T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL OPERATÖRLER TEORİSİNDE DUHAMEL ÇARPIMININ BAZI UYGULAMALARI

Yasemin ÖZEL

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2011

TEZ ONAYI

Yasemin ÖZEL tarafından hazırlanan "**İntegral Operatörler Teorisinde Duhamel Çarpımının Bazı Uygulamaları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Süleyman Demirel Üniversitesi **Matematik** Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Suna SALTAN
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

S. Saltan

Jüri Üyeleri :
Prof. Dr. Necdet BİLDİK
Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Necdet Bildik

Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

M. Gürdal

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

. **Sayfa**

İÇİNDEKİLER........ i
ÖZET........ ii
ABSTRACT........ iii
TEŞEKKÜR........ iv
SİMGELER DİZİNİ........ v
1. GİRİŞ........ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR........ 4
2.1. Bazı Uzay ve Operatörler ile ilgili Temel Kavramlar........ 4
2.2. Analitik Fonksiyonlar ile ilgili Temel Özellikler........ 9
3. ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYLARINDA $\mathcal{J}_\alpha$ İNTEGRAL........
OPERATÖRÜNÜN KOMUTANTI........ 12
3.1.$\mathcal{A}(\mathcal{D})$ Uzayının İzomorfizmleri........ 19
4. $\mathbf{W}_{zw}$ İKİ KATLI İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN KOMUTANTI ve ....
DEVİRLİ VEKTÖRLERİ........ 23
5. E_{zw} BANACH CEBİRİNİN MAKSİMAL İDEALLER UZAYI........ 38
6. KAYNAKLAR........ 46
EKLER........ 49
ÖZGEÇMİŞ........ 50

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRAL OPERATÖRLER TEORİSİNDE DUHAMEL ÇARPIMININ BAZI UYGULAMALARI

Yasemin ÖZEL

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun literatürdeki yerinin belirlenmesi amacıyla literatür özeti verilmiş ve konunun amacı açıklanmıştır. İkinci bölümde, operatörler teorisinde ve analitik fonksiyonlar uzayında bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ analitik fonksiyonlar uzayında $\mathcal{J}_\alpha$ integral operatörünün komutantı incelenmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümde ise, iki değişkenli fonksiyonlar için Duhamel çarpımı ifade edilmiştir. $C_A^{(n)}(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ uzayının zw çarpanlarından oluşan E_{zw} invaryant altuzayının Duhamel çarpımı ile birlikte Banach cebiri olduğu gösterilmiştir. Daha sonra E_{zw} altuzayına kısıtlanmış olan W_{zw} iki katlı integral operatörünün komutantı ve devirli vektörleri incelenmiştir. Ayrıca $f \in E_{zw}$ fonksiyonunun Duhamel çarpımına göre terse sahip olması için gerekli ve yeterli koşul araştırılmış ve $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinin maksimal idealler uzayı ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Duhamel çarpımı, Komutant, İki katlı integral operatörü, Devirli vektör, Maksimal ideal

2011, 50 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME APPLICATIONS OF THE DUHAMEL PRODUCT ON INTEGRAL OPERATORS THEORY

Yasemin ÖZEL

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Suna SALTAN

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the summary of literature is given in order to determine the place in the literature of the subject and the aim of thesis is explained. In the second chapter, certain definitions and main theorems related to operator theory and analytic functions space are introduced. In the third chapter, commutant of $\mathcal{J}_\alpha$ integration operator is studied in $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ analytic functions space. In the fourth and fifth chapters, Duhamel product is described for two variables functions. It is denoted that E_{zw} invariant subspace made up of multipliers of zw in $C_A^{(n)}(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$ is a Banach algebra with respect to Duhamel product. Commutant and cyclic vectors of double integration operator W_{zw} which is restricted to the subspace E_{zw} are studied. The necessary and sufficient conditions for which $f\in E_{zw}$ is invertible with respect to Duhamel product are also investigated and maximal ideals space of $(E_{zw},\circledast)$ is defined.

Key Words: Duhamel product, Commutant, Double integration operator, Cyclic vector, Maximal ideal.

2011, 50 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren ve çalışmamın her aşamasında ilgi ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

2236-YL-10 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Yasemin ÖZEL

ISPARTA, 2011

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{D}$	:	Birim disk
$\circledast$	:	Duhamel çarpımı
$\mathcal{A}(\mathbb{D})$	:	Birim disk üzerindeki analitik fonksiyonlar uzayı
$\widehat{f}$	:	f nin Taylor katsayısı
X	:	Banach uzayı
$\mathcal{L}(X)$	:	X deki tüm sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathcal{J}$	:	Volterra integral operatörü
D_f	:	Duhamel operatörü
$Hol(\mathbb{D})$	:	Holomorfik fonksiyonlar uzayı
$*$	:	Konvolüsyon çarpımı
$D_{\varphi,\alpha}$	:	α-Duhamel operatörü
$\mathcal{J}_\alpha$	:	Integral operatörü
$\{\mathcal{J}_\alpha\}'$	:	$\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün komutantı
W	:	İki katlı integral operatörü
$\{W_{zw}\}'$	:	W_{zw} operatörünün komutantı
$p(x)$	:	X üzerindeki yarı norm
$\underset{\alpha}{\circledast}$	:	α-Duhamel çarpımı
$A(\mathcal{D})$	:	Yıldız şekilli $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{K}_{\frac{\partial^2}{\partial z \partial w}}$	:	Konvolüsyon operatörü
$\ker D_\varphi$	:	D_φ operatörünün çekirdeği
$Cyc(W_{zw})$	:	W_{zw} operatörünün devirli vektörleri
$\mathcal{M}((E_{zw},\circledast))$	:	$(E_{zw},\circledast)$ cebirinin maksimal idealler uzayı

1. GİRİŞ

Operatör kalkülüsü ve integral dönüşüm teorilerinin tarihi asırlara dayanmaktadır. Matematik, fizik ve elektrik mühendisliği alanlarındaki problemlere uygulanması sebebiyle de sürekli olarak gelişimi söz konusudur. Operatör kalkülüsü, analizdeki problemleri özellikle de diferensiyel denklemleri çözümü çok daha kolay olan cebirsel problemlere dönüştüren bir tekniktir. Gottfried Leibnitz'e kadar birkaç operatör metodu geliştirilmiştir. Bu metodlardan adi ve kısmi türevli denklemlere uygulanan operatör metodu, 1893 yılında elektromanyetik teorinin öncüsü fizikçi Oliver Heaviside tarafından elektromanyetizm hakkındaki eseri ile bağlantılı olarak olgunlaştırılmıştır.

1930 larda cebirsel mantık kullanılarak Polonyalı Matematikçi Jan Mikusinski tarafından operatör kalkülüse farklı bir yaklaşım geliştirilmiştir. Mikusinski tarafından ifade edilen

$$(f * g)(z) = \int_0^z f(z-t)g(t)dt$$

konvolüsyon çarpımı, operatör kalkülüsünün problemlerinde ve uygulamalarında önemli yer tutar (Mikusinski, 1956). Konvolüsyon çarpımı Heaviside'ın operatör kalkülüsüne direkt bir yaklaşımdır. Böylece Volterra integral operatörü

$$\mathcal{J}f(z) = \int_0^z f(t)dt$$

ile konvolüsyon çarpımı arasındaki

$$\mathcal{J}f = 1 * f$$

bağıntısı, yani $\mathcal{J}$ nin $\{1\}$ in konvolüsyon operatörü olması çeşitli fonksiyon uzaylarında Volterra integral operatörünün komutantlarının ifade edilmesini sağlar (Dimovski, 1990).

Mikusinski'nin konvolüsyon çarpımının türevi olarak tanımlanan Duhamel çarpımı

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)dt + f(0)g(z)$$

şeklinde ifade edilir (Wigley, 1974).

Duhamel çarpımı analizin çeşitli problemlerinde birçok uygulamaya sahiptir. Örneğin, adi diferensiyel denklemler teorisinde, matematiksel fiziğin sınır değer problemlerinde (Wigley, 1974), Mikusinski'nin operatör hesabında önemli rol oynar (Mikusinski, 1956).

Wigley, analitik fonksiyonların Duhamel çarpımını kullanarak $\mathbb{D}$ birim diskindeki tek değerli analitik fonksiyonların uzayının Duhamel çarpımı ile birlikte cebir olduğunu göstermiştir (Wigley, 1974). Yine aynı çalışmada matematiksel fiziğin bir sınır değer probleminin çözümlerinin Duhamel çarpımı ile üretildiğini incelemiştir (Wigley, 1974).

$p \geq 1$ olmak üzere $H^p(\mathbb{D})$ Hardy uzayının (Wigley, 1975 ve Koosis, 1988) ve $H^p(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ uzayının (Merryfield ve Watson, 1991) Banach cebiri yapısı belirttiği ve bazı özellikleri Duhamel çarpımı kullanılarak ifade edilmiştir.

Nagnibida, $z_0 = \alpha$ noktasına göre yıldız şekilli $\mathcal{D}$ bölgesindeki analitik fonksiyonların uzayında

$$\mathcal{J}_\alpha f(z) = \int_\alpha^z f(t)dt$$

integral operatörünün komutantını belirlemiş ve bu uzaydaki Duhamel çarpımını,

$$(f \underset{\alpha}{\circledast} g)(z) = \frac{d}{dz}\int_\alpha^z f(z+\alpha-t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu ifade α-Duhamel çarpımı olarak da isimlendirilir. Böylece, $\mathcal{J}_\alpha$ integral operatörünün komutantı α-Duhamel çarpımı ile ifade edilebilmiştir (Nagnibida, 1981).

$\alpha = 0$ olması durumunda Duhamel çarpımını kullanarak Tkachenko (1979) ve Nagnibida (1984) nın yaptığı çalışmalar Duhamel çarpımı uygulamalarına örneklerdir. Duhamel çarpımının çeşitli uygulamaları Karaev ve Tuna (2004), Karaev (2005a, 2005b, 2005c), Karaev ve Saltan (2005), Karaev (2006a, 2006b), Gürdal (2009a, 2009b) ın çalışmalarında yer almaktadır.

Bu tez çalışmasında, $f(z,w)$ iki değişkenli holomorfik fonksiyonları için verilen

$$(f \circledast g)(z,w) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w f(z-u, w-v) g(u,v) dv du$$

Duhamel çarpımı tanımı kullanılarak $C_A^{(n)} = C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ uzayının $E_{zw} = \left\{ f \in C_A^{(n)} : f(z,w) = f(zw) \right\}$ invaryant altuzayında

$$Wf(z,w) = \int_0^z \int_0^w f(u,v) dv du$$

iki değişkenli integral operatörünün komutantı ve devirli vektörleri incelenmiştir. Quasinilpotent operatör tekniği ile $f \in E_{zw}$ fonksiyonunun tersinebilir olma koşulu verilmiş ve bu koşul gözönünde bulundurularak E_{zw} uzayının maksimal idealleri belirlenmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde elde edilen sonuçlar orjinal niteliktedir.

Dördüncü bölüm Saltan S. ve Özel Y. tarafından "International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava on his 70th Birth Anniversary, 18-21 August, 2010 Bursa" isimli uluslararası toplantıda özet metin olarak sunulmuştur. Daha sonra makale haline getirilen bu sonuçlar, SCI tarafından taranan Journal Function Spaces and Applications isimli dergide yayımlanmak üzere kabul edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Bazı Uzay ve Operatörler ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. X ve Y iki vektör uzayları olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $f, g \in X$ için

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

eşitliği sağlanıyorsa T operatörüne *lineer operatör* denir (Dunford ve Schwartz, 1966).

Teorem 2.1.2. X ve Y normlu uzaylar ve $\mathcal{D}(T) \subset X$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul T nin sürekli olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.3. X ve Y normlu lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Her sınırlı $M \subset X$ kümesi için $\overline{T(M)}$ kompakt ise T operatörüne *kompakt operatör* denir (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.4. X sonsuz boyutlu normlu bir uzay olsun. Bu uzayda T kompakt bir operatör ise tersinebilir değildir (Rynne and Youngson, 2000).

Tanım 2.1.5. $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. T altında Y nin sıfır elemanına dönüşen elemanların kümesine T nin *çekirdeği* veya *sıfır uzayı* denir ve $KerT$ ile gösterilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.6. X normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. $Y \subset X$ olmak üzere $T(Y) \subset Y$ ise Y altuzayına T nin *invaryant altuzayı* denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.7. X normlu uzay ve T, X üzerinde bir operatör olsun. $A : X \to X$ sürekli lineer operatör olmak üzere,

$$\{T\}' = \{A : AT = TA\}$$

kümesine T *operatörünün komutantı* denir (Conway, 2000).

Tanım 2.1.8. X lineer bir uzay ve $S \subset X$ olsun. S yi içeren tüm altuzayların arakesitine *S nin lineer hulu (veya S nin gereni)* denir ve $lin.hull(S)$ ile gösterilir (Maddox 1970).

Tanım 2.1.9. X bir Banach uzayı ve $T : X \to X$ sınırlı bir operatör olsun. $x \in X$ olmak üzere $span\{x, Tx, T^2x, T^3x, ...\} = X$ ise x e T nin *devirli vektörü* denir ve $x \in Cyc(T)$ ile gösterilir (Abramovich and Aliprantis, 2002).

Tanım 2.1.10. X normlu lineer uzay ve $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

ise T operatörüne *quasi-nilpotent operatör* denir (Abramovich and Aliprantis, 2002).

Tanım 2.1.11. X, K cismi (K=$\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerinde bir vektör uzay olsun. $p : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için,

$i)$ $p(x) \geq 0$

$ii)$ $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$

$iii)$ $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

koşullarını sağlarsa p dönüşümüne X üzerinde *yarı norm* denir ve bu yarı norma göre X uzayına *yarı normlu uzay* denir (Yosida, 1980).

Tanım 2.1.12. X yarı normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsıyor ise, yani X tam uzay ise, X yarı normlu uzayına *Frechet uzayı* denir (Yosida, 1980).

Teorem 2.1.13. X ve Y lokal konveks uzaylar olmak üzere, $\{p\}$ ve $\{q\}$, X ve Y nin topolojilerini üreten yarı norm sistemleri olsun. $T : D(T) \subseteq X \to Y$ lineer operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $x \in D(T)$ ve her $q \in \{q\}$ yarı normu için,

$$q(Tx) \leq \beta p(x)$$

olacak şekilde bir $p \in \{p\}$ yarı normu ve pozitif bir β sayısının var olmasıdır (Yosida, 1980).

Tanım 2.1.14. X normlu vektör uzayı olmak üzere X uzayı tam yani X de alınan her Cauchy dizisi yakınsak ve yakınsadığı değer X in bir elemanı ise X uzayına *Banach uzayı* denir (Kreyszig, 1989).

Teorem 2.1.15. X Banach uzayının bir Y altuzayının tam olması için gerek ve yeter koşul Y nin X de kapalı bir küme olmasıdır (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.16. A kompleks (veya reel) vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in A$ ve her α kompleks (veya reel) sayısı için A üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir çarpma işlemi varsa bu uzaya *kompleks (reel) cebir* denir.

i) $\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$

ii) $x.(y + z) = x.y + x.z$ ve $(x + y).z = x.z + y.z$

ii) $x.(y.z) = (x.y).z$

Eğer A bir cebir ve her $x, y \in A$ için $x.y = y.x$ oluyorsa, A ya *değişmeli* veya *komütatif* cebir denir. A nın çarpma işlemine göre etkisiz elemanı varsa, yani her $x \in A$ için

$$x.e = e.x = x$$

olacak şekilde $e \in A$ varsa A ya *birim*li *cebir* ve e ye de *A nın birim elemanı (etkisiz elemanı)* denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.17. A cebiri üzerinde tanımlanan norm her $x, y \in A$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ve A cebirinin birim elemanlı olması halinde de,

$$\|e\| = 1$$

ise A ya *normlu cebir* denir.

$(A, \|.\|)$ normlu cebiri tam ise bu normlu cebire *Banach cebiri* denir (Rudin, 1991).

Tanım 2.1.18. A değişmeli bir Banach cebiri ve I, A nın lineer alt uzayı olsun.

Her $x \in A$ için $xI \subset I$ ise I ya A nın *ideali* denir (Meise and Vogt, 1997).

Tanım 2.1.19. A değişmeli bir Banach cebiri olsun. A nın hiçbir ideali tarafından içerilmeyen ve A cebirinden farklı olan I idealine *maksimal ideal* denir (Meise and Vogt, 1997).

Tanım 2.1.20. A reel veya kompleks bir cebir olsun. $T : A \to A$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x, y \in A$ için,

$$T(xy) = T(x)T(y)$$

eşitliği sağlanıyor ise T ye *homomorfizm* denir. T homomorfizmi birebir ve örten ise T ye izomorfizm denir (Rudin, 1991).

Teorem 2.1.21. A değişmeli bir Banach cebiri ve Δ, A nın bütün kompleks homomorfizmlerinin kümesi olsun.
a) A nın her maksimal ideali bir $h \in \Delta$ homomorfizminin çekirdeğidir.
b) $h \in \Delta$ ise $\ker h$ A nın maksimal idealidir.
c) $x \in A$ elemanının tersinebilir olması için gerek ve yeter koşul her $h \in \Delta$ için $h(x) \neq 0$ olmasıdır.
d) $x \in A$ elemanının tersinebilir olması için gerek ve yeter koşul x in, A nın hiçbir idealinde bulunmamasıdır.
e) $\lambda \in \sigma(x)$ olması için gerek ve yeter koşul $h \in \Delta$ için $h(x) = \lambda$ olmasıdır (Rudin, 1987).

Teorem 2.1.22. A değişmeli ve birimli Banach cebiri ve $x \in A$ olsun. $h : A \to \mathbb{C}$ bir homomorfizm olmak üzere x in spektrumu $\sigma(x) = \{h(x) : h \in \Delta\}$ dir (Lax, 2002).

Tanım 2.1.23. A değişmeli ve birimli Banach cebiri olsun. A cebirinin bütün maksimal ideallerinin kesişimine *A nın radikali* denir. Diğer bir deyişle *radikal* quasinilpotent elemanların birleşimidir. Eğer $radA = A$ ise A cebirine *radikal Banach cebiri* denir (Hille ve Phillips, 1957).

Tanım 2.1.24. Değişmeli bir A Banach cebirinin bütün kompleks homomorfizmlerinin kümesi Δ olsun. Her $x \in A$ için $\hat{x}(h) = h(x)$ $(h \in \Delta)$ olmak üzere

$$\hat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$$

dönüşümüne *Gelfand dönüşümü* denir (Rudin 1991).

Teorem 2.1.25. Değişmeli bir A Banach cebirinin maksimal ideal uzayı Δ olsun. Her $x \in A$ için $\hat{x}$ nın görüntüsü $\sigma(x)$ dir (Rudin 1991).

Tanım 2.1.26. A Banach cebiri ve $x \in A$ olsun.

$$r(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

sayısına x in *spektral yarıçapı* denir (Rudin 1991).

Teorem 2.1.27. A Banach cebiri ve $x \in A$ ise $r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ dir (Rudin 1991).

Teorem 2.1.28. **(Polinomlar için Spektral Dönüşüm Teoremi)** X kompleks bir Banach uzayı olmak üzere T sınırlı lineer bir operatör ve

$$p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0 \qquad\qquad (a_n \neq 0)$$

olsun. Bu durumda

$$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$$

dir. Yani

$$p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0I$$

operatörünün spektrumu olan $\sigma(p(T))$, p polinomunun yalnızca T nin $\sigma(T)$ spektrumu üzerinde aldığı değerlerden oluşur.

Teorem 2.1.29. **(Weierstrass Yaklaşım Teoremi)** $f(x)$, $[a, b]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsayan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır. Diğer bir deyişle keyfi

$f \in C[a,b]$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $p(x) \in P_n(x)$ mevcuttur (Stoll 2000).

Teorem 2.1.30. (Fredholm Alternatif Teoremi) T kompakt operatör ve $\lambda \neq 0$ olsun. $(T - \lambda I)x = 0$ denklemi yalnız $x = 0$ noktasında bir tek çözüme sahipse (yani $\ker(T - \lambda I) = \{0\}$ ise) $T - \lambda I$ tersinebilirdir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

2.2. Analitik Fonksiyonlar ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ olsun. $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$ olmak üzere $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap A_1 \neq \varnothing$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \cap A_2 \neq \varnothing$ ve $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ içinde ayrık ve açık A_1 ve A_2 kümeleri bulunamıyor ise $\mathcal{D}$ kümesine *bağlantılı küme* denir (Rudin, 1987).

Tanım 2.2.2. Bağlantılı açık kümeye *bölge* denir (Rudin, 1987).

Tanım 2.2.3. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ açık bir küme olsun. Bir $z_0 \in \mathcal{D}$ noktası için, her $z \in \mathcal{D}$ noktasını z_0 a birleştiren doğru parçası $\mathcal{D}$ de bulunuyor, yani her $z \in \mathcal{D}$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $\lambda z + (1 - \lambda) z_0 \in \mathcal{D}$ ise, $\mathcal{D}$ ye z_0 *noktasına göre yıldız şekilli bölge* denir (Wigley, 1974).

Tanım 2.2.4. $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. O halde f kompleks fonksiyonu z_0 noktasının bir

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

komşuluğunun bütün noktalarında türevlenebilir ise f, z_0 *noktasında analitiktir* denir.

Başka bir deyişle, f fonksiyonu z_0 noktasının her $D(z_0, r)$ komşuluğunda yakınsak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ Taylor serisine sahip ise f, z_0 *noktasında analitiktir* denir. Eğer f kompleks fonksiyonu bir S bölgesinin bütün noktalarında analitik ise f fonksiyonuna *S kümesi üzerinde analitiktir* denir. f kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise f fonksiyonuna *tam fonksiyon* denir (Rudin, 1987).

Teorem 2.2.5. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise fonksiyonun her mertebeden türevi de o noktada analitiktir (Rudin, 1987).

Teorem 2.2.6. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. z_0 noktasının komşuluğundaki z ler için f fonksiyonu

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Taylor açılımına sahiptir. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0,r)$ diski üzerinde mutlak yakınsak ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde düzgün yakınsaktır (Rudin, 1987).

Tanım 2.2.7. $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ birim disk olmak üzere,

$$Hol(\mathbb{D})=\left\{f(z):f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{f}(n)z^n\right\}$$

kümesine birim disk üzerinde *tek değerli analitik fonksiyonların (holomorfik fonksiyonların) uzayı* denir. Burada $\widehat{f}(n)$, f fonksiyonunun n. Taylor katsayısıdır ve $\widehat{f}(n)=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ şeklinde ifade edilir (Lavrent'ev and Shabat, 1973).

Tanım 2.2.8. $Hol(\mathbb{D})$ birim disk üzerinde holomorfik fonksiyonların uzayı olmak üzere $f,g\in Hol(\mathbb{D})$ için,

$$(f*g)(z)=\int_0^z f(z-t)g(t)dt$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının *konvolüsyon çarpımı* denir (Mikusinski 1956; Krabbe, 1970).

Tanım 2.2.9. $f,g\in Hol(\mathbb{D})$ için,

$$(f\circledast g)(z)=\frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt=\int_0^z f'(z-t)g(t)dt+f(0)g(z)$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının *Duhamel çarpımı* denir (Wigley, 1974).

Teorem 2.2.10. (Runge Teoremi) D, $\mathbb{C}$ kompleks uzayında sınırlı ve basit bağlantılı bir bölge ve K, D nin kompakt bir altkümesi olsun. D deki her analitik $f(z)$ fonksiyonuna K üzerinde düzgün yakınsayan bir $P_n(z)$ polinomlar dizisi vardır (Lax, 2002).

Teorem 2.1.11.(Titchmarsh Teoremi) Reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonlar $f(x)$ ve $g(x)$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $f(x) \neq 0$ (her $x \in (0, \varepsilon)$) ve

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy = 0$$

ise $g(x) = 0$ dır (Yosida 1980).

3. ANALİTİK FONKSİYONLAR UZAYLARINDA $\mathcal{J}_\alpha$ İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN KOMUTANTI

Bu bölümde, yıldız şekilli $\mathcal{D}$ bölgesindeki analitik fonksiyonların uzayı $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ üzerinde tanımlanan $\mathcal{J}_\alpha$ integral operatörü ele alınmış ve bu operatörün komutantı belirlenmiştir. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayındaki sürekli lineer T operatörünün $\mathcal{J}_\alpha$ nın komutantı olması için

$$(Tf)(z) = \varphi(\alpha)f(z) + \int\limits_\alpha^z \varphi^{'}(z+\alpha-t)f(t)dt \tag{3.1}$$

eşitliğini sağlaması gerek ve yeter koşul olarak verilmiştir.

Tanım 3.1. $\mathcal{D}$ basit bağlantılı bölgesi $\mathbb{C}$ kompleks uzayında, $z=\alpha$ noktasına göre yıldız şekilli bir bölge olsun. $\mathcal{D}$ deki tek değerli analitik fonksiyonların uzayı olan $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ kompakt yakınsaklığa sahip topolojik bir uzaydır. $f,g \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için,

$$\begin{aligned} (f \underset{\alpha}{\circledast} g)(z) &= \frac{d}{dz}\int\limits_\alpha^z f(z+\alpha-t)g(t)dt \qquad (3.2)\\ &= \int\limits_\alpha^z f'(z+\alpha-t)g(t)dt + f(\alpha)g(z) \end{aligned}$$

ifadesine f ve g fonksiyonlarının *α-Duhamel çarpımı* denir ve $\underset{\alpha}{\circledast}$ ile gösterilir (Nagnibida, 1981).

$\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayı üzerindeki α-Duhamel çarpımı kavramını $D_{f,\alpha}$ Duhamel operatörü olmak üzere $g \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için,

$$D_{f,\alpha}g = f \underset{\alpha}{\circledast} g$$

olarak da ifade edebiliriz.

Tanım 3.2. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayı üzerindeki $\mathcal{J}_\alpha$ integral operatörü her $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için,

$$(\mathcal{J}_\alpha f)(z) = \int\limits_\alpha^z f(t)dt \tag{3.3}$$

ile tanımlanır.

$\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün T komutantı da

$$\{\mathcal{J}_\alpha\}^{'} = \{T : T\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{J}_\alpha T\} \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir. Şimdi bu operatörü inceleyelim.

Her $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için (3.4) eşitliği sağlanır. O halde $f = z^k$ için,

$$T\mathcal{J}_\alpha z^k = \mathcal{J}_\alpha T z^k$$

olur. Böylece,

$$T\mathcal{J}_\alpha z^k = T(\int_\alpha^z t^k dt) = T(\frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_\alpha^z) = T(\frac{z^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}}{k+1}) = \frac{Tz^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}T1}{k+1}$$

elde edilir.

$$\frac{Tz^{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha^{k+1}T1}{k+1} = \mathcal{J}_\alpha T z^k$$

eşitliğinde her iki tarafı $k+1$ ile çarparsak,

$$Tz^{k+1} - \alpha^{k+1}T1 = (k+1)\mathcal{J}_\alpha T z^k$$

bulunur. Yani her $k \geq 0$ için,

$$Tz^{k+1} = \alpha^{k+1}T1 + (k+1)\mathcal{J}_\alpha T z^k \tag{3.5}$$

elde edilir. Buradan tümevarım metodu ile,

$$Tz^k = \left(\sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!}\alpha^s J_\alpha^{k-s}\right) T1 \qquad (k = 1, 2, 3, ...) \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir.

(3.6) eşitliğindeki $\mathcal{J}_\alpha^{k-s}T1$ ifadesini belirleme amacıyla $(\mathcal{J}_\alpha f)$ operatörünün m.

kuvvetini hesaplayalım.

$$(\mathcal{J}_\alpha f)(z) = \int_\alpha^z f(t)dt$$

olmak üzere,

$$(\mathcal{J}_\alpha^2 f)(z) = \mathcal{J}_\alpha(\mathcal{J}_\alpha f(z)) = \mathcal{J}_\alpha\left(\int_\alpha^z f(t)dt\right) = \int_\alpha^z\left(\int_\alpha^t f(\tau)d\tau\right)dt$$

şeklinde yazılır. Burada $u = \int_\alpha^t f(\tau)d\tau$ ve $dv = dt$ olmak üzere kısmi integrasyon metodu ile,

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_\alpha^2 f)(z) &= \int_\alpha^t tf(\tau)d\tau \Big|_\alpha^z - \int_\alpha^z tf(t)dt = z\int_\alpha^t f(\tau)d\tau - \int_\alpha^z tf(t)dt \\ &= z\int_\alpha^z f(t)dt - \int_\alpha^z tf(t)dt = \int_\alpha^z (z-t)f(t)dt\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, kısmi integrasyon metodunun tekrarlanmasıyla,

$$\begin{aligned}(J_\alpha^3 f)(z) &= \int_\alpha^z\left[\int_\alpha^t (t-\tau)f(\tau)d\tau\right]dt = \int_\alpha^z\left(t\int_\alpha^t f(\tau)d\tau\right)dt - \\ &\quad \int_\alpha^z\left(\int_\alpha^t \tau f(\tau)d\tau\right)dt \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\alpha^t f(\tau)d\tau \Big|_\alpha^z - \int_\alpha^z \frac{t^2}{2}f(t)dt - \left[t\int_\alpha^t \tau f(\tau)d\tau \Big|_\alpha^z - \int_\alpha^z t^2 f(t)dt\right] \\ &= \frac{z^2}{2}\int_\alpha^z f(t)dt - \int_\alpha^z \frac{t^2}{2}f(t)dt - z\int_\alpha^z tf(t)dt + \int_\alpha^z t^2 f(t)dt \\ &= \int_\alpha^z\left(\frac{z^2}{2} - \frac{t^2}{2} - zt + t^2\right)f(t)dt = \int_\alpha^z \frac{(z-t)^2}{2!}f(t)dt\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarım metodunu kullanarak $(\mathcal{J}_\alpha f)$ operatörünün m. kuvvetini,

$$(\mathcal{J}_\alpha^m f)(z) = \int\limits_\alpha^z \frac{(z-t)^{m-1}}{(m-1)!} f(t)dt \tag{3.7}$$

şeklinde hesaplarız. Böylece (3.6) eşitliğindeki $\mathcal{J}_\alpha^{k-s}T1$ operatörü (3.7) formülü kullanılarak ifade edilirse,

$$\mathcal{J}_\alpha^{k-s}T1 = \int\limits_\alpha^z \frac{(z-t)^{k-s-1}}{(k-s-1)!} T1dt$$

olur ve (3.6) formülü,

$$Tz^k = \sum_{s=0}^{k} \frac{k!}{s!} \alpha^s \int\limits_\alpha^z \frac{(z-t)^{k-s-1}}{(k-s-1)!} T1dt$$

olarak elde edilir. Eşitlik $s = k$ için açık yazıldığında,

$$Tz^k = \alpha^k T1 + \sum_{s=0}^{k-1} \frac{k!}{s!} \alpha^s \int\limits_\alpha^z \frac{(z-t)^{k-s-1}}{(k-s-1)!} T1dt \tag{3.8}$$

bulunur. Binom açılımından,

$$\sum_{s=0}^{k-1} \frac{k(k-1)!}{s!(k-s-1)!} \alpha^s (z-t)^{k-s-1} = k(z+\alpha-t)^{k-1}$$

olduğu gözönünde bulundurulursa her k $(k = 0, 1, ...)$ için,

$$Tz^k = \alpha^k T1 + k \int\limits_\alpha^z (z+\alpha-t)^{k-1} T1dt \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilir.

$c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, ..., c_n^{(n)}, ...$kompleks sayılar olmak üzere, (3.9) eşitliğini $k = 0, 1, 2, ..., n, ...$ için açık yazıp ve sırasıyla $c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, ..., c_n^{(n)}, ...$ sayılarıyla çarpalım.

$$k = 0 \quad \text{için} \quad c_0^{(n)} T1 = c_0^{(n)} T1 + 0$$

$$
\begin{aligned}
k &= 1 \text{ için, } c_1^{(n)} Tz = c_1^{(n)} \alpha T1 + c_1^{(n)} \int\limits_{\alpha}^{z} (z+\alpha-t)^0 T1 dt \\
k &= 2 \text{ için, } c_2^{(n)} Tz^2 = c_2^{(n)} \alpha^2 T1 + 2c_2^{(n)} \int\limits_{\alpha}^{z} (z+\alpha-t)^1 T1 dt \\
k &= 3 \text{ için, } c_3^{(n)} Tz^3 = c_3^{(n)} \alpha^3 T1 + 3c_3^{(n)} \int\limits_{\alpha}^{z} (z+\alpha-t)^2 T1 dt \\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

Bu ifadeler taraf tarafa toplandığında,

$$
\begin{aligned}
& T(c_0^{(n)} 1 + c_1^{(n)} z + c_2^{(n)} z^2 + \dots + c_n^{(n)} z^n + \dots) \\
&= \Big((c_0^{(n)} 1 + c_1^{(n)} \alpha + c_2^{(n)} \alpha^2 + \dots + c_n^{(n)} \alpha^n + \dots) T1 \\
&+ (c_1^{(n)} + 2c_2^{(n)} \int\limits_{\alpha}^{z} (z+\alpha-t) dt + \dots + nc_n^{(n)} \int\limits_{\alpha}^{z} (z+\alpha-t)^{n-1} dt) T1 \Big)
\end{aligned}
$$

olur. Teorem 2.2.10 dan

$$
c_0^{(n)} 1 + c_1^{(n)} z + c_2^{(n)} z^2 + \dots + c_n^{(n)} z^n + \dots
$$

polinom dizisi $\mathcal{D}$ nin herhangi bir kompakt alt kümesinde f değerine düzgün yakınsar. Böylece,

$$
\lim_{n\to\infty} (c_0^{(n)} 1 + c_1^{(n)} z + c_2^{(n)} z^2 + \dots + c_n^{(n)} z^n + \dots) = f(z)
$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde,

$$
\lim_{n\to\infty} (c_0^{(n)} 1 + c_1^{(n)} \alpha + c_2^{(n)} \alpha^2 + \dots + c_n^{(n)} \alpha^n + \dots) = f(\alpha)
$$

dır. Türev operatörünün $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ üzerinde sürekli olduğu gözönünde bulundurulduğunda, (3.9) ifadesinden,

$$
Tf(z) = f(\alpha) T1 + \int\limits_{\alpha}^{z} f'(z+\alpha-t) T1 dt
$$

elde edilir. $\varphi(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ olmak üzere $\varphi = T1$ denilirse,

$$(Tf)(z) = f(\alpha)\varphi(z) + \int_{\alpha}^{z} \varphi(z) f'(z+\alpha-t)dt$$

olur. Konvolüsyon çarpımındaki değişme özelliğinden,

$$(Tf)(z) = \varphi(\alpha)f(z) + \int_{\alpha}^{z} \varphi'(z+\alpha-t)f(t)dt \tag{3.10}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, $\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün (3.10) eşitliği ile ifade edilebilen T komutantı için bir $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ fonksiyonu vardır.

Tersine, $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere, (3.10) formülü ile tanımlanan T operatörünün sürekli olduğunu gösterelim.

$f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ olmak üzere $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ topolojik uzayı üzerindeki yarı norm,

$$p(f) = \max_{z \in K \subset \mathcal{D}} |f(z)|$$

şeklinde ifade edilir. T komutant operatörünün sürekliliğini göstermek için bu yarı norm tanımını kullanalım. Böylece

$$\begin{aligned} p(Tf) &= \max_{z \in K \subset \mathcal{D}} |(Tf)(z)| = \max_{z \in K} \left| \varphi(\alpha)f(z) + \int_{\alpha}^{z} \varphi'(z+\alpha-t)f(t)dt \right| \\ &\leq |\varphi(\alpha)| \max_{z \in K} |f(z)| + \int_{\alpha}^{z} \left|\varphi'(z+\alpha-t)\right| |f(t)| \, |dt| \\ &\leq \left(|\varphi(\alpha)| + \max_{t \in K} \left|\varphi'(t)\right| d(K) \right) \max_{z \in K} |f(z)| \end{aligned}$$

bulunur. Burada K, $\mathcal{D}$ bölgesinde α noktasını içeren kompakt bir küme ve $d(K)$ da bu kümenin çapıdır. $c > 0$ bir sabit olmak üzere

$$p(Tf) \leq c \, p(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da T nin sürekliliğini gösterir.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayında $\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün komutantının T olması için gerek ve yeter koşul her $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için,

$$(Tf)(z) = \varphi(\alpha)f(z) + \int_\alpha^z \varphi'(z+\alpha-t)f(t)dt$$

eşitliğini sağlayan bir $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ fonksiyonunun olmasıdır.

Bu eşitlik Tanım 3.1 deki α-Duhamel çarpımı gözönüne alındığında $T = D_{\varphi,\alpha}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_{\varphi,\alpha}f &= \varphi \underset{\alpha}{\circledast} f \\ &= \frac{d}{dz}\int_\alpha^z \varphi(z+\alpha-t)f(t)dt \\ &= \varphi(\alpha)f(z) + \int_\alpha^z \varphi'(z+\alpha-t)f(t)dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, $\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün komutantı $D_{\varphi,\alpha}$ biçiminde α-Duhamel operatörü ile ifade edilebilir.

Sonuç 3.4. $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ olmak üzere, $\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün $T1 = \varphi(z)$ olacak şekilde bir tek T komutantı mevcuttur.

3.1. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ Uzayının İzomorfizmleri

Bu kısımda, $\mathcal{J}_\alpha$ integral operatörünün komutantı olan T operatörünün tersinin mevcut olup olmadığı araştırıldı ve T nin $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayında bir izomorfizm olduğu belirlendi.

Şimdi T operatörünü iki operatörün toplamı şeklinde yazıp tersini araştıralım. (3.10) eşitliğinde genelliği bozmadan $\varphi(\alpha) = 1$ ve $\varphi' = \psi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ seçerek her $f \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ için,

$$\begin{aligned}(Tf)(z) &= f(z) + \int_\alpha^z \psi(z+\alpha-t)f(t)dt \\ &= (E+L)f(z)\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada E, $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayında birim operatör ve

$$(Lf)(z) = \int_\alpha^z \psi(z+\alpha-t)f(t)dt$$

dir. Amacımız $E+L$ operatörünün terse sahip olduğunu göstermektir. Yani

$$(E+L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L^n$$

olduğunu göstereceğiz.

Önce, α noktasını içeren $\mathcal{D}$ bölgesindeki K kompakt kümesi için her $z \in K$ olmak üzere,

$$|(L^n f)(z)| \leq \left(\max_{t\in K} |\psi(t)|\right)^n \max_{t\in K} |f(t)| \frac{(z-\alpha)^n}{n!} \tag{3.11}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Bunun için tümevarım metodunu kullanacağız. $n = 1$ için, tanımdan

$$|(Lf)(z)| = \left| \int_\alpha^z \psi(z+\alpha-t)f(t)dt \right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\alpha}^{z} |\psi(z+\alpha-t)|\,|f(t)|\,|dt| \\
&\leq \max_{t\in K}|\psi(t)| \max_{t\in K}|f(t)| \int_{\alpha}^{z} |dt| \\
&= \max_{t\in K}|\psi(t)| \max_{t\in K}|f(t)|\,|z-\alpha|
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

$n = m-1$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$
\left|(L^{m-1}f)(z)\right| \leq \left(\max_{t\in K}|\psi(t)|\right)^{m-1} \max_{t\in K}|f(t)| \frac{|z-\alpha|^{m-1}}{(m-1)!} \tag{3.12}
$$

$n = m$ için ifadenin doğru olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için (3.12) ifadesini kullanalım.

$$
\begin{aligned}
|(L^m f)(z)| &= \left|\int_{\alpha}^{z} \psi(z+\alpha-t)(L^{m-1}f)(t)dt\right| \\
&\leq \left(\max_{t\in K}|\psi(t)|\right)^{m} \max_{t\in K}|f(t)| \frac{1}{(m-1)!}\int_{\alpha}^{z} |t-\alpha|^{m-1}\,dt
\end{aligned}
$$

Burada $t-\alpha \in [\alpha, z]$ olduğundan,

$$
\frac{1}{(m-1)!}\int_{\alpha}^{z} |t-\alpha|^{m-1}\,dt = \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{m}\int_{\alpha}^{z} d\,|t-\alpha|^{m} = \frac{|z-\alpha|^{m}}{m!}
$$

dir. Böylece

$$
|(L^m f)(z)| = \left(\max_{t\in K}|\psi(t)|\right)^{m} \max_{t\in K}|f(t)| \frac{|z-\alpha|^{m}}{m!}
$$

bulunur. Dolayısıyla (3.11) eşitsizliği ispatlanmıştır. $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ üzerindeki yarı norm p olmak üzere, (3.11) eşitsizliği

$$
p(L^n f) \leq C_K p(f) \tag{3.13}
$$

şeklinde ifade edilir. L^n operatörü süreklidir. L^n sürekli operatörü $(-1)^n$ sabiti ile çarpıldığında yine sürekli olacaktır. (3.11) eşitsizliğini $n = 0, 1, 2, ...$ için yazıp, $(-1)^n$ ile çarpıp taraf tarafa topladığımızda, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^n$ serisi elde edilir. Böylece (3.13) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} p(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^n f) &\leq \left[\widetilde{C_K}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d^n}{n!}\right]p(f) \\ &\leq (\widetilde{C_K}e^{-d})p(f) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d^n}{n!}$ serisi yakınsak bir seridir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{d^n}{n!} = e^{-d}$$

dir. Dolayısıyla $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^n f$ serisi yakınsak olup, sürekli lineer bir operatör belirler. Diğer taraftan,

$$(E + L)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L^n(\right) E + L) = I$$

eşitliğinin sağlanması $E + L$ nin terse sahip bir operatör olduğunu gösterir. Böylece T operatörünün de terse sahip olduğu görülür.

Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.1. $\mathcal{J}_\alpha$ operatörünün komutantı olan T nin, $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de izomorfizm olması için gerek ve yeter koşul T nin (3.10) eşitliğini sağlaması ve $\varphi(\alpha) = (T1)\mid_{z=\alpha} \neq 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.2. $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ ve $\varphi(\alpha) \neq 0$ için, $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ uzayında $T1 = \varphi(z)$ olacak şekilde bir tek T izomorfizmi vardır.

Sonuç 3.1.3. $\varphi, g \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ olsun. $\varphi(\alpha) \neq 0$ ise,

$$\varphi(\alpha)x(z) + \int_{\alpha}^{z} \varphi'(z+\alpha-t)x(t)dt = g(z) \tag{3.14}$$

denkleminin $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de çözümü var ve tektir (Nagnibida, 1981).

İspat. $\varphi(\alpha) \neq 0$ olmak üzere, (3.14) denkleminin sol tarafı $E+L$ biçiminde ifade edilirse

$$(\varphi(\alpha)E + L_{\varphi})x = g$$

olur. $(\varphi(\alpha)E + L_{\varphi})$ terse sahip olduğundan yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını bu ifadenin tersi ile çarparsak,

$$x(z) = (\varphi(\alpha)E + L_{\varphi})^{-1}g$$

elde edilir. Böylece çözüm,

$$x(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n L_{\varphi}^n\right) g$$

şeklinde ifade edilir ve bu çözüm tektir.

4. W_{zw} İKİ KATLI İNTEGRAL OPERATÖRÜNÜN KOMUTANTI VE DEVİRLİ VEKTÖRLERİ

Bu bölümde, iki değişkenli fonksiyonlar için Duhamel çarpımı tanımı verilmiştir. $C_A^{(n)}$ uzayında W iki katlı integral operatörü ifade edilmiş ve bu uzayın bir altuzayı olan E_{zw} uzayının bir Banach cebiri olduğu gösterilmiştir. E_{zw} altuzayına kısıtlanmış olan W_{zw} iki katlı integral operatörünün komutantı araştırılmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca W_{zw} iki katlı integral operatörünün E_{zw} altuzayındaki devirli vektörleri verilmiştir.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ kompleks düzlemde birim disk olmak üzere, $\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}$ da sürekli ve $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ de n. mertebeden kısmi türevleri $\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}$ daki sürekli fonksiyonlara genişletilebilen kompleks değerli $f(z, w)$ fonksiyonlarının Banach uzayı $C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}})$ olsun. $C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}})$ uzayının analitik fonksiyonlarının altuzayını $C_A^{(n)} = C_A^{(n)}(\mathbb{D} \times \mathbb{D})$ ile gösterelim. O halde

$$\begin{aligned} C_A^{(n)} &= C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}) \cap Hol(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \\ &= \left\{ f(z, w) : f(z, w) \in C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}) \text{ ve } f(z, w) \in Hol(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \right\} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

$C_A^{(n)}$ uzayında, iki değişkenli fonksiyonlar için konvolüsyon çarpımı ve Duhamel çarpımı aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Tanım 4.1. $f, g \in C_A^{(n)}$ için,

$$(f * g)(z, w) = \int_0^z \int_0^w f(z - u, w - v) g(u, v) dv du$$

ifadesine iki değişkenli f ve g fonksiyonlarının *konvolüsyon çarpımı* denir.

Tanım 4.2. $f, g \in C_A^{(n)}$ için,

$$(f \circledast g)(z, w) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w f(z - u, w - v) g(u, v) dv du$$

ifadesine iki değişkenli f ve g fonksiyonlarının *Duhamel çarpımı* denir. $C_A^{(n)}$ uzayında iki değişkenli integral operatörü her $f \in C_A^{(n)}$ için,

$$(Wf)(z,w) = \int_0^z \int_0^w f(u,v)dvdu$$

şeklinde tanımlanır.

$C_A^{(n)}$ uzayının sadece zw çarpanlarından oluşan altuzayı E_{zw} olmak üzere,

$$E_{zw} = \left\{ f \in C_A^{(n)} : f(z,w) = f(zw) \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $E_{zw} = span\{(zw)^k : k \geq 0\}$ olduğunu kolayca görebiliriz.

$$\begin{aligned} E_{zw} &= span\{(zw)^k : k \geq 0\} \\ &= closlinhull\{(zw)^k : k \geq 0\} \end{aligned}$$

olarak ifade edildiğinden E_{zw} uzayı kapalıdır. $E_{zw} \subset C_A^{(n)} \subset C^{(n)}(\overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}})$ ve Teorem 2.1.15 göz önüne alındığında E_{zw} bir Banach uzayıdır.

Leibnitz formülü gözönünde bulundurulduğunda $f, g \in E_{zw}$ için Duhamel çarpımı,

$$\begin{aligned} (f \circledast g)(zw) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w f((z-u)(w-v))g(uv)dvdu \\ &= \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} f((z-u)(w-v))g(uv)dvdu \\ &\quad + \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} f(0)g(uw)du + \int_0^w \frac{\partial}{\partial w} f(0)g(zv)dv + f(0)g(zw) \\ &= \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} f((z-u)(w-v))g(uv)dvdu + f(0)g(zw) \quad (4.1) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir.

Teorem 4.3. $(E_{zw}, \circledast)$ uzayı Duhamel çarpımına göre Banach cebiridir.

İspat. $(E_{zw}, \circledast)$ uzayı Banach uzayı olduğundan bu uzayın Banach cebiri olduğunu göstermek için üzerinde tanımlanan norma göre

$$\|f \circledast g\|_{E_{zw}} \leq \|f\|_{E_{zw}} \|g\|_{E_{zw}}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir. E_{zw} altuzayı üzerindeki normu

$$\|f\|_n = \max\left\{ \max_{(z,w)\in\overline{\mathbb{D}\times\mathbb{D}}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(zw)}{\partial z^{\alpha_1} \partial w^{\alpha_2}} \right| : |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = 0, 1, ..., n \right\} \tag{4.2}$$

olarak tanımlayalım. (4.1) eşitliğinde konvolüsyon çarpımının değişme özelliği kullanılarak

$$(f \circledast g)(zw) = \int_0^z \int_0^w g((z-u)(w-v)) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(uv) dv du + f(0)g(zw) \tag{4.3}$$

elde edilir. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olmak üzere (4.3) eşitliğinin α kez kısmi türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha_1} \partial w^{\alpha_2}} (f \circledast g) &= \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha_1} \partial w^{\alpha_2}} g\left((z-u)(w-v)\right) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} f(uv) \, dv du \\ &\quad + f(0) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha_1} \partial w^{\alpha_2}} g(zw) \end{aligned}$$

bulunur. E_{zw} uzayı üzerinde tanımlanan norm ifadesi gözönünde bulundurulduğunda

$$\|f \circledast g\|_{E_{zw}} \leq 2 \|f\|_{E_{zw}} \|g\|_{E_{zw}}$$

elde edilir. Böylece $(E_{zw}, \circledast)$ uzayı Duhamel çarpımına göre bir Banach cebiridir.

E_{zw} altuzayı üzerinde $W_{zw} = W \mid E_{zw}$ integral operatörünü

$$(W_{zw} f)(zw) = \int_0^z \int_0^w f(uv) dv du \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi E_{zw} altuzayı için Duhamel çarpımı tanımını kullanarak W_{zw} operatörünün komutantını araştıralım.

E_{zw} Banach uzayı üzerindeki bütün sınırlı lineer operatörlerin Banach cebirini $\mathcal{L}(E_{zw})$ ile gösterelim. $T \in \mathcal{L}(E_{zw})$, W_{zw} operatörünün komutantı ise

$$\{W_{zw}\}^{'} = \{T : TW_{zw} = W_{zw}T\}$$

şeklinde ifade edilir.

Her $f \in C_A^{(n)}$ için $TW_{zw}f = W_{zw}Tf$ eşitliği sağlandığından $f = (zw)^k$ için,

$$TW_{zw}(zw)^k = W_{zw}T(zw)^k$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} TW_{zw}(zw)^k &= T\left(\int_0^z\int_0^w (uv)^k dvdu\right) = T\left(\int_0^z u^k\left(\int_0^w v^k dv\right)du\right) \\ &= T\left(\int_0^z u^k \frac{w^{k+1}}{k+1}du\right) \\ &= T\left(\frac{z^{k+1}w^{k+1}}{(k+1)^2}\right) = \frac{T(zw)^{k+1}}{(k+1)^2} = W_{zw}T(zw)^k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki taraf $(k+1)^2$ ile çarpılırsa her $k \geq 0$ için,

$$T(zw)^{k+1} = (k+1)^2\, W_{zw}T(zw)^k \tag{4.5}$$

bulunur. Tümevarım metodunu kullanarak her $k \geq 1$ ve $s \in \mathbb{R}$ için,

$$T(zw)^k = W_{zw}^k T1 \prod_{s=1}^{k} s^2 \tag{4.6}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

$$T(zw) = W_{zw}T1 \qquad\qquad (k = 1 \text{ için})$$

ifadesinin doğru olduğu (4.5) denkleminden görülür.

$$T(zw)^n = W_{zw}^n T1 \prod_{s=1}^{n} s^2 \qquad (k = n \text{ için}) \tag{4.7}$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$$T(zw)^{n+1} = W_{zw}^{n+1} T1 \prod_{s=1}^{n+1} s^2 \qquad k = n+1 \text{ için} \tag{4.8}$$

ifadesinin doğru olduğunu göstermeye çalışalım. (4.5) eşitliğinden,

$$T(zw)^{n+1} = (n+1)^2 W_{zw} T(zw)^n$$

elde edilir. Burada $T(zw)^n$ yerine (4.7) deki eşitliği yazarsak,

$$\begin{aligned} T(zw)^{n+1} &= (n+1)^2 W_{zw} \left(W_{zw}^n T1 \prod_{s=1}^{n} s^2 \right) \\ &= W_{zw}^{n+1} T1 (n+1)^2 \prod_{s=1}^{n} s^2 \\ &= W_{zw}^{n+1} T1 \prod_{s=1}^{n+1} s^2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.8) eşitliğinin doğru olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi her $f \in E_{zw}$ ve herhangi bir k için (4.6) eşitliğindeki W_{zw}^k operatörünün aşağıdaki şekilde ifade edilebildiğini gösterelim:

$$\left(W_{zw}^k f \right)(zw) = \int_0^z \int_0^w \frac{[(z-u)(w-v)]^{k-1}}{[(k-1)!]^2} f(uv) dv du \tag{4.9}$$

Bunun için öncelikle,

$$\left(W_{zw}^k f \right)(zw) = \frac{(zw)^k}{[k!]^2} \circledast f(zw) \tag{4.10}$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$k = 1$ için,

$$\left(W_{zw} f \right)(zw) = zw \circledast f(zw)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w \left((z-u)(w-v)\right) f(uv) dv du$$
$$= \int_0^z \int_0^w f(uv) dv du$$

bulunur. Bu eşitliğin W_{zw} operatörünün tanımından doğru olduğu görülür.

$k = n$ için,

$$\left(W_{zw}^n f\right)(zw) = \frac{(zw)^n}{(n!)^2} \circledast f(zw)$$

ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim.

$k = n+1$ için,

$$\left(W_{zw}^{n+1} f\right)(zw) = \frac{(zw)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \circledast f(zw)$$

ifadesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left(W_{zw}^{n+1} f\right)(zw) &= W_{zw}\left((W_{zw}^n f)(zw)\right) \\
&= W_{zw}\left(\frac{(zw)^n}{(n!)^2} \circledast f(zw)\right) \\
&= zw \circledast \left(\frac{(zw)^n}{(n!)^2} \circledast f(zw)\right) \\
&= \left(zw \circledast \frac{(zw)^n}{(n!)^2}\right) \circledast f(zw) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w \left[(z-u)(w-v)\right] \frac{(uv)^n}{(n!)^2} dv du\right) \circledast f(zw) \\
&= \left(\int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \left[(z-u)(w-v)\right] \frac{(uv)^n}{(n!)^2} dv du + 0\right) \circledast f(zw) \\
&= \left(\frac{1}{(n!)^2} \int_0^z \int_0^w (uv)^n dv du\right) \circledast f(zw) \\
&= \frac{(zw)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \circledast f(zw)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.10) eşitliği ispatlanmış olur. Bu eşitlik kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\left(W_{zw}^{k}f\right)(zw) &= \frac{(zw)^k}{(k!)^2} \circledast f(zw) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\left[(z-u)(w-v)\right]^k}{(k!)^2} f(uv)dvdu \\
&= \frac{1}{(k!)^2}\int\limits_0^z\int\limits_0^w k^2\left[(z-u)(w-v)\right]^{k-1} f(uv)dvdu \\
&= \frac{k^2}{k^2\left[(k-1)!\right]^2}\int\limits_0^z\int\limits_0^w \left[(z-u)(w-v)\right]^{k-1} f(uv)dvdu \\
&= \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\left[(z-u)(w-v)\right]^{k-1}}{\left[(k-1)!\right]^2} f(uv)dvdu
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.9) ifadesinin doğru olduğu gösterilmiştir.

Yukarıdaki eşitlikte $f = T1$ alınarak

$$W_{zw}^{k}T1 = \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\left[(z-u)(w-v)\right]^{k-1}}{\left[(k-1)!\right]^2} T1dvdu$$

ifadesi (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$T(zw)^k = \prod_{s=1}^{k} s^2 \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\left[(z-u)(w-v)\right]^{k-1}}{\left[(k-1)!\right]^2} T1dvdu$$

olduğu görülür. Bu eşitlik $k = 1, 2, 3, ...$ için açık yazıldığında sağ taraf $p(zw) \in P$ ile $T1$ in Duhamel çarpımını ifade eder. Gerçekten $k = 1$ için,

$$\begin{aligned}
T(zw) &= 1^2\int\limits_0^z\int\limits_0^w T1dvdu \\
&= \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\left[(z-u)(w-v)\right] T1dvdu + 0.T1 \\
&= \frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\int\limits_0^z\int\limits_0^w \left[(z-u)(w-v)\right] T1dvdu \\
&= zw \circledast T1
\end{aligned}$$

bulunur. $k=2$ için,

$$\begin{aligned} T(zw)^2 &= 1^2.2^2\int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{(z-u)(w-v)}{(1!)^2}T1dvdu \\ &= \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left[(z-u)(w-v)\right]^2 T1dvdu + 0^2.T1 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\int\limits_0^z\int\limits_0^w \left[(z-u)(w-v)\right]^2 T1dvdu \\ &= (zw)^2 \circledast T1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu şekilde devam edildiğinde,

$$\begin{aligned} T(zw)^3 &= (zw)^3 \circledast T1 \\ T(zw)^4 &= (zw)^4 \circledast T1 \\ &\vdots \\ T(zw)^n &= (zw)^n \circledast T1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Bu ifadeler taraf tarafa toplandığında, her $p \in P$ polinomu için,

$$Tp(zw) = p(zw) \circledast T1$$

olur. Weierstrass yaklaşım teoreminin kullanılması ile her $f \in E_{zw}$ için,

$$(Tf)(zw) = f(zw) \circledast T1$$

dir. Böylece,

$$(Tf)(zw) = f(zw) \circledast T1 = \int\limits_0^z\int\limits_0^w \frac{\partial^2}{\partial z\partial w} f\left((z-u)(w-v)\right) T1dvdu + f(0)T1$$

elde edilir. $T1=\varphi$ alınıp Duhamel çarpımının değişme özelliği kullanıldığında,

$$(Tf)(zw)=\int_0^z\int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\varphi\left((z-u)(w-v)\right)f(uv)dvdu+\varphi(0)f(zw) \qquad (4.11)$$

yazılabilir. Dolayısıyla W_{zw} operatörünün (4.11) ile ifade edilebilen T komutantı için bir $\varphi\in E_{zw}$ fonksiyonu vardır.

Tersine $\varphi\in E_{zw}$ için E_{zw} uzayında W_{zw} operatörünün T komutantı (4.11) formülü ile ifade edilir ve T operatörü

$$TW_{zw}f(zw)=W_{zw}Tf(zw), \qquad f\in E_{zw}$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca $T\in\mathcal{L}(E_{zw})$ ve E_{zw} normlu bir uzay olduğundan T operatörü Teorem 2.1.2 den sürekli bir operatördür. Yani (4.11) gösterimine sahip olan $T\in\mathcal{L}(E_{zw})$ operatörü W_{zw} operatörünün komutantıdır.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4. $T\in\mathcal{L}(E_{zw})$ operatörünün W_{zw} operatörünün komutantı olması için gerek ve yeter koşul her $f\in E_{zw}$ için

$$(Tf)(zw)=\int_0^z\int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\varphi\left((z-u)(w-v)\right)f(uv)dvdu+\varphi(0)f(zw)$$

olacak şekilde bir $\varphi\in E_{zw}$ olmasıdır.

Bu eşitlik iki değişkenli fonksiyonlar için Duhamel çarpımı tanımı gözönüne alındığında $T=D_\varphi$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
D_\varphi f &= \varphi\circledast f\\
&= \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\int_0^z\int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right)f(uv)dvdu\\
&= \int_0^z\int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\varphi\left((z-u)(w-v)\right)f(uv)dvdu+\varphi(0)f(zw)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece W_{zw} operatörünün komutantı D_φ biçiminde Duhamel operatörü ile ifade edilebilir.

Sonuç 4.5. $\varphi \in E_{zw}$ olmak üzere W_{zw} operatörünün $T1 = \varphi$ olacak şekilde bir tek T komutantı vardır.

İspat. $\varphi \in E_{zw}$ olmak üzere W_{zw} operatörünün $T_1 1 = \varphi$ ve $T_2 1 = \varphi$ olacak şekilde iki kommutantı olduğunu kabul edelim. T_1, $T_2 \in \{W_{zw}\}^{'}$ ise

$$\begin{aligned}(T_1 - T_2) W_{zw} &= T_1 W_{zw} - T_2 W_{zw} \\ &= W_{zw} T_1 - W_{zw} T_2 \\ &= W_{zw} (T_1 - T_2)\end{aligned}$$

olduğundan $(T_1 - T_2) \in \{W_{zw}\}^{'}$ bulunur.

$$\begin{aligned}T_1 f(zw) &= \varphi(0) f(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi((z-u)(w-v)) f(uv) dv du \\ T_2 f(zw) &= \varphi(0) f(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi((z-u)(w-v)) f(uv) dv du\end{aligned}$$

bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(T_1 - T_2) f(zw) = 0 + \int_0^z \int_0^w 0 dv du = 0$$

elde edilir. Böylece bu sonuç W_{zw} operatörünün bir tek T komutantı olduğunu gösterir.

Sonuç 4.6. Bir operatörün komutantı komutatifse $\{W_{zw}\}^{'} = \{W_{zw}\}^{''}$ dir.

İspat. φ, $\psi \in E_{zw}$ fonksiyonları için W_{zw} operatörünün T_1 ve T_2 gibi iki komutantı olsun. Konvolüsyon operatörü

$$K_{\frac{\partial^2}{\partial z \partial w}} f(zw) = \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi((z-u)(w-v)) f(uv) dv du$$

şeklinde ifade edilmek üzere,

$$\begin{aligned} T_1 f(zw) &= \varphi(0) f(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv) dv du \\ &= \left(\varphi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}\right) f(zw) \end{aligned}$$

dır, her $f \in E_{zw}$ için

$$T_1 = \varphi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} T_2 f(zw) &= \psi(0) f(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \psi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv) dv du \\ &= \left(\psi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial w}}\right) f(zw) \end{aligned}$$

dır, her $f \in E_{zw}$ için

$$T_2 = \psi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial w}}$$

bulunur. Konvolüsyon çarpımı değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} T_1 T_2 &= \left(\varphi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}\right)\left(\psi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial w}}\right) \\ &= \left(\psi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial w}}\right)\left(\varphi(0)\mathbf{I} + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}\right) \\ &= T_2 T_1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.7. $T \in \mathcal{L}(E_{zw})$ operatörünün E_{zw} uzayında bir izomorfizm ve W_{zw} operatörü ile değişmeli olması için gerek ve yeter koşul T nin

$$(Tf)(zw) = \varphi(0) f(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv) dv du \qquad (4.12)$$

eşitliğini sağlaması ve $\varphi(0) = (T1)\mid_{zw=0} \neq 0$ olmasıdır.

İspat. $T \in \mathcal{L}(E_{zw})$ operatörü E_{zw} uzayında bir izomorfizm ve W_{zw} ile değişmeli bir operatör olsun. $T \in \mathcal{L}(E_{zw})$, W_{zw} operatörü ile değişmeli ise Teorem 4.4 gözönünde bulundurulduğunda, T nin (4.12) şeklinde ifade edilebildiği açıktır. Şimdi, T operatörü E_{zw} uzayında bir izomorfizm ise $\varphi(0) \neq 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için olmayana ergi metodunu kullanarak öncelikle $\varphi(0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Böylece (4.12) eşitliği

$$(Tf)(zw) = \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv) dv du$$

şeklini alır. Eşitliğin sağ tarafı $K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}$ konvolüsyon operatörüdür. Bu operatör Volterra tipi integral operatör olduğundan kompakttır. Teorem 2.1.4 den dolayı T operatörü tersinebilir değildir. Bu ise T nin izomorfizm olması ile çelişir. O halde $\varphi(0) \neq 0$ dır.

Tersine, $\varphi(0) = (T1) \underset{zw=0}{|} \neq 0$ ve T operatörünün (4.12) gösterimine sahip olduğunu kabul edip $T \in \{W_{zw}\}'$ ve T operatörünün E_{zw} uzayında bir izomorfizm olduğunu gösterelim. Teorem 4.4 den $T \in \{W_{zw}\}'$ olduğu açıkça görülür. T operatörünün izomorfizm olduğunu göstermek için T nin tersinebilir olduğunu göstermeliyiz. (4.12) eşitliği kullanılarak,

$$K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}} f = \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f\left(uv\right) dv du$$

olmak üzere T operatörü

$$T = D_\varphi = \left(\varphi\left(0\right) I + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}\right)$$

şeklinde yazılabilir. $K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}$ konvolüsyon operatörü E_{zw} uzayında kompakt olduğundan sadece $\ker D_\varphi = \{0\}$ olduğunu göstermek Fredholm Alternatif teoremine göre T operatörünün tersinebilir olduğunu ispatlar.

Şimdi $\ker D_\varphi = \{f \in E_{zw} : D_\varphi f = 0\} = \{0\}$ olduğunu gösterelim. Bunun için,

$f \in E_{zw}$ olmak üzere

$$D_\varphi f = \left(\varphi(0)\, I + K_{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial w}}\right) f = 0$$

olsun. Böylece

$$D_\varphi f = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv)\, dv du = 0 \tag{4.13}$$

dır. c_1, c_2 sabit sayı ve $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere (4.13) eşitliğinden,

$$\int_0^z \int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv)\, dv du = c_1 z + c_2,$$

bulunur. $z = 0$ aldığımızda her $w \in \mathbb{D}$ için,

$$0 = \left.\left(\int_0^z \int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv)\, dv du\right)\right|_{z=0} = \left.(c_1 z + c_2)\right|_{z=0} = c_2$$

olur ve buradan $c_2 = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan $w = 0$ aldığımızda her $z \in \mathbb{D}$ için,

$$0 = \left.\left(\int_0^z \int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv)\, dv du\right)\right|_{w=0} = c_1 z$$

bulunur ve $c_1 = 0$ elde edilir. Böylece her $z, w \in \mathbb{D}$ için,

$$\int_0^z \int_0^w \varphi\left((z-u)(w-v)\right) f(uv)\, dv du = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan φ nin sürekli bir fonksiyon ve $\varphi(0) \neq 0$ olması sebebiyle ($\varphi(0) \neq 0$ ise φ sürekli fonksiyon olduğundan dolayı, her $\varepsilon > 0$ için φ fonksiyonu sıfırın her ε komşuluğunda da sıfırdan farklıdır) Titchmarsh teoreminden $f(zw) = 0$ dır. Böylece $\ker D_\varphi = \ker T = \{0\}$ olduğu bulunur. Dolayısıyla T operatörü E_{zw} uzayında tersinebilirdir. Yani T operatörü E_{zw} uzayında bir izomorfizmdir.

Sonuç 4.8. $\varphi \in E_{zw}$ ve $\varphi(0) \neq 0$ için E_{zw} uzayında $T1 = \varphi(zw)$ olacak şekilde W_{zw} ile değişmeli bir tek T izomorfizmi vardır.

Sonuç 4.9. $\varphi, \psi, \gamma \in E_{zw}$ olsun. $\varphi(0) \neq 0$ ise,

$$\varphi(0)\psi(zw) + \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w}\varphi\left((z-u)(w-v)\right)\psi\left(uv\right)dvdu = \gamma(zw)$$

denkleminin E_{zw} uzayında çözümü vardır ve tektir.

Teorem 4.10. $f \in E_{zw}$ olsun. f fonksiyonunun W_{zw} operatörünün devirli vektörü olması için gerek ve yeter koşul $f(0) \neq 0$ olmasıdır.

İspat. Teorem 4.3 den E_{zw} uzayı Duhamel çarpımına göre Banach cebiri olduğundan

$$(D_f g)(zw) = (f \circledast g)(zw)$$

ile ifade edilen D_f Duhamel operatörünün sınırlı olduğunu biliyoruz. Ayrıca W_{zw} iki katlı integral operatörü için (4.10) eşitliği ile verilen

$$\left(W_{zw}^k f\right)(zw) = \frac{(zw)^k}{[k!]^2} \circledast f(zw) \qquad (k \geq 0)$$

ifadesinin gerçeklendiğini göstermiştik. Bu ifadelerden

$$\begin{aligned} E_f &= span\{W_{zw}^k f : k \geq 0\} = span\left\{\frac{(zw)^k}{[k!]^2} \circledast f(zw) : k \geq 0\right\} \\ &= span\left\{D_f\left(\frac{(zw)^k}{[k!]^2}\right) : k \geq 0\right\} \\ &= closD_f span\left\{(zw)^k : k \geq 0\right\} \\ &= closD_f E_{zw} \end{aligned}$$

elde edilir. Tanımdan dolayı f in devirli vektör olması için ($f \in Cyc(W_{zw})$) $closD_f E_{zw} = E_{zw}$ eşitliğinin sağlanması gerekmektedir. Böylece f in devirli vektör olduğunu göstermek için $closD_f E_{zw} = E_{zw} \Longleftrightarrow f(0) \neq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Öncelikle $closD_f E_{zw} = E_{zw}$ yani $E_f = E_{zw}$ iken $f(0) \neq 0$ olduğunu gösterelim. $f(0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$E_f = span\left\{\frac{(zw)^k}{[k!]^2} \circledast f(0) : k \geq 0\right\} \subset \{h \in E_{zw} : h(0) = 0\}$$

bulunur. Bu da $E_f = E_{zw}$ olması ile çelişţiğinden $f(0) \neq 0$ dır.

Teoremin tersini göstermek için $f(0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $closD_f E_{zw} = E_{zw}$ olduğunu elde etmek için D_f operatörünün tersinebilir olduğunu ifade etmek yeterlidir. Teorem 4.7 in ispatında

$$D_f = \left(f(0)I + \mathcal{K}_{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w}}\right)$$

olarak ifade edilen D_f operatörünün tersinebilir olduğu Titchmarsh ve Fredholm alternatif teoremi kullanılarak ispat edilmişti. Bu sebeple D_f operatörü tersinebilir olduğundan

$$closD_f E_{zw} = E_{zw}$$

elde edilir. Böylece $E_f = E_{zw}$ dir. Buradan $f \in Cyc(W_{zw})$ olduğu görülür.

5. $\mathbf{E}_{zw}$ BANACH CEBİRİNİN MAKSİMAL İDEALLER UZAYI

Bu bölümde bir $f \in E_{zw}$ fonksiyonunun Duhamel çarpımına göre hangi koşullar altında terse sahip olduğu Karaev ve Tuna (2004) tarafından kullanılan quasinilpotent operator tekniği yardımıyla araştırılmıştır. Quasinilpotent elemanların bulunmasıyla $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinin radikal olmayan bir Banach cebiri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinin maksimal idealler uzayı ifade edilmiştir. Radikal Banach cebirleri için maksimal idealler uzayı iyi bilinmektedir. Fakat, Duhamel çarpımına göre radikal olmayan Banach cebirleri için bu tür problemler yeterince araştırılmamıştır. Bu açıdan $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinin maksimal idealler uzayının ifade edilmesi önemlidir.

Teorem 5.1. $f \in (E_{zw}, \circledast)$ olmak üzere f fonksiyonunun $\circledast$-tersinebilir olması için gerek ve yeter koşul $f(zw)\mid_{zw=0} \neq 0$ olmasıdır.

İspat. f fonksiyonu Duhamel çarpımına göre E_{zw} Banach cebirinde tersinebilir olsun. O halde her $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ için $(f \circledast g)(z) = 1$ olacak şekilde bir tek $g \in (E_{zw}, \circledast)$ vardır. Özel olarak $z = 0$ için, $(f \circledast g)(0) = 1$ dir. Yani

$$\begin{aligned}(f \circledast g)(0) &= \int_0^z \int_0^w \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} f((z-u)(w-v))g(uv)dvdu + f(0)g(0) = 1 \\ &= f(0)g(0) = 1\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $f(0) \neq 0$ dır.

Teoremin diğer tarafının ispatı için, $f(0) \neq 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $(E_{zw}, \circledast)$ Banach cebirinde tersinebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $h \in E_{zw}$ olmak üzere $D_f h = f \circledast h$ şeklindeki D_f Duhamel operatörünün E_{zw} cebirinde tersinebilir olduğunu göstermek yeterlidir. $F = f - f(0)$ olarak alalım. Buradan açıkça $F(0) = 0$, $f(z) = F(z) + f(0)$ olduğu görülür. I, E_{zw} cebirinde birim operatör olmak üzere

$$\begin{aligned}D_f &= D_{f(0)+(f-f(0))} = D_{f(0)} + D_{f-f(0)} \\ &= f(0)I + D_F\end{aligned}$$

dır. Teorem 2.1.28 den D_F in bir polinomu olan $D_f = f(0)I + D_F$ operatörünün spektrumunu

$$\sigma\left(P(D_F)\right) = P\left(\sigma(D_F)\right)$$

olarak yazabiliriz. Burada D_F operatörü quasinilpotent ise $\sigma(D_F) = 0$ dır. $\sigma\left(P(D_F)\right)$, $P(D_F)$ polinomunun $\sigma(D_F)$ de aldığı değerlerden oluştuğundan

$$\sigma\left(f(0)I + D_F\right) = f(0)$$

bulunur. Teoremin hipotezinden $f(0) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. O halde $\sigma(D_f) \neq 0$ dır ve $0 \notin \sigma(D_f)$ olduğundan D_f tersinebilirdir. Şimdi de D_F in E_{zw} cebirinde quasinilpotent operatör olduğunu göstermeliyiz. Bunun için operatörlerin spektral yarıçapını ifade eden

$$r\left(D_F\right) = \lim_{k\to\infty} \left\|D_F^k\right\|^{\frac{1}{k}}$$

Gelfand formülünü kullanacağız. İlk olarak $\left\|D_F^k\right\|^{\frac{1}{k}}$ ifadesini hesaplayalım. $g \in E_{zw}$ için konvolüsyon operatörü

$$\left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)(zw) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w} * g\right)(zw)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(D_F g\right)(zw) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \int_0^z \int_0^w F\left((z-u)(w-v)\right) g(uv)\, dv du \\
&= \int_0^z \int_0^w [F'\left((z-u)(w-v)\right) \\
&\quad + (z-u)(w-v) F''\left((z-u)(w-v)\right)] g(uv)\, dv du + F(0)\, g(zw) \\
&= \int_0^z \int_0^w [F'\left((z-u)(w-v)\right) + \\
&\quad + (z-u)(w-v) F''\left((z-u)(w-v)\right)] g(uv)\, dv du \\
&= \left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)(zw)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Duhamel operatörü konvolüsyon operatörü ile ifade edilebileceğinden

$$\begin{aligned}
\left|\left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)(zw)\right| &= \left|\int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) + \right. \\
& \quad (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))] g(uv)\, dv du| \\
&\leq \int_0^z \int_0^w |[F'((z-u)(w-v)) + \\
& \quad + (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))]| \, |g(uv)| \, |dv| \, |du| \\
&\leq \|F\|_n \|g\|_n |zw|
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\left|\left(K^2_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)(zw)\right| &= \left|\left[K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} \left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)\right](zw)\right| \\
&= \int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) \\
& \quad + (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))] K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g(uv)\, dv du \Big| \\
&= \int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) + (z-u)(w-v) \\
& \quad F''((z-u)(w-v))] \left\{ \int_0^u \int_0^v [F'((u-t)(v-\tau)) \right. \\
& \quad + \ ((u-t)(v-\tau)) F''((u-t)(v-\tau))] \, g(t\tau)\, d\tau dt\} \, dv du| \\
&\leq \int_0^z \int_0^w F'((z-u)(w-v)) + (z-u)(w-v) \\
& \quad F''((z-u)(w-v)) \left\{ \int_0^u \int_0^v |F'((u-t)(v-\tau))| \right. \\
& \quad + |(u-t)(v-\tau) F''((u-t)(v-\tau))| \, |g(t\tau)| \, |d\tau| \, |dt| \, |dv| \, |du| \\
&\leq \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{|zw|^2}{2!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tümevarım yöntemi ile

$$\left|\left(K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g\right)(zw)\right| \leq \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{|zw|^k}{k!} \tag{5.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Şimdi konvolüsyon operatörünün kısmi türevlerini hesaplayalım.

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right)(zw)\right| = \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))+\right.\right.$$
$$\left.+(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]g(uv)\,dvdu)\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(\int_0^z\int_0^w g((z-u)(w-v))\right)[F'(uv)+uvF''(uv)\,dvdu]\right| \\
&= \left|\int_0^z\int^w [g'((z-u)(w-v))+(z-u)(w-v)g''((z-u)(w-v))](F'(uv)+\right. \\
&\quad \left.+uvF''(uv))dvdu+g(0)(F'(zw)+zwF''(zw))\right| \\
&= \left|\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))+(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))][g'(uv)\right. \\
&\quad \left.+uvg''(uv)]dvdu+g(0)(F'(zw)+zwF''(zw))\right| \\
&\le \int_0^z\int_0^w |F'((z-u)(w-v))+(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))|\,|g'(uv)+ \\
&\quad +uvg''(uv)|\,|dv|\,|du|+|g(0)|\,|F'(zw)+zwF''(zw)| \\
&\le \|F\|_n\|g\|_n|zw|+\|F\|_n\|g\|_n \\
&\le \|F\|_n\|g\|_n(|zw|+1)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(K^2_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right)(zw)\right| = \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))\right. \\
&+(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]\left\{\int_0^u\int_0^v [F'((u-t)(v-\tau))\right. \\
&+\left.\left.(u-t)(v-\tau)F''((u-t)(v-\tau))]g(t\tau)\,d\tau dt\right\}dvdu\right| \\
&= \left|\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))\right. \\
&+(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]\left\{\int_0^u\int_0^v [F'((u-t)(v-\tau))\right. \\
&+(u-t)(v-\tau)F''((u-t)(v-\tau))][g'(t\tau)+t\tau g''(t\tau)\,d\tau dt] \\
&+\left.\left.g(0)[F'(uv)+uvF''(uv)]\right\}dvdu\right| \\
&\le \int_0^z\int_0^w |F'((z-u)(w-v))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))| \left\{ \int_0^u \int_0^v |F'((u-t)(v-\tau))| \right. \\
&+ |(u-t)(v-\tau) F''((u-t)(v-\tau))| \, |g'(t\tau) + t\tau g''(t\tau)| \, |d\tau| \, |dt| \\
&\left. + |g(0)| \, |F'(uv) + uvF''(uv)| \right\} |dv| \, |du| \\
&\leq \int_0^z \int_0^w |F'((z-u)(w-v)) \\
&+ (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))| \left(\int_0^u \int_0^v |F'((u-t)(v-\tau)) \right. \\
&\left. + (u-t)(v-\tau) F''((u-t)(v-\tau))| \, |g'(t\tau) + t\tau g''(t\tau)| \, |d\tau| \, |dt| \, |dv| \, |du| \right) \\
&+ \int_0^z \int_0^w F'((z-u)(w-v)) \\
&+ (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))| \, |g(0)| \, |F'(uv) + uvF''(uv)| \, |dv| \, |du| \\
&\leq \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{|zw|^2}{2} + \|F\|_n^2 \|g\|_n |zw| \\
&\leq \|F\|_n^2 \|g\|_n \left(\frac{|zw|^2}{2} + |zw| \right) \\
&\leq \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{\left(|zw|^2 + 1\right)^2}{2!}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur ve tümevarım yöntemiyle

$$
\left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \left(K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g \right)(zw) \right| \leq \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{\left(|zw|^2 + 1\right)^k}{k!} \tag{5.2}
$$

elde edilir. Kısmi türevleri hesaplamaya devam ettiğimizde,

$$
\left| \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} \left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} g \right)(zw) \right| = \left| \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} \int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) \right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\left. + (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))] g(uv) \, dv du \right| \\
= \;& \left| \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} \left(\int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) \right. \right. \\
&+ (z-u)(w-v) F''((z-u)(w-v))] \, [g'(uv) + uvg''(uv)] \, dv du \\
&\left. \left. + \; g(0) \left(F'(zw) + zwF''(zw) \right) \right) \right| \\
= \;& \left| \int_0^z \int_0^w [F'((z-u)(w-v)) \right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))][g^{(2)}(uv) \\
& +4uvg^{(3)}(uv)+(uv)^2 g^{(4)}(uv)]dvdu \\
& +(F'(zw)+zwF''(zw))g'(0)+(F'(zw)+zwF''(zw))g(0)| \\
\leq\ & \|F\|_n\|g\|_n|zw|+\|F\|_n\|g\|_n+\|F\|_n\|g\|_n \\
\leq\ & \|F\|_n\|g\|_n(|zw|+2)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial w^2}\left(K^2_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right)(zw)\right| &= \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}K^2_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right)(zw)\right| \\
&= \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))+\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]\left\{\int_0^u\int_0^v [F'((u-t)(v-\tau))\right. \\
& +[(u-t)(v-\tau)F''((u-t)(v-\tau))][g'(t\tau)+t\tau g''(t\tau)]d\tau dt \\
& +\ g(0)[F'(uv)+uvF''(uv)]\}\,dvdu)|) \\
=\ & \left|\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\left(\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))\right.\right. \\
& +(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]\int_0^u\int_0^v [F'((u-t)(v-\tau)) \\
& +(u-t)(v-\tau)F''((u-t)(v-\tau))[g'(t\tau)+t\tau g''(t\tau)]]) \\
& +\frac{\partial^2}{\partial z\partial w}\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v)) \\
& +(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))][F'(uv)+uvF''(uv)]g(0)\,dvdu| \\
=\ & \left|\int_0^z\int_0^w [F'((z-u)(w-v))\right. \\
& +(z-u)(w-v)F''((z-u)(w-v))]\int_0^u\int_0^v [F'((u-t)(v-\tau)) \\
& +(u-t)(v-\tau)F''((u-t)(v-\tau))][g^{(2)}(uv)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +4uvg^{(3)}(uv)+(uv)^2 g^{(4)}(uv)]d\tau dt \\
& +F'(0)\int_0^z\int_0^w F'((z-t)(w-\tau))[g^{(2)}(zw) \\
& +4(zw)g^{(4)}(zw)+(zw)^2 g^{(4)}(zw)]d\tau dt \\
& +\int_0^z\int_0^w [F''((z-u)(w-v))+4(z-u)(w-v) \\
& F^{(3)}((z-u)(w-v))+(z-u)^2(w-v)^2 f^{(4)}(z-u)(w-v)] \\
& [F'(uv)+uvF''(uv)]\,g(0)\,dvdu+[F'(zw)\cdot F'(zw)]\,g(0)| \\
\leq\ & \|F\|_n^2\|g\|_n\frac{|zw|^2}{2}+\|F\|_n^2\|g\|_n|zw|+\|F\|_n^2\|g\|_n|zw|+\|F\|_n^2\|g\|_n \\
\leq\ & \|F\|_n^2\|g\|_n\frac{(|zw|+2)^2}{2!}
\end{aligned}
$$

olarak hesaplanır. Tümevarım yönteminin kullanılması ile,

$$
\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial w^2}\left[\left(K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}\right)(zw)\right]\leq\|F\|_n^k\|g\|_n\frac{(|zw|+2)^k}{k!} \tag{5.3}
$$

bulunur. (5.1), (5.2), (5.3) eşitsizlikleri gözönünde bulundurulduğunda, $s=n+m$ olmak üzere,

$$
\left|\frac{\partial^s}{\partial z^n\partial w^m}\left(K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right)(zw)\right|\leq\|F\|_n^k\|g\|_n\frac{(|zw|+s)^k}{k!} \tag{5.4}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\left\|K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}g\right\|_n\leq\|F\|_n^k\|g\|_n\frac{(1+s)^k}{k!}
$$

olur ve buradan

$$
\left\|K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}\right\|_n\leq\|F\|_n^k\frac{(1+s)^k}{k!}
$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikte limite geçildiğinde,

$$
\left\|K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial w}}\right\|^{1/k}\leq\|F\|_n\frac{1+s}{(k!)^{1/k}}\to 0,\ \ (k\to\infty)
$$

bulunur. Böylece

$$r(D_F) = r\left(K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}}\right) = \lim_{k\to\infty} \left\| K^k_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}} \right\|^{1/k} = 0$$

dır. Yani $D_F = K_{\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial w}}$ operatörü E_{zw} uzayında quasinilpotent operatördür. Sonuç olarak, $f(0) \neq 0$ iken D_f operatörü tersinebilir olduğundan f de tersinebilirdir.

Sonuç 5.2. $(E_{zw}, \circledast)$ cebiri radikal olmayan Banach cebiridir.

İspat. $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinde $f(0) \neq 0$ iken D_f operatörünün tersinebilir olması en az bir $f \in E_{zw}$ nin quasinilpotent olmadığını gösterir. O halde $(E_{zw}, \circledast)$ cebiri radikal olmayan bir Banach cebiridir.

Teorem 5.3. $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinin $\mathcal{M}((E_{zw}, \circledast))$ maksimal idealler uzayı $h(f) = f(0)$ olacak şekilde bir tek homomorfizm içerir.

İspat. Teorem 2.1.21 *(d)* ve Teorem 5.1 gözönüne alındığında $(E_{zw}, \circledast)$ cebirinde maksimal idealler

$$\mathcal{M}((E_{zw}, \circledast)) = \{f \in E_{zw} : f\,|_{zw=0} = 0\}$$

şeklinde ifade edilir. Teorem 2.1.21 *(a), (b)* den $f \in \mathcal{M}((E_{zw}, \circledast))$ ise $h(f) = f(0)$ olacak şekilde bir $h : E_{zw} \to \mathbb{C}$ homomorfizmi vardır. Teorem 2.1.22 den $\sigma(f) = h(f)$ dir. Yani f nin spektrumları $h(f) = f(0)$ olacak şekildeki $h(f)$ lerden oluşmuştur. Kısaca $\sigma(f) = \{f(0)\}$ dır. Ayrıca Δ, E_{zw} nın bütün homomorfizmlerinin kümesi olsun. O halde

$$\begin{aligned} \hat{f} :\ & \Delta \to \mathbb{C} \\ & h \to \hat{f}(h) = h(f) \end{aligned}$$

Gelfand dönüşümüdür. Teorem 2.1.25 ve Teorem 5.1 den $\sigma(f) = \hat{f}(h) = \{h(f) : h \in \Delta\}$ dir. $f \in E_{zw}$ fonksiyonunun $\circledast$-tersinebilir olması için gerek ve yeter koşulun $f(0) \neq 0$ olması sebebiyle $h(f) = f(0)$ olacak şekilde bir tek homomorfizm vardır.

6. KAYNAKLAR

Abramovich, Y. A., Aliprantis, C. D., 2002. An Invitation to Operator Theory. American Mathematical Society. 530s. U.S.A

Conway, J.B., 2000. A Course in Operator. American Mathematical Society. 372s. U.S.A.

Dimovski, I., 1990. Convolutional Calculus. Kluwer Academic Publishers, 184s. Dordrecht.

Dunford, N., Schwartz, J.T., 1966. Linear Operators. Part I. Interscience, 858s. New York.

Gürdal, M., 2009(a). On the Extended Eigenvalues and Extended Eigenvectors of Shift Operator on the Wiener Algebra. Applied Mathematics Letters, 22, 1727-1729.

Gürdal, M., 2009(b). Description of Extended Eigenvalues and Extended Eigenvectors of Integration Operator on the Wiener Algebra. Expositiones Mathematicae, 27, 153-160.

Hille, E., Phillips, R., 1957. Functional Analysis and Semi Groups. American Mathematical Society. 808s. U.S.A.

Karaev, M.T., Tuna, H., 2004. Description of Maximal Ideal Space of Some Banach Algebra with Multiplication as Duhamel Product. Complex Variables: Theory and Application, 49(6), 449-457.

Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. A Banach Algebra Structure for the Wiener Algebra $W(\mathbb{D})$ of the Disc. Complex Variables: Theory and Applications, 50(4), 299-305.

Karaev, M.T., 2005(a). Some Applications of the Duhamel Product. Journal of Mathematical Sciences, 129 (4), 4009-4017.

Karaev, M.T., 2005(b). Invariant Subspaces, Cyclic Vectors, Commutant and

Extended Eigenvectors of Some Convolution Operators. Methods of Functional Analysis and Topology, 11, 48-59.

Karaev, M.T., 2005.(c) On Some Applications of Ordinary and Extended Duhamel Products. (Russian), Siberian Mathematical Journal, 46, 553-566.

Karaev, M.T., 2006(a). New proof of Nagnibida's Theorem. Journal of Function Spaces and Applications, 4, 85-90.

Karaev, M.T., 2006(b). On Extended Eigenvalues and Extended Eigenvectors of Some Operator Classes. Proceedings of the American Mathematical Society, 134, 2383-2392.

Koosis, P., 1998. Introduvtion to H_p Spaces. Cambridge University Press, New York.

Krabbe, G., 1970. Operational Calculus. Springer-Verlag, 349s. New York.

Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley Clasics Library Edition, 688s. New York.

Lavrent'ev, M.A., Shabat, B.V.,1973. Methods of the Theory of Functions of Complex Variable. Nauka, 736s. Moscow (in Russia).

Lax, P.D., 2002. Functional Analysis. Wiley-Interscience, 578p. Canada.

Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis. Cambridge University Press, 208s. New York.

Meise, R., Vogt, D., 1997. Introduction to Functional Analysis. Oxford University Press, 437s. New York.

Merryfield, K.G., Watson, S., 1991. A Local Algebra Structure for H^p of the Poly Disc. Colloqium Mathematicum, 62, 73-79.

Mikusinski, J., 1956. Operational Calculus. Pergemon Press, 495s. Oxford-Warszawa.

Nagnibida, N.I., 1981. Description of Commutants of Integration Operator in Analytic Spaces. Chernovtsy State University; translated from Siberian Mathematical Journal, 22, 127-131.

Nagnibida, N.I., 1984. Operators Commuting with the Multiple Integration in the Space of Analytic Functions. Siberian Mathematical Journal, 27 (2), 255-262.

Rudin, W., 1991. Functional Analysis. McGraw-Hill, 423s. New York.

Rynne, B. P., Youngson, M. A.,2000. Linear Functional Analysis. Springer-Verlag, 271s. London.

Stoll, M., 2000. Introduction to Real Analysis. Addison Wesley Longman, 550s. New York.

Tkachenko, V.A., 1979. Operators of Generalized Integration that can be Analytically Continued from the Origin. Matematicheskie Zametki, 25, 271-282.

Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 501s. New York.

Wigley, N.M., 1974. The Duhamel Product of Analytic Functions. Duke Mathematical Journal, 41, 211-217.

Wigley, N.M., 1975. A Banach Algebra Structure for H^p. Canadian Mathematical Bulletin., 18, 597-603.

EKLER

Tezden üretilen yayınlar ve bildiriler

- Saltan, S., Özel, Y., On Some Applications of a Special Integro-Differential Operators, International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava on his 70th Birth Anniversary, 18-21 August 2010, Bursa.
- Saltan, S., Özel, Y., On Some Applications of a Special Integro-Differential Operators, Journal of Function Spaces and Applications (kabul edildi).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Yasemin ÖZEL
Doğum Yeri ve Yılı	:	Fransa, 1985
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	:	Denizli Özel Servergazi Fen Lisesi, 2001-2004
Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2004-2008
Yüksek Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2009-

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Bartın Üniversitesi, İktisadi İdari Bilimler Fakültesi İşletme Bölümü, 2010-

Yayınları (SCI ve diğer makaleler):

1) Saltan, S., Özel, Y., On Some Applications of a Special Integro-Differential Operators, International Congress in Honour of Professor H. M. Srivastava on his 70th Birth Anniversary, 18-21 August 2010, Bursa.
2) Saltan, S., Özel, Y., On Some Applications of a Special Integro-Differential Operators, Journal of Function Spaces and Applications (kabul edildi).