ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN NON-SELFADJOİNT FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Turhan KÖPRÜBAŞI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

ÖZET

Doktora Tezi

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN NON-SELFADJOİNT FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Turhan KÖPRÜBAŞI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Elgiz BAYRAM

Bu doktora çalışmasında; $n \in \mathbb{N}$ için a_n, b_n kompleks diziler ve $i = 0,1$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere ikinci mertebeden fark denklemi için

$$\begin{aligned} a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} &= \lambda y_n \ , \ n \in \mathbb{N} \\ (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0 &= 0 \end{aligned}$$

sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ için $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$ vektör değerli diziler, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ olmak üzere (a_n), (b_n), (p_n), (q_n) kompleks değerli diziler ve $i = 0,1$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere birinci mertebeden fark denklemleri sistemi için

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1}y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0^{(1)} = 0$$

sınır değer problemi incelenmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmıştır.

Orjinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.

Bu bölümlerde, analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri kullanılarak yukarıdaki sınır değer problemlerinin Jost çözümleri, Jost fonksiyonları, özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenmiştir.

Mayıs 2010 , 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark operatörleri, Spektral analiz, Jost çözümü, Jost fonksiyonu, Özdeğer, Spektral tekillik, Resolvent operatör

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF NON-SELFADJOINT DIFFERENCE OPERATORS WITH SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

Turhan KÖPRÜBAŞI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Elgiz BAYRAM

In this study, the boundary value problem for the difference equation of second order

$$\begin{aligned} a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} &= \lambda y_n,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \\ (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0 &= 0,\ \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 \neq 0\ ,\ \gamma_1 \neq a_0^{-1}\beta_0 \end{aligned}$$

where(a_n) , (b_n) , $n \in \mathbb{N}$ are complex sequences and γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1$ is considered. Moreover the boundary value problem for the system of difference equations of first order

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1}y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0^{(1)} = 0, \quad \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq a_0^{-1}\beta_0$$

where $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$ are vector sequences, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ for all n, γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1$ is researched.

This thesis consist of four chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of spectral analysis have been recalled.

Original results are contained in third and fourth chapters.

In this chapters, using the uniqueness theorems of analytic functions, Jost solutions, Jost functions, eigenvalues and spectral singularities of boundary value problems at above are investigated.

May 2010 , 46 pages

Key Words: Difference operators, Spectral analysis, Jost solution, Jost function, Eigenvalue, Spectral singularity, Resolvent operator

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yaptığım süre boyunca, bana araştırma olanağı sağlayan ve büyük fedakarlık göstererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a, çalışmalarımda yardım ve katkılarını esirgemeyen çok değerli arkadaşlarım Araş. Gör. Murat OLGUN, Araş. Gör. Yelda KÜÇÜKEVCİLİOĞLU ve Dr. Nihal YOKUŞ'a ve beni her konuda destekleyip her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Turhan KÖPRÜBAŞI
Ankara, Mayıs 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$L_2(\mathbb{R}_+)$	$\left\{ y : y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C},\ \int\limits_0^\infty \lvert y(x)\rvert^2 \, dx < \infty \right\}$
$l_2(\mathbb{N})$	$\left\{ y = (y_0, y_1, y_2, \ldots) :\ i = 0, 1, 2, \ldots \text{ için } y_i \in \mathbb{C} \text{ ve } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert y_n\rvert^2 < \infty \right\}$
$l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$	$\left\{ y = \begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix} :\ i = 0, 1, 2, \ldots\ ;\ j = 1, 2 \text{ için } y_i^{(j)} \in \mathbb{C} \text{ ve } \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\lvert y_n^{(j)} \right\rvert^2 < \infty \right\}$
$\sigma_d(L)$	L operatörünün diskret (nokta) spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekilliklerinin kümesi
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R_\lambda(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\mu(G)$	G kümesinin Lebesgue ölçüsü
$[\lvert x\rvert]$	x reel sayısının tam değeri

1. GİRİŞ

Bir diferensiyel operatörün özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve spektral tekilliklerinin bulunması problemi, fonksiyonel analiz ve matematiksel fizik gibi bir çok alanda ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Sturm-Liouville, Klein-Gordon, Dirac ve Schrödinger diferensiyel denklemleri gibi bazı denklemler yardımıyla elde edilen diferensiyel operatörlerin spektral analizi günümüze kadar bir çok matematikçinin araştırma konusu olmuştur.

Hilbert uzaylarında tanımlı lineer, sınırlı, selfadjoint operatörlerin spektral özellikleri ile ilgili günümüze kadar bir çok çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte bazı fiziksel problemlerin incelenmesi sırasında karşılaşılan diferensiyel operatörlerin bir çoğu ise sınırsız ve non-selfadjoint olarak ortaya çıkmaktadır.

Non-selfadjoint diferensiyel denklemler yardımıyla tanımlanan operatörlerin spektral analizi ilk kez Naimark (1960) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, q kompleks değerli bir fonksiyon, $h \in \mathbb{C}$ ve λ bir spektral parametre olmak üzere $L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında,

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y \ , \quad 0 \le x < \infty \ , \\ \qquad y'(0) - hy(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

sınır değer problemi göz önüne alınmış olup (1.1) sınır değer probleminin spektrumunun; sürekli spektrum, özdeğerler ve spektral tekilliklerden oluştuğu görülmüştür. Bununla birlikte (1.1) sınır değer probleminin spektral tekilliklerinin, resolventin kutup noktaları olup sürekli spektrumun üzerinde bulunduğu fakat özdeğer olmadığı elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, q potansiyel fonksiyonunun en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x} \left| q(x) \right| dx < \infty$$

şartını sağlaması durumunda söz konusu sınır değer probleminin spektral tekilliklerinin ve özdeğerlerinin sonlu sayıda olduğu ispatlanmıştır.

Son yıllarda özellikle klasik moment problemi, mühendislik, ekonomi ve diğer alanların bazı problemleri için yapılan modelleme çalışmalarındaki gelişmelerle birlikte fark operatörlerinin spektral analizinin yapılması önem kazanmıştır.

Bairamov ve Çelebi (1999) tarafından yapılan çalışmada, (p_n) ve (q_n) kompleks terimli diziler ve λ bir spektral parametre olmak üzere $l_2(\mathbb{N}, \mathbb{C}^2)$ uzayında,

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ y_{n-1}^{(1)} - y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases}$$

denklem sistemi ve $y_0^{(1)} = 0$ sınır koşulu yardımı ile üretilen Dirac operatörünün, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[(|p_n| + |q_n|) \exp\left(\varepsilon\sqrt{n}\right) \right] < \infty$$

koşulu altında sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahip olduğu gösterilerek bu operatör için bir spektral açılım verilmiştir.

Krall *vd.*(2001) tarafından yapılan çalışmada, (b_n) kompleks terimli bir dizi olmak üzere $l_2(\mathbb{N})$ uzayında,

$$(ly)_n = y_{n-1} + y_{n+1} + b_n y_n$$

fark ifadesi ve $y_0 = 0$ sınır koşulu tarafından üretilen fark operatörünün Weyl-Titchmarsh fonksiyonu incelenmiş ve bu fonksiyon ile operatörün Marchenko anlamında genelleştirilmiş spektral fonksiyonu arasında bir ilişki elde edilmiştir. Ayrıca Weyl-Titchmarsh fonksiyonunun Cauchy tipinde bir integral gösterimi bulunmuş ve bu gösterimden yararlanılarak bir spektral açılım verilmiştir.

Görüldüğü üzere yukarıda belirtilen çalışmalarda göz önüne alınan problemlerin hepsinde sınır koşulları spektral parametreden bağımsız olmuştur. Son yıllarda ise, sınır koşullarında spektral parametre olan diferensiyel operatörler üzerinde çalışılmalar yapılmaya başlanmıştır.

Bu çalışmada λ nın bir spektral parametre olması koşulu altında; $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ için $a_n \neq 0$ olmakla birlikte a_n, b_n kompleks diziler ve $i = 0, 1$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere selfadjoint olmayan ikinci mertebeden fark denklemi için

$$\begin{aligned} a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} &= \lambda y_n,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} \\ (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0 &= 0,\ \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 \neq 0\ ,\ \gamma_1 \neq a_0^{-1}\beta_0 \end{aligned}$$

sınır değer problemine karşılık gelen L operatörü ile, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ için $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$ vektör değerli diziler, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ olmak üzere (a_n), (b_n), (p_n), (q_n) kompleks değerli diziler ve $i = 0, 1$ için $\gamma_i,\ \beta_i \in \mathbb{C}$ olmak üzere selfadjoint olmayan birinci mertebeden fark denklemleri sistemi için

$$\begin{cases} a_{n+1}y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1}y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda)y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1\lambda)y_0^{(1)} = 0, \quad \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 \neq 0,\ \gamma_1 \neq a_0^{-1}\beta_0$$

sınır değer problemi göz önüne alınmış olup bu problemlerin spektrumunun, özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin yapısal özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyulacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 $X \neq \{0\}$ kompleks normlu bir uzay, $T : D(T) \subset X \to X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ operatörüne T operatörünün *resolvent operatörü* ya da kısaca *resolventi* denir (Lusternik 1974).

Tanım 2.2 $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T operatörünün *regüler değeri* denir. T operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise T operatörünün *resolvent kümesi* adı verilir (Lusternik 1974).

Tanım 2.3 $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının kümesine T operatörünün *diskret spektrumu* ya da *nokta spektrumu* adı verilir (Lusternik 1974).

Tanım 2.4 $R_\lambda(T)$ mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(T)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye T operatörünün *sürekli spektrumu* denir (Lusternik 1974).

Tanım 2.5 X bir kompleks vektör uzay, ve $T : X \to X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Tx = \lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x \in X$ çözümü varsa λ sayısına T operatörünün *özdeğeri* denir. Bu x çözümüne ise T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyonu* adı verilir (Lusternik 1974).

Tanım 2.6 Bir T operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumunda bulunan ve T operatörünün özdeğeri olmayan noktalara T operatörünün *spektral tekillikleri* adı verilir (Naimark 1960).

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 *(Privalov Teoremi)* Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun, reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 *(Pavlov Teoremi)* g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon ve $\mu\left(G = \left\{x \in \mathbb{R} : g^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0$ olsun. Ayrıca

$$\left|g^{(k)}(z)\right| \leq \eta_k,\ \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde η_k sayıları mevcut olmakla birlikte G_s, G kümesinin s-komşuluğu, $t(s) = \inf\limits_k \frac{\eta_k s^k}{k!}$ ve $\omega > 0$ olmak üzere

$$\int\limits_0^{\omega} \ln t(s) d\mu(G_s) = -\infty \tag{2.1}$$

sağlansın. Bu durumda g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da özdeş olarak sıfırdır (Pavlov 1975).
(2.1) ifadesindeki integral, sıfır noktasını içeren herhangi bir aralık üzerinden alınmaktadır.

3. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN İKİNCİ MERTEBEDEN NON-SELFADJOİNT FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

$n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ olmak üzere selfadjoint olmayan ikinci mertebeden fark denklemi için

$$
\begin{aligned}
a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} &= \lambda y_n, \; n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\} &(3.1)\\
(\gamma_0 + \gamma_1 \lambda) y_1 + (\beta_0 + \beta_1 \lambda) y_0 &= 0, \; \gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0 \neq 0 \;, \; \gamma_1 \neq \frac{\beta_0}{a_0} &(3.2)
\end{aligned}
$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Ayrıca (3.1), (3.2) sınır değer problemine karşılık gelen $L : \ell_2(\mathbb{N}) \to \ell_2(\mathbb{N})$ operatörü,

$$(\ell y)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}$$

fark ifadesinin ve (3.2) sınır koşulunun yardımı ile tanımlanır. Burada $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere a_n, b_n kompleks diziler ve $i = 0, 1$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ olup λ ise bir spektral parametredir. Eğer

$$h_n = a_{n-1} + a_n + b_n$$

alınırsa (3.1) fark denklemi,

$$\bigtriangledown (a_n \Delta y_n) + h_n y_n = \lambda y_n, \; n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

şeklindeki Sturm-Liouville formu ile ifade edilebilir. Burada Δ ileri fark operatörü ve $\bigtriangledown$ geri fark operatörü olup

$$
\begin{aligned}
\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n\\
\bigtriangledown y_n &= y_n - y_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlıdırlar.

3.1 (3.1), (3.2) Sınır Değer Probleminin Jost Çözümü ve Jost Fonksiyonu

$\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n^{\delta}) \left(|1 - a_n| + |b_n| \right) \right] < \infty \tag{3.4}$$

koşulu göz önüne alınsın. (3.4) koşulu altında $\lambda = 2\cos z$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere (3.1) denklemi,

$$e_n(z) = \alpha_n e^{inz}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right), \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.5}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. $e_n(z)$ çözümüne (3.1), (3.2) sınır değer probleminin Jost çözümü denir. Burada α_n ile A_{nm} ifadeleri,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \left(\prod_{k=n}^{\infty} a_k\right)^{-1} \\
A_{n,1} &= -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \\
A_{n,2} &= -\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-a_k^2\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sum_{p=k+1}^{\infty} b_p \\
A_{n,m+2} &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-a_k^2\right) A_{k+1,m} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k A_{k,m+1} + A_{n+1,m}
\end{aligned}$$

şeklinde (a_n) ve (b_n) ifadelerine bağlı olarak yazılır. Bununla birlikte $C > 0$ bir sabit ve $\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]$ ifadesi, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı olmak üzere

$$|A_{nm}| \le C \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \left(|1-a_k| + |b_k|\right) \tag{3.6}$$

sağlanır. Dolayısıyla $e(z) = \{e_n(z)\}$ fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup $\operatorname{Im} z = 0$ bölgesinde süreklidir.

Diğer yandan (3.2) sınır koşulu ve (3.5) eşitliği kullanılarak f fonksiyonu,

$$f(z) = (\gamma_0 + 2\gamma_1 \cos z)e_1(z) + (\beta_0 + 2\beta_1 \cos z)e_0(z) \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ da analitik olup $\overline{\mathbb{C}}_+$ da süreklidir ve $f(z) = f(z+2\pi)$ eşitliğini sağlar. f fonksiyonuna (3.1), (3.2) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu denir.

Şimdi, (3.1) denkleminin (3.2) koşulunu sağlayan diğer bir çözümünü bulmak için; (3.1) denkleminin, λ ya göre $\mathbb{C}_+$ bölgesinde tam fonksiyon olan ve

$$\begin{aligned}
K_0(\lambda) &= 0, \ K_1(\lambda) = 1 \\
Q_0(\lambda) &= 1, \ Q_1(\lambda) = 0
\end{aligned}$$

koşullarını sağlayan lineer bağımsız $K_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ çözümleri göz önüne alınsın. Bu durumda, (3.1) denkleminin (3.2) koşulunu sağlayan diğer bir çözümü $\widehat{\varphi}_n(\lambda)$ olmak üzere bu çözüm, $K_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ nın lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Yani

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda) = c(\lambda)K_n(\lambda) + d(\lambda)Q_n(\lambda)$$

olup (3.2) koşulundan

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)\widehat{\varphi}_1(\lambda) + (\beta_0 + \beta_1\lambda)\widehat{\varphi}_0(\lambda) \\ &= (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)\left[c(\lambda)K_1(\lambda) + d(\lambda)Q_1(\lambda)\right] + (\beta_0 + \beta_1\lambda)\left[c(\lambda)K_0(\lambda) + d(\lambda)Q_0(\lambda)\right] \\ &= (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)c(\lambda) + (\beta_0 + \beta_1\lambda)d(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur ki

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \beta_0 + \beta_1\lambda, \\ d(\lambda) &= -(\gamma_0 + \gamma_1\lambda) \end{aligned}$$

için

$$\widehat{\varphi}_n(\lambda) = (\beta_0 + \beta_1\lambda)K_n(\lambda) - (\gamma_0 + \gamma_1\lambda)Q_n(\lambda)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_0(\lambda) &= -(\gamma_0 + \gamma_1\lambda), \\ \widehat{\varphi}_1(\lambda) &= \beta_0 + \beta_1\lambda \end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. O halde $\lambda = 2\cos z$ için

$$\varphi(z) = \widehat{\varphi}(2\cos z) = \left\{\widehat{\varphi}_n(2\cos z)\right\},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu tamdır ve

$$\varphi(z) = \varphi(z + 2\pi)$$

durumunu gerçekler. Burada

$$\begin{aligned} P_0 &: = \left\{z : z \in \mathbb{C},\ z = \xi + i\tau,\ -\frac{\pi}{2} \leq \xi \leq \frac{3\pi}{2},\ \tau > 0\right\}, \\ P &: = P_0 \cup [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{aligned}$$

bölgeleri tanımlansın. Dolayısıyla $\varphi(z)$ ve $e(z)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni,

$$W\left[\varphi(z), e(z)\right] = a_n\left[\widehat{\varphi}_{n+1}(2\cos z)e_n(z) - e_{n+1}(z)\widehat{\varphi}_n(2\cos z)\right]$$

şeklindedir ve Wronskiyen n den bağımsız olduğundan $n = 0$ için

$$\begin{aligned} W\left[\varphi(z), e(z)\right] &= a_0\left[\widehat{\varphi}_1(2\cos z)e_0(z) - e_1(z)\widehat{\varphi}_0(2\cos z)\right] \\ &= a_0 f(z) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $z \in P$ için $f(z) \neq 0$ ise $\varphi(z)$ ve $e(z)$ çözümleri lineer bağımsızdır.

Şimdi, (3.1), (3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu ve resolvent operatörünü incelemek için; (3.3) denkleminden,

$$\bigtriangledown(a_n \Delta y_n) + h_n y_n - \lambda y_n = g_n \tag{3.9}$$

denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (3.9) denkleminin homogen kısmı

$$\bigtriangledown(a_n \Delta y_n) + h_n y_n - \lambda y_n = 0$$

olup bu denklemin genel çözümü

$$\widetilde{y_n} = c e_n + d\widehat{\varphi}_n$$

şeklindedir. Buna karşılık (3.9) denkleminin genel çözümü ise

$$y_n = c_n e_n + d_n \widehat{\varphi}_n$$

biçimindedir. Buradan, Δy_n ifadesinin açılımında $c_n e_{n+1}$ ve $d_n \widehat{\varphi}_{n+1}$ ifadelerini ekleyip çıkartarak

$$\begin{aligned} \Delta y_n &= c_{n+1}e_{n+1} + d_{n+1}\widehat{\varphi}_{n+1} - c_n e_n - d_n\widehat{\varphi}_n \\ &= (c_{n+1} - c_n)e_{n+1} + (d_{n+1} - d_n)\widehat{\varphi}_{n+1} + c_n(e_{n+1} - e_n) + d_n(\widehat{\varphi}_{n+1} - \widehat{\varphi}_n) \end{aligned}$$

bulunup her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$(c_{n+1} - c_n)e_{n+1} + (d_{n+1} - d_n)\widehat{\varphi}_{n+1} = 0 \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$\Delta y_n = c_n(e_{n+1} - e_n) + d_n(\widehat{\varphi}_{n+1} - \widehat{\varphi}_n)$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}\nabla(a_n\Delta y_n) &= a_nc_n(e_{n+1}-e_n)+a_nd_n(\widehat{\varphi}_{n+1}-\widehat{\varphi}_n)\\ &\quad -a_{n-1}c_{n-1}(e_n-e_{n-1})-a_{n-1}d_{n-1}(\widehat{\varphi}_n-\widehat{\varphi}_{n-1})\end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Bu ifade (3.9) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}g_n &= a_nc_ne_{n+1}-a_nc_ne_n+a_nd_n\widehat{\varphi}_{n+1}-a_nd_n\widehat{\varphi}_n-a_{n-1}c_{n-1}e_n+a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1}\\ &\quad -a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_n+a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_{n-1}+b_nc_ne_n+b_nd_n\widehat{\varphi}_n+a_nc_ne_n+a_nd_n\widehat{\varphi}_n\\ &\quad +a_{n-1}c_ne_n+a_{n-1}d_n\widehat{\varphi}_n-\lambda c_ne_n-\lambda d_n\widehat{\varphi}_n\\ &= c_n(a_ne_{n+1}+b_ne_n-\lambda e_n)+d_n(a_n\widehat{\varphi}_{n+1}+b_n\widehat{\varphi}_n-\lambda\widehat{\varphi}_n)\\ &\quad -a_{n-1}c_{n-1}e_n+a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1}-a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_n+a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_{n-1}\\ &\quad +a_{n-1}c_ne_n+a_{n-1}d_n\widehat{\varphi}_n\\ &= -c_na_{n-1}e_{n-1}-d_na_{n-1}\widehat{\varphi}_{n-1}-a_{n-1}c_{n-1}e_n+a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1}\\ &\quad -a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_n+a_{n-1}d_{n-1}\widehat{\varphi}_{n-1}+a_{n-1}c_ne_n+a_{n-1}d_n\widehat{\varphi}_n\\ &= -a_{n-1}\left[(c_n-c_{n-1})e_{n-1}+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_{n-1}\right]\\ &\quad +a_{n-1}\left[(c_n-c_{n-1})e_n+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_n\right]\end{aligned}$$

olup (3.10) eşitliği gereğince

$$(c_n-c_{n-1})e_n+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_n=0$$

olduğundan dolayı

$$(c_n-c_{n-1})e_{n-1}+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_{n-1}=-\frac{g_n}{a_{n-1}}$$

bulunur. Burada

$$\left.\begin{array}{c}(c_n-c_{n-1})e_n+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_n=0\\ (c_n-c_{n-1})e_{n-1}+(d_n-d_{n-1})\widehat{\varphi}_{n-1}=-\frac{g_n}{a_{n-1}}\end{array}\right\}$$

denklem sisteminden,

$$c_n-c_{n-1} = \frac{-g_n\widehat{\varphi}_n}{a_{n-1}(\widehat{\varphi}_ne_{n-1}-\widehat{\varphi}_{n-1}e_n)} \tag{3.11}$$

$$d_n-d_{n-1} = \frac{g_ne_n}{a_{n-1}(\widehat{\varphi}_ne_{n-1}-\widehat{\varphi}_{n-1}e_n)} \tag{3.12}$$

bulunur. (3.11) den,

$$\begin{aligned}
c_1 - c_0 &= \frac{-g_1\widehat{\varphi}_1}{a_0(\widehat{\varphi}_1 e_0 - \widehat{\varphi}_0 e_1)} \\
c_2 - c_1 &= \frac{-g_2\widehat{\varphi}_2}{a_1(\widehat{\varphi}_2 e_1 - \widehat{\varphi}_1 e_2)} \\
c_3 - c_2 &= \frac{-g_3\widehat{\varphi}_3}{a_2(\widehat{\varphi}_3 e_2 - \widehat{\varphi}_2 e_3)} \\
&\vdots \\
c_n - c_{n-1} &= \frac{-g_n\widehat{\varphi}_n}{a_{n-1}(\widehat{\varphi}_n e_{n-1} - \widehat{\varphi}_{n-1} e_n)}
\end{aligned}$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplandığı taktirde

$$c_n = c_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k\widehat{\varphi}_k}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.12) den,

$$\begin{aligned}
d_{n+1} - d_n &= \frac{g_{n+1}e_{n+1}}{a_n(\widehat{\varphi}_{n+1} e_n - \widehat{\varphi}_n e_{n+1})} \\
d_{n+2} - d_{n+1} &= \frac{g_{n+2}e_{n+2}}{a_{n+1}(\widehat{\varphi}_{n+2} e_{n+1} - \widehat{\varphi}_{n+1} e_{n+2})} \\
d_{n+3} - d_{n+2} &= \frac{g_{n+3}e_{n+3}}{a_{n+2}(\widehat{\varphi}_{n+3} e_{n+2} - \widehat{\varphi}_{n+2} e_{n+3})} \\
&\vdots \\
d_m - d_{m-1} &= \frac{g_m e_m}{a_{m-1}(\widehat{\varphi}_m e_{m-1} - \widehat{\varphi}_{m-1} e_m)}
\end{aligned}$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$-d_n + d_m = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{g_k e_k}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)}$$

bulunur. Burada

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k e_k}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} < \infty$$

olduğundan $m \to \infty$ için

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{-g_k e_k}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)}$$

toplamının limiti mevcut olup $\lim_{m\to\infty} d_m = s$ olacak şekilde sonlu bir s sayısı vardır. Dolayısıyla

$$d_n = s - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k e_k}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)}$$

elde edilir. Bulunan c_n ve d_n katsayıları y_n çözümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_n &= c_n e_n + d_n \widehat{\varphi}_n \\ &= c_0 e_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k \widehat{\varphi}_k e_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} + s\widehat{\varphi}_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k e_k \widehat{\varphi}_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} \end{aligned}$$

olur. Burada $y_n \in \ell_2(\mathbb{N})$ olup $\widehat{\varphi}_n \notin \ell_2(\mathbb{N})$ olduğundan $s = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$y_n = c_0 e_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k \widehat{\varphi}_k e_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k e_k \widehat{\varphi}_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} \tag{3.13}$$

olarak yazılır. Ayrıca (3.2) sınır koşulu ve (3.8) den

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma_0 + \gamma_1 \lambda) y_1 + (\beta_0 + \beta_1 \lambda) y_0 \\ &= -(\widehat{\varphi}_0 y_1 - \widehat{\varphi}_1 y_0) \end{aligned}$$

olup buradan da (3.13) kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\varphi}_0 y_1 - \widehat{\varphi}_1 y_0 \\ &= \widehat{\varphi}_0 \left(c_0 e_1 - \frac{g_1 \widehat{\varphi}_1 e_1}{a_0(\widehat{\varphi}_1 e_0 - \widehat{\varphi}_0 e_1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{g_k e_k \widehat{\varphi}_1}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} \right) \\ &\quad - \widehat{\varphi}_1 \left(c_0 e_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k e_k \widehat{\varphi}_0}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} \right) \\ &= c_0 \widehat{\varphi}_0 e_1 - \frac{g_1 \widehat{\varphi}_0 \widehat{\varphi}_1 e_1}{a_0(\widehat{\varphi}_1 e_0 - \widehat{\varphi}_0 e_1)} - c_0 \widehat{\varphi}_1 e_0 + \frac{g_1 \widehat{\varphi}_0 \widehat{\varphi}_1 e_1}{a_0(\widehat{\varphi}_1 e_0 - \widehat{\varphi}_0 e_1)} \\ &= c_0(\widehat{\varphi}_0 e_1 - \widehat{\varphi}_1 e_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\widehat{\varphi}_0 e_1 - \widehat{\varphi}_1 e_0 \neq 0$ olduğundan $c_0 = 0$ bulunur. Yani

$$y_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{g_k \widehat{\varphi}_k e_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{g_k e_k \widehat{\varphi}_n}{a_{k-1}(\widehat{\varphi}_k e_{k-1} - \widehat{\varphi}_{k-1} e_k)}$$

olur. O halde (3.1), (3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G_{nk}(z) = \begin{cases} -\frac{\varphi_k(z) e_n(z)}{a_0 f(z)} \ , & k \leq n \\ -\frac{\varphi_n(z) e_k(z)}{a_0 f(z)} \ , & k > n \end{cases} \tag{3.14}$$

şeklinde olup (3.1), (3.2) sınır değer probleminin resolvent operatörü de,

$$R_\lambda(L) g_n := \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(z) g_k \ , \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.15}$$

biçimindedir.

3.2 L Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

(3.2) koşulu altında L operatörünün özdeğerler kümesi ve spektral tekillikler kümesi sırasıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ olarak gösterilsin. Bu durumda (3.14) ve (3.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}\sigma_d(L) &= \{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in P_0,\ f(z) = 0\}, &(3.16)\\ \sigma_{ss}(L) &= \left\{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ f(z) = 0\right\} \setminus \{0\} &(3.17)\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $f(z)$ ifadesi açıkça yazılmak istenirse;

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

eşitliğinden (3.5) ve (3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}f(z) &= \left[\gamma_0 + \gamma_1 \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right] \left[\alpha_1 e^{iz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m} e^{imz}\right)\right]\\ &\quad + \left[\beta_0 + \beta_1 \left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right] \left[\alpha_0 \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m} e^{imz}\right)\right]\\ &= \alpha_0\beta_1 e^{-iz} + \gamma_1\alpha_1 + \alpha_0\beta_0 + (\gamma_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1) e^{iz} + \gamma_1\alpha_1 e^{i2z}\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_0\beta_1 A_{0m} e^{i(m-1)z} + \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_1\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_0 A_{0m}) e^{imz}\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_0\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_1 A_{0m}) e^{i(m+1)z} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_1\alpha_1 A_{1m} e^{i(m+2)z}\ .\end{aligned}$$

bulunur. Fakat buradaki e^{-iz} ifadesi, $f(z)$ nin türevlerinin sınırlılığı konusunda sorun yaratacaktır. Dolayısıyla

$$F(z) := f(z)e^{iz} \qquad (3.18)$$

denilirse bu sorun ortadan kalkar. Burada F fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olup

$$F(z) = F(z + 2\pi)$$

özelliğini sağlar. Ayrıca $f(z)$ ile $F(z)$ fonksiyonlarının P bölgesindeki sıfırları çakışır. Açıkça

$$\begin{aligned}F(z) &= \alpha_0\beta_1 + (\gamma_1\alpha_1 + \alpha_0\beta_0) e^{iz} + (\gamma_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1) e^{2iz} + \gamma_1\alpha_1 e^{3iz}\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_0\beta_1 A_{0m} e^{imz} + \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_1\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_0 A_{0m}) e^{i(m+1)z}\\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (\gamma_0\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_1 A_{0m}) e^{i(m+2)z} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_1\alpha_1 A_{1m} e^{i(m+3)z} \qquad (3.19)\end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla (3.16), (3.17) ve (3.18) den,

$$\begin{aligned}\sigma_d(L) &= \{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in P_0,\ F(z) = 0\},\\ \sigma_{ss}(L) &= \left\{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ F(z) = 0\right\} \setminus \{0\}\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur.

Tanım 3.1 F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının katına, L operatörünün *özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı* denir.

Dolayısıyla (3.20) den görülür ki, L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini araştırmak için, F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sayısal özelliklerini incelemek gerekir. Bu sıfırlar için;

$$\begin{aligned}A_1 &: = \{z : z \in P_0,\ F(z) = 0\},\\ A_2 &: = \left\{z : z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}],\ F(z) = 0\right\},\\ A_3 &: = \{A_1 \text{ kümesinin limit noktalarının kümesi}\},\\ A_4 &: = \{F(z) \text{ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının kümesi}\}\end{aligned} \tag{3.21}$$

kümeleri tanımlansın. Dolayısıyla (3.20) ve (3.21) den,

$$\begin{aligned}\sigma_d(L) &= \{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in A_1\},\\ \sigma_{ss}(L) &= \{\lambda : \lambda = 2\cos z,\ z \in A_2\} \setminus \{0\}\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir.

Teorem 3.1 (3.4) koşulu altında;

(i) A_1 kümesi sınırlıdır ve sayılabilirdir.

(ii) $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ve $A_1 \cap A_4 = \varnothing$ olur.

(iii) A_2 kümesi kompakttır ve reel eksendeki Lebesgue ölçüsü μ olmak üzere $\mu(A_2) = 0$ olur.

(iv) $A_3 \subset A_2$, $A_4 \subset A_2$ ve $\mu(A_3) = \mu(A_4) = 0$ olur.

(v) $A_3 \subset A_4$ olur.

İspat. ***(i)*** (3.6) ve (3.19) kullanılarak

$$F(z) = \begin{cases} \alpha_0\beta_1 + O(e^{-\tau}) & ;\ \beta_1 \neq 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \\ (\gamma_1\alpha_1 + \alpha_0\beta_0)\, e^{iz} + O(e^{-2\tau}); & \beta_1 = 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \end{cases}$$

olup bu asimptotik eşitlik ise F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğunu; yani A_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup Teorem 2.1 gereğince F fonksiyonunun P_0 daki sıfırları ayrıktır. Bu da A_1 kümesinin sayılabilir olduğunu gösterir.

(ii) F fonksiyonu P_0 da analitik olup Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince F fonksiyonunun, P_0 daki sıfırlarının limit noktaları ile P_0 daki sonsuz katlı sıfırları P_0 bölgesinin sınırında; yani $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ aralığında olur. Dolayısıyla $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ve $A_1 \cap A_4 = \varnothing$ bulunur.

(iii) Her $z \in A_2$ için $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ olduğundan A_2 kümesi sınırlıdır. Bununla beraber, F fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olup A_2 kümesinin limit noktaları yine A_2 kümesinin içinde olur, yani A_2 kümesi kapalıdır. Dolayısıyla A_2 kompakttır. Ayrıca Teorem 2.4 gereğince $\mu(A_2) = 0$ olur.

(iv) F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan $F(z)$ nin P_0 daki sıfırlarının limit noktaları yine $F(z)$ nin sıfırı olup $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ aralığına düşer. Yani, $A_3 \subset A_2$ olur. Ayrıca Teorem 2.3 gereğince $A_4 \subset A_2$ olduğu açık olup dolayısıyla da $\mu(A_3) = \mu(A_4) = 0$ bulunur.

(v) Keyfi $z_0 \in A_3$ alalım. Bu durumda $z_0 \neq z_n \in A_1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

olur. $z_n \in A_1$ olduğundan $F(z_n) = 0$ olup ayrıca F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0)$$

bulunur. Dolayısıyla $F(z_0) = 0$ olur; yani z_0, $F(z)$ fonksiyonunun sıfırıdır. Şimdi $z_0 \in A_4$; yani z_0 ifadesinin $F(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olduğu gösterilirse ispat biter. Tersine z_0, $F(z)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_+$ da analitik $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli öyle bir h fonksiyonu vardır ki

$$F(z) = (z - z_0)^k h(z),\ h(z_0) \neq 0,\ 1 \leq k < \infty$$

sağlanır. Buradan görülür ki, tüm z_n ler h fonksiyonunun da sıfırıdır. Bu durumda

$$h(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^k}$$

olup bu ise

$$h(z_n) = 0$$

olduğunu verir. Dolayısıyla h fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} h(z_n) \\ &= h(z_0) \end{aligned}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $z_0 \in A_4$ olup $A_3 \subset A_4$ elde edilir. ■

(3.22) ve Teorem 3.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2 (3.4) koşulu altında;

(i) L operatörünün özdeğerler kümesi sınırlıdır, sayılabilirdir ve limit noktaları $[-2, 2]$ aralığındadır.

(ii) $\sigma_{ss}(L) \subset [-2, 2]$ ve $\mu[\sigma_{ss}(L)] = 0$ olur.

Şimdi, L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini incelemek için (3.4) koşulunda $\delta = 1$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ durumları göz önüne alınacaktır. Öncelikle $\delta = 1$ olsun. Bu durumda

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n) \left(|1 - a_n| + |b_n|\right)\right] < \infty \tag{3.23}$$

olur.

Teorem 3.3 (3.23) koşulu altında L operatörü, sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir.

İspat. $C > 0$ bir sabit olmak üzere $n, m \in \mathbb{N}$ için (3.6) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} k &\geq n + \left[\left|\frac{m}{2}\right|\right] \\ &\geq \frac{1}{4}(n + m) \end{aligned}$$

durumu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
|A_{nm}| &\leq \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) \\
&= \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \exp(-\varepsilon k)\exp(\varepsilon k)\,(|1-a_k|+|b_k|) \\
&\leq C\exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)] \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \exp(\varepsilon k)\,(|1-a_k|+|b_k|) \\
&\leq C\exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $n \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}e^{imz}\right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}|\left|e^{imz}\right| \\
&\leq C\sum_{m=1}^{\infty} \exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)]\exp(-m\operatorname{Im} z) \\
&\leq C\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-m\left(\frac{\varepsilon}{4}+\operatorname{Im} z\right)\right]
\end{aligned}$$

olup $\frac{\varepsilon}{4}+\operatorname{Im} z > 0$ yani $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ için $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_{nm}e^{imz}$ serisi, z ye göre bu bölgede düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (3.19) dan F fonksiyonu $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitiktir. Yani F fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ dan $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesine analitik devama sahiptir. Bu durumda Teorem 2.2 den F fonksiyonunun P deki sıfırlarının limit noktaları $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ aralığında olamaz. Bu nedenle de Teorem 3.1 gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sınırlı olup Bolzano-Weirstrass Teoremi gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sonlu sayıda elemana sahiptirler. Ayrıca F fonksiyonu $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitik olduğundan, F fonksiyonunun P deki sıfırları sonlu katlıdır. O halde (3.22) den, L operatörünün sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri olması sonucu elde edilir. ■

Görülmektedir ki (3.23) koşulu, F fonksiyonunun reel eksenden alt yarı düzleme analitik devamını sağlar. Dolayısıyla bu analitik devam sonucunda L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması sonucu elde edilir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olmak üzere (3.23) koşulundan daha zayıf olan

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n^{\delta})\,(|1-a_n|+|b_n|)\right] < \infty \tag{3.24}$$

koşulu gözönüne alınsın. (3.24) koşulu altında F fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik ve reel eksende sonsuz türevlenebilir olduğu açıktır. Fakat (3.24) koşulu altında F fonksiyonu, reel eksenden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Bu yüzden (3.24) koşulu altında L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması, Teorem 3.3 den farklı bir yolla gösterilmelidir. Bunun için ise Teorem 2.5 den faydanılacaktır. Burada, Teorem 2.5 e uygun olması amacıyla g fonksiyonu yerine 2π periyotlu F fonksiyonu ve G kümesi yerine $A_4 \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ kümesi düşünülecek olup ayrıca bu teoremdeki η_k ifadesinin de belirlenmesi gerekecektir. Dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonunun türevlerinin incelenmesi gerekmektedir. O halde (3.24) koşulu göz önüne alınsın. Buradan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere (3.19) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \leq \; & |\gamma_1\alpha_1 + \alpha_0\beta_0| + 2^k|\gamma_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1| + 3^k|\gamma_1\alpha_1| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} m^k |\alpha_0\beta_1 A_{0m}| \left|e^{imz}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^k |\gamma_1\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_0 A_{0m}| \left|e^{i(m+1)z}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (m+2)^k |\gamma_0\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_1 A_{0m}| \left|e^{i(m+2)z}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (m+3)^k |\gamma_1\alpha_1 A_{1m}\;| \left|e^{i(m+3)z}\right|
\end{aligned}$$

olup $m \geq 1$ için $2m \geq 2$ ve $3m \geq 3$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \leq \; & 4^k\left(|\gamma_1\alpha_1 + \alpha_0\beta_0| + |\gamma_0\alpha_1 + \alpha_0\beta_1| + |\gamma_1\alpha_1|\right) \\
& + 4^k\left\{\sum_{m=1}^{\infty} m^k|\alpha_0\beta_1 A_{0m}| + \sum_{m=1}^{\infty} m^k|\gamma_1\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_0 A_{0m}|\right. \\
& \left. + \sum_{m=1}^{\infty} m^k|\gamma_0\alpha_1 A_{1m} + \alpha_0\beta_1 A_{0m}| + \sum_{m=1}^{\infty} m^k|\gamma_1\alpha_1 A_{1m}\;|\right\} \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $n \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
k & \geq n + \left[\left|\frac{m}{2}\right|\right] \\
& \geq \frac{m}{4}
\end{aligned}$$

ve buradan $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olmak üzere

$$-k^{\delta} \leq -\frac{m^{\delta}}{4}$$

olup (3.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |A_{nm}| &\leq \sum_{k=n+[|\frac{m}{2}|]}^{\infty} \exp(-\varepsilon k^{\delta}) \exp(\varepsilon k^{\delta}) \left(|1-a_k| + |b_k|\right) \\ &\leq C \exp[-\frac{\varepsilon}{4}(m^{\delta})] \end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.25) ve (3.26) dan,

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \leq C4^k + C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^{\delta}} \tag{3.27}$$

bulunur. Burada

$$D_k = C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^{\delta}}$$

olsun. Literatürde, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{m=1}^{n} G\left(a + m\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b G(t)dt$$

durumunun sağlandığı bilinmektedir. O zaman $a = 0$, $b = n$ ve

$$G(t) = t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^{\delta}}$$

için

$$\begin{aligned} D_k &= C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^{\delta}} \\ &= C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} G(m) \\ &= C4^k \int_0^n t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^{\delta}} dt \\ &\leq C4^k \int_0^{\infty} t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^{\delta}} dt \end{aligned}$$

olup $y = \frac{\varepsilon}{4}t^{\delta}$ dönüşümü yapılarak,

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{4y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}, \\ dt &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} y^{\frac{1}{\delta}-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_k \leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} \int_0^\infty y^{\frac{k+1}{\delta}-1} e^{-y} dy \tag{3.28}$$

elde edilir. (3.28) eşitsizliğinde, $a = \frac{k+1}{\delta} - 1$ için $a > 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$$

Gamma fonksiyonu olmak üzere $\Gamma(a+1) = a!$ olduğundan

$$\begin{aligned}
D_k &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} \Gamma(a+1) \\
&= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} a! \\
&\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} a^a \\
&\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} (a+1)^a \\
&= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} \left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{\delta}-1} \\
&= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1} \left[\frac{1}{\delta}(k+1)\right]^{\frac{k+1}{\delta}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olmak üzere $2 \geq \frac{1}{\delta}$ için

$$\begin{aligned}
D_k &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} 2^{\frac{1}{\delta}(k+1)} (k+1)^{-1} (k+1)^{\frac{k+1}{\delta}} \\
&\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1} 2^{2(k+1)} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}-1} (k+1)^{\frac{k}{\delta}}
\end{aligned}$$

olup literatürdeki

$$(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} < e^{\frac{k}{\delta}}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$D_k \leq C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} \tag{3.29}$$

yazılabilir. Yine iyi bilinen

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e$$

eşitsizliğinden

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}$$

olup

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < k^{\frac{k}{\delta}} e^{\frac{1}{\delta}} \tag{3.30}$$

durumu elde edilir. Ayrıca

$$k^k < k! e^k$$

olduğundan

$$k^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}$$

olup (3.30) dan,

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

bulunur. O halde son eşitsizlik (3.29) da göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} D_k &\leq C4^{2k+1}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}} \\ &= C4^{2k+1}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{2k+1}{\delta}} k! \,(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &= 4Ce^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left[16e^{\frac{2}{\delta}}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^k k! \,(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &= Dd^k k! \,(k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\ &\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \end{aligned}$$

olup $k \geq 1$ için $k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \geq 1$ durumu da göz önünde bulundurulursa (3.27) den,

$$\begin{aligned} \left|F^{(k)}(z)\right| &\leq C4^k + Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\ &\leq C4^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} + Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\ &\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. Burada $D > 0$ ve $d > 0$ ifadeleri C, ε ve δ ifadelerine bağlıdır. Dolayısıyla Teorem 2.5 deki η_k ifadesi için,

$$\eta_k = Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}$$

düşünülecektir.

Teorem 3.4 (3.24) sağlandığı taktirde $A_4 = \varnothing$ olur.

İspat. F fonksiyonu özdeş olarak sıfır değildir. Dolayısıyla Teorem 2.5 gereğince, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} t(s) &= \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!} \\ &= \inf_k \frac{Dk! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k}{k!} \\ &= D \inf_k \left[k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k \right] \end{aligned}$$

olmak üzere Teorem 2.5 teki integralin aralığı $\omega > 0$ için $[0, \omega)$ olarak alınırsa

$$\int_0^{\omega} \ln t(s) d\mu(A_{4,s}) > -\infty \tag{3.32}$$

bulunur. Burada $t(s)$ fonksiyonuna paralel olarak $x \in [0, \infty)$ için

$$h(x) = x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \tag{3.33}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $t(s)$ fonksiyonunun açıkça yazılabilmesi için $h(x)$ fonksiyonunun minimumunun bulunması yeterlidir. Bunun için öncelikle $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları bulunmalıdır. (3.33) den,

$$\ln h(x) = x \ln \left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right)$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{h'(x)}{h(x)} &= \ln \left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right) + \frac{x(\frac{1}{\delta}-1)dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}} \\ &= \frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$h'(x) = x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right) \right]$$

şeklindedir. O halde $h'(x_0) = 0$ için

$$\frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1} \right) = 0$$

bulunup

$$\ln \left(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1} \right) = \frac{\delta - 1}{\delta}$$

yazılır. Buradan

$$e^{\frac{\delta-1}{\delta}}(ds)^{-1} = x_0^{\frac{1-\delta}{\delta}}$$

olup $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktası

$$x_0 = e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} h''(x) &= x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \frac{(\frac{1}{\delta}-1)dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}} \\ &= x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + (\frac{1}{\delta}-1)x^{-1}\right\} \end{aligned}$$

olup $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ için $\frac{1}{\delta} > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} h''(x_0) &= e^{(1-\frac{1}{\delta})e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \left[(\frac{1}{\delta}-1)e(ds)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani x_0, $h(x)$ fonksiyonunun minimum noktasıdır. O halde

$$\begin{aligned} \min_{x\in[0,\infty)} h(x) &= h(x_0) \\ &= \left[e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right)(ds)^{-e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}(ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$t(s) = D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right) \tag{3.34}$$

olur. O halde (3.32) ve (3.34) den,

$$\int_0^\omega \ln\left[D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(A_{4,s}) > -\infty$$

olup ayrıca Teorem 3.1 de $\mu(A_4)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\infty &> -\int_0^\omega \left[\ln D + \left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right] d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\ln D \int_0^\omega d\mu(A_{4,s}) + \int_0^\omega \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\ln D\,[\mu(A_{4,\omega})-\mu(A_4)] + \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\mu(A_{4,\omega})\ln D + \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum ise

$$\int_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) < \infty \tag{3.35}$$

olmasını gerektirir. Fakat burada $\frac{\delta}{1-\delta}\geq 1$ olduğundan (3.35) koşulu ancak $A_4=\varnothing$ olduğunda,yani $\mu(A_{4,s})=0$ olduğunda sağlanır. Gerçekten; eğer $A_4\neq\varnothing$ olsaydı

$$\mu(A_{4,s})\geq 2s$$

ve buradan da

$$d\mu(A_{4,s})\geq 2ds$$

olurdu. Dolayısıyla $1-\frac{\delta}{1-\delta}<0$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&\geq 2\int_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}ds \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)\,s^{1-\frac{\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta}\right|_0^\omega \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)}{(1-2\delta)\,s^{\frac{\delta}{1-\delta}-1}}\right|_0^\omega
\end{aligned}$$

olur. Fakat bu durum ise bir çelişkidir. Yani, $A_4=\varnothing$ elde edilir. ■

Teorem 3.5 (3.24) koşulu altında L operatörü, sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir.

İspat. (3.20) gereğince teoremin ispatı için, (3.24) koşulu altında F fonksiyonunun P bölgesinde sonlu sayıda sonlu katlı sıfırlara sahip olduğu gösterilmesi yeterlidir. Teorem 3.1 ve Teorem 3.5 gereğince $A_3 = \varnothing$ olur. Dolayısıyla A_1 ve A_2 sınırlı kümeleri bir limit noktasına sahip değillerdir. Bu yüzden Bolzano-Weirstrass Teoremi gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sonlu olmalıdır, yani F fonksiyonu P bölgesinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Ayrıca Teorem 3.5 gereğince $A_4 = \varnothing$ olduğundan F fonsiyonunun P bölgesindeki sıfırları sonlu katlıdır. ■

4. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNAN BİRİNCİ MERTEBEDEN NON-SELFADJOİNT FARK DENKLEMLERİ SİSTEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

$n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ olmak üzere selfadjoint olmayan birinci mertebeden fark denklemleri sistemi için

$$\begin{cases} a_{n+1} y_{n+1}^{(2)} + b_n y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ a_{n-1} y_{n-1}^{(1)} + b_n y_n^{(1)} + q_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1 \lambda) y_1^{(2)} + (\beta_0 + \beta_1 \lambda) y_0^{(1)} = 0, \quad \gamma_0 \beta_1 - \gamma_1 \beta_0 \neq 0, \ \gamma_1 \neq a_0^{-1} \beta_0 \tag{4.2}$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\begin{pmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \end{pmatrix}$ vektör değerli diziler ve $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ olmak üzere (a_n), (b_n), (p_n), (q_n) kompleks değerli dizilerdir. Ayrıca $i = 0, 1$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$ olup λ ise bir spektral parametredir.

4.1 (4.1), (4.2) Sınır Değer Probleminin Jost Çözümü ve Jost Fonksiyonu

$\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\varepsilon n^{\delta}) \left(|1 - a_n| + |1 + b_n| + |p_n| + |q_n| \right) < \infty \tag{4.3}$$

koşulu göz önüne alınsın. (4.3) koşulu altında $\lambda = 2 \sin \frac{z}{2}$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere (4.1) denklem sistemi,

$$f_n(z) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \alpha_n \left(I_2 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right) \begin{pmatrix} e^{i\frac{z}{2}} \\ -i \end{pmatrix} e^{inz}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.4}$$

$$f_0^{(1)}(z) = \alpha_0^{11} \left\{ e^{i\frac{z}{2}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}^{11} e^{imz} \right] - i \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}^{12} e^{imz} \right\} \tag{4.5}$$

şeklinde sınırlı çözümlere sahiptir. $f(z) = (f_n(z)) = \begin{pmatrix} f_n^{(1)}(z) \\ f_n^{(2)}(z) \end{pmatrix}$ çözümüne, (4.1) denklem sisteminin Jost çözümü denir. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \begin{pmatrix} \alpha_n^{11} & \alpha_n^{12} \\ \alpha_n^{21} & \alpha_n^{22} \end{pmatrix}, \\
I_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
A_{nm} &= \begin{pmatrix} A_{nm}^{11} & A_{nm}^{12} \\ A_{nm}^{21} & A_{nm}^{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde olup $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $i, j = 1, 2$ için α_n^{ij} ve A_{nm}^{ij} ifadeleri,

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{11} &= \left[\prod_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-k} b_k a_{k-1} \right]^{-1}, \\
\alpha_n^{12} &= 0, \\
\alpha_n^{22} &= \left[b_n \prod_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n-k+1} b_k a_{k-1} \right]^{-1}, \\
\alpha_n^{21} &= \alpha_n^{22} \left[p_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k + q_k) \right], \\
A_{n1}^{12} &= -\sum_{k=n+1}^{\infty} (p_k + q_k), \\
A_{n1}^{11} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[a_{k+1} a_k + b_k^2 - p_k q_k + (p_k + q_k) A_{k1}^{12} - 2 \right], \\
A_{n1}^{22} &= -1 + a_{n+1} a_n + \left(A_{n1}^{12} \right)^2 + A_{n1}^{11}, \\
A_{n1}^{21} &= -\sum_{k=n}^{\infty} \left\{ \left(q_{k+1} + A_{k1}^{12} \right) \left[a_{k+1} a_k + q_{k+1} \left(p_{k+1} + q_{k+1} \right) + q_{k+1} A_{k1}^{12} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_{k+1}^2 + A_{k+1,1}^{11} - 1 \right] - A_{k1}^{12} \left(1 + A_{k1}^{11} \right) \right\} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(q_k A_{k1}^{22} - b_k^2 p_k \right), \\
A_{n2}^{12} &= -a_{n+1} a_n (q_{n+1} + A_{n1}^{12}) + A_{n1}^{12} A_{n1}^{11} + A_{n1}^{12} - A_{n1}^{21}, \\
A_{n2}^{11} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ \left(b_k^2 - 1 \right) A_{k1}^{11} - a_{k+1} a_k \left[(q_{k+1} + A_{k1}^{12}) A_{k+1,1}^{12} - A_{k+1,1}^{22} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left(p_k - A_{k1}^{12} \right) \left[q_k A_{k1}^{11} + A_{k1}^{12} - A_{k2}^{12} \right] - q_k A_{k1}^{21} + A_{k1}^{12} A_{k2}^{12} - A_{k1}^{22} \right\}, \\
A_{n2}^{22} &= -a_{n+1} a_n (q_{n+1} + A_{n1}^{12}) A_{n+1,1}^{12} + a_{n+1} a_n A_{n+1,1}^{22} + A_{n1}^{12} A_{n2}^{12} - A_{n1}^{11} + A_{n2}^{11},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{n2}^{21} &= \sum_{k=n}^{\infty}\left\{A_{k1}^{12}A_{k2}^{11} + A_{k2}^{21} - a_{k+1}a_k\left[(q_{k+1}+A_{k1}^{12})A_{k+1,1}^{11} - A_{k+1,1}^{21}\right]\right\} \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\left(q_k + A_{k-1,1}^{12}\right)\left(q_k A_{k2}^{12} - A_{k1}^{11} + A_{k2}^{11}\right) + b_k^2 A_{k2}^{21} - p_k A_{k2}^{22} + A_{k1}^{21}\right],
\end{aligned}
$$

ve $m \geq 3$ için

$$
\begin{aligned}
A_{nm}^{12} &= -a_{n+1}a_n\left[(q_{n+1}+A_{n1}^{12})A_{n+1,m-2}^{11} + A_{n+1,m-2}^{21}\right] \\
&\quad + A_{n1}^{12}A_{n,m-1}^{11} + A_{n,m-1}^{12} - A_{n,m-1}^{21}, \\
A_{nm}^{11} &= -\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{k+1}a_k\left[\left(q_{k+1}+A_{k1}^{12}\right)A_{k+1,m-1}^{12} - A_{k+1,m-1}^{22}\right] \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(p_k - A_{k1}^{12}\right)\left(q_k A_{k,m-1}^{11} + A_{k,m-1}^{12} - A_{km}^{12}\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(b_k^2 - 1\right)A_{k,m-1}^{11} \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k A_{k,m-1}^{21} + \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k1}^{12}A_{km}^{12} - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-1}^{22}, \\
A_{nm}^{22} &= -a_{n+1}a_n\left[(q_{n+1}+A_{n1}^{12})A_{n+1,m-1}^{11} - A_{n+1,m-1}^{22}\right] + A_{n1}^{12}A_{nm}^{12} + A_{nm}^{11} - A_{n,m-1}^{11}, \\
A_{nm}^{21} &= -\sum_{k=n}^{\infty} a_{k+1}a_k\left[\left(q_{k+1}+A_{k1}^{12}\right)A_{k+1,m-1}^{11} - A_{k+1,m-1}^{21}\right] \\
&\quad - \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(q_k - A_{k-1,1}^{12}\right)\left(q_k A_{km}^{21} + A_{k,m-1}^{11} - A_{km}^{22}\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(b_k^2 - 1\right)A_{km}^{12} \\
&\quad + \sum_{k=n}^{\infty} A_{k1}^{12}A_{km}^{22} + \sum_{k=n+1}^{\infty} q_k A_{km}^{22} + \sum_{k=n}^{\infty} A_{km}^{12} - \sum_{k=n+1}^{\infty} A_{k,m-1}^{21}
\end{aligned}
$$

biçiminde (a_n), (b_n), (p_n) ve (q_n) ifadelerine bağlı olarak yazılır.

Açıkça $n \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
f_n^{(1)}(z) &= \alpha_n^{11} e^{i(n+\frac{1}{2})z} + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n^{11}\left(A_{nm}^{11} e^{i(m+n+\frac{1}{2})z} - iA_{nm}^{12} e^{i(m+n)z}\right) \\
f_n^{(2)}(z) &= \alpha_n^{21} e^{i(n+\frac{1}{2})z} - i\alpha_n^{22} e^{inz} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_n^{21}\left(A_{nm}^{11} e^{i(m+n+\frac{1}{2})z} - iA_{nm}^{12} e^{i(m+n)z}\right)\right. \\
&\quad \left. + \alpha_n^{22}\left(A_{nm}^{21} e^{i(m+n+\frac{1}{2})z} - iA_{nm}^{22} e^{i(m+n)z}\right)\right] \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

şeklinde olup ayrıca $C > 0$ bir sabit ve $\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]$ ifadesi $\frac{m}{2}$'nin tam kısmı olmak üzere $i, j = 1, 2$ için

$$
\left|A_{nm}^{ij}\right| \leq C \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \left(|1-a_k| + |1+b_k| + |p_k| + |q_k|\right) \qquad (4.7)
$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $f_n(z)$ vektör değerli fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde süreklidir.

Diğer yandan; (4.2) sınır koşulu ile (4.4) ve (4.5) eşitlikleri kullanılarak F fonksiyonu,

$$F(z) = (\gamma_0 + 2\gamma_1 \sin\frac{z}{2})f_1^{(2)}(z) + (\beta_0 + 2\beta_1 \sin\frac{z}{2})f_0^{(1)}(z) \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda F fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olup $\overline{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde süreklidir ve

$$F(z + 4\pi) = F(z)$$

eşitliğini sağlar. F fonksiyonuna (4.1), (4.2) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu denir.

4.2 (4.1), (4.2) Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

$$\begin{aligned} P_0 &:= \{z : z \in \mathbb{C},\ z = x + iy,\ 0 \le x \le 4\pi,\ y > 0\}, \\ P &:= P_0 \cup [0, 4\pi] \end{aligned}$$

bölgeleri tanımlansın. Bu durumda (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi ve spektral tekillikler kümesi sırasıyla σ_d ve σ_{ss} olmak üzere

$$\sigma_d = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2},\ z \in P_0,\ F(z) = 0\right\}, \tag{4.9}$$

$$\sigma_{ss} = \left\{\lambda : \lambda = 2\sin\frac{z}{2},\ z \in [0, 4\pi],\ F(z) = 0\right\} \tag{4.10}$$

şeklinde olur. Eğer $F(z)$ fonksiyonu açıkça yazılmak istenirse;

$$\sin\frac{z}{2} = \frac{e^{i\frac{z}{2}} - e^{-i\frac{z}{2}}}{2i}$$

eşitliğinden (4.6) ve (4.8) kullanılarak

$$\begin{aligned} F(z) &= \left\{\gamma_0+\gamma_1\left[(-i)\left(e^{i\frac{z}{2}}-e^{-i\frac{z}{2}}\right)\right]\right\}f_1^{(2)}(z) \\ &\quad +\left\{\beta_0+\beta_1\left[(-i)\left(e^{i\frac{z}{2}}-e^{-i\frac{z}{2}}\right)\right]\right\}f_0^{(1)}(z) \\ &= i\alpha_0^{11}\beta_1+(\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0)e^{i\frac{z}{2}}+i(-\gamma_0\alpha_1^{22}+\gamma_1\alpha_1^{22}-\alpha_0^{11}\beta_1)e^{iz} \\ &\quad +\left(\gamma_0\alpha_1^{21}-\gamma_1\alpha_1^{22}\right)e^{i\frac{3z}{2}}-i\gamma_1\alpha_1^{21}e^{2iz} \\ &\quad +\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}+i\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{12}+\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right)e^{imz} \\ &\quad +\sum_{m=1}^{\infty}\left(\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{11}-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}\right)e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z} \\ &\quad +i\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\right. \\ &\quad \left.-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right)e^{i(m+1)z} \\ &\quad +\sum_{m=1}^{\infty}(\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22})e^{i\left(m+\frac{3}{2}\right)z} \\ &\quad +i\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\right)e^{i(m+2)z} \qquad (4.11) \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 4.1 F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının katına, (4.1), (4.2) sınır değer probleminin *özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı* denir.

Dolayısıyla (4.9) ve (4.10) dan görülür ki, (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini araştırmak için, F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sayısal özelliklerini incelemek gerekir. Bu sıfırlar için;

$$\begin{aligned} A_1 &: =\{z : z\in P_0,\ F(z)=0\}, \\ A_2 &: =\{z : z\in[0,4\pi],\ F(z)=0\}, \\ A_3 &: =\{A_1 \text{ kümesinin limit noktalarının kümesi}\}, \\ A_4 &: =\{F(z) \text{ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırlarının kümesi}\} \qquad (4.12) \end{aligned}$$

kümeleri tanımlansın. Dolayısıyla (4.9), (4.10) ve (4.12) den,

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \left\{\lambda:\lambda=2\sin\frac{z}{2},\ z\in A_1\right\}, \\ \sigma_{ss} &= \left\{\lambda:\lambda=2\sin\frac{z}{2},\ z\in A_2\right\} \qquad (4.13) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1 (4.3) koşulu altında;

(i) A_1 kümesi sınırlıdır ve sayılabilirdir.

(ii) $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ve $A_1 \cap A_4 = \varnothing$ olur.

(iii) A_2 kümesi kompakttır ve reel eksendeki Lebesgue ölçüsü μ olmak üzere $\mu(A_2) = 0$ olur.

(iv) $A_3 \subset A_2$, $A_4 \subset A_2$ ve $\mu(A_3) = \mu(A_4) = 0$ olur.

(v) $A_3 \subset A_4$ olur.

İspat. ***(i)*** (4.7) ve (4.11) kullanılarak

$$F(z) = \begin{cases} i\alpha_0^{11}\beta_1 + O(e^{-\frac{\tau}{2}}) & ;\ \beta_1 \neq 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \\ (\gamma_1\alpha_1^{22} + \alpha_0^{11}\beta_0)\, e^{i\frac{z}{2}} + O(e^{-\tau}); & \beta_1 = 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \end{cases}$$

olup bu asimptotik eşitlik ise F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğunu; yani A_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup Teorem 2.1 gereğince F fonksiyonunun P_0 daki sıfırları ayrıktır. Bu da A_1 kümesinin sayılabilir olduğunu gösterir.

(ii) F fonksiyonu P_0 da analitik olup Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince F fonksiyonunun, P_0 daki sıfırlarının limit noktaları ile P_0 daki sonsuz katlı sıfırları P_0 ın sınırında; yani $[0, 4\pi]$ aralığında olur. Dolayısıyla $A_1 \cap A_3 = \varnothing$ ve $A_1 \cap A_4 = \varnothing$ bulunur.

(iii) Her $z \in A_2$ için $z \in [0, 4\pi]$ olduğundan A_2 kümesi sınırlıdır. Bununla beraber, F fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olup A_2 kümesinin limit noktaları yine A_2 kümesinin içinde olur, yani A_2 kümesi kapalıdır. Dolayısıyla A_2 kompakttır. Ayrıca Teorem 2.4 gereğince $\mu(A_2) = 0$ olur.

(iv) F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan $F(z)$ nin P_0 daki sıfırlarının limit noktaları yine $F(z)$ nin sıfırı olup $[0, 4\pi]$ aralığına düşer. Yani, $A_3 \subset A_2$ olur. Ayrıca Teorem 2.3 gereğince $A_4 \subset A_2$ olduğu açık olup dolayısıyla da $\mu(A_3) = \mu(A_4) = 0$ bulunur.

(v) Keyfi $z_0 \in A_3$ alalım. Bu durumda $z_0 \neq z_n \in A_1$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

olur. $z_n \in A_1$ olduğundan $F(z_n) = 0$ olup ayrıca F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = F(z_0)$$

bulunur. Dolayısıyla $F(z_0) = 0$ olur; yani z_0, $F(z)$ fonksiyonunun sıfırıdır. Şimdi $z_0 \in A_4$; yani z_0 ifadesinin $F(z)$ fonksiyonunun sonsuz katlı sıfırı olduğu gösterilirse ispat biter. Tersine z_0, $F(z)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olsun. Bu durumda $\mathbb{C}_+$ da analitik $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli öyle bir h fonksiyonu vardır ki

$$F(z) = (z - z_0)^k h(z),\ \ h(z_0) \neq 0,\ \ 1 \leq k < \infty$$

sağlanır. Buradan görülür ki, tüm z_n ler h fonksiyonunun da sıfırıdır. Bu durumda

$$h(z) = \frac{F(z)}{(z - z_0)^k}$$

olup bu ise

$$h(z_n) = 0$$

olduğunu verir. Dolayısıyla h fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} h(z_n) \\ &= h(z_0) \end{aligned}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde $z_0 \in A_4$ olup $A_3 \subset A_4$ elde edilir. ■

(4.13) ve Teorem 4.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2 (4.3) koşulu altında;

(i) (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi sınırlıdır, sayılabilirdir ve limit noktaları $[-2, 2]$ aralığındadır.

(ii) $\sigma_{ss} \subset [-2, 2]$, $\sigma_{ss} = \overline{\sigma}_{ss}$ ve $\mu[\sigma_{ss}] = 0$ olur.

Şimdi, (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini incelemek için (4.3) koşulunda $\delta = 1$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ durumları göz önüne alınacaktır. Öncelikle $\delta = 1$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\varepsilon n) \left(|1 - a_n| + |1 + b_n| + |p_n| + |q_n|\right) < \infty \tag{4.14}$$

olur.

Teorem 4.3 (4.14) koşulu altında (4.1), (4.2) sınır değer problemi, sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir.

İspat. $C > 0$ bir sabit olmak üzere $i, j = 1, 2$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ için (4.7) eşitsizliğini kullanarak $k \geq n + \left[\left|\frac{m}{2}\right|\right] \geq \frac{1}{4}(n + m)$ durumu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\left|A_{nm}^{ij}\right| &\leq \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \left(|1 - a_k| + |1 + b_k| + |p_k| + |q_k|\right) \\
&= \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \exp(-\varepsilon k) \exp(\varepsilon k) \left(|1 - a_k| + |1 + b_k| + |p_k| + |q_k|\right) \\
&\leq C \exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n + m)] \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \exp(\varepsilon k) \left(|1 - a_k| + |1 + b_k| + |p_k| + |q_k|\right) \\
&\leq C \exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n + m)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $n \geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}^{ij} e^{imz}\right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|A_{nm}^{ij}\right| \left|e^{imz}\right| \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \exp[-\frac{\varepsilon}{4}(n + m)] \exp(-m \operatorname{Im} z) \\
&\leq C \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left[-m\left(\frac{\varepsilon}{4} + \operatorname{Im} z\right)\right]
\end{aligned}$$

olup $\frac{\varepsilon}{4} + \operatorname{Im} z > 0$ yani $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}^{ij} e^{imz}$ serisi, z ye göre bu bölgede düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla (4.11) den F fonksiyonu $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitiktir. Yani F fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$ dan $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesine analitik devama sahiptir. Bu durumda Teorem 2.2 den F fonksiyonunun P deki sıfırlarının limit noktaları $[0, 4\pi]$ aralığında olamaz. Bu nedenle de Teorem 4.1 gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sınırlı olup Bolzano-Weirstrass Teoremi gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sonlu sayıda elemana sahiptirler. Ayrıca F fonksiyonu $\operatorname{Im} z > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitik olduğundan, F fonksiyonunun P deki sıfırları sonlu katlıdır. O halde (3.22) den, (4.1), (4.2) sınır değer probleminin sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri olması sonucu elde edilir. ■

Görülmektedir ki (4.14) koşulu, F fonksiyonunun reel eksenden alt yarı düzleme analitik devamını sağlar. Dolayısıyla bu analitik devam sonucunda (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması sonucu elde edilir.

Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olmak üzere (4.14) koşulundan daha zayıf olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(\varepsilon n^{\delta}) \left(|1-a_n| + |1+b_n| + |p_n| + |q_n|\right) < \infty \tag{4.15}$$

koşulu gözönüne alınsın. (4.15) koşulu altında F fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik ve reel eksende sonsuz türevlenebilir olduğu açıktır. Fakat (4.15) koşulu altında F fonksiyonu, reel eksenden alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Bu yüzden (4.15) koşulu altında (4.1), (4.2) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu olması, Teorem 4.3 den farklı bir yolla gösterilmelidir. Bunun için ise Teorem 2.5 den faydanılacaktır. Burada, Teorem 2.5 e uygun olması amacıyla g fonksiyonu yerine 4π periyotlu F fonksiyonu ve G kümesi yerine $A_4 \subset [0, 4\pi]$ kümesi düşünülecek olup ayrıca bu teoremdeki η_k ifadesinin de belirlenmesi gerekecektir. Dolayısıyla $F(z)$ fonksiyonunun türevlerinin incelenmesi gerekmektedir. O halde (4.15) koşulu göz önüne alınsın. Buradan $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere (4.11) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \leq\ & \left(\frac{1}{2}\right)^k \left|\gamma_1 \alpha_1^{22} + \alpha_0^{11} \beta_0\right| + \left|-\gamma_0 \alpha_1^{22} + \gamma_1 \alpha_1^{22} - \alpha_0^{11} \beta_1\right| \\
& + \left(\frac{3}{2}\right)^k \left|\gamma_0 \alpha_1^{21} - \gamma_1 \alpha_1^{22}\right| + 2^k \left|\gamma_1 \alpha_1^{21}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right)^k \left|\alpha_0^{11} \beta_1 A_{0m}^{12}\right| \left|e^{i\left(m-\frac{1}{2}\right)z}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} m^k \left|-\alpha_0^{11} \beta_0 A_{0m}^{12} + \alpha_0^{11} \beta_1 A_{0m}^{11}\right| \left|e^{imz}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2}\right)^k \left|\gamma_1 \alpha_1^{21} A_{1m}^{12} + \gamma_1 \alpha_1^{22} A_{1m}^{22} + \alpha_0^{11} \beta_0 A_{0m}^{11}\right. \\
& \left. - \alpha_0^{11} \beta_1 A_{0m}^{12}\right| \left|e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)z}\right| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1)^k \left|-\gamma_0 \alpha_1^{21} A_{1m}^{12} - \gamma_0 \alpha_1^{22} A_{1m}^{22} + \gamma_1 \alpha_1^{21} A_{1m}^{11}\right. \\
& \left. + \gamma_1 \alpha_1^{22} A_{1m}^{21} - \alpha_0^{11} \beta_1 A_{0m}^{11}\right| \left|e^{i(m+1)z}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left(m+\frac{3}{2}\right)^{k}\left|\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}\right.\\
&\left.-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}\right|\left|e^{i\left(m+\frac{3}{2}\right)z}\right|\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}(m+2)^{k}\left|-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\ \right|\left|e^{i(m+2)z}\right|
\end{aligned}
$$

olup $m\geq 1$ için $2m\geq 2$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| \;\leq\;& 4^{k}\left(\left|\gamma_1\alpha_1^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0\right|+\left|-\gamma_0\alpha_1^{22}+\gamma_1\alpha_1^{22}-\alpha_0^{11}\beta_1\right|+\left|\gamma_0\alpha_1^{21}-\gamma_1\alpha_1^{22}\right|\right.\\
&\left.+\left|\gamma_1\alpha_1^{21}\right|\right)+4^{k}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left|\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}\right|+\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{12}+\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right|\right.\right.\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left|\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\alpha_0^{11}\beta_0A_{0m}^{11}-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{12}\right|\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}+\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\alpha_0^{11}\beta_1A_{0m}^{11}\right|\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left|\gamma_0\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}+\gamma_0\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{12}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{22}\right|\\
&\left.\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\left|-\gamma_1\alpha_1^{21}A_{1m}^{11}-\gamma_1\alpha_1^{22}A_{1m}^{21}\ \right|\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

bulunur. Ayrıca $n\geq 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
k &\geq n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]\\
&\geq \frac{m}{4}
\end{aligned}
$$

ve buradan $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ olmak üzere

$$
-k^{\delta}\leq-\frac{m^{\delta}}{4}
$$

olup (4.7) eşitsizliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left|A_{nm}^{ij}\right| &\leq \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}\exp(-\varepsilon k^{\delta})\exp(\varepsilon k^{\delta})\left(|1-a_k|+|1+b_k|+|p_k|+|q_k|\right)\\
&\leq C\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4}(m^{\delta})\right]
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.16) ve (4.17) den,

$$
\left|F^{(k)}(z)\right|\leq C4^{k}+C4^{k}\sum_{m=1}^{\infty}m^{k}e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^{\delta}}
\tag{4.18}
$$

bulunur. Burada

$$D_k = C4^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^\delta}$$

olsun. Literatürde, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{m=1}^{n} G\left(a + m\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b G(t)dt$$

durumunun sağlandığı bilinmektedir. O zaman $a = 0$, $b = n$ ve $G(t) = t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^\delta}$ için

$$\begin{aligned} D_k &= C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}m^\delta} \\ &= C4^k \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} G(m) \\ &= C4^k \int_0^n t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^\delta} dt \\ &\leq C4^k \int_0^\infty t^k e^{-\frac{\varepsilon}{4}t^\delta} dt \end{aligned}$$

olup $y = \frac{\varepsilon}{4}t^\delta$ dönüşümü yapılarak,

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{4y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}, \\ dt &= \frac{1}{\delta}\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} y^{\frac{1}{\delta}-1} \end{aligned}$$

olduğundan

$$D_k \leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta} \int_0^\infty y^{\frac{k+1}{\delta}-1} e^{-y} dy \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) eşitsizliğinde, $a = \frac{k+1}{\delta} - 1$ için $a > 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-y} dy$$

Gamma fonksiyonu olmak üzere $\Gamma(a+1) = a!$ olduğundan

$$\begin{aligned} D_k &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\Gamma(a+1) \\ &= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a! \\ &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}a^a \\ &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}(a+1)^a \\ &= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} \frac{1}{\delta}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{\delta}-1} \\ &= C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1}\left[\frac{1}{\delta}(k+1)\right]^{\frac{k+1}{\delta}} \end{aligned}$$

olur. Burada $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ olmak üzere $2 \geq \frac{1}{\delta}$ için

$$\begin{aligned} D_k &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} 2^{\frac{1}{\delta}(k+1)}(k+1)^{-1}(k+1)^{\frac{k+1}{\delta}} \\ &\leq C4^k \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1}2^{2(k+1)}(k+1)^{\frac{k}{\delta}}(k+1)^{\frac{1}{\delta}} \\ &= C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}-1}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \end{aligned}$$

olup literatürdeki

$$(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} < e^{\frac{k}{\delta}}$$

eşitsizliği kullanılarak

$$D_k \leq C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}(k+1)^{\frac{k}{\delta}} \tag{4.20}$$

yazılabilir. Yine literatürdeki

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

eşitsizliğinden

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}$$

olup

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < k^{\frac{k}{\delta}}e^{\frac{1}{\delta}} \tag{4.21}$$

durumu elde edilir. Ayrıca

$$k^k < k!e^k$$

olduğundan

$$k^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}$$

olup (4.21) den,

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

bulunur. O halde son eşitsizlik (4.20) de göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
D_k &\leq C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}} \\
&= C4^{2k+1} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{2k+1}{\delta}} k! \, (k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&= 4Ce^{\frac{1}{\delta}} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}} \left[16e^{\frac{2}{\delta}} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^k k! \, (k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&= Dd^k k! \, (k!)^{\frac{1}{\delta}-1} \\
&\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}
\end{aligned}$$

olup $k \geq 1$ için $k!k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \geq 1$ durumu da göz önünde bulundurulursa (4.18) den,

$$\begin{aligned}
\left|F^{(k)}(z)\right| &\leq C4^k + Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\
&\leq C4^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} + Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \\
&\leq Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $D > 0$ ve $d > 0$ ifadeleri C, ε ve δ ifadelerine bağlıdır. Dolayısıyla Teorem 2.5 teki η_k ifadesi için,

$$\eta_k = Dd^k k! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)}$$

düşünülecektir.

Teorem 4.4 (4.15) sağlandığı taktirde $A_4 = \varnothing$ olur.

İspat. F fonksiyonu özdeş olarak sıfır değildir. Dolayısıyla Teorem 2.5 gereğince,

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\begin{aligned} t(s) &= \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!} \\ &= \inf_k \frac{Dk! k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k}{k!} \\ &= D \inf_k \left[k^{k\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^k \right] \end{aligned}$$

olmak üzere Teorem 2.5 teki integralin aralığı $\omega > 0$ için $[0, \omega)$ olarak alınırsa

$$\int_0^{\omega} \ln t(s) d\mu(A_{4,s}) > -\infty \tag{4.23}$$

bulunur. Burada $t(s)$ fonksiyonuna paralel olarak $x \in [0, \infty)$ için

$$h(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \tag{4.24}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $t(s)$ fonksiyonunun açıkça yazılabilmesi için $h(x)$ fonksiyonunun minimumunun bulunması yeterlidir. Bunun için öncelikle $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları bulunmalıdır. (4.24) ten,

$$\ln h(x) = x \ln \left(ds x^{\frac{1}{\delta}-1} \right)$$

olup

$$\begin{aligned} \frac{h'(x)}{h(x)} &= \ln \left(ds x^{\frac{1}{\delta}-1} \right) + \frac{x(\frac{1}{\delta}-1) ds x^{\frac{1}{\delta}-2}}{ds x^{\frac{1}{\delta}-1}} \\ &= \frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(ds x^{\frac{1}{\delta}-1} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$h'(x) = x^{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right)} (ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(ds x^{\frac{1}{\delta}-1} \right) \right]$$

şeklindedir. O halde $h'(x_0) = 0$ için

$$\frac{1}{\delta} - 1 + \ln \left(ds x_0^{\frac{1}{\delta}-1} \right) = 0$$

bulunup

$$\ln \left(ds x_0^{\frac{1}{\delta}-1} \right) = \frac{\delta - 1}{\delta}$$

yazılır. Buradan

$$e^{\frac{\delta-1}{\delta}} (ds)^{-1} = x_0^{\frac{1-\delta}{\delta}}$$

olup $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktası

$$x_0 = e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} h''(x) &= x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \frac{(\frac{1}{\delta}-1)dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}} \\ &= x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x \left\{\left[\frac{1}{\delta} - 1 + \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2 + (\frac{1}{\delta}-1)x^{-1}\right\} \end{aligned}$$

olup $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ için $\frac{1}{\delta} > 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} h''(x_0) &= e^{(1-\frac{1}{\delta})e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \left[(\frac{1}{\delta}-1)e(ds)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani x_0, $h(x)$ fonksiyonunun minimum noktasıdır. O halde

$$\begin{aligned} \min_{x\in[0,\infty)} h(x) &= h(x_0) \\ &= \left[e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} (ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right)(ds)^{-e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}(ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}} \\ &= \exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$t(s) = D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right) \tag{4.25}$$

olur. O halde (4.23) ve (4.25) ten,

$$\int_0^\omega \ln\left[D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(A_{4,s}) > -\infty$$

olup ayrıca Teorem 4.1 de $\mu(A_4)=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\infty &> -\int\limits_0^\omega \left[\ln D+\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\ln D\int\limits_0^\omega d\mu(A_{4,s})+\int\limits_0^\omega \frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\ln D\left[\mu(A_{4,\omega})-\mu(A_4)\right]+\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int\limits_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&= -\mu(A_{4,\omega})\ln D+\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int\limits_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum ise

$$\int\limits_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s})<\infty \tag{4.26}$$

olmasını gerektirir. Fakat burada $\frac{\delta}{1-\delta}\geq 1$ olduğundan (4.26) koşulu ancak $A_4=\varnothing$ olduğunda,yani $\mu(A_{4,s})=0$ olduğunda sağlanır. Gerçekten; eğer $A_4\neq\varnothing$ olsaydı

$$\mu(A_{4,s})\geq 2s$$

ve buradan da

$$d\mu(A_{4,s})\geq 2ds$$

olurdu. Dolayısıyla $1-\frac{\delta}{1-\delta}<0$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
\infty &> \int\limits_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(A_{4,s}) \\
&\geq 2\int\limits_0^\omega s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}ds \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)s^{1-\frac{\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta}\right|_0^\omega \\
&= \left.\frac{2(1-\delta)}{(1-2\delta)s^{\frac{\delta}{1-\delta}-1}}\right|_0^\omega
\end{aligned}$$

olur. Fakat bu durum ise bir çelişkidir. Yani, $A_4=\varnothing$ dir. ■

Teorem 4.5 (4.15) koşulu altında (4.1), (4.2) sınır değer problemi, sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir.

İspat. (4.9) ve (4.10) gereğince teoremin ispatı için, (4.15) koşulu altında F fonksiyonunun P bölgesinde sonlu sayıda sonlu katlı sıfırlara sahip olduğu gösterilmesi yeterlidir. Teorem 4.1 ve Teorem 4.5 gereğince $A_3 = \varnothing$ olur. Dolayısıyla A_1 ve A_2 sınırlı kümeleri bir limit noktasına sahip değillerdir. Bu yüzden Bolzano-Weirstrass Teoremi gereğince A_1 ve A_2 kümeleri sonlu olmalıdır, yani F fonksiyonu P bölgesinde sonlu sayıda sıfıra sahiptir. Ayrıca Teorem 4.5 gereğince $A_4 = \varnothing$ olduğundan F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırları sonlu katlıdır. ■

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl. 261; 461-478.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities. J. Math. Anal. Appl. 277; 714-721.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006a. Spectral analysis of q-difference equations with spectral singularities. Math. Comput. Modelling 43 (7-9); 695-703.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006b. Spectrum and principal vectors of second order q-difference equations. Indian J. Math. 48 (1); 17-33.

Agarwal, R.P. and Wong, P.J.Y. 1997. Advanced Topics in Difference Equations. Kluwer, Dordrecht.

Agarwal, R.P. 2000. Difference equation and inequalities. Theory, Methods and Applications. Marcel Dekkar Inc., New York, Basel.

Agarwal, R.P., Perera, K. and O'Regan, D. 2004. Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods. Nonlinear Analysis 58; 69-73.

Agarwal, R.P., Perera, K. and O'Regan, D. 2005. Multiple positive solutions of singular discrete p-Laplasian problems via variational methods. Advances in Difference Equations, 2005:2; 93-99.

Akbulut, A., Adıvar, M. and Bairamov, E. 2005. On the spectrum of the difference equations of second order. Publ. Math. Debrecen 67/3-4; 253-263.

Akhiezer, N.I. 1965. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis, New York.

Bairamov, E. and Celebi, A.O. 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 50; 371-384.

Bairamov, E., Cakar, O. and Krall, A.M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi matrices with spectral singularities. Math. Nachr. 229; 5-14.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2004. Jost solutions and the spectrum of the system of difference equations. Appl. Math. Lett. 17; 1039-1045.

Bairamov, E. and Coskun, C. 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations. Appl. Math. Lett. 18; 387-394.

Balcı, M. 1999. Matematik Analiz 1. Balcı Yayınları, Ankara.

Berezanski, Y.M. 1985. Integration of nonlinear difference equations by the inverse spectral problem method. Soviet Math. Dokl. 31; 264-267.

Dolzhenko, E.P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. Math. Notes 26 (6); 437-442.

Guseinov, G.S. 1976a. The determination of an infinite Jacobi Matrix from the scattering date. Sov. Math. Dokl. 17; 596-600.

Guseinov, G.S. 1976b. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation on the whole axis. Sov. Math. Dokl. 17; 1684-1688.

Kelley, W.G. and Peterson, A.C. 2001. Difference Equations. An Introduction with Applications. Harcourt Academic Press.

Krall, A.M., Bairamov, E. and Cakar, O. 2001. Spectral analysis of non-selfadjoint discrete Schrödinger operator with spectral singularities. Math. Nachr. 231; 89-104.

Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S. 1975. Introduction to Spectral Theory. Translations of Mathematical Monographs, 39.

Lusternik, L.A. and Sobolev, V.J. 1974. Elements of functional analysis. Translation of elementy funktsional'nogo analiza.

Lyance, V.E. 1967. A differential operator with spectral singularities. I, II, AMS Transl. 2 (60); 185-225, 227-283.

Naimark, M.A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS Transl. 2 (16); 103-193.

Naimark, M.A. 1968. Linear Differential Operators. II, Ungar, New York.

Pavlov, B.S. 1975. On seperation conditions for spectral components of a dissipative operator. Math. USSR Izvestiya. 9; 113-137.

Toda, M. 1981. Theory of Nonlinear Lattices. Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Turhan KÖPRÜBAŞI

Doğum Yeri **:** Üsküdar

Doğum Tarihi: 02/05/1983

Medeni Hali **:** Bekar

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise **:** Mehmet Emin Resulzade Anadolu Lisesi (2000)

Lisans **:** Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2004)

Yüksek Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2006)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Halkbank-Mali Tahlil Asistanı (2009)

Ankara Üniversitesi Kalecik Meslek Yüksek Okulu-Okutman (2009)

Yayınları:

Bairamov, E. and **Koprubasi, T.** 2010. Eigenparameter dependent discrete Dirac equations with spectral singularities. Appl. Math. and Comp. 215; 4216-4220.

Bairamov, E., Aygar Y., **Koprubasi T.** Spectrum of the eigenparameter dependent discrete Sturm-Liouville equations. J. Comp. and Appl. Math. (Yayın Aşamasında)