

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Ümit CİĞER**

**TOPOLOJİK GENİŞLEMELER VE İDEALLER**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ADANA, 2011**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TOPOLOJİK GENİŞLEMELER VE İDEALLER**

**Ümit CİĞER**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez .../.../.... Tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği /oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....  
Doç. Dr. Fikret KUYUCU  
DANIŞMAN

.....  
Doç. Dr. Ali ÖZKURT  
ÜYE

.....  
Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT  
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

**Kod No:**

**Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL**  
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

**ÖZ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TOPOLOJİK GENİŞLEMELER VE İDEALLER**

**Ümit CİĞER**

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman : Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Yıl : 2011, Sayfa: 49

Jüri : Doç. Dr. Fikret KUYUCU

Doç. Dr. Ali ÖZKURT

Yrd. Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

Bir topolojik uzayın genişlemeleri arasındaki ilişkiler ve bir topolojik uzayın iki genişlemesi ne zaman denk olur konuları daima araştırmaya değerdir. Bir topolojik uzayda bir  $I$  ideali,  $I$  nın elemanlarının tümleyenlerinden oluşan bir filtre olmasıdır. Bir topolojik uzaya, üzerindeki idealle birlikte bir ideal topolojik uzay denir. Birçok topoloji problemi araştırmalarda kullanılmıştır ve hala kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, idealler kullanılarak bir topolojik uzayın genişlemeleri arasındaki ilişkiler ve iki genişlemenin denk olması durumu incelenecektir.

**Anahtar Kelimeler:** Topoloji, genişleme ve idealler.

## ABSTRACT

### MSc THESIS

## TOPOLOGICAL EXTENSIONS AND IDEALS

Ümit CİĞER

ÇUKUROVA UNIVERSITY  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU

Year: 2011, Pages: 49

Jury :Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU

:Assoc. Prof. Dr. Ali ÖZKURT

:Asst. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

It is always worth researching the topics which are the relationships between the extensions of a topological space and the time when two extensions of a topological space are equal. An  $I$  ideal in a topological space is a filter that is made up of the complementary components of  $I$ . A topological space with its ideal on it is called an topological space. A great deal of topology problems have been and are stil used for research.

The aim of this research is to investigate the relationships between the extensions of a topological space and the state of two extensions being equal by using ideals.

**Key Words:** Topology, extensions and ideals.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında hiçbir zaman yardımlarını ve anlayışını eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak çok değerli danışmanım Doç. Dr. Fikret KUYUCU' ya en derin saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın oluşmasında katkısı bulunan değerli arkadaşım Caner COŞKUNTUNCEL' e ve Araştırma Görevlisi Ayşe ÇAYLAK' a teşekkür ederim.

İhtiyaç duyduğum her an yardımlarını ve anlayışını hiçbir şekilde eksik etmeyen değerli hocam Doç. Dr. Ali ÖZKURT' a teşekkür ederim. Maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her zaman yanımda olan haklarını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim çok değerli babam Hüseyin CİĞER, annem Menekşe CİĞER ve kız arkadaşım Asuman ALYAPRAK' a çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

## SAYFA

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| ÖZ .....                                   | I   |
| ABSTRACT .....                             | II  |
| TEŞEKKÜR .....                             | III |
| İÇİNDEKİLER .....                          | IV  |
| 1. GİRİŞ .....                             | 1   |
| 2. TOPOLOJİK UZAYLARIN GENİŞLEMELERİ ..... | 3   |
| 2.1 Temel Bilgiler .....                   | 3   |
| 2.2 Kompakt Genişlemeler .....             | 13  |
| 2.3 Tek Nokta Kompaktlamaları .....        | 22  |
| 3. BİR GENİŞLEMENİN KUVVET SİSTEMİ .....   | 31  |
| 3.1 Kuvvet Sistemleri .....                | 31  |
| 3.2 İdeal Genişlemeler .....               | 37  |
| KAYNAKLAR .....                            | 47  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                             | 49  |



## 1. GİRİŞ

Bir  $X$  uzayının bir genişlemesi  $X$  i yoğun bir alt uzay olarak içeren bir uzaydır. Kompaktlamalar, reelkompaktlamalar,  $H$ -kapalı genişlemeler gibi çeşitleri bulunan genişlemeler genel topolojinin temel çalışma alanlarından biridir.

Bir topolojik uzayın genişlemeleri arasındaki ilişkiler ve bir topolojik uzayın iki genişlemesi ne zaman denk olur konuları daima araştırmaya değerdir.

Bir topolojik uzayda bir  $I$  ideali,  $I$  nın elemanlarının tümleyenlerinden oluşan ailenin filtre olmasıdır. Bir topolojik uzaya, üzerindeki idealle birlikte bir ideal topolojik uzay denir. Birçok topoloji problemi araştırmalarda kullanılmıştır ve kullanılmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, idealler kullanarak bir topolojik uzayın genişlemeleri arasındaki ilişkiler ve iki genişlemenin denk olması durumu incelenecektir. Ayrıca ideal genişlemeleri üzerinde durulacaktır. Bunun için 2. Bölümde bir topolojik uzayın genişlemeleri, genişlemelerinin kümesi, bu küme üzerindeki sıralama ve bu sıralamanın özelliklerinden bahsedilmiştir. 3. Bölümde ise bir genişlemenin kuvveti, ideal genişlemeler ve özellikleri, idealleri kullanarak bazı koşullarda iki genişlemenin eşdeğer olmasını veren teoremlerle ele alınmıştır.



## 2. TOPOLOJİK UZAYLARIN GENİŞLEMELERİ

Bu bölümde amacımız bir  $X$  uzayının genişlemelerini, özel genişlemelerini ve özelliklerini tanıtmaktır.

Bir  $X$  uzayını yoğun bir alt uzay olarak içeren bir  $Y$  uzayına  $X$  in bir genişlemesi denir.

Genişlemelerin çalışılmasının sebebi,  $X$  ile ilgili olan bir problemi,  $X$  in genişlemesi olan bir  $Y$  uzayına aktararak problemi çözülebilir veya çözümü daha kolay hale getirebilmektir. Böyle  $Y$  uzayına  $X$  den daha güzel uzay denir. Bu yüzden genişleme teorisinin önemli amaçlarından biri sabit bir  $X$  uzayının güzel genişlemelerini inşa etmektir. Bunlardan bazıları bir Tychonoff uzayının bütün kompakt genişlemeleri, bir sıfır boyutlu uzayın sıfır boyutlu genişlemeleridir.

Örneğin;  $Y = [0,1]$  ve  $X = (0,1)$  i  $\mathbf{R}$  den gelen alt uzay topolojileriyle düşünürsek  $Y$ ,  $X$  in bir genişlemesi olur.

Diğer bir örnek;  $Y$  sonsuz bir küme ve  $(Y, t_s)$  uzayını düşünelim.  $X$ ,  $Y$  nin herhangi bir sonsuz alt kümesi ve  $X$ ,  $Y$  den gelen alt uzay topolojisine sahip ise  $Y$ ,  $X$  in bir genişlemesidir.

Bu bölümde bütün uzaylar aksi belirtilmedikçe  $T_2$  - uzay (*Hausdorff*) kabul edilecektir.

### 2.1 Temel Bilgiler

Bu bölümde bir  $X$  uzayının iki genişlemesinin denk olması tanımlanacak ve bu denklige bağlı olarak  $X$  uzayının genişlemelerinin ailesinin bir küme olduğu gösterilecektir.

**Tanım 2.1.1.**  $X_1$  ve  $X_2$  bir küme ise  $F(X_1, X_2) = \{f : X_1 \rightarrow X_2 : f \text{ bir fonksiyon}\}$  dır.  $X_1$  ve  $X_2$  uzaylarının genişlemeleri sırasıyla  $Y_1$ ,  $Y_2$  ve  $f \in F(X_1, X_2)$  olsun. Eğer,

$$F \in F(Y_1, Y_2) \text{ ve } F/X_1 = f$$

olacak şekildeki  $F$  ye  $f$  fonksiyonunun bir genişlemesi denir.

$X_1$  ve  $X_2$  bir küme ise  $C(X_1, X_2) = \{f : X_1 \rightarrow X_2 : f \text{ sürekli bir fonksiyon}\}$  dir.

**Tanım 2.1.2.** Eğer  $Y, X$  in bir genişlemesi ise  $Y - X$  uzayına ( $Y$  nin alt uzayı olarak)  $X$  in bir kalanı denir.

**Lemma 2.1.3.**  $X_1$  ve  $X_2$  uzaylarının genişlemeleri sırasıyla  $Y_1$  ve  $Y_2$  uzayları ve  $f \in C(X_1, X_2)$  olsun. . O zaman  $f$  fonksiyonunun en fazla bir tek  $F \in C(Y_1, Y_2)$  genişlemesi vardır.

**İspat:**  $f$  fonksiyonun  $F, G \in C(Y_1, Y_2)$  gibi iki genişlemesi olsun. O zaman  $F/X_1 = G/X_1 = f$  dir.  $y \in Y_1 - X_1$  olsun.  $cl_{Y_1} X_1 = Y_1$  olduğundan en az bir  $(X_l)_{l \in \Lambda} \subseteq X_1$  ağı vardır öyle ki  $X_l \rightarrow y$  olur.  $f$  sürekli olduğundan  $f(X_l) \rightarrow f(y)$  olur.  $F$  ve  $G$  sürekli olduğundan  $Y_2 : F(X_l) \rightarrow F(y)$  ve  $Y_2 : G(X_l) \rightarrow G(y)$  olur. O halde,

$$(X_l) \subseteq X_1 \text{ ve } F/X_1 = G/X_1$$

oldüğundan her  $l \in \Lambda$  için  $F(X_l) = G(X_l)$  olur. Buradan,

$$F(X_l) = G(X_l) \rightarrow F(y) \text{ ve } F(X_l) = G(X_l) \rightarrow G(y)$$

ve  $Y_2, T_2$  -uzay olduğundan limit tek olup  $F(y) = G(y)$  dir. Dolayısıyla her  $y \in Y_1$  için  $F(y) = G(y)$  olup  $F = G$  dir. Sonuç olarak  $f$  nin sürekli genişlemesi varsa tektir.

**Lemma 2.1.4.**  $Y, X$  uzayının bir genişlemesi olsun. O zaman  $|Y| \leq 2^{|X|}$  dir.

**İspat:** Her  $p \in Y$  için  $O^p = \{U \mid X : U, Y \text{ de açık ve } p \in U\}$  olsun. O zaman  $O^p, X$  üzerinde bir açık filtredir. Eğer  $p, q \in Y$  ve  $p \neq q$  ise  $Y$  de en az bir  $U, V$  açık

kümeleri vardır öyle ki  $p \in U$ ,  $q \in V$  ve  $U \cap V = \emptyset$  olur. Buradan,  $(U \cap X) \cap (V \cap X) = \emptyset$  ise  $U \cap X \in O^p$  ve  $V \cap X \in O^q$  olduğundan  $O^p \neq O^q$  olur. O zaman  $p \rightarrow O^p$  dönüşümü birebir olur. Yani,  $O^p \in P(P(X))$  olduğundan,

$$\Phi: Y \rightarrow P(P(X)), \Phi(p) = O^p$$

fonksiyonu birebir olur. O halde  $|Y| \leq |P(P(X))| = 2^{2^{|X|}}$  dir.

**Tanım 2.1.5.**  $Y_1$  ve  $Y_2$  uzayları bir  $X$  uzayının iki genişlemesi olsun. Eğer,

$$\text{her } x \in X \text{ için } h: Y_1 \rightarrow Y_2 \quad h(x) = x$$

olacak şekilde bir  $h$  homeomorfizması varsa  $Y_1$  ve  $Y_2$  denktir denir ve  $Y_1 =_X Y_2$  yazılır.

**Tanım 2.1.6.**  $X$  bir uzay ise  $X$  in denk genişlemeleri arasında fark gözetilmez. Bunu,

$$E(X) = \{Y : Y, X \text{ 'in bir genişlemesi}\}$$

olarak gösterirsek  $Z$ ,  $X$  in bir genişlemesi ise  $Y \equiv_X Z$  olacak şekilde bir  $Y \in E(X)$  vardır. Yani,  $E(X)$  denklik sınıflarının temsilcilerinden oluşan bir ailedir.

**Sonuç 2.1.7.** Bir  $X$  uzayı için  $E(X)$  bir kümedir.

Eğer  $(X_a)_{a \in L}$  boş olmayan kümelerin herhangi bir ailesi ise bu ailenin kartezyen çarpımı

$$\prod_{a \in L} X_a = \left\{ x: L \longrightarrow \bigcup_{a \in L} X_a : x(a) \in X_a, a \in L \right\}$$

şeklinde tanımlanır.  $\prod_{a \in L} X_a$  yerine çoğu kez  $\prod X_a$  yazılır.

**Tanım 2.1.8.**  $X$  bir uzay,  $\{X_i : i \in I\}$  uzaylarının bir kümesi ve her  $i \in I$  için  $F_i \subseteq C(X, X_i)$  olsun.  $F = \bigcup_{i \in I} F_i$  olsun. Her  $i \in I$  ve her  $f \in F_i$  için  $X_f = X_i$  (veya

$X_f$ ,  $X$  ile homeomorfik) olsun.  $Y = \prod_{f \in F} X_f$  çarpım uzayı olsun. O zaman,

$$e_F : X \rightarrow Y = \prod_{f \in F} X_f, \quad x \in X \text{ için } e_F(x) = (f(x))_{f \in F}$$

şeklinde tanımlanan, yani her  $f \in F$  için  $p_f \circ e_F = f$  şeklinde olan, fonksiyona değerlendirme fonksiyonu ( $F$  ye göre) denir.

$$e_F : X \longrightarrow Y = \prod_{f \in F} X_f$$

$$\begin{array}{ccc} f & \downarrow p_f & \\ & X_f & \end{array}$$

**Tanım 2.1.9.**  $F$ , Tanım 2.1.8 deki gibi olsun. Eğer her  $A$ ,  $X$  de kapalı küme ve  $p \notin A$  için,

$$f(p) \notin cl_{X_i} f(A) = cl_{X_f} f(A)$$

olacak şekilde bir  $i \in I$  ve  $f \in F_i$  (yani bir  $f \in F$ ) mevcut ise  $F$  ye  $X$  in kapalı kümelerini noktalardan ayırır denir.

**Teorem 2.1.11.** (Gömme Teoremi)  $X$ ,  $\{X_i : i \in I\}$ ,  $F_i$ ,  $F$ ,  $Y$  ve  $e_F$  Tanım 2.1.8 deki gibi olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

i.  $e_F \in C(X, Y)$  dir,

ii. Eğer  $F$ ,  $X$  in kapalı kümelerini noktalardan ayırıyorsa  $e_F$  bir gömmedir.

**İspat:** i.  $f \in F$  için  $p_f : \prod_{f \in F} X_f \rightarrow X_f$ ,  $S$ ,  $\prod_{f \in F} X_f$  çarpım topolojisinin bilinen alt

bazı olmak üzere ve  $U_a$ ,  $X_f$  de açık ise  $p_f^{-1}(U_a) \in S \subseteq t_{\text{çarp}}$  olduğundan  $p_f$  süreklidir. O zaman her  $f \in F$  için  $p_f \circ e_F$  sürekli olur.  $U_a \subseteq X_f$  için  $p_f^{-1}(U_a) \in S$  olsun.

$$e_F^{-1}(p_f^{-1}(U_a)) = (p_f \circ e_F)^{-1}(U_a)$$

olup  $p_f \circ e_F = f$  sürekli olduğundan,  $(p_f \circ e_F)^{-1}(U_a)$ ,  $X$  de açık olacağından  $e_F^{-1}(p_f^{-1}(U_a))$  kümesi  $X$  de açık olur. O zaman  $e_F \in C(X, Y)$  olur.

ii.  $e_F : X \rightarrow e_F(X)$  fonksiyonun birebir ve açık olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü (i) den  $e_F$  süreklidir.

$x_0, x_1 \in X$  ve  $x_0 \neq x_1$  olsun. O zaman  $A = \{x_1\}$ ,  $X$  de kapalı ve  $x_0 \notin A = \{x_1\}$  ise  $F$  kapalı kümelerden noktaları ayırdığından  $f(x_0) \notin cl_{X_f}\{f(x_1)\}$  olacak şekilde bir  $f \in F$  vardır. O zaman  $f(x_0) \neq f(x_1)$  dir. Buradan  $e_F(x_0) = (f(x_0))_{f \in F} \neq (f(x_1))_{f \in F} = e_F(x_1)$  olduğundan  $e_F$  birebirdir.

$V$  kümesi  $X$  de açık ve  $x_0 \in V$  olsun. O zaman  $X - V$ ,  $X$  de kapalı ve  $x_0 \notin (X - V)$  olur. Hipotezden  $f(x_0) \notin cl_{X_f} f(X - V)$  olacak şekilde bir  $f \in F$  vardır. Biz,

$$e_F(x_0) \in e_F(X) \cap p_f^{-1}(X_f - cl_{X_f} f(X - V)) \subseteq e_F(V) \dots (**)$$

olduğunu gösterebilirsek  $e_F(V)$ ,  $e_F(X)$  de açık olur. Açık olarak,

$$p_f(e_F(x_0)) = f(x_0) \in X_f - cl_{X_f} f(X - V)$$

olduğundan  $e_F(x_0) \in p_f^{-1}(X_f - cl_{X_f} f(X - V))$  dir. Eğer  $x_1 \in X$  ve  $e_F(x_1) \in p_f^{-1}(X_f - cl_{X_f} f(X - V))$  ise,  $f(x_1) = p_f \circ e_F(x_1) \in X_f - cl_{X_f} f(X - V)$  olur. Dolayısıyla  $f(x_1) \notin cl_{X_f} f(X - V)$  olsun. O zaman  $f(x_1) \notin f(X - V)$  olur. Buradan  $x_1 \notin X - V$  olup  $x_1 \in V$  olur. O zaman  $p_f^{-1}(X_f - cl_{X_f} f(X - V)) \subseteq e_F(V)$  olur. Sonuç olarak  $(**)$  denklemi sağlanır.

Şimdi  $E(X)$  üzerinde bir sıralama bağıntısı tanımlayalım.

**Tanım 2.1.12.**  $X$  bir uzay ve  $Y, Z \in E(X)$  olsun. Eğer,

$$f : Y \rightarrow Z, f(x) = x, (x \in X \text{ için})$$

olacak şekilde sürekli bir  $f$  fonksiyonu varsa  $Y \geq Z$  (veya  $Z \leq Y$ ) yazılır ve  $Y$  ye

$Z$  den projektif olarak daha büyüktür denir.

$E(X)$  üzerindeki “ $\leq$ ” bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

**Lemma 2.1.13.** Bir  $X$  uzayı için  $(E(X), \leq)$  bir tam üst yarı latistir.

**İspat:** İlk önce  $(E(X), \leq)$  in kısmi sıralanmış olduğunu gösterelim. “ $\leq$ ” bağıntısının yansıma ve geçişme özelliklerini sağladığı kolayca görülür. Biz ters simetri özelliğini gösterelim. Bunun için  $Y, Z \in E(X)$ ,  $Y \leq Z$  ve  $Z \leq Y$  olsun. O zaman  $f: Z \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  ve her  $x \in X$  için  $f(x) = g(x) = x$  olacak şekilde sürekli  $f$  ve  $g$  fonksiyonları vardır. Buradan  $f \circ g: Y \rightarrow Y$  sürekli ve  $f \circ g/X = I_X = I_Y/X$  olur. Lemma 2.1.3 den dolayı  $f \circ g = I_Y$  olur. Benzer şekilde  $g \circ f = I_Z$  olur. Dolayısıyla  $g = f^{-1}$  ve  $f$  bir homeomorfizm olur. O zaman  $Y \equiv_x Z$  dir.

Son olarak  $\emptyset \neq S \subseteq E(X)$  ise  $\text{Sup}S = VS$  nin mevcut olduğunu gösterelim.

$\emptyset \neq S \subseteq E(X)$  için  $pS = \prod_{Y \in S} Y$  çarpım uzayı olmak üzere  $e: X \rightarrow pS$  yi her

$Y \in S$  için  $(p_Y \circ e)(x) = x$  olacak şekilde tanımlayalım. Gömme Teoreminden dolayı  $e$  bir gömmedir. Çünkü  $Y \in S$  için  $f = I_Y: X \rightarrow Y$ ,  $I_Y(x) = x$  için  $F = \{I_Y: Y \in S\}$  ailesi kapalı kümelerden noktaları ayırır. Dolayısıyla  $x$  ile  $e(x)$  i özdeşleştirebiliriz ve  $X = e(X)$  olur. O zaman  $Z = cl_{pS} e(X)$  alırsak  $Z \in E(X)$  olur.  $Y \in S$  için  $p_Y: pS \rightarrow Y$  izdüşüm fonksiyonu olmak üzere  $f_Y = p_Y/Z$  olsun. O zaman  $f_Y: Z \rightarrow Y$  sürekli ve her  $x \in X$  için  $f_Y(x) = p_Y(e(x)) = x$  olur. Böylece her  $Y \in S$  için  $Y \leq Z$  olur.  $W \in E(X)$  ve her  $Y \in S$  için  $Y \leq W$  olsun.  $Z \leq W$  olduğunu gösterirsek  $Z = \text{Sup}S$  olur.  $Y \in S$  için  $Y \leq W$  olduğundan her  $x \in X$  için  $g_Y(x) = x$  olacak şekilde sürekli bir  $g_Y: W \rightarrow Y$  fonksiyonu vardır. Şimdi  $h: W \rightarrow pS$  fonksiyonunu  $w \in W$  ve  $Y \in S$  için  $g_Y(w) = p_Y(h(w))$  ile tanımlayalım.

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{h} & pS \\
 g_Y \downarrow & & \downarrow p_Y \\
 & Y &
 \end{array}$$

Her  $Y \in S$  için  $p_Y \circ h = g_Y$  sürekli olduğundan  $h$  süreklidir. Ayrıca her  $Y \in S$  için

$$(p_Y \circ h)(x) = g_Y(x) = p_Y \circ e(x)$$

olur. Bu nedenle  $h/X = e/X$  ve  $h(x) = e(x)$  olur. O zaman,

$$h(W) = h(cl_W X) \subseteq cl_{pS} e(x) = Z$$

olduğundan  $Z \leq W$  olur. O zaman  $Z = \sup S = VS$  dir. Dolayısıyla  $(E(X), \leq)$  bir tam üst yarı latistir.

**Tanım 2.1.14.** Bir  $X$  uzayı için  $\emptyset \neq Q \subseteq E(X)$  olsun. Eğer bir  $Y \in E(X), Y \in Q$  ve her  $Z \in Q$  için  $Z \leq Y$  oluyorsa  $Y$  ye  $Q$  da bir projektif maksimum denir.

Bu tanımdan hemen belirtelim ki  $Y \geq VQ$  ve  $Y \in Q$  olduğundan  $VQ \geq Y$  olup  $Y \equiv_x VQ$  olur. Böylece eğer  $Q$  bir projektif maksimuma sahip ise tektir ve  $VQ$  ya eşittir.

Aşağıdaki sonuç  $E(X)$  in projektif maksimumunu belirler.

**Lemma 2.1.16.** Her  $X$  uzayı için  $VE(X) = X$  dir.

**İspat:**  $X \in E(X)$  ve  $Y \in E(X)$  ise  $I: X \rightarrow Y, I(x) = x$  sürekli olduğundan  $Y \leq X$  olur. O zaman  $X, E(X)$  in projektif maksimumudur.

**Tanım 2.1.17.**  $P$ , homeomorfizmler altında kapalı olan uzayların bir ailesi olsun. Yani  $X \in P$  ve  $X, Y$  ye homeomorfik ise  $Y \in P$  dir. Böyle ailelere replete denir.

Biz genelde böyle aileleri topolojik özellikler için göstereceğiz. “ $X \in P$ ” ve “ $X, P$  özelliğine sahiptir.” ifadeleri birbirinin yerine kullanılabilecektir. Konunun başında aksi belirtilmedikçe bütün uzaylar Hausdorff olacak demiştik. O zaman,

örneğin “P bağlantılılık” olsun dediğimizde bunun anlamı “P bağlantılı Hausdorff uzayların ailesi “ olur.

Bundan böyle, eğer P bir topolojik özellik hipotezi ise P yi sağlayan ve birden fazla nokta içeren bir uzayın mevcut olduğunu kabul edeceğiz.

**Tanım 2.1.18.** Bir X uzayı için  $P(X) = \{Y \in E(X) : Y \in P\}$  olsun.  $P(X)$ , X in P-genişlemelerinin kümesi denir. Eğer,

$$\text{her } A \subseteq P \text{ için } pA = \prod_{X \in A} X \in P$$

oluyorsa P ye çarpımsaldır denir. Eğer,  $X \in P$  ve A, X de kapalı küme ve  $A \in P$  oluyorsa P ailesine kalıtsal kapalı denir.

**Lemma 2.1.19.** X bir uzay ve P de kalıtsal kapalı ve çarpımsal olan topolojik özellik olsun. Eğer  $P(X) \neq \emptyset$  ise  $P(X)$ ,  $E(X)$  in bir tam üst yarı latisidir. Böyle  $P(X)$ , bir projektif maksimuma sahiptir.

**İspat:**  $\emptyset \neq S \subseteq P(X)$  olsun. Lemma 2.1.13 den  $Z = VS$ ,  $E(X)$  de mevcuttur. O zaman her  $Y \in S$  için  $Y \leq Z$  olduğundan  $Z \in P(X)$  olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 2.1.13 nin ispatından  $e: X \rightarrow pS$  olmak üzere  $Z = cl_{pS} e(X)$  idi. P çarpımsal olduğundan  $pS \in P$  dir. P kalıtsal kapalı olduğundan  $cl_{pS}[X] \in P(X)$  olur.  $(X \approx e(X))$ . Böylece  $Z \in P(X)$  dir.

Şimdi X üzerindeki sürekli bir fonksiyonun ne zaman  $E(X)$  in bir elemanı üzerinde sürekli genişlemeye sahip olacağını araştırmaya başlayalım. Bu araştırma bu konunun temellerinden birini teşkil eder.

**Tanım 2.1.20.**  $(X, t)$  bir topolojik uzay olsun. X in kapalı her A alt kümesi ve  $x \notin A$  için  $x \in U, A \subseteq V$  ve  $U \cap V = \emptyset$  olacak şekilde X de U ve V açık kümeleri varsa  $(X, t)$  ya regüler uzay denir.

**Lemma 2.1.21.** Bir  $X$  uzayı için  $Y \in \mathbf{E}(X)$ ,  $Z$  bir regüler uzay ve  $f \in C(X, Z)$  olsun. Aşağıdakiler denktir:

i.  $F/X = f$  olacak şekilde bir  $F \in C(Y, Z)$  vardır,

ii. Her  $y \in Y$  için  $O^y = \{W \mid X : W \text{ kümesi } Y \text{ de açık ve } y \in W\}$  olsun. Her  $y \in Y$  için  $F_y = \{A \subseteq Z : \text{Bir } U \in O^y \text{ için } f(U) \subseteq A\}$  filtresi yakınsaktır.

**İspat:** i)  $\Rightarrow$  ii)  $F$  mevcut ve  $y \in Y$  olsun.  $F_y \rightarrow F(y)$  olduğunu göstereceğiz.  $W$  kümesi  $Z$  de açık ve  $F(y) \in W$  olsun. O zaman  $F$  sürekli olduğundan  $Y$  de en az bir  $U$  açık kümesi vardır ve  $y \in U$  ve  $f(U) \subseteq W$  olur. Dolayısıyla,

$$f(U \mid X) = F(U \mid X) \subseteq W \text{ ve } U \mid X \in O^y$$

olur. Dolayısıyla  $U(F(y)) \subseteq F_y$  olur.

ii)  $\Rightarrow$  i) Her  $y \in Y$  için  $F_y$ ,  $Z$  de bir noktaya yakınsasın.  $Z$  Hausdorff uzay olduğundan  $F_y$  bir tek noktaya yakınsadığından buna  $F(y)$  diyelim. O zaman  $F : Y \rightarrow Z$  bir fonksiyon olur. Eğer  $x \in X$ ,  $W$  kümesi  $Z$  de açık ve  $f(x) \in W$  ise  $f$  sürekli olduğundan  $f(U) \subseteq W$  olacak şekilde  $X$  de bir  $U$  açık kümesi ve  $x \in U$  vardır.  $V$ ,  $Y$  de açık bir küme ve  $x \in V$  olsun.  $U = V \mid X$  olduğundan  $U \in O^y$  ve  $W \in F_x$  olur. Böylece  $F_x \rightarrow f(x)$  olur. Buradan  $x \in X$  için  $f(x) = F(x)$ , yani  $F/X = f$  olur.  $F$  nin sürekli olduğunu göstermek için  $y \in Y$ ,  $W$  kümesi  $Z$  de açık ve  $F(y) \in W$  olsun.  $Z$  regüler olduğundan  $F(y) \in V \subseteq cl_Z V \subseteq W$  olacak şekilde  $Z$  de bir  $V$  açık kümesi vardır.  $F_y \rightarrow F(y)$  olduğundan  $y \in U$  ve  $f(U \mid X) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  de bir  $U$  açık kümesi vardır.  $(F_y \rightarrow F(y) \text{ ise } U(F(y)) \subseteq F_y \text{ olduğundan } V \in F_y)$ .  $p \in U$ ,  $T$  kümesi  $Z$  de açık ve  $F(p) \in T$  olsun. O zaman  $R \subseteq U$  ve  $f(R \mid X) \subseteq T$  olacak şekilde  $Y$  de bir  $p \in R$  açık kümesi vardır.  $R \mid X \neq \emptyset$  olduğundan  $\emptyset \neq f(R \mid X) \subseteq T$  olur. O zaman,

$$f(R \mathbf{I} X) \subseteq V \quad (f(R \mathbf{I} X) \subseteq f(U \mathbf{I} X) \subseteq V)$$

olur. Böylece  $T \mathbf{I} U \neq \emptyset$  olur. Bu bize  $F(p) \in cl_Z V \subseteq W$  ve  $F(U) \subseteq W$  olduğunu gösterir. Bu nedenle  $F$  süreklidir.

Lemma 2.1.21 de  $Z$  nin regüler olması hipotezi kaldırılırsa doğru değildir.

**Teorem 2.1.22.** (Taimanov Teoremi)  $X$  bir uzay,  $Y \in \mathbf{E}(X)$ ,  $Z$  kompakt bir uzay ve  $f \in C(X, Z)$  olsun. O zaman  $F/X = f$  olacak şekilde sürekli bir  $F: Y \rightarrow Z$  fonksiyonunun, yani  $f$  nin  $Y$  ye sürekli bir  $F$  genişlemesinin olması için gerek ve yeter koşul  $Z$  deki ayrık kapalı her  $B$  ve  $C$  kümeleri için  $cl_Y f^{-1}(B) \mathbf{I} cl_Y f^{-1}(C) = \emptyset$  olmasıdır.

**İspat:** " $\Rightarrow$ "  $F/X = f$  olacak şekilde sürekli bir  $F: Y \rightarrow Z$  fonksiyonu bulunsun. O zaman  $F^{-1}(B)$  kümesi  $Y$  de kapalı ve  $f^{-1}(B) \subseteq F^{-1}(B)$  olduğundan  $cl_Y f^{-1}(B) \subseteq F^{-1}(B)$  ve benzer şekilde  $cl_Y f^{-1}(C) \subseteq F^{-1}(C)$  olur.  $B \mathbf{I} C = \emptyset$  olduğundan,

$$cl_Y f^{-1}(B) \mathbf{I} cl_Y f^{-1}(C) \subseteq F^{-1}(B) \mathbf{I} F^{-1}(C) = F^{-1}(B \mathbf{I} C) = \emptyset$$

olur. Sonuç olarak  $cl_Y f^{-1}(B) \mathbf{I} cl_Y f^{-1}(C) = \emptyset$  olur.

" $\Leftarrow$ "  $Z$  deki kapalı ayrık her  $B$  ve  $C$  kümeleri için  $cl_Y f^{-1}(B) \mathbf{I} cl_Y f^{-1}(C) = \emptyset$  olsun. Lemma 2.1.21 den,

$$F_y = \{A \subseteq Z : \text{Bir } U \in \mathbf{O}^y \text{ için } f(U) \subseteq A\}$$

kümesinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.  $Z$  kompakt olduğundan  $\emptyset \neq \bigcap_{U \in \mathbf{O}^y} cl_Z f(U) = K$  olur.  $K = \{p\}$  şeklindedir. Aksi halde  $p, q \in K$  ve

$p \neq q$  olsaydı  $Z$  kompakt ve  $T_2$  olduğundan  $p \in W$ ,  $q \in V$  ve  $cl_Z W \mathbf{I} cl_Z V = \emptyset$  olacak şekilde  $Z$  de  $W, V$  açık kümeleri vardır. Dolayısıyla hipotezden,

$$cl_Y f^{-1}(cl_Z W) \mathbf{I} cl_Y (cl_Z V) = \emptyset$$

olur. Her  $U \in O^y$  için  $W \cap f(U) \neq \emptyset$  olduğundan her  $U \in O^y$  için  $U \cap f^{-1}(W) \neq \emptyset$  olur. Böylece  $y \in cl_Y f^{-1}(W)$  olur. Benzer şekilde  $y \in cl_Y f^{-1}(V)$  dir. Buradan,

$$y \in cl_Y f^{-1}(W) \cap cl_Y f^{-1}(V) \subseteq cl_Y f^{-1}(cl_Z W) \cap cl_Y (cl_Z V) = \emptyset$$

çelişkisi elde edilir. Böylece bir  $p \in Z$  için  $K = \{p\}$  şeklindedir.  $W$  kümesi  $Z$  de açık ve  $p \in W$  olsun. O zaman  $K \subseteq W$ ,  $Z - W$  kompakt ve  $Z - W \subseteq \bigcup_{F \in F_y} (Z - cl_Z F)$

olduğundan  $F_y$  de öyle bir sonlu  $S$  ailesi vardır öyle ki,

$$Z - W \subseteq \bigcup_{F \in S} (Z - cl_Z F) \subseteq Z - IS$$

olur. O zaman  $IS \in F_y$  ve  $IS \subseteq W$  olur. Buradan,

$$W \in F_y \text{ ise } F_y \rightarrow P$$

olur. Dolayısıyla Lemma 2.1.21 den istenilen elde edilir.

**Lemma 2.1.23.** Bir  $X$  uzayı için  $Y \in E(X)$  ve  $Z$  regüler uzay olsun.  $g \in F(Y, Z)$  ve her  $y \in Y$  için  $g/(X \cup \{y\})$  sürekli ise  $g$  süreklidir.

**İspat:**  $O^y = \{W \cap X : W \text{ kümesi } Y \text{ de açık ve } y \in W\}$  olsun. Hemen belirtelim ki  $O^y = \{W \cap X : W \text{ kümesi } X \cup \{y\} \text{ de açık ve } y \in W\}$  dir.  $g/(X \cup \{y\})$  sürekli olduğundan Lemma 2.1.21 den

$$F_y = \{A \subseteq Z : \text{Bir } U \in O^y \text{ için } (g/X)(U) \subseteq A\} \rightarrow g(y)$$

olur. Yine Lemma 2.1.21 in diğer yönünden dolayı  $g$  süreklidir.

## 2.2. Kompakt Genişlemeler

Bu bölümde kompakt genişlemeleri tartışacağız. Burada, eğer verilen bir uzayın kompaktlamalarının ailesi boş kümeden farklı ise bu ailenin bir projektif maksimuma sahip olduğunu göstereceğiz ve bu projektif maksimumu inşa edeceğiz.

Bir  $X$  uzayı için  $K(X) = \{Y \in E(X) : Y \in K\}$  olsun. Yani  $K(X)$ ,  $X$  in kompakt genişlemelerinin kümesidir.

**Tanım 2.2.1.** Bir  $X$  uzayının kompakt bir genişlemesine  $X$  in bir kompaktlaması denir.  $K$ , kompakt uzayların bir sınıfı olsun. O zaman  $K$  çarpımsaldır ve kalıtsal kapalı olduğundan replete dir.

Lemma 2.1.19 dan aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

**Lemma 2.2.2.** Bir  $X$  uzayı için  $K(X) \neq \emptyset$  ise  $K(X)$  bir tam üst yarı latistir ve bir projektif maksimuma sahiptir.

**Tanım 2.2.3.** Bir  $X$  uzayı için  $K(X) \neq \emptyset$  ise  $K(X)$  in projektif maksimumu  $bX$  ile gösterilir, yani  $bX = \bigvee K(X)$  ve  $bX$  e  $X$  in Stone-Cech kompaktlaması denir.

**Tanım 2.2.4.**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  den  $\mathbf{R}$  ye bütün sürekli fonksiyonları  $C(X)$  ile  $X$  den  $\mathbf{R}$  ye bütün sürekli, sınırlı fonksiyonların kümesini de  $C^*(X)$  ile göstereceğiz.  $A$ ,  $X$  in alt kümesi olsun. Eğer  $f \in C(A)$  nın  $X$  e sürekli bir genişlemesi var ise  $A$  ya  $X$  de  $C$ -gömülmüştür denir. Benzer şekilde her  $f \in C^*(A)$  nın  $X$  e sürekli bir genişlemesi var ise  $A$  ya  $X$  de  $C^*$ -gömülmüştür denir.

**Tanım 2.2.5.**  $X$  bir topolojik uzay olsun.  $X$  in kapalı her  $K$  alt kümesi ve  $x \in X/K$  için  $g(x) = 0$  ve  $g(K) = 1$  olacak şekilde  $g : X \rightarrow [0,1]$  sürekli fonksiyonu bulunabiliyorsa  $X$  e tam regüler uzay denir.

$X$  bir topolojik uzay olsun. Kolayca görüleceği gibi,  $X$  in kapalı her  $K$  alt kümesi ve  $x \in X/K$  için  $f(x) \notin \text{cl}f(K)$  olacak şekilde bir  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  sürekli fonksiyonu var ise  $X$  tam regülerdir.

$X$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  Hausdorff ve tam regüler ise  $X$  e Tychonoff uzay denir.

**Tanım 2.2.6.**  $(X, t)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  de her  $A, B$  kapalı kümeleri ve  $A \cap B = \emptyset$  için  $X$  de  $A \subseteq U, B \subseteq V$  ve  $U \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $U, V$  açık kümeleri varsa  $(X, t)$  ya normal uzay denir.

$X$  bir uzay ve  $K(X) \neq \emptyset$  olsun.  $Y \in K(X)$  ise  $Y$  kompakt ve  $T_2$ -uzay olduğundan  $X$ , Normal ve  $T_2$ -uzay olur. Dolayısıyla  $X$  de Tychonoff uzay olur.

Tersine  $X$  Tychonoff uzay ise  $C^*(X, \mathbb{I}) = F$ ,  $X$  in kapalı kümelerinden noktaları ayırır. O zaman  $f \in F$  için  $I_f = [a_f, b_f]$  ve  $Z = \prod_{f \in F} I_f$  olmak üzere Teorem 2.1.11

den dolayı  $Y = cl_Z e_F(X) \in K(X)$  olur. Böylece,  $K(X) \neq \emptyset$  olması için gerek ve yeter koşul  $X$  in Tychonoff olmasıdır.

Şimdi  $X$  ve  $Y$  Tychonoff uzaylar ve  $f \in C(X, Y)$  ise  $F/X = f$  olacak şekilde bir  $F \in C(bX, bY)$  nin bulunduğunu gösterelim.

**Lemma 2.2.7.**  $X$  ve  $Y$  Tychonoff uzaylar ve  $f \in C(X, Y)$  ise  $F/X = f$  olacak şekilde bir tek  $F \in C(bX, bY)$  sürekli genişlemesi vardır.

**İspat:**  $[0,1]$  kapalı ve sınırlı aralığını  $\mathbb{I}$  den gelen alt uzay topolojisiyle düşünelim ve  $C = C(X, [0,1])$  olsun.  $[0,1]^C = \prod_{f \in C} [0,1]$  olmak üzere  $e: X \rightarrow [0,1]^C$  fonksiyonunu  $x \in X$  için  $e(x) = (f(x))_{f \in C}$ , yani  $f \in C$  için  $e(x)(f) = f(x)$  olsun.  $X$ , Tychonoff uzay olduğundan Teorem 2.1.11 den dolayı  $e$  bir gömmedir. Kompakt uzayların çarpımı kompakt olduğundan  $[0,1]^C$  kompaktır.  $x$  ile  $e(x)$  i özdeşleştirerek  $X$  ile  $e(X)$  i özdeşleştirebiliriz ve  $cX = cle(X)$  olsun. O zaman  $cX$ ,  $X$  in bir kompaktlamasıdır. Benzer bir şekilde  $D = C(Y, [0,1])$  i kullanarak  $cY$  yi inşa edebiliriz. İlk olarak  $G/X = f$  olacak şekilde bir  $G \in C(cX, cY)$  nin mevcut olduğunu göstereceğiz. O zaman  $cX \equiv_x bX$  olduğunu gösterebiliriz. Daha önce olduğu gibi  $Y$  ile  $e(Y)$  yi özdeşleştirebiliriz.

$$x \in X \longrightarrow e(x) \in [0,1]^C$$

$$\downarrow \downarrow$$

$$Y \longrightarrow e(Y) \subseteq [0,1]^D$$

$$f(x) \longrightarrow e(f(x))$$

O zaman  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunu  $f : e(X) \rightarrow e(Y)$ ,  $f(e(x)) = e(f(x))$  fonksiyonu ile özdeşleştirebiliriz.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \text{ } & \\ Y & \xrightarrow{g} & [0,1] \end{array} \quad \text{ } \quad g \circ f$$

$f^* : D \rightarrow C$  'yi  $g \in D$  için  $f^*(g) = g \circ f$  olarak tanımlayalım.  $f^{**} : [0,1]^C \rightarrow [0,1]^D$  yi  $h \in [0,1]^C$  için  $f^{**}(h) = h \circ f^*$  olarak tanımlayalım.

$$\left( [0,1]^C = \prod_{f \in C} [0,1] = \left\{ h : C \rightarrow \mathbf{U} [0,1] : f \in C \text{ için } h(f) \in [0,1] \right\} \right)$$

$f^{**}$  in sürekli olduğunu göstermek için  $g \in D$ ,  $p_g \circ f^{**}$  in sürekli olduğunu göstereceğiz. Burada  $p_g : [0,1]^D \rightarrow [0,1]$  g. izdüşüm fonksiyonudur.  $h \in [0,1]^C$  olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} (p_g \circ f^{**})(h) &= p_g(f^{**}(h)) = f^{**}(h)(g) = (h \circ f^*)(g) \\ &= h(f^*(g)) = h(g \circ f) = p_{g \circ f}(h) \end{aligned}$$

olur.

$$[0,1]^C \xrightarrow{f^{**}} [0,1]^D$$

$$\downarrow p_g$$

$$Y \xrightarrow{g} [0,1]$$

Böylece  $p_g \circ f^{**} = p_{g \circ f}$  sürekli ve bu nedenle  $f^{**}$  sürekli dir.

Şimdi de  $f^{**}(e(X)) \subseteq e(Y)$  olduğunu gösterelim.  $x \in X$  ve  $g \in D$  olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} f^{**}(e(x))(g) &= (e(x) \circ f^*)(g) = e(x)(f^*(g)) = e(x)(g \circ f) = (g \circ f)(x) \\ &= g(f(x)) = e(f(x))(g) \text{ ise } f^{**}(e(x)) = e(f(x)) \in e(Y) \end{aligned}$$

olur. Böylece  $f^{**}$  sürekli olduğundan dolayı

$$f^{**}(cX) = f^{**}(cle(X)) \subseteq clf^{**}(e(X)) \subseteq cle(Y) = cY$$

olur.  $G = f^{**}/cX$  olsun. O zaman  $G : cX \rightarrow cY$  sürekli ve  $G/X = f$  olur. Şimdi  $Y = bX$  alalım. O zaman  $Y$  kompakt olduğundan  $Y = cY$  olur.  $i : X \rightarrow bX$  içerme fonksiyonu; Yani  $i(x) = x$  olsun. O zaman elde ettiğimiz sonuçtan  $G/X = i$  olacak şekilde sürekli bir  $G : cX \rightarrow c(bX) = bX$  fonksiyonu vardır. Böylece  $x \in X$  için  $G(x) = i(x) = x$  olur. O zaman  $bX \leq cX$  dir.  $bX = VK(X)$  olduğundan  $cX \leq bX$  dir. Bu nedenle  $bX \equiv_x cX$  olur. Böylece bu Teoremin içinde elde ettiğimiz sonuçtan  $f : X \rightarrow Y$  sürekli ise  $F/X = f$  olacak şekilde sürekli bir  $F : bX \rightarrow bY$  fonksiyonu vardır. Lemma 2.1.3 den dolayı  $F$  tektir.

**Tanım 2.2.8.** Eğer  $X$  ve  $Y$  Tychonoff uzaylar ve  $f \in C(X, Y)$  ise  $F/X = f$  olacak şekilde  $f$  nin bir tek  $F : bX \rightarrow bY$  sürekli genişlemesi vardır. Bu genişlemeye  $f$  nin Stone genişlemesi denir ve  $b f$  ile gösterilir.

**Sonuç 2.2.9.**  $X$  bir Tychonoff uzay olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

i. Eğer  $K$  kompakt bir uzay ve  $f \in C(X, K)$  ise  $f$  sürekli bir tek  $F : bX \rightarrow K$  genişlemesine sahiptir,

ii.  $X, bX$  e  $C^*$  - gömülmüştür. Yani her  $f \in C^*(X)$  ' in bir  $F \in C^*(bX)$  genişlemesi vardır.

**İspat:** i.  $K$  kompakt ve  $f \in C(X, K)$  ise Lemma 2.2.7 den  $f$  nin  $b f/X = f$  olacak şekilde bir  $b f \in C(bX, bK)$  genişlemesi vardır.  $K$  kompakt olduğundan  $bK = K$  olup  $b f = F$  alınırsa ispat biter.

ii.  $f \in C^*(K)$  ve  $K = cl_i f(x)$  olsun. O zaman  $K \subseteq \mathbb{I}$  kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt ve  $f \in C(x, K)$  olur. (i) den dolayı  $f$  nin bir  $F \in C^*(bX)$  genişlemesi vardır.

**Tanım 2.2.10.**  $X$  ve  $Y$  herhangi iki uzay ve  $f : X \rightarrow Y$  ye bir fonksiyon olsun. Eğer her  $y \in Y$  için  $f^{-1}(\{y\})$ ,  $X$  de kompakt ise  $f$  ye kompakt fonksiyon denir. Eğer  $f$  kapalı ve kompakt fonksiyon ise  $f$  ye perfect fonksiyon denir.

Şimdi iki Tychonoff uzay arasındaki örten, sürekli perfect fonksiyonların kullanışlı bir karakterizasyonunu vereceğiz.

**Lemma 2.2.11.**  $f : X \rightarrow Y$  bir perfect fonksiyon olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

i. Eğer  $A$  kümesi  $X$  de kapalı ise  $f/A$  perfecttir,

ii. Eğer  $B \subseteq Y$  ise  $f/f^{-1}(B) : f^{-1}(B) \rightarrow B$  fonksiyonu perfecttir.

**İspat:** i.  $A$  kümesi  $X$  de kapalı olsun.  $C$  kümesi  $A$  da kapalı ise  $C$  kümesi  $X$  de de kapalıdır. Buradan  $(f/A)(C) = f(C)$  kümesi  $Y$  (veya  $f(A)$ ) da kapalı olur. Dolayısıyla  $f/A$  kapalıdır.  $y \in Y$  ise  $(f/A)^{-1}(\{y\}) = A \cap f^{-1}(\{y\})$  ve  $A \cap f^{-1}(\{y\})$   $f^{-1}(\{y\})$  de kapalı ve kompakt olduğundan  $A \cap f^{-1}(\{y\})$  kompakt olur. O zaman  $f/A$  bir kompakt fonksiyon olur. Dolayısıyla  $f/A$  perfect fonksiyon olur.

ii.  $C$  kümesi  $X$  de kapalı,  $f/f^{-1}(B)(C \cap f^{-1}(B)) = f(C) \cap B$  ve  $f$  kapalı olduğundan  $f(C) \cap B$  kümesi  $B$  de kapalı olur. Böylece,  $f/f^{-1}(B) : f^{-1}(B) \rightarrow B$  bir kapalı fonksiyondur. Eğer  $b \in B$  ise,

$$(f/f^{-1}(B))^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(\{b\})$$

kompakttır. O zaman  $f/f^{-1}(B)$  bir kompakt fonksiyon ve böylece  $f/f^{-1}(B)$  perfect fonksiyon olur.

**Teorem 2.2.12.**  $X$  ve  $Y$  iki uzay olsun. Eğer  $f \in C(X, Y)$ ,  $S$   $X$  in yoğun bir alt kümesi ve  $f/S : S \rightarrow f(S)$  fonksiyonu perfect ise  $f(X - S) \subseteq Y - f(S)$  dir.

**İspat:** Kabul edelim ki hipotezler altında  $f(X - S) \not\subseteq Y - f(S)$  olsun. O zaman  $f(x) \in f(S)$  olacak şekilde bir  $x \in X - S$  vardır.  $T = S \cup \{x\}$  olsun.  $f/S$  bir kompakt fonksiyon olduğundan  $f^{-1}(\{f(x)\}) \cap S = K$  kompakt ve böylece  $T$  de kapalıdır.  $X$ , Hausdorff olduğundan  $K \subseteq U$  ve  $x \notin cl_T U$  olacak şekilde  $T$  de bir  $U$  açık kümesi vardır.  $S$ ,  $X$  in yoğun bir alt kümesi olduğundan  $cl_T U \cup cl_T(S - U) = T$  olur. Böylece,

$$f(x) \in f(cl_T(S - U)) \subseteq cl_{f(S)} f(S - U) = f(S - U)$$

olur. O zaman  $K - U \neq \emptyset$  çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla  $f(X - S) \subseteq Y - f(S)$  olmalıdır.

**Teorem 2.2.13.**  $X$  ve  $Y$  Tychonoff uzaylar olsun ve  $f : X \rightarrow Y$  bir sürekli, örten fonksiyon olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

i.  $f$  perfect fonksiyondur,

ii.  $aX \in K(X)$ ,  $dY \in K(Y)$  ve eğer  $F/X = f$  olacak şekilde bir  $F \in C(aX, dY)$  mevcut ise  $F^{-1}(Y) = X$  dir. Yani  $F(aX - X) = dY - Y$  dir,

iii.  $b f^{-1}(Y) = X$  dir. Yani  $b f(bX - X) = bY - Y$  dir.

**İspat:** i)  $\Rightarrow$  ii)  $f : X \rightarrow Y$  perfect fonksiyon olsun.  $X$  kümesi  $aX$  de yoğun,  $F/X = f$  perfect ve  $f$  örten olduğundan Teorem 2.2.12 den dolayı

$$F(aX - X) \subseteq dY - f(X) = dY - Y \dots \dots \otimes$$

olur. Buradan  $F^{-1}(Y) \subseteq X$  elde edilir. Daima  $X \subseteq F^{-1}(Y)$  olduğundan  $F^{-1}(Y) = X$  olur. O zaman  $F(X) = Y$  olup  $cl_{dY} F(X) = cl_{dY} Y = dY$  dir.  $\otimes$  dan dolayı  $F(aX - X) = dY - Y$  dir.

ii)  $\Rightarrow$  iii)  $F = b f$  alınırsa ispat biter.

iii)  $\Rightarrow$  i)  $(b f)^{-1}(Y) = X$  ve  $y \in Y$  olsun. O zaman  $(b f)^{-1}(\{y\}) \subseteq X$  olduğundan  $(b f)^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\})$  olur. Böylece  $f^{-1}(\{y\})$  kompaktır. A, X in kapalı bir alt kümesi olsun. O zaman  $A = H \mathbf{I} X$  olacak şekilde  $b X$  de bir H kompakt kümesi vardır. Dolayısıyla,  $f(A) = f(H \mathbf{I} X)$  olur. Fakat

$$(b f)(H) = f(H \mathbf{I} X) \mathbf{I} (b f)(H \mathbf{I} X)$$

dir. Hipotezden dolayı  $(b f)(H - X) \subseteq b Y - Y$  olur. Bu nedenle,

$$f(H \mathbf{I} X) = Y \mathbf{I} (b f)(H)$$

olur. O zaman  $f(A)$  kümesi Y de kapalı ve  $f$  perfect fonksiyon olur.

Bu Teoremi  $f$  nin örten olmadığı durumlar için aşağıdaki şekilde genelleştirebiliriz.

**Sonuç 2.2.14.** X ve Y iki Tychonoff uzay olsun.  $f \in C(X, Y)$  ve  $f(X)$  kümesi Y de kapalı olsun. Aşağıdakiler denktir:

i.  $f$  perfect fonksiyondur,

ii.  $a X \in K(X)$ ,  $d Y \in K(Y)$  ve  $F/X = f$  olacak şekilde bir  $F \in C(a X, d Y)$  mevcut ise  $F^{-1}(Y) = X$  ve  $F(a X - X) \subseteq d Y - Y$  dir,

iii.  $b f^{-1}(Y) = X$  ve  $b f(a X - X) \subseteq d Y - Y$  dir.

**İspat:** i)  $\Rightarrow$  ii) Lemma 2.2.11 (ii) de  $b = f(X) \subseteq Y$  alınırsa  $f : X \rightarrow f(X)$  bir perfect sürekli ve örten fonksiyon olur. Ayrıca açık olarak  $cl_{dY} f(X)$ ,  $f(X)$  in bir kompaktlaması ve  $F \in C(a X, cl_{dY} f(X))$  dir. Böylece Teorem 2.2.13 den dolayı,

$$F^{-1}(cl_{dY} f(X) - f(X)) \subseteq a X - X$$

dir.  $f(X)$ , Y de kapalı olduğundan  $Y \mathbf{I} cl_{dY} f(X) = f(X)$  ve bu nedenle  $F^{-1}(Y) = X$  olur. O zaman Teorem 2.2.13 den dolayı,

$$F(a X - X) = cl_{dY} f(X) - f(X) \subseteq d Y - Y$$

olur.

ii) $\Rightarrow$  iii)  $F = b f$  alınırsa açıktır.

iii) $\Rightarrow$  i) Teorem 2.2.11 in iii) $\Rightarrow$  i) nin ispatındaki yöntemi  $f(X)$  ile  $Y$  ve  $cl_b f(X)$  ile  $bY$  nin yerlerini değiştirerek kullanırsak ispat biter. ( Burada hemen belirtelim ki  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun kapalı olduğunu gösterebilmek için  $f(X)$  in  $Y$  de kapalı olması hipotezine ihtiyaç vardır. )

**Tanım 2.2.15.**  $(X, t)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $X$  de kapalı ve ayrık her  $A, B$  alt kümeleri için  $G$  ve  $H$  açık alt kümeleri

$$A \subseteq G, B \subseteq H \text{ ve } G \cap H = \emptyset$$

koşulu sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa bu topolojik uzaya bir  $T_4$ -uzayı denir.

**Lemma 2.2.16.** (Urysohn Lemması)  $(X, t)$  nun bir  $T_4$ -uzayı olması için gerek ve yeter koşul  $(X, t)$  da kapalı ve ayrık herhangi iki  $A$  ve  $B$  alt kümeleri için  $f(A) = 0$  ve  $f(B) = 1$  koşullarını sağlayan bir  $f : X \rightarrow [0, 1]$  sürekli fonksiyonu vardır.

Bu kısmı Teorem 2.1.22 de verilen Taimanov Teoreminin önemli ve özel bir durumunu vererek bitirelim.

**Teorem 2.2.17.**  $aX, dX \in K(X)$  olsun. Aşağıdakiler denktir:

i.  $dX \leq aX$  dir,

ii.  $Z(X) = \{f^{-1}(0) : f \in C(X, \mathbb{I})\}$   $X$  in sıfır kümelerinin ailesi olmak üzere

$Z_1, Z_2 \in Z(X)$  ve  $cl_{dX} Z_1 \cap cl_{dX} Z_2 = \emptyset$  ise  $cl_{aX} Z_1 \cap cl_{aX} Z_2 = \emptyset$  olur,

iii.  $A$  ve  $B$ ,  $dX$  in ayrık kapalı alt kümeleri ise  $cl_{aX}(A \cap X) \cap cl_{aX}(B \cap X) = \emptyset$  olur.

**İspat:** i) $\Rightarrow$  ii)  $dX \leq aX$  ise  $i : X \rightarrow dX$  inclusion fonksiyonu gömme olup  $aX$  e sürekli bir genişlemesi vardır. O zaman Teorem 2.1.22 den dolayı,

$$cl_{aX} i^{-1}(cl_{dX} Z_1) \cap cl_{aX} i^{-1}(cl_{dX} Z_2) = \emptyset$$

olur. Açık olarak daima  $i^{-1}(cl_{dX}Z_j) = Z_j$  ( $i = 1, 2$ ) olduğundan ispat biter.

(A kümesi  $X$  de kapalı ise  $cl_{dX}A - A \subseteq dX - X$  dir. O zaman  $i^{-1}(cl_{dX}A) = A$  olur. )

ii)  $\Rightarrow$  iii) Hipotez sağlansın.  $A$  ve  $B$ ,  $dX$  in ayırık kapalı iki alt kümesi olsun.  $dX$  Normal olduğundan Urysohn Lemmasından dolayı  $A \subseteq H, B \subseteq K$  ve  $H \cap K = \emptyset$  olacak şekilde  $H, K \in Z(dX)$  vardır. O zaman  $A \cap X \subseteq H \cap X, B \cap X \subseteq K \cap X$  ve  $cl_{dX}(H \cap X) \cap cl_{dX}(K \cap X) = \emptyset$  olur. Buradan  $cl_{aX}(H \cap X) \cap cl_{aX}(K \cap X) = \emptyset$  elde edilir. Dolayısıyla  $cl_{aX}(A \cap X) \cap cl_{aX}(B \cap X) = \emptyset$  olur.

iii)  $\Rightarrow$  i) Hipotez sağlansın.  $i: X \rightarrow dX$  içermeye gömme fonksiyonu olsun. Hipotezden dolayı  $A$  ve  $B$ ,  $dX$  in ayırık kapalı alt kümeleri ise,

$$cl_{aX}i^{-1}(A) \cap cl_{aX}i^{-1}(B) = cl_{aX}(A \cap X) \cap cl_{aX}(B \cap X) = \emptyset$$

olur. Teorem 2.1.22 den dolayı  $dX \leq aX$  olur.

### 2.3. Tek Nokta Kompaktlamaları

Bu bölümde eğer  $X$ , bir yerel kompakt uzay ise  $K(X) \neq \emptyset$ ,  $K(X)$  in bir minimuma sahip olduğunu ve  $K(X)$  in bir tam latis olduğunu göstereceğiz. Ayrıca  $X$  in varsa tek nokta kompaktlamasını inşa edeceğiz.

**Tanım 2.3.1.** Bir  $X$  uzayı için  $Y - X$  tek elemandan meydana gelecek şekilde bir  $Y \in K(X)$  varsa,  $Y$  ye  $X$  in tek nokta kompaktlaması denir.

Önce tek nokta kompaktlamasının nasıl inşa edildiğini gösterelim.

$(X, t)$  bir topolojik uzay ve bu uzaya ait olmayan bir  $w$  noktası, yani  $w \notin X$  alalım.  $X^* = X \cup \{w\}$  olsun ve  $t^* \subseteq P(X^*)$  ailesi aşağıdaki kümelerden oluşsun.

i.  $t$  ya ait her küme,

ii.  $X^*$  kümesinin  $w$  noktasını içeren alt kümelerinden  $X^*$  a göre tümleyeni kompakt olanlar. Yani,

$t^* = \{W \subseteq X^* : W \cap X \text{ kümesi } X \text{ de açık ve } w \in W \text{ ise } X^* - W = X - W \text{ kompakt}\}$  olsun.

**Teorem 2.3.2.**  $t^* \subseteq P(X^*)$  ailesi yukarıdaki gibi tanımlansın. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

- i.  $t^*$  ailesi  $X^*$  üzerinde bir topolojidir.
- ii.  $(X, t)$  uzayı,  $(X^*, t^*)$  uzayının alt uzayıdır.
- iii.  $(X^*, t^*)$  uzayı kompaktır.
- iv.  $X$  kompakt değilse  $X^*$  içinde yoğundur.

**İspat:** i.  $t^*$  in  $X^*$  üzerinde bir topoloji olduğunu gösterelim.

$T_1)$   $\emptyset \in t \subseteq t^*$  olduğundan  $\emptyset \in t^*$  dir.  $w \in X^*$  ve  $X^* - X^* = \emptyset$  kompakt olduğundan  $X^* \in t^*$  dir.

$T_2)$   $U, V \in t^*$  ise  $U \cap V \in t^*$  olduğunu gösterelim.

$U, V \in t$  ise  $t \subseteq t^*$  ve  $t$  bir topoloji olduğundan  $U, V \in t$  olur.  $V \in t$  ve  $U \in t^* - t$  ise  $V \in t$  ve  $w \in U$  olur ki  $w \notin U \cap V$  olur.

$X - (U \cap V) = (X - U) \cup (X - V) = (X^* - U) \cup (X - V) \subseteq X^*$  ve  $X - U = X^* - U$  kompakt ve  $X - V$ ,  $X$  de kapalı olduğundan  $X - (U \cap V)$ ,  $X$  de kapalı olur. O zaman  $U \cap V \in t$ , Dolayısıyla  $U \cap V \in t^*$  olur. Benzer şekilde  $U \in t$  ve  $V \in t^* - t$  ise  $U \cap V \in t^*$  olur.  $U, V \in t^* - t$ , yani  $w \in U$  ve  $w \in V$  olsun. O zaman  $w \in U \cap V$  ve  $X^* - U, X^* - V$  kompaktır. Dolayısıyla,

$$(X^* - U) \cup (X^* - V) = X^* - (U \cap V) = X - (U \cap V)$$

kompaktır. Sonuç olarak  $U \cap V \in t^*$  dir.

$T_3)$  Her  $\{U_i : i \in I\} \subseteq t^*$  için  $\bigcup_{i \in I} U_i \in t^*$  olduğunu gösterelim. Her

$i \in I$  için  $w \notin U_i$ , yani  $U_i \in I$  ise  $\bigcup_{i \in I} U_i \in t \subseteq t^*$  dir. En az bir  $i_0 \in I$  için  $w \in U_{i_0}$  ise

$w \in \bigcup_{i \in I} U_i$  dir. Bu durumda  $\bigcup_{i \in I} U_i \in t^*$  olduğunu göstermek için  $X^* - \bigcup_{i \in I} U_i$  nin kompakt olduğunu göstermeliyiz.

$J = \{i \in I : w \in U_i\}$  olsun. O zaman  $j \in J$  ise  $w \in U_j$  olup  $X^* - U_j = X - U_j$  kompakttır.  $K = I - J$  olsun. O zaman  $k \in K$  ise  $w \notin U_k$  olur.

$$X^* - \bigcup_{i \in I} U_i = X - \bigcup_{i \in I} U_i = X - \left[ \bigcup_{i \in I} U_k \cup \bigcup_{j \in J} U_j \right] = \bigcap_{k \in K} (X - U_k) \cap \bigcap_{j \in J} (X - U_j)$$

dir. Burada  $\bigcap_{k \in K} (X - U_k) \subseteq X$  kapalı ve  $\bigcap_{j \in J} (X - U_j)$  kompakttır. O zaman

$X^* - \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcap_{j \in J} (X - U_j)$  olduğundan  $X^* - \bigcup_{i \in I} U_i$  kompakttır. Sonuç olarak

$\bigcup_{i \in I} U_i \in t^*$  olur.

ii.  $(X, t)$  uzayının  $(X^*, t^*)$  uzayının alt uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için,  $t = t_X = \{U \cap X : U \in t^*\}$  olduğunu gösterelim.

$U \in t^*$  ve  $w \in U$  ise  $X \in t$  olduğundan  $U \cap X = U \cap (X^* - \{w\}) = U - \{w\}$  ve  $X - (U - \{w\}) = X - (U \cap X) = X - U = X^* - U$  olur.  $X^* - U$ , kompakt olduğundan  $U - \{w\} = U \cap X \in t$  ve  $t_X \subseteq t$  dur.  $t^*$  in özelliğinden  $t \subseteq t^*$  dır. Sonuç olarak  $t = t_X$  olur.

iii.  $(X^*, t^*)$  in kompakt olduğunu gösterelim.  $X^*$  in herhangi bir açık örtüsü  $\mathcal{g} = \{G_i : i \in I\}$  olsun. O zaman  $X^* = \bigcup_{i \in I} G_i$  ise  $w \in X^*$  olduğundan en az bir  $i_0 \in I$  vardır öyle ki  $w \in G_{i_0} \in t^*$  olur. O zaman  $X^* - G_{i_0} = X - G_{i_0} = K$  kümesi  $X$  de kapalı ve kompakttır. O halde  $I$  da en az sonlu bir  $J$  kümesi vardır öyle ki  $K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$  olur.

$$X^* = K \cup (X^* - K) = K \cup G_{i_0} = \bigcup_{i \in J \cup \{i_0\}} G_i$$

elde edilir ki bu  $X^*$  uzayının kompakt olduğunu gösterir.

iv.  $cl_{X^*} X = X^*$  olduğunu gösterelim.

Eğer  $X$ ,  $X^*$  da kapalı olsaydı  $X^*$  kompakt olduğundan  $X$  de kompakt olurdu. Dolayısıyla  $X$ ,  $X^*$  da kapalı değil ve  $X \cup \{w\} = X^*$  olduğundan  $cl_{X^*} X = X^*$  olur.

Her ne kadar  $X^*$  uzayı bütün koşulları sağlar gibi gözüküyor olsa da  $X^*$  her zaman Hausdorff uzayı değildir. Yani  $X^*$ , bu haliyle  $X$  in bir kompaktlaması olmayabilir. Bunun için bir ek koşula ihtiyaç vardır.

**Tanım 2.3.3.**  $X$  bir topolojik uzay ve her  $x \in X$  noktası kompakt bir komşuluğa sahip ise  $X$  uzayına yerel kompakt uzay denir.

**Örnek 2.3.4.**  $(\mathbb{R}, t_{stand})$  yerel kompakttır. Çünkü  $x \in \mathbb{R}$  ise  $K = [x-e, x+e]$ ,  $X$  in bir kompakt komşuluğudur.

**Teorem 2.3.5.** Her yerel kompakt Hausdorff uzayı  $T_3$  – uzayıdır. ( $T_3 = T_2 + \text{Regüler}$ ) dir.

**İspat:**  $(X, t)$  yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun.  $X$  in regüler olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için  $X$  in kapalı komşuluklarından oluşan bir komşuluk bazına sahip olduğunu göstermek yeterlidir.  $X$  yerel kompakt olduğundan  $x \in K$  olacak şekilde  $x$  in kompakt komşuluğu vardır.  $X$ ,  $T_2$  ve  $K$  kompakt ise  $K$  kümesi  $X$  de kapalıdır. Ayrıca  $(K, t_K)$  kompakt ve  $T_2$  olup aynı zamanda  $T_3$  uzayıdır.  $x \in U$ ,  $x$  in  $X$  deki bir komşuluğu olsun. O zaman  $U \cap K$ ,  $x$  in  $K$  deki bir komşuluğu olur. Dolayısıyla  $(K, t_K)$ ,  $T_3$  - uzay olduğundan  $x \in F \subseteq U \cap K$  olacak şekilde  $x$  in  $K$  da  $t_K$  kapalı bir  $F$  komşuluğu vardır. O zaman  $F$ ,  $X$  de  $x$  in bir kapalı komşuluğu ve  $F \subseteq U$  olur. Gerçekten  $F$ ,  $x$  in  $K$  deki bir komşuluğu ise  $F = V \cap K$  olacak şekilde  $x$  in  $X$  de bir  $V$  komşuluğu vardır.

$X$  de  $F$  kapalı kümesi  $K$  kapalı kümesinin alt kümesi olduğundan  $F$ ,  $X$  de kapalı olur.  $F = V \cap K$  ve  $V$ ,  $K$   $x$  in  $X$  de komşulukları olduğundan  $F$ ,  $x$  in  $X$  de bir komşuluğu ve  $x \in F \subseteq U \cap K \subseteq U$  ve  $F$ ,  $x$  in  $X$  de bir kapalı komşuluğu olur.

**Teorem 2.3.6.** Bir yerel kompakt Hausdorff uzayının her noktasında kompakt komşuluklarından oluşan bir komşuluk bazı vardır.

**İspat:**  $(X, t)$  yerel kompakt Hausdorff uzayı,  $x \in X$ ,  $U, x$  in bir komşuluğu ve  $K$  da  $x$  in bir kompakt komşuluğu olsun. Teorem 2.3.5 den  $x \in V \subseteq U$  olacak şekilde  $x$  in kapalı bir  $V$  komşuluğu vardır.  $X, T_2$ - uzay ve  $K$  kompakt olduğundan  $K$  kümesi  $X$  de kapalı olur. O zaman  $V \cap K$ ,  $x$  in bir kapalı komşuluğu,  $V \cap K$ ,  $K$  da kapalı ve  $K$  kompakt olduğundan  $V \cap K$  kompakt olur. Sonuç olarak  $V \cap K$ ,  $x$  in kompakt bir komşuluğu ve  $x \in V \cap K \subseteq U$  olur.

**Teorem 2.3.7.** Yerel kompakt bir Hausdorff uzayında her açık küme, her kapalı küme, herhangi açık bir küme ile herhangi bir kapalı kümenin kesişimi de yerel kompakttır.

Karşıt olarak bir Hausdorff uzayının her yerel kompakt alt kümesi, bir açık küme ile kapalı kümenin kesişimidir.

**İspat:**  $(X, t)$  yerel kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Sadece  $A$  kümesi  $X$  de açık ise  $(A, t_A)$  nın yerel kompakt olduğunu gösterelim.  $x \in A$  ise Teorem 2.3.6 dan  $x \in K \subseteq A$  olacak şekilde  $x$  in kompakt bir  $K$  komşuluğu vardır. O zaman  $K$ ,  $A$  içinde kompakt olup,  $A$  açık olduğundan  $x$  in  $A$  içinde kompakt bir komşuluğu olur. Sonuç olarak  $A$  yerel kompakttır.

Diğer durumlar benzer şekilde yapılır.

**Teorem 2.3.8.**  $(X, t)$  bir yerel kompakt Hausdorff uzay ve  $A$ ,  $X$  in bir alt uzayı olsun.  $A$  nın yerel kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $A$  kümesinin  $\bar{A}$  da açık olmasıdır.

**İspat:** " $\Rightarrow$ "  $A$  yerel kompakt ve  $a \in A$  olsun.  $a \in G \subseteq A$  olacak şekilde  $\bar{A}$  da bir  $G$  açık kümesi bulmalıyız.  $A$  yerel kompakt olduğundan  $K$  kümesi  $A$  da kompakt ve  $a \in K$  olacak şekilde  $a$  nın bir  $K$  komşuluğu vardır. O zaman  $a \in U \subseteq cl_A U \subseteq K \subseteq A$  olacak şekilde  $A$  da bir  $U$  açık kümesi vardır. Böylece  $U = V \cap A$  olacak şekilde  $X$

de bir  $V$  açık kümesi vardır.  $\bar{A}$  da  $\bar{A} \cap V$  kümesi açıktır ve  $a \in \bar{A} \cap V$  dir. Dolayısıyla  $\bar{A} \cap V \subseteq \bar{A}$  olduğunu göstermek yeterli olacaktır.  $\bar{A} \cap V \subseteq \overline{\bar{A} \cap V}$  dır. ( Çünkü  $x \in \bar{A} \cap V$  ise  $x \in \bar{A}$  ve  $x \in V$  dir.  $X$  de  $U$  kümesi açık ve  $x \in U$  ise  $x \in \bar{A}$  olduğundan  $\bar{A} \cap U \neq \emptyset$  olur.  $V, X$  de açık küme ve  $x \in V$  ise  $U \cap V, X$  de açık ve  $x \in (U \cap V), x \in \bar{A}$  olduğundan,

$$\bar{A} \cap (U \cap V) = (\bar{A} \cap V) \cap U \neq \emptyset \text{ ise } x \in \overline{\bar{A} \cap V}$$

dir. ) Böylece  $\overline{\bar{A} \cap V} \subseteq \bar{A}$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $\overline{\bar{A} \cap V} \cap A = \bar{U} \cap A = cl_A U$  dur.  $cl_A U$ , kompakt olduğundan kapalıdır. O zaman  $\overline{\bar{A} \cap V} \cap A$  kapalıdır.  $\bar{A} \cap V \subseteq (\overline{\bar{A} \cap V}) \cap A$  olduğundan  $\bar{A} \cap V \subseteq \overline{\bar{A} \cap V} \cap A \subseteq A$  dır. Dolayısıyla  $\bar{A} \cap V, A$  da açık ve  $a \in (\bar{A} \cap V)$  ise  $A, \bar{A}$  da açık bir küme olur.

"  $\Leftarrow$  "  $A, \bar{A}$  da açık bir küme olsun. O zaman  $A = \bar{A} \cap U$  olacak şekilde  $X$  de açık bir  $U$  kümesi vardır.  $X$  yerel kompakt ve  $\bar{A}, X$  de kapalı ve  $U$  kümesi  $X$  de açık olduğundan Teorem 2.3.7 den  $\bar{A}$  ve  $U$  yerel kompakt ve yine aynı Teorem 2.3.7 den dolayı  $\bar{A} \cap U = A$  yerel kompaktır.

Şimdi bir  $X$  uzayının tek nokta kompaktlaşması olan  $X^*$  ın Hausdorff uzay olması için gerek ve yeter koşulu verebiliriz.

**Teorem 2.3.9.** Bir  $(X, t)$  uzayının  $(X^*, t^*)$  tek nokta kompaktlaşmasının Hausdorff uzayı olması için gerek ve yeter koşul  $X$  in yerel kompakt Hausdorff uzayı olmasıdır.

**İspat:** "  $\Leftarrow$  "  $X$  yerel kompakt Hausdorff uzayı ise  $X^*$  kompakt uzayında Hausdorff uzay olduğunu göstereceğiz. Bunun için  $X$  e ait  $x$  noktaları ile  $w \in X^*$  noktasının ayrık komşuluklarının varlığını göstermek yeterlidir.  $X$  yerel kompakt Hausdorff uzay olduğundan her  $x \in X$  in  $X$  de  $K$  gibi kompakt bir komşuluğu vardır. O zaman  $K$  kümesi  $X$  de kapalıdır.  $w \in X^* - K = U$  ve  $X^* - U = K$  kompakt olduğundan  $t^*$  ın tanımından  $K, x$  in  $X^*$  da da bir komşuluğu olup  $K \cap U = K \cap (X^* - K) = \emptyset$  olduğundan  $X^*$  bir Hausdorff uzayıdır.

" $\Rightarrow$ "  $X^*$  Hausdorff uzayı ise  $X$  in yerel kompakt Hausdorff uzay olduğunu göstereceğiz.  $X$ ,  $X^*$  in alt uzayı olduğundan  $X$  Hausdorff uzayıdır.  $X^*$  kompakt olduğundan aynı zamanda yerel kompakttır.  $X \in \tau \subseteq \tau^*$  olduğundan  $X$ ,  $X^*$  da açık olup Teorem 2.3.7 den veya Teorem 2.3.8 den  $X$  yerel kompakttır.

**Teorem 2.3.10. i.** Bir  $X$  uzayının tek nokta kompaktlaması varsa o zaman  $X$  yerel kompakt, fakat kompakt değildir.

ii. Eğer  $X$  uzayı yerel kompakt, fakat kompakt değilse her  $Z \in K(X)$  için  $Y \leq Z$  olacak şekilde  $X$  in bir  $Y$  tek nokta kompaktlaması vardır.

**İspat: i.**  $Y \in K(X)$ ,  $X$  in tek nokta kompaktlaması ise Teorem 2.3.9 dan  $X$  in yerel kompakt olduğunu biliyoruz.  $X$  kompakt olsaydı kapalı olurdu. O zaman  $cl_Y X = X = Y$  ise  $Y - X = \emptyset$  olurdu. Dolayısıyla  $X$  kompakt değildir.

ii.  $w \notin X$  için  $Y = X \cup \{w\}$  olsun.  $Y$  üzerindeki  $\tau^*$  topolojisi

Teorem 2.3.2 deki gibi tanımlanırsa Teorem 2.3.9 dan  $Y$ ,  $X$  in tek nokta kompaktlaması olur.  $Z \in K(X)$  olsun.  $f: Z \rightarrow Y$  fonksiyonu,

$$f = \left\{ \begin{array}{l} x, x \in X \text{ ise} \\ w, x \in Z - X \text{ ise} \end{array} \right\}$$

olarak tanımlayalım.  $X$  yerel kompakt olduğundan  $X$ ,  $Z$  de açık bir kümedir. O zaman  $X$ ,  $Y$  de açık bir küme ve  $f|_X = I_X$  olduğundan  $f$ , her  $x \in X$  de süreklidir.

$z \in Z - X$  için  $W$ ,  $Y$  de açık küme ve  $f(z) \in W$  olsun. O zaman  $f(z) = w \in W$  olduğundan  $X - W$  kompakttır. O zaman  $Z - (X - W) = T$ ,  $Z$  de açık küme ve  $z \in Z - X \subseteq T$  olur. Sonuç olarak  $f(T) \subseteq W$  dir. Böylece  $f$  sürekli ve  $Y \leq Z$  olur.

**Sonuç 2.3.11.** Her yerel kompakt uzay Tychonoff uzaydır.

**İspat:**  $X$  yerel kompakt ise  $X$  in tek nokta kompaktlaması  $X^*$  mevcuttur. Yani,  $X^* \in K(X)$  dir. O zaman  $X$  Tychonoff uzaydır.

$(A, \leq)$  bir üst yarı tam latis ve  $\Lambda A = \emptyset$  olsun.  $\emptyset \neq B \subseteq A$  ve  $C = \{c \in A : \text{Her } b \in B \text{ için } c \leq b\}$  olsun.  $0 \in C$  olup  $C \neq \emptyset$  ve  $VC = d$  vardır.  $\Lambda B = d$  olduğunu gösterelim.  $b \in B$  için  $C \leq b$  olduğundan  $d = VC \leq b$  dir. Dolayısıyla  $d \leq B$  dir.  $e \leq B$  olsun. O zaman  $e \in C$  ise  $e \leq VC = d$  dir. Dolayısıyla  $d = \Lambda B$  ve  $A$  nın tam latis olduğunu gösterir.

**Teorem 2.3.12.** Kompakt olamayan bir  $X$  uzayı için aşağıdakiler denktir:

- i.  $K(X)$  bir tam latisdir,
- ii.  $X$  yerel kompakttır,
- iii.  $X$  in tek nokta kompaktlaması vardır,
- iv.  $X$ , bazı kompaktlamalarında açıktır.

**İspat:** ii)  $\Rightarrow$  iii) Teorem 2.3.9 dan açıktır.

ii)  $\Leftrightarrow$  iii)  $\Leftrightarrow$  iv) Teorem 2.3.9 dan ve Teorem 2.3.10 dan açıktır.

ii)  $\Rightarrow$  i)  $X$  yerel kompakt olsun. Teorem 2.3.10 i) şikkından  $X$  in bir  $Y$  tek nokta kompaktlaması vardır ve her  $Z \in K(X)$  için  $Y \leq Z$  dir. Yani  $Y = \wedge K(X) = \min K(X)$  dir. Bir minimum elemanlı bir üst yarı latis olduğundan  $K(X)$  tam latistir.

i)  $\Rightarrow$  iii)  $K(X)$  tam latis olsun. O zaman  $Z = \wedge K(X)$  vardır.  $X$  kompakt olmadığından  $X \neq Z$  ve  $Z - X \neq \emptyset$  dir. Yani,  $|Z - X| \geq 1$  dir.  $|Z - X| \leq 1$  olduğunu gösterelim.  $p, q \in Z - X$  ve  $r \notin Z$  için  $Y = \{Z - \{p, q\}\} \cup \{r\}$  olsun.  $f : Z \rightarrow Y$  fonksiyonu  $z \neq p, q$  ise  $f(z) = z$  ve  $f(p) = f(q) = r$  olarak tanımlansın.  $Y$  üzerinde  $f$  tarafından doğrulan  $t_f$  bölüm topolojisini,

$$t_f = \{S \subseteq Y : f^{-1}(S), Z \text{ de açık}\}$$

alalım. Yani  $t_f$ ,  $f$  yi sürekli yapan en küçük topolojisidir. O zaman  $\{p, q\}$  kompakt olduğundan  $Y$  nin Hausdorff uzay ve  $f/Z - \{p, q\}$  nin bir homeomorfizm olduğu kolayca gösterilebilir. Ayrıca  $\{p, q\} \cap X = \emptyset$  olduğundan  $X$ ,  $Y$  nin alt

uzayıdır.  $X, Z$  de yoğun,  $f$  sürekli ve  $f(X) = X$  olduğundan  $X, Y$  de yoğun olur.  $Z$  kompakt olduğundan  $Y = f(Z)$  kompakttır. O zaman  $Y, X$  in bir kompaktlaması ve  $Y \leq Z$  olur. Fakat  $Z = \wedge K(X)$  olduğundan daima  $Z \leq Y$  dir. O zaman  $g: Y \rightarrow Z$ ,  $g/X = I_X$  olacak şekilde bir  $g$  fonksiyonu vardır. Dolayısıyla  $g \circ f: Z \rightarrow Z$  fonksiyonu sürekli ve  $g \circ f/X = I_X$  olduğundan  $g \circ f = I_Z$  olur. O zaman,

$$p = (g \circ f)(p) = (g \circ f)(q) = q \text{ dolayısıyla } p = q \text{ olduğundan } |Z - X| \leq 1$$

olur. Dolayısıyla  $|Z - X| = 1$  dir. Sonuç olarak  $X$  in tek nokta kompaktlaması vardır.

**Teorem 2.3.13.** Kompakt olmayan, yerel kompakt  $X$  uzayının tek nokta kompaktlaması denktir.

**İspat:**  $Z, X$  in tek nokta kompaktlaması ve  $Y = \wedge K(X)$  olsun. Teorem 2.3.12. den mevcut olup  $f: Z \longrightarrow Y$ ,  $f/X = I_X$  olacak şekilde sürekli bir  $f$  fonksiyonu vardır.  $Y$  ve  $Z$  kompakt ve sürekli olduğundan  $f$  ve  $f/X$  perfect olur. Teorem 2.3.8. den  $f(Z - X) \subseteq Y - f(X)$  dir.  $X, Z$  de ve  $Y$  de yoğun ve  $f(X) = X$  olduğundan  $f(Z - X) = Y - X$  olur. Dolayısıyla  $|Y - X| = 1$  olur. Buradan  $f$  fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve kapalı olur. Böylece  $f$  bir homeomorfizmadır. Sonuç olarak  $Z \equiv_X Y$  olur. Yani  $Y = Z$  dir.

### 3. BİR GENİŞLEMENİN KUVVET SİSTEMİ

Bu bölümde idealler yoluyla bazı genişleme problemleri için çalışacağız. Topolojik uzayların genişlemelerinin kuvvet sistemlerini tanıtacağız. Bir Tychonoff uzayın denk iki kompaktlaşmasının kuvvet sistemlerinin de eşit olduğunu göstereceğiz.

Amacımız bir  $T_0$ -uzayının bir genişlemesini ideal genişlemesi yoluyla tanımlayacağız. Her bir genişlemenin uygun bir ideal genişlemesine denk olduğunu göstereceğiz.

#### 3.1. Kuvvet Sistemleri

**Tanım 3.1.1.**  $\mathcal{P}(X)$ ,  $X$  in kuvvet kümesi olmak üzere,

$$(\cdot)^c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X), A \rightarrow A^c$$

fonksiyonu,

- i.  $\emptyset = \emptyset^c$  dir,
- ii. Her  $A \in \mathcal{P}(X)$  için  $A \subseteq A^c$  dir,
- iii. Her  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  için  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  dir,
- iv.  $A \in \mathcal{P}(X)$  ise  $(A^c)^c = A$  dir.

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona Kuratowski kapanış operatörü denir.

$$t_c = \{U \in \mathcal{P}(X) : X - U = (X - U)^c\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

ailesi,  $(\cdot)^c$  Kuratowski kapanış operatörü ile üretilen topolojidir.

**Tanım 3.1.2.**  $\mathcal{I}$ , bir  $X$  kümesinin alt kümelerinin boştan farklı bir ailesi olsun.  $\mathcal{I}$  ailesi,

- i.  $A \in \mathcal{I}$  ve  $B \subseteq A$  ise  $B \in \mathcal{I}$ ,
- ii.  $A \in \mathcal{I}$  ve  $B \in \mathcal{I}$  ise  $A \cup B \in \mathcal{I}$  dir.

koşullarını sağlıyorsa, bu aileye  $X$  üzerinde bir ideal denir.

Tanıma göre  $\mathcal{I}$  bir ideal ise  $\emptyset \in \mathcal{I}$  olduğu açıktır.

**Tanım 3.1.3.**  $(X, t)$  bir topolojik uzay ve  $x \in X$  ise,

$$I_x(x) = \{A \subseteq X : x \notin cl_x A = \bar{A}\}$$

kümesi  $X$  üzerinde bir idealdir. Bu ideale  $X$  üzerindeki bir serbest ideal denir. Şimdi  $I_x(x)$  in bir ideal olduğunu gösterelim.

i.  $B \in I_x(x)$  ve  $A \subseteq B$  olsun. O zaman,  $x \notin cl_x B$  ise  $x \notin cl_x A$  dir. Böylece  $A \in I_x(x)$  dir.

ii.  $A, B \in I_x(x)$  olsun. O zaman,  $x \notin cl_x A$  ve  $x \notin cl_x B$  ise  $x \notin cl_x A \cup cl_x B = cl_x(A \cup B)$  dir. Dolayısıyla  $A \cup B \in I_x(x)$  olur.

**Tanım 3.1.4.**  $(X, t)$  bir topolojik uzay olsun. Eğer her  $x, y \in X$  ( $x \neq y$ ) için

$$(x \in G \wedge y \notin G) \vee (x \notin G \wedge y \in G)$$

olacak şekilde bir  $G \in t$  bulunabiliyorsa bu uzaya bir  $T_0$  - uzayı veya Kolmogorof uzayı denir.

**Lemma 3.1.5.** Bir  $(X, t)$  uzayının  $T_0$  - uzayı olması için gerek ve yeter koşul her  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için  $I_x(x) \neq I_x(y)$  olmasıdır.

**İspat:** " $\Rightarrow$ "  $X, T_0$  - uzayı  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. O zaman  $X, T_0$  - uzayı olduğundan  $(x \in G \wedge y \notin G)$  ya da  $(x \notin G \wedge y \in G)$  olacak şekilde  $X$  de bir  $G$  açık kümesi vardır. Dolayısıyla  $x \notin cl_x \{y\}$  ya da  $y \notin cl_x \{x\}$  dir.  $y \notin cl_x \{y\}$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $\{y\} \in I_x(x)$  olur. Aynı zamanda  $y \in cl_x \{y\}$  olduğundan  $\{y\} \notin I_x(y)$  olur. Sonuç olarak  $I_x(x) \neq I_x(y)$  olur.

" $\Leftarrow$ " Her  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  için  $I_x(x) \neq I_x(y)$  dir. O zaman  $A \in I_x(x)$  ve  $A \notin I_x(y)$  olacak şekilde bir  $A \subseteq X$  olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla  $x \notin cl_x A$

ve  $y \in cl_x A$  dır. Böylece  $x \in X - cl_x A$  ve  $y \notin X - cl_x A$  olur.  $X - cl_x A$  açık olduğundan  $X, T_0$  - uzayı olur.

**Tanım 3.1.6.** Bir  $(X, t)$  uzayındaki bir  $I$  ideali, eğer  $A \in I$  olduğunda  $cl_x A \in I$  koşulunu sağlıyorsa  $I$  ya bir  $c$ - ideali denir.

**Sonuç 3.1.7.** Her serbest ideal bir  $c$  - idealdir.

**İspat:**  $I, (X, t)$  da bir serbest ideal olsun. O zaman bir  $x \in X$  için  $I = I_x(x)$  dir.  $A \in I$  ise  $x \notin cl_x A$  olup  $x \notin cl_x (cl_x A) = cl_x A$  olur. Böylece  $cl_x A \in I$  dır.

(  $A \in I$  ise  $x \notin cl_x A = \bar{A}$  ise  $x \notin \bar{\bar{A}} = \bar{A}$  olduğundan  $\bar{A} \in I$  dir. )

**Tanım 3.1.8.**  $Y, X$  in bir genişlemesi olsun.  $y \in Y$  için,

$$S(y, Y) = \{A \subseteq X : y \notin cl_Y A\} = \{A \subseteq X : A \in I_Y(y)\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye  $y \in Y$  nin kuvveti denir.

O zaman  $S(y, Y)$ ,  $X$  üzerinde bir  $c$  - idealdir. Çünkü  $A \subseteq X$  ise  $cl_Y A \cap X = cl_x A$  olduğundan  $cl_x A \subseteq cl_Y A$  olup  $cl_Y (cl_x A) \subseteq cl_Y A$  olur. Dolayısıyla  $cl_Y (cl_x A) = cl_Y A$  olur. O zaman  $y \notin cl_Y A$  ise  $y \notin cl_Y (cl_x A)$  olur. Yani,  $A \in S(y, Y)$  ise  $cl_x A \in S(y, Y)$  olur.

$Y$  nin kuvvet sistemlerinin kümesini  $\hat{X} = \{S(y, Y) : y \in Y\}$  ile göstereceğiz.

$aX = Y \in K(X)$  ve  $y \in aX$  ise  $S(y, aX) = \{A \subseteq X : y \notin cl_{aX} A\} = \{A \subseteq X : A \in I_{aX}(y)\}$

**Lemma 3.1.9.**  $Y, X$  in bir genişlemesi olsun. O zaman her  $x \in X$  için  $S(x, Y) = I_x(x)$  dir.

**İspat:**  $S(x, Y) = \{A \subseteq X : x \notin cl_Y A\} = \{A \subseteq X : x \notin cl_Y A \cap X\}$   
 $= \{A \subseteq X : x \notin cl_x A\} = I_x(x)$

olur. Dolayısıyla  $S(x, Y) = I_x(x)$  dir.

**Teorem 3.1.10.** Bir topolojik uzayın iki denk genişlemesinin kuvvet sistemleri özdeşdir.

**İspat:**  $Y_1, Y_2$  bir  $X$  uzayının iki denk genişlemesi ise  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  olduğunu göstermeliyiz. Burada,

$$\mathcal{A}_1 = \{S(y_1, Y_1) : y_1 \in Y_1\} \text{ ve } \mathcal{A}_2 = \{S(y_2, Y_2) : y_2 \in Y_2\}$$

dir.  $Y_1$  ve  $Y_2$ ,  $X$  in iki denk genişlemesi ise  $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ ,  $f(x) = x$  olacak şekilde bir homeomorfizma vardır. O zaman  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  olduğunu göstermek için  $y_1 \in Y_1$  için  $S(y_1, Y_1) = S(f(y_1), Y_2)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $f$  homeomorfizma ve  $A \subseteq X$  olduğundan

$$\begin{aligned} A \in S(y_1, Y_1) &\Leftrightarrow y_1 \notin cl_{Y_1} A \Leftrightarrow f(y_1) \notin cl_{Y_2} f(A) = cl_{Y_2} A \\ &\Leftrightarrow A \in S(f(y_1), Y_2) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$  olur.

**Teorem 3.1.11.** Bir  $X$  Tychonoff uzayının herhangi bir  $aX$  kompaktlamasının farklı noktalarının kuvvetleri de farklıdır.

**İspat:**  $y_1, y_2 \in aX$  ve  $y_1 \neq y_2$  olsun.  $aX$ ,  $T_2$ - uzay olduğundan  $aX$  de  $y_1 \in G, y_2 \in H$  ve  $G \cap H = \emptyset$  olacak şekilde  $G$  ve  $H$  açık kümeleri vardır. O zaman  $y_2 \notin cl_{aX} G$  ve  $y_1 \notin cl_{aX} H$  ise  $y_2 \notin cl_{aX} (G \cap X)$  dir.  $A = G \cap X$  alırsak  $X$ ,  $aX$  de yoğun olduğundan  $A \neq \emptyset$  ve  $y_2 \notin cl_{aX} A$  olur. Dolayısıyla  $A \in S(y_1, aX)$  dir. Ayrıca  $X$ ,  $aX$  de yoğun olduğundan  $y_1 \in cl_{aX} A = cl_{aX} G$  olup  $A \notin S(y_2, aX)$  olur. Sonuç olarak  $S(y_1, aX) \neq S(y_2, aX)$  olur.

**Not 3.1.12.** Teorem 3.1.11 den bir Hausdorff uzayının bir Hausdorff genişlemesinin farklı noktalarının kuvvet sistemlerinin de farklı olacağı sonucu elde edilir.

**Lemma 3.1.13.**  $aX \in K(X)$  olsun. Eğer  $x \in X$  ve  $B(X)$ ,  $X$  de  $x$  in komşuluklarının bir bazı ise o zaman,

$$B_a(X) = \{cl_{aX}N : N \in B(X)\}$$

kümesi  $aX$  de  $x$  in komşuluklarının bazıdır.

**İspat:**  $N \in B(X)$  olsun.  $cl_{aX}N$ ,  $aX$  de  $x$  in bir komşuluğu olduğunu göstermeliyiz.  $U$ ,  $x \in U \subseteq N$  ile  $X$  in açık bir kümesi ve  $V, aX$  de  $V \cap X = U$  ile açık bir küme olsun.  $X$ ,  $aX$  de yoğun olduğundan,

$$x \in V \subseteq cl_{aX}V = cl_{aX}(V \cap X) = cl_{aX}U \subseteq cl_{aX}N$$

dir. Böylece  $cl_{aX}N$ ,  $aX$  de  $x$  in bir komşuluğudur.  $aX$  de  $x$  in her komşuluğu yukarıdaki şekilde bir komşuluğu içerir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 3.1.14.** Bir  $(X, t)$  topolojik uzayının tam regüler olması için gerek ve yeter koşul  $B = \{X - f^{-1}(\{0\}) / f : X \rightarrow \mathbb{I} \text{ sürekli}\}$  ailesinin  $t$  için bir baz olmasıdır.

**İspat:** " $\Rightarrow$ "  $(X, t)$  tam regüler olsun.  $x \in G \in t$  olsun. O zaman  $X - G$ ,  $X$  de kapalı ve  $x \notin (X - G)$  dir. Dolayısıyla öyle bir  $f : X \rightarrow [0, 1]$  sürekli ve  $f(x) = 0$ ,  $f(X - G) = 1$  fonksiyonu vardır.  $g(x) = 1 - f(x)$  alalım. O zaman  $g$  fonksiyonu sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca  $g(x) = 1$ ,  $g(X - G) = 0$  sağlanır. Eğer  $g$  kümesi  $S_g = \{x \in X : g(x) = 0\}$  ile gösterilirse  $x \in X - S_g \subseteq G$  olduğu kolayca görülür. Çünkü  $g(x) = 1 \neq 0$  ve  $g(X - G) = 0$  dır. Ayrıca reel değerli ve sürekli her  $g$  için  $X - S_g$  açıktır. O halde  $x \in X - S_g$  yani  $x \in X - g^{-1}(\{0\}) \subseteq G$  olup  $X - g^{-1}(\{0\}) \in B$  dır.

" $\Leftarrow$ "  $B$ ,  $t$  için bir baz,  $A$ ,  $X$  de kapalı ve  $x_0 \notin A$  olsun. O zaman  $X - A$ ,  $X$  de açık ve  $x_0 \in X - A$  olur.  $B$ , baz olduğundan en az bir  $f : X \rightarrow \mathbb{I}$  sürekli fonksiyonu vardır öyle ki  $x_0 \in X - f^{-1}(\{0\}) \subseteq X - A$  olur.  $\{0\}$ ,  $\mathbb{I}$  de kapalı  $f$  sürekli olduğundan  $X - f^{-1}(\{0\})$  açıktır. Şu halde  $f(x_0) \neq 0$  dır. Her  $x \in X$  için

$$g(x) = maks \left\{ 0, \min \left\{ 1 - \frac{f(x)}{f(x_0)} \right\} \right\}$$

olarak tanımlanırsa  $g$  her  $x \in X$  için  $0 \leq g(x) \leq 1$  koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyondur ve ayrıca  $g(x_0) = 0$  ve  $g(A) = 1$  sağlanır. Sonuç olarak  $(X, t)$  tam regülerdir.

Teorem 3.1.10 un tersini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

**Teorem 3.1.15.** Bir  $X$  Tychonoff uzayı özdeş kuvvet sistemlerine sahip iki kompaktlaşması  $aX$  ve  $gX$  ise bu iki kompaktlama denktir.

**İspat:** Hipotezden  $\{S(y, aX) : y \in aX\} = \{S(z, gX) : z \in gX\}$  dir. Teorem 3.1.11 den  $y \in aX$  için öyle bir tek  $z \in gX$  vardır öyle ki  $S(y, aX) = S(z, gX)$  dir.

O zaman  $f : aX \rightarrow gX$ ,  $f(y) = z$  olsun.  $f$  fonksiyonu birebir ve örten olur. Dolayısıyla,

$$S(y, aX) = S(f(y), gX) \dots \dots \dots (i)$$

dir.  $x \in X$  için  $S(x, aX) = S(f(x), gX)$  dir. Yani  $I_{aX}(x) = I_{gX}(x)$  dir.

(Lemma 3.1.9 dan  $S(x, aX) = I_x(x) = I_{aX}(x)$ ,  $S(x, gX) = I_x(x) = I_{gX}(x)$  dir.)

Böylece  $S(x, aX) = S(f(x), gX)$  ve olup ispat için  $f$  fonksiyonunun homeomorfizma olduğunu göstermek yeterlidir. (i) den dolayı  $A \subseteq X$  için,

$y \notin cl_X A \Leftrightarrow f(y) \notin cl_{gX} A$  olur. Yani  $A \subseteq X$  için,

$$f(cl_{aX} A) = cl_{gX} f(A) = cl_{gX} A \dots \dots \dots (ii)$$

olur.  $\{cl_{aX} A : A \subseteq X\}$  ve  $\{cl_{gX} A : A \subseteq X\}$  kompakt kümeler ailesi kapalı bazdır.

( $aX$  ve  $gX$  için) (ii) den ve  $f$  den dolayı bu iki aile birebir eşlenebileceğinden  $f$  fonksiyonu bir homeomorfizmadır.

### 3.2. İdeal Genişlemeler

**Tanım 3.2.1.**  $Y$ , bir  $X$  uzayının genişlemesi olsun. Eğer,

$Y$  nin farklı noktaları farklı kuvvetlere sahip ve  $\{cl_Y A : A \subseteq X\}$  ailesi  $Y$  nin kapalı kümeleri için bir baz oluyorsa  $Y$  ye,  $X$  in bir ideal genişlemesi denir.

**Not 3.2.2. i.** Eğer bir  $X$  uzayı bir  $Y$  ideal genişlemesine sahip ise  $X$ ,  $T_0$  - uzayı olmak zorundadır. Çünkü,  $x_1, x_2 \in X$  için  $I_X(x_1) = I_X(x_2)$  ise Lemma 3.1.9 dan dolayı  $S(x_1, Y) = S(x_2, Y)$  olurdu. Dolayısıyla i) den dolayı  $x_1 = x_2$  ve Lemma 3.1.5 den dolayı  $X$ ,  $T_0$  - uzayıdır.

**ii.** Bir  $X$   $T_0$  - uzayının herhangi bir  $Y$  ideal genişlemesi de  $T_0$  - uzayıdır. Gerçekten,  $y_1, y_2 \in Y$  için  $I_Y(y_1) = I_Y(y_2)$  ise,

$$\begin{aligned} S(y_1, Y) &= \{A \subseteq X : y_1 \notin cl_Y A\} = \{A \subseteq X : A \in I_Y(y_1)\} \\ &= \{A \subseteq X : A \in I_Y(y_2)\} = \{A \subseteq X : y_2 \notin cl_Y A\} = S(y_2, Y) \end{aligned}$$

olup Tanım 3.2.1 i) koşulundan dolayı  $y_1 = y_2$  olup Lemma 3.1.5 den  $Y$ ,  $T_0$  - uzayıdır.

**Teorem 3.2.3.**  $Y$ , bir  $X$   $T_0$  - uzayının bir ideal genişlemesi olsun. O zaman  $Y$ ,  $X$  in bütün serbest idealleri tarafından içerilen  $X$  üzerindeki  $c$  - ideallerinin uygun bir alt ailesinden elde edilen bir  $X^*$  genişlemesine denktir.

**İspat:**  $X^* = \mathbb{K} = \{S(y, Y) : y \in Y\}$  olsun. O zaman  $X^*$  ın  $X$  üzerindeki  $c$ - ideallerinin bir kümesi olduğu açıktır. İlk önce  $X^*$  üzerinde bir Kuratowski kapanış operatörü tanımlamaya çalışalım.  $\Phi : X \rightarrow X^*$ ,  $x \in X$  için  $\Phi(x) = I_X(x)$  olarak tanımlayalım.  $X$ ,  $T_0$  - uzay olduğundan Lemma 3.1.5 den  $\Phi$  fonksiyonu birebirdir.  $A \subseteq X$  için

$A^c = \{I \in X^* : A \notin I\}$  ve  $B = \{A^c : A \subseteq X\}$  olsun. İlk önce  $B$  nin  $X^*$  üzerindeki bir topolojinin kapalı kümeleri için bir baz olduğunu gösterelim.  $A^c, B^c \in B$  olsun.

$$\begin{aligned} (A \cup B)^c &= \{I \in X^* : A \cup B \notin I\} = \{I \in X^* : A \notin I \text{ veya } B \notin I\} \\ &= \{I \in X^* : A \notin I\} \cup \{I \in X^* : B \notin I\} = A^c \cup B^c \text{ ise } A^c \cup B^c \in B \end{aligned}$$

dir.  $B$  nin  $X^*$  üzerinde doğurduğu bu topoloji ile ilişkilendirilen veya bu topolojiyi veren Kuratowski kapanış operatörü  $d$  olsun. O zaman her  $a \subseteq X^*$  için,

$$d(a) = \mathbf{I} \{A^c : a \subseteq A^c \text{ ve } A \subseteq X\}$$

olur. Yani  $d(a)$ ,  $B$  nin doğurduğu topolojiye göre  $a$  nın kapanışı olur. Önce  $d$  ve  $\Phi : X \rightarrow X^*$  arasındaki bazı ilişkileri açıklayalım.

**i.** Her  $A \subseteq X$  için  $\Phi(cl_X A) = A \mathbf{I} \Phi(X)$  dir. Gerçekten,  $x \in cl_X A \Leftrightarrow A \notin I_x(x) = \Phi(x) \in A^c \mathbf{I} \Phi(X)$  olur.

**ii.** Her  $A \subseteq X$  için  $\Phi(A) \subseteq A^c$  olup i) den dolayı  $\Phi(A) \subseteq \Phi(cl_X A) \subseteq A^c$  dir.

**iii.** Her  $A \subseteq X$  için  $d(\Phi(A)) = A^c$  dir. ii) den dolayı bir  $B \subseteq X$  için  $\Phi(A) \subseteq B^c$  olsun. O zaman,

$$x \in A \text{ ise } \Phi(x) \in B^c \text{ ise } I_x(x) \in B^c \text{ ise } B \notin I_x(x) \text{ ise } x \in cl_X B$$

dir. Böylece  $A \subseteq cl_X B$  dir. Buradan hemen aşağıdakileri not edebiliriz.

**a)**  $A \subseteq B$  ise  $A^c \subseteq B^c$  dir. Gerçekten,  $I \in A^c$  ise  $A \notin I$  ise  $B \notin I$  ise  $I \in B^c$  dir.

**b)** Her  $B \subseteq X$  için  $(cl_X B)^c = B^c$  dir. Gerçekten,

$I \in (cl_X B)^c \Leftrightarrow cl_X B \notin I \Leftrightarrow B \notin I \Leftrightarrow I \in B^c$  olur ve  $I$  bir  $c$ - ideal olduğundan dolayı  $(cl_X B)^c = B^c$  dir.

Şimdi  $A \subseteq cl_X B$  ise  $A^c \subseteq (cl_X B)^c = B^c$  ise  $A^c \subseteq d(\Phi(A))$  ve  $d$  nin tanımından dolayı da  $d(\Phi(A)) \subseteq A^c$  dir. Dolayısıyla  $A^c = d(\Phi(A))$  dir. i) ve iii) den  $\Phi(cl_X A) = d(\Phi(A)) \mathbf{I} \Phi(X)$  ve  $\Phi(x) = A^c$  dir. Ayrıca  $X^c = X^*$  dir. Çünkü, daima  $X^c \subseteq X^*$  ve  $X^c = \{I \in X^* : X \notin I\}$  dir. Şimdi  $y \in Y$  için  $S(y, Y) \in X^*$ ,

burada  $S(y, Y) = \{A \subseteq X : y \notin cl_Y A\}$ ,  $X \notin S(y, Y)$  dir. O zaman  $S(y, Y) \in X^c$  dir. Böylece  $X^c = X^*$  dir. Dolayısıyla  $d$  Kuratowski kapanış operatörü tarafından doğurulan topolojisi ile  $X^*$ ,  $X$  in bir genişlemesidir.  $f : X \rightarrow X^*$  fonksiyonunu  $f(y) = S(y, Y)$  olarak tanımlayalım. O zaman  $x \in X$  için  $f(x) = S(x, Y) = I_x(x) = \Phi(x)$  dir.  $A \subseteq X$  olsun. O zaman  $y \in Y$  için  $y \in cl_Y A \Leftrightarrow A \in S(y, Y) = f(y) \Leftrightarrow f(y) \in A^c$  olur. Böylece  $f(cl_Y A) = A^c$  olur. Dolayısıyla  $Y$  ve  $X^*$  temel kapalı kümeleri arasında birebir eşleme vardır. Ayrıca  $f$ , birebir ve örten olduğundan  $f$  homeomorfizm olur. Böylece  $Y$ ,  $X^*$  a denktir.

Yukarıdaki teorem, bir  $T_0$  - uzayının bir ideal genişlemesinin inşası için bir yöntem verir. Şimdi aynı koşullar altında kompakt olan ideal genişlemeyi, yani kompaktlaşmasını arayalım. Önce bir  $X$  uzayının kompakt olması ile idealler arasındaki ilişkiyi veren teoremi ispatlayalım.

**Teorem 3.2.4.** Bir  $X$  uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulu sağlayan her  $I$  ideali için  $I_X(x) \subseteq I$  olacak şekilde  $x \in X$  vardır.

(c) Eğer kapalı kümelerin sonlu bir kesişimi boş ise o zaman kapalı kümelerden biri  $I$  idealinin elemanıdır. Yani

$i=1,2,\dots,n$  için  $F_i$ ,  $X$  de kapalı ve  $\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$  ise  $F_{i_0} \in I$  olacak şekilde bir  $i_0$  elemanı vardır.

**İspat:** " $\Rightarrow$ "  $X$  kompakt ve  $I$  da  $X$  in (c) koşulunu sağlayan bir ideal olsun. O zaman,

$$\{cl_X A : A \in \mathcal{P}(X) - I\}$$

ailesi,  $X$  in sonlu kesişim özelliğine sahip  $X$  in kapalı alt kümelerinin bir ailesidir.

Çünkü  $\bigcap_{i=1}^n cl_X A_i = \emptyset$  olsaydı (c) den bir  $i_0$  için  $cl_X A_{i_0} \in I$ , dolayısıyla  $A_{i_0} \in I$  olurdu.

Bu ise  $A_{i_0} \notin I$  olması ile çelişirdi. O zaman  $X$  kompakt olduğundan,

$$x \in \bigcap \{cl_X A : A \in \mathcal{P}(X) - I\}$$

olacak şekilde bir  $x \in X$  vardır. Her  $A \in P(X) - I$  için  $x \in cl_X A$  dır. Her  $A \notin I$  için  $A \notin I_X(x)$  olup  $I_X(x) \subseteq I$  dır.

" $\Leftarrow$ " Hipotez sağlansın.  $F, X$  üzerinde bir ultrafiltre ve  $I = \{A \subseteq X : X - A \in F\}$  olsun. O zaman  $I, X$  üzerinde bir idealdir. Şimdi  $I$  nın (c) koşulunu sağladığını gösterelim. Bunun için her  $A_i$  kümesi  $X$  de kapalı olmak üzere  $A_1, A_2, \dots, A_n \notin I$  olsun  $\bigcap_{i=1}^n A_i \notin I$  ve böylece  $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$  olduğunu göstermeliyiz.

Gerçekten,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in I \text{ ise } X - \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (X - A_i) \in F$$

ise bir  $i_0$  için  $X - A_{i_0} \in F$  ise  $A_{i_0} \in I$  çelişkisi elde edilirdi.

O zaman  $\bigcap_{i=1}^n A_i \notin I$  dır. Dolayısıyla  $I, (c)$  koşulunu sağlar.  $I_X(x) \subseteq I$  olacak şekilde

bir  $x \in X$  vardır. Yani,  $A \in I_X(x)$  ise  $A \in I$  dir. Yani,

$$x \in cl_X A \text{ ise } A \in I \text{ olup } X - A \in F \dots \dots \dots \otimes$$

.olur.  $U, x$  in açık bir komşuluğu olsun. O zaman,

$$x \notin cl_X (X - U) = X - U$$

olur.  $\otimes$  dan dolayı  $X - (X - U) = U \in F$  dir. Böylece  $F, x$  in komşuluklarını içerir.

O zaman  $F \rightarrow x$  olup  $X$  kompakttır.

Şimdi ideallerin (c) koşulunu sağlayan ideallerin sınıfından daha büyük bir sınıfını tanımlayalım.

**Tanım 3.2.5.**  $I, bir X uzayında bir ideal olsun. Eğer her  $A, B \in P(X) - I$  (yani  $A, B \notin I$ ) için  $cl_X A \cap cl_X B \neq \emptyset$  oluyorsa  $I$  ya c - joined ideal denir. Eğer  $X$  üzerindeki her c - joined  $I$  ideali için,  $I_X(x) \subseteq I$  olacak şekilde bir  $x \in X$  varsa  $X$  e c - joined kompakt denir.$

**Not 3.2.6.**  $c$  - joined ideallerin sınıfı, (c) koşulunu sağlayan ideallerin sınıfından kesin olarak daha büyüktür. Örneğin;

$A = \{2, 4, 6, \dots, 28\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, \dots, 27\}$ ,  $C = \{5, 10, 15, 20, 25\}$  olsun.  $X = A \cup B \cup C$  ve kapalı kümeler,

$$t_c = \{X, \emptyset, A, B, C, A \mathbf{I} B, A \mathbf{I} C, B \mathbf{I} C, A \cup B, A \cup C, B \cup C\}$$

olsun.  $X$  üzerindeki bir ideal,

$$I = \left\{ \begin{aligned} &\emptyset, \{15\}, \{10, 20\}, \{10\}, \{20\}, \{10, 15, 20\}, \{15, 20\}, \{10, 15\}, \{6, 12, 18, 24\} \\ &, \{6\}, \{12\}, \{18\}, \{24\}, \{6, 12\}, \{6, 18\}, \{6, 24\}, \{12, 18\}, \{12, 24\}, \{18, 24\} \\ &, \{6, 12, 18\}, \{6, 12, 24\}, \{6, 18, 24\}, \{12, 18, 24\} \end{aligned} \right\}$$

olsun. O zaman  $A \mathbf{I} B \mathbf{I} C = \emptyset$  ve  $A, B, C \notin I$ ,  $I$  ideali (c) koşulunu sağlamaz. Bu nedenle  $\emptyset \neq H, K \subseteq X$  ve  $cl_X H \mathbf{I} cl_X K = \emptyset$  ise o zaman,

$$cl_X H, cl_X K \in \{X, A, B, C, A \mathbf{I} B, A \mathbf{I} C, B \mathbf{I} C\}$$

olur. Dolayısıyla her bir durumda  $cl_X H \in I$  veya  $cl_X K \in I$  ve böylece  $H \in I$  veya  $K \in I$  olur. Örneğin; eğer  $cl_X H = A$  ise  $cl_X K = B \mathbf{I} C = \{15\} \in I$  dir. Bu yüzden  $A \mathbf{I} B, A \mathbf{I} C, B \mathbf{I} C \in I$  olur. Böylece  $I$  ideali, bir  $c$  - joined idealdir.

**Sonuç 3.2.7.** Her  $c$  - joined kompakt uzay kompakttır.

Bu Sonuç 3.2.7. nin tersinin doğru olup olmadığı hala açık bir problemdir. Fakat tersinin regüler uzayları için doğru olduğu aşağıda gösterilmiştir.

**Teorem 3.2.8.** Bir regüler uzayın kompakt olması ile  $c$  - joined kompakt olması eşdeğerdir.

**İspat:** Teorem 3.2.4. den ve Sonuç 3.2.7. den dolayı herhangi bir regüler kompakt  $X$  uzayının  $c$  - joined kompakt olduğunu göstermek yeterlidir.  $I, X$  de bir  $c$  - joined ideal olsun. Eğer  $X \in I$  ise  $I = \mathbf{P}(X)$  olacağından her  $x \in X$  için  $I_x(x) \subseteq I$  olur. Böylece  $X \notin I$  olduğunu kabul edelim. Kabul edelim ki her  $x \in X$  için  $I_x(x) \not\subseteq I$  olsun. O zaman her  $x \in X$  için en az bir  $A_x \subseteq A$  vardır öyle ki  $A_x \in I_x(x)$  dir. Yani,  $x \notin cl_X A_x$  ve  $A_x \notin I$  olur.  $X$  regüler ve  $x \in X - cl_X A_x$  açık olduğundan  $X$  de en az bir

$V_x$  açık kümesi vardır öyle ki  $x \in cl_x V_x \subseteq X - cl_x A_x$  olur. Böylece  $cl_x V_x \cap cl_x A_x = \emptyset$  olur. Ayrıca  $\{V_x : x \in X\}$ ,  $X$  in bir açık örtüsü olur.  $X$  kompakt olduğundan bu örtünün bir  $\{V_{x_i} : i = 1, 2, \dots, n\}$  sonlu alt örtüsü vardır. O zaman  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $A_{x_i} \notin I$ ,  $cl_x A_{x_i} \cap cl_x V_{x_i} = \emptyset$  ve  $I, c$  - joined olduğundan her  $i$  için  $V_{x_i} \in I$  olur. Dolayısıyla  $\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = X \in I$  dır. Bu ise kabulümüz  $X \notin I$  ile çelişir. O zaman bir  $x \in X$  için  $I_x(x) \subseteq I$  olmak zorundadır. Sonuç olarak  $X, c$  - joined kompakt olur.

**Tanım 3.2.9.**  $X$  uzayı üzerindeki ideallerin bir ailesi  $F = \{I_a : a \in \Lambda\}$ , eğer

**e** Eğer  $I$ ,  $X$  üzerinde bir ideal ve her  $A, B \subseteq P(X) - I$  ve  $A, B \notin I_a$  olacak şekilde bir  $a \in \Lambda$  mevcut ise o zaman  $I_b \subseteq I$  olacak şekilde bir  $b \in \Lambda$  vardır. koşulunu sağlıyorsa  $F$  ye **e** koşulunu sağlıyor denir.

**Teorem 3.2.10.** Bir  $X$  uzayının Teorem 3.2.2 deki ideal genişlemesi  $X^*$  in  $c$ -joined kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $X^*$  in  $X$  üzerindeki **e** koşulunu sağlayan ideallerin bir ailesi olmasıdır.

**İspat:** Hatırlatma:  $\Phi : X \rightarrow X^*$ ,  $\Phi(x) = I_x(x)$ ,  $A \subseteq X$  için  $A^c = \{I \in X^* : A \notin I\}$

ve  $a \subseteq X^*$  için  $d(a) = \bigcap \{A^c : a \subseteq A^c \text{ ve } A \subseteq X\}$  dir.

" $\Rightarrow$ "  $X^*$ ,  $c$  - joined kompakt ve  $I$ , eğer  $A, B \subseteq P(X) - I$  olduğunda  $A, B, X^*$  in bir elemanı tarafından içerilmeyecek şekilde  $X$  üzerinde bir ideal olsun. Bir  $I_0 \in X^*$  için  $I_0 \subseteq I$  olduğunu göstermeliyiz. İlk önce açık olarak  $A, B \notin I$  için  $A^c \cap B^c \neq \emptyset$ .....(1) dir. Gerçekten  $A, B \notin I$  ise en az bir  $I^* \in X^*$  vardır öyle ki  $A, B \notin I^*$  ise  $I^* \in A^c \cap B^c$  olup  $A^c \cap B^c \neq \emptyset$  dır.

$$A = \{a \subseteq X^* : \Phi(A) \cap (X^* - a) \neq \emptyset, \text{ her } A \notin I \text{ için}\}$$

olsun. İlk olarak  $A$  nın  $X^*$  üzerinde bir  $c$  - joined ideal olduğunu gösterelim. Bunun

için  $a, b \subseteq X^*$ ,  $a \subseteq b$  ve  $b \in A$  olsun. O zaman her  $A \notin I$  için  $\Phi(A) \mathbf{I}(X^* - b) \neq \emptyset$  ise her  $A \notin I$  için  $\Phi(A) \mathbf{I}(X^* - a) \neq \emptyset$  olur. O zaman  $a \in A$  olur.  $a, b \in A$  olsun. Her  $A \notin I$  için  $\Phi(A) \mathbf{I}(X^* - a) \neq \emptyset$  ve  $\Phi(A) \mathbf{I}(X^* - b) \neq \emptyset$  olur.  $a \cup b \in A$  olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki  $a \cup b \notin A$  olsun. O zaman en az bir  $C \notin I$  vardır öyle ki  $\Phi(C) \mathbf{I}(X^* - (a \cup b)) = \emptyset$  dir.  $\Phi(C) \subseteq a \cup b$  dir.

$$C_1 = \{x \in C : \Phi(x) \in a\} \text{ ve } C_2 = \{x \in C : \Phi(x) \in b\}$$

olsun. O zaman  $C = C_1 \cup C_2$  dir.  $C \notin I$  olduğundan  $C_1 \notin I$  veya  $C_2 \notin I$  dir.  $C_1 \notin I$  ise  $a \in A$  olduğundan  $\Phi(C_1) \mathbf{I}(X^* - a) \neq \emptyset$  olur. Bu ise  $C_1$  in tanımı ile çelişir. Benzer çelişki  $C_2 \notin I$  olduğu zamanda elde edilir. O zaman  $a \cup b \in A$  olmak zorundadır. Böylece  $A$ ,  $X^*$  üzerinde bir idealdir.  $a, b \notin A$  olsun. O zaman en az  $A, B \notin I$  vardır öyle ki  $\Phi(a) \subseteq a$  ve  $\Phi(B) \subseteq b$  olur. Dolayısıyla,

$$A^c = d(\Phi(A)) \subseteq d(a), B^c = d(\Phi(B)) \subseteq d(b)$$

olduğundan  $\emptyset \neq A^c \mathbf{I} B^c \subseteq d(a) \mathbf{I} d(b)$  olur.  $X^*$ ,  $c$  - joined kompakt olduğundan en az bir  $I_0 \in X^*$  vardır öyle ki  $I_{X^*}(I_0) \subseteq A$  olur. O zaman  $I_0 \subseteq I$  dir. Gerçekten,  $A \notin I$  ise  $F(A) \notin A$  olup  $F(A) \notin I_{X^*}(I_0)$  olur. Buradan  $I_0 \in d(F(A)) = A^c$  ise  $A \notin I_0$  olduğundan  $I \subseteq I_0$  olur. Dolayısıyla  $X^*$ ,  $\mathbf{e}$  koşulunu sağlar.

" $\Leftarrow$ "  $X^*$ ,  $\mathbf{e}$  koşulunu sağlasın.  $X^*$  in  $c$  - joined kompakt olduğunu göstermeliyiz.  $A$ ,  $X^*$  üzerinde bir  $c$  - joined ideal olsun.  $I_{X^*}(I_0) \subseteq A$  olacak şekilde bir  $I_0 \in X^*$  bulmalıyız.

$A_Y = \{A \subseteq X : A^c - \Phi(X) \in A\}$  ve  $A_X = \{A \subseteq X : \Phi(A) \in A\}$  olsun. İlk önce  $A_X$  ve  $A_Y$  nin ideal olduğunu gösterelim.  $A, B \subseteq X$  ve  $A \subseteq B \in A_X$  olsun. O zaman  $\Phi(A) \subseteq \Phi(B) \in A$  olur.  $A$  bir ideal olduğundan  $\Phi(A) \in A$  ise  $A \in A_X$  dir.  $A, B \in A_X$  olsun.  $\Phi(A), \Phi(B) \in A$  olup daima  $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$  dir.

$\Phi(A), \Phi(B) \in A$  ve  $A$  ideal olduğundan  $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B) \in A$  ise  $A \cup B \in A_X$  olup  $A_X$  bir idealdir.  $A, B \subseteq X$  ve  $A \subseteq B \in A_Y$  olsun. Böylece  $A^c \subseteq B^c$  ise  $A^c - \Phi(X) \subseteq B^c - \Phi(X)$  ve  $A$  bir ideal olduğundan  $A^c - \Phi(X) \in A$  olur. Böylece  $A \in A_Y$  dir.  $A, B \in A_Y$  olsun.  $A^c - \Phi(X), B^c - \Phi(X) \in A$  dir. Dolayısıyla  $A$  bir ideal olduğundan,

$$(A^c - \Phi(X)) \cup (B^c - \Phi(X)) = (A^c \cup B^c) - \Phi(X) = (A \cup B)^c - \Phi(X) \in A$$

olur. O zaman  $A \cup B \in A_Y$  dir. O halde  $A_Y$  bir idealdir. Böylece  $A_X \mathbf{I} A_Y$  de bir idealdir.

Şimdi  $A, B \notin A_X \mathbf{I} A_Y$  olacak şekilde her  $A, B \subseteq X$  için ne  $A$  nın ne de  $B$  nin  $X^*$  in bir ideali tarafından içerilmediğini gösterelim.

**1. durum:**  $A \notin A_X$  ve  $B \notin A_Y$  olsun. O zaman  $\Phi(A) \notin A$  ve  $B^c - \Phi(X) \notin A$  dir.  $A$ ,  $X^*$  üzerinde bir  $c$  - joined ideal olduğundan,  $d(\Phi(A)) \mathbf{I} d(B^c - \Phi(X)) \neq \emptyset$  dir. O zaman  $d(\Phi(A)) \mathbf{I} d(B^c) \neq \emptyset$  dir. Böylece  $A^c \mathbf{I} B^c \neq \emptyset$  olur.

**2. durum:**  $B \notin A_X$  ve  $A \notin A_Y$  ise 1. durumun aynısıdır.

**3. durum:**  $A, B \notin A_X$  veya  $A, B \notin A_Y$  olsun. Buradan hemen  $A^c \mathbf{I} B^c \neq \emptyset$  elde ederiz.  $A^c \mathbf{I} B^c \neq \emptyset$  ise en az bir  $I \in X^*$  vardır öyle ki  $I \in A^c \mathbf{I} B^c$  olup  $A, B \notin I$  dir.  $X^*$ , **e** koşulunu sağladığından en az bir  $I_0 \in X^*$  vardır öyle ki  $I_0 \subseteq A_X \mathbf{I} A_Y$  dir.  $I_{X^*}(I_0) \subseteq A$  olduğunu gösterelim.  $a \subseteq X^*$  ve  $a \notin A$  olsun.

$$a = (a \mathbf{I} \Phi(X)) \cup (a - \Phi(X))$$

dir.  $a \notin A$  olduğundan  $a \mathbf{I} \Phi(X) \notin A$  veya  $a - \Phi(X) \notin A$  dir. İlk olarak  $a \mathbf{I} \Phi(X) \notin A$  olduğunu kabul edelim. O zaman  $\Phi^{-1}(a) \mathbf{I} X \notin A$  ise  $\Phi^{-1}(a_0) \notin I_0$  dir. Böylece  $F^{-1}(a) \in I_0$  olur. Bu durumda  $I_0 \in (\Phi^{-1}(a))^c = d(\Phi\Phi^{-1}(a)) \subseteq d(a)$  olduğundan  $a \notin I_{X^*}(I_0)$  olur. Şimdi de  $a - \Phi(X) \notin A$  olduğunu kabul edelim.  $A^c$ ,  $X^*$  uzayında  $a$  yı içeren herhangi bir temel kapalı küme olsun. O zaman

$$A^c - \Phi(X) \supseteq a - \Phi(X)$$

olur.  $a - \Phi(X) \notin A$  olduğundan  $A^c - \Phi(X) \notin A$  dır. Buradan  $A \notin A_Y$  ve  $A \notin I_0$  olur. Böylece  $I_0 \in A^c$  elde edilir. Bu durumda  $I_0 \in \mathbf{I}\{a \subseteq A^c\} = d(a)$  olur ve  $a \notin \mathbf{I}(I_0)$  elde edilir. Böylece her bir durumda  $I_{X^*}(I_0) \subseteq A$  olur. Sonuç olarak  $X^*$ , c - joined kompakttır.



## KAYNAKLAR

- BÜLBÜL, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniv., 172(48), (Trabzon,).
- CHANDLER, R.E., 1976. Hausdorff compactifications, Marcel Dekker, New York.
- GILLMAN, L. AND JERISON, M., 1976. Rings of Continuous Functions, Springer- Verlag, Berlin.
- HAYASHI, E., 1964. Topologies defined by local properties, Math. Ann., 156, 205-215.
- JANKOVIĆ, D., HAMLET, T.R., 1990. New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, 97, 295-310.
- MUKHERJEE, M.N., ROY, B., SEN, R., 2007. On extension of topological spaces in terms of ideals, Topology and its App., 154, 3167-3172.
- PORTER, J.R., WOODS, R.G., 1988. Extension and Absolutes of Hausdorff Space, Springer-Verlag, New York Inc. 856s.
- SAMUELS, P., 1975. A topology formed from a given a topology and ideal, J. London Math. Soc., 10, 409-416.
- WALKER, R.C., 1974. The Stone-Cech Compactification, Springer-Verlag,
- WILLARD, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley, London,



## **ÖZ GEÇMİŞ**

1986 yılında Adana' nın Yüreğir ilçesinde doğdu. İlkokulu, İstiklal İlkokulu' -nda; ortaokulu, Efes Pilsen İlköğretim Okulu' nda; liseyi, Tepebağ Lisesi' nde tamamladı. 2003 yılında Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü' nü kazandı. İkinci sınıfın birinci döneminde eğitime yatay geçiş yaptığı, Çukurova Üniversitesi' nde devam etti ve 2007 yılında mezun oldu. Çukurova Üniversitesi' nde bir yıllık İngilizce eğitiminden sonra tezli yüksek lisans eğitime başladı ve halen tezli yüksek lisans öğrencisi olarak öğrenimine devam etmektedir.