \in I_r \cap K^{(1)}$  olacak şekilde  $k'(r) \in I_r$  seçelim. Yani  $d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) < 1$ . Genel olarak  $I_r \cap K^{(p+1)} \neq \emptyset$  şartını sağlayan  $r > m(p+1)$  olacak şekilde  $m(p+1) > m(p)$  seçelim. Bu takdirde  $m(p) \leq r \leq m(p+1)$  olacak şekilde her  $r$  için  $k'(r) \in I_r \cap K^{(p)}$  seçelim. Yani

$$d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) < \frac{1}{p} \quad (2.3)$$

Böylece  $k'(r) \in I_r$  elde ederiz ve (2.3) den  $\lim_r \Delta^m X_{k'(r)} = X_0$  sağlanır.

Buradan her  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_{k'(r)}) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

dır. Böylece  $X$  bir  $\Delta^m$ - istatistiksel Cauchy dizisidir.

**Yeterlilik.**  $X$  bir lacunary istatistiksel Cauchy dizisi olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_{k'(r)}) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| + \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak  $S_\theta - \lim \Delta^m X_k = X_0$  dir

### 3. BÖLÜM

#### FUZZY SAYILARININ ÇİFT DİZİLERİNİN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE $\sigma$ – ASİMPTOTİK LACUNARY İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

$\sigma$ -asimptotiksel lacunary istatistiksel denk diziler ile fuzzy sayılarının çift dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramları ile ilgili teoremleri inceleyeceğiz.

#### 3.1. Fuzzy Sayılarının Çift Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı ve $\sigma$ -Asimptotik Lacunary İstatistiksel Denk Diziler

**Teorem 3.1.1.**  $\theta=\{k_r\}$  bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i) Eğer  $x \underset{\sim}{N_{\sigma,\theta}} y$  ise  $x \underset{\sim}{S_{\sigma,\theta}} y$  dir,
- ii) Eğer  $x \in l_\infty$  ve  $x \underset{\sim}{S_{\sigma,\theta}} y$  ise  $x \underset{\sim}{N_{\sigma,\theta}} y$  dir,
- iii)  $x \underset{\sim}{S_{\sigma,\theta}} y \cap l_\infty = x \underset{\sim}{N_{\sigma,\theta}} y \cap l_\infty$  [5].

**İspat.**

- i)  $\forall \varepsilon > 0$  için  $x \underset{\sim}{N_{\sigma,\theta}} y$  ise

$$\sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon}} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right|$$

$$\geq \varepsilon \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \right\} \right|$$

elde edilir. Böylece  $x \sim^{S_{\sigma,\theta}} y$  dir.

ii)  $[x], [y] \in l_\infty$  ve  $x \sim^{S_{\sigma,\theta}} y$  olsun. Her  $k, m$  için

$$\left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \leq M$$

alalım.  $\varepsilon > 0$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\quad \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \\ &\quad \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| < \varepsilon \\ &\leq \frac{M}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \right\} \right| + \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak  $x \sim^{N_{\sigma,\theta}} y$  dır.

iii) (i) ve (ii) maddelerinden sonuca ulaşılır.

**Lemma 3.1.1.** Verilen bir  $\varepsilon_1 > 0$  ve  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon_1 \quad (\text{her } n \geq n_0 \text{ ve } m \geq m_0 \text{ için})$$

olacak şekilde  $n_0$  ve  $m_0$  varsa  $x \sim^S y$  dir [5].

**İspat.**  $\varepsilon_1$  verilmiş olsun.  $\forall \varepsilon > 0$  için ve her  $n \geq n_0^1$  ve  $m \geq m_0$  için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.1)$$

olacak şekilde  $n_0^1$  ve  $m_0$  seçelim.  $n \geq n_0^1$  ve  $0 \leq m \leq m_0$  için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon_1 \quad (3.2)$$

olacak şekilde  $n_0^{1,1}$  var olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Eğer  $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^{1,1}\}$  alırsak  $n \geq n_0$  ve her  $m$  için (3.2) doğru olur. Sabit bir  $m_0$  seçilmiş olsun. Böylece

$$\left| \left\{ 0 \leq k \leq m_0-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = M$$

dir. Şimdi  $0 \leq m \leq m_0$  ve  $n \geq m_0$  alalım

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq m_0-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{n} \left| \left\{ m_0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n} \left| \left\{ m_0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece yeterli uzunluktaki  $n$  için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_1$$

dir ve (3.2) elde edilir. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.1.2.** Her  $\theta$  lacunary dizisi için  $S_{\sigma,\theta} = S_\sigma$  dir [5].

**İspat.**  $x \in S_{\sigma,\theta}$  olsun. Bu takdirde Tanım 1.8.7 den, verilen bir  $\varepsilon_1 > 0$  için,  $r \geq r_0$  ve  $u \geq 0$  olmak üzere  $m = k_{r-1} + 1 + u$  için

$$\frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  ve  $L$  vardır.  $n \geq h_r$  alalım,  $i$  bir tam sayı ve  $0 \leq t \leq h_r$  olmak üzere  $n = ih_r + t$  yazalım.  $n \geq h_r$  ve  $i \geq 0$  olduğundan ve  $\frac{h_r}{n} \leq 1$  için  $\frac{ih_r}{n} \leq 1$  olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq (i+1)h_r - 1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^i \left| \left\{ jh_r \leq k \leq (j+1)h_r - 1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{(i+1)h_r}{n} \varepsilon_1 \\ & \leq \frac{2ih_r \varepsilon_1}{n} \quad i \geq 1 \text{ için} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ 0 \leq k \leq n-1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \leq 2\varepsilon_1$$

dir. Lemma 3.1.1 den  $S_{\sigma,\theta} = S_\sigma$  olduğu gösterilmiş olur. Buradan da her  $\theta$  için  $S_{\sigma,\theta} = S_\sigma$  olduğu açıktır.

**Teorem 3.1.3.**  $\theta=\{k_r\}$  bir lacunary dizisi ve  $\liminf q_r > 1$  olsun. Bu takdirde  $x^{\mathcal{S}\sigma}y$  ise  $x^{\mathcal{S}\sigma,\theta}y$  dır [5].

**İspat.** Öncelikle  $\liminf q_r > 1$  olsun. Sonra yeterince uzunluktaki  $r$  için  $q_r \geq 1 + \delta$  olacak şekilde  $\delta > 0$  olsun. Böylece  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$  sağlanır.

Eğer  $x^{\mathcal{S}\sigma}y$  ise  $\forall \varepsilon > 0$  için ve yeterince uzunlukta  $r$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| &\geq \frac{1}{k_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

bulunur. Her tarafın limiti alınarak ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.4.**  $\theta=\{k_r\}$  bir lacunary dizisi ve  $\sup_r q_r < \infty$  olsun. Bu takdirde  $x^{\mathcal{S}\sigma,\theta}y$  ise  $x^{\mathcal{S}\sigma}y$  dır [5].

**İspat.** Eğer  $\sup_r q_r < \infty$  ise her  $r \geq 1$  için  $q_r < B$  olacak şekilde  $B > 0$  vardır.  $x^{\mathcal{S}\sigma,\theta}y$  ve  $\varepsilon_1 > 0$  olsun. Her  $j \geq R$  için ve her  $m$  için

$$A_j = \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde  $R > 0$  ve  $\varepsilon > 0$  vardır. Aynı zamanda her  $j = 1, 2, \dots$  için  $A_j < K$  olacak şekilde  $K > 0$  vardır. Şimdi  $r > R$  ve  $k_{r-1} < n < k_r$  olacak şekilde  $n$  tam sayısı alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \leq k_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in I_1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in I_2 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \dots + \frac{1}{k_{r-1}} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& = \frac{k_1}{k_{r-1}k_1} \left| \left\{ k \in I_1 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}(k_2 - k_1)} \left| \left\{ k \in I_2 : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}(k_R - k_{R-1})} \left| \left\{ k \in I_R : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}(k_r - k_{r-1})} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \\
& = \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R \\
& + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}} A_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \\
& \leq \left\{ \sup_{j \geq 1} A_j \right\} \frac{k_r}{k_{r-1}} + \left\{ \sup_{j \geq R} A_j \right\} \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\
& \leq K \frac{k_r}{k_{r-1}} + \varepsilon B
\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.5.**  $\theta = \{k_r\}$  bir lacunary dizisi ve  $1 < \inf_r q_r < \sup_r q_r < \infty$  olsun. Bu takdirde  $x \overset{S_{\theta}}{\sim} y = x \overset{S_{\sigma}}{\sim} y$  dir [5].

**Teorem 3.1.6.**  $X = (X_{kl})$  ve  $Y = (Y_{kl})$  fuzzy sayılarının çift dizileri olsun. Bu takdirde

- i) Eğer  $s_{\theta} t_2 - \lim X_{kl} = X_0$  ve  $c \in \mathbb{R}$  ise  $s_{\theta} t_2 - \lim c X_{kl} = c X_0$ ,
- ii) Eğer  $s_{\theta} t_2 - \lim X_{kl} = X_0$  ve  $s_{\theta} t_2 - \lim Y_{kl} = Y_0$  ise

$s_{\theta} t_2 - \lim (X_{kl} + Y_{kl}) = X_0 + Y_0$  dir [22].

**İspat.**

i)  $\alpha \in [0,1]$ ,  $c \in \mathbb{R}$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Sırasıyla  $X_{kl}^\alpha, Y_{kl}^\alpha, X_0^\alpha$  ve  $Y_0^\alpha$   $X_{kl}, Y_{kl}, X_0, Y_0$  nın  $\alpha$ -kesme kümeleri olsun.  $\delta_\infty(cX_{kl}^\alpha, cX_0^\alpha) = |c|\delta_\infty(X_{kl}^\alpha, X_0^\alpha)$  olduğundan  $d(cX_{kl}, cX_0) = |c|d(X_{kl}, X_0)$  dir ve

$$\frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(cX_{kl}, cX_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{c} \right\} \right|$$

elde edilir.

$$\text{ii) } \delta_\infty(X_{kl}^\alpha + Y_{kl}^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) \leq \delta_\infty(X_{kl}^\alpha, X_0^\alpha) + \delta_\infty(Y_{kl}^\alpha, Y_0^\alpha) \quad \text{yazalım.}$$

Minkowski eşitsizliğinden,  $d$  bir metriktir ve

$$d(X_{kl} + Y_{kl}, X_0 + Y_0) \leq d(X_{kl}, X_0) + d(Y_{kl}, Y_0)$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl} + Y_{kl}, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) + d(Y_{kl}, Y_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \\ & \quad + \frac{1}{h_{r,s}} \left| \left\{ (k, l) \in I_{r,s} : d(Y_{kl}, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

**Teorem 3.1.7.**  $\theta_{r,s}$  çift lacunary dizi olmak üzere eğer  $\limsup_r q_r < \infty$  ve  $\limsup_s \bar{q}_s < \infty$  ise  $s_\theta t_2 \subset st_2$  dir [22].

**İspat.**  $\limsup_r q_r < \infty$  ve  $\limsup_s \bar{q}_s < \infty$  olsun. Her  $r, s$  için  $q_r < H$  ve  $\bar{q}_s < H$  olacak şekilde  $H > 0$  vardır.

$X_{kl} \xrightarrow{P} X_0(s_\theta t_2)$  olduğunu varsayalım.

$$N_{r,s} = |\{(k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

olsun.  $X_{kl} \xrightarrow{P} X_0(s_\theta t_2)$  nin tanımından verilen bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\forall r, s > r_0 \text{ için } \frac{N_{r,s}}{h_{r,s}} < \varepsilon$$

olacak şekilde  $r_0 \in \mathbb{N}$  vardır.

Şimdi  $M = \max\{N_{r,s} : 1 \leq r \leq r_0 \text{ ve } 1 \leq s \leq r_0\}$  alalım.  $n$  ve  $m$ ,  $k_{r-1} < m \leq k_r$  ve  $l_{s-1} < n \leq l_s$  eşitsizliğini sağlayan tamsayılar olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{mn} |\{k \leq m, l \leq n : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}l_{s-1}} |\{k \leq k_r, l \leq l_s : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}l_{s-1}} \left\{ \sum_{i,j=1,1}^{r,s} N_{i,j} \right\} \leq \frac{Mr_0^2}{k_{r-1}l_{s-1}} + \varepsilon H^2 \end{aligned}$$

olduğundan  $s_\theta t_2 \subset st_2$  dir.

**Teorem 3.1.8.**  $\theta_{r,s}$  çift lacunary dizi olmak üzere eğer  $\liminf_r q_r > 1$  ve  $\liminf_s \bar{q}_s > 1$  ise  $st_2 \subset s_\theta t_2$  dir [22].

**İspat.** Öncelikle  $\liminf_r q_r > 1$  ve  $\liminf_s \bar{q}_s > 1$  olsun. Böylece  $q_r \geq 1 + \delta$  ve

$\bar{q}_s \geq 1 + \delta$  olacak şekilde  $\delta > 0$  vardır. Böylece  $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$  ve  $\frac{\bar{h}_s}{l_s} \geq \frac{\delta}{1+\delta}$  sağlanır.

Eğer  $X_{kl} \rightarrow X_0(st_2)$  ise bu takdirde her bir  $\varepsilon > 0$  için ve yeterince uzunlukta  $r$  ve  $s$  için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{r,s}} |\{k \leq k_r \text{ ve } l \leq l_s : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_{r,s}} |\{(k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \left( \frac{\delta}{1+\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{h_{r,s}} |\{(k, l) \in I_{r,s} : d(X_{kl}, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

dir, dolayısıyla ispata ulaşılır.

## 4. BÖLÜM

### TARTIŞMA SONUÇ VE ÖNERİLER

#### 4.1.Sonuç

Bu tez çalışmasında fuzzy sayıları ve bu sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir. Fuzzy sayılarının genelleştirilmiş fark dizileri,  $\sigma$ -asimptotik denk dizileri ve çift dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımları ifade edilmiştir ve bunlar arasındaki kapsama ilişkileri verildi. Benzer şekilde fuzzy sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı farklı diziler için de uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

1. Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers, Busefal, 28: 28-37.
2. Nuray, F., Savaş, E., 1995. Statistical convergence of fuzzy numbers. Math. Slovaca, 45(3): 269-273.
3. Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. Fuzzy Sets Syst, 99:353-355.
4. Bilgin, T., 2004. Lacunary strongly  $\Delta$ -convergent sequences of fuzzy numbers. Information Sciences,160:201-206.
5. Savaş, E., Patterson, R., F., 2006.  $\sigma$ -asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. Central European Journal of Mathematics, 4(4): 648-655.
6. Altın, Y., Et, M., Çolak, R., 2006. Lacunary statistical and lacunary strongly convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers. Computers & Mathematics with applications, 52: 1011-1020.
7. Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., 1972. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2: 30-34.
8. Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions. J. Math. Anal.Appl., 91: 552-558.
9. Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of fuzzy sets. Theory and Applications, Word Scientific, Singapore.
10. Freedman, A.,R., Sember, I, J., 1981. Densities and summability. Pasific J. Math., 95: 293-305.
11. Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. Collog. Math., 2: 241.
12. Fridy, J.,A., 1985. On statistical convergence. Analysis, 5: 301.
13. Fridy, J.A., Orhan, C., 1993. Lacunary statistical convergence. Pacific Journal of mathematics, 160 (1).
14. Bilgin, T., 2003.  $\Delta$ -statistical and strong  $\Delta$ -statistical and  $\Delta$ -Cesaro convergence of sequences of fuzzy numbers. Math. Commun, 8: 95-100.
15. Diamond, P., Kloeden, P., 1990. Metric spaces of fuzzy sets. Fuzzy sets and systems, 35(2): 241-249.
16. Marouf, M., 1993. Asymptotic equilalence and summability. Int. J. Math. Math. Sci., 16(4): 755-762.

17. Patterson, R., F., 2003. On asymptotically statistically equivalent sequences. *Demonstratio Math.*, 36(1): 149-153.
18. Patterson, R., F., Savaş, E., 2006. On asymptotically lacunary statistically equivalent sequences. *Thai Journal of Mathematics*, 4(2): 267-272.
19. Pringsheim, A., 1900. Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. *Math. ann.* , 53(3): 289-321.
20. Savaş, E., Mursaleen, M., 2004. On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. *Inform Sci.* 162(3-4): 183-192.
21. Savaş, E., Patterson, R.F., 2007. Lacunary statistical convergence of multiple sequences. *Appl. Math. Lett.*, 20(9): 964-970.
22. Altın, Y., 2008. A note on lacunary statistically convergent double sequences of fuzzy numbers. *Commun Korean Math. Soc.*, 23: 179-185.

## ÖZGEÇMİŞ

### KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Funda KOCABIYIK  
Uyruğu : Türkiye (T.C)  
Doğum Yeri : Kumluca/ ANTALYA  
Doğum Tarihi : 06.11.1986  
Medeni Durumu : Bekâr  
Adres : Hacıveliler Köyü Merkez Mahalle Kumluca/ANTALYA  
E-Mail : funda\_mk@hotmail.com  
Tel : 0 555 673 7684

### EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Tezli Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	----
Lisans	Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2009
Lise	Kumluca Anadolu Lisesi	2004

### YABANCI DİL

İngilizce