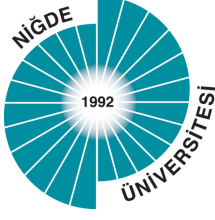


T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

BETA TİPİ DAĞILIMLAR VE İSTATİSTİKTEKİ
UYGULAMALARI

Burcu ŞİMŞEK

Haziran 2011



T.C.
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BETA TİPİ DAĞILIMLAR VE İSTATİSTİKTEKİ
UYGULAMALARI

Burcu ŞİMŞEK

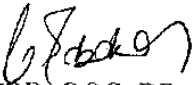
Yüksek Lisans Tezi

Danışman
Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ

Haziran 2011

Burcu ŞİMŞEK tarafından Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ danışmanlığında hazırlanan “ Beta Tipi Dağılımlar ve İstatistikteki Uygulamaları ” adlı bu çalışma jürimiz tarafından Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Başkan : PROF. DR. ONUR KÖKSOY, Niğde Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
İstatistik Bölümü


Üye : YRD. DOÇ. DR. GÜLİN TABAKAN, Aksaray Üniversitesi, Fen-Edebiyat
Fakültesi, Matematik Bölümü


Üye : DOÇ. DR. ALI İHSAN GENÇ, Niğde Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü

ONAY:

Bu tez, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 14/06/2011 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun/...../20.... tarih ve sayılı kararıyla kabul edilmiştir:

......./...../20...
Doç. Dr. Nurettin ACIR
MÜDÜR

ÖZET

BETA TİPİ DAĞILIMLAR VE İSTATİSTİKTEKİ UYGULAMALARI

ŞİMŞEK, Burcu

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ

Haziran 2011, 115 sayfa

Bu çalışmada iki pozitif şekil parametrelili ve $(0,1)$ aralığında tanımlı beta dağılımına alternatif olan beta tipi dağılımlardan Kumaraswamy dağılımı, iki yönlü kuvvet dağılımı, tamamlayıcı beta dağılımı ve bileşik beta dağılımı ele alınmıştır. Bu dağılımların özellikleri, diğer dağılımlarla olan ilişkileri, sıra istatistikleri, parametrelerinin tahmin edicileri ve rastgele sayı üretimleri üzerine çalışılmış ve dağılımlar çeşitli gerçek veri kümelerini modellemede kullanılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Beta dağılımı; Kumaraswamy dağılımı; İki yönlü kuvvet dağılımı; Tamamlayıcı beta dağılımı; Bileşik beta dağılımı; Sıra istatistikleri; Parametre tahmin edicileri; Rastgele sayı üretimi.

SUMMARY

BETA-TYPE DISTRIBUTIONS AND STATISTICAL APPLICATIONS

ŞİMŞEK, Burcu

Nigde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali İhsan GENÇ

June 2011, 115 pages

In this work beta-type distributions such as Kumaraswamy distribution, two-sided power distribution, the complementary beta distribution, the compound beta distribution, which are alternatively defined to beta distribution on $(0,1)$, are considered. We study the properties, the relationships with other distributions, order statistics, parameter estimation and random variate generations of the distributions. We also model the distributions with some real data sets.

Keywords: Beta distribution; Kumaraswamy distribution; Two-sided power distribution; Complementary beta distribution; Compound beta distribution; Order statistics; Parameter estimation; Random variate generation.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada beta dağılımı ve beta tipi dağılımlar (0,1) aralığında incelenip, bu dağılımların farklı şekilleri, temel özellikleri, diğer dağılımlarla olan ilişkileri, sıra istatistikleri, parametre tahmin edicileri ve rastgele sayı üretimleri ayrıntılarıyla verilmiştir. Ayrıca dağılımlar çeşitli veri kümelerini modellemede kullanılmıştır. Bu çalışmanın üniversitelerde bu konularda yapılan çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında başta emeği geçen ve desteklerini eksik etmeyen danışmanım Doç. Dr. Ali İhsan GENÇ'e, bu yaşıma kadar her zaman yanımda olan, beni her konuda destekleyen ve bu tez çalışma sürecinde de desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim ve saydığım aileme ve özellikle yanımda olduğunu bildiğim BABAM'a, bu tez çalışması sürecinde benden desteklerini esirgemeyen dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iii
SUMMARY	iv
ÖNSÖZ	v
TEŞEKKÜRLER	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
BÖLÜM I. GİRİŞ	1
BÖLÜM II. BETA DAĞILIMI	2
2.1 Beta ve Gamma Fonksiyonları	2
2.2 Tanım ve Dağılımın Şekilleri	4
2.3 Dağılımın Özellikleri	9
2.4 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi	15
2.5 Dağılımın Sıra İstatistikleri	20
2.6 Parametre Tahmini	23
2.7 Rastgele Sayı Üretimi	27
BÖLÜM III. KUMARASWAMY DAĞILIMI	29
3.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri	29
3.2 Dağılımın Özellikleri	34
3.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi	46
3.4 Dağılımın Sıra İstatistiği	48
3.5 Parametre Tahmini	49
3.6 Rastgele Sayı Üretimi	53

BÖLÜM IV. İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI	55
4.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri	55
4.2 Dağılımın Özellikleri	59
4.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla İlişkisi	65
4.4 Dağılımın Sıra İstatistiği	67
4.5 Parametre Tahmini.....	70
4.6 Rastgele Sayı Üretimi	72
BÖLÜM V. TAMAMLAYICI BETA DAĞILIMI.....	74
5.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri	74
5.2 Dağılımın Özellikleri	78
5.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi.....	85
5.4 Dağılımın Sıra İstatistiği	87
5.5 Parametre Tahmini.....	89
5.6 Rastgele Sayı Üretimi	91
BÖLÜM VI. BİLEŞİK BETA DAĞILIMI.....	92
6.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri	92
6.2 Dağılımın Özellikleri	98
6.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla İlişkisi	102
6.4 Dağılımın Sıra İstatistikleri	103
6.5 Parametre Tahmini.....	104
6.6 Rastgele Sayı Üretimi	104
BÖLÜM VII. UYGULAMALAR	106
7.1 Kablolu TV Oranı Veri Kümesi	106
7.2 Yiyecek Masrafı Oranı Veri Kümesi	108
7.3 HC Emisyonu Veri Kümesi.....	110

BÖLÜM VIII. SONUÇLAR	113
KAYNAKLAR.....	114

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 7.1 Kablolu TV oranı veri kümesinin özet istatistikleri	107
Çizelge 7.2 Kablolu TV oranı veri kümesinin beta tipi dağılımlarla modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır.....	107
Çizelge 7.3 Yiyecek masrafı oranı veri kümesinin özet istatistikleri	109
Çizelge 7.4 Yiyecek masrafı oranı veri kümesinin beta ve beta tipi dağılımlar ile modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır.....	109
Çizelge 7.5 HC emisyon veri kümesinin özet istatistikleri	111
Çizelge 7.6 HC emisyon veri kümesinin beta tipi dağılımlarla modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır.....	111

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$\alpha = 4, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun kesin artan olduğunu gösteren grafik.....	6
Şekil 2.2	$\alpha = 1, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun kesin azalan olduğunu gösteren grafik.....	6
Şekil 2.3	$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	7
Şekil 2.4	$\alpha = 4, \beta = 2; \alpha = 2, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	7
Şekil 2.5	$\alpha = \beta$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	8
Şekil 2.6	$\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	8
Şekil 3.1	$\alpha = 5, \beta = 2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	31
Şekil 3.2	$\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	31
Şekil 3.3	$\alpha = 1, \beta = 3$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	32
Şekil 3.4	$\alpha = 3, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	32
Şekil 3.5	$\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	33
Şekil 3.6	$\alpha = 2, \beta = 5/2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	33
Şekil 4.1	$\theta = \frac{1}{2}, n = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	57
Şekil 4.2	$\theta = \frac{3}{4}$ ve $n = \frac{1}{2}$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	57
Şekil 4.3	$n = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	58
Şekil 4.4	$\theta = \frac{1}{2}, n = 2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	58
Şekil 4.5	$\theta = 1, n = 3$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	59

Şekil 5.1	$\alpha = \beta$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	75
Şekil 5.2	$\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	76
Şekil 5.3	$\alpha > 0, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	76
Şekil 5.4	$0 < \alpha, \beta < 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	77
Şekil 5.5	$\alpha > 1, \beta > 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....	77
Şekil 6.1	$a = b = 0.5$ ve $\alpha = \beta = 0.5$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	95
Şekil 6.2	$a = b = 4$ ve $\alpha = \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	95
Şekil 6.3	$a = b = 4$ ve $\alpha = 0.5, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği....	96
Şekil 6.4	$a = 2, b = 4$ ve $\alpha = \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	96
Şekil 6.5	$a = 0.5, b = 4$ ve $\alpha = \beta = 0.5$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği..	97
Şekil 6.6	$a = b = 4$ ve $\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	97
Şekil 6.7	$a = 2, b = 1$ ve $\alpha = 4, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.....	98
Şekil 7.1	Kablolu TV oranı verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar.....	108
Şekil 7.2	Yiyecek masrafı oranı verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar.....	110
Şekil 7.3	HC emisyon verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar.....	112

BÖLÜM I

GİRİŞ

Beta dağılımı istatistikte önemli kullanım yerlerine sahip bir dağılımdır. Beta dağılımı modellemede, Bayesçi istatistikte, sağ kalım analizinde ve sıra istatistikleri teorisinde ve son yıllarda da beta genelleştirilmiş dağılımlarda karşımıza çıkmaktadır. Sahip olduğu zengin şekil çeşitliliği, beta dağılımını literatürde önemli kılmıştır.

Literatürde beta dağılımına alternatif çeşitli dağılımlar tanımlanmıştır. Beta tipi olarak sınıflandıracağımız bu dağılımların bazılarının, özellikle hesaplama ve matematiksel kullanılabilirlik açısından beta dağılımından daha iyi olduğu ortaya çıkarılmıştır. Bunlar genel özellikleri ile birbirlerine benzerlerken çeşitli açılardan da farklılıklara sahiptirler. Matematiksel kullanılabilirlik ve hesaplama kolaylıkları yönlerinden birbirlerinden ayrılırlar. Literatürde rastladığımız beta tipi dağılımlara Kumaraswamy dağılımı [1], iki yönlü kuvvet (two-sided power) dağılımı [2,3], tamamlayıcı beta (complementary beta) dağılımı [4], bileşik beta (compound beta) dağılımı [5] örnek verilebilir. Bu dağılımlar şekil itibarıyla beta dağılımına benzerlik gösterirler.

Bu tez çalışmasında beta dağılımı ve beta tipi dağılımlar $(0,1)$ aralığında geniş bir şekilde incelenmiştir. Parametrelerinin farklı değerlerine karşılık sağa çarpık, sola çarpık, düzgün dağılımlı, simetrik, U-şekilli, J-şekilli,...vb. şekiller elde edilmiştir. Beta dağılımı ve beta tipi dağılımların benzer şekillere sahip oldukları gösterilmiştir. Ayrıca yine parametrelere bağlı olarak, parametrelerin farklı değerleri için diğer dağılımlarla olan ilişkileri gösterilmiştir. Özellikle beta tipi dağılımların beta dağılımı ile ilişkileri verilmiştir. Her bir dağılımın özellikleri ayrıntıları ile teorik bir şekilde verilmiştir. Dağılımların öncelikle r -inci mertebeden momentleri ve buna bağlı olan beklenen değerleri ve varyansları bulunmuştur. Ayrıca dağılımların r -inci sıra istatistikleri ve r -inci sıra istatistiklerinin k -inci mertebeden momentleri verilmiştir. Bunların yanı sıra parametre tahmin edicileri ve rastgele sayı üretimleri verilmiştir.

BÖLÜM II

BETA DAĞILIMI

Beta dağılımı kimyasalların yüzde içerikleri ve yüzdelik değişimler gibi oransal veri kümelerini ve tek boyutluda kompozisyonel (compositional) veri kümelerini modellemede kullanılır [6]. Beta dağılımı ayrıca risk analizinde, ekonometride kesirsel cevap değişkenini modellemede ve Bayesçi istatistikte parametrelerin önsel (prior) dağılımı olarak kullanılır [7-9].

Beta dağılımı ile ilgili bu bölümde verilen özellikler birçok kaynakta bulunabilir. Örneğin, [10,11].

2.1 Beta ve Gamma Fonksiyonları

Beta tipi dağılımların özellikleri çoğunlukla beta ve gamma fonksiyonlarına dayalı olarak elde edilir. Bu kısımda bu fonksiyonlar tanıtılıp kısaca özellikleri verilecektir.

α , β parametrelerine bağlı beta fonksiyonu $B(\alpha, \beta)$; $\alpha, \beta > 0$ ile, c sabitli gamma fonksiyonu $\Gamma(c)$, $c > 0$ ile ve c sabitli di-gamma fonksiyonu $\psi(c)$, $c > 0$ ile ifade edilir. Bunlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

Beta fonksiyonu

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(c) = \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{c-1} dx$$

Di-gamma fonksiyonu

$$\psi(c) = \frac{d}{dc} [\log \Gamma(c)] = \frac{\Gamma'(c)}{\Gamma(c)}$$

şeklindedir. Böylece beta ve gamma fonksiyonları arasındaki ilişki

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = B(\beta, \alpha)$$

olur. Ayrıca

$$\Gamma(c) = (c-1)\Gamma(c-1)$$

ve

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta)$$

özellikleri de mevcuttur.

Eğer α, β ve c tamsayı iseler

$$\Gamma(c) = (c-1)!$$

olur ve buradan

$$B(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha + \beta - 1)!}$$

elde edilir. Özel olarak $\alpha=1, \beta=1$ ve $\alpha=\frac{1}{2}, \beta=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$B(1,1) = 1$$

$$B(1/2, 1/2) = \pi$$

bulunur. Ayrıca $\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ dir.

2.2 Tanım ve Dağılımın Şekilleri

Bu kısımda beta tipi dağılımların temelini teşkil eden beta dağılımının tanımı ve buna bağlı özellikleri verilecektir. Ayrıca beta dağılımının parametrelerine bağlı olarak değişen farklı şekilleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

olarak verilen X rastgele değişkenine *beta dağılımına* sahiptir denir ve $X \sim Be(\alpha, \beta)$ yazılır.

Tamamlanmamış beta fonksiyonu oranı olan

$$I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

fonksiyonu beta dağılımının *birikimli dağılım fonksiyonudur*.

α ve β birer tamsayı ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{(\alpha + \beta - 1)! x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{(\alpha - 1)! (\beta - 1)!}, \quad 0 < x < 1, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$$

olur.

$a \leq x \leq b$ ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{(x-a)^{\alpha-1} (b-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)(b-a)^{\alpha+\beta-1}}, \quad a \leq x \leq b, \alpha, \beta > 0$$

Burada a konum parametresi, $b-a$ ölçek parametresidir.

Beta dağılımı, α ve β parametrelerinin farklı değerlerine karşılık çeşitli şekiller alır. Örneğin,

$\alpha > 1, \beta = 1$ iken yoğunluk fonksiyonu kesin artandır,

$\alpha = 1, \beta > 1$ iken yoğunluk fonksiyonu kesin azalandır,

$\alpha < 1, \beta < 1$ iken yoğunluk fonksiyonu U – şekillidir,

$\alpha > 1, \beta > 1$ iken yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir (unimodal) ve

$\alpha = \beta$ durumunda yoğunluk fonksiyonu $\frac{1}{2}$ ye göre simetriktir. Bu durumda dağılımın ortalaması $\frac{1}{2}$ ve varyansı $\frac{1}{4(2\alpha + 1)}$ dir. Burada α arttıkça yoğunluk daha konsantre olur, fakat simetriklik devam eder. Beta fonksiyonu simetriklik özelliği gösterir.

Yani $X \sim Be(\alpha, \beta)$ iken

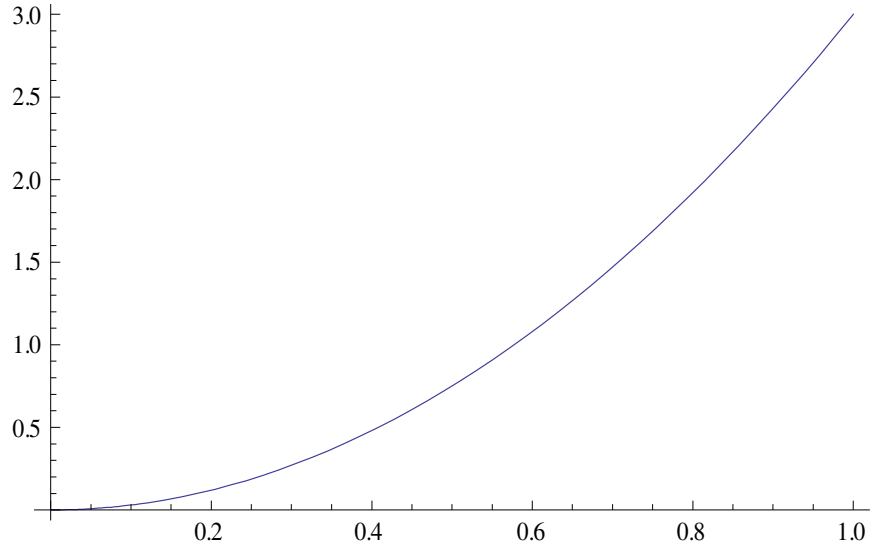
$$P[X_{\alpha, \beta} \leq x] = 1 - P[X_{\beta, \alpha} \leq (1 - x)]$$

$$= P[X_{\beta, \alpha} > (1 - x)]$$

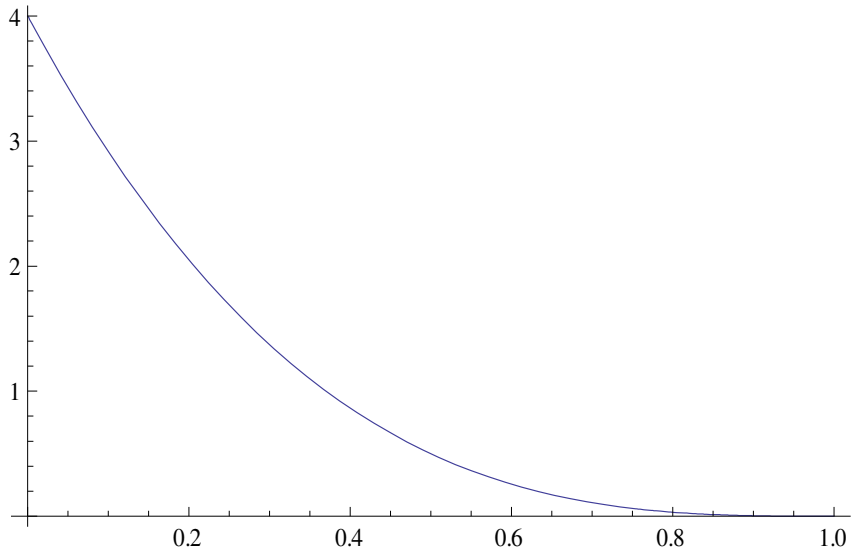
$$= F_{X_{\alpha, \beta}}(x)$$

$$= 1 - F_{X_{\beta, \alpha}}(1 - x)$$

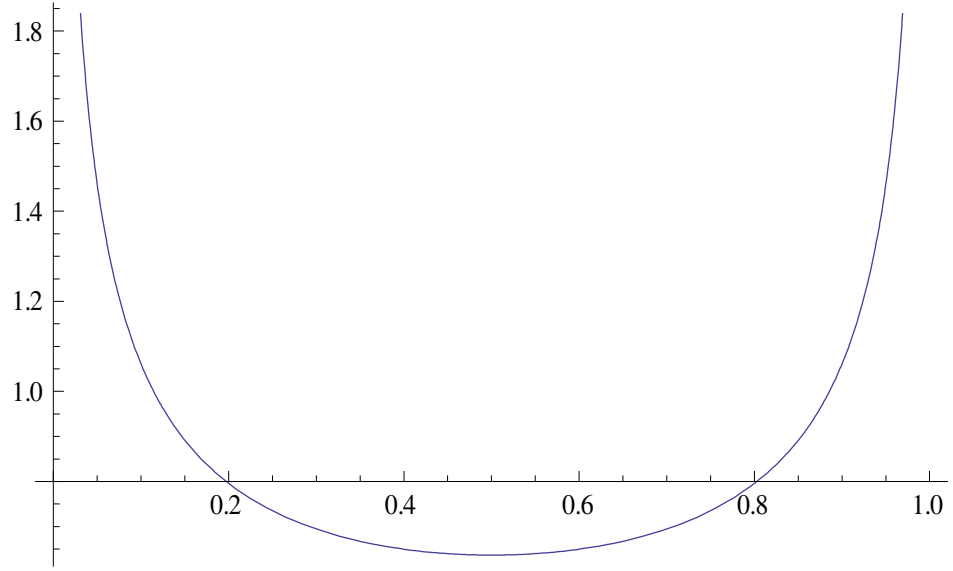
olur. Ayrıca $\alpha = \beta = 1$ iken beta dağılımı $(0,1)$ aralığı üzerinden düzgün dağılıma indirgenir. Böylece düzgün dağılımın beta ailesinin bir üyesi olduğunu söyleyebiliriz. Beta dağılımı önemli başka dağılımlar ve fonksiyonlar ile de ilişkilidir.



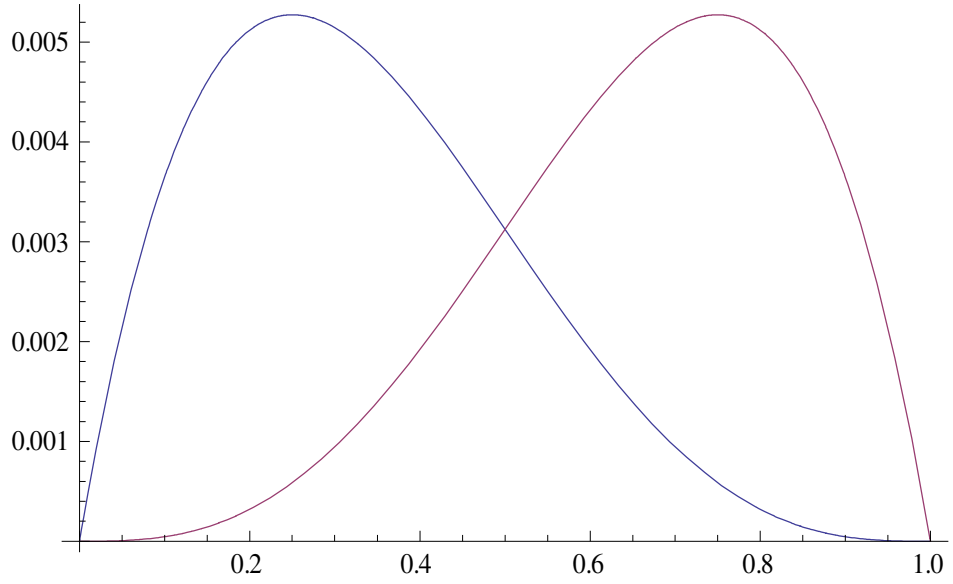
Şekil 2.1 $\alpha = 4, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun kesin artan olduğunu gösteren grafik



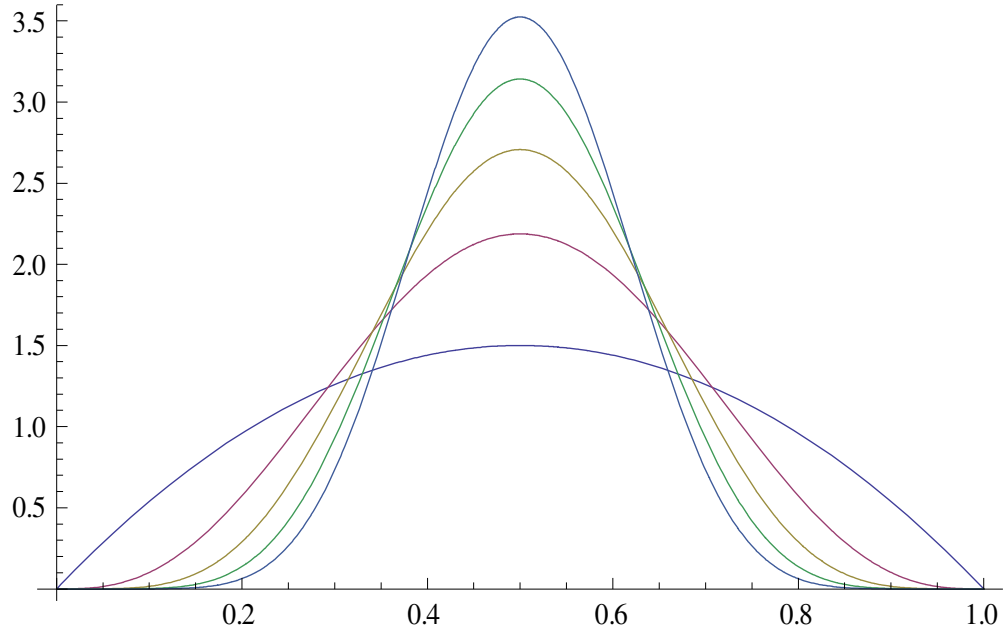
Şekil 2.2 $\alpha = 1, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun kesin azalan olduğunu gösteren grafik



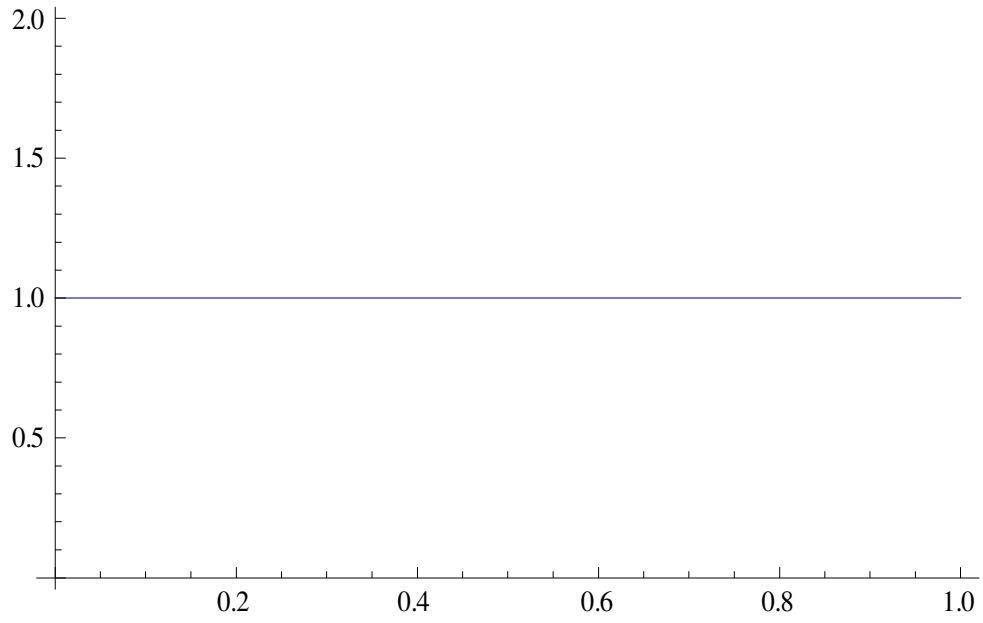
Şekil 2.3 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.4 $\alpha = 4, \beta = 2$; $\alpha = 2, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.5 $\alpha = \beta$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.6 $\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

2.3 Dağılımın Özellikleri

Bu kısımda beta dağılımının özellikleri verilecektir. Bu özellikler beta dağılımına alternatif olarak tanımlanan diğer dağılımların özellikleri ile karşılaştırmada kullanılacaktır.

Teorem 2.3.1 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin r -inci mertebeden momentleri

$$E(X^r) = m_r = \frac{B(\alpha + r, \beta)}{B(\alpha, \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.1)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$\begin{aligned} E(X^r) = m_r &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{r+\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{r+\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} B(\alpha + r, \beta) \quad , \quad \alpha > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin ortalaması (beklenen değeri)

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad , \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.2)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ve

$$\mu = E(X)$$

dir. O halde (2.1) de $r = 1$ alınır

$$E(X) = \frac{B(\alpha+1, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$$

olur. Beta fonksiyonunun gamma fonksiyonu ile ilişkisi kullanılırsa

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)]}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.3)$$

dır.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ve

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (2.4)$$

dir. O halde (2.1) de $r=2$ alınır

$$E(X^2) = \frac{B(\alpha+2, \beta)}{B(\alpha, \beta)}$$

olur. Burada beta fonksiyonunun gamma fonksiyonu ile ilişkisi kullanılırsa

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

bulunur. Böylece (2.2) ve (2.5) eşitlikleri (2.4) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Var(X) = \sigma^2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha\beta}{[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)]}, \quad \alpha > 1, \beta > 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.4 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin çarpıklık (skewness) ölçüsü

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{2(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 1)^{1/2}}{(\alpha + \beta + 2)(\beta\alpha)^{1/2}}, \quad (2.6)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} \\ &= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2[E(X)]^3}{\sigma^3}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

dir. O halde (2.1) de $r = 3$ alınırsa

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= \frac{B(\alpha+3, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta+3)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.3.3 den (2.4) eşitliği,

$$E(X^2) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

Teorem 2.3.2 den (2.2) eşitliği,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Teorem 2.3.3 den (2.3) eşitliği,

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

olduğundan

$$\sigma^3 = \frac{(\alpha\beta)^{3/2}}{(\alpha+\beta)^3(\alpha+\beta+1)^{3/2}}, \tag{2.9}$$

olur. Şimdi (2.2), (2.4), (2.8) ve (2.9) eşitlikleri (2.7) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\gamma_1 = \frac{2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)^{1/2}}{(\alpha+\beta+2)(\alpha\beta)^{1/2}}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.5 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin sivrilik (kurtosis) ölçüsü

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{3(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + 1)(2\beta - \alpha)}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)} + \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ve

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - [E(X)]^4}{\sigma^4} \end{aligned} \quad (2.11)$$

dir. O halde (2.1) de $r=4$ alınırsa

$$\begin{aligned} E(X^4) &= \frac{B(\alpha + 4, \beta)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(\alpha + 4)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta + 4)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1)\alpha}{(\alpha + \beta + 3)(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Teorem 2.3.3. deki (2.3) eşitliği kullanılırsa

$$\sigma^4 = \frac{(\alpha\beta)^2}{(\alpha + \beta)^4(\alpha + \beta + 1)^2}, \quad (2.13)$$

elde edilir. O halde (2.12), (2.13) ve Teorem 2.3.4 deki (2.8), Teorem 2.3.3 deki (2.4), Teorem 2.3.2 deki (2.2) eşitlikleri (2.11) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\gamma_2 = \frac{3(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + 1)(2\beta - \alpha)}{\alpha\beta(\alpha + \beta + 2)(\alpha + \beta + 3)} + \frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.6 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin modu

$$Mod(X) = \frac{(\alpha - 1)}{(\alpha + \beta - 2)} \quad , \quad \alpha > 1, \beta > 1, \quad (2.14)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad , \quad 0 < x < 1$$

olup, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimize eden x değeri bulunmalıdır. O halde

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [(\alpha - 1)x^{\alpha-2} (1-x)^{\beta-1} + (\beta - 1)x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2} (-1)] = 0$$

$$[(\alpha - 1)x^{\alpha-2} (1-x)^{\beta-1} - (\beta - 1)x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-2}] = 0$$

buradan da

$$Mod(x) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \quad , \quad \alpha > 1, \beta > 1$$

elde edilir.

Teorem 2.3.7 $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin değişim katsayısı (coefficient of variation)

$$CV = \left[\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)} \right]^{1/2}, \quad (2.15)$$

dir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ve değişim katsayısı

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}, \quad (2.16)$$

(2.2) ve (2.3) eşitlikleri (2.16) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} CV &= \frac{(\alpha\beta)^{1/2} / (\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)^{1/2}}{\alpha / (\alpha + \beta)} \\ &= \left[\frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta + 1)} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.4 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi

Beta dağılımı bazı önemli dağılımları, parametrelerinin özel durumlarında içerir. Bu kısımda beta dağılımının parametrelerinin farklı değerlerine karşılık gelen dağılımlarla ilişkileri incelenecektir.

$X \sim Be(\alpha, \beta)$ olsun. O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 2.4.1 $X \sim Be\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ise X rastgele değişkeni arcsin dağılımına sahiptir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

şeklindedir. O halde $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} x^{-1/2} (1-x)^{-1/2}$$

ve

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1)}$$

$$= \pi$$

olup

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x-x^2}}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu arcsin dağılımına aittir.

Teorem 2.4.2 $X \sim Be(1,1)$ ise X rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahiptir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

şeklindedir. O halde $\alpha = \beta = 1$ alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{B(1,1)}$$

ve

$$B(1,1) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)} = 1$$

olup

$$f(x) = 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılıma aittir.

Teorem 2.4.3 $X \sim Be(\alpha, 1)$ ise X rastgele değişkeni kuvvet fonksiyonu dağılımına sahiptir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

şeklindedir. O halde $\beta = 1$ alınırsa

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, 1)} x^{\alpha-1}$$

ve

$$B(\alpha, 1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}$$

olup

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu kuvvet fonksiyonu dağılımına aittir.

Teorem 2.4.4 $X \sim Be(i, n-i+1)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, ise X rastgele değişkeni n hacimli, p parametrelili binom dağılımına sahiptir.

İspat: $X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

şeklindedir. O halde $\alpha = i, \beta = n - i + 1$ alınır

$$f(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} x^{i-1} (1-x)^{n-i}$$

ve

$$\begin{aligned} B(i, n-i+1) &= \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{(i-1)!(n-i)!}{n!} \end{aligned}$$

olup

$$f(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i}$$

$$f(x) = \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu binom dağılımına aittir. İspat böylece biter.

Gamma dağılımı aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir ve istatistikte bekleme sürelerini modellemede ve güvenilirlik (reliability) analizinde kullanılır. Dağılımın şekli sağa çarpıktır.

$$f_{GA}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad 0 < x < \infty, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Bu dağılımı $GA(\alpha, \beta)$ ile gösteririz.

Teorem 2.4.6 $Y \sim GA(\alpha, 1)$, $Z \sim GA(\beta, 1)$ ve Y, Z rastgele değişkenleri bağımsız ise

$$\frac{Y}{Y+Z} \sim Be(\alpha, \beta)$$

dır.

İspat: $Y \sim GA(\alpha_1, \beta)$, $Z \sim GA(\alpha_2, \beta)$ ve Y, Z rastgele değişkenleri bağımsız olduklarından, ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları

$$f(y, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} z^{\beta-1} \exp(-y-z) \quad , \quad 0 < y, z < \infty$$

şeklinde dir. Burada $X_1 = \frac{Y}{Y+Z}$ ve $X_2 = Y+Z$ seçelim, o halde dönüşümün tersi

$$y = x_1 x_2$$

$$z = x_2 (1 - x_1)$$

$$Y \text{ ve } Z \text{ nin uzayı } A = \{(y, z) : 0 < y < \infty, 0 < z < \infty\}$$

$$X_1 \text{ ve } X_2 \text{ nin uzayı } B = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < \infty\}$$

Böylece dönüşüm A yı B üzerine 1-1 götürür. O halde dönüşümün jakobiyesi

$$J = x_2, \quad x_2 \neq 0$$

olur. O halde,

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x_2^{\alpha+\beta-1} \exp(-x_2) \quad , \quad 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < \infty$$

olur. X_1 in marjinali

$$\begin{aligned}
g(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2) dx_2 \\
&= \frac{x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} x_2^{\alpha+\beta-1} \exp(-x_2) dx_2 \\
&= \frac{x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+\beta) \\
&= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x_1^{\alpha-1} (1-x_1)^{\beta-1} \quad , \quad 0 < x_1 < 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu beta dağılımına aittir. O halde,

$$X_1 \sim Be(\alpha, \beta)$$

dır.

2.5 Dağılımın Sıra İstatistikleri

Bu bölümde [12] kaynağındaki çalışmalar ayrıntılı verilmiştir. Beta dağılımının r . sıra istatistiğinin momentlerini bulmada Kampe de Feriet fonksiyonu kullanılır. Bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}
&F_{C:D}^{A:B} \left((a):(b); \dots, (b_n); (c):(d_n); x_1, \dots, x_n \right) \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{(c)_{m_1+\dots+m_n} (d_1)_{m_1} \dots (d_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

dir.

Burada $a = (a_1, \dots, a_A)$, $b = (b_{i,1}, \dots, b_{i,B})$, $c = (c_1, \dots, c_C)$, $d = (d_{i,1}, \dots, d_{i,D})$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir.

Beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ beta dağılımından alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri $X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \dots \leq X_{(n:n)}$ olsun. Sıra istatistiğinin genel formülü:

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(y)\}^{r-1} \{1-F(y)\}^{n-r} f(y), \quad 0 < y < 1, \quad (2.18)$$

O halde beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırası ile

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad (2.19)$$

ve

$$F(x) = I_x(\alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad (2.20)$$

dir. O halde (2.19) ve (2.20) eşitlikleri (2.18) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, beta dağılımının r -inci sıra istatistiği

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)! B(\alpha, \beta)} \{I_x(\alpha, \beta)\}^{r-1} \{1-I_x(\alpha, \beta)\}^{n-r} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

olur.

Beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin k -inci mertebeden momentleri aşağıdaki gibi bulunur. $Y = X_{r:n}$ denilirse

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!B(\alpha, \beta)} \times \int_0^1 \{I_y(\alpha, \beta)\}^{r-1} \{1-I_y(\alpha, \beta)\}^{n-r} y^{\alpha+k-1} (1-y)^{\beta-1} dy, \quad (2.21)$$

olur. Burada binom açılımından

$$\{1-I_y(\alpha, \beta)\}^{n-r} = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{n-r}{i} [I_y(\alpha, \beta)]^i, \quad (2.22)$$

olup (2.22) eşitliği (2.21) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!B(\alpha, \beta)} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{n-r}{i} \times \int_0^1 \{I_y(\alpha, \beta)\}^{r+i-1} y^{\alpha+k-1} (1-y)^{\beta-1} dy$$

elde edilir. Burada

$$I(k, i) = \int_0^1 \{I_y(\alpha, \beta)\}^{r+i-1} y^{\alpha+k-1} (1-y)^{\beta-1} dy$$

dır ve

$$I_x(\alpha, \beta) = \frac{x^\alpha}{B(\alpha, \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)_k x^k}{(\alpha+k)k!}$$

serisi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
I(k, i) &= \int_0^1 y^{\alpha+k-1} (1-y)^{\beta-1} \left\{ \frac{x^\alpha}{B(\alpha, \beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)_k x^k}{(\alpha+k)k!} \right\}^{r+i-1} dy \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{r+i-1}=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)_{m_1} \dots (1-\beta)_{m_{r+i-1}}}{B^{r+i-1}(\alpha, \beta) (\alpha+m_1) \dots (\alpha+m_{r+i-1}) m_1! \dots m_{r+i-1}!} \\
&\quad \times \int_0^1 y^{k+\alpha(r+i)+m_1+\dots+m_{r+i-1}} (1-y)^{\beta-1} dy \\
&= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{r+i-1}=0}^{\infty} \frac{(1-\beta)_{m_1} \dots (1-\beta)_{m_{r+i-1}}}{B^{r+i-1}(\alpha, \beta) (\alpha+m_1) \dots (\alpha+m_{r+i-1}) m_1! \dots m_{r+i-1}!} \\
&\quad \times B(k + \alpha(r+i) + m_1 + \dots + m_{r+i-1}, \beta)
\end{aligned}$$

olur ve burada (2.17) eşitliği uyarlanırsa

$$\begin{aligned}
I(k, i) &= \alpha^{1-r-i} B^{1-r-i}(\alpha, \beta) B(b, k + \alpha(r+i)) \\
&\quad \times F_{1:1}^{1:2} \left(\begin{matrix} (k + \alpha(r+i)) : (1-\beta, \alpha); \dots; (1-\beta, \alpha) \\ ; (\beta + k + \alpha(r+i)) : (\alpha+1); \dots; (\alpha+1); 1, \dots, 1 \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
E(X_{r:n}^k) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{n-r}{i} \alpha^{1-r-i} B^{1-r-i}(\alpha, \beta) B(b, k + \alpha(r+i)) \\
&\quad \times F_{1:1}^{1:2} \left(\begin{matrix} (k + \alpha(r+i)) : (1-\beta, \alpha); \dots; (1-\beta, \alpha) \\ ; (\beta + k + \alpha(r+i)) : (\alpha+1); \dots; (\alpha+1); 1, \dots, 1 \end{matrix} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2.6 Parametre Tahmini

Beta dağılımının parametrelerinin tahmin edicilerini bulmak için momentler yöntemi ve maksimum olabilirlik yöntemi kullanılabilir. Momentler yöntemi dağılımın momentlerinin karşılık gelen örneklem momentlerine eşitlenip meydana gelen

denklem sisteminin eş anlı çözümü ile bulunur. Maksimum olabilirlik tahmin edicileri ise örneklem verildiğinde olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden parametre değerleri olarak tanımlanır. Bu kısımda her iki yöntem sonucu elde edilen tahmin ediciler verilecektir.

$X \sim Be(\alpha, \beta)$ ise α ve β nın momentler yöntemi tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur.

İki parametre olduğundan (2.2) ve (2.5) eşitlikleri sırasıyla,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

ve

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

bulunmuştu. Şimdi $X_1, X_2, \dots, X_n$, dağılımdan alınmış n birimlik bir rastgele örneklem olsun.

Örneklem ortalaması

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

ve örneklem varyansı

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

olmak üzere

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = S^2 + (\bar{X})^2$$

bağıntısı vardır.

Şimdi karşılık gelen momentler birbirine eşitlenirse

$$\bar{X} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (2.23)$$

ve

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \quad (2.24)$$

bulunur. Bu son eşitliklerden yani (2.23) ve (2.24) den

$$\bar{X} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{X}\beta}{1 - \bar{X}}, \quad (2.25)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= S^2 + (\bar{X})^2 \\ &= \frac{\frac{\bar{X}\beta}{1 - \bar{X}} \left(\frac{\bar{X}\beta}{1 - \bar{X}} + 1 \right)}{\left(\frac{\bar{X}\beta}{1 - \bar{X}} + \beta + 1 \right) \left(\frac{\bar{X}\beta}{1 - \bar{X}} + \beta \right)} \\ &= \frac{\bar{X}(\bar{X}\beta + 1 - \bar{X})}{\beta + 1 - \bar{X}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece β nın momentler yöntemi tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_{MM} = (1 - \bar{X}) \left[\frac{\bar{X}(1 - \bar{X})}{S^2} - 1 \right], \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.26) eşitliği (2.25) eşitliğinde yerine yazılırsa α nın momentler yöntemi tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}_{MM} = \bar{X} \left[\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{S^2} - 1 \right], \quad (2.27)$$

elde edilir.

Böylece parametrelerin momentler yöntemi tahmin edicileri bulunmuş olur.

Aşağıda dağılımın parametrelerinin maksimum olabilirlik tahmin edicileri bulunacaktır. Olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \end{aligned}$$

olarak verilir. Olabilirlik fonksiyonu ve onun logaritması aynı parametre değerlerinde maksimize olacağından maksimize edilecek log-olabilirlik fonksiyonu

$$\ell(\alpha, \beta) = n \log \frac{1}{B(\alpha, \beta)} + \sum [(\alpha-1) \log x_i + (\beta-1) \log(1-x_i)]$$

olarak verilir. ℓ nin α ve β ya göre ayrı ayrı türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki olabilirlik kestirim denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = n \left[\Psi \left(\hat{\alpha}_{ML} + \hat{\beta}_{ML} \right) - \Psi \left(\hat{\alpha}_{ML} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \log x_i = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = n \left[\Psi \left(\hat{\alpha}_{ML} + \hat{\beta}_{ML} \right) - \Psi \left(\hat{\beta}_{ML} \right) \right] + \sum_{i=1}^n \log(1-x_i) = 0$$

olur. O halde α ve β nin $\hat{\alpha}_{ML}$ ve $\hat{\beta}_{ML}$ maksimum olabilirlik tahmin edicileri

$$\Psi \left(\hat{\alpha}_{ML} \right) - \Psi \left(\hat{\alpha}_{ML} + \hat{\beta}_{ML} \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \log x_i$$

$$\Psi\left(\hat{\beta}_{ML}\right)-\Psi\left(\hat{\alpha}_{ML}+\hat{\beta}_{ML}\right)=n^{-1}\sum_{i=1}^n\log(1-x_i)$$

şeklinde kapalı formda elde edilir. Bulunan bu tahmin ediciler kapalı formda olduklarından tahmin edicilerin hesaplanmalarında Newton yöntemi ya da Newton-benzeri bir iteratif yöntem kullanılmalıdır.

2.7 Rastgele Sayı Üretimi

U , $(0,1)$ üzerindeki düzgün dağılım olsun. Herhangi bir dağılımdan birkaç yolla rastgele sayı üretilebilir. Bunlardan biri birikimli dağılım fonksiyonunun tersini kullanan olasılık integral dönüşümü ve diğeri de dağılımlar arasındaki fonksiyonel ilişkileri kullanarak yapılan yöntemdir. Bu kısımda Teorem 2.4.6 kullanılarak beta dağılımından rastgele sayı üretim biçimi verilecektir.

Şimdi, $U_1, U_2, \dots, U_\alpha \sim U(0,1)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem olsun. Bu değerlerin logaritması alınırsa

$$-\log U_1, -\log U_2, \dots, -\log U_\alpha \sim EXP(1) \equiv GA(1,1)$$

ve toplamaları

$$\sum_{i=1}^{\alpha} -\log U_i = -\sum_{i=1}^{\alpha} \log U_i = -\log \prod_{i=1}^{\alpha} U_i$$

bulunur. O halde

$$-\log \prod_{i=1}^{\alpha} U_i \sim GA(\alpha,1)$$

dir. Benzer şekilde $V_1, V_2, \dots, V_\beta \sim U(0,1)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem olsun. Bu değerlerin logaritması alınırsa

$$-\log V_1, -\log V_2, \dots, -\log V_\beta \sim EXP(1) \equiv GA(1,1)$$

ve toplamaları

$$\sum_{i=1}^{\beta} -\log V_i = -\sum_{i=1}^{\beta} \log V_i = -\log \prod_{i=1}^{\beta} V_i$$

o halde

$$-\log \prod_{i=1}^{\beta} V_i \sim GA(\beta, 1)$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{GA(\alpha, 1)}{GA(\alpha, 1) + GA(\beta, 1)} \sim Be(\alpha, \beta)$$

olduğundan

$$\frac{-\log \prod_{i=1}^{\alpha} U_i}{-\log \prod_{i=1}^{\alpha} U_i - \log \prod_{i=1}^{\beta} V_i} \sim Be(\alpha, \beta)$$

şeklinde beta dağılımından bir rastgele sayı üretilmiş olur.

BÖLÜM III

KUMARASWAMY DAĞILIMI

Bu dağılım Kumaraswamy [1] tarafından hidrolojide uygulamaları bulunan alttan ve üstten sınırlı rastgele süreçler için önerilmiştir. Bu dağılım beta dağılımına benzetmekle beraber gerek olasılık yoğunluk fonksiyonu gerekse birikimli dağılım fonksiyonunun daha basit kapalı formda olması nedeniyle dağılımın kullanımı daha kolaydır. Bu dağılım hidroloji ve ilgili alanlarda yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Son olarak Jones [13] dağılımın matematiksel özelliklerini çalışmıştır.

3.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri

Bu bölümde Kumaraswamy dağılımının tanımı ve parametrelerine bağlı olarak farklılık gösteren şekilleri verilecektir.

Tanım 3.1.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

ile verilen X rastgele değişkenine *Kumaraswamy dağılımına* sahiptir denir ve

$$X \sim K(\alpha, \beta)$$

şeklinde gösterilir.

Kumaraswamy dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x \alpha\beta t^{\alpha-1} (1-t^\alpha)^{\beta-1} dt \end{aligned}$$

$t^\alpha = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\alpha t^{\alpha-1} dt = du$ olur. O halde

$$F(x) = \int \beta (1-u)^{\beta-1} du$$

dır. Burada da $(1-u) = v$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$F(x) = -\int \beta v^{\beta-1} dv$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-(1-t^\alpha)^\beta \right]_0^x \\ &= 1 - (1-x^\alpha)^\beta, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Kumaraswamy dağılımı da beta dağılımı gibi aynı temel şekillere sahiptir.

Yani, $X \sim K(\alpha, \beta)$ olmak üzere

$\alpha > 1, \beta > 1$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir,

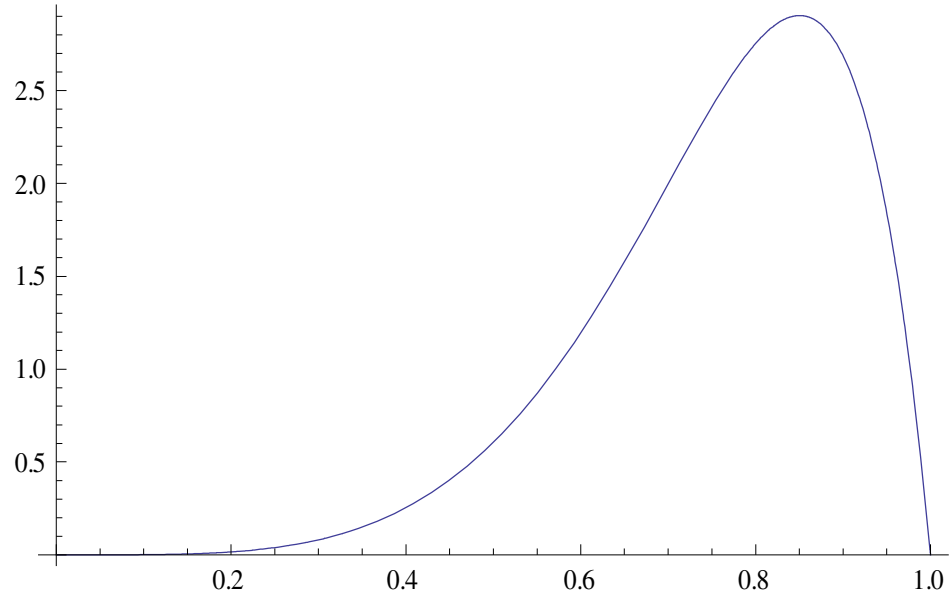
$\alpha < 1, \beta < 1$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu U-şekillidir,

$\alpha > 1, \beta \leq 1$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu artandır,

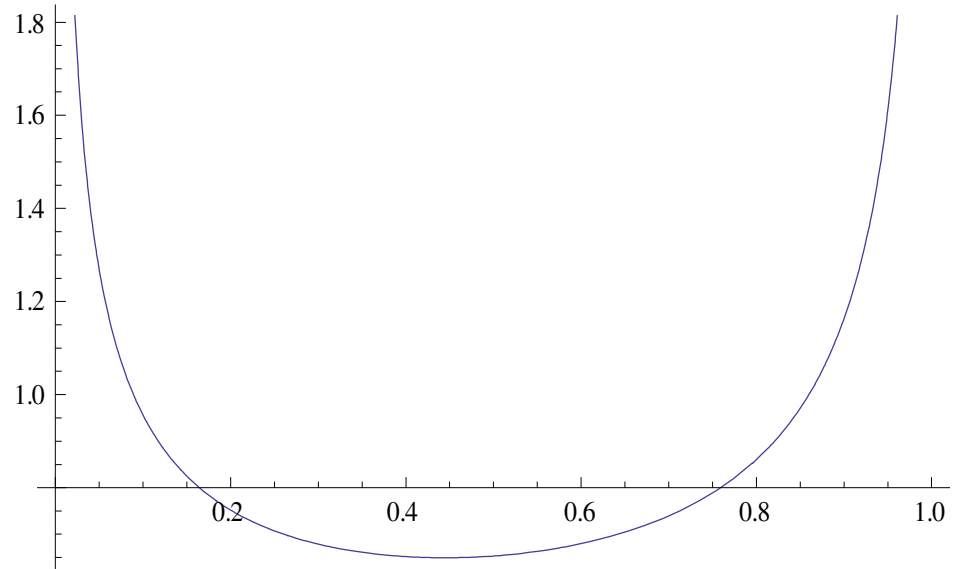
$\alpha \leq 1, \beta > 1$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu azalandır

ve

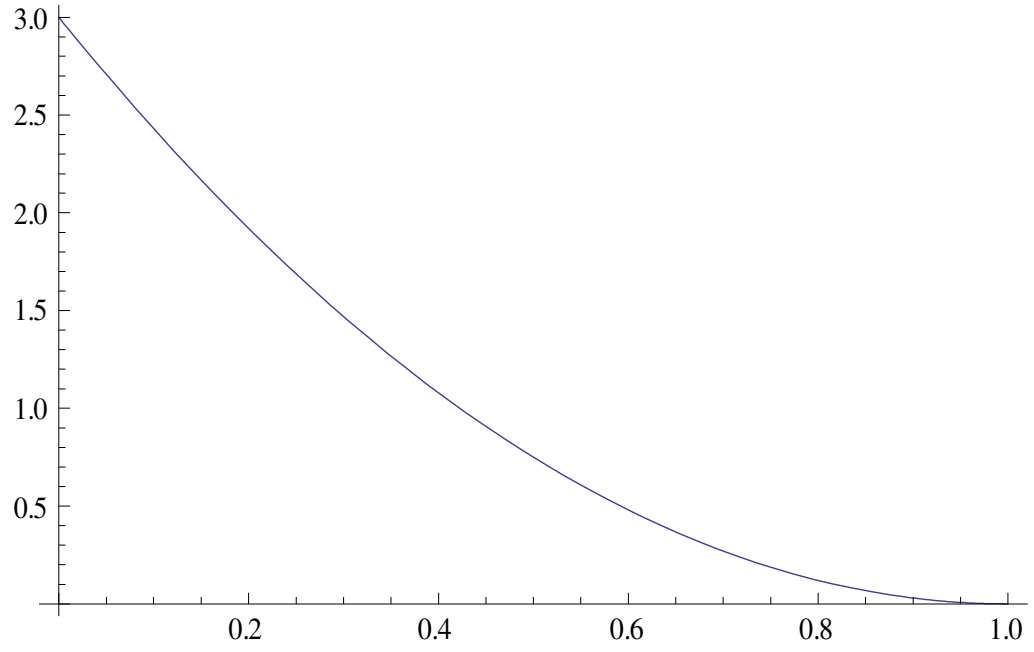
$\alpha = \beta = 1$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu sabittir.



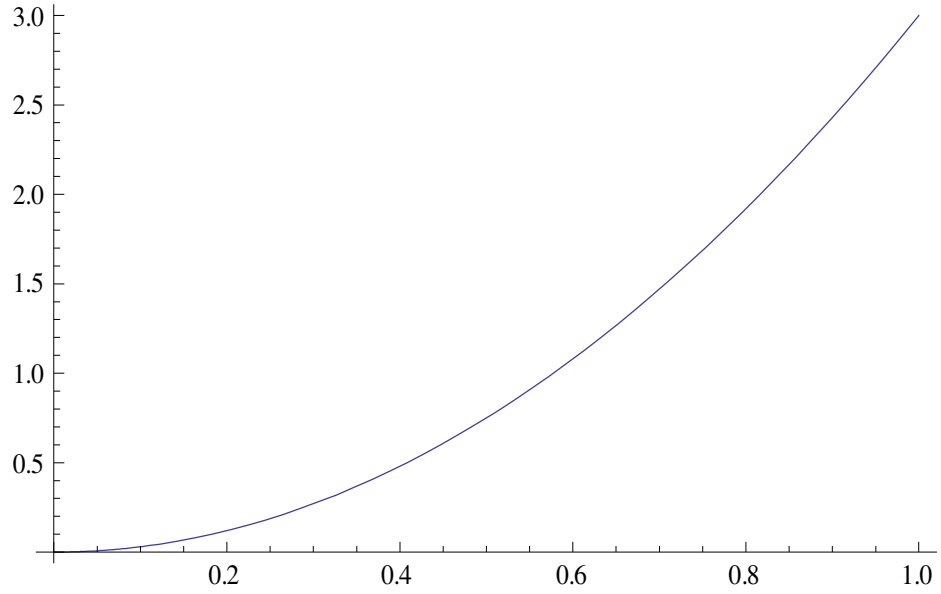
Şekil 3.1 $\alpha = 5, \beta = 2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



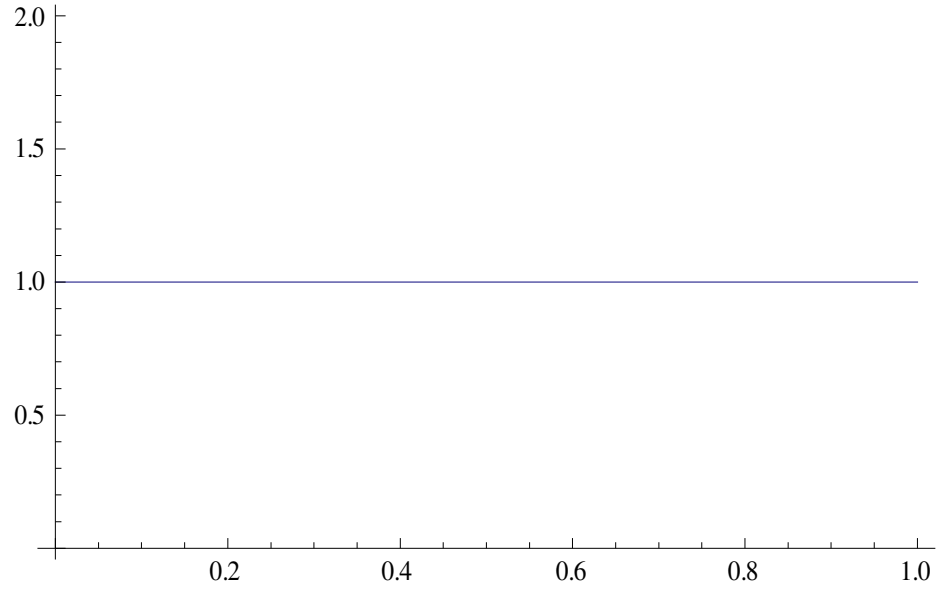
Şekil 3.2 $\alpha = 1/2, \beta = 1/2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



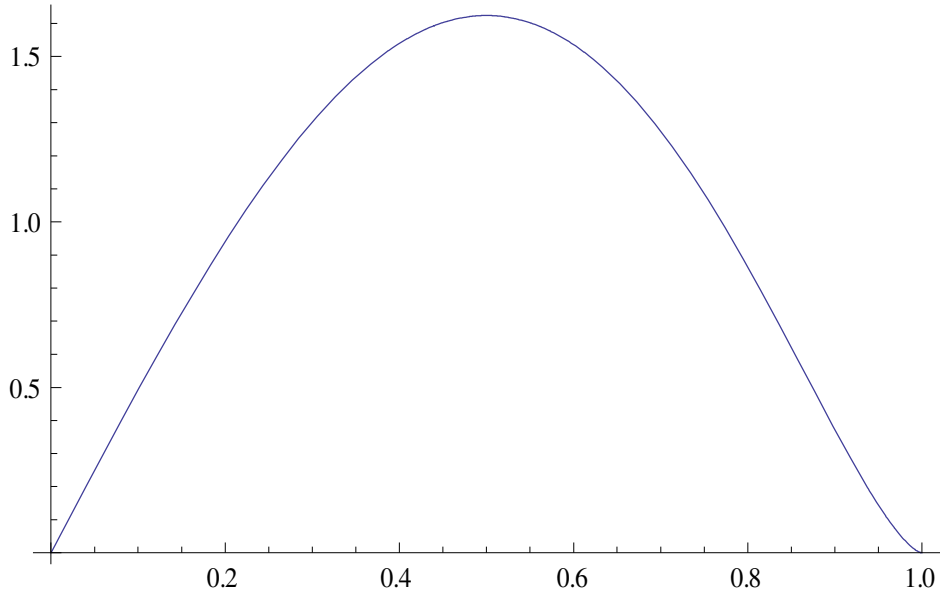
Şekil 3.3 $\alpha = 1, \beta = 3$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.4 $\alpha = 3, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.5 $\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 3.6 $\alpha = 2$, $\beta = 5/2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

3.2 Dağılımın Özellikleri

Bu kısımda dağılımın temel özellikleri teorik olarak verilecektir.

Teorem 3.2.1 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin r -inci mertebeden momentleri

$$m_r = E(X^r) = \beta B\left(1 + \frac{r}{\alpha}, \beta\right), r > -\alpha, \quad (3.1)$$

dır.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ olduğundan X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.2)$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \\ &= \int_0^1 \alpha \beta x^{r+\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1} dx, \end{aligned} \quad (3.3)$$

olup, burada $x^\alpha = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\alpha x^{\alpha-1} dx = du \quad \text{ve} \quad x^r = u^{\frac{r}{\alpha}}$$

olur. Bu eşitlikler (3.3) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \beta \int_0^1 u^{\frac{r}{\alpha}} (1-u)^{\beta-1} du \\ &= \beta B\left(1 + \frac{r}{\alpha}, \beta\right) \end{aligned}$$

olur, yani

$$m_r = \beta B\left(1 + \frac{r}{\alpha}, \beta\right), \quad r > -\alpha$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin ortalaması (beklenen değeri)

$$\mu = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right), \quad (3.4)$$

dir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve

$$\mu = E(X)$$

dir. O halde (3.1) de $r = 1$ alınırsa

$$E(X) = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

olur. O halde

$$\mu = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sigma^2 = \beta B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \left[\beta B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right)\right]^2, \quad (3.5)$$

dır.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (3.6)$$

dır. O halde (3.1) de $r = 2$ alınırsa

$$E(X^2) = \beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right), \quad (3.7)$$

olur. Diğer yandan (3.4) den

$$E(X) = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

olduğundan (3.4) ve (3.7) eşitlikleri (3.6) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$Var(X) = \sigma^2 = \beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) - \left[\beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)\right]^2$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin çarpıklık (skewness) ölçüsü

$$\gamma_1 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{B\left(1 + \frac{3}{\alpha}, \beta\right) - 3\beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 2\beta^2 \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)\right]^3}{\beta^{\frac{1}{2}} \left\{ B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) - \beta \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)\right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

dir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} \\ &= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2[E(X)]^3}{\sigma^3}\end{aligned}\tag{3.8}$$

olup, Teorem 3.2.1. den

$$E(X^3) = \beta B\left(1 + \frac{3}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X^2) = \beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X) = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

olur ve diğer taraftan Teorem 3.2.3 den

$$\sigma^2 = \beta B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \left[\beta B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right)\right]^2$$

$$\sigma^3 = \beta^{\frac{3}{2}} \left[B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right) \right]^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler (3.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\gamma_1 = \frac{\beta B\left(1+\frac{3}{\alpha}, \beta\right) - 3\beta B\left(1+\frac{2}{\alpha}, \beta\right) \beta B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 2\left[\beta B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right)\right]^3}{\beta^{\frac{3}{2}} \left[B\left(\frac{2}{\alpha}+1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta\right) \right]^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{B\left(1+\frac{3}{\alpha}, \beta\right) - 3\beta B\left(1+\frac{2}{\alpha}, \beta\right) B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 2\beta^2 \left[B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^3}{\beta^{\frac{1}{2}} \left[B\left(\frac{2}{\alpha}+1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta\right) \right]^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin sivrilik (kurtosis) ölçüsü

$$\gamma_2 = \frac{B\left(1+\frac{4}{\alpha}, \beta\right) - 4\beta B\left(1+\frac{3}{\alpha}, \beta\right) B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 6\beta^2 B\left(1+\frac{2}{\alpha}, \beta\right) \left[B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^2 - \beta^3 \left[B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^4}{\beta \left[B\left(\frac{2}{\alpha}+1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha}+1, \beta\right) \right]^2 \right]^2}$$

dir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve

$$\gamma_2 = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} \quad , \quad (3.9)$$

$$= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - [E(X)]^4}{\sigma^4}$$

şeklindedir. Teorem 3.2.1 den

$$E(X^4) = \beta B\left(1+\frac{4}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X^3) = \beta B\left(1 + \frac{3}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X^2) = \beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X) = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

eşitlikleri alınıp ve Teorem 3.2.3 den de

$$\sigma^2 = \beta B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \left[\beta B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right)\right]^2$$

$$\sigma^4 = \beta^2 \left[B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right) \right]^2 \right]^2$$

eşitlikleri elde edilerek, bu eşitlikler (3.9) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - [E(X)]^4}{\sigma^4} \\ &= \frac{\beta B\left(1 + \frac{4}{\alpha}, \beta\right) - 4\beta^2 B\left(1 + \frac{3}{\alpha}, \beta\right) B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 6\beta^3 B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^2 - \beta^4 \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^4}{\beta^2 \left[B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right) \right]^2 \right]^2} \\ &= \frac{B\left(1 + \frac{4}{\alpha}, \beta\right) - 4\beta B\left(1 + \frac{3}{\alpha}, \beta\right) B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) + 6\beta^2 B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^2 - \beta^3 \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) \right]^4}{\beta \left[B\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \beta\right) - \beta \left[B\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \beta\right) \right]^2 \right]^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Jones [13] dağılımın L-çarpıklık ve L-sivriligi için bağıntılar vermiştir. Bu bağıntılar L-momentlerden elde edilir.

L-momentleri sıra istatistiklerinin lineer kombinasyonlarıdır. Bunlar sapan değerlere daha az hassastırlar ve küçük örneklem için hemen hemen yansızdırlar.

L-momentler de geleneksel momentler gibi çarpıklık ve sivrilik ölçülerini hesaplamak için kullanılır ve geleneksel momentlere benzerlik gösterirler. Bunlar sırası ile *L-çarpıklık* (*L-skewness*) ve *L-sivrilik* (*L-kurtosis*) olarak adlandırılır. (L-ortalama (L-mean) geleneksel ortalama ile aynıdır.).

$r \geq 2$ için L-momentin genel formülü

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} J(r-1-j, j+1)$$

olup burada

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 F^{i_1}(x) (1-F)^{i_2}(x) dx$$

dir. Kumaraswamy dağılımının L-momentleri aşağıdaki gibi bulunur. $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise

$$F(x) = 1 - (1-x^\alpha)^\beta, \quad 0 < x < 1$$

dir. O halde

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 \left[1 - (1-x^\alpha)^\beta \right]^{i_1} (1-x^\alpha)^{\beta i_2} dx$$

olup, burada $(1-x^\alpha) = w$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} J(i_1, i_2) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^1 (1-w^\beta)^{i_1} w^{\beta i_2} (1-w)^{\frac{1}{\alpha}-1} dw \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta(k+i_2)+1\right) \\ &= \beta \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} (-1)^k (k+i_2) B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta(k+i_2)\right) \end{aligned}$$

olur. Böylece $k+j+1 = \ell$ denilirse

$$\begin{aligned}
\lambda_r &= \frac{\beta}{r} \sum_{\ell=1}^r (-1)^{\ell-1} \ell \left\{ \sum_{j=0}^{\min(\ell-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} \binom{r-1-j}{r-\ell} \right\} B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\ell\right) \\
&= \frac{\beta}{r} \sum_{\ell=1}^r (-1)^{\ell-1} \ell \binom{r}{\ell} \left\{ \sum_{j=0}^{\min(\ell-1, r-2)} \binom{r-2}{j} \binom{\ell}{j+1} \right\} B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\ell\right) \quad , \quad (3.10) \\
&= \frac{\beta}{r} \sum_{\ell=1}^r (-1)^{\ell-1} \ell \binom{r}{\ell} \binom{r+\ell-2}{r-1} B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\ell\right)
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 3.2.6 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin L-çarpıklık (L-skewness) ölçüsü

$$\tau_3 = \frac{B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 6B\left(1+\frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 6B\left(1+\frac{1}{\alpha}, 3\beta\right)}{B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2B\left(1+\frac{1}{\alpha}, 2\beta\right)}, \quad (3.11)$$

dir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve L-çarpıklık ölçüsü

$$\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$

eşitliği ile bulunur. Burada (3.10) dan

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\beta}{2} \sum_{\ell=1}^2 (-1)^{\ell-1} \ell \binom{2}{\ell} \binom{\ell}{1} B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\ell\right) \\
&= \beta \left[B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2B\left(1+\frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$\lambda_3 = \frac{\beta}{3} \sum_{\ell=1}^3 (-1)^{\ell-1} \ell \binom{3}{\ell} \binom{\ell+1}{2} B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta \ell\right)$$

$$\lambda_3 = \frac{\beta}{3} \left[3 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 18 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 18 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) \right]$$

$$\lambda_3 = \beta \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) \right]$$

elde edilir. Şimdi X rastgele değişkeninin L-çarpıklık ölçüsü

$$\begin{aligned} \tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} &= \frac{\beta \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) \right]}{\beta \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) \right]} \\ &= \frac{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 6 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right)}{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.7 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin L-sivrilik (L-kurtosis) ölçüsü

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 12 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 30 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) - 20 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 4\beta\right)}{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2 B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right)}$$

dır.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ve L-sivrilik ölçüsü

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$$

eşitliği ile bulunur. Burada (3.10) dan

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\beta}{2} \sum_{\ell=1}^2 (-1)^{\ell-1} \ell \binom{2}{\ell} \binom{\ell}{1} B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta \ell\right) \\ &= \beta \left[B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) \right] \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \frac{\beta}{4} \sum_{\ell=1}^4 (-1)^{\ell-1} \ell \binom{4}{\ell} \binom{\ell+2}{3} B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta \ell\right) \\ &= B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 12B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 30B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) - 20B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 4\beta\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi X rastgele değişkeninin L-sivrilik ölçüsü

$$\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2} = \frac{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 12B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right) + 30B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 3\beta\right) - 20B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 4\beta\right)}{B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, 2\beta\right)}$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.8 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin modu

$$Mod(X) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \geq 1, \beta \geq 1, (\alpha, \beta) \neq (1, 1)$$

dir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}$$

olup, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu maksimize eden x değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$f'(x) = 0$$

$$(\alpha-1) \alpha \beta x^{\alpha-2} (1-x^\alpha)^{\beta-1} - (\beta-1) \beta \alpha^2 x^{2\alpha-2} (1-x^\alpha)^{\beta-2} = 0$$

$$\alpha \beta x^{\alpha-2} (1-x^\alpha)^{\beta-1} [(\alpha-1) - \alpha x^\alpha (\beta-1) (1-x^\alpha)^{-1}] = 0$$

$$\alpha-1 = \frac{\alpha x^\alpha (\beta-1)}{1-x^\alpha}$$

olup buradan

$$x^\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1}, \quad \alpha \geq 1, \beta \geq 1, (\alpha, \beta) \neq (1,1)$$

bulunur. O halde

$$Mod(X) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha\beta-1} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha \geq 1, \beta \geq 1, (\alpha, \beta) \neq (1,1)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.9 $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin medyanı

$$\left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

dır.

İspat: X rastgele değişkeninin medyanı

$$P(X \leq m) = \frac{1}{2}$$

ve $X \sim K(\alpha, \beta)$ olduğundan

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha, \beta > 0$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= \int_0^m f(x) dx \\ &= \int_0^m \alpha \beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1} dx \end{aligned}$$

olup, burada $x^\alpha = u$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$P(X \leq m) = \int \beta (1-u)^{\beta-1} du$$

olur ve burada da $(1-u) = v$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= -\beta \int v^{\beta-1} dv \\ &= -v^\beta = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$-(1-m^\alpha)^\beta + 1 = \frac{1}{2}$$

olur. Buradan da

$$m = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

elde edilir.

3.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi

Kumaraswamy dağılımı da başta beta dağılımı olmak üzere bir takım sonlu pozitif uzaylı dağılımla ilişkilidir. Bu bölümde farklı α, β değerleri için diğer dağılımlarla olan ilişkileri incelenmiştir.

Teorem 3.3.1 $X \sim B(1, \beta) \Rightarrow Y = X^{1/\alpha} \sim K(\alpha, \beta)$ dir.

İspat: $X \sim B(1, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{B(1, \beta)} (1-x)^{\beta-1}$$

şeklindedir ve

$$B(1, \beta) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)} = \frac{1}{\beta}$$

bulunur. O halde

$$f(x) = \beta (1-x)^{\beta-1}$$

olur. Şimdi $Y = X^{\frac{1}{\alpha}}$ ise Y nin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$y = x^{\frac{1}{\alpha}} \text{ dönüşümünün tersi}$$

$$w(y) = x = y^{\alpha}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan

$$f_Y(y) = f_X(w(y))w'(y)$$

olduğundan ve burada

$$w'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$$

olduğundan

$$f(y) = \alpha \beta y^{\alpha-1} (1 - y^\alpha)^{\beta-1}$$

elde edilir. O halde $Y \sim K(\alpha, \beta)$ dir.

Teorem 3.3.2 $X \sim K(1,1)$ ise X rastgele değişkeni düzgün dağılımlıdır.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

şeklindedir. O halde $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ için

$$f(x) = 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılımlıdır.

Teorem 3.3.3 $X \sim K(\alpha, 1)$ ise X rastgele değişkeni kuvvet fonksiyonu dağılımına sahiptir.

İspat: $X \sim K(\alpha, \beta)$ ise

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha \beta x^{\alpha-1} (1 - x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0$$

şeklindedir. O halde $\beta = 1$ alınırsa

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu kuvvet fonksiyonu dağılımlıdır.

3.4 Dağılımın Sıra İstatistiği

Bu bölümde Jones [13] un çalışmaları ayrıntılı verilmiştir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ Kumaraswamy dağılımından alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri $X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \dots \leq X_{(n:n)}$ olsun. Sıra istatistiğinin genel formülü

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(y)\}^{r-1} \{1-F(y)\}^{n-r} f(y), \quad 0 < y < 1, \quad (3.12)$$

şeklindedir. Burada

$$f(x; \alpha, \beta) = \alpha\beta x^{\alpha-1} (1-x^\alpha)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.13)$$

ve

$$F(x) = 1 - (1-x^\alpha)^\beta, \quad 0 \leq x \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.14)$$

dir. (3.13) ve (3.14) eşitlikleri (3.12) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, Kumaraswamy dağılımının r -inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{n! \alpha \beta y^{\alpha-1}}{(r-1)!(n-r)!} \left\{1 - (1-y^\alpha)^\beta\right\}^{r-1} \left\{(1-y^\alpha)^\beta\right\}^{n-r} (1-y^\alpha)^{\beta-1} \\ &= \frac{\alpha \beta}{B(r, n+1-r)} y^{\alpha-1} (1-y^\alpha)^{\beta(n+1-r)-1} \left\{1 - (1-y^\alpha)^\beta\right\}^{r-1} \end{aligned} \quad , \quad 0 < y < 1$$

olarak bulunur.

Ayrıca r -inci sıra istatistiğinin k -ıncı mertebeden momentleri aşağıdaki gibi bulunur.

$Y = X_{r:n}$ denilirse

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{\alpha \beta}{B(r, n+1-r)} \int_0^1 y^{k+\alpha-1} (1-y^\alpha)^{\beta(n+1-r)-1} \left\{1 - (1-y^\alpha)^\beta\right\}^{r-1} dy$$

olur. Burada $(1 - y^\alpha) = w \Rightarrow -\alpha y^{\alpha-1} dy = dw$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{\beta}{B(r, n+1-r)} \int_0^1 (1-w^\beta)^{r-1} w^{\beta(n+1-r)-1} \{1-w\}^{\frac{r}{\alpha}} dw, \quad (3.15)$$

olur. Burada binom açılımından

$$(1-w^\beta)^{r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} w^{\beta i}, \quad (3.16)$$

olur. (3.16) eşitliği (3.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{\beta}{B(r, n+1-r)} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i \binom{r-1}{i} B\left(\beta(i+n+1-r), 1+\frac{r}{\alpha}\right)$$

bulunur. Burada $i+n+1-r = \ell$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$E(X_{r:n}^k) = \frac{\beta}{B(r, n+1-r)} \sum_{\ell=n+1-r}^{r-1} (-1)^{\ell-(n+1-i)} \binom{i-1}{n-\ell} B\left(\beta\ell, 1+\frac{r}{\alpha}\right)$$

elde edilir.

3.5 Parametre Tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $K(\alpha, \beta)$ dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örneklem olsun.

Parametrelerin önce momentler yöntemi tahmin edicileri bulunacaktır. Eşitlik (3.4) ve (3.7) den

$$E(X) = \beta B\left(1+\frac{1}{\alpha}, \beta\right)$$

$$E(X^2) = \beta B\left(1+\frac{2}{\alpha}, \beta\right)$$

alınıp iki parametre olduğundan

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = S^2 + (\overline{X})^2$$

eşitlikleri alınarak

$$\overline{X} = \beta B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right), \quad (3.17)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \beta B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right), \quad (3.18)$$

eşitlikleri elde edilir. Eşitlik (3.17) ve (3.18) de beta fonksiyonunun gamma fonksiyonu ile ilişkisi kullanılarak

$$\begin{aligned} B\left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta\right) &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \beta\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha \beta} B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B\left(1 + \frac{2}{\alpha}, \beta\right) &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) \Gamma(\beta)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha} + \beta\right)} \\ &= \frac{2}{2 + \alpha \beta} B\left(\frac{2}{\alpha}, \beta\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. O halde

$$\bar{X} = \frac{\beta}{1 + \alpha\beta} B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) \Rightarrow \beta = \frac{\bar{X}}{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - \alpha\bar{X}}, \quad (3.19)$$

bulunur. Ayrıca (3.19) eşitliği (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= S^2 + (\bar{X})^2 \\ &= \frac{2}{2 + \frac{\bar{X}\alpha}{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - \bar{X}\alpha}} B\left(\frac{2}{\alpha}, \beta\right) \\ &= \frac{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - 2\bar{X}\alpha}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta\right) - \bar{X}\alpha} B\left(\frac{2}{\alpha}, \beta\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan α nın momentler yöntemi tahmin edicisi

$$\hat{\alpha}_{MM} = \frac{B\left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right) \left[\frac{S^2 + \bar{X}^2}{B\left(\frac{2}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right)} - 1 \right]}{\bar{X} \left[\frac{S^2 + \bar{X}^2}{2B\left(\frac{2}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right)} - 1 \right]}, \quad (3.20)$$

elde edilir. Şimdi (3.20) eşitliği (3.19) eşitliğinde yerine yazılırsa β nın momentler yöntemi tahmin edicisi

$$\hat{\beta}_{MM} = \frac{\overline{X}}{B\left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right) - \frac{B\left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right) \left[\frac{S^2 + \overline{X}^2}{B\left(\frac{2}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right)} - 1 \right]}{\overline{X} \left[\frac{S^2 + \overline{X}^2}{2B\left(\frac{2}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right)} - 1 \right]}$$

elde edilir. Sadeleştirmeler sonucu

$$\hat{\beta}_{MM} = \frac{\overline{X} \left(2B\left(\frac{2}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right) - S^2 - \overline{X}^2 \right)}{B\left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MM}}, \hat{\beta}_{MM}\right) (S^2 + \overline{X}^2)}, \quad (3.21)$$

elde edilir. Böylece α ve β parametrelerinin $\hat{\alpha}_{MM}$ ve $\hat{\beta}_{MM}$ tahmin edicilerinin kapalı formları elde edilmiş olur.

Şimdi parametrelerin maksimum olabilirlik tahmin edicilerini bulalım. Olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \alpha \beta x_i^{\alpha-1} (1-x_i^\alpha)^{\beta-1}$$

dır. Log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell(\alpha, \beta) &= n \log(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^n (\alpha-1) \log x_i + \sum_{i=1}^n (\beta-1) \log(1-x_i^\alpha) \\ &= n \log(\alpha, \beta) + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \log x_i + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log(1-x_i^\alpha) \end{aligned}$$

dir. Şimdi sırası ile α ve β ya göre ayrı ayrı türev alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\ell_{\alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log x_i + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \frac{(-1) x_i^{\alpha} \log x_i}{1 - x_i^{\alpha}} = 0$$

$$\ell_{\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \log(1 - x_i^{\alpha}) = 0$$

bulunur. Böylece maksimum olabilirlik tahmin edicileri

$$\hat{\alpha}_{ML} = \frac{n}{(\hat{\beta}_{ML} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^{\hat{\alpha}_{ML}} \log x_i}{1 - x_i^{\hat{\alpha}_{ML}}} - \sum_{i=1}^n \log x_i}$$

$$\hat{\beta}_{ML} = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 - x_i^{\hat{\alpha}_{ML}})}$$

elde edilir.

Bulunan bu tahmin ediciler kapalı formda olduklarından tahmin edicilerin hesaplanmalarında Newton yöntemi ya da Newton-benzeri bir iteratif yöntem kullanılmalıdır.

3.6 Rastgele Sayı Üretimi

Kumaraswamy dağılımından olasılık integral dönüşümü yardımıyla rastgele sayı üretilebilir. Dağılımın kantil fonksiyonu

$$F^{-1}(y) = \left\{ 1 - (1 - y)^{\frac{1}{\beta}} \right\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < y < 1$$

olarak bulunur.

$$U \sim U(0,1) \Rightarrow (1 - U) \sim U(0,1)$$

olduğundan kantil fonksiyonunu kullanarak

$$\left(1-U^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

yerleştirmesi ile dağılımdan rastgele sayı üretilmiş olur.

BÖLÜM IV

İKİ YÖNLÜ KUVVET DAĞILIMI

İki yönlü kuvvet dağılımı (two-sided power, TSP) Van Dorp ve Kotz [2,3] tarafından tanımlanmıştır. Şekil yönünden TSP dağılımı da beta dağılımı ve Kumaraswamy dağılımı gibi esnektir. Ek olarak sıra istatistikleri ve momentleri bulunmuştur.

Bu bölümde ağırlıklı olarak Van Dorp ve Kotz un [2,3] çalışmalarındaki sonuçlar detaylı verilmiştir.

4.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri

Tanım 4.1.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

ile verilen X rastgele değişkenine *iki yönlü kuvvet dağılımına* sahiptir denir ve $TSP(\theta, n)$, $0 \leq \theta \leq 1, n > 0$ (burada n tamsayı olmak zorunda değildir) yazılır.

İki yönlü kuvvet dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \int_0^x n \left(\frac{t}{\theta} \right)^{n-1} dt & 0 < x \leq \theta \\ 1 - \int_x^1 n \left(\frac{1-t}{1-\theta} \right)^{n-1} dt & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

olup buradan da

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \theta \left(\frac{x}{\theta} \right)^n & 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1-\theta) \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^n & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

elde edilir.

$X \sim TSP(\theta, n)$ ve $a < x < b$ ise X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|a, \theta, b, n) = \begin{cases} \frac{n}{b-a} \left(\frac{x-a}{\theta-a} \right)^{n-1} & a < x \leq \theta \\ \frac{n}{b-a} \left(\frac{b-x}{b-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < b \end{cases}$$

olur.

$X \sim TSP(\theta, n)$ iken X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu θ ve n değerlerine bağlı olarak değişik şekiller alır. $x = \theta$ noktasında yoğunluk fonksiyonunun türevi mevcut olmadığından dağılım bu noktada bir sivri noktaya (cusp) sahiptir. Yoğunluk fonksiyonu çeşitli şekillerde olabilir. Örneğin,

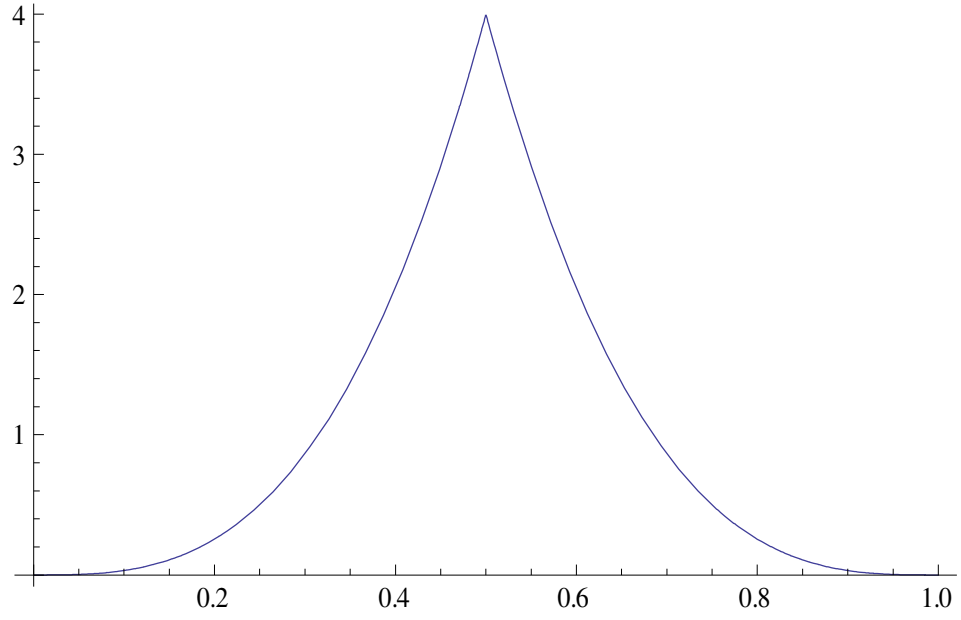
$0 \leq \theta \leq 1$ ve $n > 0$ ise X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir,

$0 < \theta < 1$ ve $0 < n < 1$ ise X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu U - şekillidir,

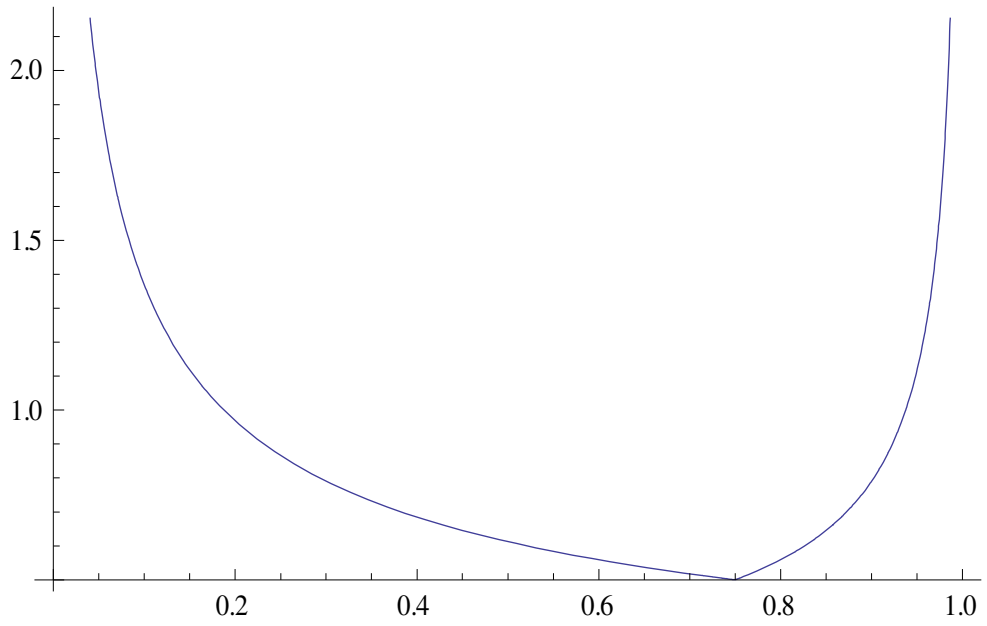
$n = 1$ ise X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılımlıdır,

$\theta = 1$ ve $n > 0$ ise X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu kesin artandır ve

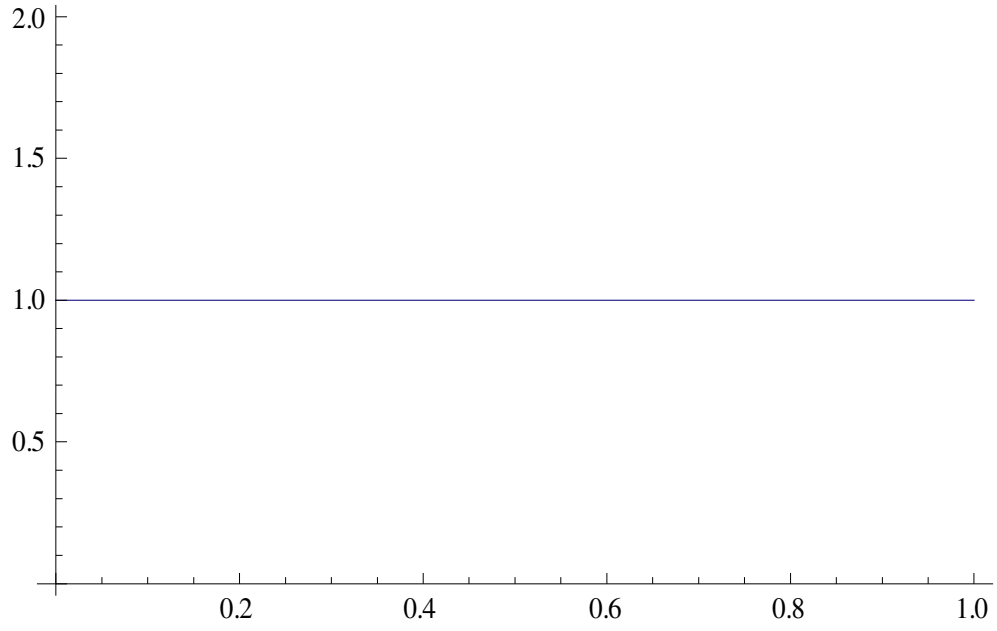
$0 < \theta < 1$ ve $n = 2$ ise X rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu üçgen şekillidir.



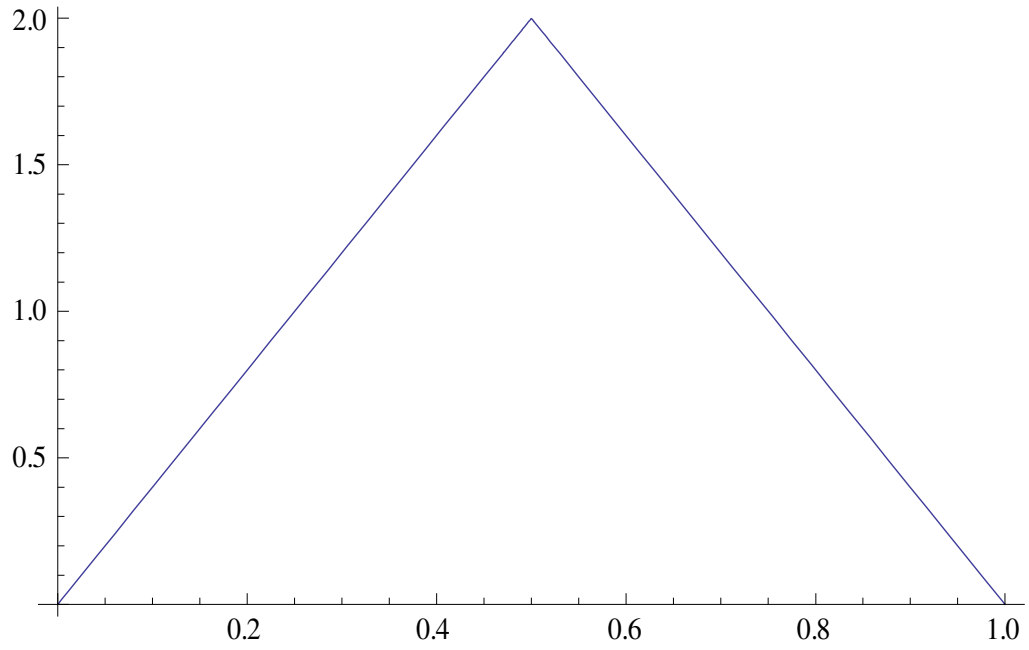
Şekil 4.1 $\theta = \frac{1}{2}$, $n = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



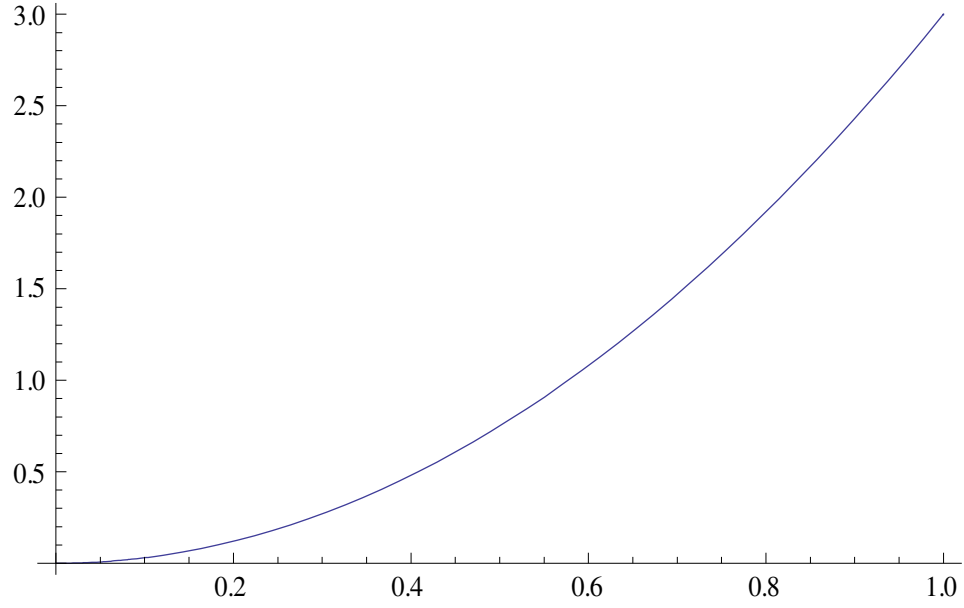
Şekil 4.2 $\theta = \frac{3}{4}$ ve $n = \frac{1}{2}$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.3 $n = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.4 $\theta = \frac{1}{2}$, $n = 2$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 4.5 $\theta = 1$, $n = 3$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

4.2 Dağılımın Özellikleri

Bu bölümde ağırlıklı olarak Van Dorp ve Kotz un [2,3] çalışmalarında verilen iki yönlü kuvvet dağılımının bazı özellikleri teorik olarak detaylı verilmiştir.

Teorem 4.2.1 $X \sim TSP(\theta, n)$ ise X rastgele değişkeninin r -inci mertebeden momentleri

$$m_r = E(X^r) = \frac{n\theta^{r+1}}{n+r} + \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{r-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1}, \quad (4.1)$$

dir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ olduğundan X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \\ &= \int_0^{\theta} x^r n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} dx + \int_{\theta}^1 x^r n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{\theta^{n-1}} \int_0^{\theta} x^{r+n-1} dx + \frac{n}{(1-\theta)^{n-1}} \int_{\theta}^1 x^r (1-x)^{n-1} dx \\ &= \frac{n\theta^{r+1}}{r+n} + \frac{n}{(1-\theta)^{n-1}} \int_{\theta}^1 x^r (1-x)^{n-1} dx \end{aligned} \quad (4.2)$$

Burada $(1-x)^{n-1}$ ifadesinin binom açılımı yapıp (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(1-x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} (-x)^i$$

ve

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{n\theta^{r+1}}{r+n} + \frac{n}{(1-\theta)^{n-1}} \int_{\theta}^1 x^r \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} (-x)^i dx \\ &= \frac{n\theta^{r+1}}{r+n} + \frac{n}{(1-\theta)^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} (-1)^i \int_{\theta}^1 x^{r+i} dx \\ &= \frac{n\theta^{r+1}}{r+n} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} (-1)^i \frac{n(1-\theta)^{r+i-n+2}}{r+i+1} \end{aligned}$$

olur. Burada $n-1=r$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$m_r = E(X^r) = \frac{n\theta^{r+1}}{r+n} + \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{r-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 $X \sim TSP(\theta, n)$ ise X rastgele değişkeninin ortalaması

$$\mu = \frac{\theta(n-1)+1}{n+1}, \quad (4.3)$$

dır.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ve

$$\mu = E(X)$$

dir. (4.1) eşitliğinde $r=1$ alınırsa

$$E(X) = \frac{n\theta^2}{1+n} + \sum_{i=0}^1 (-1)^i \binom{1}{1-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1}$$

olur. Buradan da

$$E(X) = \mu = \frac{\theta(n-1)+1}{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3 $X \sim TSP(\theta, n)$ ise X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2}, \quad (4.4)$$

dir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ve

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (4.5)$$

dir. O halde (4.1) eşitliğinde $r = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{n\theta^3}{n+2} + \sum_{i=0}^2 (-1)^i \binom{2}{2-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1} \\ &= \frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}, \quad (4.6)$$

olur. O halde (4.6) ve (4.3) eşitlikleri (4.5) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$Var(X) = \frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} - \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^2$$

ve buradan da

$$Var(X) = \sigma^2 = \frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4 $X \sim TSP(\theta, n)$ ise X rastgele değişkeninin çarpıklık (skewness)

ölçüsü

$$\gamma_1 = \frac{\left[\frac{n[\theta^4 - (1-\theta)^4]}{n+3} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 3n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{3n(1-\theta)^3}{n+2} \right] - 3 \left(\frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} \right) \left(\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right) + 2 \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^3}{\left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

dir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ve

$$\gamma_1 = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}, \quad (4.7)$$

$$= \frac{E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2[E(X)]^3}{\sigma^3}$$

dır. O halde (4.1) eşitliğinde $r = 3$ alınırsa

$$E(X^3) = \frac{n\theta^4}{n+3} + \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{3-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1} \quad (4.8)$$

$$= \frac{n[\theta^4 - (1-\theta)^4]}{n+3} + \frac{(1-\theta)(n+1) - 3n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{3n(1-\theta)^3}{n+2}$$

olur. Diğer taraftan (4.4) eşitliğinden

$$\sigma^3 = \left[\frac{n - 2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (4.9)$$

elde edilir. O halde (4.9), (4.8), (4.6), (4.3) eşitlikleri (4.7) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\gamma_1 = \frac{\left[\frac{n[\theta^4 - (1-\theta)^4]}{n+3} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 3n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{3n(1-\theta)^3}{n+2} \right] - 3 \left(\frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} \right) \left(\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right) + 2 \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^3}{\left[\frac{n - 2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5 $X \sim TSP(\theta, n)$ ise X rastgele değişkeninin sivrilik (kurtosis) ölçüsü

$$\gamma_2 = \frac{\left[\frac{n[\theta^5 - (1-\theta)^5]}{n+4} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 4n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{6n(1-\theta)^3}{n+2} - \frac{4n(1-\theta)^4}{n+3} \right] - 4 \left[\frac{n[\theta^4 - (1-\theta)^4]}{n+3} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 3n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{3n(1-\theta)^3}{n+2} \right] \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]}{\left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^2}$$

$$+ \frac{6 \left[\frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} \right] \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^2 - \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^4}{\left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^2}$$

dir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ve

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{[E(X - \mu)^4]}{\sigma^4} \\ &= \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)[E(X)]^2 - [E(X)]^4}{\sigma^4}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

dir. O halde (4.1) eşitliğinde $r = 4$ alınırsa

$$\begin{aligned} E(X^4) &= \frac{n\theta^5}{n+4} + \sum_{i=0}^4 (-1)^i \binom{4}{4-i} \frac{n}{n+i} (1-\theta)^{i+1} \\ &= \frac{n[\theta^5 - (1-\theta)^5]}{n+4} + \frac{(1-\theta)(n+1) - 4n(1-\theta)^2}{n+1} \\ &\quad + \frac{6n(1-\theta)^3}{n+2} - \frac{4n(1-\theta)^4}{n+3} \end{aligned}, \quad (4.11)$$

olur. Diğer taraftan (4.4) eşitliğinden

$$\sigma^4 = \left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^2, \quad (4.12)$$

elde edilir. O halde (4.12), (4.11), (4.8), (4.6) ve (4.3) eşitlikleri (4.10) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\gamma_2 = \frac{\left[\frac{n[\theta^5 - (1-\theta)^5]}{n+4} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 4n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{6n(1-\theta)^3}{n+2} - \frac{4n(1-\theta)^4}{n+3} \right] - 4 \left[\frac{n[\theta^4 - (1-\theta)^4]}{n+3} + \frac{(n+1)(1-\theta) - 3n(1-\theta)^2}{n+1} + \frac{3n(1-\theta)^3}{n+2} \right] \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]}{\left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^2} + \frac{\left[6 \left[\frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)} \right] \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^2 - \left[\frac{\theta(n-1)+1}{n+1} \right]^4 \right]}{\left[\frac{n-2\theta(n-1)(1-\theta)}{(n+2)(n+1)^2} \right]^2}$$

elde edilir.

4.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla İlişkisi

İki yönlü kuvvet dağılımı özel olarak düzgün dağılım, kuvvet dağılımı ve üçgensel dağılımı içerir. Bu bölümde dağılımın bu üç dağılım ile nasıl bir ilişkisi olduğu incelenecektir.

Teorem 4.3.1 $X \sim TSP(\theta, 1)$ ise X rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahiptir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ise,

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

dır. O halde $n=1$ için

$$f(x|\theta, 1) = 1, \quad 0 < x < 1$$

$$f(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılımlıdır.

Teorem 4.3.2 $X \sim TSP(1, n)$ ise X rastgele değişkeni kuvvet fonksiyonu dağılımına sahiptir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ise

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

dır. O halde $\theta = 1$ için

$$f(x|1, n) = n(x)^{n-1}, \quad 0 < x \leq 1$$

$$f(x) = n(x)^{n-1}, \quad 0 < x \leq 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu kuvvet fonksiyonu dağılımlıdır.

Teorem 4.3.3 $X \sim TSP(\theta, 2)$ ise X rastgele değişkeni üçgensel dağılıma sahiptir.

İspat: $X \sim TSP(\theta, n)$ ise

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n \left(\frac{x}{\theta} \right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

dır. O halde $n = 2$ için

$$f(x|\theta, 2) = \begin{cases} 2 \left(\frac{x}{\theta} \right) & 0 < x \leq \theta \\ 2 \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right) & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(\frac{x}{\theta}\right) & 0 < x \leq \theta \\ 2\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right) & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu üçgensel dağılımlıdır.

4.4 Dağılımın Sıra İstatistiği

$X_1, X_2, \dots, X_m$ iki yönlü kuvvet dağılımından alınmış m birimlik rastgele örneklem olsun. Örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri

$$X_{(1:m)} \leq X_{(2:m)} \leq \dots \leq X_{(r:m)} \leq \dots \leq X_{(m:m)}$$

olsun. Sıra istatistiğinin genel formülü

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(y)\}^{r-1} \{1-F(y)\}^{n-r} f(y), \quad 0 < y < 1, \quad (4.13)$$

dır. Bu durumda iki yönlü kuvvet dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırası ile

$$f(x|\theta, n) = \begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} & 0 < x \leq \theta \\ n\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^{n-1} & \theta \leq x < 1 \end{cases}, \quad (4.14)$$

ve

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \theta\left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1-\theta)\left(\frac{1-x}{1-\theta}\right)^n & \theta \leq x < 1 \end{cases}, \quad (4.15)$$

dir. O halde (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.13) eşitliğinde yerlerine yazılırsa, iki yönlü kuvvet dağılımının r -inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \begin{cases} \frac{m!n}{(r-1)!(m-r)!} \left(\frac{y^{nr-1}}{\theta^{r(n-1)}} \right) \left\{ 1 - \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right\}^{m-r} & 0 < y \leq \theta \\ \frac{m!n(1-\theta)^{m-r}}{(r-1)!(m-r)!} \left(\frac{(1-y)^{n(m-r+1)-1}}{(1-\theta)^{n(m-r+1)-1}} \right) \left\{ 1 - (1-\theta) \left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right\}^{r-1} & \theta \leq y < 1 \end{cases}$$

olur. İki yönlü kuvvet dağılımının r -inci sıra istatistiğinin k -inci mertebeden momenti aşağıdaki gibi bulunur. $Y = X_{r:m}$ denilirse

$$E(X_{r:m}^k) = \begin{cases} \frac{m!n}{(r-1)!(m-r)!} \int_0^\theta \left(\frac{y^{nr+k-1}}{\theta^{r(n-1)}} \right) \left\{ 1 - \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right\}^{m-r} dy & 0 < y \leq \theta \\ \frac{m!n(1-\theta)^{m-r}}{(r-1)!(m-r)!} \int_\theta^1 y^k \left(\frac{(1-y)^{n(m-r+1)-1}}{(1-\theta)^{n(m-r+1)-1}} \right) \left\{ 1 - (1-\theta) \left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right\}^{r-1} dy & \theta \leq y < 1 \end{cases}$$

olur. Önce $0 < y \leq \theta$ için r -inci sıra istatistiğinin k -inci mertebeden momenti bulunursa

$$E(X_{r:m}^k) = \frac{m!n}{(r-1)!(m-r)!} \int_0^\theta \left(\frac{y^{nr+k-1}}{\theta^{r(n-1)}} \right) \left\{ 1 - \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right\}^{m-r} dy, \quad (4.16)$$

olup, burada binom açılımından

$$\left\{ 1 - \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right\}^{m-r} = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i \binom{m-r}{i} \left[\theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right]^i, \quad (4.17)$$

olur. O halde (4.17) eşitliği (4.16) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(X_{r:m}^k) &= \frac{m!n}{(r-1)!(m-r)!} \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i \binom{m-r}{i} \times \int_0^\theta \left(\frac{y^{nr+k-1}}{\theta^{r(n-1)}} \right) \left[\theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^n \right]^i dy \\ &= \frac{m!n \theta^{k+r+i}}{(r-1)!(m-r)! [n(r+i)+k]} \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i \binom{m-r}{i} \end{aligned} \quad (4.18)$$

bulunur.

Şimdi aynı şeyler $\theta \leq y < 1$ için yapılırsa

$$E(X_{r,m}^k) = \frac{m!n(1-\theta)^{m-r}}{(r-1)!(m-r)!} \int_{\theta}^1 y^k \left(\frac{(1-y)^{n(m-r+1)-1}}{(1-\theta)^{n(m-r+1)-1}} \right) \left\{ 1 - (1-\theta) \left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right\}^{r-1} dy \quad (4.19)$$

olup, burada binom açılımından

$$\left\{ 1 - (1-\theta) \left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right\}^{r-1} = \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l \binom{r-1}{l} \left[(1-\theta) \left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right]^l, \quad (4.20)$$

elde edilir. O halde (4.20) eşitliği (4.19) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(X_{r,m}^k) &= \frac{m!n(1-\theta)^{m+r+l}}{(r-1)!(m-r)!} \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l \binom{r-1}{l} \times \int_{\theta}^1 y^k \left(\frac{(1-y)^{n(m-r+l)-1}}{(1-\theta)^{n(m-r+l)-1}} \right) \left[\left(\frac{1-y}{1-\theta} \right)^n \right]^l dy \\ &= \frac{m!n(1-\theta)^{m+r+l}}{(r-1)!(m-r)!(1-\theta)^{n(m-r+l)-1}} \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l \binom{r-1}{l} \times \int_{\theta}^1 y^k (1-y)^{n(m-r+l+1)-1} dy \end{aligned} \quad (4.21)$$

bulunur. Böylece (4.18) ve (4.21) eşitliklerinden

$$E(X_{r,m}^k) = \begin{cases} \frac{m!n\theta^{k+r+i}}{(r-1)!(m-r)! [n(r+i)+k]} \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i \binom{m-r}{i} & 0 < y \leq \theta \\ \frac{m!n(1-\theta)^{m-r+l}}{(r-1)!(m-r)!(1-\theta)^{n(m-r+l+1)-1}} \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l \binom{r-1}{l} B'_{\theta}(k+1, n(m-r+l+1)) & \theta \leq y < 1 \end{cases}$$

elde edilir. Burada

$$B'_z(\alpha, \beta) = \int_z^1 y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$$

tamamlanmamış beta fonksiyonudur.

4.5 Parametre Tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$ $TSP(\theta, n)$ dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örneklem olsun. Parametrelerin önce momentler yöntemi tahmin edicilerini bulacağız. (4.3) ve (4.6) eşitliklerinden

$$E(X) = \mu = \frac{\theta(n-1)+1}{n+1}$$

$$E(X^2) = \frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)}$$

olup, iki parametre olduğundan

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = S^2 + (\bar{X})^2$$

eşitlikleri alınır. O halde

$$\bar{X} = \frac{\theta(n-1)+1}{n+1}, \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\theta(n-1)(\theta n+2)+2}{(n+2)(n+1)}, \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır.

Parametrelerin maksimum olabilirlik tahmin edicileri [2,3] de verilmiştir. Olabilirlik fonksiyonu

$$L(\theta, n) = \prod_{i=1}^n f(x; \theta, n)$$

olup, $X_1, X_2, \dots, X_s$ örneklemeleri iki yönlü kuvvet dağılımlı olsunlar. O halde sıralı veri,

$$X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(r-1)} < X_{(r)} < X_{(r+1)} < \dots < X_{(s)}$$

şeklinde olup ilk r tanesinin θ dan küçük olduğu varsayılır ($1 \leq r \leq \theta$). O zaman olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\theta, n) &= \left[\prod_{i=1}^r n \left(\frac{x_{(i)}}{\theta} \right)^{n-1} \right] \left[\prod_{i=r+1}^s n \left(\frac{1-x_{(i)}}{1-\theta} \right)^{n-1} \right] \\ &= n^s \left[\frac{\prod_{i=1}^r x_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1-x_{(i)})}{\theta^r (1-\theta)^{s-r}} \right]^{n-1}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

olur. Burada $X_{(r)} \leq \theta < X_{(r+1)}$ ve $X_{(0)} \equiv 0, X_{(s+1)} \equiv 1$ dir. Şimdi

$$\hat{r} = \arg \max_{r \in \{1, 2, \dots, s\}} M(r), \quad (4.25)$$

ve

$$M(r) = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{x_{(i)}}{x_{(r)}} \prod_{i=r+1}^s \frac{1-x_{(i)}}{1-x_{(r)}}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\hat{M} = \max_{0 \leq \theta \leq 1} \left[\frac{\prod_{i=1}^r x_{(i)} \prod_{i=r+1}^s (1-x_{(i)})}{\theta^r (1-\theta)^{s-r}} \right], \quad (4.26)$$

olacak şekilde (4.24) eşitliğinin her iki tarafının maksimumu alınır

$$\underset{n>0, 0\leq\theta\leq 1}{maks} L(\theta, n) = \underset{n>0}{maks} \left[n^s \hat{M}^{n-1} \right]$$

olur. Şimdi

$$\log \left\{ n^s \hat{M}^{n-1} \right\} = (n-1) \log \hat{M} + s \log n$$

olup, eşitliğin her iki tarafının sırası ile θ ve n 'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial}{\partial n} \log \left\{ n^s \hat{M}^{n-1} \right\} = \theta - X_{(\hat{r})} = 0$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial n} \log \left\{ n^s \hat{M}^{n-1} \right\} = \log \hat{M} + \frac{s}{n} = 0$$

olur. Böylece θ ve n in maksimum olabilirlik tahmin edicileri sırası ile

$$\hat{\theta}_{ML} = X_{(\hat{r})}$$

$$\hat{n}_{ML} = -\frac{s}{\log \hat{M}}$$

elde edilir.

4.6 Rastgele Sayı Üretimi

İki yönlü kuvvet dağılımından olasılık integral dönüşümü yardımıyla rastgele sayı üretilebilir. Dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu

$$F(x|\theta, n) = \begin{cases} \theta \left(\frac{x}{\theta} \right)^n & 0 < x \leq \theta \\ 1 - (1 - \theta) \left(\frac{1-x}{1-\theta} \right)^n & \theta \leq x < 1 \end{cases}$$

olup kantil fonksiyonu

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \theta \left(\frac{y}{\theta} \right)^{\frac{1}{n}} & y < \theta \\ 1 - (1 - \theta) \left(\frac{1 - y}{1 - \theta} \right)^{\frac{1}{n}} & y > \theta \end{cases}$$

dır. $U \sim U(0,1) \Rightarrow (1-U) \sim U(0,1)$ olduğundan kantil fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{cases} \theta \left(\frac{U}{\theta} \right)^{\frac{1}{n}} & U < \theta \\ 1 - (1 - \theta) \left(\frac{1 - U}{1 - \theta} \right)^{\frac{1}{n}} & U > \theta \end{cases}$$

yerleştirmesi ile rastgele sayı üretilmiş olur.

BÖLÜM V

TAMAMLAYICI BETA DAĞILIMI

Tamamlayıcı beta dağılımı (The complementary beta distribution, CB) Jones [4] tarafından tanımlanmıştır. Tamamlayıcı beta dağılımı şekil ve özellik yönünden beta dağılımına benzerlik göstermektedir.

Bu bölümde ağırlıklı olarak Jones [4] un çalışmalarındaki sonuçlar detaylı verilmiştir.

5.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri

Tanım 5.1.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{CB(\alpha, \beta)}(u) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\beta-1}}$$

$0 < u < 1, \alpha > 0, \beta > 0$ olan X rastgele değişkenine *tamamlayıcı beta dağılımlıdır* denir ve $X \sim CB(\alpha, \beta)$ yazılır.

Tamamlayıcı beta dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$F_{CB(\alpha, \beta)}(u) = F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)$$

dır. Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$F'_{Be(\alpha, \beta)}\left(F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right) = u$$

$$\left[F_{Be(\alpha, \beta)}\left(F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right)\right]' = 1$$

$$F'_{Be(\alpha, \beta)}\left(F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right)\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]' = 1$$

$$\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]' = \frac{1}{F'_{Be(\alpha, \beta)} \left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]} = \frac{1}{f_{Be(\alpha, \beta)} \left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]}$$

$$f_{CB(\alpha, \beta)}(u) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]^{\beta-1}}$$

olacak şekilde tamamlayıcı beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu elde edilir.

Tamamlayıcı beta dağılımı beta dağılımı gibi benzer şekillere sahiptir.

$\alpha = \beta$ iken yoğunluk fonksiyonu $\frac{1}{2}$ ye göre simetriktr,

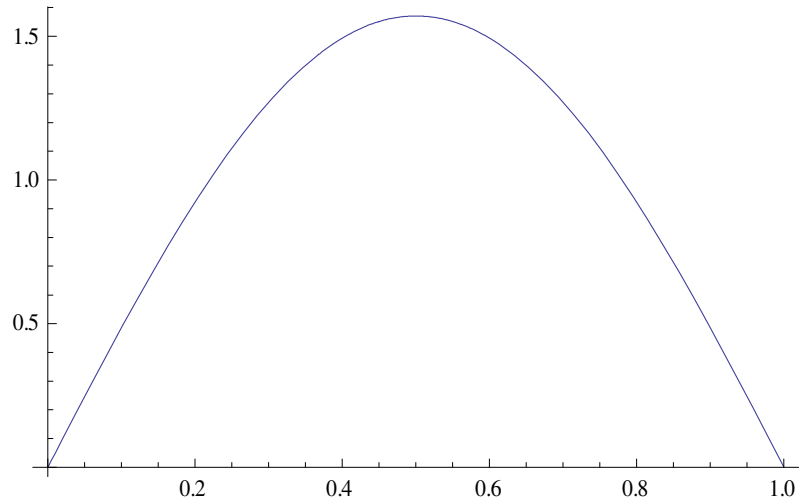
$\alpha = \beta = 1$ iken yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılımlıdır,

$\alpha > 0, \beta = 1$ iken yoğunluk fonksiyonu kuvvet fonksiyonu dağılımlıdır,

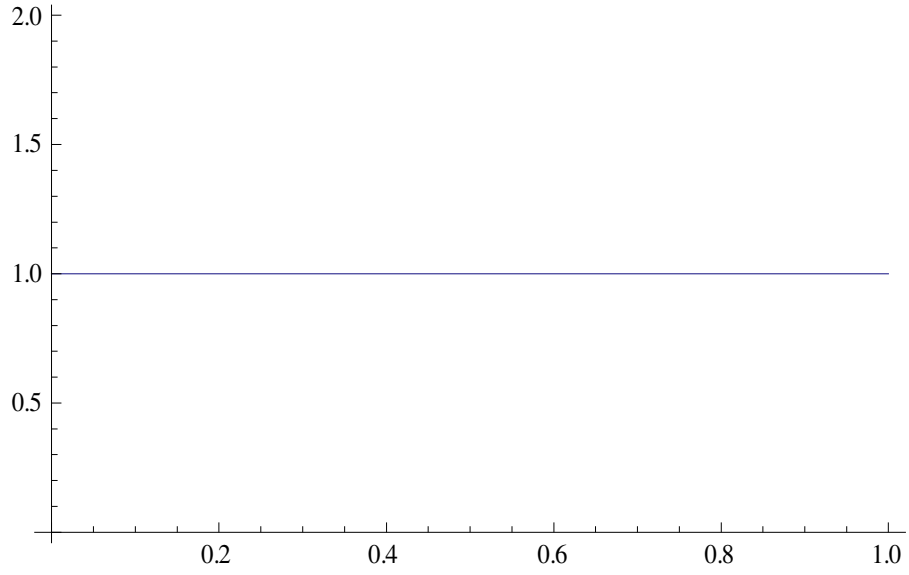
$0 < \alpha, \beta < 1$ iken yoğunluk fonksiyonu tek tepelidir,

$\alpha, \beta > 1$ iken yoğunluk fonksiyonu U-şekillidir ve

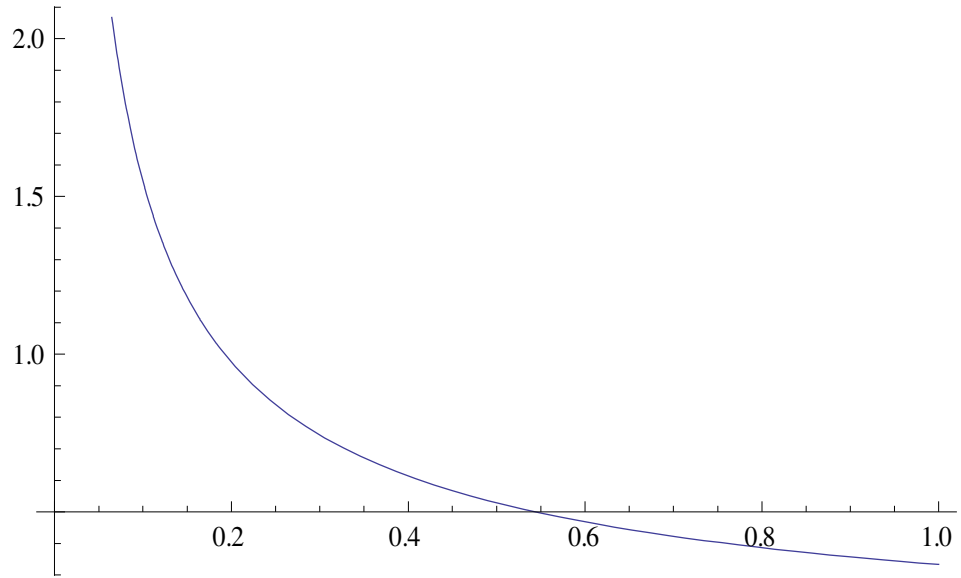
$\alpha < 1, \beta > 1$ ya da $\alpha > 1, \beta < 1$ iken yoğunluk fonksiyonu J-şekillidir.



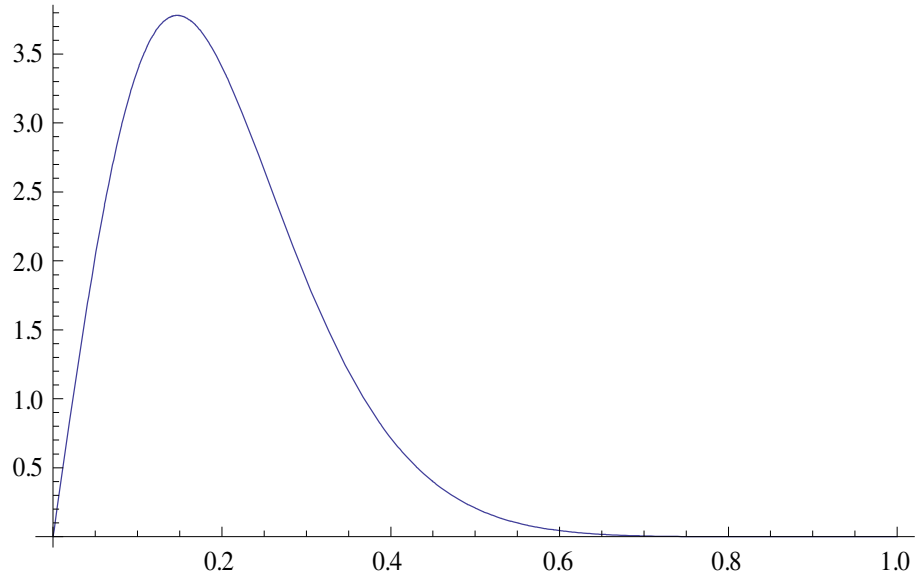
Şekil 5.1 $\alpha = \beta$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



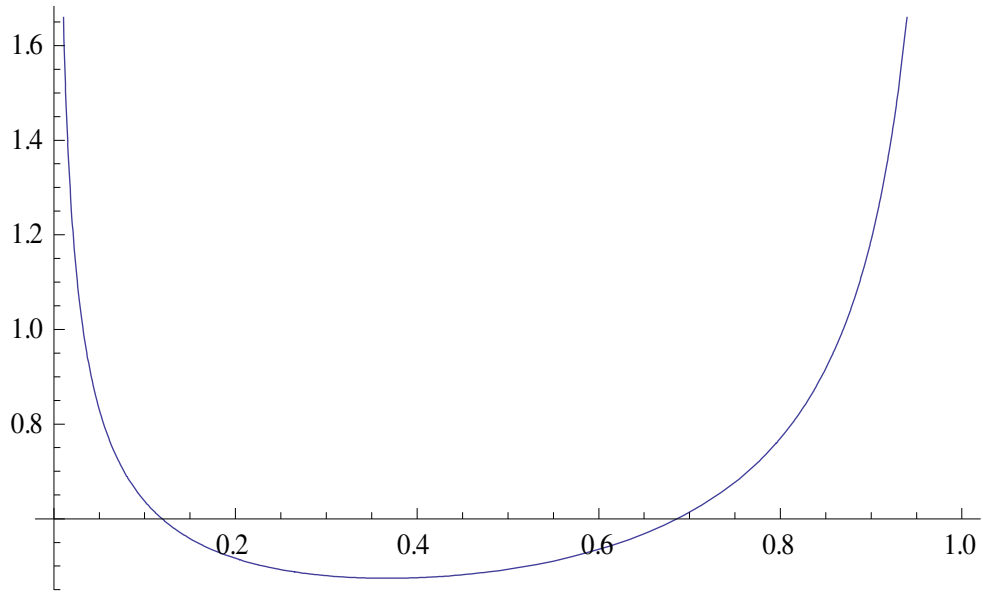
Şekil 5.2 $\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.3 $\alpha > 0, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.4 $0 < \alpha, \beta < 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği



Şekil 5.5 $\alpha > 1, \beta > 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği

5.2 Dağılımın Özellikleri

Bu bölümde [4] de verilen özellikler detaylı incelenmiştir.

Teorem 5.2.1 $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \mu = \frac{\beta}{\beta + \alpha}, \quad (5.1)$$

dır.

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ olduğundan

$$f_{CB(\alpha, \beta)}(x) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)\right]^{\beta-1}}$$

şeklindedir ve

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

dir. O halde

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)\right]^{\beta-1}} dx, \quad (5.2)$$

Burada $F_{CB(\alpha, \beta)}(x) = F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)$ olduğundan $u = F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x) \Rightarrow F_{Be(\alpha, \beta)}(u) = x$ değişken değiştirmesi yapılırsa $f_{Be(\alpha, \beta)}(u) du = dx$ olur.

Burada $f_{Be(\alpha, \beta)}(u) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}$ olup, (5.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$E(X) = \int_0^1 f_{Be(\alpha, \beta)}(u) \frac{B(\alpha, \beta) F_{Be(\alpha, \beta)}(u)}{[u]^{\alpha-1} [1-u]^{\beta-1}} du = \int_0^1 F_{Be(\alpha, \beta)}(u) du, \quad (5.3)$$

olur. Şimdi beta dağılımının beklenen değeri kullanılırsa

$$E(X) = \int_0^1 [1 - F_{Be(\alpha, \beta)}(u)] du = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E(X) = 1 - \int_0^1 F_{Be(\alpha, \beta)}(u) du = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

olur. Buradan da

$$\int_0^1 F_{Be(\alpha, \beta)}(u) du = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

olur. Yani (5.3) eşitliğinden,

$$E(X) = \mu = \frac{\beta}{\beta + \alpha}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.2 $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = \sigma^2 = \left[2 \int_0^1 (1-z)^\beta z^{\alpha-1} B_z(\alpha, \beta) dz \right] - \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad (5.4)$$

dır.

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ve

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad (5.5)$$

dir. O halde

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \frac{B(\alpha, \beta)}{[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)]^{\alpha-1} [1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x)]^{\beta-1}} dx$$

olur. Burada $F_{CB(\alpha,\beta)}(x) = F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(x)$ olduğundan $u = F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(x) \Rightarrow F_{Be(\alpha,\beta)}(u) = x$

değişken değiştirmesi yapılırsa $f_{Be(\alpha,\beta)}(u) du = dx$ olur. O halde

$$E(X^2) = \int_0^1 f_{Be(\alpha,\beta)}(u) \frac{B(\alpha,\beta) [F_{Be(\alpha,\beta)}(u)]^2}{[u]^{\alpha-1} [1-u]^{\beta-1}} du = \int_0^1 [F_{Be(\alpha,\beta)}(u)]^2 du, \quad (5.6)$$

olur. Burada

$$F_{Be(\alpha,\beta)}(u) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^u t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

olur. O halde

$$\int_0^1 [F_{Be(\alpha,\beta)}(u)]^2 du = \int_0^1 \int_0^u \int_0^u \frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} dydz du$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [F_{Be(\alpha,\beta)}(u)]^2 du &= \int_0^1 \int_0^z \int_z^1 \frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} du dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_z^1 \int_y^1 \frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} du dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [F_{Be(\alpha,\beta)}(u)]^2 du &= \int_0^1 \int_0^z (1-z) \frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} dy dz \\ &\quad + \int_0^1 \int_z^1 (1-y) \frac{1}{[B(\alpha,\beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} dy dz \end{aligned}$$

olup, burada

$$\int_0^1 \int_z^1 (1-y) \frac{1}{[B(\alpha, \beta)]^2} (yz)^{\alpha-1} [(1-y)(1-z)]^{\beta-1} dy dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^z (1-z)^{\beta-1} z^{\alpha-1} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} (1-y) dz dy$$

olur. O halde

$$E(X^2) = 2 \int_0^1 \int_0^z (1-z)^{\beta} z^{\alpha-1} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy dz$$

$$= 2 \int_0^1 (1-z)^{\beta} z^{\alpha-1} \left[\int_0^z y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy \right] dz$$

olup, burada

$$B_z(\alpha, \beta) = \int_0^z y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} dy$$

tamamlanmamış beta fonksiyonu olup,

$$E(X^2) = 2 \int_0^1 (1-z)^{\beta} z^{\alpha-1} B_z(\alpha, \beta) dz, \quad (5.7)$$

olur. O halde (5.1) ve (5.7) eşitlikleri (5.5) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$Var(X) = \sigma^2 = \left[2 \int_0^1 (1-z)^{\beta} z^{\alpha-1} B_z(\alpha, \beta) dz \right] - \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

kapalı formda elde edilir.

Teorem 5.2.3 $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin L-momentleri

$$\lambda_{r,C} = \frac{1}{rB(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} B(\alpha + r - 1 - j, \beta + j + 1), \quad (5.8)$$

İspat: L-momentin genel formülü

$$\lambda_r = \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} J(r-1-j, j+1), \quad (5.9)$$

olup, burada

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 F^{i_1}(x)(1-F)^{i_2}(x)dx, \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Aşağıda tamamlayıcı beta dağılımının L-momentleri bulunur.

$X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise

$$F_{CB(\alpha, \beta)}(x) = F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x), \quad 0 < x < 1$$

şeklindedir. Şimdi

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 \left(F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x) \right)^{i_1} \left(1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x) \right)^{i_2} dx$$

olup burada $F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(x) = u \Rightarrow F_{Be(\alpha, \beta)}(u) = x$ değişken değişirmesi yapılırsa

$$f_{Be(\alpha, \beta)}(u) du = dx \text{ olur. O halde}$$

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 (u)^{i_1} (1-u)^{i_2} f_{Be(\alpha, \beta)}(u) du$$

ve

$$f_{Be(\alpha, \beta)}(u) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}$$

olduğundan

$$J(i_1, i_2) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} B(\alpha + i_1, \beta + i_2), \quad (5.11)$$

elde edilir. Şimdi bu eşitlik (5.9) eşitliğinde $i_1 = r - j - 1, i_2 = j + 1$ değişken değiştirmesi yapıp yerine yazılırsa

$$\lambda_{r,C} = \frac{1}{rB(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{r-2}{j} \binom{r}{j+1} B(\alpha + r - 1 - j, \beta + j + 1)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.4 $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin L-çarpıklık (L-skewness) ölçüsü

$$\tau_{3,C} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta + 2}, \quad (5.12)$$

dir.

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ve L-çarpıklık ölçüsü

$$\tau_{3,C} = \frac{\lambda_{3,C}}{\lambda_{2,C}}, \quad (5.13)$$

dir. O halde (5.8) eşitliğinde $r = 2$ alınır

$$\lambda_{2,C} = \frac{1}{2B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^0 (-1)^j \binom{0}{j} \binom{2}{j+1} B(\alpha + 1 - j, \beta + j + 1)$$

$$\lambda_{2,C} = \frac{1}{2B(\alpha, \beta)} B(\alpha + 1, \beta + 1)$$

olup, buradan da

$$\lambda_{2,C} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}, \quad (5.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde $r = 3$ alınır

$$\lambda_{3,C} = \frac{1}{3B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{1}{j} \binom{3}{j+1} B(\alpha+2-j, \beta+j+1)$$

$$\lambda_{3,C} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [B(\alpha+2, \beta+1) - B(\alpha+1, \beta+2)]$$

olup, buradan da

$$\lambda_{3,C} = \frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}, \quad (5.15)$$

elde edilir. O halde (5.14) ve (5.15) eşitlikleri (5.13) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{3,C} = \frac{\lambda_{3,C}}{\lambda_{2,C}} = \frac{\frac{\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$$

yani

$$\tau_{3,C} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2}$$

elde edilir.

Teorem 5.2.5 $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise X rastgele değişkeninin L-sivrilik (L-kurtosis) ölçüsü

$$\tau_{4,C} = \frac{(\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta + 1}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}, \quad (5.16)$$

dir.

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ve L-çarpıklık ölçüsü

$$\tau_{4,C} = \frac{\lambda_{4,C}}{\lambda_{2,C}}, \quad (5.17)$$

dir. O halde (5.8) eşitliğinde $r = 4$ alınır

$$\lambda_{4,C} = \frac{1}{4B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{2}{j} \binom{4}{j+1} B(\alpha+3-j, \beta+j+1)$$

$$\lambda_{4,C} = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} [B(\alpha+3, \beta+1) - B(\alpha+2, \beta+2) + B(\alpha+1, \beta+3)]$$

olup, buradan da

$$\lambda_{4,C} = \frac{\alpha\beta[(\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta + 1]}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}, \quad (5.18)$$

elde edilir. O halde (5.14) ve (5.18) eşitlikleri (5.17) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\tau_{4,C} = \frac{\lambda_{4,C}}{\lambda_{2,C}} = \frac{\frac{\alpha\beta[(\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta + 1]}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}}{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}} = \frac{(\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta + 1}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)}$$

yani

$$\tau_{4,C} = \frac{(\alpha-\beta)^2 - \alpha\beta + 1}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+2)}$$

elde edilir.

5.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla Olan İlişkisi

Tamamlayıcı beta dağılımı bazı önemli dağılımları parametrelerinin özel durumlarında içerir. Bu kısımda bunlar verilecektir.

$X \sim CB(\alpha, \beta)$ olsun. O halde aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 5.3.1 $X \sim CB(1,1)$ ise X rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahiptir.

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise

$$f_{CB(\alpha, \beta)}(u) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\beta-1}}, \quad 0 < u < 1$$

dir. O halde $\alpha = \beta = 1$ alınırsa

$$f_{CB(1,1)}(u) = Be(1,1)$$

olur. Buradan da

$$f(u) = 1, \quad 0 < u < 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu düzgün dağılımlıdır.

Teorem 5.3.2 $CB(\alpha, 1) \equiv Be\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ olup aynı zamanda kuvvet fonksiyonu

dağılımlıdır (Benzer şekilde $CB(1, \beta) \equiv Be\left(1, \frac{1}{\beta}\right)$ dir).

İspat: $X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise

$$f_{CB(\alpha, \beta)}(u) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\beta-1}}, \quad 0 < u < 1$$

şeklindedir. O halde $\beta = 1$ alınırsa

$$f_{CB(\alpha, 1)}(u) = \frac{B(\alpha, 1)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u)\right]^{\alpha-1}}, \quad 0 < u < 1$$

elde edilir. Burada

$$B(\alpha, 1) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}$$

olup beta dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$I_x(\alpha, 1) = \frac{1}{B(\alpha, 1)} \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{1-1} dt = x^\alpha$$

olur. Fonksiyonun tersi alınır

$$F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) = u^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < u < 1$$

elde edilir. O halde

$$f_{CB(\alpha, 1)}(u) = \frac{1/\alpha}{\left[u^{1/\alpha}\right]^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1}, \quad 0 < u < 1$$

elde edilir. Bu yoğunluk fonksiyonu $Be(\frac{1}{\alpha}, 1)$ dağılımlıdır. Yani $X \sim Be(\frac{1}{\alpha}, 1)$ dir.

Aynı zamanda bu yoğunluk fonksiyonu kuvvet fonksiyonu dağılımlıdır (Benzer şekilde $X \sim CB(1, \beta)$ iken $X \sim Be(1, \frac{1}{\beta})$ olduğu gösterilebilir).

5.4 Dağılımın Sıra İstatistiği

Bu bölümde Jones [4] un çalışmaları daha ayrıntılı olarak verilmiştir. $X_1, X_2, \dots, X_n$ tamamlayıcı beta dağılımından alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun. Örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri $X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \dots \leq X_{(n:n)}$ olsun. Sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonunun genel formülü

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(y)\}^{r-1} \{1-F(y)\}^{n-r} f(y), \quad 0 < y < 1. \quad (5.19)$$

O halde tamamlayıcı beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırası ile

$$f_{CB(\alpha,\beta)}(u) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\left[F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(u)\right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(u)\right]^{\beta-1}}, \quad (5.20)$$

ve

$$F_{CB(\alpha,\beta)}(u) = F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(u), \quad (5.21)$$

dir. O halde tamamlayıcı beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin yoğunluk fonksiyonunu bulmak için (5.20) ve (5.21) eşitlikleri (5.19) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$f_Y(y) = \frac{n!B(\alpha,\beta)}{(r-1)!(n-r)!} \left\{ F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(y) \right\}^{r-\alpha} \left\{ 1 - F_{Be(\alpha,\beta)}^{-1}(y) \right\}^{n-r-\beta+1}, \quad 0 < y < 1$$

olur.

Tamamlayıcı beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin beklenen değeri aşağıdaki gibi bulunur. Tamamlayıcı beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin beklenen değeri

$$E(X_{r:n}) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} J(j, n-j), \quad (5.22)$$

formülü ile bulunur. Burada Teorem 5.2.3 de (5.10) eşitliğinden

$$J(i_1, i_2) = \int_0^1 F^{i_1}(x)(1-F)^{i_2}(x)dx$$

ve (5.11) eşitliğinden

$$J(i_1, i_2) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} B(\alpha + i_1, \beta + i_2)$$

dir. Böylece

$$J(j, n-j) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} B(\alpha + j, \beta + n - j)$$

olur ve

$$E(X_{r:n}) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} B(\alpha + j, \beta + n - j)$$

elde edilir.

5.5 Parametre Tahmini

Tamamlayıcı beta dağılımının parametrelerinin tahmin edicilerini bulmak için momentler yöntemi ve maksimum olabilirlik yöntemi kullanılabilir. Momentler yöntemi dağılımın momentlerinin karşılık gelen örneklem momentlerine eşitlenip meydana gelen denklem sisteminin eş anlı çözümü ile bulunur. Maksimum olabilirlik tahmin edicileri ise örneklem verildiğinde olabilirlik fonksiyonunu maksimize eden parametre değerleri olarak tanımlanır.

Bu kısımda her iki yöntem sonucu parametre tahmin edicilerinin nasıl bulunacağı gösterilecektir.

$X \sim CB(\alpha, \beta)$ ise α ve β nın momentler yöntemi ile tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur.

İki parametre olduğundan (5.1) ve (5.7) eşitlikleri sırasıyla,

$$E(X) = \mu = \frac{\beta}{\beta + \alpha}$$

ve

$$E(X^2) = 2 \int_0^1 (1-z)^\beta z^{\alpha-1} B_z(\alpha, \beta) dz$$

dır. Şimdi

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = S^2 + (\overline{X})^2$$

alınır. O halde

$$\overline{X} = \frac{\beta}{\beta + \alpha}, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = 2 \int_0^1 (1-z)^\beta z^{\alpha-1} B_z(\alpha, \beta) dz, \quad (5.24)$$

olur. Burada (5.23) eşitliğinden

$$\beta = \frac{\alpha \overline{X}}{1 - \overline{X}}, \quad (5.25)$$

elde edilir. (5.25) eşitliğini (5.24) de yazıp eş anlı çözüm yapılırsa α ve β parametrelerinin $\hat{\alpha}_{MM}$ ve $\hat{\beta}_{MM}$ tahmin edicilerinin kapalı formları elde edilmiş olur.

Öte yandan dağılımın parametrelerinin maksimum olabilirlik tahmin edicileri aşağıdaki gibi bulunur.

Olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \alpha, \beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{B(\alpha, \beta)}{\left[F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]^{\alpha-1} \left[1 - F_{Be(\alpha, \beta)}^{-1}(u) \right]^{\beta-1}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

dır. (5.26) eşitliğinin log-olabilirlik fonksiyonunu bulup sırası ile α ve β ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse bulunacak kestirim denklemleri oldukça karmaşık olacaktır.

5.6 Rastgele Sayı Üretimi

Tamamlayıcı beta dağılımından olasılık integral dönüşümü yardımıyla rastgele sayı üretilebilir. Dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu

$$F_{CB}(y) = F_{Be}^{-1}(y), \quad 0 < y < 1$$

dir. Dağılımın kantil fonksiyonu

$$F_{CB}^{-1}(y) = F_{Be}(y), \quad 0 < y < 1$$

dir. Burada $F_{Be}(y) = I_y(\alpha, \beta)$ dır. O halde $U \sim U(0,1)$ olduğundan kantil fonksiyonu kullanılarak $F_{Be}(u) = I_u(\alpha, \beta)$ yerleştirmesi ile rastgele sayı üretilmiş olur.

BÖLÜM VI

BİLEŞİK BETA DAĞILIMI

Bileşik beta dağılımı (The compound beta distribution, CPB) Nadarajah ve Gupta [5] tarafından tanımlanmıştır. Bileşik beta dağılımı şekil ve özellik yönünden beta dağılımına benzerlik göstermektedir.

Bu bölümde ağırlıklı olarak Nadarajah ve Gupta [5] nın çalışmalarındaki sonuçlar detaylı verilmiştir.

6.1 Tanım ve Dağılımın Şekilleri

$X \sim GA(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim GA(\alpha_2, \beta)$ ve X, Y rastgele değişkenleri bağımsız ise

$$\frac{X}{X+Y} \sim B(\alpha_1, \alpha_2)$$

olduğu Teorem 2.4.6 da gösterilmişti. Nadarajah ve Gupta [5] X ve Y yi bağımsız bileşik gamma dağılımlı olarak bileşik beta dağılımını türetmiştir. Bu durumda X ve Y rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}(1+x)^{-a-b}}{B(a,b)}, \quad x > 0 \quad (6.1)$$

$$f_Y(y) = \frac{y^{a-1}(1+y)^{-a-b}}{B(a,b)}, \quad y > 0 \quad (6.2)$$

şeklindedir. Bileşik gamma dağılımı gamma dağılımının kendisi ile bileşkesinden oluşur. Yani gamma dağılımının ölçek parametresinin de gamma dağılımlı olduğu varsayılır. Buna göre (6.1) eşitliğinin kaynağı aşağıda verilen integraldir.

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\Gamma(a)} \beta^a x^{a-1} e^{-x\beta} \right) \left(\frac{1}{\Gamma(b)} \beta^{b-1} e^{-\beta} \right) d\beta, \quad (6.3)$$

O halde $W = \frac{X}{X+Y}$ nin dağılımını bulalım. X ve Y nin ortak olasılık yoğunluk

fonksiyonu

$$f(x, y) = \frac{x^{a-1} (1+x)^{-a-b} y^{\alpha-1} (1+y)^{-\alpha-\beta}}{B(a, b) B(\alpha, \beta)} \quad , \quad x, y > 0$$

Burada $Z_1 = \frac{X}{X+Y}$ ve $Z_2 = X+Y$ seçelim, o halde dönüşümün tersi

$$x = z_1 z_2$$

$$y = z_2 (1 - z_1)$$

olur. Ayrıca

$$X \text{ ve } Y \text{ nin uzayı } A = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

$$Z_1 \text{ ve } Z_2 \text{ nin uzayı } B = \{(z_1, z_2) : z_1 > 0, z_2 > 0\}$$

olup, dönüşüm A yı B üzerine 1-1 götürür. O halde dönüşümün jakobiyesi

$$J = z_2, \quad z_2 > 0$$

elde edilir. O halde

$$g(z_1, z_2) = \frac{(z_1 z_2)^{a-1} (1 + z_1 z_2)^{-a-b} [z_2 (1 - z_1)]^{\alpha-1} [1 + z_2 (1 - z_1)]^{-\alpha-\beta}}{B(a, b) B(\alpha, \beta)} \quad , \quad z_1 > 0, z_2 > 0$$

olur. Z_1 in marjinali

$$g(z_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z_1, z_2) dz_2$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(z_1 z_2)^{a-1} (1+z_1 z_2)^{-a-b} [z_2 (1-z_1)]^{\alpha-1} [1+z_2 (1-z_1)]^{-\alpha-\beta}}{B(a,b)B(\alpha,\beta)}$$

olur. Buradan da

$$f_{z_1}(z_1) = \frac{B(a+\alpha, b+\beta) z_1^{-\alpha-1} (1-z_1)^{\alpha-1}}{B(a,b)B(\alpha,\beta)} \times {}_2F_1\left(a+\alpha, \alpha+\beta; a+b+\alpha+\beta; 2-\frac{1}{z_1}\right)$$

$z_1 > 0$ elde edilir. Burada

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k x^k}{(\gamma)_k k!}, \quad (6.3)$$

ve

$$(c)_k = c(c+1)\dots(c+k-1), \quad (6.4)$$

özel fonksiyonları [14, 15] de bulunabilir.

Tanım 6.1.1 Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_w(w) = \frac{B(a+\alpha, b+\beta) w^{-\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1}}{B(a,b)B(\alpha,\beta)} \times {}_2F_1\left(a+\alpha, \alpha+\beta; a+b+\alpha+\beta; 2-\frac{1}{w}\right)$$

$w > 0$ olan W rastgele değişkenine *bileşik beta dağılımlıdır* denir ve $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ şeklinde gösterilir.

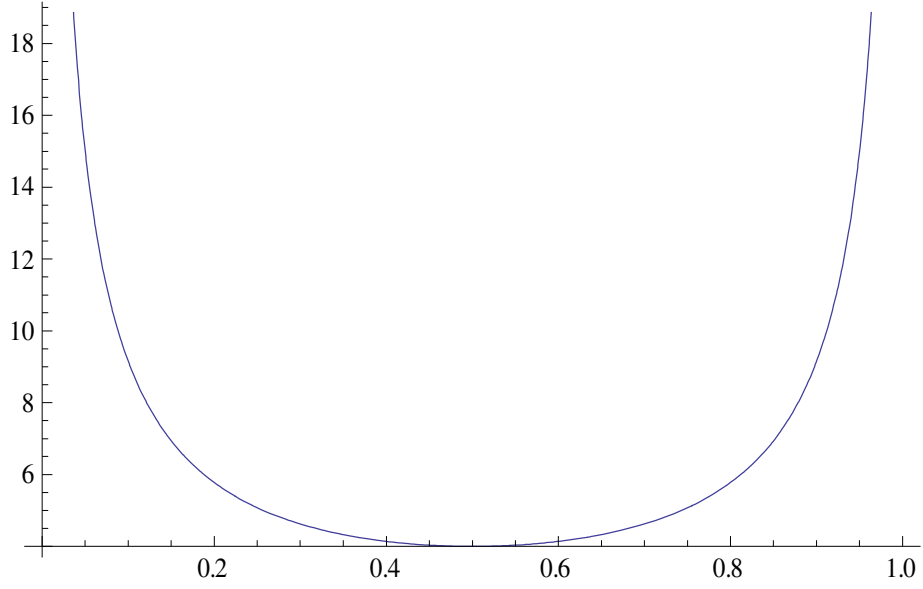
Bileşik beta dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu

$$F_w(w) = \frac{w^a (1-w)^b (1-2w)^{-a-b} J(w)}{\beta B(a,b)B(\alpha,\beta)}, \quad 0 < w < 1$$

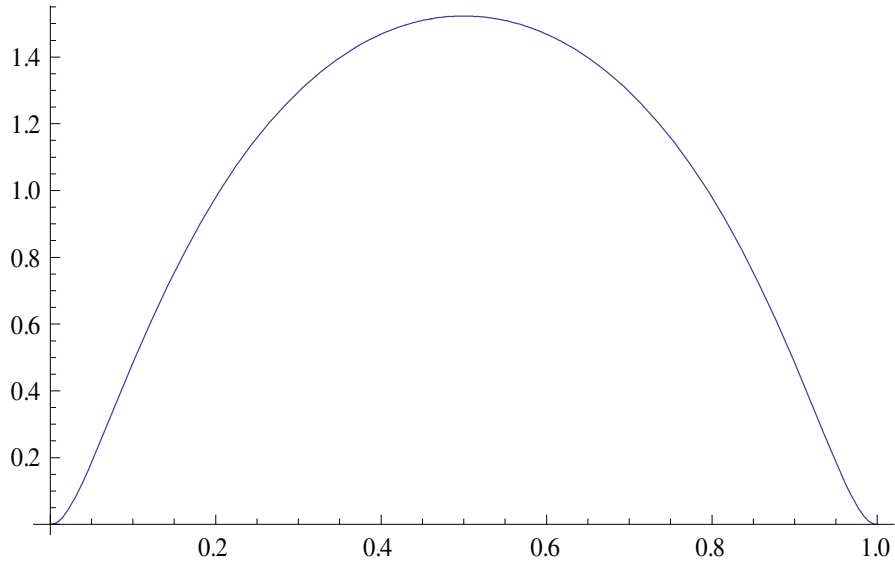
dir. Burada

$$J(w) = \int_0^1 y^{b+\beta-1} (1-y)^{a-1} \left(\frac{w}{1-2w} + y \right)^{-a-b} {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy, \quad (6.5)$$

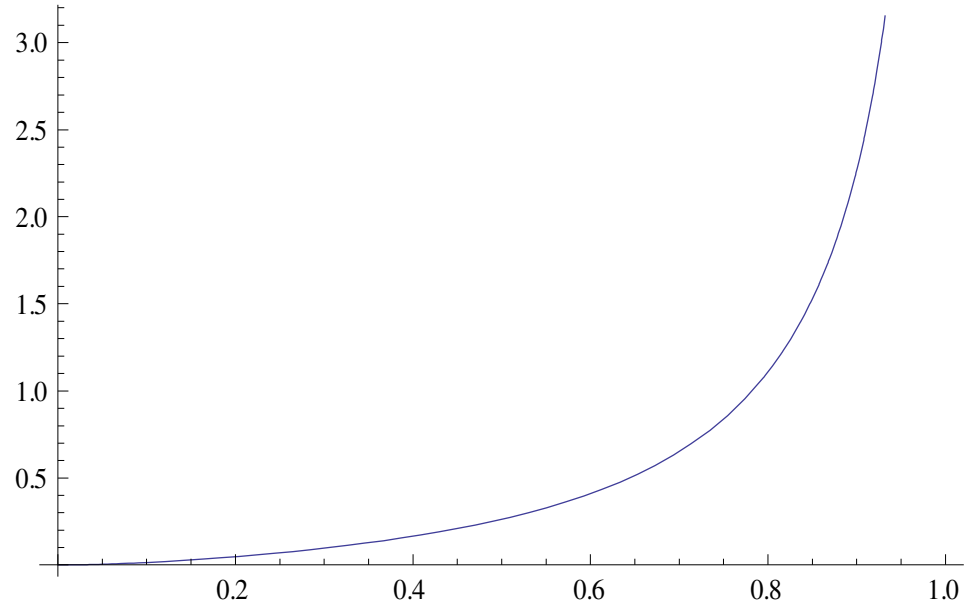
dir. Bileşik beta dağılımı da beta dağılımına benzer temel şekillere sahiptir. Örneğin,



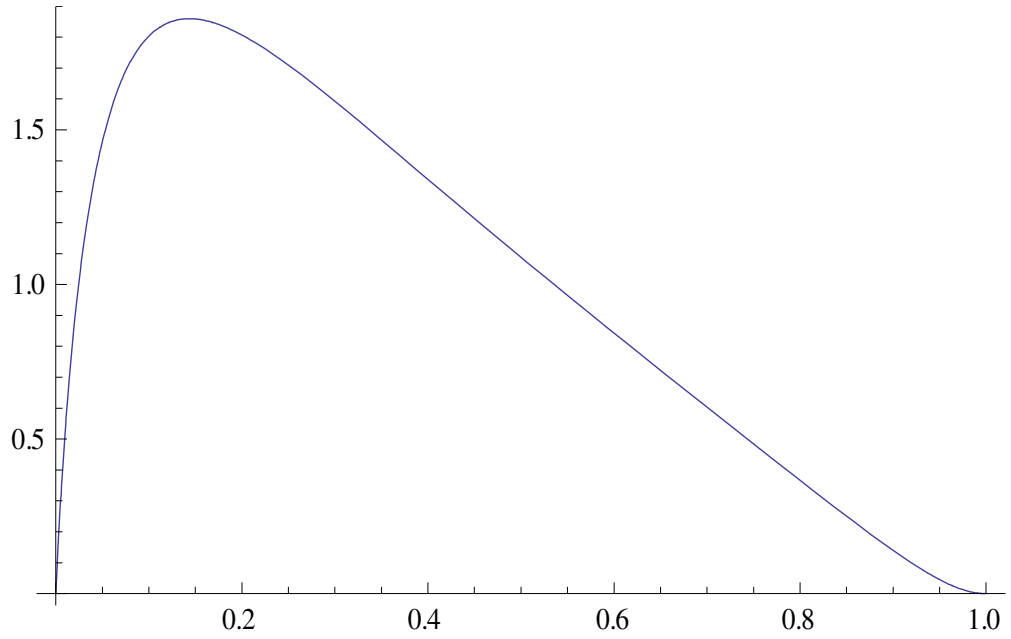
Şekil 6.1 $a = b = 0.5$ ve $\alpha = \beta = 0.5$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



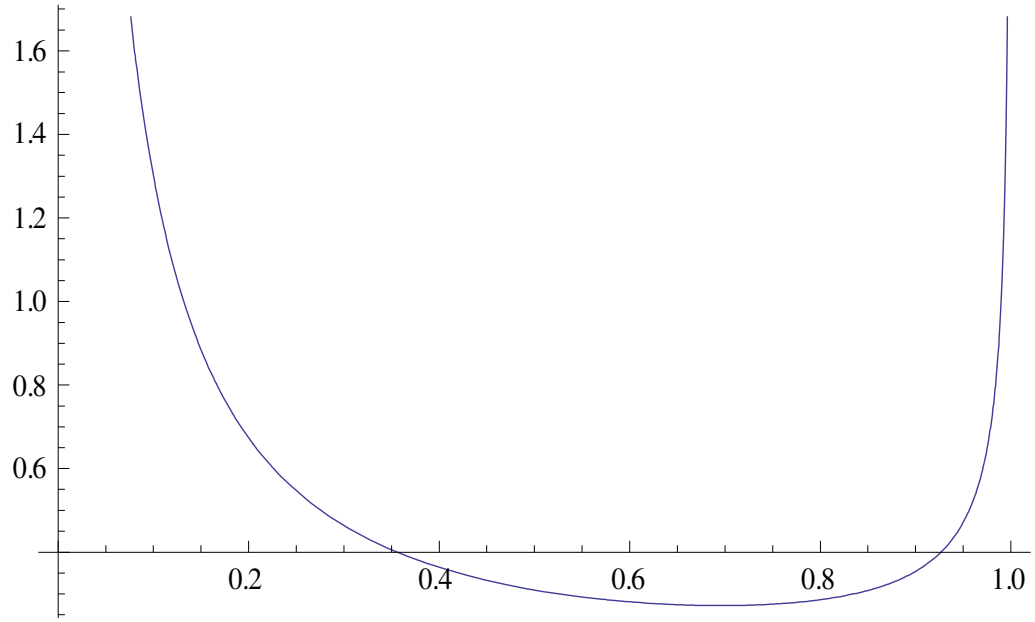
Şekil 6.2 $a = b = 4$ ve $\alpha = \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



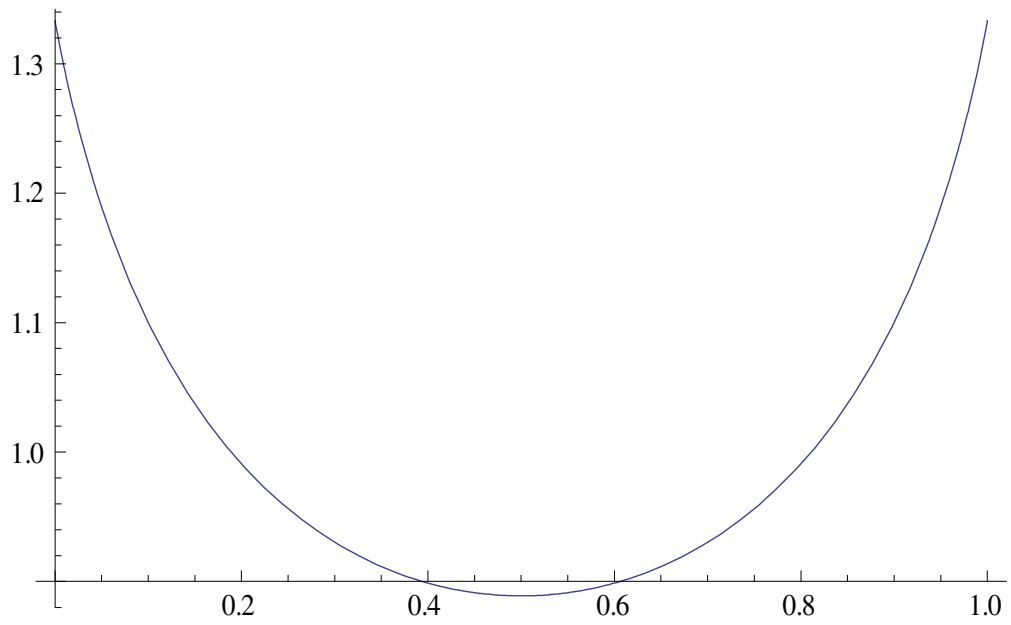
Şekil 6.3 $a = b = 4$ ve $\alpha = 0.5, \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



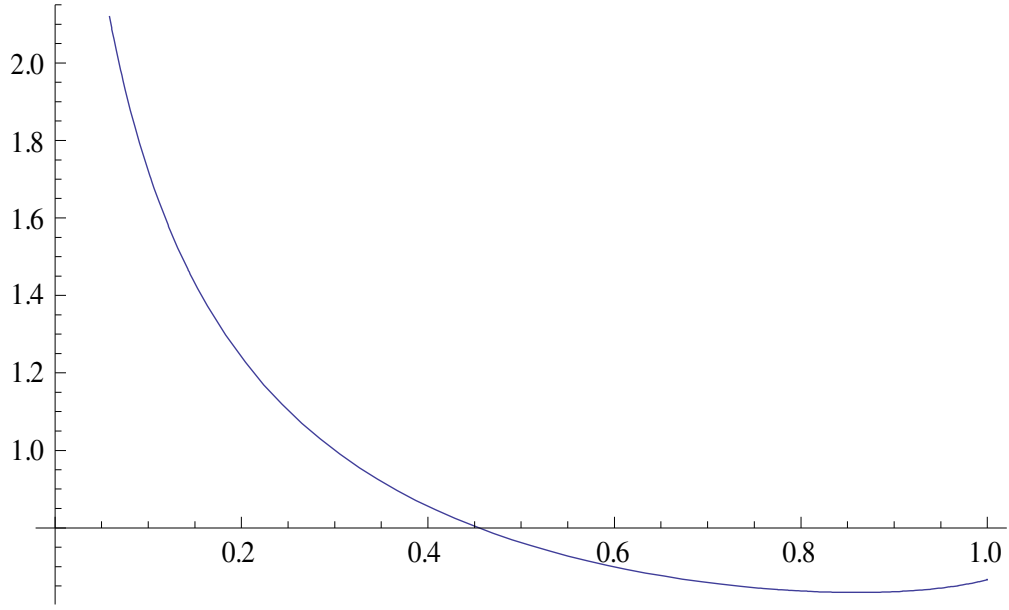
Şekil 6.4 $a = 2, b = 4$ ve $\alpha = \beta = 4$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 6.5 $a = 0.5, b = 4$ ve $\alpha = \beta = 0.5$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 6.6 $a = b = 4$ ve $\alpha = \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği



Şekil 6.7 $a = 2, b = 1$ ve $\alpha = 4, \beta = 1$ olan olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği.

6.2 Dağılımın Özellikleri

Bu bölümde ağırlıklı olarak Nadarajah ve Gupta [5] çalışmalarındaki dağılım özellikleri detaylı verilmiştir.

Teorem 6.2.1 $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ ise W rastgele değişkeninin r -inci mertebeden momentleri

$$E(W^r) = 1 - \frac{rB(a+r, b+1)}{\beta B(a, b)B(\alpha, \beta)} K(r), \quad (6.6)$$

dir. Burada

$$K(r) = \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1\left(a+r, a+b; a+b+r+1; 2-\frac{1}{y}\right) \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy \quad (6.7)$$

dır.

İspat: $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ olduğundan W rastgele değişkeninin birikimli dağılım fonksiyonu

$$F_W(w) = \frac{w^a (1-w)^b (1-2w)^{-a-b} J(w)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < w < 1$$

olup

$$E(W^r) = r \int_0^1 w^{r-1} \{1 - F_W(w)\} dw$$

dır. Buradan

$$E(W^r) = 1 - \frac{r}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \int_0^1 w^{a+r-1} (1-w)^b (1-2w)^{-a-b} J(w) dw$$

olur. (6.5) den $J(w)$ ifadesi yerine yazılırsa

$$E(W^r) = 1 - \frac{r}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \int_0^1 w^{a+r-1} (1-w)^b (1-2w)^{-a-b} \times \int_0^1 y^{b+\beta-1} (1-y)^{a-1} \left(\frac{w}{1-2w} + y \right)^{-a-b} \\ \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy dw$$

$$E(W^r) = 1 - \frac{r}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \int_0^1 y^{b+\beta-1} (1-y)^{a-1} (1-2y)^{-a-b} \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y)$$

$$\times \int_0^1 w^{a+r-1} (1-w)^b \left(w + \frac{y}{1-2y} \right)^{-a-b} dw dy$$

$$E(W^r) = 1 - \frac{r}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \int_0^1 y^{b+\beta-1} (1-y)^{a-1} (1-2y)^{-a-b} \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) M(y) dy$$

elde edilir. Burada

$$M(y) = B(a+r, b+1) \left(\frac{1-2y}{y} \right)^{a+b} \times {}_2F_1 \left(a+r, a+b; a+b+r+1; 2-\frac{1}{y} \right), \quad (6.8)$$

ve

$$K(r) = \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1 \left(a+r, a+b; a+b+r+1; 2-\frac{1}{y} \right) \times {}_2F_1 (\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy$$

olup

$$E(W^r) = 1 - \frac{rB(a+r, b+1)}{\beta B(a, b)B(\alpha, \beta)} K(r)$$

elde edilir.

Özel olarak beklenen değer ve varyans aşağıdaki teoremler ile ifade edilebilir.

Teorem 6.2.2 $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ ise W rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(W) = 1 - \frac{B(a+1, b+1)}{\beta B(a, b)B(\alpha, \beta)} \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1 \left(a+1, a+b; a+b+2; 2-\frac{1}{y} \right) \times {}_2F_1 (\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy \quad (6.9)$$

dir.

İspat: $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ ve (6.6) eşitliğinde $r=1$ alınırsa

$$E(W) = 1 - \frac{B(a+1, b+1)}{\beta B(a, b)B(\alpha, \beta)} K(1), \quad (6.10)$$

olur ve

$$K(1) = \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1 \left(a+1, a+b; a+b+2; 2-\frac{1}{y} \right) \times {}_2F_1 (\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy$$

ifadesi (6.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$E(W) = 1 - \frac{B(a+1, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1\left(a+1, a+b; a+b+2; 2-\frac{1}{y}\right) \\ \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy$$

şeklinde kapalı formda elde edilir.

Teorem 6.2.3 $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ ise W rastgele değişkeninin varyansı

$$Var(W) = \left[1 - \frac{2B(a+2, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} K(2) \right] - \left[1 - \frac{B(a+1, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} K(1) \right]^2, \quad (6.11)$$

dir.

İspat: $W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ ve

$$Var(W) = E(W^2) - [E(W)]^2, \quad (6.12)$$

dir. O halde (6.6) eşitliğinde $r = 2$ alınırsa

$$E(W^2) = 1 - \frac{2B(a+2, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} K(2), \quad (6.13)$$

olup, burada

$$K(2) = \int_0^1 y^{\beta-a-1} (1-y)^{a-1} {}_2F_1\left(a+2, a+b; a+b+3; 2-\frac{1}{y}\right) \times {}_2F_1(\beta, 1-\alpha; \beta+1; y) dy$$

dır. O halde (6.13) ve (6.10) ifadeleri (6.12) eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$Var(W) = \left[1 - \frac{2B(a+2, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} K(2) \right] - \left[1 - \frac{B(a+1, b+1)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} K(1) \right]^2$$

şeklinde kapalı formda elde edilir.

6.3 Dağılımın Diğer Dağılımlarla İlişkisi

$W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ iken a, b, α, β parametrelerinin bazı değerlerine karşılık gelen yoğunluk fonksiyonunun aldığı özel formlar *Mathematica* programı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ iken $a = b = \alpha = \beta = 1$ olduğunda dağılımın yoğunluk fonksiyonu

$$f(w) = -\frac{-2 + 4w + \log\left[-1 + \frac{1}{w}\right]}{(-2 + 2w)^3}$$

yoğunluk fonksiyonuna indirgenir.

$W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ iken $a = b = \alpha = \beta = 1/2$ olduğunda dağılımın yoğunluk fonksiyonu

$$f(w) = -\frac{\log\left[-1 + \frac{1}{w}\right]}{\pi^2 (-1 + 2w) \sqrt{-(-1 + w)w}}$$

yoğunluk fonksiyonuna indirgenir.

$W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ iken $a = b = 1, \alpha = \beta = 1/2$ olduğunda dağılımın yoğunluk fonksiyonu

$$f(w) = \frac{1 - 2w \sqrt{-1 + \frac{1}{w}}}{2(1 - 2w)^2 \sqrt{-(-1 + w)w}}$$

yoğunluk fonksiyonuna indirgenir.

$W \sim CPB(\alpha, \beta, a, b)$ iken $a = b = 1/2, \alpha = \beta = 1$ ve $a = \alpha = 1, b = \beta = 1/2$ olduğunda dağılımın yoğunluk fonksiyonları eşit olup

$$f(w) = \frac{1-2w\sqrt{-1+\frac{1}{w}}}{2w(1-2w)^2\sqrt{-1+\frac{1}{w}}}$$

yoğunluk fonksiyonuna indirgenir.

6.4 Dağılımın Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$ bileşik beta dağılımından alınmış n birimlik rastgele örneklem olsun.

Örnekleme karşılık gelen sıra istatistikleri $X_{(1:n)} \leq X_{(2:n)} \leq \dots \leq X_{(n:n)}$ olsun. Sıra istatistiğinin genel formülü

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \{F(y)\}^{r-1} \{1-F(y)\}^{n-r} f(y), \quad 0 < y < 1, \quad (6.14)$$

biçimindedir. O halde bileşik beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırası ile

$$f_w(w) = \frac{B(a+\alpha, b+\beta) w^{-\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1}}{B(a, b) B(\alpha, \beta)} \times {}_2F_1\left(a+\alpha, \alpha+\beta; a+b+\alpha+\beta; 2-\frac{1}{w}\right)$$

ve

$$F_w(w) = \frac{w^a (1-w)^b (1-2w)^{-a-b} J(w)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)}, \quad 0 < w < 1$$

olduğundan bileşik beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Y(y) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left\{ \frac{y^a (1-y)^b (1-2y)^{-a-b} J(y)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \right\}^{r-1} \left\{ 1 - \left(\frac{y^a (1-y)^b (1-2y)^{-a-b} J(y)}{\beta B(a, b) B(\alpha, \beta)} \right) \right\}^{n-r} \\ \times \frac{B(a+\alpha, b+\beta) y^{-\alpha-1} (1-y)^{\alpha-1}}{B(a, b) B(\alpha, \beta)} \times {}_2F_1\left(a+\alpha, \alpha+\beta; a+b+\alpha+\beta; 2-\frac{1}{y}\right)$$

olur.

Bileşik beta dağılımının r -inci sıra istatistiğinin k -inci mertebeden momentini diğer beta tipi dağılımlardan farklı olarak oldukça karmaşık, kapalı integrallerle ifade edileceğinden pek kullanışlı değildir.

6.5 Parametre Tahmini

Bileşik beta dağılımının parametre tahmin edicilerini bulmak için momentler yöntemi kullanılırsa, dört parametreye karşılık gelen örneklemeler bulunmalıdır. Diğer taraftan maksimum olabilirlik tahmin edicileri için olabilirlik fonksiyonu

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n f(w_i; \alpha, \beta, a, b)$$

$$= \prod_{i=1}^n \frac{B(a + \alpha, b + \beta) w^{-\alpha-1} (1-w)^{\alpha-1}}{B(a, b) B(\alpha, \beta)} \times {}_2F_1\left(a + \alpha, \alpha + \beta; a + b + \alpha + \beta; 2 - \frac{1}{w}\right)$$

şeklinde. Olabilirlik fonksiyonunun karmaşıklığından dolayı kestirim denklemlerini türetmek kullanışlı olmayacaktır. Maksimum olabilirlik tahmin edicileri çeşitli istatistik paket programlar kullanılarak bulunabilir. Örneğin tahminler optimizasyon algoritmalarından faydalanan R programındaki *optim* fonksiyonu ile bulunabilir.

6.6 Rastgele Sayı Üretimi

U , $(0,1)$ üzerindeki düzgün dağılım olsun. Dağılımlar arasındaki fonksiyonel ilişkiyi kullanarak rastgele sayı üretelim

$X \sim CGA(a, b)$ ise

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1} (1+x)^{-a-b}}{B(a, b)}, \quad x > 0$$

şeklinde ve $Y \sim CGA(a, b)$ ise

$$f_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1} (1+y)^{-\alpha-\beta}}{B(\alpha, \beta)}, \quad y > 0$$

olup, $\frac{X}{X+Y}$ oranı ile bileşik gamma dan veri üretilir. Böylece rastgele sayı üretilmiş olur.

BÖLÜM VII

UYGULAMALAR

Önceki bölümlerde beta tipi dağılımlar ve özellikleri verildi. Bu bölümde ise bu dağılımların çeşitli gerçek oransal veri kümeleri ele alındı. Bu veriler beta tipi dağılımlarla modellendi. Yalnız bileşik beta dağılımı diğerlerinden hem daha fazla parametreye sahip hem de oldukça karmaşık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğundan yeterli pratiklikte olmadığından bu dağılım hesaplama sürecine katılmadı.

7.1 Kablolı TV Oranı Veri Kümesi

Bu veri kümesi 1980- 2005 yılları arasında belli bir bölgede kablo TV ye sahip olan ailelerin yüzdelerinden oluşmaktadır [16]. Veri kümesi yüzdelikler olarak aşağıdaki gibidir.

19.9, 25.3, 29.8, 34, 39.3, 42.8, 45.6, 47.7, 49.4, 52.8, 56.4, 58.9, 60.2, 61.4, 62.4, 63.4, 65.3, 66.5, 67.2, 65.4, 65.2, 64.1, 61.9, 60.9, 59.7, 59.7

Aşağıda Şekil 7.1 deki histogramdan da görülebileceği gibi veri kümesi sola çarpıktır. Bu veri kümesinin özetleyici istatistiklerini Çizelge 7.1 de verildi. Veri kümesi sırasıyla beta dağılımı, Kumaraswamy dağılımı, iki yönlü kuvvet dağılımı ve tamamlayıcı beta dağılımı ile modellendi. *R* programında *L-BFGS-B* seçeneğiyle ve *optim* komutuyla parametre tahminleri, tahminlerin standart hataları ve log-olabilirlik değerleri hesaplandı. Bulunan değerler Çizelge 7.2 de verildi. Ayrıca birden fazla aday model olması durumunda en iyi uyumu bulmak için kullanılan ve genel formülü

$$AIC = -2l + 2r$$

olan Akaike Bilgi Kriterini (*AIC*) her bir dağılım için hesaplandı. *AIC* kriteri maksimize edilmiş olabilirlik fonksiyonunu model parametreleri artışıyla cezalandırır. Formülde *l*, log-olabilirlik değerini ve *r* de tahmin edilen parametre sayısını göstermektedir. Genel olarak *AIC* değeri en küçük olan dağılım, veriyi modellemede en iyi model olarak kabul edilir [17]. Çizelge 7.2 den iki yönlü kuvvet

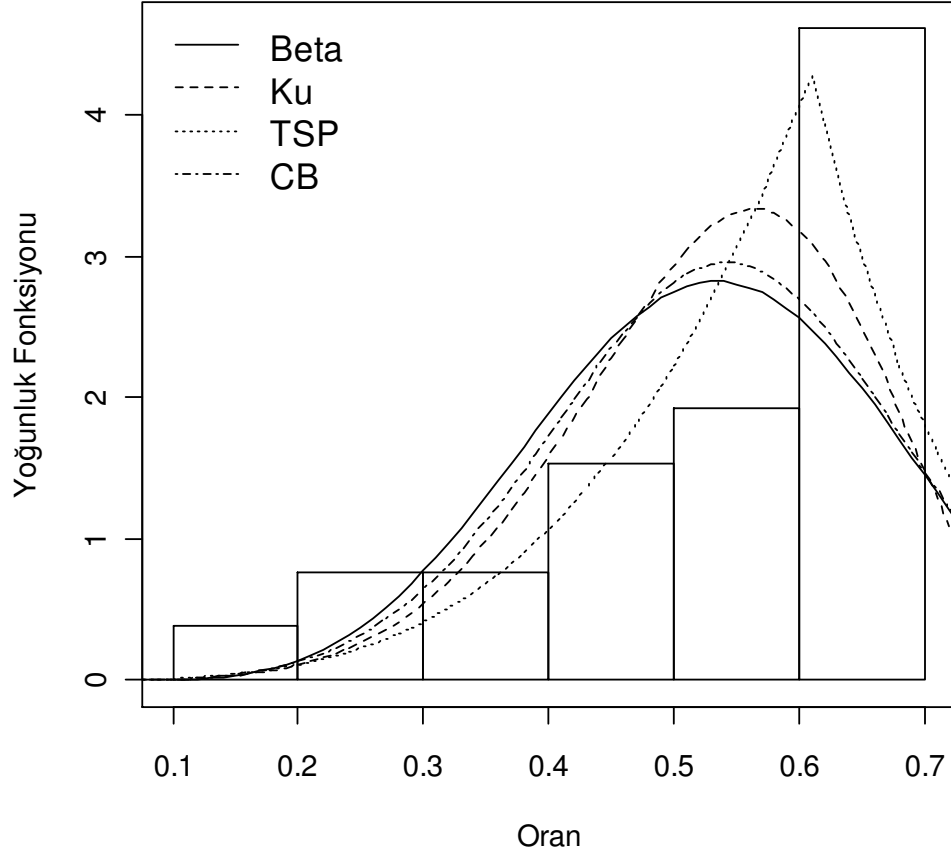
dağılımının *AIC* değerinin en küçük olduğu görülmektedir. Buna göre Kablo TV Oranı verisini modellemede en iyi beta tipi dağılım iki yönlü kuvvet dağılımıdır denebilir. Ayrıca bunu Şekil 7.1 den de görebiliriz.

Çizelge 7.1 Kablolu TV oranı veri kümesinin özet istatistikleri.

Ortalama	Standart Sapma	Mod	Medyan	Çarpıklık	Sivrilik	CV	Aralık	<i>n</i>
53.2769	13.7192	59.7	59.7	-1.0706	2.9738	0.258	48	26

Çizelge 7.2 Kablolu TV oranı veri kümesinin beta tipi dağılımlarla modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{n}$	Log-lik	<i>AIC</i>
Beta Dağılımı	6.8593 (1.8725)	6.1116 (1.6609)			15.5791	-27.1582
Kumaraswamy Dağılımı	5.0497 (0.9649)	14.9545 (7.9048)			17.3390	-30.678
TSP			0.6097 (0.0156)	4.2971 (0.8427)	17.9569	-31.9138
Tamamlayıcı Beta Dağılımı	0.2003 (0.0414)	0.2321 (0.0451)			15.6163	-27.2326



Şekil 7.1 Kablolu TV oranı verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar

7.2 Yiyecek Masrafı Oranı Veri Kümesi

Bu veri kümesi büyük bir şehirdeki 38 hane halkının yiyeceğe yaptığı harcamalarının gelirlerine oranlarından oluşmaktadır [18]. Veri kümesi yüzdelikler olarak aşağıdaki gibidir.

0.2560663, 0.2023231, 0.2911260, 0.1898036, 0.1619337, 0.3682923, 0.2800173, 0.2067752, 0.1604955, 0.2280656, 0.1921144, 0.2541947, 0.3015883, 0.2570303, 0.2914370, 0.3624967, 0.2265521, 0.3086045, 0.3705066, 0.1075258, 0.3306025,

0.2590826, 0.2501853, 0.2387817, 0.4144203, 0.1782736, 0.2250664, 0.2630519, 0.3652334, 0.5612430, 0.2423906, 0.3418765, 0.3485698, 0.3284759, 0.3508731, 0.2353782, 0.5140399, 0.5429749

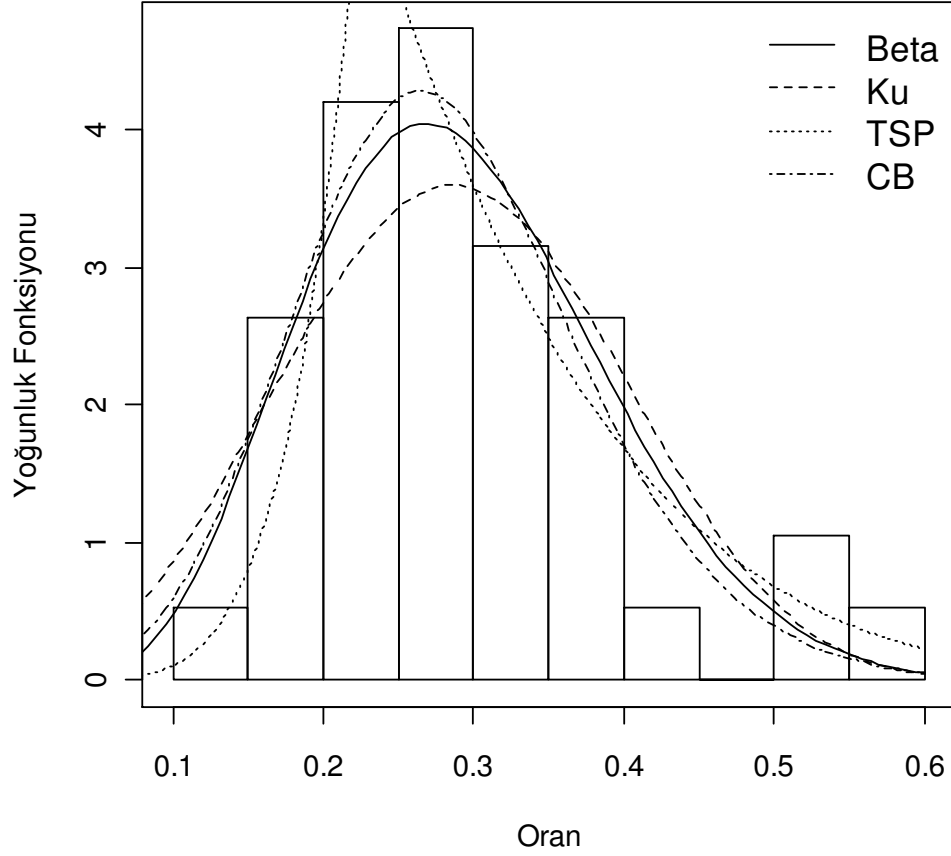
Gözlemlerin Şekil 7.2 deki histogramından da görülebileceği gibi veri kümesi sağa çarpıktır. Veri kümesinin hesaplanan özet istatistikleri Çizelge 7.3 te verildi. Bu veri kümesi de sırasıyla beta dağılımı, Kumaraswamy dağılımı, iki yönlü kuvvet dağılımı ve tamamlayıcı beta dağılımı ile modellendi ve elde edilen sonuçlar Çizelge 7.4 te verildi. Çizelge 7.4 e göre TSP dağılımı yiyecek masrafı oranı veri kümesini modellemede en iyi beta tipi dağılımdır.

Çizelge 7.3 Yiyecek masrafı oranı veri kümesinin özet istatistikleri

Ortalama	Standart Sapma	Medyan	Çarpıklık	Sivrilik	CV	Aralık	<i>n</i>
0.2897	0.1014	0.2611	0.9427	3.8595	0.35	0.4537	38

Çizelge 7.4 Yiyecek masrafı oranı veri kümesinin beta ve beta tipi dağılımlar ile modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{n}$	Log-lik	AIC
Beta Dağılımı	6.0716 (1.3586)	14.8221 (3.3988)			35.3464	-66.6928
Kumaraswamy Dağılımı	2.9546 (0.3692)	26.9655 (10.8271)			33.4891	-62.9782
TSP			0.2252 (0.0077)	5.9426 (0.9640)	36.1234	-68.2468
Tamamlayıcı Beta Dağılımı	0.2518 (0.0395)	0.1016 (0.0170)			35.5174	-67.0348



Şekil 7.2 Yiyecek masrafı oranı verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar

7.3 HC Emisyonu Veri Kümesi

Bu veri kümesi 16 deneysel arabada ölçülmüş HC emisyonu değerlerinden oluşmaktadır [19]. Veri kümesi yüzdelikler olarak aşağıda verilmiştir.

0.23, 0.41, 0.35, 0.26, 0.43, 0.48, 0.41, 0.36, 0.41, 0.26, 0.58, 0.70, 0.48, 0.33, 0.48, 0.45

Gözlemlerin Şekil 7.3 deki histogramından da görülebileceği gibi veri kümesi aşırı çarpık değildir. Veri kümesinin hesaplanan özet istatistikleri Çizelge 7.5 de verildi.

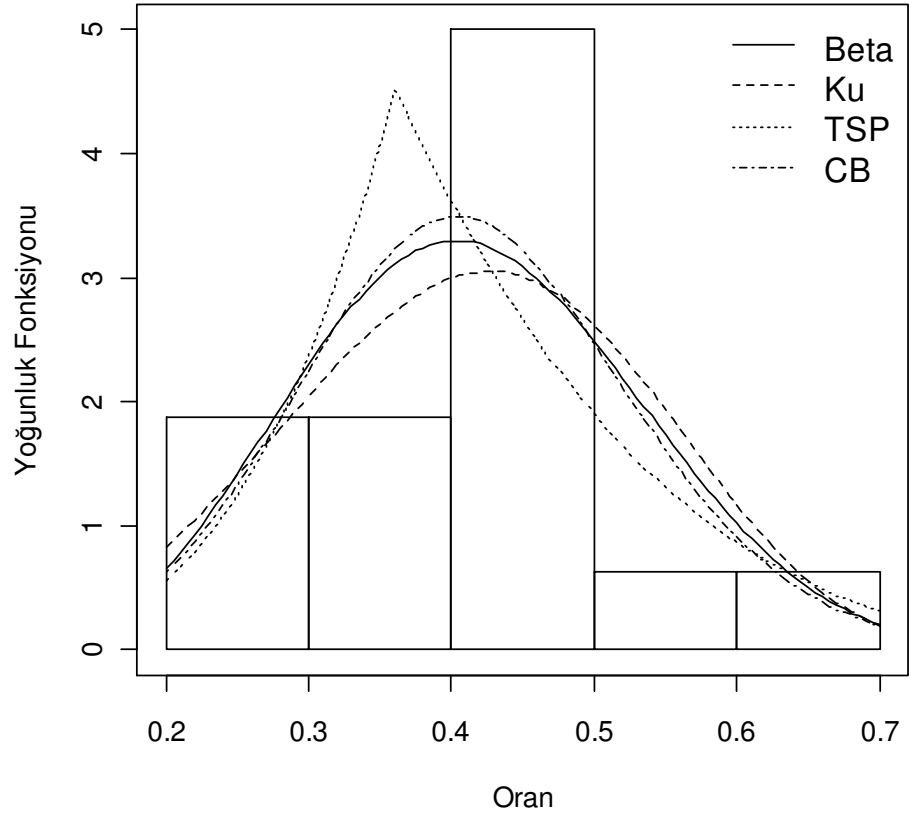
Bu veri kümesi de diğer veri kümeleri gibi sırasıyla beta dağılımı, Kumaraswamy dağılımı, iki yönlü kuvvet dağılımı ve tamamlayıcı beta dağılımı ile modellendi ve elde edilen sonuçlar Çizelge 7.6 da verildi. Çizelge 7.6 ya göre Kumaraswamy dağılımı HC emisyon veri kümesini modellemede en iyi beta tipi dağılımdır.

Çizelge 7.5 HC emisyon veri kümesinin özet istatistikleri

Ortalama	Standart Sapma	Mod	Medyan	Çarpıklık	Sivrilik	CV	Aralık	<i>n</i>
0.4138	0.1209	0.41	0.41	0.5644	3.2811	0.292	0.47	16

Çizelge 7.6 HC emisyon veri kümesinin beta tipi dağılımlarla modellenmesiyle elde edilen parametre tahminleri. Parantez içinde tahmin edicilerin standart hataları bulunmaktadır

Model	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\theta}$	$\hat{n}$	Log-lik	AIC
Beta Dağılımı	7.0407 (2.4414)	9.9310 (3.4795)			-11.8159	27.6318
Kumaraswamy Dağılımı	3.5837 (0.7224)	15.5667 (8.6595)			-11.2249	26.4498
TSP			0.3605 (0.0137)	4.5354 (1.1339)	-11.7183	27.4366
Tamamlayıcı Beta Dağılımı	0.2144 (0.0531)	0.1507 (0.0382)			-11.8752	27.7504



Şekil 7.3 HC emisyon verisi histogramı ve üzerinde uydurulmuş beta tipi dağılımlar

BÖLÜM VIII

SONUÇLAR

Bu çalışmada beta dağılımı ve beta tipi dağılımlar (0,1) aralığında incelenmiştir. Dağılımların farklı parametrelerine karşılık gelen şekilleri gösterilmiş, özellikleri ayrıntılı verilmiş ve parametrelerin farklı değerleri ile diğer dağılımlarla ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca sıra istatistikleri, parametre tahmin edicileri ve rastgele sayı üretimleri üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bileşik beta dağılımı gerek yoğunluk fonksiyonunun karmaşıklığından gerekse de aşırı parametre içerdiğinden hesaplama açısından kullanışsız bir dağılımdır. Bu nedenle bu dağılımın özellikleri detaylı incelenmedi ve bu dağılım veri analizinde dikkate alınmadı. Diğer beta tipi dağılımlar veri analizinde başarıyla uygulandı. Uygulamalar göstermiştir ki çarpıklık derecesi yüksek olan veri kümelerini modellemede TSP dağılımı diğer dağılımlardan yüksek olabilirlik değeriyle üstün gelmiştir. Yaklaşık simetrik durumda ise Kumaraswamy dağılımı diğer yöntemlerden daha üstün gelmiştir.

İki değişkenli ve çok değişkenli beta dağılımları literatürde tanımlanmış ve özellikleri çalışılmıştır. Bu noktada beta tipi dağılımların da iki değişkenli ve sonrasında çok değişkenli durumlara genişletilmesi yapıp özellikleri çalışılabilir.

Oransal ya da yüzdeler veriler regresyonda da karşımıza çıkabilir. Özellikle yanıt değişkeninin aldığı değerler (0,1) aralığındaysa klasik en küçük kareler yöntemini kullanmak yerine yanıt değişkenini pozitif uzayı böyle olan bir dağılımla modelleyip regresyon parametrelerini tahmin etmek daha kullanışlı olabilir. Bu noktada beta dağılımı Ferrari ve Cribari-Neto [20] ve Kieschnick ve McCullough [21] tarafından regresyonda yanıt değişkenini modellemede kullanılmıştır. Beta dağılımının regresyondaki uygulamalarına birer alternatif olarak beta tipi dağılımlar regresyon durumunda düşünülebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Kumaraswamy, P., Generalized probability density-function for double-bounded random-process, *Journal of Hydrology*, 46, 79-88, 1980.
- [2] Van Dorp, R. and Kotz, S., A novel extension of the triangular distribution and its parameter estimation, *Journal of the Royal Statistical Society*, 51, 63-79, 2002a.
- [3] Van Dorp, R. and Kotz, S., The Standard two-sided power distribution and its properties: with applications in financial engineering, *The American Statistician*, 56, 90-99, 2002b.
- [4] Jones, M. C., The complementary beta distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 104, 329-337, 2002.
- [5] Nadarajah, S. and Gupta, A. K., A compound beta distribution with applications in finance, *Statistical Methodology and Application*, 16, 69-83, 2007.
- [6] Aitchison, J., *The Statistical Analysis of Compositional Data*, Chapman and Hall, London, 1982.
- [7] Shaw, M., Use of Bayes' theorem and the beta distributions for reliability estimation purposes, *Reliability Engineering and System Safety*, 31, 145-153, 1991.
- [8] Papke, L. E. and Wooldrig, J. M., Econometric methods for fractional response variables with an application to 401(k) plan participation rates, *Journal of Applied Econometrics*, 11, 619-632, 1996.
- [9] Pham, T. G. and Turkkan, N., Bayes binomial sampling by attributes with a general-beta prior distribution, *IEEE Trans. on Reliability*, 41, 310-316, 1992.
- [10] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N., *Continuous Univariate Distributions*, Vol. I-II, Wiley, New York, 1995.
- [11] Evans, M., Hastings, N. and Peacock, B., *Statistical Distributions*, Wiley, New York, 1993.
- [12] Nadarajah, S., Explicit expressions for moments of order statistics, *Statistics and Probability Letters*, 78, 196-205, 2008.

- [13] Jones, M. C., Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages, *Statistical Methodology*, 6, 70-81, 2009.
- [14] Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A. and Marichev, O. I., *Integrals and Series*, Vol. I, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1986.
- [15] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series, and Products*, 6th ed., Academic Press, San Diego, 2000.
- [16] Grant, A. E. and Meadows J. H., *Communication Technology Update*, Elsevier USA, 2006.
- [17] Akaike, H., A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 19, 716-723, 1974.
- [18] Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Judge, G. G., *Learning and Practicing Econometrics*, Wiley, New York, 1993.
- [19] McDonald, G. C., Vance, L. C. and Gibbons, D. L., Some Tests for Discriminating Between Lognormal and Weibull Distributions: An Application to Emission Data, In N. Balakrishnan, *Recent Advances in Life-Testing and Reliability*, 475-490, 1995.
- [20] Ferrari, S. L. P. and Cribari-Neto, F., Beta regression for modelling rates and proportions, *Journal of Applied Statistics*, 7, 799-815, 2004.
- [21] Kieschnick, R. and McCullough, B. D., Regression analysis of variates observed on $(0,1)$: percentages, proportions and fractions, *Statistical Modelling*, 3, 193-213, 2003.