



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**RIEMANN OTSUKI UZAYLARINDA BAZI ÖZEL
EĞRİLERİN TANIMI VE İNCELENMESİ**

**Jeta ALO
Matematik Anabilim Dalı**

**Danışman
Prof.Dr. Leyla ZEREN AKGÜN
Temmuz, 2010**

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.Leyla ZEREN AKGÜN'e en içten dileklerle teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Prof.Dr.Mehmet ERDOĞAN'a teşekkürü borç bilirim.

Temmuz 2010

Jeta ALO

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	x
1.GİRİŞ	1
2.GENEL KISIMLAR	4
2.1. L_n^2 grubunun tanımı.....	4
2.1.1 Birinci ve İkinci Mertebeden Genelleştirilmiş Zincir Kuralı.....	4
2.1.2 Düzgün Dönüşümlerin Jetleri.	5
2.1.2.1. 2-jet'in geometrik yorumu.....	8
2.1.3. Jetlerin Bileşkesi.....	10
2.1.4. Regüler jetler, tersinir jetler	11
2.1.5 Jet manifoldlar. Diferansiyel gruplar	12
2.1.5. L_n^2 'de grup işlemi.....	13
2.2. LİF DEMETLERİ (FİBER BUNDLE)	15
2.2.1 Vektör Demetleri (Vector Bundle).....	18
2.2.2.1. Vektör demeti üzerine konneksiyon	19
2.2.2 Çatı demetleri ve çatı demetleri üzerinde 1-formlar	20
2.2.3. Demetlerin direkt toplamı ve tensör çarpımı. Dual demetler.	23
2.3. İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT VE KOTANJANT DEMETLER.....	23
2.4. GENEL KONNEKSİYON VE KOVARYANT TÜREV	28

2.5. KONNEKSİYONUN (1,1) TİPİNDEN BİR TENSÖR İLE ÇARPIMI. REGÜLER GENEL KONNEKSİYONLAR.....	38
2.6. TEMEL KOVARYANT TÜREVİN TANIMI VE KOVARYANT TÜREV İLE İLİŞKİSİ	42
2.7. GEODEZİKLER VE METRİK KOŞULLARI	47
2.8. GENEL KONNEKSİYONLARIN EĞRİLİK VE BURULMA FORMLARI	53
2.8.1. Regüler Genel Konneksiyonların Eğrilik Formları	61
2.9. RIEMANN-OTSUKI UZAYLARININ ALTUZAYLARI VE ORTOGONAL ALTUZAYLARI	66
2.10. RIEMANN-OTSUKI UZAYLARININ GAUSS, CODAZZI VE KÜHNE DENKLEMLERİ	77
2.11. RIEMANN-OTSUKI UZAYININ FRENET FORMÜLLERİ	87
2.11.1. Vektörlerin kontravaryant bileşenlere göre Frenet Formülleri	88
2.11.2. Vektörlerin kovaryant bileşenlerine göre Frenet Formülleri	93
2.12. RIEMANN-OTSUKI UZAYININDA OTOPARALEL EĞRİLER.....	95
2.12.1. Kontravaryant tipindeki oto paralel eğriler	96
2.12.2. Kovaryant tipte otoparalel eğriler	99
3.MALZEME VE YÖNTEM.....	104
4.BULGULAR	105
4.1. $(R - O_n)$ UZAYINDA EĞRİLERİN DEFORMASYONLARI.....	105
4.1.1 Δ operatörünün tanımı.....	108
4.1.1.1. Paralel teğet deformasyonları.....	111
4.1.1.2 Δ operatörü için değişim formülleri	114
4.1.1.3 Genel Combescure Transformasyonu.....	115
4.1.2 D^{13} operatörünün tanımı	119
4.1.3 Otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere dönüştüren dönüşümler.....	127
4.1.4 Riemann Çemberini Riemann Çemberine dönüştüren dönüşümler	130
4.2. RIEMANN-OTSUKI UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ HELİS	133
4.3. $(R - O_n)$ 'DE İNVOLÜT EĞRİLER	137

4.4. $(R - O_n)$ ' DE BERTRAND EĞRİLERİ	141
5.TARTIŞMA VE SONUÇ	153
KAYNAKLAR.....	155
ÖZ GEÇMİŞ.....	158

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.2.1: Lif demeti	16
Şekil 2.2.2: Demet dönüşümü	17
Şekil 2.2.3: f fonksiyonunu örten demet dönüşümü	18

SEMBOL LİSTESİ

M	: diferansiyelenebilir bir manifold
(E, M, π)	: lif demeti
$\pi : E \rightarrow M$: demet izdüşümü
$s : M \rightarrow E$: demetin kesiti
$\Psi(E)$: E demetinin tüm kesitlerinin kümesi
$(\mathfrak{B}(M), M, \pi)$: Çatı demeti
L_n^2	: $L_n^2 = \{(a_j^i, a_{jh}^i) \mid a_j^i, a_{jh}^i \in R, a_j^i \neq 0, a_{jh}^i = a_{hj}^i\}$
\mathcal{L}_n^2	: $\mathcal{L}_n^2 = \{(a_j^i, a_{jh}^i) \mid a_j^i, a_{jh}^i \in R, a_j^i \neq 0\}$
$\tilde{\mathcal{L}}_n^2$: $\tilde{\mathcal{L}}_n^2 = \{(a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i) \mid a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i \in R, a_j^i \neq 0\}$
M_n^2	: $n \times n$ matrislerin kümesi
\mathcal{M}_n^2	: $\mathcal{M}_n^2 = \{(a_j^i, a_{jh}^i) \mid a_j^i, a_{jh}^i \in R\}$
$\tilde{\mathcal{M}}_n^2$: $\tilde{\mathcal{M}}_n^2 = \{(a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i) \mid a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i \in R\}$
$\{T(M), M, \tau\}$: M 'nin tanjant demeti
$\{T^*(M), M, \eta\}$: M 'nin kotanjant demeti
$\{\mathcal{S}^2(M), M, \tau_2\}$: M 'nin ikinci mertebeden tanjant demeti
$\{\mathcal{D}^2(M), M, \eta_2\}$: M 'nin ikinci mertebeden kotanjant demeti
∇	: afin konneksiyon
$\Gamma = (P_j^i, \Gamma_{jh}^i)$: genel konneksiyon
$'\Gamma = (Q_k^i P_j^k, Q_k^i \Gamma_{jh}^i)$: genel konneksiyonun kontravaryant kısmı
$''\Gamma = (P_k^i Q_j^k, \Gamma_{kh}^i Q_j^k)$: genel konneksiyonun kovaryant kısmı
d	: adi diferansiyel operatörü
D	: Otsuki kovaryant diferansiyel operatörü
\bar{D}	: Otsuki temel kovaryant diferansiyel operatörü
$'D$	konneksiyonun kontravaryant kısmına göre kovaryant diferansiyel
$''D$	konneksiyonun kovaryant kısmına göre kovaryant diferansiyel
D_h	: Otsuki kovaryant türev
$\hat{\Gamma} = (P_\beta^\alpha, \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha)$: altuzayın genel konneksiyonu

$\tilde{\Gamma} = (P_\nu^\mu, \tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu)$: altuzaya ortogonal olan altuzayın genel konneksiyonu
\hat{D}	: altuzayda tanımlanan Otsuki kovaryant diferansiyeli
$V_{(1)}^i, V_{(2)}^i, \dots, V_{(n)}^i$: eğrinin, sırasıyla, teğet, 1.normal, ..., n-1. normal birim vektörleri
$\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$: eğrinin eğrilikleri
B_α^i	: $B_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$ altuzayın teğet vektörü
$N_{(\mu)}^i$: altuzaya normal olan bir vektör
Δ ve D^{13}	: eğrinin deformasyonu sonucunda elde edilen operatörler
$v^\lambda(x)$: C eğrisi boyunca tanımlı bir vektör
\bar{C}	: C eğrisinin deformasyonu olan bir eğri
\bar{v}^λ	: \bar{x} noktasında v^λ 'nin değeri
$*v^\lambda$: \bar{x} noktasında C eğrisi boyunca v^λ 'ya paralel olan bir vektör
$\wedge v^\lambda$: \bar{x} noktasında v^λ 'nin deformasyon
${}^i\gamma_{\alpha\beta\alpha}$: ${}^i\gamma_{\alpha\beta\alpha} = {}^iR_{jkl} V_{(\gamma)}^j V_{(\alpha)}^k V_{(\beta)}^l V_{(\alpha)}^l$

ÖZET

RIEMANN-OTSUKI UZAYLARINDA BAZI ÖZEL EĞRİLERİN TANIMI VE İNCELENMESİ

Riemann-Otsuki uzayları, Otsuki tarafından tanımlanan genel konneksiyon kavramı ile ilişkilendirilen bir Riemann metriği ile karakterize edilir. Bu uzay, A.Moor tarafından tanımlanan Weyl-Otsuki uzayının bir özel halidir.

$$D_k g_{ij} = 0$$

denklemleri ile belirlenen bir genel konneksiyon $(R-O_n)$ ile göstereceğimiz Riemann-Otsuki uzayını tanımlar.

Genel konneksiyon tanımında hareket noktası afin konneksiyonun bileşenleridir. Bilindiği üzere bir afin konneksiyonun lokal koordinatlara göre ifade edilen bileşenleri, birer geometrik nesnedir ancak geometrik çokluklar değildir. Çünkü bir koordinat dönüşümünde bunlar $(1,2)$ tipinde bir tensörün bileşenleri gibi dönüşürler, ancak lokal koordinatların ikinci mertebeden kısmi türevlerini içeren terimler barındırırlar. Buradan hareketle, afin konneksiyonun bileşenleri ile $(1,2)$ tipinde bir tensörün bileşenlerinin birbirinden tamamıyla farklı kavramlar olmadığını T.Otsuki göstermiştir. Bu iki kavram Otsuki'nin tanımladığı bir genel konneksiyonun özel halleridir. Bu nedenle Otsuki konneksiyonu diferansiyellenebilir manifoldlar için afin konneksiyon kavramının genelleştirilmesinden ibarettir.

Bu genelleştirmeyi yapan Otsuki, $\mathfrak{S}^2(M)$ ile göstereceğimiz 2.mertebeden tanjant demeti kavramını kullanarak, afin, projektif ve konformal konneksiyon gibi klasik konneksiyonlara tek bir bakış açısından bakılabileceğini göstermiştir. Otsuki çalışmasında, $\mathfrak{D}^2(M)$ M 'nin ikinci mertebeden kotanjan demeti olmak üzere, genel konneksiyonu $T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M)$ 'nin bir kesiti olarak tanımlamıştır. Genel konneksiyonu bu şekilde tanımladıktan sonra, genel konneksiyona göre kovaryant türevi tanımlayarak, bu kovaryant türev ile temel kovaryant türevin ilişkisini ortaya koymuştur.

Ayrıca, bir genel konneksiyonun $(1,1)$ tipinden bir Q tensörü ile çarpımının da bir genel konneksiyon olduğu Otsuki tarafından gösterilmiştir. Bu şekilde elde edilen $\Gamma = Q\Gamma$ ve $\Gamma = \Gamma Q$ konneksiyonlarına Γ ile gösterilen konneksiyonunun, sırasıyla, kontravaryant ve kovaryant kısımları adı verilmiştir.

$(R - O_n)$ ile gösterilen n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayını ilk defa Nadj tanımladı ve bu uzayın alt uzayları ile bu altuzaya ortogonal altuzayları inceledi. Bu altuzaylar da birer Riemann-Otsuki uzayı olacak şekilde altuzay ve onun ortogonal uzayında, sırasıyla, $\hat{\Gamma}$ ve $\tilde{\Gamma}$ konneksiyonlarını belirledi. Riemann-Otsuki uzayında Ricci formülü, Gauss-Codazzi, Kühne denklemleri ve Frenet formülleri yine Nadj tarafından elde edildi. Ayrıca Nadj, Riemann-Otsuki uzayının bir altuzayındaki otoparalel eğrileri tanımlayarak bu eğrilerin üst uzayda da otoparalel olmaları için gerekli koşulları elde etmiştir.

Diğer taraftan, Riemann uzayındaki eğrilerin sonsuz küçük deformasyonlarının J.A.Shouten, K.Yano ve H.A.Hayden tarafından incelendiği bilinmektedir. Riemann uzayındaki eğrilerin deformasyonlarının incelenmesi Riemann uzayları için tanımlanmış olan Δ ve D ¹³ operatörleri kullanılarak yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında, Riemann uzayında tanımlanan Δ ve D ¹³ operatörleri Riemann-Otsuki uzayları için hesaplanarak eğrilerin deformasyonunu incelemek için kullanılmıştır. Ayrıca, paralel teğet ve Combescure deformasyonları tanımlanmış ve otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere ve çemberleri çemberlere dönüştüren deformasyonlar yeniden elde edilmiştir. Daha sonra, Riemann-Otsuki uzayında bir helis eğrisini tanımlayan deformasyon elde edilmiş ve Riemann-Otsuki uzayındaki bir involüt eğrisinin Riemann uzayındaki bir involüt eğrisinden farklı olan özellikleri araştırılmıştır. Son olarak, Riemann uzayında Pears tarafından incelenen Bertrand eğrileri n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayında incelenerek, Riemann uzayındakilerden farklı olan özellikleri elde edilmiştir.

SUMMARY

INVESTIGATION OF SOME SPECIAL CURVES IN RIEMANN-OTSUKI SPACES

Riemann-Otsuki spaces are characterized by a Riemannian metric associated with general connection concept defined by T.Otsuki. This space, as defined by A. Moor is a special case of a Weyl-Otsuki space. A general connection determined by the equation

$$D_k g_{ij} = 0,$$

defines a Riemann-Otsuki space which will be denoted by $(R-O_n)$.

As is well known, components on an affine connection expressed in local coordinates constitute a geometrical object but not a geometrical quantity, because for coordinate transformations they are transformed in the same way as the components of a tensor of type (1,2), but related with the terms containing the second order partial derivatives of the local coordinates. However, T. Otsuki showed that the components of an affine connection and the components of a tensor of type (1,2) are not entirely different concepts. These two concepts are a special cases of a general connection so the Otsuki connection is a generalization of a concept of an affine connection in differentiable manifolds.

Using the concept of tangent bundles of order 2 which will be denoted by $\mathfrak{S}^2(M)$, Otsuki showed that the classical connections such as affine, projective and conformal connections on manifolds can be considered from unificative standpoint. Otsuki defined a general connection as a cross-section of the vector bundle $T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M)$, where $\mathfrak{D}^2(M)$ is the dual vector bundle of $\mathfrak{S}^2(M)$. Then he defined the covariant derivative with respect to this connection and gave the relationship between covariant derivative and basic covariant derivative.

Moreover, Otsuki showed that the product of a tensor of type (1,1) and the general connection is a general connection, too. These connections denoted by $\Gamma = Q\Gamma$ and $\Gamma = \Gamma Q$ are called, respectively, the contravariant and the covariant part of the connection Γ .

Nadj F, defined the Riemann-Otsuki spaces and studied their subspaces and the orthogonal space of any subspace of the Riemann-Otsuki space. Then he determined the coefficients of the connections $\hat{\Gamma}$ and $\tilde{\Gamma}$ of, respectively, a subspace and its orthogonal

space so that this subspaces be Riemannian-Otsuki spaces, too. Then he obtained Frenet and Ricci's formulas, as well as, Gauss, Codazzi and Kühne equations of Riemann-Otsuki spaces. He also defined the autoparallel curves of a subspace of Riemann-Otsuki space and gave some necessary conditions so that this type of curves be autoparallel curve of the space, too.

On the other hand, infinitesimal deformations of curves in a Riemannian space have been studied by H. A. Hayden, J. A. Shouten, K. Yano by using operators Δ and D ¹³ defined in the Riemannian space.

In this thesis, we define operators Δ and D ¹³ in Riemann-Otsuki space and use them for studying the deformation of the curve. Moreover, we define parallel tangent and Combescure deformations and determine the deformations carrying autoparallel curves into autoparallel curves and Riemannian circles into Riemannian circles in Riemann-Otsuki space. Then we determine the deformations which define helical curves in Riemann-Otsuki space and investigate some characteristics of an involute curve which are different from the ones in Riemannian space. Finally, we investigate Bertrand curves in an n-dimensional Riemann-Otsuki space and obtain some properties of these curves which are different from the Riemann space studied by Pears.

1.GİRİŞ

Riemann-Otsuki uzayları, Otsuki [1] tarafından tanımlanan genel konneksiyon kavramı ile ilişkilendirilen bir Riemann metriği ile karakterize edilir. Bu uzay, A.Moor [2,3] tarafından tanımlanan Weyl-Otsuki uzayının bir özel halidir. Söz konusu bu çalışmalarda Moor, $\gamma_k(x)$ bir kovaryant vektör olmak üzere $\nabla_k g_{ij} = \gamma_k(x) g_{ij}$ eşitliğini sağlayan bir $g_{ij}(x)$ temel tensörü tarafından belirlenen bir Otsuki konneksiyonu tanımlayarak Weyl ve Otsuki konneksiyon teorilerini kendi içinde birleştirmiştir.

$$D_k g_{ij} = 0$$

denklemleri ile belirlenen Otsuki konneksiyonu ise $(R-O_n)$ ile göstereceğimiz Riemann-Otsuki uzayını tanımlar, [4], [5].

Riemann-Otsuki uzayları ile ilgili yapılan araştırmalar 2.bölümde yer almaktadır. Bu çalışmada, öncelikle A.Moor tarafından yapılan tanımlamanın ortaya çıkmasına yardımcı olan kaynaklar incelendi, [6-10]. Bu inceleme sonucunda genel konneksiyon kavramının nasıl ortaya atıldığı ayrıntıları ile ortaya kondu. Bu kavramı ilk olarak T.Otsuki tanıttı ve daha sonra genel konneksiyona onun adına atfen Otsuki konneksiyonu adı verildi. Otsuki konneksiyonu diferansiyellenebilir manifoldlar için afin konneksiyon kavramının genelleştirilmesinden ibarettir.

Bu genelleştirmenin esasını anlayabilmek için jet manifoldlar teorisinin temel kavramlarına ve genel özelliklerine gereksinim olduğu ortaya çıkmıştır. Jet manifoldlar teorisi kaynak [11]'den yararlanarak geniş bir şekilde Bölüm 2.1'de anlatılmıştır.

Konneksiyon kavramında kullanılan vektör demetleri (vector bundles) ve bunların kesitleri ile çatı demetleri (frame bundles) hakkındaki bilgiler kaynak [12] ve [13] kullanılarak Bölüm 2.2'de verilmiştir.

Bölüm 2.3 ve 2.4’de ise Bölüm 2.1 ve 2.2’deki bilgiler kullanılarak ikinci mertebeden tanjant ve kotanjant demetler tanımlanmıştır, [6,7]. Daha sonra bu tanımlar kullanılarak Γ ile gösterilen genel konneksiyonun ve kovaryant türevinin tanımı yapılmış ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bir eğri boyunca kovaryant diferansiyel, geodezik eğriler ve genel konneksiyonların öz eğrileri ile öz fonksiyonları çalışılmıştır.

Bölüm 2.5’de genel bir konneksiyonun (1,1) tipinden bir Q tensörü ile çarpımının da bir genel konneksiyon olduğu gösterilmiştir, [14,15]. Bu şekilde elde edilen $\Gamma = Q\Gamma$ ve $\Gamma = \Gamma Q$ konneksiyonlarına Γ konneksiyonunun, sırasıyla, kontravaryant ve kovaryant kısmı adı verilir. Bu bölümde ayrıca regüler genel konneksiyonlar tanımlanmıştır. Bölüm 2.6’da ise bu regüler genel konneksiyonun tanımladığı temel kovaryant türev tanımlanmış ve kovaryant türev ile ilişkisi verilmiştir, [7].

Γ konneksiyonuna göre geodezik ve öz eğriler T.Otsuki [7] tarafından incelenmiştir, bu kavramlar Bölüm 2.7’de verilmiştir. Ayrıca bu bölümde normal genel konneksiyonlar, Otsuki metrik konneksiyonları ve metrik olma koşulu verilmiştir, [9,16]. Bölüm 2.8’de de klasik konneksiyonların genelleştirilmesi olarak genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formları verilmiştir.

Bölüm 2.9’da Nadj’ın [4] tanımladığı n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayı verilmiş ve bu uzayın alt uzayları ile bu altuzaya ortogonal olan altuzaylar incelenmiştir, [5]. Bu altuzaylar da birer Riemann-Otsuki uzayı olacak şekilde altuzay ve onun ortogonal uzayında, sırasıyla, $\hat{\Gamma}$ ve $\tilde{\Gamma}$ konneksiyonlarının alacağı şekil belirlenmiştir.

Ricci formülü, Gauss-Codazzi ve Kühne denklemleri, altuzayın \hat{D} temel kovaryant diferansiyeli kullanılarak Bölüm 2.10’da verilmiştir. Daha önce bu denklemler [17]’de konneksiyonun kovaryant kısmı ile tanımlanan kovaryant türev kullanılarak elde edilmişti. Konneksiyonun kovaryant ve kontravaryant kısımları farklı olduğundan vektörün kontravaryant ve kovaryant kısımlara göre Riemann-Otsuki uzayındaki Frenet formülleri Nadj [18] tarafından verilmektedir. Biz bu formülleri Bölüm 2.11’de ayrıntılı bir şekilde inceledik. Bölüm 2.12’de Riemann-Otsuki altuzayındaki otoparalel eğriler

tanımlanmış ve bu eğrilerin üst uzayda da otoparalel olmaları için gerekli koşullar elde edilmiştir, [19].

Yaptığımız araştırmanın metodolojisi üçüncü bölümde yer almaktadır.

Dördüncü bölümde ise yukarıda belirttiğimiz bilgiler kullanılarak genel konneksiyon yardımıyla n -boyutlu Riemann-Otsuki uzayında otoparalel eğriler, çember, helis, involüt eğrisi ve Bertrand eğrileri gibi özel eğriler incelenmiştir. Bölüm 4.1'de Riemann-Otsuki uzayında eğrilerin deformasyonu incelenmiştir. Riemann uzayında bu deformasyon sonucunda ortaya çıkan Δ ve D ¹³ operatörleri, [20]-[24], Riemann-Otsuki uzayında yeniden hesaplanarak eğrilerin deformasyonunu incelemek için kullanılmıştır. Ayrıca paralel teğet ve Combescure deformasyonları verilmiştir, [20], [23] ve otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere ve çemberi çembere dönüştüren deformasyonlar özgün biçimde elde edilmiştir. Bölüm 4.2'de Riemann-Otsuki uzayında helis eğrisini tanımlayan deformasyon elde edilmiş ve Bölüm 4.3'de ise Riemann-Otsuki uzayında involüt eğrisinin Riemannian haldeki özelliklerden farklı olan özellikleri araştırılmıştır. Son olarak Bölüm 4.4'de Riemann uzayında Pears [25] tarafından incelenen Bertrand eğrileri yine Riemann-Otsuki uzayında incelenmiş ve Riemannian halden farklı olan yeni özellikleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise yapılan araştırma ile ilgili bir değerlendirme yapılmıştır ve ileride yapılabilecek araştırmalara yönelik öneriler verilmiştir.

2.GENEL KISIMLAR

2.1. L_n^2 GRUBUNUN TANIMI

Bu bölümde genel konneksiyon tanımında kullanacağımız 2. mertebeden $\mathcal{T}^2(M)$ tanjant demetinin, yapı grubunu oluşturacak olan jet-manifoldları ele alacağız. Jet-manifoldlar geniş bir şekilde D.Krupka ve M.Krupka [11] tarafından incelenmiştir. Jet-manifold kavramı, diferansiyellenebilir bir manifoldtan diğerine tanımlı bir dönüşümün, bir noktadaki diferansiyel kavramının genelleştirilmesidir. X ve Y iki differansiyellenebilir manifold için $x \in X$ noktasında “birbirine 2. mertebeden tanjant” olan tüm C^2 sınıfından dönüşümler bir denklik bağıntısı belirler. Bu denklik bağıntısının belirlediği denklik sınıflarına, kaynağı x ve hedefi $y \in Y$ olan bir 2-jet denir. Kaynağı x ve hedefi y olan 2-jetlerin kümesi C^2 sınıfından diferansiyellenebilir bir manifoldtur. Bu manifoldlara jet-manifold adı verilir. Öte yandan 2-jetlerin bileşkesi işlemi tanımlanmış ve bileşke işlemine göre tersinir 2-jetlerin oluşturduğu kümenin bir grup yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmada 2. mertebeden diferansiyel grup olarak adlandırılan bu grup, kaynak [7]'de, 2. mertebeden genelleştirilmiş sonsuz küçük izotropiler grubu olarak adlandırılan \mathcal{L}_n^2 grubunun genelleştirilmiş şeklidir.

2.1.1 Birinci ve İkinci Mertebeden Genelleştirilmiş Zincir Kuralı

Tanım 2.1.1. $U_n \subset \mathbb{R}^n$ ve $U_m \subset \mathbb{R}^m$ açık kümeler, $f : U_m \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $g = (g^\sigma)$, $1 \leq \sigma \leq m$, U_n 'dan U_m 'ye düzgün bir dönüşüm olsun. $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere, $x = (x_1, \dots, x_n)$ noktasında $f(g(x)) = f(g^1(x), \dots, g^m(x))$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi

$$\begin{aligned}
\partial_i(f \circ g)(x) &= (\partial_\sigma f(g(x))) \partial_i g^\sigma(x) \\
\partial_j \partial_i(f \circ g)(x) &= (\partial_{\omega\sigma} f(g(x))) (\partial_j g^\omega(x)) \partial_i g^\sigma(x) \\
&\quad + (\partial_\sigma f(g(x))) \partial_{ij} g^\sigma(x), \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \omega, \sigma \leq m
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu formüllere, sırasıyla, birinci ve ikinci mertebeden zincir kuralı denir.

2.1.2 Düzgün Dönüşümlerin Jetleri.

Tanım 2.1.2. X n -boyutlu ve Y m -boyutlu manifold, $x \in X$ herhangi bir nokta ve bu noktanın iki komşuluğu, sırasıyla, W_1 ve W_2 olsun. $f_1(x) = f_2(x)$ eşitliğini sağlayan $f_1: W_1 \rightarrow Y$ ve $f_2: W_2 \rightarrow Y$ sürekli (C^0 sınıfından) dönüşümlerine, x noktasında 0 . mertebeden tanjanttır denir.

Tanım 2.1.3. C^2 sınıfından $f_1: W_1 \rightarrow Y$ ve $f_2: W_2 \rightarrow Y$ dönüşümleri için

- $f_1(x) = f_2(x)$, yani 0 .mertebeden tanjant ve
- $U \subset W_1 \cap W_2$ ve $f_1(U), f_2(U) \subset V$ olmak üzere, $\varphi(x)$ noktasında

$$\begin{aligned}
\partial(\psi f_1 \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial(\psi f_2 \varphi^{-1})(\varphi(x)), \\
\partial^2(\psi f_1 \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial^2(\psi f_2 \varphi^{-1})(\varphi(x))
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

koşullarını sağlayan, x noktasında bir $(U, \varphi), \varphi = (x^i)$ haritası ve $f_1(x) = f_2(x)$ noktasında, bir $(V, \psi), \psi = (y^\sigma)$ haritası bulunabiliyorsa bu iki dönüşüme x noktasında 2 . mertebeden tanjanttır denir.

Bileşenler cinsinde $\psi f_1 \varphi^{-1} = (y^\sigma f_1 \varphi^{-1})$, $\psi f_2 \varphi^{-1} = (y^\sigma f_2 \varphi^{-1})$ yazarsak f_1 ve f_2 fonksiyonları birbirine 2 . mertebeden tanjant olması için gerek ve yeter koşul $f_1(x) = f_2(x)$ eşitliği ve

$$\begin{aligned}\partial_i(y^\sigma f_1 \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial_i(y^\sigma f_2 \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ \partial_j \partial_i(y^\sigma f_1 \varphi^{-1})(\varphi(x)) &= \partial_j \partial_i(y^\sigma f_2 \varphi^{-1})(\varphi(x)), \quad 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \sigma \leq m\end{aligned}\quad (2.1.3)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

Şimdi, $x \in X$, $y \in Y$ iki sabit nokta ve x 'in bir komşuluğu W olsun. C^2 sınıfından $f(x) = y$ koşulunu sağlayan tüm $f: W \rightarrow Y$ dönüşümlerinin kümesini

$$C_{(x,y)}^2(X, Y) = \{f: W \rightarrow Y \mid f \in C^2, f(x) = y\}. \quad (2.1.4)$$

ile gösterelim. $C_{(x,y)}^2(X, Y)$ üzerinde tanımlanan “ f ve g fonksiyonları x noktasında 2. mertebeden tanjanttır” bağıntısının yansımali, geçişken ve simetrik olduğu, dolayısıyla bir denklik bağıntısı olduğu açıktır. Bu denklik bağıntısının belirlediği denklik sınıflarına, **kaynağı x ve hedefi y** olan 2-jet denir. Bir $f \in C_{(x,y)}^2(X, Y)$ dönüşümünün belirlediği denklik sınıfına f 'nin x noktasındaki 2-jeti denir ve $J_x^2 f$ ile gösterilir. Kaynağı $x \in X$ ve hedefi $y \in Y$ olan 2-jetlerin kümesi ise

$$J_{(x,y)}^2(X, Y) = \{J_x^2 f \mid f \in C_{(x,y)}^2(X, Y)\} \quad (2.1.5)$$

ile gösterilir. Şimdi de $f(x) = y$ koşulunu sağlayan C^2 sınıfından bir dönüşüm $f: W \rightarrow Y$ olsun. U , $x \in W$ noktasının bir komşuluğu ve V , $y \in Y$ noktasının bir komşuluğu olmak üzere süreklilik argümanları sayesinde f 'nin tanım ve görüntü kümelerini U ve V kümelerine kısıtlayabiliriz. $\iota_{V,Y}: V \rightarrow Y$ ve $\iota_{U \cap f^{-1}(V), W}: U \cap f^{-1}(V) \rightarrow W$ dönüşümleri kanonik içgönderimler (inclusions) olsun. $f' = \iota_{V,Y}^{-1} \circ f \circ \iota_{U \cap f^{-1}(V), W}$ eşitliği ile tanımlı $f' \in C_{(x,y)}^2(U, V)$ dönüşümü $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 'den $J_{(x,y)}^2(U, V)$ içine bir ν dönüşümünü ifade eder. Tersine eğer $f' \in C_{(x,y)}^2(U, V)$ şeklinde bir dönüşüm ise, $f = \iota_{V,Y} \circ f' \circ \iota_{U \cap f^{-1}(V), W}^{-1}$ eşitliği ile tanımlı f dönüşümü $J_{(x,y)}^2(U, V)$ 'den $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ içine bir ι dönüşümünü ifade eder. Yani,

$$\begin{aligned} \nu(J_x^2 f) &= J_x^2 \left(\iota_{v,y}^{-1} \circ f \circ \iota_{U \cap f^{-1}(v),w} \right) \\ \iota(J_x^2 f') &= J_x^2 \left(\iota_{v,y} \circ f' \circ \iota_{U \cap f^{-1}(v),w}^{-1} \right) \end{aligned}$$

dir. ν ve ι dönüşümlerinin her ikisi de 1-1 ve üzerinedir ve $\nu = \iota^{-1}$ dir. ι ve ν dönüşümlerine $J_{(x,y)}^2(U,V)$ ve $J_{(x,y)}^2(X,Y)$ 'nin *kanonik özdeşimler* (identifications) denir.

Şimdi de $J_{(x,y)}^2(X,Y)$ üzerinde bir C^2 yapısını ifade edelim: x ve y noktalarında iki harita , sırasıyla, $(U, \varphi), \varphi = (x^i)$ ve $(V, \psi), \psi = (y^\sigma)$ olsun. Her $J_x^2 f \in J_{(x,y)}^2(X,Y)$ için

$$\begin{aligned} y_i^\sigma(J_x^2 f) &= \partial_i(y^\sigma f \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ y_{ij}^\sigma(J_x^2 f) &= \partial_i \partial_j(y^\sigma f \varphi^{-1})(\varphi(x)), \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad 1 \leq \sigma \leq m \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

yazalım. $y_i^\sigma, y_{ij}^\sigma$ 'ler $J_{(x,y)}^2(X,Y)$ üzerinde gerçel değerli fonksiyonlardır. Böylece

$$\mathcal{X}_{\varphi,\psi}^2(J_x^2 f) = (y_i^\sigma(J_x^2 f), y_{ij}^\sigma(J_x^2 f)) \tag{2.1.7}$$

eşitliği sayesinde,

$$N = m \left(\binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} \right) = m \left(\binom{n+2}{n} - 1 \right) \tag{2.1.8}$$

olmak üzere, bileşenler cinsinden bir $\mathcal{X}_{\varphi,\psi}^2 : J_{(x,y)}^2(X,Y) \rightarrow \mathbb{R}^N$ dönüşümü tanımlanmış olur.

Lemma 2.1.1. X ve Y düzgün iki manifold olsun. $x \in X$ noktasında herhangi bir $(U, \varphi), \varphi = (x^i)$ ve $y \in Y$ noktasında herhangi bir $(V, \psi), \psi = (y^\sigma)$ haritaları için $(J_{(x,y)}^2(X,Y), \mathcal{X}_{\varphi,\psi}^2), \mathcal{X}_{\varphi,\psi}^2(J_x^2 f) = (y_i^\sigma, y_{ij}^\sigma)$ bir harita olacak şekilde, $J^r(X,Y)$ üzerinde bir ve yalnız bir düzgün yapı vardır, [11]. Böylece $(J_{(x,y)}^2(X,Y), \mathcal{X}_{\varphi,\psi}^2)$ haritasına da (U, φ) ve (V, ψ) haritaları ile *ilgilidir* denir.

2.1.2.1. 2-jet'in geometrik yorumu

Kaynağı $0 \in \mathbb{R}^n$ ve hedefi $0 \in \mathbb{R}^m$ olan 2-jetlerin kümesini

$$L_{n,m}^2 = J_{(0,0)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

ile gösterelim ve $f = (f^\sigma)$ olmak üzere her $J_0^2 f \in L_{n,m}^2$ için

$$\begin{aligned} a_i^\sigma(J_x^r f) &= \partial_i f^\sigma(0) \\ a_{ij}^\sigma(J_x^r f) &= \partial_i \partial_j f^\sigma(0), \quad 1 \leq \sigma \leq m, \quad 1 \leq i \leq j \leq n \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. a_{ij}^σ gerçel değerli fonksiyonları $J_{(0,0)}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ üzerinde bir harita tanımlar (bu durumda $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$ (\mathbb{R}^n de özdeşlik dönüşümü) ve $\psi = id_{\mathbb{R}^m}$ dir). Bu haritaya **kanonik harita** adı verilir. Şimdi, \mathbb{R}^n 'den \mathbb{R}^m 'ye lineer dönüşümlerin vektör uzayı $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ve $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 'den \mathbb{R}^m 'ye bilinear simetrik dönüşümlerin vektör uzayı $L_{(s)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ olmak üzere

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L_{(s)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad (2.1.9)$$

karteziyen çarpımını gözönüne alalım. \mathbb{R}^n ve \mathbb{R}^m 'nin kanonik bazlarını kullanarak, sırasıyla, $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 'nin ve $L_{(s)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 'nin vektörleri yerine bunların matrisleri olan (A_i^σ) ve (A_{ij}^σ) 'leri, $1 \leq \sigma \leq m$, $1 \leq i \leq j \leq n$, alabiliriz. (A_{ij}^σ) matrisi alt indislerine göre simetrik olduğundan (2.1.9) ile verilen vektör uzayının boyutu (2.1.8) ile verilen N dir. $J_{(x,y)}^2(X, Y)$, $L_{n,m}^2$ ve (2.1.9)'daki vektör uzayları \mathbb{R}^N 'ye diffeomorfik olduğundan bunların hepsi birbirine diffeomorfiktir. $a_i^\sigma, a_{ij}^\sigma$, $1 \leq i \leq j \leq n$ kanonik koordinatlar kümesini $a_i^\sigma, a_{ij}^\sigma$, $1 \leq i, j \leq n$ ($i \leq j$ olması gerekmiyor) kümesine genişleterek $L_{n,m}^2$ ile (2.1.9)'daki vektör uzayı arasında bir diffeomorfizmayı elde edebiliriz. Bu şekilde elde edilen diffeomorfizmaya **kanonik özdeşim** adı verilir. Bu diffeomorfizma $L_{n,m}^2$ kümesine ait 2-jetlerin geometrik bir yorumunu verir.

X ve Y iki düzgün manifold için $n = \dim X$ ve $m = \dim Y$ olsun.

$$J_x^0(X, Y) = \{x\} \times Y, \quad J^0(X, Y) = X \times Y$$

$$J_x^2(X, Y) = \bigcup_{y \in Y} J_{(x,y)}^2(X, Y), \quad J^2(X, Y) = \bigcup_{x \in X} J_x^2(X, Y) ,$$

gösterimleri kullanalım ve $P = J_x^2 f$ için

$$\rho(J_x^2 f) = J_x^1 f,$$

$$\mu(J_x^2 f) = x,$$

$$\nu(J_x^2 f) = f(x)$$

yazalım. Bu dönüşümler

$$\rho: J^2(X, Y) \rightarrow J^1(X, Y),$$

$$\mu: J^2(X, Y) \rightarrow X$$

ve

$$\nu: J^2(X, Y) \rightarrow Y$$

şeklinde kanonik 2-jet izdüşümleri tanımlar. μ ve ν dönüşümleri bazen, sırasıyla, *kaynak izdüşüm* ve *hedef izdüşüm* olarak da adlandırılır. 2-jet izdüşümleri doğal olarak $J^2(X, Y)$ 'yi $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ ve $J_x^2(X, Y)$ kümelerine kısıtlar.

Lemma 2.1.2. X ve Y iki düzgün manifold olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

a) X üzerinde her (U, φ) haritası ve Y üzerinde her (V, ψ) haritası için

$$(W^2, \mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2) \text{ } J^2(X, Y) \text{ üzerinde bir harita olacak şekilde } J^2(X, Y) \text{ üzerinde bir}$$

ve yalnız bir düzgün yapı vardır. Bu düzgün yapıda 2-jet izdüşümleri düzgün ve üzerine alt daldırmalar (submersions) dır.

b) Her $x \in X$ için $J_x^2(X, Y)$ kümesi $J^2(X, Y)$ 'nin bir alt manifoldudur. Eğer

$$(U, \varphi) \text{ } x \text{ noktasında bir harita ve } (V, \psi) \text{ } y \text{ noktasında bir harita ise } (W^2, \mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2)$$

haritası $J_x^2(X, Y)$ için uyarlanmış (adapted) bir haritadır.

- c) Her $(x, y) \in X \times Y$ için $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ kümesi $J^2(X, Y)$ 'nin bir alt manifoldudur, [11].

2.1.3. Jetlerin Bileşkesi

X , Y ve Z gerçel, sonlu boyutlu düzgün manifoldlar olsun. $P \in J_{(x,y)}^2(X, Y)$ ve $Q \in J_{(y,z)}^2(Y, Z)$ iki 2-jet olsun. P ve Q 'nun yukarıda verilen gösterilişlerinin, birer dönüşüm olarak, bileşkesi tanımlı ise P ve Q 2 jetlerinin de *bileşkesi* tanımlıdır denir. P ve Q 'nun bileşkelerinin tanımlı olması için gerek koşul P 'nin hedefi Q 'nun kaynağına eşit, yani $u = y$ olmasıdır.

P ve Q , sırasıyla, f ve g ile gösterilsin, yani $P = J_x^2 f$ ($J_x^2 = \bigcup_{y \in Y} J_{(x,y)}^2$) ve $Q = J_y^2 g$ ($J_y^2 = \bigcup_{z \in Z} J_{(y,z)}^2$) olsun. Bu iki 2-jetin bileşkelerinin tanımlı olduğunu varsayalım. Gerekli durumda $g \circ f$ bileşke dönüşümünün tanımlı olması için f 'in tanım kümesini daraltabildiğimizi varsayalım. Böylece $J_x^2(g \circ f)$ 2-jeti de tanımlıdır. $J_x^2(g \circ f)$ 'in koordinatları ise P ve Q 'nun koordinatları ile belirlenebilir. x , $y = f(x)$ ve $z = g(y)$ noktalarında, sırasıyla, (U, φ) , $\varphi = (x^i)$, (V, ψ) , $\psi = (y^\sigma)$ ve (W, η) , $\eta = (z^A)$, sırasıyla, X , Y ve Z 'de haritalar olsun. Lemma 2.1.1'den

$$\begin{aligned} w_i^A(J_x^2(g \circ f)) &= \partial_i(z^A g f \varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &= \partial_i(z^A g \psi^{-1} \circ \psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)), \\ w_{ij}^A(J_x^2(g \circ f)) &= \partial_i \partial_j(z^A g \psi^{-1} \circ \psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)), \quad 1 \leq i \leq j \leq 2 \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

olmak üzere, $\mathcal{X}_{\varphi, \eta}^2(J_x^2(g \circ f)) = (w_i^A, w_{ij}^A)$ dönüşümü $(J_{(x,z)}^2(X, Z), \mathcal{X}_{\varphi, \eta}^2)$ haritasını tanımlar. İkinci mertebeden zincir kuralın (2.1.10) eşitliğe uygulayalım. İlgili haritaları $(J_{(x,y)}^2(X, Y), \mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2)$, $\mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2(J_x^2 f) = (y_i^\sigma, y_{ij}^\sigma)$ ve $(J_{(y,z)}^2(Y, Z), \mathcal{X}_{\psi, \eta}^2)$, $\mathcal{X}_{\psi, \eta}^2(J_y^2 g) = (z_\sigma^A, z_{\sigma\omega}^A)$ ile gösterelim. Böylece

$$\begin{aligned}
w_i^A(J_x^r(g \circ f)) &= z_\sigma^A(J_x^r g) y_i^\sigma(J_x^r f) \\
w_{ij}^A(J_x^r(g \circ f)) &= z_\sigma^A(J_x^r g) y_{ij}^\sigma(J_x^r f) + z_{\sigma\omega}^A(J_x^r g) y_j^\omega(J_x^r f) y_i^\sigma(J_x^r f)
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

ya da

$$\begin{aligned}
w_i^A &= z_\sigma^A y_i^\sigma \\
w_{ij}^A &= z_\sigma^A y_{ij}^\sigma + z_{\sigma\omega}^A y_j^\omega y_i^\sigma
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

buluruz.

Tanım 2.1.4. Eğer, $y = f(x)$ ve $z = g(y)$ olmak üzere, $P = J_x^2 f$ ve $Q = J_y^2 g$ bileşkeleri tanımlı 2-jetler ise

$$Q \circ P = J_x^2(g \circ f) \tag{2.1.13}$$

bileşkesi tanımlıdır. Ayrıca $Q \circ P$ jetine de P ve Q 'nun *bileşkesi* denir.

$J_{(x,y)}^2(X,Y) \times J_{(y,z)}^2(Y,Z)$ kümesinden $J_{(x,z)}^2(X,Z)$ kümesi içine tanımlı, $(P,Q) \rightarrow Q \circ P$ dönüşümüne *2-jetlerin bileşke işlemi* adı verilir. 2-jet'lerin bileşke işlemi birleşmelidir ve (2.1.11) ya da (2.1.12) eşitliği 2-jetlerin bileşke formülüdür.

2.1.4. Regüler jetler, tersinir jetler

id_X ve id_Y , sırasıyla, X ve Y manifoldlarının özdeşlik dönüşümleri olsun. Şu halde $J_x^2 id_X \in J_{(x,x)}^2(X,X)$ ve $J_y^2 id_Y \in J_{(y,y)}^2(Y,Y)$ dir. Herhangi bir $P \in J_{(x,y)}^2(X,Y)$, $P = J_x^2 f$ için $J_y^2 id_Y \circ P$ ve $P \circ J_x^2 id_X$ bileşkeleri tanımlıdır ve (2.1.13)'ten

$$\begin{aligned}
J_y^2 id_Y \circ P &= J_y^2 id_Y \circ J_x^r f = J_x^r(id_Y \circ f) = J_x^r f = P \\
P \circ J_x^2 id_X &= J_x^r f \circ J_x^r id_X = J_x^r(f \circ id_X) = J_x^r f = P
\end{aligned}$$

buluruz.

Tanım 2.1.5. Bir $P \in J_{(x,y)}^2(X,Y)$ 2-jeti için

$$Q \circ P = J_x^2 id_X \tag{2.1.14}$$

olacak şekilde bir $Q \in J_{(y,x)}^2(Y, X)$ 2-jeti bulunabiliyorsa P 'ye **regüler** denir.

Tanım 2.1.6. Bir $P \in J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 2-jeti için

$$Q \circ P = J_x^2 id_X, \quad P \circ Q = J_y^2 id_Y \quad (2.1.15)$$

olacak şekilde bir $Q \in J_{(y,x)}^2(Y, X)$ 2-jeti bulunabiliyorsa P 'ye **tersinir** denir.

Lemma 2.1.3.

- a) Bir $P \in J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 2-jetinin regüler olması için gerek ve yeter koşul P 'nin her gösterilişinin x noktasında bir daldırma (immersion) olmasıdır.
- b) Bir $P \in J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 2-jetinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul P 'nin her gösterilişinin x 'in bir komşuluğunda bir diffeomorfizma olmasıdır, [11].

$J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 'nin düzgün 2-jetlerinden oluşan küme $immJ_{(x,y)}^2(X, Y)$ ile gösterilirse bu küme $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ 'nin bir açık alt kümesidir. Açıktır ki, determinant fonksiyonunun sürekliliği kullanılarak (w_j^y) matrislerinin maksimal rankı n olmak üzere $(w_i^\sigma, w_{ij}^\sigma) \in \mathbb{R}^N$ noktalarından oluşan W kümesi \mathbb{R}^N 'in bir açık alt kümesidir. Şu halde x noktasında bir (U, φ) , $\varphi = (x^i)$, y noktasında bir (V, ψ) , $\psi = (y^\sigma)$ ve bunlarla ilgili olarak $J_{(x,y)}^2(X, Y)$ üzerinde $(J_{(x,y)}^2(X, Y), \mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2)$, $\mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2 = (y_i^\sigma, y_{ij}^\sigma)$ haritaları kullanılarak, $\mathcal{X}_{\varphi, \psi}^2$ sürekli dönüşümleri sayesinde $immJ_{(x,y)}^2(X, Y)$ kümesi W 'nın ters görüntüsü olarak elde edilir. $immJ_{(x,y)}^2(X, Y) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul $\dim X = n \leq \dim Y = m$ dir. Eğer $n = m$ ise $immJ_{(x,y)}^2(X, Y)$ kümesi tersinir 2-jetlerden oluşur. Tersine $immJ_{(x,y)}^2(X, Y)$ kümesi bir tersinir 2-jet içerirse x ve y noktaları aynı boyutlu komşuluklara sahiptir.

2.1.5 Jet manifoldlar. Diferansiyel gruplar

n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$L_n^2 = \text{imm}J_{(0,0)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad (2.1.16)$$

olsun. Bu takdirde L_n^2 , $J_{(0,0)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ jet manifoldunun tersinir 2-jetlerinin kümesidir. $J_{(0,0)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ üstünde a_i^k, a_{ij}^k , $1 \leq i \leq j \leq n$ kanonik koordinatlarını L_n^2 'ye kısıtlayarak L_n^2 üstünde

$$\begin{aligned} a_i^k(J_x^2\alpha) &= \partial_i \alpha^k(0) \\ a_{ij}^k(J_x^2\alpha) &= \partial_i \partial_j \alpha^k(0) \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

kanonik koordinatları elde ederiz, burada $\alpha = (\alpha^k)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i \leq j \leq n$ dir. Bu koordinatlarda $L_n^2 = \{J_0^2\alpha \in J_{(0,0)}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid \det a_i^k(J_0^2\alpha) \neq 0\}$ dir.

Jetlerin bileşkesi, L_n^2 üstünde

$$\begin{aligned} L_n^2 \times L_n^2 &\rightarrow L_n^2 \\ (A, B) &\rightarrow A \circ B \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

şeklinde bir işlem tanımlar. Bu işlem birleşmelidir, $J_0^2 \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ L_n^2 'nin birim elemanıdır ve her $A \in L_n^2$, $A = J_0^2\alpha$ 2-jetinin $A^{-1} = J_0^2\alpha^{-1}$ şeklinde tek bir tersi vardır. Böylece (2.1.18) ile verilen jetlerin bileşkesi işlemi L_n^2 üstünde bir grup yapısı tanımlar, bu gruba diferansiyel grup adı verilir ve (2.1.8)'den

$$\dim L_n^2 = n \left(\binom{n+2}{n} - 1 \right)$$

bulunur.

2.1.5. L_n^2 'de grup işlemi

$A, B \in L_n^2$ iki 2-jet olsun. $U, V, W \subset \mathbb{R}^n$ kümeleri $0 \in \mathbb{R}^n$ orijinin üç komşuluğu ve $A = J_0^2\alpha$, $B = J_0^2\beta$ olacak şekilde $\alpha: U \rightarrow V$, $\beta: V \rightarrow W$ iki diffeomorfizma olsun. \mathbb{R}^n üstünde (aynı zamanda U , V ve W üstünde de) kanonik koordinatları (x^k) ile

gösterelim. Bileşenler cinsinden $\alpha = (x^k \alpha)$, $\beta = (x^k \beta)$ yazalım ve U 'dan W içine $\gamma = \beta \circ \alpha$, $\gamma = (x^k \gamma)$ diffeomorfizmasını düşünelim. Şu halde A ve B 'nin L_n^2 'deki çarpımı $C = J_0^2 \gamma$ 2-jeti dir. C 'nin kanonik koordinatlarını elde etmek için $0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında γ 'nın bileşenlerinin 2. mertebeye kadar kısmi türevlerini hesaplamalıyız. Bu diffeomorfizmanın bileşenlerini bir $x \in U$ noktasında türetirsek,

$$\begin{aligned} \partial_i (x^k \gamma)(x) &= \partial_i (x^k \beta \circ \alpha)(x) = \partial_i (x^k \beta)(\alpha(x)) \partial_i (x^l \alpha)(x) \\ \partial_j \partial_i (x^k \gamma)(x) &= \partial_j \partial_i (x^k \beta \circ \alpha)(x) \\ &= \partial_m \partial_l (x^k \beta)(\alpha(x)) \partial_j (x^m \alpha)(x) \partial_l (x^l \alpha)(x) \\ &= \partial_l (x^k \beta)(\alpha(x)) \partial_j \partial_i (x^l \alpha)(x) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

bulunur. $x = \alpha(0) = 0$ eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \partial_i (x^k \gamma)(0) &= \partial_i (x^k \beta)(\alpha(0)) \partial_i (x^l \alpha)(0) \\ \partial_j \partial_i (x^k \gamma)(0) &= \partial_m \partial_l (x^k \beta)(\alpha(0)) \partial_j (x^m \alpha)(0) \partial_l (x^l \alpha)(0) \\ &\quad + \partial_l (x^k \beta)(\alpha(0)) \partial_j \partial_i (x^l \alpha)(0) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

ya da (2.1.17)'den eşdeğer olarak

$$\begin{aligned} a_i^k (J_0^2 \gamma) &= a_l^k (J_0^2 \beta) a_i^l (J_0^2 \alpha) \\ a_{ji}^k (J_0^2 \gamma) &= a_{ml}^k (J_0^2 \beta) a_j^m (J_0^2 \alpha) a_i^l (J_0^2 \alpha) + a_l^k (J_0^2 \beta) a_{ji}^l (J_0^2 \alpha) \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

bulunur. Bu formülleri aşağıdaki gibi kısaltabiliriz:

$$\begin{aligned} c_i^k &= b_l^k a_i^l \\ c_{ji}^k &= b_{ml}^k a_j^m a_i^l + b_l^k a_{ji}^l \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Bu formüller L_n^2 diferansiyel grubunun grup işleminin kanonik koordinatlar cinsinden denklemleridir.

2.2. LİF DEMETLERİ (FIBER BUNDLES)

Bu bölümde Otsuki'nin konneksiyon tanımında geçen kavramların özelliklerinin incelenmesi için lif demetleri, vektör demetleri (vector bundle) ile bunların üstünde tanımlı yerel trivializasyonlar (lokal trivialisations), kesitler (cross-sections) ve konneksiyonlar kaynak [12]'den ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha sonra çatı demeti ve çatı demeti üstünde diferansiyel 1-formlar verilmiştir, [13].

Tanım 2.2.1. G bir topolojik uzay ve aynı zamanda bir grup olsun. G 'de tanımlı

$$G \times G \rightarrow G;$$

$$(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2 \quad (2.2.1)$$

ve

$$G \rightarrow G;$$

$$g \rightarrow g^{-1} \quad (2.2.2)$$

grup işlemleri sürekli ise G 'ye **topolojik grup** adı verilir. Burada $G \times G$, çarpım topolojisi sayesinde bir topolojik uzaydır.

Tanım 2.2.2. G bir topolojik grup ve X bir topolojik uzay olmak üzere $(x, g) \rightarrow xg$ ile tanımlanan $X \times G \rightarrow X$ dönüşümü

$$\text{i) } \forall x \in X \text{ ve } \forall g_1, g_2 \in G \text{ için } x(g_1 g_2) = (xg_1) g_2 \quad (2.2.3)$$

$$\text{ii) } \forall x \in X \text{ ve } 1 \in G \text{ (} G \text{'nin birimi) için } x1 = x \quad (2.2.4)$$

koşullarını sağlıyor ise G 'ye X üstünde bir **sağ etkime** ve X 'e de bir **sağ G -uzay** denir.

Örnek olarak skaler çarpım sayesinde \mathbb{R}^n bir sağ $(\mathbb{R} - \{0\})$ -uzay ve matrislerin çarpımı sayesinde ise \mathbb{R}^n bir sağ $GL(n, \mathbb{R})$ -uzaydır.

Tanım 2.2.3. Bir X sağ G -uzayında

$$\forall x \in X \text{ için } \exists g_1, g_2 \in G \ni xg_1 = xg_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \quad (2.2.5)$$

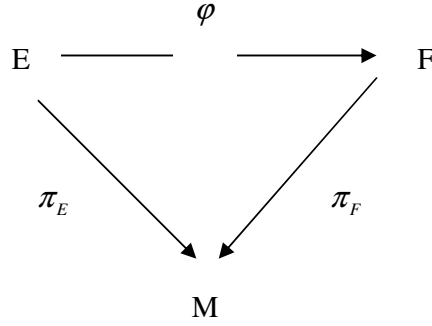
ya da buna denk olarak

ile tanımlanan $g_{\alpha\beta}:U_{\alpha\beta} \rightarrow G$ sürekli fonksiyonlarına **geçiş fonksiyonları** denir, G 'ye de (E, M, π, F) lif demetinin **yapı grubu** adı verilir. Tanımdan dolayı $g_{\alpha\beta}$ geçiş fonksiyonları

$$\begin{aligned} i) \quad & g_{\alpha\alpha}(x) = 1 \\ ii) \quad & g_{\alpha\beta}(x) = (g_{\beta\alpha}(x))^{-1} \\ iii) \quad & g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\gamma}(x) \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

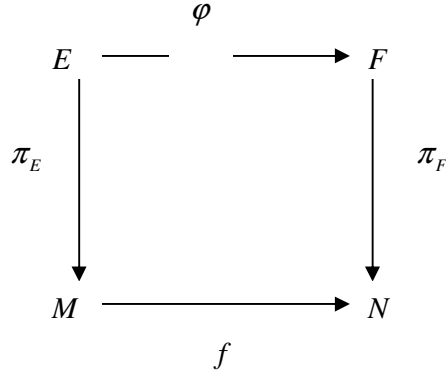
özelliklerini sağlar.

Tanım 2.2.7. $\pi_E: E \rightarrow M$ ve $\pi_F: F \rightarrow M$, M üzerinde iki lif demeti olsun. $\pi_F \circ \varphi = \pi_E$ koşulunu sağlayan bir $\varphi: E \rightarrow F$ sürekli dönüşümüne M üstünde E 'den F 'ye bir **demet dönüşümü** denir, şekil 2.2.2.



Şekil 2.2.2: Demet dönüşümü

Tanım 2.2.8. $\pi_E: E \rightarrow M$ ve $\pi_F: F \rightarrow N$, sırasıyla, M ve N üzerinde iki lif demeti olsun. $f: M \rightarrow N$ olmak üzere, $\pi_F \circ \varphi = f \circ \pi_E$ koşulunu sağlayan bir $\varphi: E \rightarrow F$ sürekli dönüşümüne **f fonksiyonunu örten bir demet dönüşümü** denir, şekil 2.2.3.



Şekil 2.2.3: f fonksiyonunu örten demet dönüşümü

Bu iki tanımı kullanarak, M üstünde bir demet dönüşümü M 'deki özdeşlik dönüşümünü örten bir demet dönüşümü olduğu görülür.

2.2.1 Vektör Demetleri (Vector Bundles)

Tanım 2.2.9. M ve F iki düzgün manifold, V r -boyutlu bir vektör uzayı ve $p: F \rightarrow M$ izdüşüm olmak üzere:

- her $v \in R^k$ için $p(\varphi(x, v)) = x$ ve
- $\varphi_x: R^k \rightarrow p^{-1}(\{x\})$
 $\varphi_x: v \rightarrow \varphi(x, v)$

dönüşümü, iki vektör uzayı arasında bir izomorfizma olacak şekilde her $x \in M$ için bir U açık komşuluğu, bir doğal k sayısı ve bir $\varphi: U \times R^k \rightarrow p^{-1}(U)$ difeomorfizması bulunabiliyorsa, F 'ye **M üstünde r boyutlu bir V vektör demeti** denir.

(U, Φ) çifti bir demetin lokal trivializasyonudur, demetin baz uzayı M dir, tümel uzayı F , lifi (fiber) F_x , izdüşümü p ve demetin rankı r dir. Bir demetin trivializasyonlarını $U_\alpha, \Phi_\alpha, \dots$. Greek indislerle göstereceğiz, $U_{\alpha\beta}$ sembolü ise $U_\alpha \cap U_\beta$ 'yı gösterir.

Örnek 2.2.1. Vektör demetlerinin bir örneği tanjant demetleridir. Bir M manifoldu üzerinde v vektörü $x \in M$ noktasında bir teğet vektör olmak üzere (x, v) çiftlerinden oluşan $T(M)$ uzayına M 'nin tanjant demeti denir.

Tanım 2.1.10. $p: E \rightarrow M$ bir demet olsun. $p \circ s = id|_M$ olacak şekilde bir $s: M \rightarrow E$ düzgün dönüşümüne vektör demetin bir **kesitidir** (*section*) denir. Demetin tüm kesitlerin kümesini $\Psi(M, E)$ veya $\Psi(E)$ ile gösteririz. (U_α, Φ_α) bir lokal trivializasyon olmak üzere s kesitini, $\Phi_\alpha(s(x)) = (x, s_\alpha(x))$ ile tanımlanan $s_\alpha: U_\alpha \rightarrow V$ dönüşümü ile gösterebiliriz. s_α ve s_β arasındaki ilişki ise $(x, s_\beta(x)) = (x, g_{\alpha\beta} s_\alpha(x))$ şeklinde verilir.

Örnek 2.2.2. Bir M manifold üzerinde

$$\begin{aligned} V &: M \rightarrow T(M) \\ V &: x \rightarrow V_x \in T_x(M) \end{aligned}$$

ile tanımlanan bir V vektör alanı M 'nin tanjant demetinin bir kesitidir.

2.2.2.1. *Vektör demeti üzerine konneksiyon*

Bir $p: E \rightarrow M$ vektör demetinde, f fonksiyonunun df dış diferansiyeline karşılık gelen, kesitlerin diferansiyelini tanımlayan bir operatöre konneksiyon denir.

Tanım 2.2.11. $T(M)$, M 'nin tanjant uzayı, $T^*(M)$ dual uzayı, $p: E \rightarrow M$ bir vektör demeti, f M 'de düzgün bir fonksiyon ve $s \in \Psi(E)$ olmak üzere ,

$$\nabla(sf) = (\nabla s)f + s \otimes df \quad (2.2.8)$$

koşulunu sağlayan bir

$$\nabla: \Psi(E) \rightarrow \psi(E \otimes T^*(M)) \quad (2.2.9)$$

bilineer dönüşümüne **konneksiyon** denir.

Eğer X, M 'de bir vektör alanı ise (yani $T(M)$ nin bir kesiti)

$$\nabla_X s = (\nabla s)(X) \quad (2.2.10)$$

denklemleri ile

$$\nabla_X: \Psi(E) \rightarrow \psi(E) \quad (2.2.11)$$

teğetler boyunca kovaryant türevi tanımlayabiliriz. Kovaryant türevin tanımından aşağıdaki denklemleri verebiliriz:

$$\begin{aligned}\nabla_X (s_1 + s_2) &= \nabla_X (s_1) + \nabla_X (s_2) \\ \nabla_{X_1 + X_2} s &= \nabla_{X_1} s + \nabla_{X_2} s \\ \nabla_X (fs) &= f \nabla_X s + X(f) s \\ \nabla_{fX} (s) &= f \nabla_X s\end{aligned}$$

Tersine, yukarıdaki denklemleri sağlayan herhangi bir operatör, E 'de bir konneksiyon belirler ve bu anlamdaki konneksiyona E 'de kovaryant türev denir.

Tanım 2.2.12. $p: E \rightarrow M$ bir vektör demeti ve (U, u^i) , $1 \leq i \leq m$ M 'de bir koordinat komşuluğu (harita) olsun. M üzerinde lineer bağımsız olacak şekilde E 'nin q tane s_α , $1 \leq \alpha \leq q$ kesitlerinin kümesine E 'nin M üzerindeki bir *lokal çatı alanı* denir.

2.2.2 Çatı demetleri ve çatı demetleri üzerinde 1-formlar

M , n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun. e_1, e_2, \dots, e_n vektörleri $x \in M$ noktasında lineer bağımsız vektörler olmak üzere $(x; e_1, e_2, \dots, e_n)$ kombinasyonu bir çatı oluşturur. M 'deki bütün çatıların kümesini $\mathfrak{B}(M)$ ile gösterelim. $\mathfrak{B}(M)$ 'ye bir düzgün manifold yapısı kazandırmak için $\mathfrak{B}(M)$ üstünde bir diferansiyellenebilir yapı tanımlayacağız. Böylece $\pi(x; e_1, \dots, e_n) = x$ izdüşümü $\mathfrak{B}(M)$ 'den M 'ye bir düzgün dönüşüm olmak üzere $(\mathfrak{B}(M), M, \pi)$ kümesi bir demet olur. Bu demete *çatı demeti* denir.

(U, u^λ) , M 'de herhangi bir koordinat komşuluğu olsun. O takdirde $(\partial u_1, \partial u_2, \dots, \partial u_n)$, U 'da bir çatı alanıdır ve U 'da herhangi bir $(x; e_1, e_2, \dots, e_n)$ çatısı, $(a_\lambda^i)_{n \times n}$ terslenebilir matris olmak üzere

$$e_\lambda = a_\lambda^i \partial u_i, \quad 1 \leq \lambda \leq n \quad (2.2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece her $x \in M$ ve $a_\lambda^i \in L_n^1 = GL(n, R)$ için

$$\varphi_U(x, a_\lambda^i) = (x; e_1, \dots, e_n) \quad (2.2.13)$$

olacak şekilde bir $\varphi_U : U \times L_n^1 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ dönüşümü tanımlayabiliriz. Bu dönüşümün 1-1 olduğu açıktır. M 'nin herhangi bir $\{U, W, Z, \dots\}$ koordinat komşuluğu örtüsü için $\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z, \dots$ 'ler (2.2.13) ile tanımlanan dönüşümler olsun. $U \times L_n^1$ karteziyen çarpım kümesinin bütün açık alt kümelerinin φ_U altındaki görüntüleri $\mathfrak{B}(M)$ 'de bir topolojik baz oluşturur. $\mathfrak{B}(M)$ 'deki bu topolojik yapıya göre

$$\varphi_U : U \times L_n^1 \rightarrow \pi^{-1}(U) \quad (2.2.14)$$

dönüşümü bir homeomorfizmadır. Bu dönüşüm sayesinde $\pi^{-1}(U)$ kümesi (u^λ, a_λ^i) koordinat sistemi ile birlikte $\mathfrak{B}(M)$ de bir koordinat komşuluğu olur. $U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere $U \cap V$ 'de M 'nin

$$v^\lambda = v^\lambda(u^1, \dots, u^n), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.2.15)$$

şeklinde bir lokal koordinat değişimi için bazlar arasındaki ilişki

$$\frac{\partial}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial v^\mu}{\partial u^\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial v^\mu} \quad (2.2.16)$$

şeklinindedir. $(x; e_1, e_2, \dots, e_n)$, $U \cap V$ 'de bir çatı ise (u^λ, a_λ^i) ve $(v^\lambda, \bar{a}_\lambda^i)$ koordinatları

$$\varphi_U(u^\lambda, a_\lambda^i) = \varphi_W(v^\lambda, \bar{a}_\lambda^i) \quad (2.2.17)$$

eşitliğini sağlar, yani

$$a_\lambda^i \partial u_i = \bar{a}_\lambda^i \partial v_i$$

ya da

$$\bar{a}_\lambda^i = a_\lambda^j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \quad (2.2.18)$$

yazabiliriz. Böylece (2.2.15) ve (2.2.18) denklemleri $\mathfrak{B}(M)$ için koordinat değişim formüllerini oluştururlar. v^λ ve a_λ^i 'lar u^λ ve \bar{a}_λ^i 'ların düzgün fonksiyonlarıdır, dolayısıyla $\pi^{-1}(U)$ ve $\pi^{-1}(V)$ koordinat komşulukları C^∞ -uyumludurlar. Böylece $\mathfrak{B}(M)$, $(n+n^2)$ -boyutlu düzgün bir manifold yapısını kazanır, $\pi(x; e_1, \dots, e_n) = x$ izdüşümü ise üzerinedir dolayısıyla $\mathfrak{B}(M)$ bir demettir.

M 'de $(U; u^\lambda)$ ve $(V; v^\lambda)$, $\mathfrak{B}(M)$ 'de ise bunlara karşılık gelen (u^λ, a_λ^i) ve $(v^\lambda, \bar{a}_\lambda^i)$ koordinat sistemleri verilsin. (b_i^λ) ve (\bar{b}_i^λ) , sırasıyla, (a_λ^i) ve (\bar{a}_λ^i) matrislerinin ters matrisleri olsun, yani

$$\begin{aligned} a_\lambda^i b_i^\mu &= b_i^\mu a_\lambda^i = \delta_\lambda^\mu \\ \bar{a}_\lambda^i \bar{b}_i^\mu &= \bar{b}_i^\mu \bar{a}_\lambda^i = \delta_\lambda^\mu. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

$U \cap V \neq \emptyset$ için $U \cap V$ 'de

$$dv^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^j} du^j \quad (2.2.20)$$

ve (2.2.18)'den

$$b_i^\lambda = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \bar{b}_j^\lambda \quad (2.2.21)$$

yazabiliriz. (2.2.20) ve (2.2.21) den

$$b_i^\lambda du^i = \bar{b}_i^\lambda dv^i \quad (2.2.22)$$

buluruz ki bu

$$\theta^\lambda = b_j^\lambda du^j \quad (2.2.23)$$

diferansiyel 1-formların $\mathfrak{B}(M)$ 'de lokal koordinatlardan bağımsız olduğunu gösterir.

Dolayısıyla θ^i 'ler, $\mathfrak{B}(M)$ 'de diferansiyel 1-formlardır.

2.2.3. Demetlerin direkt toplamı ve tensör çarpımı. Dual demetler.

E ve F , M üzerinde iki demet olsun. $x \in M$ üstündeki lifi, E ve F 'nin $x \in M$ üstündeki liflerinin tensör çarpımı ve direkt toplamı olan demetler, sırasıyla, $E \otimes F$ ve $E \oplus F$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.13. $p: F \rightarrow M$ ile verilen bir vektör demeti F olsun. Lifleri F demetinin liflerinin dual uzayları olan bir $p^*: F^* \rightarrow M$ demetine F nin *dual demeti* denir.

Tanım 2.2.14. $p: F \rightarrow M$ bir vektör demeti ve F' kümesi, F tümel uzayının bir altkümesi olsun. Her $x \in M$ noktası üstündeki lifi $(p|_{F'})^{-1}(x) = F'_x$, $F_x = p^{-1}(x)$ 'in bir altuzayı ise ve $p|_{F'}: F' \rightarrow M$ bir vektör demeti ise F' 'ye F 'nin bir *alt demetidir* denir.

2.3. İKİNCİ MERTEBEDEN TANJANT VE KOTANJANT DEMETLER

Bu bölümde genel konneksiyon tanımında geçen ikinci mertebeden tanjant ve kotanjant demetleri inceleyeceğiz. Bu demetler Otsuki [1], [6] ve [7]'de detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

\mathcal{L}_n^2 , elemanları $(a_i^j, a_{ih}^j)(a_i^j(\alpha) \neq 0)$ gerçel sayılarının kümesi olan bir grup olsun. Bu grubun çarpma işlemi aşağıdaki formüllerle verilsin:

$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_n^2$ için $\alpha\beta$ 'nin bileşenleri

$$\begin{aligned} a_i^j(\alpha\beta) &= a_k^j(\alpha) a_i^k(\beta) \\ a_{ih}^j(\alpha\beta) &= a_k^j(\alpha) a_{ih}^k(\beta) + a_{ki}^j(\alpha) a_i^k(\beta) a_h^l(\beta) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

şeklindedir. $a_{ih}^j = a_{hi}^j$ için, bölüm 2.1'de tanımladığımız L_n^2 grubunu elde ederiz, yani $L_n^2 \subset \mathcal{L}_n^2$ dir. \mathcal{L}_n^2 grubunun bir gösterimi ise

$$\sigma: (a_i^j, a_{ih}^j) \rightarrow (a_i^j) \quad (2.3.2)$$

ile tanımlanan bir

$$\sigma: \mathcal{L}_n^2 \rightarrow L_n^1 = GL(n, R)$$

homomorfizması olsun.

Şimdi M , n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve (U, u^i) , $x \in M$ noktasını örten bir koordinat komşuluğu olsun. x noktasında $T_x M$ tanjant uzayının kanonik bazı $\frac{\partial}{\partial u^i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ dir. $T_x^*(M)$ kotalanjant uzayının bazı ise $du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \delta_j^i$ olmak üzere du^i , $(i = 1, \dots, n)$ 'lerden oluşur. Böylece bunların diğer bir (V, v^i) koordinat sistemi ile ilişkisi şu şekilde verilir

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^j} \quad \text{ve} \quad du^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j . \quad (2.3.3)$$

$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ ve $T^*(M) = \bigcup_{x \in M} T_x^*(M)$ uzayları, sırasıyla, M üstünde bir tanjant ve kotalanjant demet oluştururlar.

Şimdi de M' 'de herhangi bir (U, u^i) koordinat komşuluğuna, ∂u_i ve $\partial^2 u_{ih}$ ile gösterilen $n + n^2$ tane vektör alanını ilişkilendirelim. ∂v_i ve $\partial^2 v_{ih}$ diğer bir (V, v^i) koordinat komşuluğuna karşı gelen vektör alanları olsun ve $U \cap V \neq \emptyset$ komşuluğunda bu vektör alanlarının aşağıdaki gibi bağlantılı olduğunu varsayalım:

$$\partial u_i = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \partial v_j \quad (2.3.4)$$

$$\partial^2 u_{ih} = \frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h \partial u^i} \partial v_j + \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^h} \partial^2 v_{jk} . \quad (2.3.5)$$

Böylece M' 'nin her x noktasında koordinat komşuluğundan bağımsız olan ∂u_i ve $\partial^2 u_{ih}$ vektörlerinden doğurulan, $\mathfrak{S}_x^2(M)$ ile göstereceğimiz, $n + n^2$ boyutlu bir vektör uzayı elde edilir.

$\mathfrak{S}^2(M) = \bigcup_{x \in M} \mathfrak{S}_x^2(M)$ uzayını, yapı grubu \mathcal{L}_n^2 olan $\{\mathfrak{S}^2(M), M, \tau_2\}$ demetinin tümel uzayı olarak düşünebiliriz, $\tau_2 : \mathfrak{S}^2(M) \rightarrow M$ ise demetin doğal izdüşümüdür. Birbirini örten (U_α, Φ_α) ve (U_β, Φ_β) haritaları için (2.3.4) ve (2.3.5)'den bu demetin $g_{\beta\alpha} : U \cap V \rightarrow \mathcal{L}_n^2$ koordinat değişim fonksiyonları

$$a_i^j(g_{\beta\alpha}) = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}, \quad a_{in}^j(g_{\beta\alpha}) = \frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h \partial u^i} \quad (2.3.6)$$

ile verilir. Bu şekilde elde ettiğimiz vektör demeti yine aynı $\mathfrak{S}^2(M)$ notasyonu ile gösterilir ve ***M* nin ikinci mertebeden tanjant demeti** adını alır. Diğer yandan

$$\iota \frac{\partial}{\partial u^i} = \partial u_i$$

ile verilen $\iota : T(M) \rightarrow \mathfrak{S}^2(M)$ dönüşümü bir kapsama (inclusion) dönüşümü olduğundan ∂u_i vektörünü $\frac{\partial}{\partial u^i}$ tanjant vektör ile özdeşleştirebiliriz. Dolayısıyla x noktasında $T_x(M)$ uzayını $\mathfrak{S}_x^2(M)$ 'nin bir altuzayı olarak düşünebiliriz.

$T_x^*(M)$, M 'nin herhangi bir (U, u^i) koordinat komşuluğunda $T_x(M)$ 'nin dual uzayı olsun. Bazı, $du^i \otimes du^h$ olan n^2 -boyutlu $T_x^*(M) \otimes T_x^*(M)$ ve d^2u^i diferansiyellerinden doğurulan n -boyutlu uzayları gözönüne alalım. Daha sonra bu iki uzayın direk toplamını alırsak, bazı $\{d^2u^i, du^i \otimes du^h\}$ olan $n+n^2$ -boyutlu bir vektör uzayı elde ederiz. Bu şekilde elde ettiğimiz vektör uzayını her $x \in U$ noktasına ilişkilendirelim. $U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere $x \in U \cap V$ noktasında, (V, v^i) koordinat sisteminden (U, u^i) koordinat sistemine geçiş

$$d^2v^j = d(dv^j) = d\left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i\right) = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} d^2u^i + \frac{\partial^2 v^j}{\partial u^h \partial u^i} du^i \otimes du^h \quad (2.3.7)$$

$$dv^j \otimes dv^k = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^h} du^i \otimes du^h. \quad (2.3.8)$$

denklemleri ile verilsin. Bu denklemleri (2.3.4) ve (2.3.5) ile karşılaştırsak bu şekilde elde ettiğimiz uzayın, $\mathfrak{S}_x^2(M)$ uzayının dual uzayı olduğunu görebiliriz. Bu uzayı da $\mathfrak{D}_x^2(M)$ ile gösterelim. $\{\mathfrak{D}_x^2(M), M, \eta_2\}$ 'nin $\{d^2u^i, du^i \otimes du^h\}$ bazı, $\mathfrak{S}_x^2(M)$ 'nin $\{\partial u_i, \partial^2 u_{ih}\}$ bazının dualidir ve

$$T_x^*(M) \otimes T_x^*(M) \subset \mathfrak{D}_x^2(M)$$

dir. $\mathfrak{D}^2(M) = \bigcup_{x \in M} \mathfrak{D}_x^2(M)$ birleşimi ise $\mathfrak{D}^2(M)$ vektör demetinin M üzerindeki tümel uzayı olarak düşünülebilir ve buna ***M* nin 2. mertebeden kotanjant demeti** denir.

Şimdi ise, $T(M)$ 'nin bir $V^i \partial u_i$ ve $T^*(M)$ 'nin bir $V_i du^i$ kesiti için

$$\begin{aligned} d(V^i \partial u_i) &= \partial^2 u_{ih} \otimes V^i du^h + \partial u_i \otimes dV^i \\ d(V_i du^i) &= V_i d^2 u^i + du^i \otimes dV_i \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

şeklinde tanımlanan

$$d : \begin{cases} \Psi(T(M)) \rightarrow \Psi(\mathfrak{S}^2(M) \otimes T^*(M)) \\ \Psi(T^*(M)) \rightarrow \Psi(\mathfrak{D}^2(M)) \end{cases} \quad (2.3.10)$$

doğal diferansiyel operatörünü gözönüne alalım. (2.3.4), (2.3.5), (2.3.7) ve (2.3.8) denklemlerinden bu tanımın lokal koordinatlardan bağımsız olduğunu görürüz.

Genel olarak, M üstünde bir vektör demeti için d operatörünü tanımlayalım.

$$T(M)^{\otimes(p,q)} = \underbrace{T(M) \otimes \dots \otimes T(M)}_{p\text{-kez}} \otimes \underbrace{T^*(M) \otimes \dots \otimes T^*(M)}_{q\text{-kez}},$$

M üstünde bir vektör demeti olsun. İlk önce, $T^*(M) \otimes T^*(M) \otimes T^*(M) \otimes T^*(M)$ çarpım demetini gözönüne alalım. Bu demetin 2. ve 4. demetinin $\mathfrak{D}_x^2(M)$ 'ye genişlemesinden elde edilen vektör demetini $T^*(M) \otimes \mathfrak{D}_x^2(M) \otimes T^*(M)$ ile gösterelim. Benzer şekilde $T^*(M)^{\otimes(q+1)}$ demetinin t -inci ve $(q+1)$ -inci bileşenlerinin $\mathfrak{D}^2(M)$ 'ye

genişlemesinden elde edilen vektör demetini de $T^*(M)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2(M) \dot{\otimes} T^*(M)^{\otimes(q-t)}$ ile gösterelim. Bu takdirde:

$$d : \Psi \left(T(M)^{\otimes(p,q)} \right) \rightarrow \Psi \left(\begin{array}{l} \sum_{s=1}^p T(M)^{\otimes(s-1)} \otimes \mathfrak{S}^2(M) \otimes T(M)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*(M)^{\otimes(q+1)} \\ + \sum_{t=1}^q T(M)^{\otimes p} \otimes T^*(M)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2(M) \dot{\otimes} T^*(M)^{\otimes(q-t)} \end{array} \right) \quad (2.3.11)$$

diferansiyel operatörü,

$$\begin{aligned} d \left(\partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right) = \\ \sum_{s=1}^p \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \otimes \partial^2 u_{i_s} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\ + \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_{r-1}} \otimes d^2 u^{j_r} \dot{\otimes} \left(du^{j_{r+1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

olmak üzere, $V = V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$ için

$$\begin{aligned} dV = V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d \left(\partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right) \\ + \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes dV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.3.11) denklemindeki sağ taraftaki toplamı şu şekilde açıklarız: toplamın her iki bileşeni de $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ terimini içerir, dolayısıyla $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ demetininin $(p+q)$ -tane değişik şekilde genişletilmiş demetlerinin bir tür direkt toplamı şeklinde düşünebiliriz. (2.3.7) ve (2.3.8) den

$$\begin{aligned} d \left(\partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right), \\ \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes du^{j_{q+1}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

vektörlerinin (2.3.11)'in sağ yandaki vektör demetinin $x \in M$ üstündeki lifinin $n^{p+q} + n^{p+q+1} = n^{p+q}(n+1)$ boyutlu bir altuzayını oluşturduğu kolayca görülür.

$x \in M$ üstündeki lifi, bu $n^{p+q}(n+1)$ -boyutlu vektör uzayı olan demetini $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ ile göstereceğiz. $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ demeti $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ 'nin bir alt demetidir. O takdirde (2.3.11) ile verilen diferansiyel operatör

$$d : \Psi\left(T(M)^{\otimes(p,q)}\right) \rightarrow \Psi\left(T(M)^{\otimes(p,q+1)}\right) \quad (2.3.15)$$

şeklini alır.

2.4. GENEL KONNEKSİYON VE KOVARYANT TÜREV

Şimdi, bölüm 2.3'de tanımladığımız \mathcal{L}_n^2 grubuna, $|a_i^j| = 0$ elemanlarını da katarak \mathcal{M}_n^2 yarı grubunu göz önüne alalım. \mathcal{M}_n^2 'nin gösterimi ise

$$\sigma : (a_i^j, a_{ih}^j) \rightarrow (a_i^j)$$

ile tanımlanan bir

$$\sigma : \mathcal{M}_n^2 \rightarrow M_n^1 = (n \times n - \text{matrislerin cebri})$$

homomorfizması olsun.

$T(M)$, M 'nin tanjant demeti $\mathcal{D}^2(M)$ ise M 'nin ikinci mertebeden kotanjant demeti olmak üzere $T(M) \otimes \mathcal{D}^2(M)$ vektör demetini göz önüne alalım. (U, u^i) koordinat sisteminde $(P_k^h, \Gamma_{km}^h) \in \mathcal{M}_n^2$ olmak üzere, bu demetin Γ kesiti şu şekilde verilsin;

$$\Gamma = \partial u_i \otimes (P_j^i d^2 u^k + \Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k). \quad (2.4.1)$$

Dolayısıyla

$$a_j^i \cdot f_U = P_j^i, \quad a_{jk}^i \cdot f_U = \Gamma_{jk}^i$$

olacak şekilde bir $f_U : U \rightarrow \mathcal{M}_n^2$ dönüşümü bulunabilir.

Bu takdirde (V, v^i) koordinatlarında (2.3.4), (2.3.7) ve (2.3.8) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \partial u_h \otimes (P_k^h d^2 u^k + \Gamma_{km}^h du^k \otimes du^m) \\
&= \frac{\partial v^j}{\partial u^h} \partial v_i \otimes \left\{ P_k^h \left(\frac{\partial u^k}{\partial v^j} d^2 v^j + \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^h \partial v^j} dv^j \otimes dv^h \right) + \Gamma_{km}^h \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{\partial u^m}{\partial v^h} dv^j \otimes dv^h \right\} \\
&= \partial v_i \otimes \left\{ \frac{\partial v^j}{\partial u^h} P_k^h \frac{\partial u^k}{\partial v^j} d^2 v^j + \frac{\partial v^j}{\partial u^h} \left(P_k^h \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^h \partial v^j} + \Gamma_{km}^h \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{\partial u^m}{\partial v^h} \right) dv^j \otimes dv^h \right\} \\
&= \partial v_i \otimes \left(\overline{P}_j^i d^2 v^j + \overline{\Gamma}_{jh}^i dv^j \otimes dv^h \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Yani

$$\overline{P}_j^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^h} P_k^h \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \quad \text{ve} \quad (2.4.2)$$

$$\overline{\Gamma}_{jh}^i = \frac{\partial v^i}{\partial u^h} \left(P_k^h \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^h \partial v^j} + \Gamma_{km}^h \frac{\partial u^k}{\partial v^j} \frac{\partial u^m}{\partial v^h} \right) \quad (2.4.3)$$

dir. Buradan ise P_j^i 'lerin (1,1) tipindeki bir tensörün bileşenleri olduğu görülür. (2.3.1)

ve (2.3.6)'yı kullanarak (2.4.2) denkleminde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v^k}{\partial u^h} P_i^h &= \overline{P}_j^k \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \\
a_h^k(g_{vU}) a_i^h(f_U) &= a_j^k(f_V) a_i^j(g_{vU}) \\
a_i^k(g_{vU}(f_U)) &= a_i^k(f_V g_{vU}) \\
a_i^k(\sigma(g_{vU}(f_U))) &= a_i^k(f_V g_{vU})
\end{aligned}$$

buluruz. Benzer şekilde (2.3.3)'den de $a_{ih}^m(\sigma(g_{vU})f_U) = a_{ih}^m(f_U \cdot g_{vU})$ buluruz.

Dolayısıyla Γ konneksiyonu için (U, u^i) , (V, v^i) , $U \cap V \neq \emptyset$ komşuluğunda

$$(\sigma \cdot g_{vU}) f_U = f_V g_{vU} \quad (2.4.4)$$

denklemini geçerlidir. σ bir homomorfizma olduğundan

$$\sigma(g_{vU}) \sigma(f_U) = \sigma(f_V) \sigma(g_{vU})$$

buluruz. P_j^i 'ler (1,1) tipindeki bir tensörün bileşenleri olduğundan $\lambda: \Psi(T(M) \otimes \mathcal{D}^2(M)) \rightarrow \Psi(T(M) \otimes T^*(M))$ dönüşümünü

$$\lambda(\Gamma) = P_j^i \partial u_j \otimes du^i = P \quad (2.4.5)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu takdirde (2.4.1) ile verilen genel konneksiyona bir P-konneksiyon denir. $P = id_{T(M)}$ şeklinde ise bu konneksiyona bir 1-konneksiyon, P bir sıfır homomorfizma ise de bir 0-konneksiyon denir. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.4.1. $T(M)$ tanjant demetinin klasik afin konneksiyonu, λ altındaki görüntüsü $T(M)$ 'nin özdeşlik izomorfizması olacak şekilde, $T(M) \otimes \mathcal{D}^2(M)$ 'nin bir kesitine karşılık gelir. Yani, afin konneksiyon bir 1-konneksiyondur, [7].

İspat. Afin konneksiyonun katsayıları koordinat değişimi altında

$$\Gamma_{ih}^l = \frac{\partial u^l}{\partial v^m} \left(\frac{\partial^2 v^m}{\partial u^h \partial u^i} + \bar{\Gamma}_{jk}^m \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial v^k}{\partial u^h} \right) \text{ denklemini sağlar, yani } \bar{P}_j^m = \delta_j^m \text{ buluruz. Bunu}$$

(2.4.2) denkleminde yazarsak, $P_i^h = \delta_i^h$ buluruz ve bu durumda

$$(\lambda(\Gamma))(\partial u_h) = \delta_i^j \partial u_i \otimes du^j (\partial u_h) = \delta_i^j \partial u_i \delta_h^j = \delta_h^i \partial u_i = \partial u_h$$

yani λ , $T(M)$ de özdeşlik izomorfizmasıdır. Böylece teorem kanıtlanmış olur.

Not. Bilindiği gibi bir afin konneksiyonun lokal koordinatlara göre ifade edilen bileşenleri birer geometrik nesnedir ancak bunlar geometrik çokluklar değildir. Çünkü bir koordinat dönüşümünde bunların tamamı (1,2) tipinde bir tensörün bileşenleri gibi dönüşürler ancak lokal koordinatların ikinci mertebeden kısmi türevlerini içeren terimler barındırırlar. (2.4.1) denkleminde bir afin konneksiyonun Γ_{ij}^k bileşenleri bir 1-konneksiyonun ikinci bileşenleri olduğu (2.4.3) denklemi ise (1,2) tipte bir tensörün T_{ij}^k bileşenleri, bir 0-konneksiyonun bileşenleri olduğu gösterir. Dolayısıyla bir afin konneksiyonun bileşenleri ile (1,2) tipinde bir tensörün bileşenlerine birbirinden tamamıyla farklı olmayan kavramlar olarak bakılabilir.

Şimdi, $\Gamma \in \Psi(T(M) \otimes \mathcal{D}^2(M))$ için M baz uzayının özdeşlik dönüşümünü örten

$$\mu = \mu_T : \mathfrak{S}^2(M) \rightarrow T(M)$$

demet homomorfizmasını

$$\mu(X) = \langle \Gamma, X \rangle, \quad X \in \mathfrak{S}^2(M)$$

şeklindeki iç çarpım ile tanımlayalım. Yani $\{\partial u_j, \partial^2 u_{jk}\}$ ve $\{d^2 u^h, du^h \otimes du^l\}$, sırasıyla, $\mathfrak{S}^2(M)$ ve $\mathcal{D}^2(M)$ 'nin bazları olmak üzere

$$\begin{aligned} \mu(\partial u_j) &= \langle \Gamma, \partial u_j \rangle = \langle \partial u_i \otimes (P_h^i d^2 u^h + \Gamma_{hk}^i du^h \otimes du^k), \partial u_j \rangle = \\ &\langle \partial u_i \otimes P_h^i d^2 u^h, \partial u_j \rangle + \langle \partial u_i \otimes \Gamma_{hk}^i du^h \otimes du^k, \partial u_j \rangle = P_h^i \partial u_i \delta_j^h = P_j^i \partial u_i \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \mu(\partial^2 u_{jk}) &= \langle \Gamma, \partial^2 u_{jk} \rangle = \langle \partial u_i \otimes (P_h^i d^2 u^h + \Gamma_{ml}^i du^h \otimes du^l), \partial^2 u_{jk} \rangle = \\ &\langle \partial u_i \otimes P_h^i d^2 u^h, \partial^2 u_{jk} \rangle + \langle \partial u_i \otimes \Gamma_{ml}^i du^h \otimes du^l, \partial^2 u_{jk} \rangle = \Gamma_{jk}^i \partial u_i \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

yazılabilir.

Diğer yandan, $T(M) \otimes \mathcal{D}^2(M) \underset{\text{altdemet}}{\subset} \mathfrak{S}^2(M) \otimes \mathcal{D}^2(M)$ olduğundan, Γ konneksiyonu $\mathfrak{S}^2(M) \otimes \mathcal{D}^2(M)$ demetinin bir kesiti olarak düşünülebilir. Dolayısıyla benzer şekilde $\mathcal{D}^2(M)$ 'de de bir homomorfizma tanımlayabiliriz. Bu homomorfizmayı, $\omega \in \mathcal{D}^2(M)$ olmak üzere $\langle \omega, \Gamma \rangle$ şeklinde tanımlayabiliriz, yani

$$\begin{aligned} \langle d^2 u^j, \Gamma \rangle &= \langle d^2 u^j, \partial u_k \otimes (P_i^k d^2 u^i + \Gamma_{ih}^k du^i \otimes du^h) \rangle \\ &= \delta_k^j (P_i^k d^2 u^i + \Gamma_{ih}^k du^i \otimes du^h) = \\ &= P_i^j d^2 u^i + \Gamma_{ih}^j du^i \otimes du^h \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

ve

$$\langle du^j \otimes du^k, \Gamma \rangle = \langle du^j \otimes du^k, \partial u_i \otimes (P_j^i d^2 u^j + \Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k) \rangle = 0. \quad (2.4.9)$$

$\lambda(\Gamma) \in \Psi(T(M) \otimes T^*(M))$ olduğundan (2.3.15)'den $d(\lambda(\Gamma)) \in \Psi(T(M)^{\bar{\otimes}(1,2)})$ dir.

Bölüm 2.3'den

$$T(M)^{\bar{\otimes}(1,2)} \subset (\mathfrak{S}^2(M) \otimes T^*(M) \otimes T^*(M) + T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M))$$

olduğunu biliyoruz, ayrıca

$$(\mathfrak{S}^2(M) \otimes T^*(M) \otimes T^*(M) + T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M)) \subset \mathfrak{S}^2(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M)$$

dir, dolayısıyla $\Psi(T(M)^{\bar{\otimes}(1,2)}) \subset \Psi(\mathfrak{S}^2(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M))$ yazabiliriz. (2.4.5) ve

(2.3.18)'den $\lambda(\Gamma) = P_i^j \partial u_j \otimes du^i$ için

$$d(\lambda(\Gamma)) = \underbrace{\frac{\partial P_i^k}{\partial u^l} \partial u_k}_{\in T(M)} \otimes \underbrace{du^i \otimes du^l}_{\in T^*(M)^{\otimes 2}} + \underbrace{P_i^k \partial^2 u_{kl}}_{\in \mathfrak{S}^2(M)} \otimes \underbrace{du^i \otimes du^l}_{\in T^*(M)^{\otimes 2}} + \underbrace{P_i^k \partial u_k}_{\in T(M)} \otimes \underbrace{d^2 u^i}_{\in \mathfrak{D}^2(M)}$$

dir, $\omega \in \mathfrak{D}^2(M)$ için $\mathfrak{D}^2(M)$ 'deki homomorfizmayı ise $\langle \omega, d(\lambda(\Gamma)) \rangle$ şeklinde tanımlayabiliriz. Yani

$$\begin{aligned} \langle d^2 u^j, d(\lambda(\Gamma)) \rangle &= \delta_j^k \left(P_i^k d^2 u^i + \frac{\partial P_i^k}{\partial u^l} du^i \otimes du^l \right) \\ &= P_i^j d^2 u^i + \frac{\partial P_i^j}{\partial u^h} du^i \otimes du^h \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

ve

$$\langle du^j \otimes du^h, d(\lambda(\Gamma)) \rangle = \delta_j^k \delta_h^l (P_i^k du^i \otimes du^l) = P_i^j du^i \otimes du^h \quad (2.4.11)$$

dir.

Lemma 2.4.2. $\varphi(\omega) = \langle \omega, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \rangle$, $\omega \in \mathfrak{D}^2(M)$ ile verilen

$$\varphi = \varphi_{\Gamma} : \mathfrak{D}^2(M) \rightarrow T^*(M) \otimes T^*(M)$$

dönüşümü M baz uzayının özdeşlik dönüşümünü örten bir homomorfizmadır, [1].

$\mathfrak{D}^2(M)$ 'nin $\{d^2u^i, du^j \otimes du^h\}$ bazı için (2.4.8), (2.4.9), (2.4.10) ve (2.4.11)'den

$$\begin{aligned} \varphi(d^2u^i) &= \langle d^2u^i, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \rangle \\ &= \langle d^2u^i, d(\lambda(\Gamma)) \rangle - \langle d^2u^i, \Gamma \rangle \\ &= \left(\frac{\partial P_i^j}{\partial u^h} - \Gamma_{ih}^j \right) du^i \otimes du^h \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi(du^i \otimes du^h) &= \langle du^i \otimes du^h, d(\lambda(\Gamma)) - \Gamma \rangle \\ &= P_i^j du^i \otimes du^h - 0 = P_i^j du^i \otimes du^h \end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$\Gamma_{ih}^j - \frac{\partial P_i^j}{\partial u^h} = \Lambda_{ih}^j \quad (2.4.12)$$

notasyonu kullanırsak

$$\begin{aligned} \varphi(d^2u^i) &= -\Lambda_{jk}^i du^j \otimes du^k \\ \varphi(du^i \otimes du^h) &= P_j^i du^j \otimes du^h \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

buluruz. Üstelik genel olarak

$$\varphi(du^i) = du^i \quad (2.4.14)$$

$$\varphi(du^{i_1} \otimes \dots \otimes du^{i_q} \otimes du^h) = P_{j_1}^{i_1} \dots P_{j_q}^{i_q} du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes du^h, \quad q \geq 1 \quad (2.4.15)$$

dir. $\mathfrak{S}^2(M)$ 'de tanımladığımız μ homomorfizmasını da φ ile gösterelim yani

$$\varphi \Big|_{\mathfrak{S}^2(M)} = \mu \quad (2.4.16)$$

Dolayısıyla doğal olarak, $T(M)^{\otimes(p,q+1)}$ üstünde denk olan

$$\begin{aligned} T(M)^{\otimes(s-1)} \otimes \mathfrak{S}^2(M) \otimes T(M)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*(M)^{\otimes(q+1)} &\rightarrow T(M)^{\otimes(p,q+1)} \\ s = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(M)^{\otimes p} \otimes T^*(M)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2(M) \dot{\otimes} T^*(M)^{\otimes(q-t)} &\rightarrow T(M)^{\otimes(p,q+1)} \\ t = 1, 2, \dots, q \end{aligned}$$

homomorfizmalarını buluruz. " $\dot{\otimes}$ " tensör çarpımının tanımına göre

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^p T(M)^{\otimes(s-1)} \otimes \mathfrak{S}^2(M) \otimes T(M)^{\otimes(p-s)} \otimes T^*(M)^{\otimes(q+1)} \\ + \sum_{t=1}^q T(M)^{\otimes p} \otimes T^*(M)^{\otimes(t-1)} \otimes \mathfrak{D}^2(M) \dot{\otimes} T^*(M)^{\otimes(q-t)} \end{aligned} \rightarrow T(M)^{\otimes(p,q+1)}$$

homomorfizmasını tanımlayabiliriz ve bunu aynı φ sembolü ile gösteririz. Doğal olarak

$$\varphi = \varphi_\Gamma : T(M)^{\bar{\otimes}(p,q+1)} \rightarrow T(M)^{\otimes(p,q+1)}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4.17)$$

homomorfizmasını elde ederiz.

Şimdi de bu homomorfizmayı kullanarak kovaryant diferansiyel operatörünü tanımlayalım. Herhangi bir $\Gamma \in \Psi(T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M))$ için Γ genel konneksiyonunun

$D = D_\Gamma$ kovaryant diferansiyel operatörü

$$D = D_\Gamma = \varphi_\Gamma \cdot d : \Psi(T(M)^{\otimes(p,q)}) \rightarrow \Psi(T(M)^{\otimes(p,q+1)}) \quad (2.4.18)$$

şeklinde tanımlanır. Yani,

$$DV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \varphi \cdot dV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

olmak üzere $V = V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$ için

$$DV = \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes DV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (2.4.19)$$

şeklindedir. (2.3.12), (2.3.13), (2.4.13), (2.4.14) ve (2.4.15) denklemlerinden

$$\begin{aligned} DV &= \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^h} \varphi \left(\partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \right) \\ &+ V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi \left\{ \begin{aligned} &\sum_{s=1}^p \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_{s-1}} \otimes \partial^2 u_{i_s, l} \otimes \partial u_{i_{s+1}} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \\ &\quad \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \otimes du^h \\ &+ \sum_{t=1}^q \partial u_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{i_p} \\ &\quad \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_{t-1}} \otimes d^2 u^{j_t} \otimes (du^{j_{t+1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q}) \end{aligned} \right\} \\ &= \left\{ \begin{aligned} &P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_p}^{k_p} \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^l} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_q}^{j_q} \\ &+ \sum_{s=1}^p P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_{s-1}}^{k_{s-1}} \Gamma_{i_s}^{k_s} P_{i_{s+1}}^{k_{s+1}} \dots P_{i_p}^{k_p} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_q}^{j_q} \\ &- \sum_{t=1}^q P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_p}^{k_p} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_{t-1}}^{j_{t-1}} \Lambda_{m_t}^{j_t} P_{m_{t+1}}^{j_{t+1}} \dots P_{m_q}^{j_q} \end{aligned} \right\} \partial u_{k_1} \otimes \dots \otimes \partial u_{k_p} \otimes du^{m_1} \otimes \dots \otimes du^{m_q} \otimes du^l \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} D_h V_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p} &= P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_p}^{k_p} \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^h} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_q}^{j_q} \\ &+ \sum_{s=1}^p P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_{s-1}}^{k_{s-1}} \Gamma_{i_s}^{k_s} P_{i_{s+1}}^{k_{s+1}} \dots P_{i_p}^{k_p} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_q}^{j_q} \\ &- \sum_{t=1}^q P_{i_1}^{k_1} \dots P_{i_p}^{k_p} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} P_{m_1}^{j_1} \dots P_{m_{t-1}}^{j_{t-1}} \Lambda_{m_t}^{j_t} P_{m_{t+1}}^{j_{t+1}} \dots P_{m_q}^{j_q} \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

bulunur. Bu şekilde tanımlanan türeve Otsuki kovaryant türevi de denir.

Şimdi de $\mu|_{T(M)}$ 'nin $\mu^*_{\Gamma} : T^*(M) \rightarrow T^*(M)$ dual homomorfizmasını göz önüne alalım, (2.4.6)'dan

$$\mu_{\Gamma}^*(du_i) = P_j^i du^j \quad (2.4.21)$$

dir. $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\Gamma} : T(M)^{\otimes(p,q)} \rightarrow T(M)^{\otimes(p,q)}$ homomorfizmasını ise

$$\bar{\lambda}_{\Gamma} = \underbrace{(\mu_{\Gamma} \otimes \dots \otimes \mu_{\Gamma})}_{p\text{-tane}} \otimes \underbrace{(\mu_{\Gamma}^* \otimes \dots \otimes \mu_{\Gamma}^*)}_{q\text{-tane}}. \quad (2.4.22)$$

şeklinde tanımlayalım. Lokal bileşenleri $V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ve $W_{j_1 \dots j_b}^{i_1 \dots i_a}$ olan, sırasıyla, (p, q) ve (a, b) tipindeki V ve W tensör alanları için (2.4.20) formülü $V \otimes W$ ye uygularsak

$$\begin{aligned} D_h \left(V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right) &= \left(D_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) P_{h_{p+1}}^{i_{p+1}} \dots P_{h_{p+a}}^{i_{p+a}} W_{k_{q+1} \dots k_{q+b}}^{h_{p+1} \dots h_{p+a}} P_{j_{q+1}}^{k_{q+1}} \dots P_{j_{q+b}}^{k_{q+b}} \\ &+ P_{h_1}^{i_1} \dots P_{h_p}^{i_p} V_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p} P_{j_1}^{k_1} \dots P_{j_q}^{k_q} \left(D_h W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

ya da

$$D_h \left(V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right) = \left(D_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) (\bar{\lambda}_{\Gamma} W)_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} + (\bar{\lambda}_{\Gamma} V)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \left(D_h W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right).$$

elde ederiz. Bunu da

$$D(V \otimes W) = \varepsilon(DV \otimes \bar{\lambda}W) + \bar{\lambda}V \otimes DW \quad (2.4.24)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\varepsilon : T(M)^{\otimes(p,q+1)} \otimes T(M)^{\otimes(a,b)} \rightarrow T(M)^{\otimes(p,q)} \otimes T(M)^{\otimes(a,b+1)}$ izomorfizmadır ve toplananların aynı tipte olmasını sağlar. Buradan görülür ki genel konneksiyonların kovaryant türevi, $\lambda \neq Id$ için, bilinen klasik çarpımın türev kuralını sağlamaz.

Son olarak kovaryant türev ve büzülme arasındaki ilişkiyi göstereyim. Bileşenleri $V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ olan bir $(p+1, q+1)$ -tipindeki V tensör alanı için (2.4.20)'den

$$\begin{aligned}
\delta_i^j \left(D_m V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) &= \delta_i^j P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} P_k^i \frac{\partial V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k}}{\partial u^m} P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} P_j^h \\
&+ \delta_i^j \sum_{s=1}^p P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_{s-1}}^{i_{s-1}} \Gamma_{k_s m}^{i_s} P_{k_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots P_{k_p}^{i_p} P_k^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} P_i^h P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} P_j^h \\
&+ \delta_i^j P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \Gamma_{k m}^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} P_j^h P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&- \delta_i^j \sum_{t=1}^q P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} P_k^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_{t-1}}^{h_{t-1}} \Lambda_{j_t m}^{h_t} P_{j_{t+1}}^{h_{t+1}} \dots P_{j_q}^{h_q} P_j^h \\
&- \delta_i^j P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} P_k^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} \Lambda_{i m}^h P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q}
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\delta_i^j \left(D_m V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) &= P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \frac{\partial V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k}}{\partial u^m} (P_i^h P_k^i) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&+ \sum_{s=1}^p P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_{s-1}}^{i_{s-1}} \Gamma_{k_s m}^{i_s} P_{k_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} (P_i^h P_k^i) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&+ P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \Gamma_{k m}^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} P_i^h P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&- \sum_{t=1}^q P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} (P_i^h P_k^i) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_{t-1}}^{h_{t-1}} \Lambda_{j_t m}^{h_t} P_{j_{t+1}}^{h_{t+1}} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&- P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} P_k^i V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} \Lambda_{i m}^h P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q}
\end{aligned}$$

buluruz. $M_j^i = P_k^i P_j^k$ ve $M = P^2$ alırsak

$$\begin{aligned}
\delta_i^j \left(D_m V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) &= P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \frac{\partial \left(V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} M_k^h \right)}{\partial u^m} P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&+ \sum_{s=1}^p P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_{s-1}}^{i_{s-1}} \Gamma_{k_s m}^{i_s} P_{k_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots P_{k_p}^{i_p} \left(V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} M_k^h \right) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&- \sum_{t=1}^q P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \left(V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} M_k^h \right) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_{t-1}}^{h_{t-1}} \Lambda_{j_t m}^{h_t} P_{j_{t+1}}^{h_{t+1}} \dots P_{j_q}^{h_q} \\
&- P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p k} \left[\frac{\partial (P_i^h P_k^i)}{\partial u^m} - P_i^h \Gamma_{k m}^i + \Lambda_{i m}^h P_k^i \right] P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q}
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

buluruz. Şimdi $\frac{\partial (P_i^h P_k^i)}{\partial u^m} - P_i^h \Gamma_{k m}^i + \Lambda_{i m}^h P_k^i$ ifadesini inceleyelim.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(P_i^h P_k^i)}{\partial u^m} - P_i^h \Gamma_{km}^i + \Lambda_{im}^h P_k^i \\ &= P_i^h \left(-\Gamma_{km}^i + \frac{\partial P_k^i}{\partial u^m} \right) + \left(\frac{\partial P_i^h}{\partial u^m} + \Lambda_{im}^h \right) P_k^i = \Gamma_{im}^h P_k^i - P_i^h \Lambda_{km}^i \end{aligned}$$

ve (2.4.20) denkleminde

$$D_h \delta_j^i = \Gamma_{kh}^i P_j^k - P_k^i \Lambda_{jh}^k \quad (2.4.26)$$

olduğundan (2.4.25) denklemi

$$D_m \delta_j^i V_{h_1 \dots h_q}^{i_1 \dots i_p} = D_m \left(V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} M_k^h \right) - P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} \left(D_m \delta_k^h \right) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \quad (2.4.27)$$

şeklini alır. Buradaki denklemin sağ tarafındaki birinci terimin kovaryant türevi, bütülmüş (p, q) - tipindeki tensörün türevidir ikinci terim ise Kronecker δ 'sının genel konneksiyona göre türevini içerir.

2.5. KONNEKSİYONUN (1,1) TİPİNDEN BİR TENSÖR İLE ÇARPIMI. REGÜLER GENEL KONNEKSİYONLAR.

Bu bölümde, bir Γ genel konneksiyonun kovaryant ve kontravaryant kısımlarını elde edeceğiz. Otsuki [7]'de regüler genel konneksiyonun kontravaryant ve kovaryant kısımları elde etmiştir. Sonra ise [15]'deki makalesinde bunu regüler olmayan konneksiyonlara da genelleştirmiştir. Bunun için \mathcal{L}_n^2 grubunu, p_j^i elemanlarını da ekleyerek $\tilde{\mathcal{L}}_n^2$ yarıgrubuna genişletmek gereksinim duyulmuştur. Yani $\tilde{\mathcal{L}}_n^2$, $|a_j^i| \neq 0$ olacak şekilde (a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i) gerçel sayılarının bir kümesidir. p_j^i elemanlarının tersi olmayabilir dolayısıyla bu küme bir yarıgruptur. Bu yarı grupta çarpma işlemini aşağıdaki formüller ile verelim:

$\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{L}}_n^2$ için $\alpha\beta$ nın bileşenleri

$$\begin{aligned}
a_i^j(\alpha\beta) &= a_k^j(\alpha)a_i^k(\beta) \\
a_{ih}^j(\alpha\beta) &= a_k^j(\alpha)a_{ih}^k(\beta) + a_{kl}^j(\alpha)p_i^k(\beta)a_h^l(\beta) \\
p_i^j(\alpha\beta) &= p_k^j(\alpha)p_i^k(\beta)
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

şeklindedir. $L_n^1 = GL(n, R) \subset M_n^1$ olmak üzere

$$\sigma : (a_j^i, a_{jh}^i, p_j^i) \rightarrow (a_j^i) \tag{2.5.2}$$

ile tanımlanan $\sigma : \tilde{L}_n^2 \rightarrow L_n^1$ izdüşüm homomorfizması verilsin. (a_j^i, a_{jh}^i) elemanlarını (a_j^i, a_{jh}^i, a_j^i) ile özdeşleştirerek, L_n^2 grubu \tilde{L}_n^2 yarı grubunun bir altgrubu olarak düşünülür.

Herhangi bir (U, u^i) koordinat komşuluğu için $\Lambda_{ih}^j = \Gamma_{ih}^j - \frac{\partial P_i^j}{\partial u^h}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_j^i \cdot \tilde{f}_U &= \delta_j^i \\
a_{jh}^i \cdot \tilde{f}_U &= \Lambda_{jh}^i \\
p_j^i \cdot \tilde{f}_U &= -P_j^i
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

şeklinde bir $\tilde{f}_U : U \rightarrow \tilde{L}_n^2$ dönüşümünü tanımlayalım. Herhangi bir (U, u^i) koordinat komşuluğunda tanımlı Λ_{jh}^i için, (2.4.12), (2.4.2) ve (2.4.3) den $U \cap V \neq 0$ olmak üzere, (V, v^i) koordinat komşuluğunda

$$\bar{\Lambda}_{ih}^j = \left(-\frac{\partial^2 v^j}{\partial u^m \partial u^k} P_l^k + \frac{\partial v^j}{\partial u^k} \Lambda_{lm}^k \right) \frac{\partial u^l}{\partial v^i} \frac{\partial u^m}{\partial v^h} \tag{2.5.4}$$

buluruz. Böylece (2.4.2), (2.5.3) ve (2.5.4) denklemlerinden (2.4.4) denkleminin benzeri olan

$$g_{vU} \tilde{f}_U = \tilde{f}_V (\sigma \cdot g_{vU}) \tag{2.5.5}$$

denklemini elde ederiz.

Dolayısıyla, M nin herhangi bir U komşuluğunda $f_U : U \rightarrow L_n^2$ (ya da $\tilde{f}_U : U \rightarrow \tilde{L}_n^2$) dönüşümü (2.4.4) (ya da (2.5.5)) denklemlerini sağlıyorsa $\{f_U\}$ (ya da $\{\tilde{f}_U\}$) sistemi M 'de bir Γ konneksiyonunu tanımlar. (2.4.1) ve (2.4.12)'den Γ konneksiyonu

$$\Gamma = \partial u_n \otimes \left(d(P_k^h du^k) + \Lambda_{km}^h du^k \otimes du^m \right) \quad (2.5.6)$$

şeklinde de yazılabilir.

Şimdi de konneksiyonun kontravaryant ve kovaryant kısımlarını verelim. Bunun için, Q (1,1) tipinde bir tensör olmak üzere

$$\begin{aligned} a_j^i \cdot q_U &= Q_j^i \\ a_{jk}^i \cdot q_U &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

denklemleri ile tanımlanan bir $q_U : U \rightarrow M_n^2$ dönüşümü verilsin. Q_j^i 'ler bir Q tensör alanının bileşenleri olduğundan herhangi bir $U, V, U \cap V \neq \emptyset$ koordinat komşuluğunda

$$(\sigma \cdot g_{VU}) q_U = q_V (\sigma \cdot g_{VU})$$

denklemini sağlar. (2.4.4) denkleminde

$$(\sigma \cdot g_{VU})(q_U f_U) = (q_V f_V) g_{VU}$$

buluruz, yani $\{f'_U = q_U f_U\}$ sistemi, bileşenleri

$$\begin{aligned} a_j^i \cdot f'_U &= a_j^i \cdot (q_U f_U) = a_k^i(q_U) a_j^k(f_U) = Q_k^i P_j^k \\ a_{jh}^i \cdot f'_U &= a_{jh}^i \cdot (q_U f_U) = a_k^i(q_U) a_{jh}^k(f_U) + \underbrace{a_{kl}^i(q_U)}_{=0} a_j^k(f_U) a_h^l(f_U) \\ &= Q_k^i \Gamma_{jh}^k \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

olan bir Γ genel konneksiyonu tanımlar. Lokal koordinatlarda Γ genel konneksiyonu

$$\begin{aligned}
{}^{\prime}\Gamma &= \partial u_i \otimes (Q_k^i P_j^k d^2 u^j + Q_k^i \Gamma_{jh}^k du^j \otimes du^h) \\
&= \partial u_i Q_k^i \otimes (P_j^k d^2 u^j + \Gamma_{jh}^k du^j \otimes du^h) = Q\Gamma
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

şeklindedir ve bu konneksiyona Γ 'nın *kontravaryant kısmı* denir. Benzer şekilde $L_n^1 \subset \mathcal{L}_n^2 \subset \tilde{\mathcal{L}}_n^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_j^i \cdot \tilde{q}_U &= \delta_j^i \\
a_{jh}^i \cdot \tilde{q}_U &= 0 \\
p_j^i \cdot \tilde{q}_U &= Q_j^i
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

denklemleri ile $\tilde{q}_U : U \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_n^2$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu takdirde

$$(\sigma \cdot g_{vU}) \tilde{q}_U = \tilde{q}_V (\sigma \cdot g_{vU})$$

buluruz. Diğer taraftan (2.5.5) denkleminde

$$g_{vU}(\tilde{f}_U \tilde{q}_U) = (\tilde{f}_V \tilde{q}_V)(\sigma \cdot g_{vU})$$

buluruz. Yani $\{f^{\prime\prime}_U = \tilde{f}_U \tilde{q}_U\}$ sistemi, bileşenleri

$$\begin{aligned}
a_j^i \cdot f^{\prime\prime}_U &= a_j^i(\tilde{f}_U \tilde{q}_U) = a_k^i(\tilde{f}_U) a_j^k(\tilde{q}_U) = \delta_k^i \delta_j^k = \delta_j^i \\
a_{jh}^i \cdot f^{\prime\prime}_U &= a_{jh}^i(\tilde{f}_U \tilde{q}_U) = a_k^i(\tilde{f}_U) \underbrace{a_{jh}^k(\tilde{q}_U)}_{=0} + a_{kl}^i(\tilde{f}_U) p_j^k(\tilde{q}_U) a_h^l(\tilde{q}_U) \\
&= \Lambda_{kl}^i Q_j^k \delta_h^l = \Lambda_{kh}^i Q_j^k \\
p_j^i \cdot f^{\prime\prime}_U &= p_j^i(\tilde{f}_U \tilde{q}_U) = p_k^i(\tilde{f}_U) p_j^k(\tilde{q}_U) = -P_k^i Q_j^k
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

olan bir ${}^{\prime}\Gamma$ genel konneksiyonu tanımlar. Bu konneksiyona Γ 'nın *kovaryant kısmı* denir. (2.5.3) ve (2.5.6)'dan ${}^{\prime}\Gamma$ genel konneksiyonu lokal olarak

$${}^{\prime}\Gamma = \partial u_i \otimes (d(P_k^i Q_j^k du^j) + \Lambda_{kh}^i Q_j^k du^h \otimes du^j) = \Gamma Q \tag{2.5.12}$$

şeklinde yazılabilir .

Önerme 2.5.1 Bir genel konneksiyon ile (1,1) tipindeki bir tensör alanının çarpımı birleşmelidir, [15].

Tanım 2.5.1. Eğer $P = \lambda(\Gamma)$ homomorfizması $T(M)$ 'nin bir izomorfizması ise Γ genel konneksiyonuna *regüler genel konneksiyon* denir.

Γ , M 'de bir regüler genel konneksiyon ve $Q = P^{-1}$ olsun. Bu takdirde (2.5.9) ve (2.5.12) ile tanımlanan (2.5.8) ve (2.5.11)'den $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ genel konneksiyonların katsayıları

$$\begin{aligned} a_j^i \cdot f'^i_U &= Q_k^i P_j^k = \delta_j^i \\ a_{jh}^i \cdot f'^i_U &= Q_k^i \Gamma_{jh}^k \\ a_j^i \cdot f''^i_U &= \delta_j^i \\ a_{jh}^i \cdot f''^i_U &= \Lambda_{kh}^i Q_j^k \\ p_j^i \cdot f''^i_U &= -\delta_j^i \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

şeklinde bulunur. Buradan $'\Gamma = (\delta_j^i, Q_k^i \Gamma_{jh}^k)$ ve $''\Gamma = (\delta_j^i, \Lambda_{kh}^i Q_j^k)$ konneksiyonların birer afin konneksiyon olduğu görülür. $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ konneksiyonlar, sırasıyla, $'D$ ve $''D$ kovaryant diferansiyellerini tanımlarlar. Kovaryant diferansiyel tanımından (1,1) tipinde bir tensör alanı için

$$\begin{aligned} 'DV_i^j &= 'D_h V_i^j du^i = \left((\partial_h V_i^j) + '\Gamma_{lh}^j V_i^l - '\Gamma_{jh}^l V_l^j \right) du^i \\ ''DV_i^j &= ''D_h V_i^j du^i = \left((\partial_h V_i^j) + ''\Gamma_{lh}^j V_i^l - ''\Gamma_{jh}^l V_l^j \right) du^i \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

eşitlikleri elde edilir.

2.6. TEMEL KOVARYANT TÜREVİN TANIMI VE KOVARYANT TÜREV İLE İLİŞKİSİ

$'\Gamma$ ve $''\Gamma$ için $\phi' = \phi_{\cdot\Gamma}$ ve $\phi'' = \phi_{\cdot''\Gamma}$ yazarsak (2.4.16), (2.4.6), (2.4.7) ve (2.4.13) denklemlerini

$$\begin{aligned}
\varphi(\partial u_i) &= \varphi\varphi'(\partial u_i) = \varphi\varphi''(\partial u_i) \\
\varphi(\partial^2 u_{ih}) &= P_k^j \Gamma_{ih}^k \partial u_j = \varphi(\Gamma_{ih}^k \partial u_k) = \varphi\varphi'(\partial^2 u_{ih}) \\
\varphi(du^j) &= \varphi\varphi'(du^j) = \varphi\varphi''(du^j) \\
\varphi(d^2 u^j) &= -\Gamma_{lk}^j P_i^l P_h^k du^i \otimes du^h = \varphi\varphi''(d^2 u^j)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 2.6.1. $\bar{\varphi}$ transformasyonu φ 'nin 1. mertebeden tensör çarpım demetlerinde kısıtı, $\bar{\mu}_\Gamma$ homomorfizması ise: $T(M)$ ve $T^*(M)$ demetlerinde bir özdeşlik dönüşümü, $\mathfrak{S}^2(M)$ 'de φ' , $\mathfrak{D}^2(M)$ 'de φ'' homomorfizması olmak üzere herhangi bir $\Gamma \in \Psi(T(M) \otimes \mathfrak{D}^2(M))$ regüler genel konneksiyonu için

$$\varphi = \bar{\varphi} \cdot \bar{\mu}$$

eşitliği geçerlidir, [1].

İspat. Bunu ispatlamak için $\partial u_i \in T(M)$, $du^i \in T^*(M)$, $\partial^2 u_{jk} \in \mathfrak{S}^2(M)$ ve $d^2 u^i \in \mathfrak{D}^2(M)$ elemanları için:

$$\bar{\varphi} \cdot \bar{\mu}(\partial u_i) = \bar{\varphi} \cdot id(\partial u_i) = \bar{\varphi}(\partial u_i) = \varphi(\partial u_i)$$

$$\bar{\varphi} \cdot \bar{\mu}(du^i) = \bar{\varphi} \cdot id(du^i) = \bar{\varphi}(du^i) = \varphi(du^i),$$

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi} \cdot \bar{\mu}(\partial^2 u_{jk}) &= \bar{\varphi} \cdot \varphi'(\partial^2 u_{jk}) = \bar{\varphi}(\Gamma_{jk}^i \partial u_i) = \bar{\varphi}(Q_l^i \Gamma_{jk}^l \partial u_i) \\
&= P_i^m Q_l^i \Gamma_{jk}^l \partial u_m = \Gamma_{jk}^m \partial u_m = \varphi(\partial^2 u_{jk})
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\varphi} \cdot \bar{\mu}(d^2 u^i) &= \bar{\varphi} \cdot \varphi^*(d^2 u^i) = \bar{\varphi}(-\Lambda_{jk}^i du^j \otimes du^k) \\
&= \bar{\varphi} \left(- \left(\Gamma_{jk}^i - \frac{\partial \mathcal{D}_j^i}{\partial u^k} \right) du^j \otimes du^k \right) \\
&= \bar{\varphi}(-\Gamma_{jk}^i du^j \otimes du^k) \\
&= \bar{\varphi}(-\Lambda_{lk}^i Q_j^l du^j \otimes du^k) = -\Lambda_{lk}^i Q_j^l P_m^j du^m \otimes du^k \\
&= -\Lambda_{lk}^i \delta_m^l du^m \otimes du^k = -\Lambda_{lk}^i du^l \otimes du^k = \varphi(d^2 u^i)
\end{aligned}$$

buluruz dolayısıyla $\bar{\varphi} \cdot \bar{\mu} = \varphi$ ve böylece teorem ispatlanmış oldu.

Tanım 2.6.1. $\bar{\mu}_\Gamma$ homomorfizmasına Γ *regüler genel konneksiyonun temel homomorfizması* denir. Bu takdirde kovaryant türev

$$\bar{D} = \bar{D}_\Gamma = \bar{\mu}_\Gamma \cdot d \quad (2.6.1)$$

şeklinde tanımlanır ve Γ *regüler genel konneksiyonunun temel kovaryant türevi* adını alır.

(2.4.18)'den ise

$$D = \bar{\varphi} \cdot \bar{D} \quad (2.6.2)$$

bulunur. Dolayısıyla lokal koordinatları $V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ olan herhangi bir $V \in \Psi(T(M)^{\otimes(p,q)})$

tenzör alanı için

$$\bar{D} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \bar{D}_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} du^h \quad (2.6.3)$$

$$\bar{D}_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^h} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{kh}^{i_s} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{s-1} k i_{s+1} \dots i_p} - \sum_{t=1}^q \Gamma_{j_t h}^k V_{j_1 \dots j_{t-1} k j_{t+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \quad (2.6.4)$$

ve

$$D_m V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \left(\bar{D}_m V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p} \right) P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \quad (2.6.5)$$

buluruz. Şimdi de Γ genel konneksiyonunun temel kovaryant türevi ile ilgili, (2.4.24) ve (2.4.27) denklemlerine benzer denklemleri araştıralım. (p, q) ve (a, b) tipindeki V ve W tanjant tensör alanları için $\bar{\varphi}_q^p = \bar{\varphi} \Big|_{T(M)^{\otimes(p,q)}}$, $\bar{\lambda}_q^p = \bar{\lambda} \Big|_{T(M)^{\otimes(p,q)}}$, ... alırsak

$$\varepsilon \cdot (\bar{\varphi}_{q+1}^p \otimes \bar{\lambda}_b^a) = \bar{\varphi}_{q+b+1}^{p+a} \cdot \varepsilon, \quad \bar{\lambda}_q^p \otimes \bar{\varphi}_{b+1}^a = \bar{\varphi}_{q+b+1}^{p+a}$$

buluruz. (2.6.2)'yi kullanarak (2.4.24)'den

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} \bar{D}(V \otimes W) &= D(V \otimes W) = \varepsilon(DV \otimes \bar{\lambda}W) + \bar{\lambda}V \otimes DW \\ &= \varepsilon(\bar{\varphi} \bar{D}V \otimes \bar{\lambda}W) + \bar{\lambda}V \otimes \bar{\varphi} \bar{D}W \\ &= \bar{\varphi}(\varepsilon(\bar{D}V \otimes W) + V \otimes \bar{D}W) \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

buluruz. Üstelik $\bar{\varphi}$ herhangi bir düzgün genel konneksiyon için bir izomorfizma olduğundan

$$\bar{D}(V \otimes W) = \varepsilon(\bar{D}V \otimes W) + V \otimes \bar{D}W$$

elde edilir. Bu denklem, klasik afin konneksiyona göre tensör çarpımının kovaryant türevinin formülüdür. (2.6.4) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} \delta_i^j \left(\bar{D}_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) &= \frac{\partial V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial u^h} + \sum_{s=1}^p \Gamma_{kh}^{i_s} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{s-1} k i_{s+1} \dots i_p} - \sum_{t=1}^q \Gamma_{j_t h}^k V_{j_1 \dots j_{t-1} k j_{t+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \\ &\quad + \Gamma_{kh}^i V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p k} - \Gamma_{ih}^k V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p k} \\ &= \bar{D}_h \left(V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \delta_i^j \right) + V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\Gamma_{ih}^j - \Gamma_{ih}^j \right) \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

buluruz. Aynı formülü kullanarak

$$\bar{D}_h \delta_i^j = \Gamma_{ih}^j - \Gamma_{ih}^j \quad (2.6.8)$$

oldüğundan üstteki denklem

$$\delta_i^j \left(\bar{D}_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) = \bar{D}_h \left(V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \delta_i^j \right) + V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \left(\bar{D}_h \delta_i^j \right) \quad (2.6.9)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan temel kovaryant operatörün, I büzme operatörü ile değişimli olmayabildiğini görürüz. Değişimli olması için ise gerek ve yeter koşul $\bar{D}_h \delta_i^j = 0$ ya da (2.6.8)'den

' $\Gamma = "$ Γ olmalıdır.

Şimdi (2.5.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}''\Gamma_{kh}^i P_j^k &= \left(-\frac{\partial P_l^i}{\partial u^h} Q_k^l + \Gamma_{lh}^i Q_k^l \right) P_j^k \\ &= -\frac{\partial P_l^i}{\partial u^h} Q_k^l P_j^k + \Gamma_{lh}^i Q_k^l P_j^k = -\frac{\partial P_j^i}{\partial u^h} + P_k^i {}'\Gamma_{jh}^k \end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\partial P_j^i}{\partial u^h} + {}''\Gamma_{kh}^i P_j^k - P_k^i {}'\Gamma_{jh}^k = 0 \quad (2.6.10)$$

şeklindeki *Otsuki denklemi*ni elde ederiz. Diğer yandan ' D_h ve ' D_h , sırasıyla, ' Γ ve ' Γ klasik afin konneksiyonlar için u^h 'ya göre kovaryant türevler olmak üzere

$$\begin{aligned} D_h \delta_j^i &= P_k^i \bar{D}_h \delta_l^k P_j^l = P_k^i ({}'\Gamma_{lh}^k - {}''\Gamma_{lh}^k) P_j^l \\ &= P_k^i \left({}'\Gamma_{lh}^k P_j^l - P_l^k {}'\Gamma_{jh}^l + \frac{\partial P_j^k}{\partial u^h} \right) \\ &= P_k^i ({}'D_h P_j^k) \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

eşitliği ile benzer şekilde

$$\begin{aligned} D_h \delta_j^i &= P_k^i (\bar{D}_h \delta_l^k) P_j^l = P_k^i ({}'\Gamma_{lh}^k - {}''\Gamma_{lh}^k) P_j^l = (P_k^i {}'\Gamma_{lh}^k - P_k^i {}''\Gamma_{lh}^k) P_j^l \\ &= (\Gamma_{lh}^i - P_k^i {}''\Gamma_{lh}^k) P_j^l = \left({}''\Gamma_{jh}^i P_l^j + \frac{\partial P_l^i}{\partial u^h} - P_k^i {}''\Gamma_{lh}^k \right) P_j^l \\ &= ({}''D_h P_l^i) P_j^l. \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Sonuç olarak

$${}'D_h P_j^i = (D_h \delta_k^i) P_j^k \quad (2.6.12)$$

$${}^{\prime\prime}D_h P_j^i = P_k^i \left(D_h \delta_j^k \right) \quad (2.6.13)$$

denklemleri elde ederiz. $\bar{D}_h P_j^i$ yı (2.6.4)'e göre ise

$$\bar{D}_h P_j^i = \frac{\partial P_j^i}{\partial u^h} + {}^{\prime}\Gamma_{kh}^i P_j^k - P_k^i {}^{\prime\prime}\Gamma_{jh}^k \quad (2.6.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 2.6.2 I tarafından belirlenen büzülme operatörü ile kovaryant türev operatörlerinin değişimli olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerden en az birinin sağlanmasıdır:

1. $T(M)$ 'deki δ özdeşlik izomorfizması, Γ 'ya göre kovaryant sabittir.
2. $P = \lambda(\Gamma)$ tensörü ${}^{\prime}\Gamma = P^{-1}\Gamma$ şeklinde verilen afin konneksiyona göre kovaryant sabittir.
3. $P = \lambda(\Gamma)$ tensörü ${}^{\prime\prime}\Gamma = \Gamma P^{-1}$ şeklinde verilen afin konneksiyonuna göre kovaryant sabittir.
4. ${}^{\prime}\Gamma = {}^{\prime\prime}\Gamma$, eşitliği geçerlidir, [7].

2.7. GEODEZİKLER VE METRİK KOŞULLARI

$\Gamma = (P_j^i, \Gamma_{jh}^i)$, M' 'de bir genel konneksiyon olsun. Bir C , $x(t) = (u^i(s))$ eğrisi ve C boyunca $V = (V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(s))$ tensör alanı için Γ 'ya göre $\frac{DV}{ds}$ kovaryant türevini aşağıdaki şekilde tanımlarız

$$\begin{aligned} \frac{DV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{ds} &= P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \frac{dV_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p}}{ds} P_{j_1}^{m_1} \dots P_{j_q}^{m_q} \\ &+ \left(\begin{aligned} &\sum_{s=1}^p P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_{s-1}}^{i_{s-1}} \Gamma_{k_s h}^{i_s} P_{k_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p} P_{j_1}^{m_1} \dots P_{j_q}^{m_q} \\ &- \sum_{l=1}^q P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} V_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p} P_{j_1}^{m_1} \dots P_{j_{l-1}}^{m_{l-1}} \Lambda_{j_l h}^{m_l} P_{j_{l+1}}^{m_{l+1}} \dots P_{j_q}^{m_q} \end{aligned} \right) \frac{du^h}{ds} \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

özellikle $\frac{dx}{ds} = \left(\frac{du^i}{ds} \right)$ hız vektörü için

$$\frac{D}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right) = P_k^i \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds}. \quad (2.7.2)$$

Tanım 2.7.1. Verilen bir C eğrisi için

$$\frac{D}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right) = 0 \quad (2.7.3)$$

koşulu sağlanıyorsa eğriye Γ **konneksiyonuna göre geodeziktir** denir.

Γ bir düzgün genel konneksiyon olsun. Bu takdirde

$$\frac{DV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{ds} = P_{k_1}^{i_1} \dots P_{k_p}^{i_p} \frac{\bar{D}V_{h_1 \dots h_q}^{k_1 \dots k_p}}{ds} P_{j_1}^{h_1} \dots P_{j_q}^{h_q} \quad (2.7.4)$$

ve

$$\frac{\bar{D}V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{ds} = \frac{dV_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{ds} + \sum_{l=1}^p \Gamma_{kh}^{i_l} \frac{du^h}{ds} V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_p} - \sum_{t=1}^q V_{j_1 \dots j_{t-1} k j_{t+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{j_t h}^k \frac{du^h}{ds} \quad (2.7.5)$$

dir, dolayısıyla (2.7.3) koşulu

$$\frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{du^i}{ds} \right) = 0 \quad (2.7.6)$$

ile eşdeğerdir.

Bir kontravaryant tensör için, \bar{D} temel kovaryant türevi Γ 'ye göre olan kovaryant türev ile aynıdır dolayısıyla şu teorem verilebilir.

Teorem 2.7.1. M üstünde bir C eğrisi, Γ regüler konneksiyonuna göre bir geodezik ise Γ 'ya göre de bir geodeziktir. Tersisi de geçerlidir, [7].

Tanım 2.7.3. M 'nin her noktasında $P = \lambda(\Gamma)$ 'nin bir özdeğeri olan, M 'de tanımlı bir τ fonksiyonuna bir **öz fonksiyon** denir. C eğrisinin her noktasındaki tanjant vektörü, τ 'ya karşı gelen bir öz vektör, yani

$$P_j^i \frac{du^j}{dt} = \tau \frac{du^i}{dt} \quad (2.7.7)$$

ise C 'ye τ öz fonksiyonuna karşı gelen bir **öz eğri** denir.

Riemann Geometrisinde bilindiği gibi, verilen bir non-singüler $G = g_{ij} du^i \otimes du^j$

simetrik tensör alanı için, $\Gamma_{jh}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\}$ 'lar

$$g_{ki} \left\{ \begin{matrix} i \\ jh \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^h} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^k} \right)$$

ikinci mertebeden Christoffel sembolleri ve D_{G_h} afin konneksiyona göre kovaryant türev olmak üzere

$$1) \Gamma_{jh}^i = \Gamma_{hj}^i$$

$$2) D_{G_h} g_{ij} = 0$$

olacak şekilde, tek şekilde belirlenen bir $\Gamma = (\delta_j^i, \Gamma_{jh}^i)$ afin konneksiyonu vardır. Bu konneksiyon $\Gamma = \Gamma_G$ ile gösterilir ve Levi-Civita konneksiyonu adını alır. Şimdi bu bilgileri Otsuki konneksiyonuna genişletelim. Bunun için gerekli tanımları verelim.

Tanım 2.7.4. M , n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold ve P , $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Her $x \in M$ noktasında $P: T(M) \rightarrow T(M)$ homomorfizması $P(T_x(M))$ 'de bir izomorfizma ve $\text{boy}P(T_x(M)) = m = \text{sabit}$ ise P 'ye M 'de **normaldir** denir.

P , bir normal tensör alanı olsun

$$P(M) = \bigcup_{x \in M} P(T_x(M)) \quad (2.7.9)$$

birleşimi, lifi m -boyutlu $P_x(M) = P(T_x(M))$ vektör uzayı olan, $T(M)$ 'nin bir altmeteti olarak düşünülebilir. P bir izomorfizma olduğundan, çekirdeği

$$N_x(M) = \ker\left(P\Big|_{T_x(M)}\right) \quad (2.7.10)$$

$n-m$ boyutlu bir vektör uzayıdır.

$$N(M) = \bigcup_{x \in M} N_x(M) \quad (2.7.11)$$

birleşimi ise $T(M)$ 'nin bir altmetetidir ve

$$T(M) = P(M) \oplus N(M) \quad (2.7.12)$$

dir. A ve N , izdüşümlerini

$$\begin{aligned} A : T(M) &\rightarrow P(M), & A|_{P(M)} &= 1 \\ N : T(M) &\rightarrow N(M), & N|_{N(M)} &= 1 \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

şeklinde tanımlayalım. A ve N 'yi M 'de $(1,1)$ tipindeki tensör olarak düşünebiliriz. Şimdi $\{V_1, \dots, V_m\}$, $P(M)$ 'nin ve $\{V_{m+1}, \dots, V_n\}$, $N(M)$ 'nin çatı alanları olacak şekilde M 'nin bir komşuluğunda $\{V_1, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_n\}$ bir çatı alanı olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} P(V_\alpha) &= W_\alpha^\beta V_\beta, & P(V_\mu) &= 0, & |W_\alpha^\beta| &\neq 0 \\ A(V_\alpha) &= V_\alpha, & A(V_\mu) &= 0, \\ N(V_\alpha) &= 0, & N(V_\mu) &= V_\mu \end{aligned}$$

denklemleri yazabiliriz. Buradan ise

$$A + N = I, \quad AN = NA = 0, \quad AP = PA = P, \quad NP = PN = 0 \quad (2.7.14)$$

bulunur.

Tanım 2.7.5. P normal bir tensör ve $G = g_{ij} du^i \otimes du^j$ singüler olmayan simetrik metrik tensörü olsun. $P_x(M)$ ve $N_x(M)$ tensörleri G 'ye göre ortogonal iseler o zaman P 'ye *ortogonal olarak G ye bağlıdır* denir.

Tanım 2.7.6.

$$\Gamma = \partial u_h \otimes (P_k^h d^2 u^k + \Gamma_{km}^h du^k \otimes du^m)$$

denklemleri ile verilen bir Γ konneksiyonu için

$$P = \lambda(\Gamma) = P_i^j \partial u_j \otimes du^i$$

tensörü normal ise Γ 'ya *normal genel konneksiyon* denir.

Tanım 2.7.7. Bir Γ normal genel konneksiyon için, N_j^i 'ler N tensörünün lokal bileşenleri olmak üzere, $N_k^i \Gamma_{jh}^k = 0$ koşulu sağlanıyorsa Γ ya *öz*'dür (*proper*) denir.

Tanım 2.7.8. $\Gamma = (P_j^i, \Gamma_{jh}^i)$ bir genel konneksiyon ve $G = g_{ij} du^i \otimes du^j$ non-singüler simetrik kovaryant bir tensör için

$$\begin{aligned} D_h g_{ij} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^h} P_i^l P_j^k - g_{ik} \Lambda_{ih}^l P_j^k - g_{ik} P_i^l \Lambda_{jh}^k \\ &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^h} P_i^l P_j^k - g_{ik} \left(\Gamma_{ih}^l - \frac{\partial P_i^l}{\partial u^h} \right) P_j^k - g_{ik} P_i^l \left(\Gamma_{jh}^k - \frac{\partial P_j^k}{\partial u^h} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^h} (g_{ik} P_i^l P_j^k) - g_{ik} \Gamma_{ih}^l P_j^k - g_{ik} P_i^l \Gamma_{jh}^k \end{aligned} \quad (2.7.15)$$

olmak üzere

$$DG = D_h g_{ij} du^i \otimes du^j \otimes du^h = 0 \quad (2.7.16)$$

koşulu sağlanıyorsa Γ 'ya, G için *metrik koşulunu* sağlar ya da **Otsuki metrik konneksiyonu** denir.

Teorem 2.7.1 Γ , G ye göre bir metrik konneksiyon, $V = (V^i)$ ve $W = (W^i)$ ise $C : x = (u^i(t))$ eğrisi boyunca bu konneksiyona göre kovaryant sabit herhangi iki vektör alanı olsun. O takdirde $g_{ik} P_i^l P_j^k V^i W^j$ bir sabit skalerdir. Tersine, herhangi bir eğri için

bu özellik sağlanıyorsa, verilen Γ konneksiyonu G 'ye göre bir metrik koneksiyondur, [9].

İspat.

V ve W vektör alanları için

$$\begin{aligned}\frac{DV^i}{dt} &= P_j^i \frac{dV^j}{dt} + \Gamma_{jh}^i V^j \frac{du^h}{dt} = 0 \Rightarrow P_j^i \frac{dV^j}{dt} = -\Gamma_{jh}^i V^j \frac{du^h}{dt} \\ \frac{DW^i}{dt} &= P_j^i \frac{dW^j}{dt} + \Gamma_{jh}^i W^j \frac{du^h}{dt} = 0 \Rightarrow P_j^i \frac{dW^j}{dt} = -\Gamma_{jh}^i W^j \frac{du^h}{dt}\end{aligned}$$

ve (2.7.15) den

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (g_{lk} P_i^l P_j^k V^i W^j) &= \frac{d}{dt} (g_{lk} P_i^l P_j^k) V^i W^j + g_{lk} P_i^l P_j^k \frac{dV^i}{dt} W^j + g_{lk} P_i^l P_j^k V^i \frac{dW^j}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (g_{lk} P_i^l P_j^k) V^i W^j + g_{lk} \left(-\Gamma_{ih}^l V^i \frac{du^h}{dt} \right) P_j^k W^j + g_{lk} P_i^l V^i \left(-\Gamma_{jh}^k W^j \frac{du^h}{dt} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^h} (g_{lk} P_i^l P_j^k) V^i W^j \frac{du^h}{dt} - g_{lk} P_j^k \Gamma_{ih}^l V^i W^j \frac{du^h}{dt} - g_{lk} P_i^l \Gamma_{jh}^k V^i W^j \frac{du^h}{dt} \\ &= \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^h} (P_i^l P_j^k) V^i W^j \frac{du^h}{dt} + \frac{\partial P_i^l}{\partial u^h} (g_{lk} P_j^k) V^i W^j \frac{du^h}{dt} + \frac{\partial P_j^k}{\partial u^h} (g_{lk} P_i^l) V^i W^j \frac{du^h}{dt} \\ &\quad - g_{lk} P_j^k \Gamma_{ih}^l V^i W^j \frac{du^h}{dt} - g_{lk} P_i^l \Gamma_{jh}^k V^i W^j \frac{du^h}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial u^h} (P_i^l P_j^k) - g_{lk} P_j^k \left(\Gamma_{ih}^l - \frac{\partial P_i^l}{\partial u^h} \right) - g_{lk} P_i^l \left(\Gamma_{jh}^k - \frac{\partial P_j^k}{\partial u^h} \right) \right) V^i W^j \frac{du^h}{dt} \\ &= D_h g_{ij} V^i W^j \frac{du^h}{dt} = 0\end{aligned}$$

bulunur ki bu teoremi ispatlar.

Teorem 2.7.2. P ortogonal olarak G 'ye bağlı olmak üzere $P = P_j^i \partial u_i \otimes du^j$ bir normal tensör ve $G = g_{ij} du^i \otimes du^j$ singüler olmayan simetrik tensör alanı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan:

- 1) $P = \lambda(\Gamma)$,
- 2) Γ öz'dür, yani $N\Gamma = \Gamma N = 0$,
- 3) Γ , G ye göre bir metrik koneksiyondur yani $D_h g_{ij} = 0$,

bir Γ normal genel konneksiyon bulunabilir. Üstelik, A_j^i 'ler A nın lokal koordinatları, $S_{jh}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{jh}^i - \Gamma_{hj}^i)$ ve “ D_{G_h} ” sembolü G 'den indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonuna göre kovaryant türev olmak üzere

$$4) S_{kh}^i A_j^k = \frac{1}{2} A_l^i (D_{G_h} P_k^l - D_{G_k} P_h^l) A_j^k$$

koşulunu da eklersek, Γ tek şekilde belirlenebilir, [16].

Bu teorem regüler genel konneksiyonlar için de geçerlidir, çünkü regüler genel konneksiyonlar için P sadece görüntüsünde değil her noktasında izomorfizmadır. Yani her regüler genel konneksiyon bir normal konneksiyondur.

2.8. GENEL KONNEKSİYONLARIN EĞRİLİK VE BURULMA FORMLARI

Bu bölümde klasik konneksiyonların genelleştirilmesi olan genel konneksiyonların burulma ve eğrilik formlarını vereceğiz. İlk önce bölüm 2.2.2'de tanımladığımız $\mathfrak{B}(M)$ çatı demetinde, Γ genel konneksiyonu ile tanımlanan 1-formları bulalım.

a_λ^i 'ları, (U, u^i) koordinat komşuluğunda tanımlı birer fonksiyon olarak düşünelim. Bu takdirde $e_\lambda \in \Psi(T(M))$ olmak üzere

$$e_\lambda = a_\lambda^i \partial u_i$$

kontravaryant vektör alanı için (2.4.19) ve (2.4.20) den

$$Da_\lambda^i = (D_h a_\lambda^i) du^h = \left(P_j^i \frac{\partial a_\lambda^j}{\partial u^h} + \Gamma_{jh}^i a_\lambda^j \right) du^h = P_j^i da_\lambda^j + a_\lambda^j \Gamma_{jh}^i du^h$$

olmak üzere

$$De_\lambda = \partial u_i \otimes Da_\lambda^i,$$

buluruz. b_i^λ fonksiyonları (2.2.19) ile tanımladığımız a_λ^i 'nin ters fonksiyonları olsun.

$e_\lambda = a_\lambda^i \partial u_i \Rightarrow \partial u_i = e_\mu b_i^\mu$ yi kullanarak

$$\begin{aligned} De_\lambda &= \partial u_i \otimes (P_j^i da_\lambda^j + \Gamma_{jh}^i a_\lambda^j du^h) \\ &= e_\mu \otimes b_i^\mu (P_j^i da_\lambda^j + \Gamma_{jh}^i a_\lambda^j du^h) \end{aligned}$$

buluruz. Şimdi de $\{\mathfrak{B}(M), M, \pi\}$ demetinde $\pi^{-1}(U)$ 'nin $u^i, \beta, (\beta \in L_n^1)$ lokal koordinatlarını kullanarak n^2 tane

$$\theta_\lambda^\mu = b_i^\mu(\beta) \{P_j^i(u) da_\lambda^j(\beta) + \Gamma_{jh}^i(u) a_\lambda^j(\beta) du^h\} \quad (2.8.1)$$

diferansiyel formunu tanımlayalım. Burada b_j^i ler

$$b_j^i(\alpha) = a_j^i(\alpha^{-1}) \quad (2.8.2)$$

olacak şekilde $GL(n, R) = L_n^1$ 'de fonksiyonlardır.

Lemma 3.8.1 θ_μ^λ 'lar $\mathfrak{B}(M)$ uzayında tanımlı ve lokal koordinat seçiminden bağımsızdırlar, [7].

İspat. $\mathfrak{B}(M)$ 'nin herhangi bir elemanı M 'nin bir çatısı olduğundan, $b \in \pi^{-1}(U) \subset \mathfrak{B}(M)$ için

$$e_\lambda(b) = a_\lambda^i(\beta) \partial u_i$$

alırsak

$$\beta = h_U : U \rightarrow L_n^1$$

buluruz. Herhangi iki $(U, u^i), (V, v^i)$ ve $U \cap V \neq \emptyset$ koordinat komşuluğu için

$$(\sigma \cdot g_{UV}) h_U = h_V \quad (2.8.3)$$

denklemini geçerlidir. Bölüm 2.4'de tanımladığımız

$$a_j^i \cdot f_U = P_j^i, \quad a_{jk}^i \cdot f_U = \Gamma_{jk}^i \quad (2.8.4)$$

ve (2.3.1) denklemlerini kullanarak, (2.8.1) denklemini

$$\begin{aligned}
\theta_\lambda^\mu &= b_i^\mu(\beta) \{ P_j^i(u) da_\lambda^j(\beta) + \Gamma_{jh}^i(u) a_\lambda^j(\beta) du^h \} \\
\theta_\lambda^\mu &= (b_i^\mu \cdot h_U) \{ (a_j^i \cdot f_U) d(a_\lambda^j \cdot h_U) + (a_{jh}^i \cdot f_U) (a_\lambda^j \cdot h_U) du^h \} = \\
&= (a_i^\mu \cdot h_U^{-1}) (a_j^i \cdot f_U) d(a_\lambda^j \cdot h_U) + (a_i^\mu \cdot h_U^{-1}) (a_{jh}^i \cdot f_U) (a_\lambda^j \cdot h_U) du^h
\end{aligned} \tag{2.8.5}$$

$$\theta_\lambda^\mu = (a_i^\mu \cdot h_U^{-1} f_U) d(a_\lambda^j \cdot h_U) + (a_{ih}^\mu \cdot h_U^{-1} f_U) (a_\lambda^j \cdot h_U) du^h \tag{2.8.6}$$

şeklinde yazabiliriz. (2.8.3) ve (2.4.4) den

$$h_U^{-1} f_U = h_V^{-1} (\sigma \cdot g_{VU}) f_U = h_V^{-1} f_V g_{VU} \tag{2.8.7}$$

buluruz ve bunu (2.8.6) da yerine koyarsak

$$\theta_\lambda^\mu = a_i^\mu (h_V^{-1} f_V) d(a_\lambda^i (h_V)) + a_{jk}^\mu (h_V^{-1} f_V) a_\lambda^j (h_V) dv^k$$

elde ederiz ki bu, θ_λ^μ diferansiyel formlarının M 'deki koordinat seçiminden bağımsız olduğunu gösterir.

$\mathfrak{B}(M)$ 'deki bu θ_λ^μ diferansiyel formlara, Γ *nin* $\mathfrak{B}(M)$ *deki konneksiyon formları* denir. $\mathfrak{B}(M)$ de (2.2.23) den gördüğümüz gibi n tane:

$$\theta^\mu = b_i^\mu(\beta) du^i = (a_i^\mu \cdot h_U^{-1}) du^i \tag{2.8.8}$$

diferansiyel formu vardır. $\mathfrak{B}(M)$ üstünde π tarafından indirgenmiş P tensörünü

$$P_\lambda^\mu = b_\lambda^\mu(\beta) P_i^j(u) a_\lambda^i(\beta) \tag{2.8.9}$$

şeklinde tanımlayalım, [7]. Bu denklem

$$\begin{aligned}
P_\lambda^\mu &= a_j^\mu (h_U^{-1}) a_i^j (f_U) a_\lambda^i (h_U) = \\
&= a_\lambda^\mu \cdot (h_U^{-1} f_U h_U)
\end{aligned} \tag{2.8.10}$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece (2.8.5), (2.8.8) ve $a_{jk}^i \cdot h_U = 0$ denklemlerini kullanarak " \wedge " diferansiyel formların dış çarpımı olmak üzere, aşağıdaki ikinci mertebeden diferansiyel formları tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
P_\lambda^\mu d\theta^\lambda + \theta_\lambda^\mu \wedge \theta^\lambda &= (a_\lambda^\mu \cdot h_U^{-1} f_U h_U) d((b_j^\lambda \cdot h_U) du^j) + \\
&\quad \{ (a_i^\mu \cdot h_U^{-1} f_U) d(a_\lambda^i \cdot h_U) + (a_{ih}^\mu \cdot h_U^{-1} f_U) (a_\lambda^i \cdot h_U) du^h \} \wedge (b_j^\lambda \cdot h_U) du^j \\
&= - (a_{ih}^\mu \cdot h_U^{-1} f_U) du^i \wedge du^h \\
&= - (b_i^\mu \cdot h_U) (a_{ih}^i \cdot f_U) du^i \wedge du^h,
\end{aligned}$$

yani

$$P_\lambda^\mu d\theta^\lambda + \theta_\lambda^\mu \wedge \theta^\lambda = - (b_j^\mu \cdot h_U) (a_{ih}^j \cdot f_U) du^i \wedge du^h .$$

Dolayısıyla,

$$\Omega^j = - (a_{ih}^j \cdot f_U) du^i \wedge du^h = - \Gamma_{ih}^j du^i \wedge du^h \quad (2.8.11)$$

alırsak

$$\Theta^\mu \equiv P_\lambda^\mu d\theta^\lambda + \theta_\lambda^\mu \wedge \theta^\lambda = b_j^\mu (\beta) \Omega^j \quad (2.8.12)$$

buluruz. Buradan da $\mathfrak{B}(M)$ 'de ikinci mertebeden Θ^μ diferansiyel formların, M 'deki vektörel diferansiyel formlardan π tarafından indirgenmiş olduğunu gösterelim.

Lemma 3.7.3 (2.8.11) ile tanımlanan Ω^j 'ler M 'nin vektörel formda diferansiyel formlarıdır, [7].

İspat. (2.3.1), (2.3.6) ve (2.4.4) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
&(a_{ih}^j \cdot f_V) dv^i \wedge dv^h \\
&= (a_{ih}^j \cdot f_V) (a_i^k g_{VU}) du^i \wedge (a_m^h g_{VU}) du^m \\
&= a_k^j (g_{VU}) a_{ih}^k (f_U) du^i \wedge du^h
\end{aligned}$$

buluruz. Yani,

$$(a_{ih}^j \cdot f_V) dv^i \wedge dv^h = \frac{\partial v^j}{\partial u^k} a_{ih}^k (f_U) du^i \wedge du^h. \quad (2.8.13)$$

Ω^j lere **Γ genel konneksiyonun burulma formları** denir. Lokal bileşenleri

$$T_{ih}^j = \Gamma_{ih}^j - \Gamma_{hi}^j \quad (2.8.14)$$

olan (1,2) tipinden tanjant tensör alanına ise **Γ 'nin burulma tensörü** denir. Böylece (2.8.11) den

$$\Omega^j = -\frac{1}{2} T_{ih}^j du^i \wedge du^h \quad (2.8.15)$$

buluruz. Şimdi de Γ nin eğrilik formlarını vereceğiz. İlk önce $P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu$ ifadesini konneksiyon bileşenleri cinsinden ifade edelim:

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu &= P_\nu^\mu d \left\{ b_i^\nu \left(P_i^j da_\sigma^i + \Gamma_{ih}^l a_\sigma^i du^h \right) \right\} \\ &= P_\nu^\mu \left\{ db_j^\nu \wedge P_i^j da_\sigma^i + db_j^\nu \wedge \Gamma_{ih}^j a_\sigma^i du^h \right\} \\ &\quad + P_\nu^\mu b_j^\nu \left\{ dP_i^j \wedge da_\sigma^i + d\Gamma_{ih}^j \wedge a_\sigma^i du^h + \Gamma_{ih}^j da_\sigma^i \wedge du^h \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu &= b_j^\mu \left(P_i^j da_\nu^i + \Gamma_{im}^j a_\nu^i du^m \right) \wedge b_k^\nu \left(P_h^k da_\sigma^h + \Gamma_{hl}^k a_\sigma^h du^l \right) \\ &= -P_\nu^\mu db_k^\nu \wedge P_h^k da_\sigma^h - P_\nu^\mu db_k^\nu \wedge \Gamma_{hl}^k a_\sigma^h du^l \\ &\quad + b_j^\mu \Gamma_{im}^j du^m \wedge P_h^i da_\sigma^h + b_j^\mu \Gamma_{im}^j du^m \wedge \Gamma_{hl}^i a_\sigma^h du^l \end{aligned}$$

denklemlerinden (2.4.12)'yi kullanarak

$$\begin{aligned} P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu &= b_j^\mu \left\{ P_i^j d\Gamma_{ik}^l \wedge du^k + \Gamma_{ih}^j du^h \wedge \Gamma_{ik}^l du^k \right\} a_\sigma^i \\ &\quad + b_j^\mu \left\{ \Gamma_{ih}^j du^h P_i^l - P_i^j \Lambda_{ih}^l du^h \right\} \wedge da_\sigma^i \end{aligned} \quad (2.8.16)$$

elde edilir. Şimdi

$$\pi_\lambda^\mu \equiv \theta_\lambda^\mu - dP_\lambda^\mu \quad (2.8.17)$$

alalım. Bu eşitliği aşağıdaki gibi ifade edersek

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda^\mu &= b_j^\mu \left(P_i^j da_\lambda^i + \Gamma_{ih}^j a_\lambda^i du^h \right) - d \left(b_j^\mu P_i^j a_\lambda^i \right) \\
&= \cancel{b_j^\mu P_i^j da_\lambda^i} + b_j^\mu \Gamma_{ih}^j a_\lambda^i du^h - db_j^\mu P_i^j a_\lambda^i - \cancel{b_j^\mu dP_i^j a_\lambda^i} - b_j^\mu P_i^j da_\lambda^i \\
&= -db_j^\mu P_i^j a_\lambda^i + b_j^\mu \left(\Gamma_{ih}^j du^h - dP_i^j \right) a_\lambda^i \\
&= -db_j^\mu P_i^j a_\lambda^i + b_j^\mu \Lambda_{ih}^j du^h a_\lambda^i
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece

$$\pi_\lambda^\mu = \left(-db_j^\mu P_i^j + b_j^\mu \Lambda_{ih}^j du^h \right) a_\lambda^i \quad (2.8.18)$$

ya da $b_l^\mu da_\nu^l a_j^\nu = -db_j^\mu$ olduğunu kullanarak

$$\pi_\lambda^\mu = b_j^\mu \left(da_\nu^j P_\lambda^\nu + \Lambda_{ih}^j du^h a_\lambda^i \right) \quad (2.8.19)$$

buluruz.

Eğer b_j^μ 'leri bir kovaryant tensörün bileşenleri olarak düşünersek

$$\begin{aligned}
Db_i^\mu &= db_j^\mu P_i^j - b_j^\mu \Lambda_{ih}^j du^h \\
&= -b_j^\mu \Lambda_{ih}^j du^h + db_j^\mu P_i^j
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi (2.8.19) da yerine yazarsak

$$-\pi_\lambda^\mu = a_\lambda^i \left(Db_i^\mu \right)$$

buluruz. Dolayısıyla $-\pi_\lambda^\mu$ lar, M deki formlardan türetilen, $\mathfrak{B}(M)$ de diferansiyel formlardır.

Şimdi, $\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu$ ifadesini inceleyelim. Yukarıda verilen tanımları kullanarak

$$\begin{aligned}
\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu &= b_j^\mu \left(P_i^j da_\nu^i + \Gamma_{ih}^j a_\nu^i du^h \right) P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu b_j^\nu \left(da_\rho^j P_\sigma^\rho + \Lambda_{ih}^j a_\sigma^i du^h \right) \\
&= b_j^\mu \left(\Gamma_{ih}^j du^h P_i^l - P_l^j \Lambda_{ih}^l du^h \right) a_\sigma^i
\end{aligned} \quad (2.8.20)$$

buluruz. Buradan ise

$$b_j^\mu (\Gamma_{lh}^j du^h P_i^l - P_i^j \Lambda_{ih}^l du^h) = (\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu) b_i^\sigma$$

elde edilir ve bunu (2.8.16) da yerine koyarsak

$$P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu = b_j^\mu \{P_l^j d\Gamma_{ik}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{ik}^l du^k\} a_\sigma^i + (\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu) \wedge b_i^\rho da_\sigma^i$$

buluruz. Bu denklemin sağ tarafını (2.8.19) ile karşılaştırsak (2.8.9)'u kullanarak

$$\begin{aligned} (P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu) P_\lambda^\sigma &= b_j^\mu \{P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k\} a_\sigma^m P_\lambda^\sigma \\ &\quad + (\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu) \wedge b_m^\rho da_\sigma^m P_\lambda^\sigma \\ &= b_j^\mu \{P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k\} P_i^m a_\lambda^i \\ &\quad + (\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu) \wedge (\pi_\lambda^\rho - b_j^\rho \Lambda_{ih}^j du^h a_\lambda^i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu) P_\lambda^\sigma &= b_j^\mu \{P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k\} P_i^m a_\lambda^i \\ &\quad + (\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu) \wedge \pi_\lambda^\rho - (\theta_\nu^\mu P_\rho^\nu - P_\nu^\mu \pi_\rho^\nu) b_j^\rho \Lambda_{ih}^j du^h a_\lambda^i \\ (P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu) P_\lambda^\sigma &- (\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu) \wedge \pi_\lambda^\sigma \\ &= b_j^\mu \{P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k\} P_i^m a_\lambda^i \\ &\quad - (\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu) b_j^\sigma \Lambda_{ih}^j du^h a_\lambda^i \end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla, $\mathfrak{B}(M)$ ve M 'deki diferansiyel formları, sırasıyla, şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\Theta_\lambda^\mu = (P_\nu^\mu d\theta_\sigma^\nu + \theta_\nu^\mu \wedge \theta_\sigma^\nu) P_\lambda^\sigma - (\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu) \wedge \pi_\lambda^\sigma \quad (2.8.21)$$

ve

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= \{P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k\} P_i^m \\ &\quad - (\theta_\nu^\mu P_\sigma^\nu - P_\nu^\mu \pi_\sigma^\nu) b_j^\sigma \wedge \Lambda_{ih}^j du^h \\ &\stackrel{(2.8.20)}{=} (P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k) P_i^m \\ &\quad - (\Gamma_{lh}^j du^h P_m^l - P_l^j \Lambda_{mh}^l du^h) \wedge \Lambda_{ik}^m du^k. \end{aligned} \quad (2.8.22)$$

(2.4.20)'den $D_h \delta_j^i = \Gamma_{kh}^i P_j^k - P_k^i \Lambda_{jh}^k$ olduğu kullanılarak (2.8.22) denklemini

$$\Omega_i^j = \left(P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k \right) P_i^m - D\delta_m^j \wedge \Lambda_{ik}^m du^k \quad (2.8.23)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\Theta_\lambda^\mu = b_j^\mu \Omega_i^j a_\lambda^i \quad (2.8.24)$$

bulunur. Buradan Ω_i^j 'lerin M de (1,1) tipinden tensörel diferansiyel formlar olduğu görülür. $\lambda(\Gamma) = P = I$ için Ω_i^j 'ler klasik afin konneksiyonun eğrilik formlarıdır.

Ω_i^j 'lere Γ 'nin **eğrilik formları** ve ona karşı gelen, lokal bileşenleri R_{ihk}^j olan

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{ihk}^j du^h \wedge du^k \quad (2.8.25)$$

tensör alanına Γ 'nin **eğrilik tensörü** denir.

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= \left(P_l^j d\Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k \right) P_i^m - D\delta_m^j \wedge \Lambda_{ik}^m du^k \\ &= \left\{ \begin{aligned} &P_l^j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{mk}^l}{\partial u^h} du^h \wedge du^k + \frac{\partial \Gamma_{mh}^l}{\partial u^k} du^k \wedge du^h \right) + \\ &\frac{1}{2} \left(\Gamma_{lh}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k + \Gamma_{lk}^j du^k \wedge \Gamma_{mh}^l du^h \right) \end{aligned} \right\} P_i^m \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ D_h \delta_m^j du^h \wedge \Lambda_{ik}^m du^k + D_k \delta_m^j du^k \wedge \Lambda_{ih}^m du^h \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left(P_l^j \left(\frac{\partial \Gamma_{mk}^l}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{mh}^l}{\partial u^k} \right) + \Gamma_{lh}^j \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{mh}^l \right) P_i^m \\ &- D_h \delta_m^j \Lambda_{ik}^m + D_k \delta_m^j \Lambda_{ih}^m \end{aligned} \right\} du^h \wedge du^k \end{aligned}$$

olduğundan $D_h \delta_i^j = \Gamma_{lh}^j P_i^l - P_l^j \Lambda_{ih}^l$ olmak üzere R_{ihk}^j lar

$$\begin{aligned} R_{ihk}^j &= \left(P_l^j \left(\frac{\partial \Gamma_{mk}^l}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{mh}^l}{\partial u^k} \right) + \Gamma_{lh}^j \Gamma_{mk}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{mh}^l \right) P_i^m \\ &\quad - \left(D_h \delta_{m:h}^j \right) \Lambda_{ik}^m + D_k \delta_m^j \Lambda_{ih}^m \end{aligned} \quad (2.8.26)$$

şeklinde verilir ve

$$R_{i \quad hk}^j = -R_{i \quad kh}^j \quad (2.8.27)$$

bulunur.

2.8.1. Regüler Genel Konneksiyonların Eğrilik Formları

Bu bölümde Γ genel konneksiyonunun regüler olduğunu varsayalım. Regüler genel konneksiyonlar için $\lambda(\Gamma) = P$ bir izomorfizma olduğundan $P_i^k Q_k^j = \delta_i^j$ olacak şekilde bir Q tensörü vardır. Γ 'nin kontravaryant ve kovaryant kısımları, sırasıyla, $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ olsun. $'D$ konneksiyonunun kontravaryant kısmına göre kovaryant türev olmak üzere (2.5.8) ve (2.6.11) denklemleri ile verilen

$$\begin{aligned} \Gamma_{ih}^j &= P_l^j ' \Gamma_{ih}^l \\ \delta_{i,h}^j &= P_l^j ' \nabla_h P_i^l \end{aligned}$$

ifadelerini (2.8.23)'de yerine koyarsak $'DP_i^m = \left(\frac{\partial P_i^m}{\partial u^k} + ' \Gamma_{lk}^m P_i^l - P_s^m ' \Gamma_{ik}^s \right) du^k$ ve

$P_i^j P_j^l = M_i^l$ notasyonunu kullanarak

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= \left(P_l^j d \Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \Gamma_{ih}^j du^h \wedge \Gamma_{mk}^l du^k \right) P_i^m - D \delta_m^j \wedge \Lambda_{ik}^m du^k \\ &= \left\{ P_l^j d \left(P_i^l ' \Gamma_{mk}^l \right) \wedge du^k + P_i^j ' \Gamma_{lh}^l du^h \wedge P_s^l ' \Gamma_{mk}^s du^k \right\} P_i^m \\ &\quad - P_i^j ' DP_m^l \wedge \left(P_s^m ' \Gamma_{ik}^s du^k - dP_i^m \right) \\ &= \left\{ P_l^j dP_i^l \wedge ' \Gamma_{mk}^l du^k + M_i^j d ' \Gamma_{mk}^l \wedge du^k + \right\} P_i^m \\ &\quad \left\{ P_i^j ' \Gamma_{lh}^l du^h \wedge P_s^l ' \Gamma_{mk}^s du^k \right. \\ &\quad \left. + P_i^j ' DP_m^l \wedge \left(' DP_i^m - ' \Gamma_{lk}^m du^k P_i^l \right) \right\} P_i^m \\ &= \left\{ M_i^j d ' \Gamma_{mk}^l \wedge du^k + M_b^j ' \Gamma_{ih}^b du^h \wedge ' \Gamma_{mk}^l du^k \right\} P_i^m \\ &\quad + P_i^j ' DP_m^l \wedge ' DP_i^m \end{aligned}$$

buluruz ve buradan da

$$\Omega_i^j = M_l^j \left\{ d ' \Gamma_{mk}^l \wedge du^k + ' \Gamma_{ih}^l du^h \wedge ' \Gamma_{mk}^l du^k \right\} P_i^m + P_l^j ' DP_m^l \wedge ' DP_i^m$$

elde ederiz. Γ 'nin $'\Gamma$ kontravaryant kısmı bir afin konneksiyon olduğundan,

$'\omega_i^j = ' \Gamma_{ih}^j du^h$ konneksiyon formları olmak üzere, eğrilik formlarını

$$'\Omega_i^j = d'\omega_i^j + '\omega_i^j \wedge '\omega_i^j,$$

şeklinde gösterirsek üstteki denklemleri

$$\Omega_i^j = M_l^j '\Omega_m^l P_i^m + P_l^j 'DP_m^l \wedge 'DP_i^m \quad (2.8.28)$$

biçiminde yazabiliriz. Γ 'nin $''\Gamma$ kovaryant kısmının konneksiyon formlarını ise (2.5.13) den

$$\begin{aligned} ''\omega_i^j &= ''\Gamma_{ih}^j du^h = \left(\Gamma_{ih}^j - \frac{\partial P_l^j}{\partial u^h} \right) Q_i^l du^h = \left(P_k^j '\Gamma_{ih}^k - \frac{\partial P_l^j}{\partial u^h} \right) Q_i^l du^h \\ &= P_k^j '\omega_l^k Q_i^l - dP_l^j Q_i^l \\ &= dQ_i^l P_l^j + P_k^j '\omega_l^k Q_i^l \end{aligned}$$

ya da

$$''\omega_i^j = P_k^j (dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l) \quad (2.8.29)$$

şeklinde buluruz. $''\Gamma$ 'ya göre eğrilik formlarını

$$''\Omega_i^j = d''\omega_i^j + ''\omega_m^j \wedge ''\omega_i^m \quad (2.8.30)$$

şeklinde yazarak ve $dP_k^j \wedge dQ_i^k = 0$ olduğunu kullanarak,

$$\begin{aligned} ''\Omega_i^j &= d''\omega_i^j + ''\omega_m^j \wedge ''\omega_i^m \\ ''\Omega_i^j &= d \left\{ P_k^j (dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l) \right\} + P_l^j (dQ_m^l + '\omega_l^k Q_m^l) \wedge P_s^m (dQ_i^s + '\omega_h^s Q_i^h) \\ &= dP_k^j (dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l) + P_k^j d(dQ_i^k + '\omega_l^k Q_i^l) \\ &\quad + P_l^j (dQ_m^l + '\omega_l^k Q_m^l) \wedge P_s^m (dQ_i^s + '\omega_h^s Q_i^h) \\ &= P_k^j (d'\omega_h^k + '\omega_l^k \wedge '\omega_h^l) Q_i^h \\ &= P_k^j '\Omega_h^k Q_i^h \end{aligned}$$

yani,

$$''\Omega_i^j = P_k^j '\Omega_h^k Q_i^h \quad (2.8.31)$$

buluruz. Böylece,

$$\begin{aligned}
{}^{\prime\prime}DP_i^j &= \left(\frac{\partial P_i^j}{\partial u^k} + {}^{\prime\prime}\Gamma_{ik}^j P_i^l - P_s^j {}^{\prime\prime}\Gamma_{ik}^s \right) du^k = dP_i^j + {}^{\prime\prime}\omega_l^j P_i^l - P_l^j {}^{\prime\prime}\omega_l^j \\
&= \underbrace{dP_i^j}_{=-P_l^j dQ_l^k P_i^l} + \left(\cancel{P_i^j dQ_l^k} + P_k^j {}^{\prime\prime}\omega_h^k Q_l^h \right) P_i^l - P_l^j \left(\underbrace{P_m^l dQ_i^m}_{=-dP_l^h Q_i^h} + P_m^l {}^{\prime\prime}\omega_h^m Q_i^h \right) \\
&= P_k^j \left(dP_h^k + {}^{\prime\prime}\omega_l^k P_h^l - P_l^k {}^{\prime\prime}\omega_l^h \right) Q_i^h
\end{aligned}$$

ya da

$${}^{\prime\prime}DP_i^j = P_k^j ({}^{\prime}DP_h^k) Q_i^h \quad (2.8.32)$$

elde ederiz. (2.8.31) ve (2.8.32) denklemlerini (2.8.28)'de yazarsak

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j &= M_l^j {}^{\prime}\Omega_m^l P_i^m + P_l^j {}^{\prime}DP_m^l \wedge {}^{\prime}DP_i^m \\
\Omega_i^j &= M_l^j Q_h^l {}^{\prime}\Omega_k^h P_m^k P_i^m + P_l^j Q_h^l ({}^{\prime}DP_i^h) P_m^l \wedge Q_s^m ({}^{\prime}DP_k^s) P_i^k \\
&= P_h^j {}^{\prime}\Omega_k^h M_i^k + {}^{\prime}DP_h^j \wedge ({}^{\prime}DP_k^h) P_i^k
\end{aligned}$$

yani

$$\Omega_i^j = P_h^j {}^{\prime}\Omega_k^h M_i^k + {}^{\prime}DP_h^j \wedge DP_k^h P_i^k \quad (2.8.33)$$

buluruz.

Ayrıca, $\mathfrak{B}(M)$ 'deki ${}^{\prime}\Gamma$ ve ${}^{\prime\prime}\Gamma$ 'nün eğrilik formlarını, sırasıyla, ${}^{\prime}\Theta_\lambda^\mu$ ve ${}^{\prime\prime}\Theta_\lambda^\mu$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned}
{}^{\prime}\Theta_\lambda^\mu &= b_j^\mu {}^{\prime}\Omega_i^j a_\lambda^i \\
{}^{\prime\prime}\Theta_\lambda^\mu &= b_j^\mu {}^{\prime\prime}\Omega_i^j a_\lambda^i
\end{aligned}$$

buluruz, dolayısıyla (2.8.28), (2.8.33) ve (2.8.24) den, $b_k^\sigma M_i^k a_\lambda^i = M_\lambda^\sigma = P_\epsilon^\sigma P_\lambda^\epsilon$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Theta_{\lambda}^{\mu} &= b_j^{\mu} \Omega_i^j a_{\lambda}^i \\
\Theta_{\lambda}^{\mu} &= b_j^{\mu} \left(P_h^j \Omega_k^h M_i^k + DP_h^j \wedge DP_k^h P_i^k \right) a_{\lambda}^i \\
\Theta_{\lambda}^{\mu} &= b_j^{\mu} P_h^j \Omega_k^h M_i^k a_{\lambda}^i + b_j^{\mu} DP_h^j \wedge DP_k^h P_i^k a_{\lambda}^i \\
\Theta_{\lambda}^{\mu} &= \underbrace{b_j^{\mu} P_h^j a_{\rho}^h}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} \underbrace{b_h^{\rho} \Omega_k^h a_{\sigma}^k}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} \underbrace{b_k^{\sigma} M_i^k}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} a_{\lambda}^i + \underbrace{b_j^{\mu} DP_h^j a_{\rho}^h}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} \wedge \underbrace{b_h^{\rho} DP_k^h a_{\sigma}^k}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} \underbrace{b_k^{\sigma} P_i^k}_{\theta_{\sigma}^{\rho}} a_{\lambda}^i \\
\Theta_{\lambda}^{\mu} &= P_{\rho}^{\mu} \theta_{\sigma}^{\rho} M_{\lambda}^{\sigma} + DP_{\rho}^{\mu} \wedge DP_{\sigma}^{\rho} P_{\lambda}^{\sigma}
\end{aligned} \tag{2.8.34}$$

ve benzer şekilde

$$\Theta_{\lambda}^{\mu} = M_{\rho}^{\mu} \theta_{\sigma}^{\rho} P_{\lambda}^{\sigma} + P_{\rho}^{\mu} DP_{\sigma}^{\rho} \wedge DP_{\lambda}^{\sigma} \tag{2.8.35}$$

bulunur.

Son olarak Γ regüler genel konneksiyonun temel kovaryant türevi için Ricci denklemlerini inceleyelim. Örneğin, lokal bileşenleri U_i^j 'ler olan (1,1) tipindeki tensör alanını göz önüne alalım. (2.6.4) den

$$\begin{aligned}
\bar{D}_h U_i^j &= \frac{\partial U_i^j}{\partial u^h} + \Gamma_{lh}^j U_i^l - U_i^j \Gamma_{ih}^l \\
\bar{D}_k \bar{D}_h U_i^j &= \frac{\bar{D}_h \partial U_i^j}{\partial u^k} + \Gamma_{mk}^j \bar{D}_h U_i^m - \bar{D}_h U_m^j \Gamma_{ik}^m - \bar{D}_m U_i^j \Gamma_{hk}^m = \\
&= \frac{\partial^2 U_i^j}{\partial u^k \partial u^h} + \frac{\partial \Gamma_{lh}^j}{\partial u^k} U_i^l + \Gamma_{lh}^j \frac{\partial U_i^l}{\partial u^k} - \frac{\partial U_i^j}{\partial u^k} \Gamma_{ih}^l \\
&\quad - U_i^j \frac{\partial \Gamma_{ih}^l}{\partial u^k} + \Gamma_{mk}^j \left(\frac{\partial U_i^m}{\partial u^h} + \Gamma_{ih}^m U_i^l - U_i^m \Gamma_{ih}^l \right) \\
&\quad - \left(\frac{\partial U_m^j}{\partial u^h} + \Gamma_{ih}^j U_m^l - U_i^j \Gamma_{mh}^l \right) \Gamma_{ik}^m - (D_m U_i^j) \Gamma_{hk}^m
\end{aligned}$$

buluruz. Şimdi de

$$\begin{aligned}
{}^{\prime}R_{ihk}^j &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^j}{\partial u^k} + \Gamma_{lh}^j \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ih}^l \\
{}^{\prime\prime}R_{ihk}^j &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^h} - \frac{\partial \Gamma_{ih}^j}{\partial u^k} + \Gamma_{lh}^j \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lk}^j \Gamma_{ih}^l
\end{aligned} \tag{2.8.36}$$

olmak üzere $'\Gamma$ ve $''\Gamma$ ' nün eğrilik tensörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} '\Omega_i^j &= \frac{1}{2} 'R_{ihk}^j du^h \wedge du^k \\ ''\Omega_i^j &= \frac{1}{2} ''R_{ihk}^j du^h \wedge du^k, \end{aligned} \quad (2.8.36)$$

şeklinde,

$$\begin{aligned} 'T_{ih}^j &= '\Gamma_{ih}^j - '\Gamma_{hi}^j \\ ''T_{ih}^j &= ''\Gamma_{ih}^j - ''\Gamma_{hi}^j \end{aligned} \quad (2.8.37)$$

olmak üzere ve burulma tensörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} '\Omega^j &= '\omega_i^j \wedge du^i = -\frac{1}{2} 'T_{ih}^j du^i \wedge du^h \\ ''\Omega^j &= ''\omega_i^j \wedge du^i = -\frac{1}{2} ''T_{ih}^j du^i \wedge du^h \end{aligned} \quad (2.8.38)$$

şeklinde verilsin. $\bar{D}_{[h}\bar{D}_{k]}U_i^j = \frac{1}{2}(\bar{D}_k\bar{D}_hU_i^j - \bar{D}_h\bar{D}_kU_i^j)$ gösterimini kullanarak

$$2\bar{D}_{[h}\bar{D}_{k]}U_i^j = \bar{D}_k\bar{D}_hU_i^j - \bar{D}_h\bar{D}_kU_i^j = 'R_{lkh}^j U_i^l - U_i^l ''R_{lkh}^j - \bar{D}_m U_i^j ''T_{hk}^m \quad (2.8.39)$$

denklemini buluruz.

Tensör çarpımının kovaryant türevi için

$$\bar{D}_h \left(V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right) = \left(\bar{D}_h V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \right) W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} + V_{k_1 \dots k_q}^{h_1 \dots h_p} \left(\bar{D}_h W_{j_{q+1} \dots j_{q+b}}^{i_{p+1} \dots i_{p+a}} \right) \quad (2.8.40)$$

şeklindeki klasik formüller, temel kovaryant türev için de geçerlidir. Bu formülleri kullanarak aşağıdaki genel lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.8.1 Bileşenleri $V_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ olan herhangi bir tensör alanı için aşağıdaki Ricci formülü geçerlidir, [7]:

$$\begin{aligned}
2\bar{D}_{[k}\bar{D}_{h]}V_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} &= \bar{D}_k\bar{D}_hV_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} - \bar{D}_h\bar{D}_kV_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} \\
&= -\sum_{s=1}^p R_{ljk}^{i_s} V_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} + \sum_{t=1}^q V_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} R_{i_lhk}^t - \bar{D}_l V_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} T_{hk}^l
\end{aligned} \tag{2.8.41}$$

2.9. RIEMANN-OTSUKI UZAYLARININ ALTUZAYLARI VE ORTOGONAL ALTUZAYLARI

[4] ve [5]'de, üzerinde bir (P_j^i, Γ_{jh}^i) regüler metrik genel konneksiyon tanımlanan n -boyutlu uzayın altuzayları ve bu altuzaylara ortogonal olan uzaylar incelenmiştir. Yukarıda sözü edilen konneksiyona sahip uzaya Riemann-Otsuki uzayı adı verilmiştir. Bu bölümde de Riemann-Otsuki uzayının altuzayı ile bu altuzaya ortogonal olan altuzayında, Riemann-Otsuki uzayı olacak şekilde, sırasıyla, $(P_\nu^\mu, \hat{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu)$ ve $(P_\nu^\mu, \tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu)$ konneksiyon katsayıları belirlenmiştir, [4] ve [5]. Böylece elde edilen altuzaya ait konneksiyon katsayıları ile üst uzayının konneksiyon katsayıları arasındaki ilişki saptanmıştır. Öte yandan altuzaydaki konneksiyonun üst uzayının konneksiyonundan indüklenmiş olması için koşul da bulunmuştur. Buna göre S_n , n -boyutlu bir uzay olsun. Bu uzayda bölüm 2.7'de tanımladığımız $\Gamma = (P_j^i, \Gamma_{jk}^i)$ Otsuki metrik konneksiyonu verilsin. Yani, $\det \|g_{ij}\| \neq 0$ olacak şekilde g_{ij} metrik tensörü için

$$Dg_{ij} = P_i^l P_j^m (\partial_k g_{lm} - \Gamma_{lk}^s g_{sm} - \Gamma_{mk}^s g_{ls}) = 0 \tag{2.9.1}$$

denklemini geçerli olsun. Bu koşulu sağlayan uzaylara **Riemann-Otsuki Uzayları** denir ve $(R - O_n)$ ile gösterilir. Bu çalışmamızda konneksiyonun simetrik olduğunu varasayacağız, yani $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

Öte yandan S_n 'nin m -boyutlu altuzayını $x^j = x^j(u^1, \dots, u^m)$, $(m < n)$, $\text{rank} \left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right\| = m$ şeklinde tanımlayalım ve S_m ile gösterelim. [4]'de, bu altuzayın da bir Riemann-Otsuki uzayı olacak şekilde, konneksiyon katsayıları belirlenmiştir. Bu bölümde Latin indisleri

$1, \dots, n$ değerlerini, α, \dots, κ indisleri $1, \dots, m$ değerlerini λ, μ, \dots indisleri ise $m+1, \dots, n$ değerlerini almaktadır. Buna göre

$$B_\alpha^i := \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \quad (2.9.2)$$

gösterimini kullanarak S_m 'nin metrik tensörünü, g_{ij} 'nin S_m altuzayındaki izdüşümü olarak tanımlarız ve $G_{\alpha\beta}$ ile gösteririz. Dolayısıyla

$$G_{\alpha\beta} = g_{ab} B_\alpha^a B_\beta^b; \quad G_{\alpha\beta} G^{\alpha\gamma} = \delta_\beta^\gamma; \quad G^{\alpha\gamma} = g^{ab} B_a^\alpha B_b^\gamma \quad (2.9.3)$$

dir, buradan da $\det \|G_{\alpha\beta}\| \neq 0$ olmak üzere

$$B_i^\alpha := g_{ij} G^{\alpha\beta} B_\beta^j \quad (2.9.4)$$

buluruz. (2.9.3) ve (2.9.4) denklemlerinden ise $B_\alpha^i B_i^\beta = \delta_\alpha^\beta$ ve $B_\alpha^i B_j^\alpha = B_\alpha^i g_{jk} G^{\alpha\gamma} B_\gamma^k \neq \delta_j^i$ bulunur. P_j^i 'lerin altuzaydaki izdüşümünü

$$P_\beta^\alpha := P_j^i B_i^\alpha B_\beta^j \quad (2.9.5)$$

şeklinde tanımlayalım. $\det \|P_\beta^\alpha\| \neq 0$ olduğundan

$$P_\beta^\alpha Q_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha \quad (2.9.6)$$

olacak şekilde Q_γ^β tensörleri bulunabilir. S_n 'de bir T_j^i tensörü

$$T_j^i = T_\beta^\alpha B_\alpha^i B_j^\beta$$

eşitliğini sağlıyorsa, bu tensör S_m 'ye aittir. Şimdi $T_\beta^\alpha \in S_m$ tensörünün Otsuki kovaryant türevini

$$\widehat{D}_\kappa T_\beta^\alpha = P_\gamma^\alpha P_\beta^\delta \widehat{D}_\kappa T_\delta^\gamma = P_\gamma^\alpha P_\beta^\delta \left(\partial_\kappa T_\delta^\gamma + \Gamma_{\epsilon\kappa}^\gamma T_\delta^\epsilon - \Gamma_{\delta\kappa}^\epsilon T_\epsilon^\gamma \right) \quad (2.9.7)$$

şeklinde tanımlayalım ve S_m 'nin de bir Riemann-Otsuki uzayı olacak şekilde ${}^{\widehat{\Gamma}}\alpha_{\beta\gamma}$ ve ${}^{\widehat{\Gamma}}\alpha_{\beta\gamma}$ 'ları belirleyelim. Bu altuzayın bir $(R-O_m)$ uzayı olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1) $G_{\alpha\beta}$ metrik tensörü için

$$\widehat{D}_\kappa G_{\alpha\beta} = P_\alpha^\gamma P_\beta^\delta (\partial_\kappa G_{\gamma\delta} - {}^{\widehat{\Gamma}}\gamma_\kappa^\epsilon G_{\epsilon\delta} - {}^{\widehat{\Gamma}}\delta_\kappa^\epsilon G_{\gamma\epsilon}) = 0 \quad (2.9.8)$$

2) Otsuki denklemi

$${}^{\widehat{\Gamma}}\alpha_{\beta\gamma} P_\delta^\beta - {}^{\widehat{\Gamma}}\beta_{\delta\gamma} P_\beta^\alpha + \partial_\gamma P_\delta^\alpha = 0. \quad (2.9.9)$$

Birinci koşuldan ${}^{\widehat{\Gamma}}\alpha_{\beta\gamma}$ katsayılarını bulalım. (2.9.3) denklemini ve $\partial_\kappa B_\alpha^i = B_{\alpha,\kappa}^i$ notasyonunu kullanarak (2.9.8) denkleminde

$${}^{\widehat{\Gamma}}\gamma_\kappa^\epsilon G_{\epsilon\delta} + {}^{\widehat{\Gamma}}\delta_\kappa^\epsilon G_{\gamma\epsilon} = \partial_\kappa G_{\gamma\delta} = \partial_\kappa (g_{ij} B_\delta^i B_\gamma^j) = (\partial_\kappa g_{ij}) B_\delta^i B_\gamma^j + g_{ij} B_{\delta,\kappa}^i B_\gamma^j + g_{ij} B_\delta^i B_{\gamma,\kappa}^j$$

ya da

$${}^{\widehat{\Gamma}}\gamma_\kappa^\epsilon G_{\epsilon\delta} + {}^{\widehat{\Gamma}}\delta_\kappa^\epsilon G_{\gamma\epsilon} = (\partial_\kappa g_{ij}) B_\delta^k B_\delta^i B_\gamma^j + g_{ij} (B_{\delta,\kappa}^i B_\gamma^j + B_\delta^i B_{\gamma,\kappa}^j) \quad (2.9.10)$$

denklemini buluruz. Şimdi de ${}^{\Gamma}i_{jk}$ ve ${}^{\widehat{\Gamma}}\alpha_{\beta\gamma}$ arasındaki ilişkiyi kuralım. (2.9.1)'den

$$\partial_k g_{ij} = {}^{\Gamma}i_{ik} g_{sj} + {}^{\Gamma}j_{jk} g_{is} \quad (2.9.11)$$

dir ve bunu (2.9.10)'da yazarsak

$$\begin{aligned} {}^{\widehat{\Gamma}}\gamma_\kappa^\epsilon G_{\epsilon\delta} + {}^{\widehat{\Gamma}}\delta_\kappa^\epsilon G_{\gamma\epsilon} &= {}^{\Gamma}i_{ik} g_{sj} B_\delta^k B_\delta^i B_\gamma^j + {}^{\Gamma}j_{jk} g_{si} B_\delta^k B_\delta^i B_\gamma^j \\ &+ g_{ij} (B_{\delta,\kappa}^i B_\gamma^j + B_\delta^i B_{\gamma,\kappa}^j) \end{aligned} \quad (2.9.12)$$

buluruz. Bu denklemde

$${}^{\Gamma}\alpha_{\beta\gamma} = {}^{\Gamma}i_{sk} B_\beta^s B_\gamma^k \quad (2.9.13)$$

notasyonunu kullanırsak

$${}^{\widehat{\Gamma}}_{\gamma\kappa} G_{\varepsilon\delta} + {}^{\widehat{\Gamma}}_{\delta\kappa} G_{\gamma\varepsilon} = {}^{\Gamma}_{\delta\kappa} G_{\gamma\varepsilon} + {}^{\Gamma}_{\gamma\kappa} G_{\delta\varepsilon} + g_{ij} (B_{\delta,\kappa}^i B_{\gamma}^j + B_{\delta}^i B_{\gamma,\kappa}^j)$$

buluruz. Bu denklemde metrik tensör ile büzülme yaparsak γ ve δ 'ya göre simetrik olan aşağıdaki denklemi buluruz:

$${}^{\widehat{\Gamma}}_{\gamma\delta\kappa} + {}^{\widehat{\Gamma}}_{\delta\gamma\kappa} = {}^{\Gamma}_{\gamma\delta\kappa} + {}^{\Gamma}_{\delta\gamma\kappa} + g_{ij} (B_{\delta,\kappa}^i B_{\gamma}^j + B_{\delta}^i B_{\gamma,\kappa}^j). \quad (2.9.14)$$

Şimdi (2.9.14)'de γ, δ, κ indislerine göre dairesel permutasyonu alalım ve

$${}^{\widehat{\Gamma}}_{\gamma\delta\kappa} = {}^{\widehat{\Gamma}}_{\kappa\delta\gamma} \quad (2.9.15)$$

olduğunu varsayarak ilk iki denklemin toplamından üçüncüsünü çıkartalım. Aynı zamanda, ${}^{\Gamma}_{jk}^i$ ve $B_{\alpha,\beta}^i$ 'nin alt indislere göre simetrik olduğunu ve (2.9.15) denklemini kullanarak

$${}^{\widehat{\Gamma}}_{\delta\kappa\gamma} = {}^{\Gamma}_{\delta\kappa\gamma} + B_{\delta,\gamma}^j B_{\kappa}^i g_{ij} \quad (2.9.16)$$

buluruz. (2.9.2) denklemleri S_m 'nin m -tane tanjant vektörünü belirler.

$$\begin{aligned} B_{\alpha}^i N_{(\mu)i} &= 0; \\ g_{ij}(x) N_{(\mu)}^i N_{(\lambda)}^j &= \delta_{\mu\lambda} \end{aligned} \quad (2.9.17)$$

denklemleri ise, S_m 'ye ortogonal olan $n-m$ tane birbirine ortogonal $N_{(\mu)}^i$ birim vektörlerini belirler. Bu durumda

$$B_{\alpha}^i B_j^{\alpha} + N_{(\mu)}^i N_{(\mu)j} = \delta_j^i \quad (2.9.18)$$

dir. (2.9.16)'yı $G^{\kappa\varepsilon}$ ile bürersek (2.9.3), (2.9.13), (2.9.17) ve (2.9.18) denklemlerini kullanarak

$${}^{\widehat{\Gamma}}_{\delta\gamma}^{\varepsilon} = {}^{\Gamma}_{\delta\gamma}^{\varepsilon} + B_{\delta,\gamma}^j B_j^{\varepsilon} = {}^{\Gamma}_{\delta\gamma}^{\varepsilon} - B_{\delta}^j B_{j,\gamma}^{\varepsilon} \quad (2.9.19)$$

buluruz ve böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.9.1. (2.9.15) denklemi geçerli ise (2.9.8)'in sağlanması için gerek ve yeter koşul (2.9.19)'un sağlanmasıdır, [4].

(2.9.19) ile tanımlanan " $\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ " katsayıları (2.9.8) denklemini sağladığına göre $G_{\alpha\beta}$ metrik tensörüne göre Christoffel sembolleridir. Dolayısıyla (2.9.19) denklemi $(R-O_n)$ ve $(R-O_m)$ 'nin ikinci türden Christoffel sembolleri arasındaki ilişkiyi gösterir, yani

$$\{\delta\epsilon\gamma\}_G = G_{\epsilon\alpha} \{\delta\gamma\}^{\alpha} = \{\delta\epsilon\gamma\}_g + B_{\delta,\gamma}^i B_{\epsilon}^j g_{ij}. \quad (2.9.20)$$

Bu bilgileri kullanarak T_i , S_m 'nin bir tensörü olmak üzere DT_i ile \widehat{DT}_{α} arasındaki bağıntıyı bulabiliriz.

Teorem 2.9.2. T_i , S_m 'de bir tensör ise, yani

$$T_i := B_i^{\alpha} T_{\alpha} \quad (2.9.21)$$

şeklinde ise

$$\widehat{DT}_{\alpha} = B_{\alpha}^i DT_i \quad (2.9.22)$$

dir, [4].

İspat. T_i tensörüne Otsuki kovaryant diferansiyelini uygularsak, (2.9.5), (2.9.7) (2.9.19) ve (2.9.21) denklemlerini kullanarak

$$DT_i = P_i^s \bar{D}_k T_s du^k = P_i^s (\partial_k T_s - \Gamma_{sk}^j T_j) du^k$$

$$\begin{aligned} B_{\alpha}^i DT_i &= B_{\alpha}^i P_i^s (\partial_k T_s - \Gamma_{sk}^j T_j) B_{\beta}^k du^{\beta} \\ &= B_{\alpha}^i P_i^s B_{\gamma}^{\beta} (\partial_{\beta} T_{\gamma} - \widehat{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\delta} T_{\delta}) du^{\beta} \\ &= P_{\alpha}^{\gamma} \widehat{D}_{\beta} T_{\gamma} du^{\beta} = \widehat{D}_{\beta} T_{\alpha} du^{\beta} = \widehat{DT}_{\alpha} \end{aligned}$$

buluruz.

Şimdi de Otsuki denklemini kullanarak m -boyutlu altuzay için $'\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ 'ları belirleyelim.

(2.9.18) denkleminde

$$B_{\beta,\gamma}^i B_a^\beta + B_\beta^i B_{a,\gamma}^\beta = -(\partial_\gamma N_{(\mu)}^i) N_{(\mu)a} \quad (2.9.23)$$

buluruz. Diğer taraftan (2.9.5), (2.9.6), (2.9.17) ve (2.9.19) denklemlerini kullanarak (2.9.9)'dan

$$'\widehat{\Gamma}_{\delta\gamma}^\beta = \widehat{Q}_\alpha^\beta B_i^\alpha \left(\begin{array}{l} B_\delta^j B_\gamma^k P_a^i \Gamma_{jk}^a - P_j^a B_\delta^j N_{(\mu)a} N_{(\mu)}^b \Gamma_{bc}^i B_\gamma^c \\ -P_j^a B_\delta^j N_{(\mu)a} (\partial_\gamma N_{(\mu)}^i) + P_j^i B_\delta^j \end{array} \right) \quad (2.9.24)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.9.3. Eğer (2.9.5), (2.9.7), (2.9.15), (2.9.19) ve (2.9.24) denklemleri sağlanıyorsa, $(R-O_n)$ 'nin $x^i = x^i(u^1, \dots, u^m)$, $(m < n)$ denklemleri ile tanımlanan altuzayı m -boyutlu bir Riemann-Otsuki uzayıdır, [4].

(2.9.22) denklemi genel olarak

$$T^i = B_\alpha^i T^\alpha \quad (2.9.25)$$

ile verilen S_m 'nin bir kontravaryant tensörü için geçerli değildir, geçerli olması için koşul belirlenebilir. Bunun için (2.9.25) denklemini sağlayan bir T^i tensörünün

$$\widehat{D}T^\alpha = B_i^\alpha DT^i \quad (2.9.26)$$

denkleminin gerçekleştiğini varsayalım. Otsuki kovaryant diferansiyelinin tanımından

$$\widehat{D}T^\alpha = P_\beta^\alpha (\partial_\kappa (T^\beta) + '\widehat{\Gamma}_{\delta\kappa}^\beta T^\delta) du^\kappa$$

buluruz. (2.9.2) ve (2.9.25) denklemlerinden ise

$$\begin{aligned}
B_i^\alpha DT^i &= B_i^\alpha P_r^i \left(\frac{\partial T^r}{\partial u^k} + {}'\Gamma_{sk}^r T^s \right) du^k \\
&= B_i^\alpha P_r^i \left(\partial_k T^r + {}'\Gamma_{sk}^r T^s \right) B_\kappa^k du^\kappa \\
&= B_i^\alpha P_r^i \left(\partial_\kappa (T^\beta) B_\beta^r + \partial_\kappa (B_\delta^r) T^\delta + {}'\Gamma_{sk}^r B_\delta^s T^\delta B_\kappa^k \right) du^\kappa
\end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla, (2.9.26) denkleminin geçerli olması için

$$B_\beta^r {}'\widehat{\Gamma}_{\delta\kappa}^\beta = \partial_\kappa (B_\delta^r) + {}'\Gamma_{sk}^r B_\delta^s B_\kappa^k$$

denkleminin sağlanması gerekir. Bu denklemi B_r^ϵ ile bürersek

$${}'\widehat{\Gamma}_{\delta\kappa}^\beta = {}'\Gamma_{sk}^r B_\delta^s B_\kappa^k B_r^\beta + B_r^\beta B_\delta^r = {}'\Gamma_{\delta\kappa}^\beta + B_r^\beta B_{\delta,\kappa}^r \quad (2.9.27)$$

elde ederiz. Şimdi de bulduğumuz ${}'\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, P_β^α ve ${}''\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ bileşenlerinin Otsuki uzayının (2.9.9) özelliğini sağlaması için koşulu verelim. (2.9.19) ve (2.9.27)'den

$$\begin{aligned}
{}''\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha P_\delta^\beta &= B_\gamma^c B_i^\alpha P_b^a B_\delta^b {}''\Gamma_{ac}^i - B_i^\alpha N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} B_\delta^b B_\gamma^c P_b^a {}''\Gamma_{rc}^i + B_{\beta,\gamma}^i B_i^\alpha P_b^a B_a^\beta B_\delta^b \\
P_\beta^\alpha {}'\widehat{\Gamma}_{\delta\gamma}^\beta &= P_a^i B_i^\alpha {}'\Gamma_{bc}^a B_\delta^b B_\gamma^c - B_\delta^b B_\gamma^c N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} B_i^\alpha P_r^i {}'\Gamma_{bc}^a \\
&\quad + P_a^i B_i^\alpha B_{\delta,\gamma}^a - P_r^i N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} B_i^\alpha B_{\delta,\gamma}^a
\end{aligned} \quad (2.9.28)$$

buluruz. Bu değerleri (2.9.9) denkleminde yerine yazarsak, (2.9.5)'i kullanarak

$$\begin{aligned}
{}''\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha P_\delta^\beta - {}'\widehat{\Gamma}_{\delta\gamma}^\beta P_\beta^\alpha + \partial_\gamma P_\delta^\alpha &= B_\delta^b B_\gamma^c N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} B_i^\alpha \left(P_r^i {}'\Gamma_{bc}^a - P_b^a {}''\Gamma_{rc}^i \right) \\
&\quad + N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} \left(P_r^i B_i^\alpha B_{\delta,\gamma}^a + P_b^a B_\delta^b B_{r,\gamma}^\alpha \right)
\end{aligned} \quad (2.9.29)$$

bulunur. Sonuç olarak altuzaydaki kovaryant diferansiyelini (2.9.26) şeklinde tanımlarsak, ${}'\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ katsayıları (2.9.27) şeklindedir ve bu uzay bir Riemann-Otsuki uzayı olması için

$$\begin{aligned}
B_\delta^b B_\gamma^c N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} B_i^\alpha \left(P_r^i {}'\Gamma_{bc}^a - P_b^a {}''\Gamma_{rc}^i \right) \\
+ N_{(\mu)}^r N_{(\mu)a} \left(P_r^i B_i^\alpha B_{\delta,\gamma}^a + P_b^a B_\delta^b B_{r,\gamma}^\alpha \right) = 0
\end{aligned} \quad (2.9.30)$$

denklemini sağlamalıdır.

Özel durumlar:

I. Eğer $P_j^i = \rho \delta_j^i$, $\rho = \rho(x)$ şeklinde ise (2.9.30) denklemi sağlanır. Fakat bu durumda

' $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i$ ' dir ve Otsuki uzayı affin uzayına indirgenir.

II. $m = n-1$ ve N_i normal vektörler P dönüşümünün öz vektörleri yani

$P_j^i N_{(\mu)i} = \tau N_{(\mu)j}$ olsun. Bu durumda $P_j^i g_{ia} = P_{ja} = P_{aj}$ olmak üzere

$$P_r^i N_{(\mu)}^r = P_r^i \left(g^{rj} N_{(\mu)j} \right) = P_r^j g^{ri} N_{(\mu)j} = \tau N_{(\mu)r} g^{ri} = \tau N_{(\mu)}^i \quad (2.9.31)$$

buluruz. Böylece (2.9.30) denklemi sağlanır, yani Otsuki denklemi geçerlidir.

III. Genel olarak $P_j^i = P_\beta^\alpha B_\alpha^i B_j^\beta$ ile karakterize edilen alt uzaylar için (2.2.9) denklemi sağlanır.

Şimdi de S_m altuzayına ortogonal olan S_{n-m} altuzayının da konneksiyon katsayılarını belirleyelim. Bunun için (2.9.30) denklemden

$$P_r^i B_i^\alpha N_{(\mu)}^r \left(B_\beta^b B_\gamma^c \Gamma_{bc}^a + B_{\beta,\gamma}^a \right) N_{(\mu)a} - P_b^i B_\beta^b N_{(\mu)i} \left(B_i^\alpha B_\gamma^c \Gamma_{rc}^i + B_{r,\gamma}^\alpha \right) N_{(\mu)}^r = 0 \quad (2.9.32)$$

buluruz. Öte yandan, $P_j^i g_{is} = P_s^i g_{ij}$ ve (2.9.4) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} P_\mu^\alpha &:= P_r^i B_i^\alpha N_{(\mu)}^r = P_r^i g_{id} G^{\alpha\epsilon} B_\epsilon^d N_{(\mu)}^r \\ &= P_d^i g_{ir} G^{\alpha\epsilon} B_\epsilon^d N_{(\mu)}^r = G^{\alpha\epsilon} P_d^i B_\epsilon^d N_{(\mu)i} \end{aligned} \quad (2.9.33)$$

elde edilir. (2.9.33) denklemini (2.9.32)'de yazarsak

$$P_d^i B_\epsilon^d N_{(\mu)i} \left\{ G^{\alpha\epsilon} \left(B_\beta^b B_\gamma^c \Gamma_{bc}^a + B_{\beta,\gamma}^a \right) N_{(\mu)a} - \delta_\beta^\epsilon \left(B_i^\alpha B_\gamma^c \Gamma_{rc}^i + B_{r,\gamma}^\alpha \right) N_{(\mu)}^r \right\} = 0$$

bulunur. Bu denkleminin sıfır olması için yeter koşul

$$P_b^i B_\epsilon^b N_{(\mu)i} = 0 \quad (2.9.34)$$

olmasıdır. (2.9.33) denklemini kullanarak da bu eşitlikten $P_\mu^\alpha = P_\alpha^\mu = 0$ buluruz ki bu S_m 'nin bir Riemann-Otsuki uzayı olması için yeter koşuldur.

Şimdi de (2.9.34)'ün birkaç sonucunu verelim. P_j^i 'nin S_{m-n} 'deki izdüşümü

$$P_\nu^\mu = P_j^i N_{(\mu)i} N_{(\nu)j} \quad (2.9.35)$$

olsun. Şimdi

$$P_\beta^\alpha Q_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\alpha; \quad P_\nu^\mu Q_\sigma^\nu = \delta_\sigma^\mu; \quad \alpha, \beta, \gamma \dots = 1, \dots, m \text{ ve } \mu, \nu, \sigma \dots = m+1, \dots, n \quad (2.9.36)$$

olacak şekilde Q_β^α ve Q_ν^μ tensörlerinin bulunabildiğini varsayalım. Bu takdirde aşağıdaki teoremleri verebiliriz

Teorem 2.9.4. (2.9.34) denkleminde $Q_\beta^\alpha = Q_j^i B_i^\alpha B_\beta^j$ ve $Q_\nu^\mu = Q_j^i N_{(\mu)i} N_{(\nu)j}^i$ buluruz, [4].

Teorem 2.9.5. $P_\alpha^\mu = 0$ dan $Q_\mu^\alpha = Q_\alpha^\mu = 0$ sonucuna ulaşırız, [4].

Teorem 2.9.6. (2.9.34) denkleminde

$$\begin{aligned} P_j^i B_i^\alpha &= P_\beta^\alpha B_j^\beta \\ Q_j^i B_i^\alpha &= Q_\beta^\alpha B_j^\beta \end{aligned} \quad (2.9.37)$$

$$\begin{aligned} P_j^i N_{(\mu)i} &= P_\nu^\mu N_{(\nu)j} \\ Q_j^i N_{(\mu)i} &= Q_\nu^\mu N_{(\nu)j} \end{aligned} \quad (2.9.38)$$

$$\begin{aligned} M_j^i B_i^\alpha &= M_\beta^\alpha B_j^\beta; \\ M_j^i N_{(\mu)i} &= M_\nu^\mu N_{(\nu)j} \\ \left(M_j^i &= P_a^i P_j^a; \quad M_\beta^\alpha = P_\varepsilon^\alpha P_\beta^\varepsilon; \quad M_\nu^\mu = P_\sigma^\mu P_\nu^\sigma \right) \end{aligned} \quad (2.9.39)$$

denklemleri bulunur, [4].

(2.9.37) ve (2.9.38) denklemleri, B_i^α ve $N_{(\mu)i}^\mu$ vektörlerinin öz vektör özelliğini taşıdığını gösterir dolayısıyla S_m altuzayı bir öz uzaydır ve onun S_{n-m} ortogonal uzayı da bir öz uzaydır. (2.9.34)'ün sonucu olarak

$$P_j^i = P_\beta^\alpha B_\alpha^i B_j^\beta + P_\nu^\mu N_{(\mu)}^i N_{(\nu)j} \quad (2.9.40)$$

yazarız ve Teorem 2.9.5'den

$$Q_j^i = Q_\beta^\alpha B_\alpha^i B_j^\beta + Q_\nu^\mu N_{(\mu)}^i N_{(\nu)j}$$

buluruz. (2.9.34)'ün sonuçlarından biri de (2.9.24) ve (2.9.27) denklemlerinin eşdeğer olmasıdır yani (2.9.27) geçerlidir.

Şimdi de, \widehat{D} kovaryant diferansiyelinin tanımını S_m 'ye ortogonal olan elemanlara genişleteceğiz. Ortogonal uzayın konneksiyon katsayılarının kovaryant ve kontravaryant kısımlarını, sırasıyla, $\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$ ve ${}^{\prime}\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$, $\mu, \nu, \dots = m+1, \dots, n$ ile gösterelim. P_ν^μ tensörü P_j^i 'nin S_{n-m} ortogonal altuzayındaki izdüşümü olmak üzere, P_ν^μ ile $\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$ ve ${}^{\prime}\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$ katsayılarının Otsuki denklemini sağlamaları için yeterli koşulu bulalım. Bunun için

$$Y_i = N_{(\mu)i} Y_\mu \quad (2.9.41)$$

S_m 'ye ortogonal olan kovaryant bir vektör alanı olsun. DY_i 'nin S_{n-m} 'ye izdüşümünü $\widehat{D}Y_\mu$ ile gösterelim, yani

$$\widehat{D}Y_\mu := g^{ij} N_{(\mu)j} DY_i = N_{(\mu)}^i DY_i. \quad (2.9.42)$$

Kovaryant türevin tanımını ve (2.9.41) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \widehat{D}Y_\mu &:= g^{ij} N_{(\mu)j} DY_i = g^{ij} N_{(\mu)j} D(N_{(\rho)j} Y_\rho) \\ &= g^{ij} N_{(\mu)j} P_i^a N_{(\rho)a} (\partial_\gamma Y_\rho) du^\gamma - g^{ij} N_{(\mu)j} P_i^a ({}^{\prime}\Gamma_{ak}^s N_{(\rho)s} B_\gamma^k - \partial_\gamma N_{(\rho)a}) Y_\rho du^\gamma \end{aligned}$$

buluruz. (2.9.35) denklemini ve

$${}^{\prime}\tilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\rho := ({}^{\prime}\Gamma_{ak}^s N_{(\rho)s} B_\gamma^k - \partial_\gamma N_{(\rho)a}) N_{(\sigma)}^a \quad (2.9.43)$$

notasyonu kullanarak

$$\widehat{D}Y_\mu := P_\mu^\rho \left(dY_\rho - {}''\tilde{\Gamma}_{\rho\gamma}^\sigma Y_\sigma du^\gamma \right) = \widehat{D}_\gamma Y_\mu du^\gamma \quad (2.9.44)$$

buluruz. Benzer şekilde Y^m kontravaryant vektörü için, $\widehat{D}Y^\mu$ kovaryant diferansiyelini tanımlayabiliriz. Y^i vektörü S_m 'ye ortogonal olan bir kontravaryant vektör olmak üzere kovaryant türevini

$$\widehat{D}Y^\mu := N_{(\mu)i} DY^i \quad (2.9.45)$$

biçimde tanımlayalım. $Y^i = N_{(\mu)}^i Y^\mu$ şeklinde yazılabileceğinden kovaryant türev tanımını ve

$${}'\tilde{\Gamma}_{v\gamma}^\rho = \left({}'\Gamma_{sk}^a N_{(\gamma)}^s B_\gamma^k - \partial_\gamma N_{(\gamma)}^a \right) N_{(\rho)a} \quad (2.9.46)$$

notasyonu kullanarak, (2.9.45) denklemi

$$\widehat{D}Y^\mu := P_v^\mu \left(\partial_\gamma Y^v + {}'\tilde{\Gamma}_{\rho\gamma}^v Y^\rho \right) du^\gamma = \widehat{D}_\gamma Y^\mu du^\gamma \quad (2.9.47)$$

şeklinde yazılır. (2.9.44) ve (2.9.47) denklemleri, Otsuki uzayında olduğu gibi, S_{n-m} altuzayında da kovaryant diferansiyeli tanımlamanın mümkün olduğunu gösterir. ${}'\tilde{\Gamma}_{v\gamma}^\mu$ ve ${}''\tilde{\Gamma}_{v\gamma}^\mu$ katsayıları S_{n-m} uzayının konneksiyon katsayıları olduğundan ve S_{n-m} 'nin Otsuki uzayı olması nedeniyle

$$\partial_\gamma P_\sigma^\mu + P_\sigma^\nu {}''\tilde{\Gamma}_{v\gamma}^\mu - P_\nu^\mu {}'\tilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\nu = 0 \quad (2.9.48)$$

denklemi sağlanmalıdır. Şimdi de bu denklemin sağlanması için gerekli koşulları araştıralım. Bunun için (2.9.43), (2.9.46) ve (2.9.35) denklemlerini (2.9.48)'de yerine yazarsak ve ${}'\Gamma_{jk}^i, {}''\Gamma_{jk}^i$ ile P_j^i ler için Otsuki denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} P_\sigma^\nu {}''\tilde{\Gamma}_{v\gamma}^\mu &= P_j^a N_{(\sigma)}^j {}''\Gamma_{ak}^s N_{(\mu)s} B_\gamma^k - P_j^i B_\alpha^a B_i^\alpha N_{(\sigma)}^j {}''\Gamma_{ak}^s N_{(\mu)s} B_\gamma^k \\ &\quad - P_j^a N_{(\sigma)}^j \left(\partial_\gamma N_{(\mu)a} \right) + P_j^i B_\alpha^a B_i^\alpha N_{(\sigma)}^j \left(\partial_\gamma N_{(\mu)a} \right) \end{aligned}$$

$$P_v^\mu \tilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\nu = P_a^i N_{(\mu)i} \Gamma_{sk}^a N_{(\sigma)}^s B_\gamma^k - P_j^i B_\alpha^j B_a^\alpha N_{(\mu)i} \Gamma_{sk}^a N_{(\sigma)}^s B_\gamma^k \\ + P_a^i N_{(\mu)i} (\partial_\gamma N_{(\sigma)a}) - P_j^i B_\alpha^j B_a^\alpha N_{(\mu)i} (\partial_\gamma N_{(\sigma)}^a)$$

buluruz ve bu eşitlikleri Otsuki Denkleminde yazarak

$$\partial_\gamma P_\sigma^\mu + P_\sigma^\nu \tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu - P_\nu^\mu \tilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\nu \\ = P_j^i B_\alpha^j N_{(\mu)i} (\Gamma_{a\gamma}^s B_s^\alpha - B_{a,\gamma}^\alpha) N_{(\sigma)}^a - P_j^i B_i^\alpha N_{(\sigma)}^j (\Gamma_{s\gamma}^a B_\alpha^s + B_{\alpha,\gamma}^a) N_{(\mu)a}$$

buluruz. Yani Otsuki Denkleminin sağlanması için yeter koşulun

$$P_j^i B_\alpha^j N_{(\mu)i} (\Gamma_{a\gamma}^s B_s^\alpha - B_{a,\gamma}^\alpha) N_{(\sigma)a} - P_j^i B_i^\alpha N_{(\sigma)}^j (\Gamma_{s\gamma}^a B_\alpha^s + B_{\alpha,\gamma}^a) N_{(\mu)a} = 0 \quad (2.9.49)$$

olduğunu görürüz. Eğer (2.9.34) denklemi sağlanıyorsa (2.9.33)'ü kullanarak (2.9.49)'un sağlandığını buluruz. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 5.4. $\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$, $\tilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\mu$ ve P_ν^μ lerin Otsuki denklemini sağlamaları için (2.9.34)

koşulu yeterlidir, dolayısıyla S_{n-m} bir Riemann-Otsuki uzayıdır.

Nihayet her üç tür indisi içeren karışık bir tensörün kovaryant diferansiyelini tanımlayabiliriz. Örneğin $T_{j\beta\nu}^{i\alpha\mu}$ için, kovaryant diferansiyel

$$\hat{D}T_{j\beta\nu}^{i\alpha\mu} := P_a^i P_\varepsilon^\alpha P_\rho^\mu T_{b\eta\sigma|\gamma}^{a\varepsilon\rho} P_j^b P_\beta^\eta P_\nu^\sigma du^\gamma \\ T_{b\eta\sigma|\gamma}^{a\varepsilon\rho} = \partial_\gamma T_{b\eta\sigma}^{a\varepsilon\rho} + \Gamma_{s\gamma}^a T_{b\eta\sigma}^{s\varepsilon\rho} + \hat{\Gamma}_{\chi\gamma}^\varepsilon T_{b\eta\sigma}^{a\chi\rho} + \tilde{\Gamma}_{\tau\gamma}^\rho T_{b\eta\sigma}^{a\varepsilon\tau} \\ - \Gamma_{b\gamma}^s T_{s\eta\sigma}^{a\varepsilon\rho} - \hat{\Gamma}_{\eta\gamma}^\chi T_{b\chi\sigma}^{a\varepsilon\rho} - \tilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\tau T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\rho} \quad (2.9.50)$$

şeklinde tanımlanır.

2.10. RIEMANN-OTSUKI UZAYLARININ GAUSS, CODAZZI VE KÜHNE DENKLEMLERİ

Riemann-Otsuki $(R-O_n)$ uzayında, uzayın ve altuzayın eğrilik tensörleri arasındaki ilişki [17]'de Nadj tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada Nadj, konneksiyonun kovaryant kısmına göre altuzayda kovaryant türevi tanımlayıp, B_α^i ve $N_{(\mu)}^i$ 'ye

uygulayarak Ricci formülünü elde etmiştir. Ricci formülü daha önce \bar{D}_h - temel kovaryant türev kullanılarak Otsuki T. tarafından [7]'de verilmiştir. Nadj Dj. [17] makalesinde ise D_h -Otsuki türevini kullanarak Ricci formülünü hesaplamıştır. Bu bölümde bu hesaplamalar altuzayın \widehat{D} temel kovaryant diferansiyeli kullanarak yapılacaktır.

$R-O_n$ uzayında bir $\Gamma = (P_i^j, \Gamma_{ih}^j)$ regüler genel konneksiyonu için, g_{ij} ($\det \|g_{ij}\| \neq 0$) metrik tensörü verilsin ve $P_j^i g_{is} = P_s^i g_{ij}$ koşulu geçerli olsun. (2.6.4) ve (2.6.5) denklemlerinde Γ konneksiyonu tarafından belirlenen, (1,1) tipindeki bir tensörün \bar{D} temel kovaryant diferansiyeli

$$\bar{D}T_j^i = \bar{D}_k T_j^i dx^k = \left(\partial_k T_j^i + {}^i\Gamma_{sk}^i T_j^s - {}^i\Gamma_{jk}^s T_s^i \right) dx^k \quad (2.10.1)$$

şeklinde verilmiştir. (2.5.13)'den konneksiyonun ${}^i\Gamma_{jk}^i$ kontravaryant ve ${}^i\Gamma_{jk}^i$ kovaryant kısımları

$$\begin{aligned} {}^i\Gamma_{jh}^i &= Q_k^i \Gamma_{jh}^k \\ {}^i\Gamma_{jh}^i &= \left(\Gamma_{kh}^i - \frac{\partial P_k^i}{\partial u^h} \right) Q_j^k = \Lambda_{kh}^i Q_j^k \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz. S_m ve S_{n-m} , $(R-O_n)$ 'nin, sırasıyla, bir altuzayı ve onun ortogonal uzayı olmak üzere, P_α^β ve P_ν^μ tensörleri, P_j^i tensörünün, sırasıyla, S_m 'de ve S_{n-m} 'deki izdüşümleri olsun. S_m ve S_{n-m} altuzayları, sırasıyla, birer $(R-O_m)$ ve $(R-O_{n-m})$ uzayı olacak şekilde ${}^i\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, ${}^i\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$, ${}^i\tilde{\Gamma}_{\nu\chi}^\mu$ ve ${}^i\tilde{\Gamma}_{\nu\chi}^\mu$ katsayılarını bölüm 2.9'da (2.9.19), (2.9.27), (2.9.43) ve (2.9.47) denklemleri ile belirlemiştik. Bu denklemlerden;

$$\begin{aligned} i, j, a, b, \dots &= 1, \dots, n; \\ \alpha, \beta, \chi, \delta, \varepsilon, \phi, \varphi, \gamma, \eta, \kappa, \lambda &= 1, 2, \dots, m; \\ \mu, \nu, \pi, \theta, \rho, \sigma, \zeta, \tau, \omega, \xi, \psi, \zeta &= m+1, \dots, n. \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
{}^{\prime}\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\eta} &= {}^{\prime}\Gamma_{\beta\gamma}^{\eta} + B_{\beta,\gamma}^i B_i^{\eta}, \quad ({}^{\prime}\Gamma_{\beta\gamma}^{\eta} = {}^{\prime}\Gamma_{jk}^i B_i^{\eta} B_{\beta}^j B_{\gamma}^k) \\
{}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\eta} &= {}^{\prime\prime}\Gamma_{\beta\gamma}^{\eta} + B_{\beta,\gamma}^i B_i^{\eta}, \\
{}^{\prime}\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^{\rho} &= ({}^{\prime}\Gamma_{sk}^a N_{\gamma}^s B_{\gamma}^k - \partial_{\gamma} N_{\gamma}^a) N_a^{\rho} \\
{}^{\prime\prime}\widetilde{\Gamma}_{\sigma\gamma}^{\rho} &:= ({}^{\prime\prime}\Gamma_{ak}^s N_s^{\rho} B_{\gamma}^k - \partial_{\gamma} N_a^{\rho}) N_{\sigma}^a
\end{aligned} \tag{2.10.3}$$

olmak üzere, üç tür indisi içeren bir $T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma}$ tensör için \widehat{D} kovaryant diferansiyeli

$$\widehat{D}T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} = \widehat{D}_{\chi} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} dx^{\chi} \tag{2.10.4}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_{\chi} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} &:= \partial_{\chi} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} + {}^{\prime}\Gamma_{s\chi}^a T_{b\eta\tau}^{s\varepsilon\sigma} + {}^{\prime}\widehat{\Gamma}_{\chi\lambda}^{\varepsilon} T_{b\eta\tau}^{a\lambda\sigma} + {}^{\prime}\widetilde{\Gamma}_{\rho\chi}^{\sigma} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\rho} \\
&\quad - {}^{\prime\prime}\Gamma_{b\chi}^s T_{s\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} - {}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{\eta\chi}^{\gamma} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma} - {}^{\prime\prime}\widetilde{\Gamma}_{\chi\lambda}^{\rho} T_{b\eta\tau}^{a\varepsilon\sigma}
\end{aligned} \tag{2.10.5}$$

şeklinde verilir.

Şimdi bu türevi önce B_{α}^i 'ya sonra da $N_{(\mu)}^i$ 'ye uygulayalım. Bu vektörler $(R-O_n)$ uzayında birer (1,1) tipinden tensördür, dolayısıyla B_{α}^i için

$$\widehat{D}_{\gamma} B_{\alpha}^i = (\partial_{\gamma} B_{\alpha}^i + {}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\eta} B_{\eta}^i) \tag{2.10.6}$$

buluruz. $N_{(\mu)}^i$ vektörün kontravaryant kısmı için N_{μ}^i ve kovaryant kısmı için N_i^{μ} gösterimini kullanarak ${}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\eta}$ 'nın (2.10.3)'de verilen değerini (2.10.6)'da yerine yazarak ve (2.9.18)'i kullanarak

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_{\gamma} B_{\alpha}^i &= (\partial_{\gamma} B_{\alpha}^i + {}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\eta} B_{\eta}^i) = \\
&= (\partial_{\gamma} B_{\alpha}^i + {}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\Gamma_{jk}^s B_s^{\eta} B_{\alpha}^j B_{\gamma}^k B_{\eta}^i - B_{\alpha,\gamma}^s B_s^{\eta} B_{\eta}^i) \\
&= (\partial_{\gamma} B_{\alpha}^i + {}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\Gamma_{j\gamma}^s B_{\alpha}^j (B_{\eta}^i B_s^{\eta}) - B_{\alpha,\gamma}^s (B_s^{\eta} B_{\eta}^i)) \\
&= \left(\begin{aligned} &\partial_{\gamma} B_{\alpha}^i + {}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\Gamma_{j\gamma}^s B_{\alpha}^j (\delta_s^i - N_s^{\mu} N_{\mu}^i) \\ &- B_{\alpha,\gamma}^s (\delta_s^i - N_s^{\mu} N_{\mu}^i) \end{aligned} \right) \\
&= \left(\begin{aligned} &{}^{\prime}\Gamma_{s\gamma}^i B_{\alpha}^s - {}^{\prime\prime}\Gamma_{j\gamma}^i B_{\alpha}^j + {}^{\prime\prime}\widehat{\Gamma}_{j\gamma}^s B_{\alpha}^j N_s^{\mu} N_{\mu}^i \\ &+ B_{\alpha,\gamma}^s N_s^{\mu} N_{\mu}^i \end{aligned} \right) \\
&= (\overline{D}_{\gamma} \delta_j^i) B_{\alpha}^j + ({}^{\prime\prime}\Gamma_{\alpha\gamma}^s + B_{\alpha,\gamma}^s) N_s^{\mu} N_{\mu}^i
\end{aligned} \tag{2.10.7}$$

ya da

$$\widehat{D}_\gamma B_\alpha^i - \left(\widehat{D}_\gamma \delta_j^i \right) B_\alpha^j = \left({}''\Gamma_{\alpha\gamma}^s + B_{\alpha,\gamma}^s \right) N_s^\mu N_\mu^i$$

buluruz. Şimdi

$$\left({}''\Gamma_{\alpha\gamma}^s + B_{\alpha,\gamma}^s \right) N_s^\mu = H_{\gamma\alpha}^\mu \quad (2.10.9)$$

gösterimini kullanarak

$$\widehat{D}_\gamma B_\alpha^i - \left(\widehat{D}_\gamma \delta_l^i \right) B_\alpha^l = H_{\gamma\alpha}^\nu N_\nu^i := H_{\gamma\alpha}^i \quad (2.10.10)$$

buluruz ki bu $H_{\gamma\alpha}^i$ 'nın, S_m 'nin T_m tanjant uzayına ortogonal olduğunu gösterir.

Şimdi de (2.10.5) ile verilen kovaryant türevi S_m 'ye ortogonal olan N_ν^i vektörüne uygulayalım. Bölüm 2.9'da bulduğumuz ${}''\tilde{\Gamma}_{\rho\gamma}^\sigma := \left({}''\Gamma_{ak}^s N_s^\sigma B_\gamma^k - \partial_\gamma N_a^\sigma \right) N_\rho^a$ ve $\left(\partial_\gamma N_r^\sigma \right) N_\rho^r = -N_r^\sigma \left(\partial_\gamma N_\rho^r \right)$ denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \widehat{D}_\gamma N_\rho^i &= \left(\partial_\gamma N_\rho^i + {}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r - {}''\tilde{\Gamma}_{\rho\gamma}^\sigma N_\sigma^i \right) \\ &= \left(\partial_\gamma N_\rho^i + {}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r - \left({}''\Gamma_{rk}^s N_s^\sigma B_\gamma^k - \partial_\gamma N_r^\sigma \right) N_\rho^r N_\sigma^i \right) \\ &= \left(\partial_\gamma N_\rho^i + {}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r - {}''\Gamma_{r\gamma}^s B_\gamma^k N_s^\sigma N_\sigma^i N_\rho^r + \left(\partial_\gamma N_r^\sigma \right) N_\rho^r N_\sigma^i \right) \\ &= \left(\partial_\gamma N_\rho^i + {}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r - {}''\Gamma_{rk}^s B_\gamma^k \left(\delta_s^i - B_\alpha^i B_s^\alpha \right) N_\rho^r - N_r^\sigma \left(\partial_\gamma N_\rho^r \right) N_\sigma^i \right) \\ &= \left(\partial_\gamma N_\rho^i + \left({}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r - {}''\Gamma_{r\gamma}^i N_\rho^r \right) + {}''\Gamma_{r\gamma}^s B_\alpha^i B_s^\alpha N_\rho^r - \left(\delta_r^i - B_\alpha^i B_r^\alpha \right) \partial_\gamma N_\rho^r \right) \\ &= \left(\overline{D}_\gamma \delta_r^i \right) N_\rho^r + {}''\Gamma_{r\gamma}^s B_\alpha^i B_s^\alpha N_\rho^r + B_\alpha^i B_r^\alpha \partial_\gamma N_\rho^r \end{aligned}$$

yani

$$\widehat{D}_\gamma N_\rho^i = \left(\overline{D}_\gamma \delta_r^i \right) N_\rho^r + {}''\Gamma_{r\gamma}^s B_\alpha^i B_s^\alpha N_\rho^r + B_\alpha^i B_r^\alpha \left(\partial_\gamma N_\rho^r \right) \quad (2.10.11)$$

buluruz. Daha sonra

$$\left({}''\Gamma_{r\gamma}^s B_\alpha^i N_\rho^r + B_\alpha^i \left(\partial_\gamma N_\rho^r \right) \right) := L_{\gamma\rho}^\alpha \quad (2.10.12)$$

gösterimini kullanarak

$$\widehat{\widehat{D}}_\gamma N_\rho^i - (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_r^i) N_\rho^r = L_{\gamma\rho}^\alpha B_\alpha^i := L_{\gamma\rho}^i \quad (2.10.13)$$

buluruz ki bu $L_{\gamma\rho}^i$ 'nin T_m 'ye ait olduğunu gösterir. Şimdi de (2.9.38) denklemini, (2.10.5) tanımını ve (2.6.7) I birim tensör ile büzülme formülünü kullanarak (2.10.10) denkleminin her iki yanının kovaryant türevini alarak

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{D}}_\gamma \left(\widehat{\widehat{D}}_\alpha B_\beta^i - (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_j^i) B_\beta^j \right) &= \widehat{\widehat{D}}_\gamma (H_{\alpha\beta}^\nu N_\nu^i) = \widehat{\widehat{D}}_\gamma (H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i \delta_\mu^\nu) \\ &= \delta_\mu^\nu \widehat{\widehat{D}}_\gamma (H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i) - (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_\mu^\nu) (H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i) \\ &= \widehat{\widehat{D}}_\gamma (H_{\alpha\beta}^\nu) N_\nu^i + H_{\alpha\beta}^\nu (\widehat{\widehat{D}}_\gamma N_\nu^i) - (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_\mu^\nu) (H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i) \\ \widehat{\widehat{D}}_\gamma \left(\widehat{\widehat{D}}_\alpha B_\beta^i \right) &= \widehat{\widehat{D}}_\gamma (H_{\alpha\beta}^\nu) N_\nu^i + H_{\alpha\beta}^\nu (\widehat{\widehat{D}}_\gamma N_\nu^i) \\ &\quad - (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_\mu^\nu) (H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i) + \widehat{\widehat{D}}_\gamma (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_j^i) B_\beta^j \end{aligned} \quad (2.10.15)$$

B_α^i 'nin ikinci kovaryant türevini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{D}}_\alpha \left(\widehat{\widehat{D}}_\gamma B_\beta^i \right) &= (\widehat{\widehat{D}}_\alpha H_{\gamma\beta}^\nu) N_\nu^i + (\widehat{\widehat{D}}_\alpha N_\nu^i) H_{\gamma\beta}^\nu \\ &\quad - H_{\gamma\beta}^\mu N_\nu^i (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_\mu^\nu) + \widehat{\widehat{D}}_\gamma (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_j^i) B_\beta^j \end{aligned} \quad (2.10.16)$$

ve

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} \widehat{\widehat{D}}_{\alpha]} B_\beta^i &= \frac{1}{2} \left\{ \widehat{\widehat{D}}_\gamma (\widehat{\widehat{D}}_\alpha B_\beta^i) - \widehat{\widehat{D}}_\alpha (\widehat{\widehat{D}}_\gamma B_\beta^i) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left((\widehat{\widehat{D}}_\gamma H_{\alpha\beta}^\nu) N_\nu^i + (\widehat{\widehat{D}}_\gamma N_\nu^i) H_{\alpha\beta}^\nu - H_{\alpha\beta}^\mu N_\nu^i (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_\mu^\nu) + \widehat{\widehat{D}}_\gamma (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_j^i) B_\beta^j \right) \\ & - \left((\widehat{\widehat{D}}_\alpha H_{\gamma\beta}^\nu) N_\nu^i + (\widehat{\widehat{D}}_\alpha N_\nu^i) H_{\gamma\beta}^\nu - H_{\gamma\beta}^\mu N_\nu^i (\widehat{\widehat{D}}_\alpha \delta_\mu^\nu) + \widehat{\widehat{D}}_\alpha (\widehat{\widehat{D}}_\gamma \delta_j^i) B_\beta^j \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} \widehat{\widehat{D}}_{\alpha]} B_\beta^i &= (\widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^\nu) N_\nu^i + (\widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} N_\nu^i) H_{\alpha]\beta}^\nu \\ &\quad - N_\nu^i (\widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} \delta_{\alpha]\beta}^\nu) H_{\alpha]\beta}^\mu + \widehat{\widehat{D}}_{[\gamma} (\widehat{\widehat{D}}_{\alpha]} \delta_j^i) B_\beta^j \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

buluruz. Diğer yandan B_α^i 'ya iki kez kovaryant türevi uygularsak

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\gamma \widehat{D}_\alpha B_\beta^i &= \partial_\gamma (\widehat{D}_\alpha B_\beta^i) + \Gamma_{i\gamma}^r \widehat{D}_\alpha B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \widehat{D}_\alpha B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon (\widehat{D}_\varepsilon B_\beta^i) \\
&= \partial_\gamma (\partial_\alpha B_\beta^i + \Gamma_{s\alpha}^r B_\beta^s - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda B_\beta^i) + \Gamma_{i\gamma}^i (\partial_\alpha B_\beta^i + \Gamma_{s\alpha}^t B_\beta^s - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda B_\beta^i) \\
&\quad - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon (\partial_\alpha B_\beta^i + \Gamma_{i\alpha}^t B_\beta^t - \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\alpha}^\lambda B_\beta^i) - \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon (\partial_\varepsilon B_\beta^i + \Gamma_{i\varepsilon}^t B_\beta^t - \widehat{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^\lambda B_\beta^i) \\
&= \partial_\gamma \partial_\alpha B_\beta^i + \partial_\gamma (\Gamma_{s\alpha}^i) B_\beta^s + \Gamma_{s\alpha}^i \partial_\gamma (B_\beta^s) - \partial_\gamma (\widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda) B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda \partial_\gamma (B_\beta^i) \\
&\quad + \Gamma_{i\gamma}^i \partial_\alpha B_\beta^i + \Gamma_{i\gamma}^t \Gamma_{s\alpha}^t B_\beta^s - \Gamma_{i\gamma}^i \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \partial_\alpha B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \Gamma_{i\alpha}^t B_\beta^t \\
&\quad + \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\alpha}^\lambda B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon \partial_\varepsilon B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon \Gamma_{i\varepsilon}^t B_\beta^t + \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^\lambda B_\beta^i
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\alpha \widehat{D}_\gamma B_\beta^i &= \partial_\alpha \partial_\gamma B_\beta^i + (\partial_\alpha \Gamma_{s\gamma}^i) B_\beta^s + \Gamma_{s\gamma}^i (\partial_\alpha B_\beta^s) - (\partial_\alpha \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda) B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda (\partial_\alpha B_\beta^i) \\
&\quad + \Gamma_{i\alpha}^i \partial_\gamma B_\beta^i + \Gamma_{i\alpha}^t \Gamma_{s\gamma}^t B_\beta^s - \Gamma_{i\alpha}^i \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \partial_\gamma B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \Gamma_{i\gamma}^t B_\beta^t \\
&\quad + \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^\lambda B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon \partial_\varepsilon B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon \Gamma_{i\varepsilon}^t B_\beta^t + \widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^\lambda B_\beta^i
\end{aligned}$$

buluruz. Bu iki denklemden ise

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\gamma \widehat{D}_\alpha B_\beta^i &= \underbrace{\partial_\gamma \partial_\alpha B_\beta^i}_1 + (\partial_\gamma \Gamma_{s\alpha}^i) B_\beta^s + \underbrace{\Gamma_{s\alpha}^i \partial_\gamma (B_\beta^s)}_2 - (\partial_\gamma \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda) B_\beta^i - \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda \partial_\gamma (B_\beta^i)}_3 \\
&\quad + \underbrace{\Gamma_{i\gamma}^i \partial_\alpha B_\beta^i}_4 + \Gamma_{i\gamma}^t \Gamma_{s\alpha}^t B_\beta^s - \underbrace{\Gamma_{i\gamma}^i \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda B_\beta^i}_5 - \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \partial_\alpha B_\beta^i}_6 - \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \Gamma_{i\alpha}^t B_\beta^t}_7 \\
&\quad + \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\alpha}^\lambda B_\beta^i - \widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon (\partial_\varepsilon B_\beta^i + \Gamma_{i\varepsilon}^t B_\beta^t) + \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^\lambda B_\beta^i}_8 \\
&\quad - \underbrace{\partial_\alpha \partial_\gamma B_\beta^i}_2 - (\partial_\alpha \Gamma_{s\gamma}^i) B_\beta^s - \underbrace{\Gamma_{s\gamma}^i (\partial_\alpha B_\beta^s)}_4 + (\partial_\alpha \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda) B_\beta^i + \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda (\partial_\alpha B_\beta^i)}_6 \\
&\quad - \underbrace{\Gamma_{i\alpha}^i \partial_\gamma B_\beta^i}_2 - \Gamma_{i\alpha}^t \Gamma_{s\gamma}^t B_\beta^s + \underbrace{\Gamma_{i\alpha}^i \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda B_\beta^i}_7 + \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \partial_\gamma B_\beta^i}_3 + \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \Gamma_{i\gamma}^t B_\beta^t}_5 \\
&\quad - \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^\lambda B_\beta^i + \widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon (\partial_\varepsilon B_\beta^i + \Gamma_{i\varepsilon}^t B_\beta^t) - \underbrace{\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^\lambda B_\beta^i}_8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\gamma \widehat{D}_\alpha B_\beta^i &= \{(\partial_\gamma \Gamma_{s\alpha}^i) - (\partial_\alpha \Gamma_{s\gamma}^i) + \Gamma_{i\gamma}^t \Gamma_{s\alpha}^t - \Gamma_{i\alpha}^t \Gamma_{s\gamma}^t\} B_\beta^s \\
&\quad - \{(\partial_\gamma \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\lambda) - (\partial_\alpha \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda) + \widehat{\Gamma}_{\beta\alpha}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^\lambda - \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\varepsilon \widehat{\Gamma}_{\varepsilon\alpha}^\lambda\} B_\beta^i
\end{aligned}$$

$${}^{\widehat{D}}\widehat{D}_{[\gamma}{}^{\widehat{D}}\widehat{D}_{\alpha]}B_{\beta}^i = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\lambda} B_{\lambda}^i \quad (2.10.18)$$

bulunur. Burada ${}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i$, $(R - O_n)$ 'nin eğrilik tensörünün kontravaryant kısmı, ${}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\lambda}$ ise $(R - O_m)$ 'nin eğrilik tensörünün kovaryant kısmıdır. Kovaryant türevin tanımını, α ve γ indislerinin değişimini ve ${}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^r$ ile ${}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\lambda}$ tensörlerinin α, γ indislere göre antisimetrik oluşunu kullanarak (2.10.28) ve (2.10.17) denklemlerini eşitleyerek,

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^{\nu} \right) N_{\nu}^i + \left(\widehat{D}_{[\gamma} N_{\nu]}^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} - N_{\nu}^i \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_{\mu]}^{\nu} \right) H_{\alpha]\beta}^{\mu} + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j \\ & = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\lambda} B_{\lambda}^i \end{aligned} \quad (2.10.19)$$

buluruz. Bu denklemi B_i^{δ} ile çarparsak

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^{\nu} \right) \underbrace{N_{\nu}^i B_i^{\delta}}_{=0} + \left(\widehat{D}_{[\gamma} N_{\nu]}^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} B_i^{\delta} - \underbrace{N_{\nu}^i B_i^{\delta}}_{=0} \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_{\mu]}^{\nu} \right) H_{\alpha]\beta}^{\mu} \\ & \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j B_i^{\delta} = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s B_i^{\delta} - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\lambda} B_{\lambda}^i B_i^{\delta} \\ & \left(\widehat{D}_{[\gamma} N_{\nu]}^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} B_i^{\delta} + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j B_i^{\delta} = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s B_i^{\delta} - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} \\ & \left(\left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i \right) N_{\rho}^r - L_{[\gamma\nu]}^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} B_i^{\delta} + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j B_i^{\delta} = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s B_i^{\delta} - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} \\ & \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} N_{\rho}^r B_i^{\delta} - L_{[\gamma\nu]}^i B_i^{\delta} H_{\alpha]\beta}^{\nu} + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j B_i^{\delta} = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s B_i^{\delta} - {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} \\ & {}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} = {}^{\prime}R_{s\gamma\alpha}^i B_{\beta}^s B_i^{\delta} + L_{[\gamma\nu]}^{\delta} H_{\alpha]\beta}^{\nu} \\ & \quad - \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_{\beta}^j B_i^{\delta} - \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i \right) H_{\alpha]\beta}^{\nu} N_j^r B_i^{\delta} \end{aligned} \quad (2.10.20)$$

bulunur. Bu denklem ise Riemann-Otuski uzayının alt uzayında \widehat{D} diferansiyeline göre altuzayda **Gauss denklemidir**. Diğer taraftan [26]'de afin konneksiyonlar sayesinde Riemannian altuzaylara ait genelleştirilmiş Gauss Denklemine elde etmişti. (2.10.20) denklemi ise $\widehat{D}_{\gamma} \delta_j^i = 0$ için

$${}^{\prime\prime}\widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} = {}^{\prime}R_{\beta\gamma\alpha}^{\delta} + L_{[\gamma\nu]}^{\delta} H_{\alpha]\beta}^{\nu}$$

şekline gelir ki bu [26]'deki (4.4) denklemidir.

Şimdi (2.10.19) denklemini N_i^μ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^\nu \right) \underbrace{N_\nu^i N_i^\mu}_{=} + \left(\widehat{D}_{[\gamma} N_\nu^i \right) H_{\alpha]\beta}^\nu N_i^\mu - \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_\theta^\nu \right) H_{\alpha]\beta}^\theta N_\nu^i N_i^\mu \\
& \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_\beta^j N_i^\mu = ' R_{s\gamma\alpha}^i B_\beta^s N_i^\mu - " \widehat{R}_{\beta\gamma\alpha}^\lambda \underbrace{B_\lambda^i N_i^\mu}_{=} \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^\mu \right) + \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i N_\nu^r + L_{\gamma\nu}^\chi B_\chi^i \right) H_{\alpha]\beta}^\nu N_i^\mu - \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_\theta^\mu \right) H_{\alpha]\beta}^\theta \\
& \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_\beta^j N_i^\mu = ' R_{s\gamma\alpha}^i B_\beta^s N_i^\mu \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^\mu \right) + \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i \right) H_{\alpha]\beta}^\nu N_\nu^r N_i^\mu - \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_\theta^\mu \right) H_{\alpha]\beta}^\theta \\
& \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_\beta^j N_i^\mu = ' R_{s\gamma\alpha}^i B_\beta^s N_i^\mu
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{D}_{[\gamma} H_{\alpha]\beta}^\mu \right) &= ' R_{s\gamma\alpha}^i B_\beta^s N_i^\mu - \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_r^i \right) H_{\alpha]\beta}^\nu N_\nu^r N_i^\mu + \left(\widehat{D}_{[\gamma} \delta_\theta^\mu \right) H_{\alpha]\beta}^\theta \\
&\quad - \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_j^i \right) B_\beta^j N_i^\mu
\end{aligned} \tag{2.10.21}$$

birinci Codazzi Denklemi buluruz. Burada $\widehat{D}_\gamma \delta_i^j = 0$ alırsak denklem

$$\widehat{D}_\gamma H_{\alpha\beta}^\mu - \widehat{D}_\alpha H_{\gamma\beta}^\mu = ' R_{\beta\gamma\alpha}^\mu$$

şeklinde Riemann uzayındaki birinci Codazzi denklemine dönüşür.

Şimdi de " \widehat{D}_α ($\widehat{D}_\gamma N_\nu^i$)" ifadesini inceleyelim. (2.10.5) ve (2.6.7) eşitliklerini kullanarak

(2.10.13)'den

$$\begin{aligned}
\widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma N_\nu^i - \left(\widehat{D}_\gamma \delta_s^i \right) N_\nu^s \right) &= \widehat{D}_\alpha \left(L_{\gamma\nu}^\beta B_\beta^i \right) \\
\widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma N_\nu^i \right) &= \widehat{D}_\alpha \left(L_{\gamma\nu}^\beta B_\beta^i \delta_\varepsilon^\varepsilon \right) + \widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma \delta_s^i \right) N_\nu^s \\
\widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma N_\nu^i \right) &= \delta_\beta^\varepsilon \widehat{D}_\alpha \left(L_{\gamma\nu}^\beta B_\beta^i \right) - L_{\gamma\nu}^\beta B_\beta^i \left(\widehat{D}_\alpha \delta_\beta^\varepsilon \right) + \widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma \delta_s^i \right) N_\nu^s \\
\widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma N_\nu^i \right) &= \left(\widehat{D}_\alpha L_{\gamma\nu}^\beta \right) B_\beta^i + L_{\gamma\nu}^\beta \left(\widehat{D}_\alpha B_\beta^i \right) - L_{\gamma\nu}^\beta B_\beta^i \left(\widehat{D}_\alpha \delta_\beta^\varepsilon \right) + \widehat{D}_\alpha \left(\widehat{D}_\gamma \delta_s^i \right) N_\nu^s
\end{aligned}$$

buluruz. Buradan da

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{[\gamma}(\widehat{D}_{\alpha]}N_{(\nu)}^i) &= (\widehat{D}_{[\gamma}L_{\alpha]\nu}^\beta)B_\beta^i + L_{[\alpha\nu]}^\beta(\widehat{D}_{\gamma]}B_\beta^i) \\ &\quad - L_{[\alpha\nu]}^\beta B_\varepsilon^i(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_\beta^\varepsilon) + \widehat{D}_{[\gamma}(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i)N_\nu^s \end{aligned} \quad (2.10.22)$$

denklemini buluruz. Şimdi de " $\widehat{D}_\alpha(\widehat{D}_\gamma N_{(\nu)}^i)$ "'yi hesaplayalım. (2.10.5) formülünü iki kez N_ν^i 'ye uygularsak

$$\begin{aligned} \widehat{D}_\alpha \widehat{D}_\gamma N_\nu^i &= \partial_\alpha(\widehat{D}_\gamma N_\nu^i) + {}'\Gamma_{i\alpha}^i \widehat{D}_\gamma N_\nu^i - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon(\widehat{D}_\varepsilon N_\nu^i) - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\tau(\widehat{D}_\gamma N_\tau^i) \\ &= \partial_\alpha(\partial_\gamma N_\nu^i + {}'\Gamma_{r\gamma}^i N_\nu^r - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\sigma N_\sigma^i) + {}'\Gamma_{i\alpha}^i(\partial_\gamma N_\nu^i + {}'\Gamma_{s\gamma}^i N_\nu^s - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\sigma N_\sigma^i) \\ &\quad - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon(\partial_\varepsilon N_\nu^i + {}'\Gamma_{s\varepsilon}^i N_\nu^s - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\varepsilon}^\sigma N_\sigma^i) - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\tau(\partial_\gamma N_\tau^i + {}'\Gamma_{i\gamma}^i N_\tau^i - {}''\widetilde{\Gamma}_{\tau\gamma}^\sigma N_\sigma^i) \\ &= \partial_\alpha(\partial_\gamma N_\nu^i) + (\partial_\alpha {}'\Gamma_{r\gamma}^i)N_\nu^r + {}'\Gamma_{r\gamma}^i(\partial_\alpha N_\nu^r) - (\partial_\alpha {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\sigma)N_\sigma^i - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\sigma(\partial_\alpha N_\sigma^i) \\ &\quad + {}'\Gamma_{i\alpha}^i(\partial_\gamma N_\nu^i) + {}'\Gamma_{i\alpha}^i {}'\Gamma_{s\gamma}^i N_\nu^s - \Gamma_{i\alpha}^i {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\sigma N_\sigma^i \\ &\quad - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon(\partial_\varepsilon N_\nu^i) - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon {}'\Gamma_{s\varepsilon}^i N_\nu^s + {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\varepsilon}^\sigma N_\sigma^i \\ &\quad - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\tau(\partial_\gamma N_\tau^i) - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\tau {}'\Gamma_{i\gamma}^i N_\tau^i + {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\tau {}''\widetilde{\Gamma}_{\tau\gamma}^\sigma N_\sigma^i \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widehat{D}_\gamma \widehat{D}_\alpha N_\nu^i &= \partial_\gamma(\partial_\alpha N_\nu^i) + (\partial_\gamma {}'\Gamma_{r\alpha}^i)N_\nu^r + {}'\Gamma_{r\alpha}^i(\partial_\gamma N_\nu^r) - (\partial_\gamma {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\sigma)N_\sigma^i - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\sigma(\partial_\gamma N_\sigma^i) \\ &\quad + {}'\Gamma_{i\gamma}^i(\partial_\alpha N_\nu^i) + {}'\Gamma_{i\gamma}^i {}'\Gamma_{s\alpha}^i N_\nu^s - \Gamma_{i\gamma}^i {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\alpha}^\sigma N_\sigma^i \\ &\quad - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon(\partial_\varepsilon N_\nu^i) - {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon {}'\Gamma_{s\varepsilon}^i N_\nu^s + {}''\widehat{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\varepsilon {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\varepsilon}^\sigma N_\sigma^i \\ &\quad - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\tau(\partial_\alpha N_\tau^i) - {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\tau {}'\Gamma_{i\alpha}^i N_\tau^i + {}''\widetilde{\Gamma}_{\nu\gamma}^\tau {}''\widetilde{\Gamma}_{\tau\alpha}^\sigma N_\sigma^i \end{aligned}$$

denklemlerinden $'R_{r\gamma\alpha}^i$, $(R-O_m)$ 'nin eğrilik tensörünün kontravaryant kısmı, $''\widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^\rho$ ise $(R-O_{n-m})$ 'nin eğrilik tensörünün kovaryant kısmı olmak üzere

$$\widehat{D}_{[\gamma} \widehat{D}_{\alpha]} N_\nu^i = {}'R_{r\gamma\alpha}^i N_\nu^r - {}''\widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^\rho N_\rho^i \quad (2.10.23)$$

bulunur. (2.10.22) ve (2.10.23) denklemlerini eşitlesek

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) B_{\beta}^i + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} B_{\beta}^i \right) - L_{[\alpha \nu}^{\beta} B_{\varepsilon}^i \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s \\
& \quad = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r - " \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^{\rho} N_{\rho}^i \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) B_{\beta}^i + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) B_{\beta}^l + H_{\gamma\varepsilon}^i \right) - L_{[\alpha \nu}^{\beta} B_{\varepsilon}^i \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s \\
& \quad = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r - " \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^{\rho} N_{\rho}^i \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) B_{\beta}^i + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) B_{\beta}^l + L_{[\alpha \nu}^{\beta} H_{\gamma\beta}^i \\
& \quad - L_{[\alpha \nu}^{\beta} B_{\varepsilon}^i \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r - " \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^{\rho} N_{\rho}^i
\end{aligned} \tag{2.10.24}$$

buluruz. Bu denklemi B_i^{φ} ile çarpar ve (2.9.38) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) B_{\beta}^i B_i^{\varphi} + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) B_{\beta}^l B_i^{\varphi} + L_{[\alpha \nu}^{\beta} H_{\gamma\beta}^i B_i^{\varphi} - L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) B_{\beta}^i B_i^{\varphi} \\
& \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s B_i^{\varphi} = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r B_i^{\varphi} - " \underbrace{\widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^{\rho} N_{\rho}^i B_i^{\varphi}}_{=0} \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) B_{\beta}^l B_i^{\varphi} + L_{[\alpha \nu}^{\beta} H_{\gamma\beta}^i \underbrace{N_{\nu}^i B_i^{\varphi}}_{=0} - L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s B_i^{\varphi} \\
& \quad = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r B_i^{\varphi} \\
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r B_i^{\varphi} - L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) B_{\beta}^l B_i^{\varphi} \\
& \quad + L_{[\alpha \nu}^{\beta} \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) - \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s B_i^{\varphi}
\end{aligned} \tag{2.10.25}$$

buluruz ki bu **ikinci Codazzi denklemidir**. Burada $\widehat{D}_{\gamma} \delta_s^i = 0$ alırsak

$$\widehat{D}_{\alpha} L_{\gamma\nu}^{\varphi} - \widehat{D}_{\gamma} L_{\alpha\nu}^{\varphi} = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r B_i^{\varphi}$$

şeklinde Riemann uzayındaki ikinci Codazzi denklemini elde ederiz.

Şimdi, (2.10.24) denklemini N_i^{φ} ile çarparak

$$\begin{aligned}
& \left(\widehat{D}_{[\gamma} L_{\alpha] \nu}^{\beta} \right) \underbrace{B_{\beta}^i N_i^{\varphi}}_{=0} + L_{[\alpha \nu}^{\beta} B_{\beta}^l \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_l^i \right) N_i^{\varphi} + L_{[\alpha \nu}^{\beta} H_{\gamma\beta}^i N_i^{\varphi} - L_{[\alpha \nu}^{\beta} B_{\varepsilon}^i \left(\widehat{D}_{\gamma]} \delta_{\beta}^{\varepsilon} \right) N_i^{\varphi} \\
& \quad + \widehat{D}_{[\gamma} \left(\widehat{D}_{\alpha]} \delta_s^i \right) N_{\nu}^s N_i^{\varphi} = ' R_{r\gamma\alpha}^i N_{\nu}^r N_i^{\varphi} - " \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^{\rho} N_{\rho}^i N_i^{\varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{[\alpha\nu]}^l \left(\widehat{D}_{[\gamma]} \delta_l^i \right) N_i^\omega + L_{[\alpha\nu]}^\beta H_{\gamma\varepsilon}^\omega - L_{[\alpha\nu]}^\beta B_\varepsilon^i \left(\widehat{D}_{[\gamma]} \delta_\beta^\varepsilon \right) N_i^\omega \\
+ \widehat{D}_{[\gamma]} \left(\widehat{D}_{[\alpha]} \delta_s^i \right) N_\nu^s N_i^\omega = {}^l R_{r\gamma\alpha}^i N_\nu^r N_i^\omega - {}^n \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^\omega
\end{aligned} \tag{2.10.26}$$

bulunur ki bu Riemann Otsuki uzayında **Kühne denklemidir**. $\widehat{D}_\gamma \delta_i^j = 0$ alırsak

$$\begin{aligned}
L_{[\alpha\nu]}^\beta H_{\gamma\varepsilon}^\omega &= {}^l R_{r\gamma\alpha}^i N_\nu^r N_i^\omega - {}^n \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^\omega \\
L_{[\alpha\nu]}^\beta H_{\gamma\varepsilon}^\omega &= {}^l R_{\nu\gamma\alpha}^\omega - {}^n \widehat{R}_{\nu\gamma\alpha}^\omega
\end{aligned}$$

şeklindeki Riemann uzayında Kühne denklemini buluruz.

2.11. RIEMANN-OTSUKI UZAYININ FRENET FORMÜLLERİ

Bu bölümde konneksiyonun kovaryant ve kontravaryant kısımlarına göre Riemann-Otsuki uzayının Frenet formüllerini vereceğiz. Bu formülleri Nadj [18]'de elde etmiştir. Buradan elde edilen sonuca göre $(R-O_n)$ 'nin Frenet formüllerinin sadece konneksiyonun kontravaryant kısmına göre Riemann geometrisinde bilinen Frenet formüllerinden farklı oluşudur. Buradaki fark ise Otsuki uzayında $D\delta_j^i \neq 0$ olmasından kaynaklanmaktadır.

10. bölümünde gösterdiğimiz gibi Riemann-Otsuki uzayında konneksiyonun, sadece kovaryant ya da kontravaryant kısımlarına göre kovaryant diferansiyelleri tanımlayabiliriz. Bu durumda (1,1) tipinde bir tensör alanının $'D$ ve ${}^n D$ ile gösterilen diferansiyelleri (2.5.13) denklemleri ile verilir. Bu şekilde tanımlanan kovaryant diferansiyeller birer afin konneksiyon olduğundan Leibnitz kuralı geçerlidir. Bu diferansiyellerin şu özelliği vardır: kontravaryant indisler için $'D \equiv \bar{D}$, kovaryant indisler için ise ${}^n D \equiv \bar{D}$ dir. Bir g_{ij} metrik tensörü için aşağıdaki denklemler geçerlidir:

$$'Dg_{ij} = dg_{ij} - \left({}^l \Gamma_{ik}^r g_{rj} + {}^l \Gamma_{jk}^r g_{ir} \right) dx^k \tag{2.11.1}$$

$${}^n Dg_{ij} = \bar{D}g_{ij} = dg_{ij} - \left({}^n \Gamma_{ik}^r g_{rj} + {}^n \Gamma_{jk}^r g_{ir} \right) dx^k = 0 \tag{2.11.2}$$

$$'Dg^{ra} = \bar{D}g^{ra} = -g^{ia} g^{jr} \left({}^l Dg_{ij} \right) \tag{2.11.3}$$

$${}^n Dg^{ra} = 0 \quad (2.11.4)$$

2.11.1. Vektörlerin kontravaryant bileşenlere göre Frenet Formülleri

s , yay uzunluğu parametresi olmak üzere $C : x^i = x^i(s)$ eğrisinin bir noktası P olsun. Bu noktada $V_{(1)}$ birim tanjant vektörün bileşenleri $V_{(1)}^i := \frac{dx^i}{ds}$ olsun.

$$g_{ij} V_{(1)}^i V_{(1)}^j = 1 \quad (2.11.5)$$

denkleminin $'D$ kovaryant diferansiyeli uygularsak, Liebnitz formülü ve g_{ij} metrik tensörünün simetrik olduğu kullanılarak

$$('Dg_{ij}) V_{(1)}^i V_{(1)}^j + 2g_{ij} V_{(1)}^i ('DV_{(1)}^j) = 0 \quad (2.11.6)$$

bulunur. (2.11.1) ve (2.11.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} {}^n Dg_{ij} &= 0 \\ 'Dg_{ij} + g_{ri} \bar{D}\delta_j^r + g_{rj} \bar{D}\delta_i^r &= 0 \\ 'Dg_{ij} + 2g_{r(i} \bar{D}\delta_{j)}^r &= 0 \\ 'Dg_{ij} &= -2g_{r(i} \bar{D}\delta_{j)}^r \end{aligned}$$

buluruz. Bu denklemi (2.11.6) denkleminde yerine yazarak ve $'DV_{(1)}^j = \bar{D}V_{(1)}^j$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} 2g_{ij} V_{(1)}^i (\bar{D}V_{(1)}^j) - g_{ri} \bar{D}\delta_j^r V_{(1)}^i V_{(1)}^j - g_{rj} \bar{D}\delta_i^r V_{(1)}^i V_{(1)}^j &= 0 \\ g_{ij} V_{(1)}^i (\bar{D}V_{(1)}^j - V_{(1)}^r \bar{D}\delta_r^j) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

buluruz. Şimdi de, κ_1 C eğrisi üstünde bir fonksiyon olmak üzere $V_{(2)}$ birim vektörünü

$$V_{(2)}^j := \frac{1}{\kappa_1(s)} (\bar{D}V_{(1)}^j - V_{(1)}^r \bar{D}\delta_r^j), \quad \kappa_1 > 0 \quad (2.11.8)$$

şeklinde tanımlayalım. (2.11.7)'den $V_{(2)} \perp V_{(1)}$ olduğunu buluruz. Ayrıca

$$\kappa_1(s) = \left(g_{rq} \left(\bar{D}V_{(1)}^r - V_{(1)}^a \bar{D}\delta_a^r \right) \left(\bar{D}V_{(1)}^q - V_{(1)}^b \bar{D}\delta_b^q \right) \right) \quad (2.11.9)$$

ve (2.11.8)'den

$$\bar{D}V_{(1)}^j = \kappa_1(s)V_{(2)}^j + V_{(1)}^q \bar{D}\delta_q^j \quad (2.11.10)$$

denklemleri elde edilir. (2.11.10) denklemini vektörlerin kontravaryant bileşenlerine uygulanan \bar{D} temel kovaryant diferansiyelinin *Birinci Frenet Formülüdür*.

$V_{(2)}$ bir birim vektör olduğundan $g_{ij}V_{(2)}^iV_{(2)}^j = 1$ dir. Bu denkleme ' D temel kovaryant diferansiyeli uygularsak $V_{(1)}$ için yaptığımız benzer işlemleri yaparsak

$$g_{ij}V_{(2)}^i \left(\bar{D}V_{(2)}^j - V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j \right) = 0 \quad (2.11.11)$$

buluruz. Bu ise $V_{(2)}^i$ vektörünün $\bar{D}V_{(2)}^j - V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j$ 'nin vektörüne ortogonal olduğunu gösterir. $V_{(1)}$ ve $V_{(2)}$ vektörlerinin belirlediği düzleme ortogonal olan birim vektörün bileşenlerini $V_{(3)}^i$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\bar{D}V_{(2)}^j - V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j = \alpha V_{(1)}^j + \kappa_2 V_{(3)}^j \quad (2.11.12)$$

denklemini geçerlidir.

Şimdi de $g_{ij}V_{(1)}^iV_{(2)}^j = 0$ denkleminde ' D temel kovaryant diferansiyelini uygularsak ve $V_{(1)} \perp V_{(3)}$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} & \left({}^D g_{ij} \right) V_{(1)}^i V_{(2)}^j + g_{ij} \left({}^D V_{(1)}^i \right) V_{(2)}^j + g_{ij} V_{(1)}^i \left({}^D V_{(2)}^j \right) = 0 \\ & - g_{ri} \bar{D}\delta_j^r V_{(1)}^i V_{(2)}^j - g_{rj} \bar{D}\delta_i^r V_{(1)}^i V_{(2)}^j + g_{ij} \left(\kappa_1 V_{(2)}^i + V_{(1)}^q \bar{D}\delta_q^i \right) V_{(2)}^j \\ & + g_{ij} V_{(1)}^i \left(V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j + \alpha V_{(1)}^j + \kappa_2 V_{(3)}^j \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\kappa_1(s) + \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\kappa_1(s) \quad (2.11.13)$$

buluruz. Bunu (2.11.12)'de yerine yazarsak

$$\bar{D}V_{(2)}^j = -\kappa_1 V_{(1)}^j + \kappa_2 V_{(3)}^j + V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j \quad (2.11.14)$$

buluruz. Bu denklemden

$$V_{(3)}^i := \frac{1}{\kappa_2(s)} \left(\bar{D}V_{(2)}^i + \kappa_1 V_{(1)}^i - V_{(1)}^r \bar{D}\delta_r^i \right)$$

ve

$$\kappa_2(s) = \left(g_{ij} \left(\bar{D}V_{(2)}^j + \kappa_1 V_{(1)}^j - V_{(2)}^r \bar{D}\delta_r^j \right) \left(\bar{D}V_{(2)}^i + \kappa_1 V_{(1)}^i - V_{(2)}^b \bar{D}\delta_b^i \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz.

(2.11.7) ve (2.11.11)'den aşağıdaki genelleştirilmiş lemmayı verebiliriz.

Lemma 2.11.1. Herhangi bir V birim vektör için

$$g_{ij} V^i \left(\bar{D}V^j - V^r \bar{D}\delta_r^j \right) = 0$$

ve

$$g^{ij} V_i \left(\bar{D}V_j - V_r \bar{D}\delta_j^r \right) = 0$$

denklemleri geçerlidir, [18].

Kovaryant tipi için ispat, bölüm 2.11.2'de verilecektir.

Şimdi de aşağıdaki genelleştirmeleri yapalım. Birbirine ortogonal $V_{(l)}$ ($l=1,2,\dots,p$) birim vektörleri için $\kappa_0 = 0$ olmak üzere

$$\bar{D}V_{(l)}^j = -\kappa_{l-1} V_{(l-1)}^j + \kappa_l V_{(l+1)}^j + V_{(l)}^r \bar{D}\delta_r^j \quad (2.11.15)$$

olsun, $q = 1, \dots, p-1$ için

$$\kappa_q = \left(g_{ij} \left(\bar{D}V_{(q)}^j + \kappa_{q-1}V_{(q-1)}^j - V_{(q)}^r \bar{D}\delta_r^j \right) \left(\bar{D}V_{(q)}^i + \kappa_{q-1}V_{(q-1)}^i - V_{(q)}^r \bar{D}\delta_r^i \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11.16)$$

dir. Şimdi, $V_{(p)}^i$, $p = 2, \dots, n-1$, birim vektörlerini

$$V_{(p)}^i := \frac{1}{\kappa_{p-1}} \left(\bar{D}V_{(p-1)}^i + \kappa_{p-2}V_{(p-2)}^i - V_{(p-1)}^r \bar{D}\delta_r^i \right) \quad (2.11.17)$$

şeklinde tanımlayalım. Lemma 2.11.1'e göre $g_{ij}V_{(p)}^i \left(\bar{D}V_{(p)}^j - V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j \right) = 0$ denklemi geçerlidir, dolayısıyla $\bar{D}V_{(p)}^j - V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j$ vektörünü

$$\bar{D}V_{(p)}^j - V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j = \alpha_0 V_{(1)}^j + \dots + \alpha_{p-2} V_{(p-1)}^j + \kappa_p V_{(p+1)}^j \quad (2.11.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunu $g_{ij}V_{(l)}^i$, $l \leq p-1$ ile bürzersek, $V_{(l)}$ 'nin birim vektör ve $V_{(l)} \perp V_{(m)}$, ($m \neq l$) olduğunu kullanırsak

$$g_{ij}V_{(l)}^i \left(\bar{D}V_{(p)}^j - V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j \right) = \alpha_{l-1}$$

buluruz. Şimdi (2.11.15) denklemini kullanırsak

$$g_{ij}V_{(l)}^i \left(-\kappa_{p-1}V_{(p-1)}^j + \kappa_p V_{(p+1)}^j + \cancel{V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j} - \cancel{V_{(p)}^r \bar{D}\delta_r^j} \right) = \alpha_{l-1}, \quad l \leq p-1$$

$$\alpha_{l-1} = -\kappa_{p-1} g_{ij}V_{(l)}^i V_{(p-1)}^j$$

buluruz. Buradan $l = p-1$ için $\alpha_{p-2} = -\kappa_{p-1}$ ve $l \neq p-1$ için $\alpha_{l-1} = 0$ bulunur. Bunu (2.11.18)'de yerine yazarsak

$$\bar{D}V_{(p)}^j = -\kappa_{p-1}V_{(p-1)}^j + \kappa_p V_{(p+1)}^j + V_{(p)}^q \bar{D}\delta_q^j \quad (2.11.19)$$

buluruz ve böylece aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.11.1. $C : x^i(s)$, $(R - O_n)$ uzayında bir eğri ve bu eğrinin bir noktasında birbirine ortogonal olan $V_{(l)}$, ($l = 1, \dots, p, p+1$) ($p < n$) vektörleri verilsin.

$\kappa_0 = 0$, $\kappa_n = 0$ ve $V_{(l)}$, ($l = 1, \dots, p-1$) vektörleri için (2.11.15) denklemi sağlanıyorsa V_p vektörü için de bu denklem sağlanır, [18].

Otsuki D kovaryant diferansiyelini kullanırsak, $DV^j = P_a^j \bar{D}V^a$ denklemini kullanarak $\bar{D}V^a = Q_j^a DV^j$ buluruz ve bunu (2.11.15)'de uygulayarak

$$DV_{(l)}^j = P_i^j \left(-\kappa_{l-1}^i V_{(l-1)}^i + \kappa_l^i V_{(l+1)}^i \right) + V_{(l)}^q Q_q^b D\delta_b^j \quad (2.11.20)$$

$l = 1, \dots, n$, $\kappa_0 = 0$, $\kappa_n = 0$ buluruz. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.11.2. $(R - O_n)$ uzayındaki C eğrisinin bir M noktasında $\kappa_0 = 0$ ve $\kappa_n = 0$ olmak üzere, birbirine ortogonal olan $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ vektörleri (2.11.15) ve (2.11.16) denklemlerini sağlıyorsa, (2.11.20) denklemleri, Otsuki uzayındaki bu C eğrisi için Frenet formülleridir. Bu formül vektörlerin kontravaryant bileşenlerine uygulanan D kovaryant diferansiyeli için Frenet formülleridir, [18].

(2.11.20) formüller aynı zamanda vektörlerin kontravaryant bileşenlerine uygulanan $'D$ kovaryant diferansiyelinin de Frenet formülleridir. (2.11.20) formülleri ve Riemann geometrisinde bilinen Frenet formülleri arasındaki fark kronecker deltasının kovaryant diferansiyelinden gelir. Kronecker deltasının diferansiyelinin sıfır olması durumunda bu formül, P_i^j tensörü ile çarpılmış, bilinen Frenet formüllerine indirgenir.

Şimdi de (2.11.5) denklemine $'D$ kovaryant diferansiyelini uygulayalım. Leibnitz formülünü, g_{ij} 'nin simetrik oluşunu ve (2.11.2)'yi kullanarak

$$g_{ij} V_{(1)}^i ({}''DV_{(1)}^j) = 0$$

buluruz yani $V_{(1)} \perp {}''DV_{(1)}$ dir. Ayrıca

$$\kappa_1^* = \left(g_{ij} {}''DV_{(1)}^i {}''DV_{(1)}^j \right)^{\frac{1}{2}} > 0 \quad (2.11.21)$$

olmak üzere,

$${}^n DV_{(1)}^j = \kappa_1^* \bar{V}_{(2)}^j \quad (2.11.22)$$

denklemini sağlayan, $V_{(1)}$ 'e dik olan $\bar{V}_{(2)}$ vektörünü bulabiliriz. (2.11.22) denklemi vektörlerin kontravaryant bileşenlerine uygulanan "*D kovaryant türevi için birinci Frenet Formülüdür.*

Teorem 2.11.3. '*D* ve "*D* temel kovaryant diferansiyellerinin arasındaki bağıntısından $V_{(2)} = \bar{V}_{(2)}$ ve $\kappa_1(s) \equiv \kappa_1^*(s)$ bulunur, [18].

Burada skalerler için kullanılan * işareti, eğriliğin kontravaryant bileşenlere uygulanan, "*D* temel kovaryant diferansiyeli yardımıyla ifade edildiğini gösterir. "*D* kovaryant diferansiyelinin özellikleri göz önüne alındığında şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.11.4. "*D* kovaryant diferansiyeline göre $(R-O_n)$ uzayındaki *C* eğrisinin Frenet formüllerinin Riemann uzayında bilinen Frenet formüllerinden farkı yoktur. *C* eğrisinin bir *P* noktasında $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ vektörleri birbirine ortogonal olacak şekilde alınırsa

$${}^n DV_{(l)}^i = -\kappa_{l-1}^* V_{(l-1)}^i + \kappa_l^* V_{(l+1)}^i$$

denklemini, vektörün kontravaryant bileşenlere uygulanan "*D kovaryant diferansiyeline göre Frenet formülünü* gösterir.

2.11.2. Vektörlerin kovaryant bileşenlerine göre Frenet Formülleri

Tanıma göre $V_{(1)}$ vektörünün kovaryant bileşenleri $V_{(1)i} = g_{ij} \frac{dx^j}{ds}$ şeklindedir.

$g^{ij} V_{(1)i} V_{(1)j} = 1$ denklemini '*D* kovaryant diferansiyelini uygularsak Leibnitz kuralını, (2.11.8), (2.11.9) ve (2.11.10) denklemlerini kullanarak

$$g^{ij} V_{(1)i} \left({}^n DV_{(1)j} + V_{(1)b} \bar{D} \delta_j^b \right) = 0$$

buluruz. Bu ise Lemma 2.11.1'in birinci kısmını ispatlar.

Şimdi Bölüm 2.11.1'de yaptığımız gibi, $\kappa_0^{**} = 0$ ve $\kappa_n^{**} = 0$ olmak üzere

$$'D\bar{V}_{(l)j} = -\kappa_{l-1}^{**}\bar{V}_{(l-1)j} + \kappa_l^{**}\bar{V}_{(l+1)j} - \bar{V}_{(l)r}\bar{D}\delta_j^r \quad (2.11.23)$$

olacak şekilde birbirine ortogonal olan $\bar{V}_{(l)}, (l=1, \dots, n)$ vektörlerini gözönüne alalım.

Burada $l=1, \dots, n-1$ için

$$\kappa_l^{**} = \left(g^{ij} \left('D\bar{V}_{(l)j} + \kappa_{l-1}^{**}\bar{V}_{(l-1)j} + \bar{V}_{(l)r}\bar{D}\delta_j^r \right) \left('D\bar{V}_{(l)i} + \kappa_{l-1}^{**}\bar{V}_{(l-1)i} + \bar{V}_{(l)s}\bar{D}\delta_i^s \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11.24)$$

dir.

Teorem 7.2.1. $\bar{V}_{(l)i} = g_{ij}\bar{V}_{(l)}^j$ denklemini kullanılırsa $\kappa_l^{**}(s) = \kappa_l(s)$ ve $\bar{V}_{(l)} \equiv V_{(l)}$ bulunur, [18].

Yukarıda kullandığımız $**$ işareti eğriliğin, vektörün kovaryant bileşenlerine uygulanan $'D$ temel kovaryant diferansiyel yardımıyla ifade edileceğini gösterir.

Teorem 7.2.2. $(R-O_n)$ uzayında C eğrisinin bir M noktasında, $\kappa_0^{**} = 0$, $\kappa_n^{**} = 0$ olmak üzere $p=2, \dots, n$ için

$$V_{(p)i} := \frac{1}{\kappa_{p-1}^{**}} \left('D\bar{V}_{(p-1)i} + \kappa_{p-2}^{**}V_{(p-2)i} + V_{(p-1)r}\bar{D}\delta_i^r \right)$$

olacak şekilde $V_{(1)}, \dots, V_{(n)}$ vektörleri bulunabilirse

$$'DV_{(p)i} = -\kappa_{p-1}^{**}V_{(p-1)i} + \kappa_p^{**}V_{(p+1)i} - V_{(p)r}(D\delta_i^r) \quad (2.11.25)$$

denklemini vektörün kovaryant bileşenlerine uygulanan $'D$ **kontravaryant diferansiyeline göre Frenet formülüdür.**

Yukarıdaki hesaplamayı $"D$ kovaryant diferansiyeline göre yaparsak (2.11.4) denkleminde ve kovaryant indisler için \bar{D} ve $"D$ aynı olduğundan dolayı bu durumda Riemann uzayından bir farkı yoktur.

$$\bar{D}V_{(p)i} = {}''DV_{(p)i} = -\kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)j} + \kappa_p^{***}V_{(p+1)j} \quad (2.11.26)$$

denklemden ise

$$DV_{(p)i} = P_i^j \left(-\kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)j} + \kappa_p^{***}V_{(p+1)j} \right)$$

buluruz ki kovaryant bileşenlerine uygulanan D kovaryant diferansiyeline göre Frenet formülleridir. Burada $***$, skalerler için kullanılan işaret, eğriliğin, kontravaryant bileşenlerine uygulanan D Otsuki kovaryant diferansiyeli yardımıyla ifade edileceğini gösterir. (2.11.26)'dan

$$\kappa_p^{***} = \left[g^{ij} \left(\bar{D}V_{(p)i} + \kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)i} \right) \left(\bar{D}V_{(p)j} + \kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)j} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.11.27)$$

bulunur. $\bar{D}V_i = {}''DV_i = {}'DV_i + V_r \bar{D}\delta_i^r$ denklemini kullanarak

$$\kappa_p^{***} = \left[g^{ij} \left({}'DV_{(p)i} + \kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)i} + V_{(p)r} \bar{D}\delta_i^r \right) \left({}'DV_{(p)j} + \kappa_{p-1}^{***}V_{(p-1)j} + V_{(p)s} \bar{D}\delta_j^s \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

buluruz ki bu farklı diferansiyelerde eğriliklerin değeri farklı olmadığını gösterir. Bu sonuç beklenen bir sonuçtur çünkü eğrilik sadece tek şekilde belirlenen bir eğri ve uygun şekilde kurulmuş bir vektör çatisına bağlıdır. Dolayısıyla Riemann-Otsuki uzayındaki Frenet formülleri sadece $D\delta_j^i \neq 0$ geçerli olması durumunda Riemann uzayındaki formüllerden farklıdır.

2.12. RIEMANN-OTSUKI UZAYININDA OTOPARALEL EĞRİLER

Bu bölümde n -boyutlu $(R-O_n)$ Riemann-Otsuki uzayının m -boyutlu $(R-O_m)$ altuzayındaki otoparalel eğriler incelenmiştir. Nadj Dj. [19]'da, $(R-O_m)$ 'de otoparalel olan eğrilerinin $(R-O_n)$ 'de de otoparalel olması için koşullar belirlemiştir. Otsuki uzayında konneksiyonun kontravaryant ve kovaryant kısımları farklı olduğundan bu uzayda kontravaryant tipinde ve kovaryant tipinde otoparalel eğriler ayrı tanımlanmıştır.

2.12.1. Kontravaryant tipindeki oto paralel eğriler

$(R-O_m)$, $x^i = x^i(u^1, \dots, u^m)$, $(m < n)$ ile tanımlanan $(R-O_n)$ 'nin bir altuzayı olsun.

$C: u^\alpha(s)$ eğrisinin $\frac{du^\alpha}{ds}$ tanjant vektörü C boyunca bir paralel vektör alanı ise C eğrisine altuzayda bir otoparalel eğri denir. Konneksiyonun regüler olduğunu düşünerek C eğrisinin herhangi bir tanjant vektörüne kovaryant türev uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\widehat{D}\left(\frac{du^\varepsilon}{ds}\right) &= 0 \\ P_\alpha^\varepsilon \widehat{D}\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right) &= 0 \\ P_\alpha^\varepsilon \left(\partial_\gamma \left(\frac{du^\alpha}{ds} \right) + \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \right) \frac{du^\gamma}{ds} &= 0\end{aligned}$$

ya da

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0 \quad (2.12.1)$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemler kontravaryant tipindeki otoparalel eğrilerin denklemleridir.

Şimdi de altuzayda otoparalel bir eğri aynı zamanda üst uzayda da *otoparalel bir eğri* olması için koşulları inceleyeceğiz.

$$C: x^i = x^i(u^\alpha(s)) \quad (2.12.2)$$

eğrisi $(R-O_m)$ uzayında otoparalel bir eğri olsun. (2.12.2)'nin diferansiyelini alırsak ve

$$B_\alpha^i := \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \text{ yazarsak}$$

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{ds} = B_\alpha^i \frac{du^\alpha}{ds}$$

ve

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{\partial B_\alpha^i}{\partial u^\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + B_\alpha^i \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \quad (2.12.3)$$

buluruz. C eğrisi kovaryant tipinde otoparalel bir eğri olduğundan (2.12.1)'i kullanarak

$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2}$ ifadesini (2.12.3)'de yerine yazarak

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\alpha} - B_\alpha^i \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(u(s)) \right) \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds}$$

buluruz. Diğer yandan, $(R - O_n)$ uzayında C eğrisi otoparalel bir eğri olması için

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{sk}^i \frac{dx^s}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

denklemini sağlanmalıdır, buradan da

$$-\Gamma_{sk}^i B_\beta^s B_\gamma^k \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = \left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\alpha} - B_\alpha^i \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha(u(s)) \right) \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds}$$

bulunur. Yani, C eğrisinin $(R - O_n)$ uzayında da otoparalel olması için

$$\left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{sk}^i B_\beta^s B_\gamma^k \right) \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = B_\alpha^i \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} \quad (2.12.4)$$

denklemini geçerli olması gerekir. O halde aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 2.12.1. $(R - O_m)$ 'de otoparalel bir C eğrisi üst uzayda da otoparalel olması için gerek ve yeter koşul (2.12.4) denkleminin sağlanmasıdır, [19].

Teorem 2.12.2. $(R - O_m)$ altuzayında bir C eğrisi için (2.12.4) denklemini geçerli olsun ve $\xi^i = B_\alpha^i \xi^\alpha$, C eğrisi yönünde tanımlı, altuzayda bir vektör olsun. Bu takdirde C boyunca

$$\frac{\hat{D}\xi^\alpha}{ds} = P_\delta^\alpha B_i^\delta Q_t^i \frac{D\xi^t}{ds} \quad (2.12.5)$$

geçerlidir, [19].

İspat. (2.12.4)'den bu eğrinin altuzayda ve üst uzayda otoparalel bir eğri olduğunu buluruz. Kovaryant türev tanımını kullanarak $(R-O_n)$ 'deki ξ^i 'nin temel kovaryant diferansiyelini alırsak

$$\frac{\bar{D}\xi^i}{ds} = \frac{d}{ds} (B_\beta^i \xi^\beta) + \Gamma_{sk}^i B_\beta^s \xi^\beta \frac{dx^k}{ds}$$

buluruz ve bunu da $g_{ij} B_\alpha^j$ ile çarparsak

$$g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} = g_{ij} B_\alpha^j \left[B_\beta^i \frac{d\xi^\beta}{ds} + \left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{sk}^i B_\beta^s B_\gamma^k \right) \frac{du^\gamma}{ds} \right], \quad (2.12.6)$$

denklemini elde ederiz. ξ^α vektörü C eğrisinin yönünde tanımlı olduğundan

$$\xi^\alpha = \xi \frac{du^\alpha}{ds} \quad (2.12.7)$$

şeklinde yazabiliriz ve bu denklemi (2.12.4)'de yerine koyarsak (2.12.6)'dan

$$\begin{aligned} g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} &= g_{ij} B_\alpha^j \left[B_\beta^i \frac{d\xi^\beta}{ds} + \underbrace{\left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{sk}^i B_\beta^s B_\gamma^k \right)}_{(2.9.27)} \underbrace{\xi^\beta}_{=\xi \frac{du^\beta}{ds}} \frac{du^\gamma}{ds} \right] \\ g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} &= g_{ij} B_\alpha^j \left[B_\beta^i \frac{d\xi^\beta}{ds} + B_\chi^i \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\chi \xi \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} \right] \\ g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} &= g_{ij} B_\alpha^j B_\beta^i \left[\frac{d\xi^\beta}{ds} + \hat{\Gamma}_{\gamma\chi}^\beta \underbrace{\xi}_{=\xi^\gamma} \frac{du^\gamma}{ds} \frac{du^\chi}{ds} \right] \\ g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} &= g_{ij} B_\alpha^j B_\beta^i \left[\frac{d\xi^\beta}{ds} + \hat{\Gamma}_{\gamma\chi}^\beta \xi^\gamma \frac{du^\chi}{ds} \right] \end{aligned} \quad (2.12.8)$$

ya da

$$g_{ij} B_\alpha^j \frac{\bar{D}\xi^i}{ds} = G_{\alpha\beta} \frac{\widehat{D}\xi^\beta}{ds}$$

buluruz. Bu denklemde $\frac{\bar{D}}{ds}$ temel kovaryant diferansiyelini $\frac{D}{ds}$ cinsinden yazarsak

$$\left(\frac{D\xi^i}{ds} = P_j^i \frac{\bar{D}\xi^j}{ds} \right) \text{ ve } G^{\alpha\delta} \text{ ile çarparsak}$$

$$\frac{\widehat{D}\xi^\alpha}{ds} = P_\delta^\alpha B_i^\delta Q_t^i \frac{D\xi^t}{ds}$$

buluruz ki bu (2.12.5) denklemdir. Yani, altuzayda bir kontravaryant vektörün kovaryant türevi $(R-O_n)$ 'nin kovaryant türevinin izdüşümüne eşit değildir. Kovaryant türev, P_β^α tensörü P_j^i 'nin $(R-O_m)$ 'deki izdüşümü ve Q_a^i tensörü P_j^i 'nin tersi olmak üzere, P_β^α ve Q_a^i 'ya da bağlıdır.

(2.12.4) koşulu yerine daha güçlü bir koşul şu teorem ile verebiliriz.

Teorem 2.12.3. Eğer $R-O_m$ altuzayında C boyunca

$$B_\alpha^i \widehat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\gamma}{ds} = \left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{jk}^i B_\beta^j B_\gamma^k \right) \frac{du^\gamma}{ds} \quad (2.12.9)$$

denklemini geçerli ise C boyunca tanımlı herhangi bir ξ^α vektörü için (2.12.5) denklemini de geçerlidir, [19].

İspat. (2.12.9) koşulu (2.12.4) koşulundan daha güçlüdür dolayısıyla verilen C eğrisi $(R-O_m)$ 'de ve $(R-O_n)$ 'de otoparaleldir. Yukarıda yaptığımız hesaplamaların benzerini yaparak, (2.12.6) denklemini ve (2.12.9)'u kullanarak (2.12.8)'i buluruz. Kolayca görülür ki bu denklem (2.12.5)'e özdeştir.

2.12.2. Kovaryant tipte otoparalel eğriler

$$\frac{D}{ds} \left(g_{ij}(x) \frac{dx^j}{ds} \right) = 0 \quad (2.12.10)$$

denklemini sağlayan eğrilere kovaryant tipte otoparalel eğriler denir. Riemann uzayında bu denklem $\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^j}{ds}\right) = 0$ denklemine eşdeğerdir çünkü Riemann uzayında $Dg_{ij} = 0$ ve Leibnitz kuralı geçerlidir.

(2.12.10) denklemine kovaryant türevi uygularsak

$$P_i^r \frac{\bar{D}}{ds} \left(g_{rj} \frac{dx^j}{ds} \right) = 0$$

$$g^{ir} \frac{dg_{rj}}{ds} \frac{dx^j}{ds} + \frac{d^2 x^i}{ds^2} - {}^n \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

buluruz. $(R-O_n)$ uzayında $\bar{D}g_{ij} = {}^n Dg_{ij} = 0$ olduğundan

$$\frac{dg_{ij}}{ds} = {}^n \Gamma_{ik}^l g_{lj} \frac{dx^k}{ds} + {}^n \Gamma_{jk}^l g_{li} \frac{dx^k}{ds}$$

denklemini geçerlidir. Bunu yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + {}^n \Gamma_{rk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (2.12.11)$$

buluruz. Bu denklem $(R-O_n)$ uzayında kovaryant tipteki otoparalel eğrilerin denklemdir. $(R-O_m)$ uzayında kovaryant tipteki otoparalel eğrilerin denklemi ise

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + {}^n \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds} = 0 \quad (2.12.12)$$

şeklindedir. (2.12.12) denkleminden $\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2}$ ifadesini (2.12.3)'de yerine yazarsak

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \left(\frac{\partial B_\beta^i}{\partial u^\alpha} - B_\alpha^i {}^n \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \right) \frac{du^\beta}{ds} \frac{du^\gamma}{ds}$$

buluruz. Bu denklemi (2.12.2)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial B_\alpha^i}{\partial u^\gamma} - B_\gamma^i \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \right) \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + \Gamma_{jk}^i B_\alpha^j B_\beta^k \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} &= 0 \\ \left(\frac{\partial B_\alpha^i}{\partial u^\gamma} + \Gamma_{jk}^i B_\alpha^j B_\beta^k \right) \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} &= B_\gamma^i \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} \end{aligned} \quad (2.12.13)$$

buluruz. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.12.4. $R-O_m$ uzayında (2.14.1) denkleminin geçerli olması için gerek ve yeter koşul altuzayda bulunan kovaryant tipteki otoparalel bir eğrinin aynı zamanda üst uzayda da kovaryant tipten otoparalel bir eğri olmasıdır, [19].

Şimdi de kontravaryant tipte eğriler için elde ettiğimiz Teorem 2.12.2 ve 2.12.3'ün benzerlerini kovaryant durumda geçerli olup olmadığını araştıralım. Altuzayda verilen bir C eğrisine teğet olan $\xi_i = B_i^\alpha \xi_\alpha$ vektörüne temel kovaryant türevi uygulayıp $g^{ij} B_j^\alpha$ ile çarparsak

$$g^{ij} B_j^\alpha \frac{D \xi_i}{ds} = g^{ij} B_j^\alpha \left\{ \frac{d \xi_\beta}{ds} B_i^\beta + \left(\frac{\partial B_i^\beta}{\partial u^\chi} - \Gamma_{ik}^s B_s^\beta B_\chi^k \right) \xi_\beta \frac{du^\chi}{ds} \right\} \quad (2.12.14)$$

denklemini buluruz. Diğer yandan $B_i^\beta = g_{ir} G^{\alpha\beta} B_\gamma^r$ olduğunu kullanarak

$$\begin{aligned} g^{ij} B_j^\alpha \frac{\partial B_i^\beta}{\partial u^\chi} &= g^{ij} B_j^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\chi} (g_{ir} G^{\beta\gamma} B_\gamma^r) = \\ &g^{ij} B_j^\alpha \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} B_\chi^k B_\gamma^r G^{\beta\gamma} + \frac{\partial B_\gamma^r}{\partial u^\chi} g_{ir} G^{\beta\gamma} + \frac{\partial G^{\beta\gamma}}{\partial u^\chi} g_{ir} B_\gamma^r \right) \end{aligned}$$

buluruz. $\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik}^s g_{sr} + \Gamma_{rk}^s g_{is}$ ifadesini yukarıdaki denklemden yerine yazarsak,

B_s^β 'nin tanımını ve $B_r^\alpha B_\gamma^r = \delta_\gamma^\alpha$ olduğunu kullanarak

$$g^{ij} B_j^\alpha \left(\frac{\partial B_i^\beta}{\partial u^\chi} - \Gamma_{ik}^s B_\chi^k B_s^\beta \right) = \left(\Gamma_{rk}^j B_\chi^k B_\gamma^r + \frac{\partial B_\gamma^j}{\partial u^\chi} \right) B_j^\alpha G^{\beta\gamma} + \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\chi}$$

buluruz. Bunu (2.12.14)'de yerine yazarak

$$\begin{aligned}
g^{ij} B_j^\alpha \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} &= g^{ij} B_j^\alpha \frac{d\xi_\beta}{ds} B_i^\beta + g^{ij} B_j^\alpha \underbrace{\left(\frac{\partial B_i^\beta}{\partial u^\chi} - {}''\Gamma_{ik}^s B_s^\beta B_\chi^k \right)}_{\text{}} \xi_\beta \frac{du^\chi}{ds} \\
g^{ij} B_j^\alpha \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} &= \underbrace{g^{ij} B_j^\alpha B_i^\beta}_{G^{\alpha\beta}} \frac{d\xi_\beta}{ds} + \left\{ \left({}''\Gamma_{rk}^j B_\chi^k B_\gamma^r + \frac{\partial B_\gamma^j}{\partial u^\chi} \right) B_j^\alpha G^{\beta\gamma} + \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\chi} \right\} \xi_\beta \frac{du^\chi}{ds} \\
g^{ij} B_j^\alpha \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} &= G^{\alpha\beta} \frac{\widehat{D}\xi_\beta}{ds} + \left[\begin{array}{c} \frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\chi} + G^{\alpha\lambda} {}''\Gamma_{\lambda\chi}^\beta + \\ \left({}''\Gamma_{rk}^j B_\chi^k B_\gamma^r + \frac{\partial B_\gamma^j}{\partial u^\chi} \right) B_j^\alpha G^{\beta\gamma} \end{array} \right] \xi_\beta \frac{du^\chi}{ds} \quad (2.12.15)
\end{aligned}$$

buluruz. ξ_β vektörü C eğrisine teğet olduğundan

$$G^{\gamma\beta} \xi_\beta = \xi^\gamma = \xi \frac{du^\gamma}{ds}$$

dir ve (2.14.1) varasayımından dolayı geçerli olduğundan

$$g^{ij} B_j^\alpha \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} = G^{\alpha\beta} \frac{\widehat{D}\xi_\beta}{ds} + \left(\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\chi} + {}''\Gamma_{\lambda\chi}^\beta G^{\alpha\lambda} + {}''\widehat{\Gamma}_{\chi\lambda}^\alpha G^{\gamma\beta} \right) \xi_\beta \frac{du^\chi}{ds} \quad (2.12.16)$$

bulunur. Riemann-Otsuki uzaylarında ${}''\widehat{D}G_{\alpha\beta} = \frac{\widehat{D}G_{\alpha\beta}}{ds} = 0$ ve buradan da ${}''\widehat{D}$ kovaryant

türev için Laibnitz formülü geçerli olduğundan

$$\left(\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial u^\chi} + {}''\widehat{\Gamma}_{\lambda\chi}^\beta G^{\alpha\lambda} + {}''\widehat{\Gamma}_{\chi\lambda}^\alpha G^{\gamma\beta} \right) \frac{du^\chi}{ds} = \frac{{}''\widehat{D}G^{\alpha\beta}}{ds} = 0$$

bulunur. Bunu (2.2.16)'da yazarsak

$$g^{ij} B_j^\alpha \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} = G^{\alpha\beta} \frac{\widehat{D}\xi_\beta}{ds} \quad (2.12.17)$$

buluruz. Buradan ise

$$B^i_\gamma \frac{\bar{D}\xi_i}{ds} = \frac{\widehat{D}\xi_\gamma}{ds}$$

elde edilir. \bar{D} ve \widehat{D} temel kovaryant diferansiyaller, sırasıyla, D ve \widehat{D} cinsinden

$$\frac{\bar{D}\xi_i}{ds} = Q^r_i \frac{D\xi_r}{ds} \quad \text{ve} \quad \frac{\widehat{D}\xi_\gamma}{ds} = \widehat{Q}^\alpha_\gamma \frac{\widehat{D}\xi_\alpha}{ds},$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bunları bir önceki denklemde yerine yazarsak

$$\frac{\widehat{D}\xi_\alpha}{ds} = P^\gamma_\alpha B^i_\gamma Q^r_i \frac{D\xi_r}{ds} \quad (2.12.18)$$

buluruz ve böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.12.5. $(R-O_m)$ uzayında, $\xi_r = B_r^\alpha \xi_\alpha$ vektörü C eğrisine teğet olmak üzere, (2.14.1) denklemi sağlanıyorsa C boyunca (2.12.18) denklemi de sağlanır, [19].

Bu teorem $(R-O_m)$ alt uzayının herhangi bir vektörü için de geçerlidir. Bunu göstermek için (2.14.1) koşulundan daha güçlü bir koşul olan

$$\left(\frac{\partial B^i_\beta}{\partial u^\chi} + \Gamma^i_{jk} B^j_\beta B^k_\chi \right) \frac{du^\chi}{ds} = B^i_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\chi} \frac{du^\chi}{ds} \quad (2.12.19)$$

koşulunu kullanırız. (2.12.19)'un sağ yanını (2.12.15)'de yerine yazarak ve $\frac{\widehat{D}G^{\alpha\beta}}{ds} = 0$ denklemini kullanarak (2.12.17)'yi elde ederiz ve böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.12.6. (2.12.19) denklemi, $R-O_n$ 'de bileşenleri $\xi_i = B_i^\alpha \xi_\alpha$ olan altuzayın bir ξ_α vektörü için, altuzayın otoparalel eğrileri boyunca (2.12.18) denkleminin geçerli olduğunu gösterir, [19].

3.MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, 2.bölümde belirttiğimiz bilgiler kullanılarak genel konneksiyon yardımıyla n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayında otoparalel eğriler, çember, helis, invölüt eğrisi ve Bertrand eğrileri gibi özel eğriler incelenmiştir. Bu tip eğrilerin incelenmesi Riemann-Otsuki uzayındaki eğrilerin deformasyonu kullanılarak yapılmıştır. Verilen bir $C : x^\lambda = x^\lambda(s)$ eğrisi için, ε sonsuz küçük bir sabit ve ξ^λ C boyunca tanımlı bir vektör alanı olmak üzere, sonsuz küçük bir deformasyon $\delta x^\lambda \equiv \varepsilon \xi^\lambda$ ile verilmiştir. Bu deformasyon sonucunda Riemann uzayında tanımlanan Δ ve D^{13} operatörleri, [20-24], Riemann-Otsuki uzayında yeniden hesaplanarak eğrilerin incelenmesi için kullanılmıştır. Ayrıca Riemann-Otsuki uzayında paralel teğet ve Combescure deformasyonları verilmiştir, [20], [23], sonra da otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere ve çemberi çembere taşıyan deformasyonlar elde edilmiştir.

Riemannian uzayındaki helis eğrisinin sağladığı denklemlerden hareket ederek Riemann-Otsuki uzayında helis eğrisini tanımlayan deformasyon elde edilmiştir. Benzer şekilde Riemann-Otsuki uzayında involüt eğrisinin Riemann uzayındaki özelliklerinden farklı olan özellikleri araştırılmıştır. Son olarak da Riemann uzayında Pears tarafından [25]'de incelenen Bertrand eğrileri yine Otsuki kovaryant türevi ve özelliklerini kullanarak Riemann-Otsuki uzayında incelenmiş ve Rieman uzayından farklı olan yeni özellikleri elde edilmiştir.

4.BULGULAR

4.1. $(R-O_n)$ UZAYINDA EĞRİLERİN DEFORMASYONLARI

3-boyutlu Öklid uzayında bilindiği gibi, iki eğrinin noktaları arasında bir 1-1 eşleşme var ise ve bu karşılıklı iki noktada eğrilerin teğet vektörleri paralel ise bu takdirde eğrilerin birinci ve ikinci normalleri de paraleldir. Bu tür eğrilere, Combescure transformasyon ile birbirinden türetilen eğriler denir.

[20]'de Riemann uzayındaki paralellik kavramı kullanılarak, yukarıda sözü edilen eğrilerin bu özelliği Riemann uzayında incelenmiştir. Yani, orada bir vektörün paralel yer değiştirmesi yayın yer değiştirmesine bağlı olduğundan, yay uzunluğunun sonlu olduğu durumlar için, eğrilerin sonsuz küçük deformasyonları incelenmiştir. Bizim çalışmamızda ise bu özellikler Riemann-Otsuki uzayında incelenecektir. Aslında, eğriyi sürekli bir deformasyon olarak düşüneceğiz ve her noktadaki teğeti paralel olarak öteleyen her deformasyonun 1. normal, 2. normal,...,n-1. normal vektörlerini de paralel olarak öteleyip ötelemeyeceğini araştıracağız. Bu özelliğe sahip deformasyona “genel Combescure transformasyonu” ya da kısaca G.C. transformasyonu denir. Bir eğrinin teğetlerini paralel olarak öteleyen bir transformasyon G.C transformasyonu ise bu takdirde bu eğri “G.C. özelliğine sahiptir” denir. Üstelik, eğer uzayın her eğrisi G.C özelliğine sahip ise uzaya G.C özelliğine sahiptir denir.

$(R-O_n)$, n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayı, $g_{\mu\nu}$ Riemann metrik tensörünü ve $\Gamma = (P_\mu^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\lambda)$ $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu \dots = 1, 2, \dots, n$ bir regüler genel konneksiyon olsun. Bu konneksiyona göre (1,1) tipinde bir tensör alanı için temel kovaryant diferansiyel (2.6.4) denkleminde

$$\bar{D}T_\mu^\lambda = \bar{D}_\gamma T_\mu^\lambda du^\gamma = \left(\partial_\gamma T_\mu^\lambda + \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda T_\mu^\alpha - \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha T_\alpha^\lambda \right) du^\gamma \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanmıştı. Bu uzayın burulmasız bir uzay olduğunu varsayacağız, yani $'\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = '\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ ve $''\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = ''\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ dir.

$(R - O_n)$ uzayında bir eğri, eğrinin yay uzunluğu parametresi s olmak üzere,

$$x^{\lambda} = x^{\lambda}(s) \quad (4.1.2)$$

denklemleri ile verilsin ve bu eğriyi C ile gösterelim. Bu eğrinin her noktasında sonsuz küçük bir deformasyon $\delta x^{\lambda} \equiv \varepsilon \xi^{\lambda}$ ile verilsin. Burada ε sonsuz küçük bir sabit, ξ^{λ} ise C boyunca tanımlı ve uzunluğu $\xi \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} \xi^{\mu} \xi^{\nu}}$ olan bir vektör alanıdır. Bu C eğrisinin deformasyonu olan eğriyi \bar{C} ile gösterelim. Bu durumda \bar{C} eğrisi

$$\bar{x}^{\lambda}(\bar{s}) = x^{\lambda}(s) + \varepsilon \xi^{\lambda}(s) \quad (4.1.3)$$

denklemleri ile verilir. C eğrisi boyunca tanımlanan herhangi bir $v^{\lambda}(s)$ vektör alanını alalım. (4.1.3) ile verilen sonsuz küçük deformasyonla $v^{\lambda}(s)$, \bar{C} eğrisi boyunca tanımlı $\bar{v}^{\lambda}(\bar{s})$ vektörüne dönüşür. $v^{\lambda}(s)$ ve $\bar{v}^{\lambda}(\bar{s})$ vektörleri, sırasıyla, $x^{\lambda}(s)$ ve $\bar{x}^{\lambda}(\bar{s})$ noktalarında tanımlıdırlar ve (4.1.3)'den Taylor formülünü kullanarak

$$\bar{v}^{\lambda}(\bar{x}) = v^{\lambda}(x) + (\partial_{\omega} v^{\lambda})(\bar{x}^{\omega}(s) - x^{\omega}(s))$$

ya da

$$\bar{v}^{\lambda} = v^{\lambda} + \varepsilon (\partial_{\omega} v^{\lambda}) \xi^{\omega} := v^{\lambda} + d^1 v^{\lambda} \quad (4.1.4)$$

buluruz. Öte yandan, bir eğri boyunca paralel bir vektör alanı

$$\bar{D}v^{\lambda} = \frac{dv^{\lambda}}{ds} + '\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} v^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (4.1.5)$$

koşulunu sağlar ve buradan

$$\frac{dv^{\lambda}}{ds} = -'\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} v^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{ds} \quad (4.1.6)$$

bulunur. Şimdi, v^λ vektörünü x^λ noktasından \bar{x}^λ noktasına paralel olarak öteleyelim ve bu şekilde elde ettiğimiz vektörü $*v^\lambda$ ile gösterelim. (4.1.6) denklemini (4.1.4) denkleminde yerine yazarsak

$$*v^\lambda(\bar{x}) = v^\lambda(x) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{dx^\omega} \xi^\omega \mathcal{E}$$

ya da

$$*v^\lambda(\bar{x}) = v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \xi^\nu \mathcal{E} := v^\lambda + d^2 v^\lambda \quad (4.1.7)$$

buluruz.

Şimdi de ξ^λ uzayda herhangi bir kontravaryant vektör alanı olması durumunda sonsuz küçük deformasyonu tanımlayan denklemleri

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \mathcal{E} \xi^\lambda \quad (4.1.8)$$

şeklinde ifade edelim. $x^\lambda(s)$, $(R - O_n)$ uzayında bir eğriyi gösterebilir ve bu eğri boyunca tanımlı bir vektör $v^\lambda(s)$ olsun. (4.1.8) deformasyonunu uygularsak, deformasyona uğrayan eğri

$$\bar{x}^\lambda(\bar{s}) = x^\lambda(s) + \mathcal{E} \xi^\lambda(x(s)) \quad (4.1.9)$$

şeklini alır ve $x^\lambda(s)$ noktasında $v^\lambda(s)$ vektörü, $\bar{x}^\lambda(\bar{s})$ noktasında $\bar{v}^\lambda(\bar{s})$ vektörüne dönüşür, $P(x^\lambda)$ noktası ise $Q(x^\lambda + \xi^\lambda \mathcal{E})$ noktasına dönüşür. Bu durumda (4.1.8) transformasyonu

- a) P noktasını Q noktasına dönüştürür,
- b) $v^\lambda(P)$ vektörünü $\bar{v}^\lambda(Q)$ vektörüne dönüştürür.

P noktasına komşu olan $x^\lambda + v^\lambda \delta v$ koordinatlı noktayı da R ile gösterelim ve P noktasındaki $\mathcal{E} \xi^\lambda$ vektörünü de R 'ye götürelim. O halde, Taylor formülünden

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\xi^\lambda}(R) &= \varepsilon^{\xi^\lambda}(P) + \varepsilon^{\xi^\lambda}_{,\omega}(R-P) \\
\varepsilon^{\xi^\lambda}(x + v\delta v) &= \varepsilon^{\xi^\lambda}(x) + (\varepsilon^{\xi^\lambda}_{,\omega})v^\omega \delta v \\
\varepsilon^{\xi^\lambda}(x + v\delta v) &= \varepsilon(\xi^\lambda(x) + \xi^\lambda_{,\omega}v^\omega \delta v)
\end{aligned}$$

yazarız. Bu vektörün $x^\lambda + v^\lambda \delta v + \varepsilon(\xi^\lambda + \xi^\lambda_{,\alpha}v^\alpha \delta v)$ koordinatlı uç noktasını S ile, \overline{QS} vektörünü ise ${}^\wedge v^\lambda(s)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$v^\lambda = \left[(x^\lambda + v^\lambda \delta v) - x^\lambda \right] / \delta v \quad (4.1.10)$$

yazabiliriz, ${}^\wedge v^\lambda(s)$ vektörünü ise

$${}^\wedge v^\lambda = \left\{ \left[x^\lambda + v^\lambda \delta v + \varepsilon(\xi^\lambda + \xi^\lambda_{,\alpha}v^\alpha \delta v) \right] - \left[x^\lambda + \varepsilon^{\xi^\lambda} \right] \right\} / \delta v$$

$${}^\wedge v^\lambda(\bar{x}) = v^\lambda + \varepsilon^{\xi^\lambda}_{,\alpha}v^\alpha := v^\lambda + d^3 v^\lambda \quad (4.1.11)$$

şeklinde elde ederiz.

(4.1.4), (4.1.7) ve (4.1.11) denklemleri ile verilen ${}^1 d v^\lambda$, ${}^2 d v^\lambda$ ve ${}^3 d v^\lambda$ varyasyonları ${}^\wedge v^\lambda(s)$ vektörüne uygulanan aşağıdaki operatörleri tanımlar:

$${}^{12} D v^\lambda = \left({}^1 d - {}^2 d \right) v^\lambda, \quad (4.1.12)$$

$${}^{13} D v^\lambda = \left({}^1 d - {}^3 d \right) v^\lambda. \quad (4.1.13)$$

(4.1.12) denklemi ξ^λ yönünde v^λ 'nın kovaryant türevini, (4.1.13) denklemi ξ^λ yönünde v^λ 'nın Lie türevini verir. Şimdi bu operatörleri inceleyelim.

4.1.1 Δ operatörünün tanımı

(4.1.7) ile tanımlanan P noktasındaki $v^\lambda_{(1)}$ vektörüne paralel olan, \bar{P} noktasında bir vektör $*v^\lambda(t)$ olmak üzere

$${}^{12}Dv^\lambda = \bar{v}^\lambda - *v^\lambda := \delta v^\lambda \quad (4.1.14)$$

denklemi sonsuz küçük bir vektör,

$$\Delta v^\lambda = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta v^\lambda}{\delta s} \quad (4.1.15)$$

denklemi ise sonlu bir vektör tanımlar. Yani

$$\Delta v^\lambda = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta v^\lambda}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\delta s} (\bar{v}^\lambda(\bar{x}) - *v^\lambda(\bar{x})) \quad (4.1.16)$$

yazabiliriz. Burada

$$\delta s \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} \delta x^\mu \delta x^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} (\bar{x}^\mu - x^\mu) (\bar{x}^\nu - x^\nu)} = \sqrt{g_{\mu\nu} \varepsilon \xi^\mu \varepsilon \xi^\nu} = \varepsilon \xi \quad (4.1.17)$$

şeklindedir. (4.1.4) ve (4.1.7) denklemlerini (4.1.14)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} \delta v^\lambda &= v^\lambda(\bar{t}) + \varepsilon (\partial_\omega v^\lambda(t)) \xi^\omega - v^\lambda(\bar{t}) + \varepsilon \Gamma_{\mu\omega}^\lambda v^\mu \xi^\omega \\ \delta v^\lambda &= \varepsilon (\partial_\omega v^\lambda(t) + \Gamma_{\mu\omega}^\lambda v^\mu) \xi^\omega \\ \delta v^\lambda &= (\bar{D}_\omega v^\lambda) \xi^\omega \varepsilon \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

buluruz. Kovaryant bir v_μ paralel vektör alanı için ise

$$\frac{dv_\mu}{dt} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v_\lambda \frac{dx^\nu}{dt}$$

olduğundan

$$\bar{v}_\varepsilon(\bar{t}) = v_\varepsilon(t) + (\partial_\omega v_\varepsilon(t)) \xi^\omega \varepsilon$$

ve

$$*v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t) + \Gamma_{\varepsilon\nu}^\lambda v_\lambda \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{dx^\omega} \xi^\omega \varepsilon$$

eşitliklerini buluruz. Dolayısıyla yukarıdaki son iki eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}\delta v_\varepsilon &= \bar{v}_\varepsilon(\bar{t}) - *v_\varepsilon(t) \\ \delta v_\varepsilon &= \cancel{v_\varepsilon(t)} + \varepsilon(\partial_\omega v_\varepsilon(t))\xi^\omega - \cancel{v_\varepsilon(t)} - \varepsilon{}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\lambda v_\lambda \xi^\omega \\ \delta v_\varepsilon &= \varepsilon(\partial_\omega v_\varepsilon - {}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\lambda v_\lambda)\xi^\omega\end{aligned}$$

olur ve sonuç olarak

$$\delta v_\varepsilon = (\bar{D}_\omega v_\varepsilon)\xi^\omega \varepsilon \quad (4.1.19)$$

denklemi elde edilir. Herhangi bir (1,1) tipindeki paralel tensor alanı için,

$$\frac{dV_\mu^\lambda}{dt} = -{}^{\omega}\Gamma_{\alpha\omega}^\lambda \frac{du^\omega}{dt} V_\mu^\alpha + V_\beta^\lambda {}^{\omega}\Gamma_{\mu\omega}^\beta \frac{du^\omega}{dt}$$

denklemi geçerli olduğundan, sırasıyla,

$$\bar{V}_\beta^\alpha(\bar{t}) = V_\beta^\alpha(t) + \frac{\partial V_\beta^\alpha(t)}{\partial x^\omega} \xi^\omega \varepsilon$$

ve

$$*V_\beta^\alpha(t) = V_\beta^\alpha(t) - ({}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\alpha V_\beta^\varepsilon - V_\varepsilon^\alpha {}^{\omega}\Gamma_{\beta\omega}^\varepsilon)\xi^\omega \varepsilon$$

elde ederiz. Bu iki denklemden ise

$$\begin{aligned}\delta V_\beta^\alpha &= \bar{V}_\beta^\alpha(\bar{t}) - *V_\beta^\alpha(t) \\ \delta V_\beta^\alpha &= \cancel{V_\beta^\alpha(t)} + (\partial_\omega V_\beta^\alpha(t))\xi^\omega \varepsilon - \cancel{V_\beta^\alpha(t)} + ({}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\alpha V_\beta^\varepsilon - V_\varepsilon^\alpha {}^{\omega}\Gamma_{\beta\omega}^\varepsilon)\xi^\omega \varepsilon \\ \delta V_\beta^\alpha &= (\partial_\omega V_\beta^\alpha(t) + {}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\alpha V_\beta^\varepsilon - V_\varepsilon^\alpha {}^{\omega}\Gamma_{\beta\omega}^\varepsilon)\xi^\omega \varepsilon \\ \delta V_\beta^\alpha &= (\partial_\omega V_\beta^\alpha + {}^{\omega}\Gamma_{\varepsilon\omega}^\alpha V_\beta^\varepsilon - V_\varepsilon^\alpha {}^{\omega}\Gamma_{\beta\omega}^\varepsilon)\xi^\omega \varepsilon \\ \delta V_\beta^\alpha &= (\bar{D}_\omega V_\beta^\alpha)\xi^\omega \varepsilon\end{aligned}$$

buluruz. Benzer şekilde $V_{\alpha\beta\dots}^{\lambda\mu\dots}$ için de

$$\delta V_{\alpha\beta\dots}^{\lambda\mu\dots} = (\bar{D}_\omega V_{\alpha\beta\dots}^{\lambda\mu\dots})\xi^\omega \varepsilon \quad (4.1.20)$$

denklemini elde edilir.

4.1.1.1. Paralel teğet deformasyonları

$V_{(1)}^\lambda, \dots, V_{(n)}^\lambda$ birim vektörleri C eğrisinin P noktasında, sırasıyla, tanjant, 1 .normal, 2 .normal, ..., $(n-1)$.normal vektörleri olsun. $\bar{V}_{(1)}^\lambda, \dots, \bar{V}_{(n)}^\lambda$ birim vektörler ise \bar{C} 'nin \bar{P} noktasındaki tanjant, 1 .normal, ..., $(n-1)$.normal vektörleri olsun. Bu takdirde (4.1.3)'den

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^\lambda(\bar{s})}{d\bar{s}} &= \left(\frac{dx^\lambda(s)}{ds} + \frac{d\xi^\lambda(s)}{ds} \varepsilon \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \\ \bar{V}_{(1)}^\lambda &= \left(V_{(1)}^\lambda + \varepsilon \frac{d\xi^\lambda(s)}{ds} \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

bulunur. Deformasyon sırasında teğet vektörleri paralel olarak yer değiştirmesi ya da kısaca ξ^λ 'lerin bir "paralel teğet deformasyonu" tanımlaması için C 'nin her noktasında $\Delta V_{(1)}^\lambda = 0$ olması gerekir. (4.1.14) ve (4.1.21) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \delta V_{(1)}^\lambda &= \bar{V}_{(1)}^\lambda - {}^*V_{(1)}^\lambda \\ &= \bar{V}_{(1)}^\lambda - V_{(1)}^\lambda + {}^* \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_{(1)}^\mu \xi^\nu \\ &= \left(V_{(1)}^\lambda + \varepsilon \frac{d\xi^\lambda}{ds} \right) \frac{ds}{d\bar{s}} - V_{(1)}^\lambda + {}^* \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_{(1)}^\mu \xi^\nu \end{aligned}$$

yani

$$\delta V_{(1)}^\lambda = V_{(1)}^\lambda \left(\frac{ds}{d\bar{s}} - 1 \right) + \varepsilon \left(\frac{d\xi^\lambda}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} + {}^* \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_{(1)}^\mu \xi^\nu \right) \quad (4.1.22)$$

denklemini buluruz. \bar{P} noktasında $\bar{g}_{\mu\nu}$ 'nün değerini Taylor formülünü ve (2.9.1) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\omega} (\bar{x}^\omega - x^\omega) \\
&= g_{\mu\nu} + \varepsilon \xi^\omega \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\omega} \\
&= g_{\mu\nu} + \varepsilon \xi^\omega \left(g_{\mu\alpha} {}''\Gamma_{\nu\omega}^\alpha + g_{\nu\alpha} {}''\Gamma_{\mu\omega}^\alpha \right)
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

şeklinde yazarız. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlarda sonsuz küçük bir sabit olan ε 'nin birden daha büyük olan kuvvetlerini içeren terimlerini ihmal edileceğini not ettikten sonra $\bar{g}_{\mu\nu} \bar{V}_{(1)}^\mu \bar{V}_{(1)}^\nu = 1$ denkleminde

$$\begin{aligned}
1 &= \bar{g}_{\mu\nu} \frac{d\bar{x}^\mu}{d\bar{s}} \frac{d\bar{x}^\nu}{d\bar{s}} \\
d\bar{s}^2 &= \bar{g}_{\mu\nu} d\bar{x}^\mu d\bar{x}^\nu \\
d\bar{s}^2 &= (g_{\mu\nu} + \varepsilon g_{\mu\nu,\omega} \xi^\omega) (dx^\mu + \varepsilon d\xi^\mu) (dx^\nu + \varepsilon d\xi^\nu) \\
d\bar{s}^2 &= ds^2 + (g_{\mu\nu,\omega} \xi^\omega + 2g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha) dx^\mu dx^\nu \varepsilon \\
d\bar{s}^2 &= ds^2 + \left\{ \begin{aligned} &(g_{\mu\alpha} {}''\Gamma_{\nu\omega}^\alpha + g_{\nu\alpha} {}''\Gamma_{\mu\omega}^\alpha) \xi^\omega \\ &+ g_{\alpha\nu} (\bar{D}_\mu \xi^\alpha - {}'\Gamma_{\omega\mu}^\alpha \xi^\omega) + g_{\mu\alpha} (\bar{D}_\nu \xi^\alpha - {}'\Gamma_{\omega\nu}^\alpha \xi^\omega) \end{aligned} \right\} dx^\mu dx^\nu \varepsilon \\
d\bar{s}^2 &= ds^2 + 2\varepsilon g_{\alpha\nu} \left\{ \bar{D}_\mu \xi^\alpha - (\bar{D}_\omega \delta_\mu^\alpha) \xi^\omega \right\} dx^\mu dx^\nu
\end{aligned}$$

ya da

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = 1 + 2\varepsilon \left(\frac{\bar{D}\xi^\alpha}{ds} - \frac{\bar{D}\delta_\omega^\alpha}{ds} \xi^\omega \right) V_{(1)\alpha} \tag{4.1.24}$$

buluruz. Bu denklemde

$$\left(\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} - \frac{\bar{D}\delta_\omega^\lambda}{ds} \xi^\omega \right) V_{(1)\lambda} = \phi \tag{4.1.25}$$

dersek ve bu ifadeyi (4.1.24)'de yerine yazarsak

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = 1 + 2\varepsilon \phi \tag{4.1.26}$$

ve

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = 1 - \varepsilon\phi \quad (4.1.27)$$

elde edilir. (4.1.27) denklemini (4.1.22)'de yazarak

$$\delta V_{(1)}^\lambda = V_{(1)}^\lambda (1 - \varepsilon\phi - 1) + \varepsilon \left(\frac{d\xi^\lambda}{ds} (1 - \varepsilon\phi) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_{(1)}^\mu \xi^\nu \right)$$

bulunur ve burada

$$\delta V_{(1)}^\lambda = \varepsilon \left(\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} - \phi V_{(1)}^\lambda \right)$$

ya da

$$\Delta V_{(1)}^\lambda = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\delta V_{(1)}^\lambda}{\delta s} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\delta s} \left(\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} - \phi V_{(1)}^\lambda \right) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} - \phi V_{(1)}^\lambda \right) \quad (4.1.28)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece ξ^λ deformasyonunun bir paralel teğet deformasyonu olması için

$$\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} = \phi V_{(1)}^\lambda \quad (4.1.29)$$

ya da

$$\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} V_{(\alpha)\lambda} = 0, \quad (\alpha = 2, 3, \dots, n) \quad (4.1.30)$$

koşulunu sağlanmalıdır. (4.1.29) denklemini (4.1.25)'de yazarsak

$$\frac{\bar{D}\delta_\omega^\lambda}{ds} \xi^\omega V_{(1)\lambda} = 0 \quad (4.1.31)$$

koşulunu buluruz. O halde, Riemann Otsuki uzayında bir ξ^λ deformasyonunun bir paralel teğet deformasyon olması için gerek koşul (4.1.29) denkleminin sağlanmasıdır. (4.1.30) denklemi bu gerek koşulun alternatif ifadesidir ve (4.1.31) denklemi bunun sonucudur.

4.1.1.2 Δ operatörü için değişim formülleri

u^λ , C boyunca tanımlı herhangi bir vektör alanı olsun ve ona karşılık gelen \bar{u}^λ vektör alanı \bar{C} boyunca tanımlansın. (4.1.14) ve (4.1.17) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\bar{u}^\lambda &= \delta u^\lambda + *u^\lambda \\ &= \varepsilon \xi \Delta u^\lambda + (u^\lambda - \varepsilon \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \xi^\nu) \\ &= u^\lambda + \varepsilon (\xi \Delta u^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \xi^\nu)\end{aligned}$$

ve [27]'den

$${}'\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \varepsilon \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} \xi^\omega$$

eşitlikler geçerlidir. Şimdi \bar{C} boyunca kovaryant türevi $\frac{\bar{D}}{d\bar{s}}$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\frac{\bar{D}\bar{u}^\lambda}{d\bar{s}} &= \frac{d\bar{u}^\lambda}{d\bar{s}} + {}'\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{u}^\mu \bar{V}_{(1)}^\nu \\ &= \frac{d}{ds} (u^\lambda + \varepsilon (\xi \Delta u^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \xi^\nu)) \frac{ds}{d\bar{s}} + {}'\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \bar{u}^\mu \bar{V}_{(1)}^\nu \\ &= \left\{ \frac{du^\lambda}{ds} + \varepsilon \frac{d}{ds} (\xi \Delta u^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \xi^\nu) \right\} (1 - \varepsilon \phi) \\ &\quad + \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \varepsilon \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} \xi^\omega \right) (u^\mu + \varepsilon (\xi \Delta u^\mu - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \xi^\beta)) (V_{(1)}^\nu + \varepsilon (\xi \Delta V_{(1)}^\nu - \Gamma_{\gamma\delta}^\nu V_{(1)}^\gamma \xi^\delta)) \\ &= \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} + \varepsilon \left(\frac{\bar{D}}{ds} (\xi \Delta u^\lambda) - \frac{d \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{ds} u^\mu \xi^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \xi^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \frac{d\xi^\nu}{ds} - \phi \frac{du^\lambda}{ds} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} \xi^\omega u^\mu V_{(1)}^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \xi^\beta V_{(1)}^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu (\xi \Delta V_{(1)}^\nu - \Gamma_{\gamma\delta}^\nu V_{(1)}^\gamma \xi^\delta) \right),\end{aligned}$$

buluruz. Kovaryant türevin tanımını ile (4.1.28) denklemini kullanarak

$$\frac{\bar{\bar{D}}u^\lambda}{d\bar{s}} = \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} + \varepsilon \left(\begin{aligned} & \xi \frac{\bar{D}}{ds} (\Delta u^\lambda) + \frac{d\xi}{ds} \Delta u^\lambda - \phi \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu V_{(1)}^\nu \right) - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} u^\mu V_{(1)}^\omega \xi^\nu \\ & + \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} \xi^\omega u^\mu V_{(1)}^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{du^\mu}{ds} \xi^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \left(\frac{\bar{D}\xi^\nu}{ds} - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \xi^\alpha V_{(1)}^\beta \right) \\ & - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha \xi^\beta V_{(1)}^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \left(D\xi^\nu - \phi V_{(1)}^\nu - \Gamma_{\gamma\delta}^\nu V_{(1)}^\gamma \xi^\delta \right) \end{aligned} \right)$$

ya da

$$\frac{\bar{\bar{D}}u^\lambda}{d\bar{s}} = \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} + \varepsilon \left(\begin{aligned} & \xi \frac{\bar{D}}{ds} (\Delta u^\lambda) + \frac{d\xi}{ds} \Delta u^\lambda - \phi \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{Du^\mu}{ds} \xi^\nu \\ & - R_{\mu\nu\beta}^\lambda u^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \end{aligned} \right) \quad (4.1.32)$$

elde edilir. (4.1.32)'yi aşağıdaki denklemde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} \right) &= \frac{\bar{\bar{D}}u^\lambda}{d\bar{s}} - \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} \right) \\ \delta \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} \right) &= \varepsilon \left(\xi \frac{\bar{D}}{ds} (\Delta u^\lambda) + \frac{d\xi}{ds} \Delta u^\lambda - \phi \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} - R_{\mu\nu\beta}^\lambda u^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right) \end{aligned}$$

ve buradan da her iki tarafın $\delta s \rightarrow \infty$ için limitini alıp (4.1.17)'yi kullanarak

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} \right) = \frac{1}{\xi} \left(\xi \frac{\bar{D}}{ds} (\Delta u^\lambda) + \frac{d\xi}{ds} \Delta u^\lambda - \phi \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} - R_{\mu\nu\beta}^\lambda u^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right) \quad (4.1.33)$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D}}{ds} (\Delta u^\lambda) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{d\xi}{ds} \Delta u^\lambda - \phi \frac{\bar{D}u^\lambda}{ds} - R_{\mu\nu\beta}^\lambda u^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right) \quad (4.1.34)$$

denklemlerine ulaşırız. Bu son bağıntı Δ operatörü ile kovaryant türev arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

4.1.1.3 Genel Combescure Transformasyonu

$u^\lambda = V_{(\alpha)}^\lambda$ olsun, ξ^λ 'nin bir "genel Combescure dönüşümü" olması için gerek koşul

$\Delta V_{(\alpha)}^\lambda = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ olmasıdır. Bunu (4.1.34)'de yerine yazarsak

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D}}{ds} \left(\underbrace{\Delta V_{(\alpha)}^\lambda}_{=0} \right) = \frac{1}{\xi} \left(\frac{d\xi}{ds} \underbrace{\Delta V_{(\alpha)}^\lambda}_{=0} - \phi \frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} - 'R_{\mu\nu\beta}^\lambda V_{(\alpha)}^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right) \quad (4.1.35)$$

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} \right) = -\frac{1}{\xi} \left(\phi \frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} + 'R_{\mu\nu\beta}^\lambda V_{(\alpha)}^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

buluruz. Riemann-Otsuki uzayında Frenet formülleri bölüm 2.11’de verildiği gibi

$$\frac{\bar{D}}{ds} V_{(\alpha)}^\lambda = \kappa_\alpha V_{(\alpha+1)}^\lambda - \kappa_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_n = 0$$

şeklindedir. Buradan

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} \right) = \kappa_\alpha \underbrace{\Delta V_{(\alpha+1)}^\lambda}_{=0} - \kappa_{\alpha-1} \underbrace{\Delta V_{(\alpha-1)}^\lambda}_{=0} + \underbrace{\Delta V_{(\alpha)}^\beta}_{=0} \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} + (\Delta\kappa_\alpha) V_{(\alpha+1)}^\lambda - (\Delta\kappa_{\alpha-1}) V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \Delta \left(\frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right)$$

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} \right) = (\Delta\kappa_\alpha) V_{(\alpha+1)}^\lambda - (\Delta\kappa_{\alpha-1}) V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \Delta \left(\frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right) \quad (4.1.36)$$

buluruz. (4.1.35) denkleminde Frenet formüllerini kullanarak

$$\Delta \left(\frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} \right) = -\frac{1}{\xi} \left(\phi \left(\kappa_\alpha V_{(\alpha+1)}^\lambda - \kappa_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right) + 'R_{\mu\nu\beta}^\lambda V_{(\alpha)}^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right) \quad (4.1.37)$$

buluruz. (4.1.36) ve (4.1.37) denklemlerinden ise

$$-\frac{1}{\xi} \left(\phi \left(\kappa_\alpha V_{(\alpha+1)}^\lambda - \kappa_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right) + 'R_{\mu\nu\beta}^\lambda V_{(\alpha)}^\mu \xi^\nu V_{(1)}^\beta \right)$$

$$= (\Delta\kappa_\alpha) V_{(\alpha+1)}^\lambda - (\Delta\kappa_{\alpha-1}) V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \Delta \left(\frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right)$$

ya da

$$\begin{aligned}
-{}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\beta} &= (\xi\Delta\kappa_{\alpha} + \phi\kappa_{\alpha})V_{(\alpha+1)}^{\lambda} \\
&- (\xi\Delta\kappa_{\alpha-1} + \phi\kappa_{\alpha-1})V_{(\alpha-1)}^{\lambda} + \left(\phi\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds} + \xi\Delta\left(\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds}\right) \right) V_{(\alpha)}^{\beta} \quad \alpha=1,\dots,n \quad (4.1.38)
\end{aligned}$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu denklemler ξ^{λ} 'nin bir genel Combescure dönüşümü olması için gerekli koşullardır.

(4.1.38) denkleminin her iki tarafını da $V_{(\omega)}^{\lambda}$, $\omega=1,\dots,\alpha-2, \alpha+2,\dots,n$; $\alpha=1,2,\dots,n$ ile çarparsak

$${}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}V_{(1)}^{\beta}V_{(\omega)\lambda}\xi^{\nu} = 0, \quad \omega=1,\dots,\alpha-2, \alpha+2,\dots,n; \quad \alpha=1,2,\dots,n \quad (4.1.39)$$

elde ederiz. (4.1.38) denklemini $V_{(\alpha+1)}^{\lambda}$, $\alpha=1,2,\dots,n$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
\xi\Delta\kappa_{\alpha} + \phi\kappa_{\alpha} &= -{}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\beta}V_{(\alpha+1)\lambda}, \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_n = 0 \\
\xi\Delta\kappa_{\alpha} &= -\phi\kappa_{\alpha} - {}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\beta}V_{(\alpha+1)\lambda}, \\
\Delta\kappa_{\alpha} &= -\frac{1}{\xi}\left(\phi\kappa_{\alpha} + {}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\beta}V_{(\alpha+1)\lambda}\right), \quad \alpha=1,2,\dots,n
\end{aligned} \quad (4.1.40)$$

buluruz ve $V_{(\alpha)}^{\lambda}$, $\alpha=1,2,\dots,n$ ile çarparsak $\Delta\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds}$ ifadesini de

$$-{}'R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}V_{(\alpha)}^{\mu}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\beta}V_{(\alpha)\lambda} = \left(\phi\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds} + \xi\Delta\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds} \right) V_{(\alpha)}^{\beta}V_{(\alpha)\lambda}$$

ya da

$$\Delta\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds}V_{(\alpha)}^{\beta}V_{(\alpha)\lambda} = -\frac{1}{\xi}\left(\phi\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds} + {}'R_{\beta\nu\mu}^{\lambda}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\mu} \right) V_{(\alpha)}^{\beta}V_{(\alpha)\lambda} \quad (4.1.41)$$

olarak elde ederiz. Eğer bu denklemlerin α 'ya göre toplamını alırsak

$$\Delta\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds}\delta_{\lambda}^{\beta} = -\frac{1}{\xi}\left(\phi\frac{\bar{D}\delta_{\beta}^{\lambda}}{ds} + {}'R_{\beta\nu\mu}^{\lambda}\xi^{\nu}V_{(1)}^{\mu} \right) \delta_{\lambda}^{\beta}$$

ya da

$$\Delta \frac{\bar{D}\delta_\lambda^\lambda}{ds} = -\frac{1}{\xi} \left(\phi \frac{\bar{D}\delta_\lambda^\lambda}{ds} + {}'R_{\lambda\nu\mu}^\lambda \xi^\nu V_{(1)}^\mu \right)$$

olduğu açıktır. Şimdi de uzayda herhangi bir nokta P_0 ve bu noktadan geçen bir eğri C olsun. C eğrisi boyunca ϕ 'ye keyfi bir değer ve ξ^λ 'lara ($\lambda=1,2,..n$) P_0 noktasında keyfi değerler verirsek, o takdirde $D\xi^\lambda = \phi V_{(1)}^\lambda$ denklemi, teğetleri paralel olarak öteleyen, C boyunca ξ^λ vektör alanını tanımlar. Dolayısıyla, eğer C eğrisi genel Combescure özelliğini taşıyorsa, (4.1.39) koşulları P_0 noktasında C boyunca tanımlı herhangi bir ξ^λ için de geçerlidir, yani

$$\begin{aligned} {}'R_{\mu\nu\beta}^\lambda V_{(\alpha)}^\mu V_{(1)}^\beta V_{(\omega)\lambda} &= 0, \\ \omega &= 1, \dots, \alpha - 2, \alpha + 2, \dots, n; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.1.42)$$

dir. Üstelik, eğer bu uzay Genel combescure özelliğini taşıyorsa, bu koşullar herhangi bir eğri için sağlanmalıdır yani (4.1.42) denklemi P_0 noktasında herhangi bir $V_{(\alpha)}^\lambda$ için de geçerli olması gerekir. Dolayısıyla P_0 noktasında

$${}'R_{\mu\nu\beta}^\lambda = 0; \quad \lambda, \mu, \nu, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.43)$$

koşulu sağlanmalıdır. P_0 noktası uzayın keyfi bir noktası olduğundan ${}'R_{\mu\nu\beta}^\lambda = 0$ eşitliği uzayın her noktasında geçerlidir.

Şimdi de (4.1.43) denkleminin alternatifi olan denklemleri elde edeceğiz. (2.8.31) denkleminde

$${}''R_{\mu\nu\beta}^\lambda = 0; \quad \lambda, \mu, \nu, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.44)$$

yazarız, (2.8.28) denkleminde de

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}dx^{\nu} \wedge dx^{\beta} &= \frac{1}{2}M_{\rho}^{\lambda} \underbrace{R_{\varepsilon\nu\beta}^{\rho}}_{=0} P_{\mu}^{\varepsilon} dx^{\nu} \wedge dx^{\beta} + P_{\rho}^{\lambda} 'DP_{\varepsilon}^{\rho} \wedge 'DP_{\mu}^{\varepsilon} \\
R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}dx^{\nu} \wedge dx^{\beta} &= P_{\rho}^{\lambda} 'DP_{\varepsilon}^{\rho} \wedge 'DP_{\mu}^{\varepsilon} \\
R_{\mu\nu\beta}^{\lambda}dx^{\nu} \wedge dx^{\beta} &= P_{\rho}^{\lambda} ('D_{\nu}P_{\varepsilon}^{\rho})dx^{\nu} \wedge ('D_{\beta}P_{\mu}^{\varepsilon})dx^{\beta} \\
R_{\mu\nu\beta}^{\lambda} &= P_{\rho}^{\lambda} ('D_{\nu}P_{\varepsilon}^{\rho})('D_{\beta}P_{\mu}^{\varepsilon}) \tag{4.1.45}
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1.43) denklemi aynı zamanda deformasyonun bir genel Combescure deformasyon olması için yeter koşuldur. Eğer (4.1.43) denklemi sağlanıyorsa (4.1.40) denkleminde

$$\xi\Delta\kappa_{\alpha} + \phi\kappa_{\alpha} = 0$$

buluruz. (4.1.14) ve (4.1.17) denklemlerinden

$$\bar{\kappa}_{\alpha} = \kappa_{\alpha} + \delta\kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha} + \varepsilon\lambda\Delta\kappa_{\alpha} = (1 - \varepsilon\phi)\kappa_{\alpha} = \kappa_{\alpha} \frac{ds}{d\bar{s}}$$

elde ederiz. Bu denklem 3-boyutlu Öklid uzayında Combescure transformasyonun özelliğidir, [28].

Dolayısıyla, *genel combescure özelliğini taşıyan uzaylar sadece kontravaryant ve kovaryant tipinde flat uzaylardır.*

4.1.2 ¹³ D operatörünün tanımı

ξ^{λ} vektörü $(R - O_n)$ 'de tanımlı herhangi bir kontravaryant vektör alanı olsun ve bu uzayda sonsuz küçük bir deformasyon (4.1.8) denklemi ile verilsin. \bar{x}^{λ} noktasında $\bar{v}^{\lambda}(\bar{x})$ ve ${}^{\wedge}v^{\lambda}(\bar{x})$ vektörleri, sırasıyla, (4.1.4) ve (4.1.10) denklemleri ile tanımlanmak üzere verilen

$${}^13Dv^{\lambda} = \left(\begin{matrix} 1 & 3 \\ d & -d \end{matrix} \right) v^{\lambda} = \bar{v}^{\lambda}(\bar{x}) - {}^{\wedge}v^{\lambda}(\bar{x}) \tag{4.1.46}$$

denklemi bir ${}^{13}D$ operatörünü tanımlasın. (4.1.4) ve (4.1.10) denklemlerini (4.1.46)'da yerlerine yazarsak

$${}^{13}D v^\lambda = \{v^\lambda_{,\omega}(t) \xi^\omega - \xi^\lambda_{,\alpha} v^\alpha(t)\} \mathcal{E} \quad (4.1.47)$$

buluruz. Üstelik,

$${}^{13}D dt = d\bar{t} - dt \quad (4.1.48)$$

dersek

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{dt} &= 1 + \frac{{}^{13}D dt}{dt}, \\ \frac{dt}{d\bar{t}} &= 1 - \frac{{}^{13}D dt}{dt} \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

buluruz. ${}^\wedge v^\lambda(\bar{x})$ ve ${}^\wedge \bar{v}^\lambda(\bar{x})$ birer vektör olduklarından onların farkı ${}^{13}D v^\lambda$, \bar{x}^λ noktasında bir vektördür. Bu vektörleri x^λ başlangıç noktasında tanımlamak için \bar{x}^λ noktasını x^λ noktasına geri çekerek

$${}^\wedge \left({}^{13}D v^\lambda \right) = {}^\wedge \bar{v}^\lambda(\bar{t}) - v^\lambda(t) \quad (4.1.50)$$

eşitliğini elde ederiz. Fakat ${}^\wedge \left({}^{13}D v^\lambda \right)$ ile ${}^{13}D v^\lambda$ yeteri kadar bir yaklaşımla örtüşürülebileceğinden (4.1.50)'den

$${}^\wedge \bar{v}^\lambda(\bar{t}) = v^\lambda(t) + {}^{13}D v^\lambda \quad (4.1.51)$$

buluruz. Şimdi de (4.1.47) denklemini tensörel formda yazalım, önce kovaryant türev tanımından

$$\begin{aligned} \bar{D}_\omega v^\lambda &= v^\lambda_{,\omega} + \Gamma_{\alpha\omega}^\lambda v^\alpha \\ v^\lambda_{,\omega} &= \bar{D}_\omega v^\lambda - \Gamma_{\alpha\omega}^\lambda v^\alpha \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\xi^{\lambda}_{,\alpha} = \bar{D}_{\alpha}\xi^{\lambda} - \Gamma_{\omega\alpha}^{\lambda}\xi^{\omega}$$

buluruz. Bu değerleri (4.1.47)'de yazarsak

$${}^{13}Dv^{\lambda} = \left((\bar{D}_{\omega}v^{\lambda})\xi^{\omega} - \Gamma_{\omega\omega}^{\lambda}v^{\omega}\xi^{\omega} - (\bar{D}_{\alpha}\xi^{\lambda})v^{\alpha} + \Gamma_{\omega\alpha}^{\lambda}\xi^{\omega}v^{\alpha} \right) \mathcal{E}$$

$${}^{13}Dv^{\lambda} = \left((\bar{D}_{\omega}v^{\lambda})\xi^{\omega} - (\bar{D}_{\alpha}\xi^{\lambda})v^{\alpha} - (\Gamma_{\omega\omega}^{\lambda} - \Gamma_{\omega\alpha}^{\lambda})\xi^{\omega}v^{\alpha} \right) \mathcal{E}$$

$${}^{13}Dv^{\lambda} = \left((\bar{D}_{\omega}v^{\lambda})\xi^{\omega} - (\bar{D}_{\alpha}\xi^{\lambda})v^{\alpha} \right) \mathcal{E} \quad (4.1.52)$$

buluruz. Şimdi de u_{λ} kovaryant vektör alanı için ${}^{13}D$ operatörünü bulalım. Fakat önce bu deformasyonda bir skalerin davranışını görelim. $f(x)$, x^{λ} noktasında bir skaler fonksiyon olsun. $\bar{x}^{\lambda} = x^{\lambda} + \xi^{\lambda}\delta u$ noktasında $f(x)$ fonksiyonu $\wedge f(\bar{x})$ 'e dönüşür. Fakat $f(x)$ bir skaler olduğundan

$$\wedge f(\bar{x}) = f(x) \quad (4.1.53)$$

denklemini geçerlidir, [23]. Öte yandan

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) + (f_{,\nu}\xi^{\nu})\mathcal{E}$$

şeklindedir, dolayısıyla

$${}^{13}Df = \bar{f}(\bar{x}) - \wedge f(\bar{x}) = (f_{,\nu}\xi^{\nu})\mathcal{E} \quad (4.1.54)$$

bulunur ki bu $f(x)$ 'in ξ^{λ} doğrultusunda Lie türevini verir. Kovaryant bir u_{μ} vektör alanı için ${}^{13}D$ operatörü

$${}^{13}Du_{\mu} = \bar{u}_{\mu}(\bar{x}) - \wedge u_{\mu}(\bar{x})$$

şeklinde tanımlanır. $u_{\mu}v^{\mu}$ bir skaler olduğundan (4.1.53)'den

$$(\wedge u_\mu(\bar{x}))(\wedge v(\bar{x})) = u_\mu(x)v^\mu(x) \quad (4.1.55)$$

buluruz. Bu denklemde

$$\begin{aligned} \wedge u_\mu(\bar{x}) &= \bar{u}_\mu(\bar{x}) - D u_\mu = u_\mu(x) + u_{\mu,v} \xi^v \mathcal{E} - D u_\mu \\ \wedge v^\mu(\bar{x}) &= \bar{v}^\mu(\bar{x}) - D v^\mu = v^\mu(x) + v^\mu_{,v} \xi^v \mathcal{E} - D v^\mu \end{aligned}$$

değerlerini (4.1.55)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned} & \left(u_\mu(x) + u_{\mu,v} \xi^v \mathcal{E} - D u_\mu \right) \left(v^\mu(x) + v^\mu_{,v} \xi^v \mathcal{E} - D v^\mu \right) = u_\mu(x)v^\mu(x) \\ \cancel{u_\mu(x)v^\mu(x)} &= \cancel{u_\mu(x)v^\mu(x)} - u_\mu(x)v^\mu_{,v} \xi^v \mathcal{E} + u_\mu(x) \left(D v^\mu \right) \\ & \quad - u_{\mu,v} \xi^v v^\mu \mathcal{E} - \underbrace{u_{\mu,v} \xi^v \mathcal{E} v^\mu}_{=0} + \underbrace{u_{\mu,v} \xi^v \mathcal{E} \left(D v^\mu \right)}_{=0} \\ & \quad + \left(D u_\mu \right) v^\mu(x) + \underbrace{\left(D u_\mu \right) v^\mu_{,v} \xi^v \mathcal{E}}_{=0} - \underbrace{\left(D u_\mu \right) D v^\mu}_{=0} \end{aligned}$$

buluruz. Buradan

$$\left(D u_\mu \right) v^\mu + u_\mu \left(D v^\mu \right) = \left[u_\mu v^\mu_{,v} \xi^v + u_{\mu,v} \xi^v v^\mu \right] \mathcal{E} \quad (4.1.56)$$

$$\begin{aligned} \left(D u_\mu \right) v^\mu &= \left[u_\mu v^\mu_{,v} \xi^v + u_{\mu,v} \xi^v v^\mu \right] \mathcal{E} - u_\mu \left(D v^\mu \right) \\ \left(D u_\mu \right) v^\mu &= \left[\cancel{u_\mu v^\mu_{,v} \xi^v} + u_{\mu,v} \xi^v v^\mu \right] \mathcal{E} - u_\mu \left[\cancel{v^\mu_{,v} \xi^v} - \xi^\mu_{,v} v^\nu \right] \mathcal{E} \\ \left(D u_\mu \right) v^\mu &= \left[u_{\mu,v} \xi^v + u_\nu \xi^\nu_{, \mu} \right] v^\mu \mathcal{E} \end{aligned}$$

$$D u_\mu = \left[u_{\mu,v} \xi^v + u_\nu \xi^\nu_{, \mu} \right] \mathcal{E} \quad (4.1.57)$$

eşitliği ya da tensörel formda

$${}^{13}D u_\mu = \left[(\bar{D}_\nu u_\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u_\alpha) \xi^\nu + u_\nu (\bar{D}_\mu \xi^\nu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \xi^\alpha) \right] \mathcal{E}$$

$${}^{13}D u_\mu = \left[(\bar{D}_\nu u_\mu) \xi^\nu + u_\nu (\bar{D}_\mu \xi^\nu) - u_\nu (\bar{D}_\mu \delta_\alpha^\nu) \xi^\alpha \right] \mathcal{E}$$

eşitliğini elde ederiz. $u_\mu v^\mu$ skaler olduğundan (4.1.54)'den

$${}^{13}D(u_\mu v^\mu) = (u_\mu v^\mu)_{,\omega} \xi^\omega \mathcal{E} = (u_{\mu,\omega} \xi^\omega) v^\mu \mathcal{E} + u_\mu (v^\mu_{,\omega} \xi^\omega) \mathcal{E} \quad (4.1.58)$$

denklemi geçerlidir. Dolayısıyla (4.1.56) denkleminde

$${}^{13}D(u_\mu v^\mu) = {}^{13}D(u_\mu) v^\mu + u_\mu {}^{13}D(v^\mu) \quad (4.1.59)$$

elde ederiz ki bu denklem ${}^{13}D$ operatörü için Leibnitz kuralının geçerli olduğunu gösterir. Şimdi herhangi bir (1,1) tipte T_μ^λ tensör alanı için, $T_\mu^\lambda u_\lambda v^\mu$ bir skaler olduğundan

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda u_\lambda v^\mu) = d(T_\mu^\lambda u_\lambda v^\mu)$$

denkleminde ${}^{13}D u_\lambda$, ${}^{13}D v^\mu$ değerlerini yerine yazarsak u_λ ve v^μ vektör alanları için

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu + T_\mu^\lambda {}^{13}D(u_\lambda) v^\mu + T_\mu^\lambda u_\lambda {}^{13}D(v^\mu) = d(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu + T_\mu^\lambda d(u_\lambda) v^\mu + T_\mu^\lambda u_\lambda d(v^\mu)$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu + T_\mu^\lambda [u_{\lambda,\nu} \xi^\nu + u_\nu \xi^\nu_{,\lambda}] \mathcal{E} v^\mu + T_\mu^\lambda u_\lambda (v^\mu_{,\omega} \xi^\omega - \xi^\omega_{,\alpha} v^\alpha) \mathcal{E}$$

$$= T_{\mu,\nu}^\lambda (\xi^\nu \mathcal{E}) u_\lambda v^\mu + T_\mu^\lambda u_{\lambda,\nu} (\xi^\nu \mathcal{E}) v^\mu + T_\mu^\lambda u_\lambda v^\mu_{,\nu} \xi^\nu \mathcal{E}$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu + T_\mu^\lambda u_\nu \xi^\nu_{,\lambda} \mathcal{E} v^\mu - T_\mu^\lambda u_\lambda \xi^\mu_{,\alpha} v^\alpha \mathcal{E}$$

$$= T_{\mu,\nu}^\lambda (\xi^\nu \mathcal{E}) u_\lambda v^\mu$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu = -T_\mu^\lambda u_\nu \xi^\nu_{,\lambda} \mathcal{E} v^\mu + T_\mu^\lambda u_\lambda \xi^\mu_{,\alpha} v^\alpha \mathcal{E} + T_{\mu,\nu}^\lambda (\xi^\nu \mathcal{E}) u_\lambda v^\mu$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu = T_{\mu,\nu}^\lambda (\xi^\nu \mathcal{E}) u_\lambda v^\mu + T_\nu^\lambda u_\lambda \xi^\nu_{,\mu} v^\mu \mathcal{E} - T_\mu^\lambda u_\lambda \xi^\lambda_{,\nu} v^\nu \mathcal{E}$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) u_\lambda v^\mu = \left[(T_{\mu,\nu}^\lambda \xi^\nu + T_\nu^\lambda \xi^\nu_{,\mu} - T_\mu^\lambda \xi^\lambda_{,\nu}) \mathcal{E} \right] u_\lambda v^\mu$$

$${}^{13}D(T_\mu^\lambda) = (T_{\mu,\nu}^\lambda \xi^\nu + T_\nu^\lambda \xi^\nu_{,\mu} - T_\mu^\lambda \xi^\lambda_{,\nu}) \mathcal{E} \quad (4.1.60)$$

ya da tensörel formda

$$\begin{aligned}
{}^{13}DT_\mu^\lambda &= (T_{\mu,\nu}^\lambda \xi^\nu + T_\nu^\lambda \xi_{,\mu}^\nu - T_\mu^\nu \xi^\lambda_{,\nu}) \mathcal{E} \\
{}^{13}DT_\mu^\lambda &= \left(\left(\bar{D}_\nu T_\mu^\lambda - \cancel{\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda T_\mu^\alpha} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\lambda \right) \xi^\nu \right. \\
&\quad \left. + T_\nu^\lambda (\bar{D}_\mu \xi^\nu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \xi^\alpha) - T_\mu^\nu (\bar{D}_\nu \xi^\lambda - \cancel{\Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \xi^\alpha}) \right) \mathcal{E} \\
{}^{13}DT_\mu^\lambda &= \left((\bar{D}_\nu T_\mu^\lambda) \xi^\nu + T_\nu^\lambda (\bar{D}_\mu \xi^\nu) - T_\mu^\nu (\bar{D}_\nu \xi^\lambda) - T_\nu^\lambda (\Gamma_{\alpha\mu}^\nu - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu) \xi^\alpha \right) \mathcal{E} \\
{}^{13}DT_\mu^\lambda &= \left((\bar{D}_\nu T_\mu^\lambda) \xi^\nu + T_\nu^\lambda (\bar{D}_\mu \xi^\nu) - T_\mu^\nu (\bar{D}_\nu \xi^\lambda) - T_\nu^\lambda (D_\alpha \delta_\mu^\nu) \xi^\alpha \right) \mathcal{E} \tag{4.1.61}
\end{aligned}$$

elde ederiz. D operatörü vektör ve tensörlerin yanısıra $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ konneksiyonuna da uygulanabilir. Bunun için x^λ noktasında $v^\lambda(x)$ vektörünü göz önüne alalım ve bu vektörü paralel öteleme ile $x^\lambda + dx^\lambda$ noktasına götürelim. Bu şekilde elde ettiğimiz vektörü $*v^\lambda(x+dx)$ ile gösterelim, yani

$$*v^\lambda(x+dx) = v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu. \tag{4.1.62}$$

Şimdi de $v^\lambda(x)$ ve $*v^\lambda(x+dx)$ vektörüne (4.1.8) transformasyonunu uygulayalım. x^λ noktasındaki $v^\lambda(x)$ vektörü \bar{x}^λ noktasındaki $\wedge v^\lambda(\bar{x})$ vektörüne dönüşür ve

$$\wedge v^\lambda(\bar{x}) = v^\lambda + \xi^\lambda_{,\nu} v^\nu \mathcal{E} \tag{4.1.63}$$

yazarız. $*v^\lambda(x+dx)$ vektörü ise

$$\begin{aligned}
\wedge(*v^\lambda(\bar{x} + d\bar{x})) &= \wedge\{*v^\lambda(x + \xi\mathcal{E} + d(x + \xi\mathcal{E}))\} \\
&= \wedge\{*v^\lambda(x + \xi\mathcal{E} + dx + (d\xi)\mathcal{E})\} \\
&= \wedge\{*v^\lambda(x + dx + (\xi + d\xi)\mathcal{E})\} \\
&= *v^\lambda(x + dx) + (\xi^\lambda + \xi^\lambda_{,\nu} dx^\nu)_{,\mu} (*v^\mu(x + dx)) \mathcal{E} \\
&= v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu + (\xi^\lambda_{,\mu} + \xi^\lambda_{,\nu,\mu} dx^\nu) (v^\mu - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu v^\beta dx^\gamma) \mathcal{E}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\wedge\{*\nu^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})\} &= \nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nu^\mu dx^\nu + (\xi_{,\mu}^\lambda + \xi_{,\mu,\nu}^\lambda dx^\nu)(\nu^\mu - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \nu^\beta dx^\gamma) \mathcal{E} \\
&= \nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nu^\mu dx^\nu + \xi_{,\mu}^\lambda \nu^\mu \mathcal{E} + [\xi_{,\mu,\nu}^\lambda - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha] \nu^\mu dx^\nu \mathcal{E}
\end{aligned} \tag{4.1.64}$$

vektörüne dönüşür. $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x)$ 'in transformasyondan sonraki $\wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x})$ değerini bulmak için $\wedge\nu^\lambda(\bar{x})$ vektörünün $\wedge*\nu^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})$ vektörü ile $\wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x})$ konneksiyona göre paralel olduğunu varsayacağız. Bu takdirde

$$\wedge*\nu^\lambda(\bar{x}+d\bar{x}) = \wedge\nu^\lambda(\bar{x}) - \wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x})(\wedge\nu^\mu(\bar{x}))d\bar{x}^\nu \tag{4.1.65}$$

yazabiliriz. $\overset{13}{D}$ operatörünün tanımını ve $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \mathcal{E} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\omega} \xi^\omega$ denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) - \wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) &= \overset{13}{D}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
\wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) &= \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) - \overset{13}{D}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\
\wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x}) &= \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \mathcal{E} - \overset{13}{D}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda
\end{aligned} \tag{4.1.66}$$

yazalım. $\wedge*\nu^\lambda(\bar{x}+d\bar{x})$, $\wedge\nu^\lambda(\bar{x})$ ve $\wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x})$ 'nin değerlerini (4.1.65)'de yerlerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\wedge*\nu^\lambda(\bar{x}+d\bar{x}) &= \wedge\nu^\lambda(\bar{x}) - \wedge\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(\bar{x})\wedge\nu^\mu(\bar{x})d\bar{x}^\nu \\
\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nu^\mu dx^\nu + \xi_{,\mu}^\lambda \nu^\mu \mathcal{E} + [\xi_{,\mu,\nu}^\lambda - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha] \nu^\mu dx^\nu \mathcal{E} \\
&= \nu^\lambda + \xi_{,\nu}^\lambda \nu^\nu \mathcal{E} - \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \mathcal{E} - \overset{13}{D}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) (\nu^\mu + \xi_{,\nu}^\mu \nu^\nu \mathcal{E}) (dx^\nu + \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \mathcal{E})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu + \xi_{,\mu}^\lambda v^\mu \varepsilon + \xi_{,\mu,\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu \varepsilon - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha v^\mu dx^\nu \varepsilon \\
&= v^\lambda + \xi_{,\nu}^\lambda v^\nu \varepsilon - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (v^\mu + \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon) (dx^\nu + \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon) \\
&\quad - \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \varepsilon (v^\mu + \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon) (dx^\nu + \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon) \\
&\quad - \overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (v^\mu + \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon) (dx^\nu + \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon) \\
&= v^\lambda + \xi_{,\nu}^\lambda v^\nu \varepsilon - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon dx^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon \\
&\quad - \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \varepsilon v^\lambda dx^\nu \\
&\quad - \overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu - \underbrace{\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon}_{=0} - \underbrace{\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon dx^\nu}_{=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cancel{v^\lambda} - \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu} + \cancel{\xi_{,\mu}^\lambda v^\mu \varepsilon} + \xi_{,\mu,\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu \varepsilon - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\mu dx^\nu \varepsilon \\
&= \cancel{v^\lambda} + \cancel{\xi_{,\nu}^\lambda v^\nu \varepsilon} - \cancel{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon dx^\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon \\
&\quad - \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \varepsilon v^\lambda dx^\nu - \overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu &= \xi_{,\mu,\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu \varepsilon \\
&+ \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \varepsilon v^\lambda dx^\nu - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha v^\mu dx^\nu \varepsilon + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{,\alpha}^\mu v^\alpha \varepsilon dx^\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu \xi_{,\omega}^\nu dx^\omega \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda v^\mu dx^\nu = \left(\xi_{,\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \xi_{,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \xi_{,\mu}^\alpha \right) v^\mu dx^\nu \varepsilon$$

$$\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left(\xi_{,\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \xi_{,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \xi_{,\mu}^\alpha \right) \varepsilon$$

ya da tensörel formda

$$\begin{aligned}
\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \left(\xi_{,\mu,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega - \xi_{,\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \xi_{,\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \xi_{,\mu}^\alpha \right) \varepsilon \\
\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \left(\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu \xi^\lambda - \Gamma_{\alpha\mu,\nu}^\lambda \xi^\alpha - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \xi_{,\nu}^\alpha - \Gamma_{\varepsilon\nu}^\lambda \bar{D}_\mu \xi^\varepsilon + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \xi_{,\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega \right. \\
&\quad \left. - \left(\bar{D}_\alpha \xi^\lambda - \Gamma_{\varepsilon\alpha}^\lambda \xi^\varepsilon \right) \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda \left(\bar{D}_\nu \xi^\alpha - \Gamma_{\varepsilon\nu}^\alpha \xi^\varepsilon \right) + \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \left(\bar{D}_\mu \xi^\alpha - \Gamma_{\varepsilon\mu}^\alpha \xi^\varepsilon \right) \right) \varepsilon \\
\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \left(\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu \xi^\lambda - \Gamma_{\mu\omega,\nu}^\lambda \xi^\omega + \Gamma_{\mu\nu,\omega}^\lambda \xi^\omega + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\alpha\omega}^\lambda \xi^\omega \right) \\
&\quad \left. - \Gamma_{\mu\omega}^\lambda \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda \xi^\omega - \left(\bar{D}_\nu \delta_\mu^\alpha \right) \bar{D}_\alpha \xi^\lambda \right) \varepsilon \\
\overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \left(\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu \xi^\lambda + R_{\mu\nu\omega}^\lambda \xi^\omega - \left(\bar{D}_\nu \delta_\mu^\alpha \right) \bar{D}_\alpha \xi^\lambda \right) \varepsilon \tag{4.1.67}
\end{aligned}$$

Bu denklemler genel konneksiyonun $\overset{13}{D}$ -varyasyonunu verir. Δ operatörü için bulduğumuz değişim formülleri benzer hesaplamalar yaparak $\overset{13}{D}$ operatörü için

$$\begin{aligned} & \overset{13}{D} \left(\frac{\bar{D}}{dt} v^\lambda \right) - \frac{\bar{D}}{dt} \left(\overset{13}{D} v^\lambda \right) \\ &= \left(\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu \xi^\lambda + {}^1 R_{\mu\nu\omega}^\lambda \xi^\omega - (\bar{D}_\nu \delta_\mu^\alpha) \bar{D}_\alpha \xi^\lambda \right) \frac{dx^\nu}{dt} v^\mu \delta u - \frac{\delta \bar{v}^\lambda}{dt} \frac{\overset{13}{D} dt}{dt} \end{aligned} \quad (4.1.68)$$

şeklinde bulunur. Bu son denklemde (4.1.67) denklemini yazarsak

$$\overset{13}{D} \left(\frac{\bar{D}}{dt} v^\lambda \right) - \frac{\bar{D}}{dt} \left(\overset{13}{D} v^\lambda \right) = \overset{13}{D} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{dt} v^\mu \varepsilon - \frac{\delta \bar{v}^\lambda}{dt} \frac{\overset{13}{D} (dt)}{dt} \quad (4.1.69)$$

eşitliğini buluruz. Bu denklemler kovaryant türev ile $\overset{13}{D}$ operatörü arasındaki değişim formülleridir.

Bu bölümde tanımladığımız Δ ve $\overset{13}{D}$ operatörleri eğrilerin deformasyonunu incelemek için kullanılır örneğin; otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere, çemberi çembere, projektif konileri projektif konilere dönüştüren transformasyonlar bulabiliriz. Şimdi de otoparalel eğrilerin deformasyonlarını inceleyelim.

4.1.3 Otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere dönüştüren dönüşümler

C eğrisinin bir afin parametresi s olmak üzere Riemann-Otsuki uzayında otoparalel eğrileri Bölüm 2.12'de

$$\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds^2} \equiv \frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0 \quad (4.1.70)$$

koşulu ile tanımlamıştık.

$$\bar{x}^\lambda(\bar{s}) = x^\lambda(s) + \xi^\lambda(s) \varepsilon \quad (4.1.71)$$

şeklindeki sonsuz küçük bir deformasyon $x^\lambda(s)$ eğrisini $\bar{x}^\lambda(\bar{s})$ eğrisine dönüştürür.

Bu bölümde otoparalel eğrilerin otoparalel eğrilere dönüşmesi için gerek ve yeter

koşulları araştıracağız. Bunun için $\overset{13}{D}$ varyasyonu kullanalım. $\overset{13}{D}$ varyasyonun tanımından

$$\overset{13}{D} \frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds^2} = \frac{\bar{\bar{D}}^2 \bar{x}^\lambda}{d\bar{s}^2} - \wedge \left(\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds^2} \right)$$

yazılabilir ve dolayısıyla s ile \bar{s} , sırasıyla, C ile \bar{C} eğrilerinin afin parametreleri olmak üzere aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1.1. (4.1.71) deformasyonunun otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul

$$\overset{13}{D} \left(\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds^2} \right) = 0 \quad (4.1.72)$$

olmasıdır.

Şimdi de (4.1.72) koşuluna alternatif koşulları verelim. İlk önce $x^\lambda(t)$ eğrisinin $\frac{dx^\lambda}{dt}$

tanjant vektörünün $\overset{13}{D}$ varyasyonunu hesaplayalım. (4.1.49) denklemini kullanarak (4.1.71)'den

$$\begin{aligned} \bar{x}^\lambda &= x^\lambda + \xi^\lambda \varepsilon \\ \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} &= \frac{d}{ds} (x^\lambda + \xi^\lambda \varepsilon) \frac{ds}{d\bar{s}} \\ \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} &= \left(\frac{dx^\lambda}{ds} + \frac{d\xi^\lambda}{ds} \varepsilon \right) \left(1 - \frac{\overset{13}{D} ds}{ds} \right) \\ \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} &= \frac{dx^\lambda}{ds} + \xi^{\lambda, \alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \varepsilon - \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{\overset{13}{D} ds}{ds} \end{aligned} \quad (4.1.73)$$

buluruz. Ayrıca (4.1.10)'dan

$$\wedge \frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{dx^\lambda}{ds} + \xi^{\lambda, \alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} \varepsilon \quad (4.1.74)$$

elde ederiz. (4.1.73) ve (4.1.74) denklemlerini

$${}^{13}D \frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\bar{s}} - \wedge \left(\frac{dx^\lambda}{ds} \right)$$

denkleminde yerine yazarsak

$${}^{13}D \frac{dx^\lambda}{ds} = - \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{{}^{13}D dt}{ds} \quad (4.1.75)$$

denklemini buluruz. (4.1.69) denkleminde $v^\lambda = \frac{dx^\lambda}{dt}$ alırsak, $\frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{\bar{D}x^\lambda}{ds}$ olduğunu

kullanarak

$$\begin{aligned} {}^{13}D \left(\frac{\bar{D}}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{{}^{13}D dx^\lambda}{ds} \right) &= {}^{13}D \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{dx^\lambda}{ds} \right) \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) \\ {}^{13}D \left(\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \right) + \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{dx^\lambda}{ds} \frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) &= {}^{13}D \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) \\ {}^{13}D \left(\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \right) + \frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) + \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) &= {}^{13}D \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} - \frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) \\ \underbrace{{}^{13}D \left(\frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \right)}_{=0} &= \underbrace{{}^{13}D \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds}}_{=0} - 2 \frac{\bar{D}^2 x^\lambda}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) - \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) \end{aligned} \quad (4.1.76)$$

buluruz. (4.1.76)'dan

$${}^{13}D \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} \varepsilon - \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{{}^{13}D ds}{ds} \right) = 0 \quad (4.1.77)$$

ya da (4.1.67)'den

$$\left(\bar{D}_\nu \bar{D}_\mu \xi^\lambda + R_{\mu\nu\omega}^\lambda \xi^\omega - (\bar{D}_\nu \delta_\mu^\alpha) \bar{D}_\alpha \xi^\lambda \right) \varepsilon \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\mu}{dt} - \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{d}{ds} \left(\frac{D ds}{ds} \right) = 0 \quad (4.1.78)$$

buluruz ki bu denklem (4.1.72) denkleminin alternatif denklemdir.

4.1.4 Riemann Çemberini Riemann Çemberine dönüştüren dönüşümler

İlk önce $(R-O_n)$ uzayında Riemann çemberini tanımlayalım ve çemberin difaransiyel denklemlerini verelim. $x^\lambda(s)$, $(R-O_n)$ 'de bir eğri olsun. Bu eğri için Frenet formülleri

$$\frac{\bar{D}}{ds} V_{(l)}^j = -\kappa_{(l-1)} V_{(l-1)}^j + \kappa_{(l)} V_{(l+1)}^j + V_{(l)}^r \frac{\bar{D}}{ds} \delta_r^j, \quad l=1, \dots, n \quad \kappa_0 = 0, \quad \kappa_n = 0$$

şeklinde verilmişti. κ_1 birinci eğriliği sabit $\left(\frac{\bar{D}\kappa_1}{ds} = 0 \right)$ ve ikinci, üçüncü, ..., $(n-1)$.

eğrilikleri sıfır $(\kappa_{(2)} = \kappa_{(3)} = \kappa_{(n-1)} = 0)$ olan eğriyi inceleyelim. Bu tip eğrilere Riemann çemberi denir, [24]. Frenet Formüllerinde birinci ve ikinci denklemlerde $\kappa_{(2)} = \kappa_{(3)} = 0$ alırsak

$$\frac{\bar{D}}{ds} V_{(1)}^j = \kappa_{(1)} V_{(2)}^j + V_{(1)}^r \frac{\bar{D}}{ds} \delta_r^j, \quad (4.1.79)$$

$$\frac{\bar{D}}{ds} V_{(2)}^j = -\kappa_{(1)} V_{(1)}^j + V_{(2)}^r \frac{\bar{D}}{ds} \delta_r^j \quad (4.1.80)$$

buluruz. (4.1.79) denkleminin her iki tarafına Otsuki kovaryant türevini uygularsak, Frenet Formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{\bar{D}}{ds} V_{(1)}^\lambda \right) &= \frac{\bar{D}}{ds} \left(\kappa_{(1)} V_{(2)}^\lambda \right) + \frac{\bar{D}}{ds} \left(V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D}}{ds} \delta_\varepsilon^\lambda \right) \\ \frac{\bar{D}^2 V_{(1)}^\lambda}{ds^2} &= \kappa_{(1)} \frac{\bar{D} V_{(2)}^\lambda}{ds} + \frac{\bar{D}}{ds} \left(V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \right) \\ \frac{\bar{D}^2 V_{(1)}^\lambda}{ds^2} &= \kappa_{(1)} \frac{\bar{D} V_{(2)}^\lambda}{ds} + \frac{\bar{D} V_{(1)}^\varepsilon}{ds} \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} + V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\mu}{ds} \left(V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D} \delta_\mu^\lambda}{ds} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{D}^2 V_{(1)}^\lambda}{ds^2} &= \kappa_{(1)} \left(-\kappa_{(1)} V_{(1)}^\lambda + V_{(2)}^\varepsilon \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \right) + \left(\kappa_{(1)} V_{(2)}^\varepsilon + V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D} \delta_\alpha^\varepsilon}{ds} \right) \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \\
&\quad + V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\mu}{ds} \left(V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D} \delta_\mu^\lambda}{ds} \right) \\
\frac{\bar{D}^2 V_{(1)}^\lambda}{ds^2} &= \kappa_{(1)} \left(-\kappa_{(1)} V_{(1)}^\lambda + V_{(2)}^\varepsilon \frac{\bar{D}}{ds} \delta_\varepsilon^\lambda \right) + \left(\kappa_{(1)} V_{(2)}^\varepsilon + V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D} \delta_\alpha^\varepsilon}{ds} \right) \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \\
&\quad + V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D}}{ds} \left(\frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\lambda}{ds} \right) - \frac{\bar{D} \delta_\varepsilon^\mu}{ds} \left(V_{(1)}^\varepsilon \frac{\bar{D} \delta_\mu^\lambda}{ds} \right) \\
\frac{\bar{D}^2 V_{(1)}^\lambda}{ds^2} &= -\kappa_{(1)}^2 V_{(1)}^\lambda + 2\kappa_{(1)} V_{(2)}^\varepsilon + V_{(1)}^\varepsilon \left(\frac{\bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\lambda}{ds^2} \right)
\end{aligned}$$

ya da

$$\frac{d^3 x^\lambda}{ds^3} + \kappa_{(1)}^2 \frac{dx^\lambda}{ds} - 2\kappa_{(1)} V_{(2)}^\alpha \frac{\bar{D} \delta_\alpha^\lambda}{ds} - V_{(1)}^\varepsilon \left(\frac{\bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\lambda}{ds^2} \right) = 0 \quad (4.1.81)$$

buluruz. Burada

$$\kappa_{(1)}^2 (s) = g_{\mu\nu} \left(\frac{\bar{D} V_{(1)}^\mu}{ds} - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D} \delta_\alpha^\mu}{ds} \right) \left(\frac{\bar{D} V_{(1)}^\nu}{ds} - V_{(1)}^\beta \frac{\bar{D} \delta_\beta^\nu}{ds} \right)$$

şeklindedir. Tersine, eğer (4.1.81) denklemini geçerli ise bu eğriler ya çember ya da kovaryant tipte geodezik eğrilerdir. (2.6.9) formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{D}}{ds} \kappa_{(1)}^2 (s) &= \frac{\bar{D}}{ds} \left(g_{\mu\nu} \left(\underbrace{\frac{\bar{D}}{ds} V_{(1)}^\mu - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D}}{ds} \delta_\alpha^\mu}_{T^\mu} \right) \left(\underbrace{\frac{\bar{D}}{ds} V_{(1)}^\nu - V_{(1)}^\beta \frac{\bar{D}}{ds} \delta_\beta^\nu}_{T^\nu} \right) \right) \\
&= \frac{\bar{D}}{ds} (T^\mu T_\mu) = \frac{\bar{D}}{ds} (T^\mu T_\nu \delta_\mu^\nu) \\
&= \delta_\mu^\nu \frac{\bar{D}}{ds} (T^\mu T_\nu) - \frac{\bar{D} \delta_\mu^\nu}{ds} (T^\mu T_\nu) \\
&= \frac{\bar{D} T^\mu}{ds} T_\mu + \frac{\bar{D} T_\mu}{ds} T^\mu - \frac{\bar{D} \delta_\mu^\nu}{ds} (T^\mu T_\nu) \\
&= \frac{\bar{D} T^\mu}{ds} T_\mu + \frac{\bar{D} (g_{\mu\nu} T^\nu \delta_\varepsilon^\nu)}{ds} T^\mu - \frac{\bar{D} \delta_\mu^\nu}{ds} (T^\mu T_\nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{D}}{ds} \kappa_{(1)}^2 (s) &= \frac{\bar{D}T^\mu}{ds} T_\mu + \left(\underbrace{\delta_\varepsilon^v \frac{\bar{D}(g_{\mu\nu})}{ds}}_{=0} T^\varepsilon T^\mu + \delta_\varepsilon^v g_{\mu\nu} \frac{\bar{D}(T^\varepsilon)}{ds} T^\mu - \frac{\bar{D}(\delta_\varepsilon^v)}{ds} g_{\mu\nu} T^\varepsilon T^\mu \right) \\
&\quad - \frac{\bar{D}\delta_\mu^v}{ds} (T^\mu T_\nu) \\
&= \frac{\bar{D}T^\mu}{ds} g_{\mu\varepsilon} T^\varepsilon + g_{\mu\varepsilon} \frac{\bar{D}T^\varepsilon}{ds} T^\mu - \frac{\bar{D}\delta_\varepsilon^v}{ds} g_{\mu\nu} T^\varepsilon T^\mu - \frac{\bar{D}\delta_\mu^v}{ds} (g_{\varepsilon\nu} T^\mu T^\varepsilon)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{D}}{ds} \kappa_{(1)}^2 (s) &= 2g_{\mu\nu} T^\nu \frac{\bar{D}T^\mu}{ds} - 2 \frac{\bar{D}\delta_\varepsilon^v}{ds} g_{\mu\nu} T^\varepsilon T^\mu \\
&= 2g_{\mu\varepsilon} \left(\frac{\bar{D}V_{(1)}^\varepsilon}{ds} - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\varepsilon}{ds} \right) \bar{D} \left(\frac{\bar{D}V_{(1)}^\mu}{ds} - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\mu}{ds} \right) \\
&\quad - 2 \frac{\bar{D}\delta_\varepsilon^v}{ds} g_{\mu\nu} \left(\frac{\bar{D}V_{(1)}^\varepsilon}{ds} - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\varepsilon}{ds} \right) \left(\frac{\bar{D}V_{(1)}^\mu}{ds} - V_{(1)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\mu}{ds} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}\kappa_{(1)}^2 (s) &= 2g_{\mu\varepsilon} \left(\bar{D}V_{(1)}^\varepsilon - V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\varepsilon \right) \bar{D} \left(\bar{D}V_{(1)}^\mu - V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu \right) \\
&\quad - 2\bar{D}\delta_\varepsilon^v g_{\mu\nu} \left(\bar{D}V_{(1)}^\varepsilon - V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\varepsilon \right) \left(\bar{D}V_{(1)}^\mu - V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu \right) \\
&= 2g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon \left(\bar{D}^2 V_{(1)}^\mu - \bar{D} \left(V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu \right) \right) \\
&\quad - 2\bar{D}\delta_\varepsilon^v g_{\mu\nu} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon \kappa_1 V_{(2)}^\mu \\
&= 2g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon \left(\begin{aligned} & -\kappa_{(1)}^2 V_{(1)}^\mu + 2\kappa_{(1)} V_{(2)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu + V_{(1)}^\varepsilon \bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\mu \\ & - \left(\left(\bar{D}V_{(1)}^\alpha \right) \bar{D}\delta_\alpha^\mu + V_{(1)}^\alpha \bar{D}^2 \delta_\alpha^\mu - \bar{D}\delta_\alpha^\beta \left(V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\beta^\mu \right) \right) \end{aligned} \right) \\
&\quad - 2\bar{D}\delta_\varepsilon^v g_{\mu\nu} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\mu \\
&= 2 \left(\begin{aligned} & -\kappa_{(1)}^3 \underbrace{g_{\mu\varepsilon} V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\mu}_{=0} + 2g_{\mu\varepsilon} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu + \cancel{g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\alpha \bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\mu} \\ & - \left(g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon \left(\kappa_1 V_{(2)}^\alpha + V_{(1)}^\beta \bar{D}\delta_\beta^\alpha \right) \bar{D}\delta_\alpha^\mu + \cancel{g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\alpha \bar{D}^2 \delta_\alpha^\mu} \right) \\ & - \left(-g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\beta \bar{D}\delta_\beta^\mu \right) \end{aligned} \right) \\
&\quad - 2\bar{D}\delta_\varepsilon^v g_{\mu\nu} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\mu \\
&= 2 \left(\begin{aligned} & \cancel{2g_{\mu\varepsilon} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu} - \cancel{g_{\mu\varepsilon} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu} - \cancel{g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\beta \bar{D}\delta_\beta^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu} \\ & + \cancel{g_{\mu\varepsilon} \kappa_1 V_{(2)}^\varepsilon V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\beta \bar{D}\delta_\beta^\mu} - \cancel{g_{\mu\nu} \kappa_1^2 V_{(2)}^\varepsilon V_{(2)}^\mu \bar{D}\delta_\varepsilon^v} \end{aligned} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

buluruz. Dolayısıyla birinci eğriliği $\kappa_1 = \text{sabit}$ sabit veya $\kappa_1 = 0$ dır. $\kappa_1 = 0$ olursa

$$\begin{aligned}\bar{D}V_{(1)}^\mu - V_{(1)}^\alpha \bar{D}\delta_\alpha^\mu &= 0 \\ \bar{D}V_{(1)}^\mu &= \bar{D}\delta_\alpha^\mu V_{(1)}^\alpha \\ dV_{(1)}^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu V_{(1)}^\alpha dx^\nu &= (\Gamma_{\alpha\nu}^\mu - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu) V_{(1)}^\alpha dx^\nu \\ dV_{(1)}^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu V_{(1)}^\alpha dx^\nu &= 0\end{aligned}$$

bulunur ki bu eğrinin kovaryant tipte bir geodezik eğri olduğunu gösterir. Sonuç olarak (4.1.81) denklemleri Riemann çemberinin diferansiyel denklemleridir. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.2 (4.1.3) ile verilen deformasyonun Riemann çemberini Riemann çemberine dönüştürmesi için gerek ve yeter koşul

$$\Delta \left(\frac{d^3 x^\lambda}{ds^3} + \kappa_{(1)}^2 \frac{dx^\lambda}{ds} - 2\kappa_{(1)} V_{(2)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\lambda}{ds} - V_{(1)}^\varepsilon \left(\frac{\bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\lambda}{ds^2} \right) \right) = 0$$

ya da

$$D \left(\frac{d^3 x^\lambda}{ds^3} + \kappa_{(1)}^2 \frac{dx^\lambda}{ds} - 2\kappa_{(1)} V_{(2)}^\alpha \frac{\bar{D}\delta_\alpha^\lambda}{ds} - V_{(1)}^\varepsilon \left(\frac{\bar{D}^2 \delta_\varepsilon^\lambda}{ds^2} \right) \right) = 0$$

olmasıdır.

4.2. RIEMANN-OTSUKI UZAYINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ HELİS

3-boyutlu Öklid uzayında bir C eğrisi için κ_1, κ_2 eğrinin, sırasıyla, eğriliği ve burulması

olmak üzere $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \text{sabit}$ ise bu eğriye helis denir. Riemann-Otsuki uzayında da benzer

denklemleri sağlayan bir eğri bulmamız mümkündür. Bunun için eğrilerin sonsuz küçük paralel teğet deformasyonlarını kullanacağız.

$(R - O_n)$ uzayında bir C eğrisi s , eğrinin yay uzunluğu parametresi olmak üzere,

$$x^\lambda = x^\lambda(s) \tag{4.2.1}$$

parametrik denklemleri ile verilsin. Bu eğrinin her noktasında sonsuz küçük bir deformasyon

$$\bar{x}^\lambda(\bar{s}) = x^\lambda(s) + \varepsilon \xi^\lambda(s) \quad (4.2.2)$$

olduğunda göre bu deformasyonla C eğrisinden elde ettiğimiz eğriyi \bar{C} ile gösterelim. Bu deformasyonun,

$$\Delta V_{(1)}^\lambda = \frac{1}{\xi} \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta \quad (4.2.3)$$

koşulunu sağladığını düşünelim, (bölüm 4.1.1). Bu takdirde ξ^λ vektörünün teğet ve normaller boyunca bileşenlerini ifade edelim. c 'ler, s 'nin skaler fonksiyonları olmak üzere

$$\xi^\lambda = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha V_{(\alpha)}^\lambda \quad (4.2.4)$$

şeklinde yazalım. Frenet formüllerini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} &= \sum_{\alpha=1}^n \left(c_\alpha \frac{\bar{D}V_{(\alpha)}^\lambda}{ds} + \frac{dc_\alpha}{ds} V_{(\alpha)}^\lambda \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left(c_\alpha \left(\kappa_\alpha V_{(\alpha+1)}^\lambda - \kappa_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)}^\lambda + V_{(\alpha)}^\beta \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \right) + \frac{dc_\alpha}{ds} V_{(\alpha)}^\lambda \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda + \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha V_{(\alpha)}^\beta \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda + \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta, \quad (\kappa_0 = \kappa_n = 0) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

buluruz. (4.2.5) denklemini (4.1.25)'de yazarsak

$$\begin{aligned}
\phi &\equiv \left(\frac{\bar{D}\xi^\mu}{ds} - \frac{\bar{D}\delta_\omega^\mu}{ds} \xi^\omega \right) V_{(1)\mu} \\
&= \left(\sum_{\alpha=1}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\mu + \frac{\bar{D}\delta_\beta^\mu}{ds} \xi^\beta - \frac{\bar{D}\delta_\beta^\mu}{ds} \xi^\beta \right) V_{(1)\mu} \\
&= \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) \delta_1^\alpha \\
&= \left(\frac{dc_1}{ds} - c_2 \kappa_1 \right)
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

buluruz. (4.2.6) ve (4.2.5) denklemlerini (4.1.28)'de yazarsak

$$\begin{aligned}
\Delta V_{(1)}^\lambda &= \frac{1}{\xi} \left(\frac{\bar{D}\xi^\lambda}{ds} - \phi V_{(1)}^\lambda \right) \\
&= \frac{1}{\xi} \left(\sum_{\alpha=1}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda + \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta \right) \\
&\quad \left(- \left(\frac{dc_1}{ds} - c_2 \kappa_1 \right) V_{(1)}^\lambda \right) \\
&= \frac{1}{\xi} \left(\sum_{\alpha=1}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda - \left(\frac{dc_1}{ds} - c_2 \kappa_1 \right) V_{(1)}^\lambda \right) \\
&\quad \left(+ \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta \right) \\
&= \frac{1}{\xi} \left(\sum_{\alpha=2}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda + \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta \right)
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

buluruz ve (4.2.3) koşulunu gözönüne alırsak

$$\sum_{\alpha=2}^n \left(c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1} + \frac{dc_\alpha}{ds} - c_{\alpha+1} \kappa_\alpha \right) V_{(\alpha)}^\lambda = 0 \tag{4.2.8}$$

elde ederiz, yani c 'lerin sağlaması gereken koşullar

$$\frac{dc_\alpha}{ds} = c_{\alpha+1} \kappa_\alpha - c_{\alpha-1} \kappa_{\alpha-1}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, n \tag{4.2.9}$$

dir. Bu denklemler n tane c_1, \dots, c_n skaler fonksiyonları için $(n-1)$ tane denklemdir öyle ki c 'lerden 1 tanesini eğri boyunca keyfi olarak tanımlayabiliriz. (4.2.9)'dan

$$\begin{aligned}
\frac{dc_2}{ds} &= c_3 \mathcal{K}_2 - c_1 \mathcal{K}_1, \\
\frac{dc_3}{ds} &= c_4 \mathcal{K}_3 - c_2 \mathcal{K}_2, \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dc_{n-1}}{ds} &= c_n \mathcal{K}_{n-1} - c_{n-2} \mathcal{K}_{n-2}, \\
\frac{dc_n}{ds} &= -c_{n-1} \mathcal{K}_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

buluruz. Bu sistemde önce $c_n = 0$ alalım. Bu takdirde $\mathcal{K}_{n-1} \neq 0$ için $c_{n-1} = 0$ buluruz ve buradan da $c_{n-2} = \dots = c_2 = c_1 = 0$ bulunur, yani $\xi^\lambda = 0$. Dolayısıyla $c_n = 0$ için deformasyon yoktur.

Şimdi de c_α 'ları sabit alırsak (4.2.10)'dan

$$\begin{aligned}
c_3 \mathcal{K}_2 - c_1 \mathcal{K}_1 &= 0, \\
c_4 \mathcal{K}_3 - c_2 \mathcal{K}_2 &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
c_{n-1} \mathcal{K}_{n-2} - c_{n-3} \mathcal{K}_{n-3} &= 0, \\
c_n \mathcal{K}_{n-1} - c_{n-2} \mathcal{K}_{n-2} &= 0, \\
-c_{n-1} \mathcal{K}_{n-1} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

bulunur. Buradan n -tek için

$$c_{n-3} = c_{n-5} = \dots = c_2 = 0 \tag{4.2.12}$$

ve

$$\frac{\mathcal{K}_{n-1}}{\mathcal{K}_{n-2}} = \frac{c_{n-2}}{c_n} = \text{sabit} \tag{4.2.13}$$

buluruz. n -çift ise

$$c_{n-3} = c_{n-5} = \dots = c_1 = 0 \tag{4.2.14}$$

ve

$$\frac{\kappa_{n-3}}{\kappa_{n-4}} = \frac{c_{n-4}}{c_{n-2}} = \text{sabit} \quad (4.2.15)$$

buluruz. Bu şekilde devam edersek n -tek için $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \text{sabit}$ ve n -çift için $\frac{\kappa_3}{\kappa_2} = \text{sabit}$

buluruz. Bu denklemler 3-boyutlu Öklid Uzayında helis eğrisinin karakteristik denklemleridir dolayısıyla bu eğriye *genelleştirilmiş helis* denir. Yani Riemann-Otsuki

uzayında, $\Delta V_{(1)}^\lambda = \frac{1}{\xi} \bar{D} \delta_\mu^\lambda \xi^\mu$ koşulunu sağlayan deformasyon sadece c_α 'lar sabit

olduğunda genelleştirilmiş helis tanımlar. Riemann uzayında ise bu deformasyon bir

paralel teğet deformasyonudur, yani $\Delta V_{(1)}^\lambda = 0$. $\Delta V_{(1)}^\lambda = \frac{1}{\xi} \bar{D} \delta_\mu^\lambda \xi^\mu$ koşulunu sağlayan ξ^λ

deformasyonu, n -tek için $V_{(n)}^\lambda, V_{(n-2)}^\lambda, \dots, V_{(1)}^\lambda$ ile tanımlanan $\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)$ boyutlu uzayda, n -

çift için ise $V_{(n)}^\lambda, V_{(n-2)}^\lambda, \dots, V_{(2)}^\lambda$ ile tanımlanan $\frac{1}{2}n$ boyutlu uzayda bir deformasyondur.

Üstelik, n 'nin tek ya da çift oluşuna bağlı yay uzunluğunun birinci varyasyonu sırasıyla sıfır ya da sıfırdan farklıdır. Bunu

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\bar{s}} &= 1 - \varepsilon \phi \\ \frac{ds}{d\bar{s}} &= 1 - \varepsilon \left(\frac{dc_1}{ds} - \kappa_1 c_2 \right) \end{aligned}$$

denklemlerinden görebiliriz. n -tek için $c_2 = 0$, $c_1 = \text{sabit}$ dolayısıyla $\frac{ds}{d\bar{s}} = 1$. n -çift ise

$c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ çünkü $c_2 = 0$ olsaydı $c_4 = c_6 = \dots = c_n$ bulurduk ki bu deformasyonun

olmadığını gösterir. Dolayısıyla $\frac{ds}{d\bar{s}} \neq 1$.

4.3. $(R - O_n)$ 'DE İNVOLÜT EĞRİLER

Öklid uzayında verilen bir C eğrisinin teğetlerine dik olan eğriye C'nin involüt eğrisi denir. Weyl Uzayında involüt eğriler [29]'da incelenmiştir. Burada ise $(R - O_n)$ 'deki involüt eğrileri inceleyeceğiz.

$(R - O_n)$ 'de bir $C : x^i = x^i(s)$ eğrisi verilsin. $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ birim vektörleri eğrinin, sırasıyla, tanjant, 1.normal, 2.normal, ... ve $(n-1)$.normal vektörleri ve $\kappa_1, \dots, \kappa_l; l = 1, \dots, n-1$, eğrinin eğrilikleri olsun. ε sonsuz küçük bir sabit ve $\lambda = \lambda(s)$ olmak üzere, C eğrisine yakın olan bir \bar{C} eğrisi

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \lambda V_{(1)}^i \quad (4.3.1)$$

ile verilsin. P ve \bar{P} noktaları iki eğrinin karşılık gelen noktaları olsun. (4.1.7)'de v^λ yerine $V_{(1)}^i$ yazarsak, \bar{P} noktasında

$$*V_{(1)}^i = V_{(1)}^i - \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(1)}^k \quad (4.3.2)$$

vektörünü buluruz. $\bar{V}_{(1)}, \bar{V}_{(2)}, \dots, \bar{V}_{(n)}$ birim vektörleri \bar{C} eğrisinin, sırasıyla, tanjant, 1.normal, 2.normal, ... ve $(n-1)$.normal vektörleri olsun. Eğer her \bar{P} noktasında, $*V_{(1)}$ vektörü $\bar{V}_{(1)}$ vektörüne dik ise \bar{C} eğrisine C 'nin *involüt eğrisi* denir.

Teorem 4.3.1. $(R - O_n)$ 'de \bar{C} eğrisi C eğrisinin bir involüt eğrisi ise

$$1 + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} = \varepsilon \lambda \left(\frac{\bar{D}\delta_a^i}{ds} \right) V_{(1)}^a V_{(1)}^i$$

denklemini sağlar.

İspat.

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \lambda V_{(1)}^i \quad (4.3.3)$$

denkleminin diferansiyelini alırsak

$$\bar{V}_{(1)}^i = \frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}} = \left(V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(1)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^i \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.3.4)$$

buluruz.

Bu eğrinin C 'nin bir involüt eğrisi olması için her noktada $*V_{(1)} \perp \bar{V}_{(1)}$ olmalıdır, yani

$$\bar{g}_{ij} * V_{(1)}^i \bar{V}_{(1)}^j = 0 \quad (4.3.5)$$

denklemini gerçeklenmelidir. Bunun için (4.1.9), (4.3.2) ve (4.3.4) denklemlerini (4.3.5)'de yerine yazarsak $\bar{g}_{ij} * V_{(1)}^i \bar{V}_{(1)}^j = 0$ denkleminde

$$\begin{aligned} 0 &= \left(g_{ij} + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} {}'\Gamma_{jk}^a + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} {}'\Gamma_{ik}^a \right) \\ &\quad \cdot \left(V_{(1)}^i - {}'\Gamma_{ak}^i V_{(1)}^a \varepsilon \lambda V_{(1)}^k \right) \\ &\quad \cdot \left(V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(1)}^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j \right) \\ 0 &= \left(g_{ij} + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} {}'\Gamma_{jk}^a + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} {}'\Gamma_{ik}^a \right) \\ &\quad \cdot \left(V_{(1)}^i V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda V_{(1)}^i \frac{dV_{(1)}^j}{ds} + V_{(1)}^i \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda \Gamma_{ak}^i V_{(1)}^a V_{(1)}^k V_{(1)}^j \right) \\ 0 &= \left(g_{ij} + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} {}'\Gamma_{jk}^a - \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} \bar{D}_k \delta_j^a + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} {}'\Gamma_{ik}^a - \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} \bar{D}_k \delta_i^a \right) \\ &\quad \cdot \left(V_{(1)}^i V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda V_{(1)}^i \frac{dV_{(1)}^j}{ds} + V_{(1)}^i \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda {}'\Gamma_{ak}^i V_{(1)}^a V_{(1)}^k V_{(1)}^j \right) \\ 0 &= g_{ij} V_{(1)}^i V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} {}'\Gamma_{jk}^a V_{(1)}^i V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ia} \frac{\bar{D}_j \delta_i^a}{ds} V_{(1)}^i V_{(1)}^j \\ &\quad + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} {}'\Gamma_{ik}^a V_{(1)}^i V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ja} \frac{\bar{D}_i \delta_j^a}{ds} V_{(1)}^i V_{(1)}^j \\ &\quad + \varepsilon \lambda g_{ij} V_{(1)}^i \frac{dV_{(1)}^j}{ds} + V_{(1)}^i g_{ij} \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ij} {}'\Gamma_{ak}^i V_{(1)}^a V_{(1)}^k V_{(1)}^j \\ 0 &= 1 + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ia} {}'\Gamma_{jk}^a V_{(1)}^i V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ia} \frac{\bar{D}_j \delta_i^a}{ds} V_{(1)}^i V_{(1)}^j \\ &\quad + \varepsilon \lambda V_{(1)}^k g_{ja} {}'\Gamma_{ik}^a V_{(1)}^i V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ja} \frac{\bar{D}_i \delta_j^a}{ds} V_{(1)}^i V_{(1)}^j \\ &\quad + \varepsilon \lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\kappa_1 V_{(2)}^j + \frac{\bar{D}_a \delta_a^j}{ds} V_{(1)}^a - {}'\Gamma_{ak}^j V_{(1)}^a V_{(1)}^k \right) \\ &\quad + V_{(1)}^i g_{ij} \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ij} {}'\Gamma_{ak}^i V_{(1)}^a V_{(1)}^k V_{(1)}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 1 - \varepsilon \lambda g_{ji} \frac{\bar{D}\delta_a^i}{ds} V_{(1)}^a V_{(1)}^j + V_{(1)}^i g_{ij} \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(1)}^j \\
1 + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} g_{ij} V_{(1)}^i V_{(1)}^j - \varepsilon \lambda g_{ji} \frac{\bar{D}\delta_a^i}{ds} V_{(1)}^a V_{(1)}^j &= 0 \\
1 + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} &= \varepsilon \lambda \frac{\bar{D}\delta_a^i}{ds} V_{(1)}^a V_{(1)}^i
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. Eğrinin iki farklı involüt arasında kalan C eğrisinin tanjant parçasının uzunluğu $e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i ds}$ nın bir katıdır.

İspat. Teorem1'den

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{ds} - \lambda \frac{\bar{D}\delta_a^i}{ds} V_{(1)}^a V_{(1)}^i &= -\frac{1}{\varepsilon} \\
\lambda &= -e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int e^{-\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} ds + C \right)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla iki farklı involüt eğrisi için

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int e^{-\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} ds + C_1 \right) \\
\lambda_2 &= e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} \left(-\frac{1}{\varepsilon} \int e^{-\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} ds + C_2 \right)
\end{aligned}$$

Bu denklemlerde

$$\begin{aligned}
e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} &= \alpha(s) \\
\int e^{-\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i} \bar{D}\delta_a^i} ds &= \beta(s)
\end{aligned}$$

alırsak

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha(s) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \beta(s) + C_1 \right) \\
\lambda_2 &= \alpha(s) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \beta(s) + C_2 \right)
\end{aligned}$$

buluruz. Bu iki involütün denklemleri $\bar{x}^i = x^i + \alpha(s)(\beta(s) + \varepsilon C_2)V_{(1)}^i$ ve $\bar{x}^i = x^i + \alpha(s)(\beta(s) + \varepsilon C_1)V_{(1)}^i$ şeklindedir. Bu değerleri $\bar{x}^i - \bar{x}^i = \varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)$ denklemine yerine yazarak

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda_1 - \lambda_2)V_{(1)}^i &= \varepsilon \left(\alpha(s) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \beta(s) + C_1 \right) - \alpha(s) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \beta(s) + C_2 \right) \right) V_{(1)}^i \\ &= \varepsilon \alpha(s) (C_2 - C_1) V_{(1)}^i \end{aligned}$$

buluruz ve buradan da

$$\lambda_1 - \lambda_2 = e^{\int_{V_{(1)}^a V_{(1)}^i \bar{D} \delta^i} (C_2 - C_1)}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır. $\frac{\bar{D} \delta^i}{ds} V_{(1)}^a V_{(1)}^i = 0$ için ise Riemann uzayında geçerli olan

$$\lambda_1 - \lambda_2 = C_2 - C_1$$

involüt eğrisinin özelliği bulunur.

4.4. $(R - O_n)$ ' DE BERTRAND EĞRİLERİ

Bu kısımda 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand Eğrilerinin bilinen özelliklerini n-boyutlu Riemann-Otsuki uzayında araştıracağız. Öklid uzayında Bertrand eğrileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

Eğer iki eğrinin 1.normalleri çakışırsa;

- 1a) Karşılıklı gelen iki nokta arasındaki uzaklık sabittir.
- 2a) Bu iki eğri bir Bertrand çifti oluşturur yani C eğrisinin iki eğriliği arasında lineer bir bağıntı vardır.
- 3a) Karşılıklı noktadaki teğetler arasındaki açı sabittir.

Eğer normal boyunca bu iki eğri arasındaki uzaklık, karesi dikkate alınmayacak kadar, küçük ise, 1a) ve 3a) özellikler geçerlidir fakat 2a) özelliği yerine

- 2b) Burulma sabittir

özelliği geçerlidir.

n -boyutlu Riemann uzayında ise eğrinin sonsuz küçük deformasyonu kullanılarak bu özellikler [25] Pears tarafından incelenmiştir. ε sonsuz küçük bir sabit ve $\lambda = \lambda(s)$ bir fonksiyon olmak üzere C eğrisine yakın bir \bar{C} eğrisi,

$$\bar{x}^i = x^i + \varepsilon \lambda V_{(2)}^i \quad (4.4.1)$$

denklemi ile verilsin. P ve \bar{P} iki eğrinin karşılık gelen noktaları olsun. \bar{C} eğrisinin \bar{P} noktasında $\bar{V}_{(1)}$ tanjant vektörünü belirleyip paralel yer değiştirme ile P noktasına taşıyalım ve bunu $\bar{\bar{V}}_{(1)}$ ile gösterelim. Bu durumda Riemann uzayında aşağıdaki sonuçları elde ederiz, [25].

1c) λ - sabittir,

2c) C , belli denklemleri sağlayan bir bertrand eğrisidir,

3c) Eğer C sabit eğrilikli bir eğri ise, P ve \bar{P} noktalarındaki teğet vektörler arasındaki açı sabittir.

Şimdi de bu özellikleri $(R - O_n)$ 'de inceleyelim. $(R - O_n)$ 'de bir $C : x^i = x^i(s)$ eğrisi verilsin. $V_{(1)}, V_{(2)}, \dots, V_{(n)}$ eğrinin, sırasıyla, tanjant, 1.normal, 2.normal, ... ve $(n-1)$.normal vektörleri ve $\kappa_1, \dots, \kappa_l; l = 1, \dots, n-1$ eğrinin eğrilikleri olsun. ε sonsuz küçük bir sabit ve $\lambda = \lambda(s)$ bir fonksiyon olmak üzere, C eğrisine birinci dereceden yakın bir \bar{C} eğrisi (4.4.1) denklemi ile verilsin. (4.4.1)'den

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{s}} = \left(\frac{dx^i}{ds} + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.4.2)$$

ya da

$$\bar{V}_{(1)}^i = \left(V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \right) \frac{ds}{d\bar{s}} \quad (4.4.3)$$

buluruz. $\frac{ds}{d\bar{s}}$ ifadesini bulmak için

$$\bar{g}_{ij} \bar{V}_{(1)}^i \bar{V}_{(1)}^j = 1$$

ya da

$$\bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j = (d\bar{s})^2 \quad (4.4.4)$$

denkleminde (4.1.23) ve (4.4.3) denklemlerini yerine yazarak, $\frac{D\delta_j^i}{ds} = (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i) \frac{dx^k}{ds}$

ve Frenet formüllerini kullanarak

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j$$

$$d\bar{s}^2 = \left\{ g_{ij} + \varepsilon \lambda V_{(2)}^k (g_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha + g_{j\alpha} \Gamma_{ik}^\alpha) \right\} \cdot \left(V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \right) ds \left(V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^j \right) ds$$

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 = \left\{ g_{ij} + \varepsilon \lambda V_{(2)}^k (g_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha + g_{j\alpha} \Gamma_{ik}^\alpha) \right\} \cdot \left\{ V_{(1)}^i V_{(1)}^j + V_{(1)}^i \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^j}{ds} + V_{(1)}^i \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^j + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} V_{(1)}^j + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i V_{(1)}^j \right\}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)^2 &= \underbrace{g_{ij} V_{(1)}^i V_{(1)}^j}_{=1} + \varepsilon \lambda g_{ij} V_{(1)}^i \frac{dV_{(2)}^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \underbrace{g_{ij} V_{(1)}^i V_{(2)}^j}_{=0} \\ &\quad + \varepsilon \lambda g_{ij} \frac{dV_{(2)}^i}{ds} V_{(1)}^j + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \underbrace{g_{ij} V_{(2)}^i V_{(1)}^j}_{=0} \\ &\quad + \varepsilon \lambda V_{(2)}^k V_{(1)}^i V_{(1)}^j g_{i\alpha} \Gamma_{jk}^\alpha + \varepsilon \lambda V_{(2)}^k g_{j\alpha} \Gamma_{ik}^\alpha V_{(1)}^i V_{(1)}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \frac{dV_{(2)}^j}{ds} + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \Gamma_{k\alpha}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^\alpha \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\frac{dV_{(2)}^j}{ds} + \Gamma_{k\alpha}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^\alpha \right) \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\frac{dV_{(2)}^j}{ds} + (\Gamma_{k\alpha}^j - \bar{D}_\alpha \delta_k^j) V_{(2)}^k V_{(1)}^\alpha \right) \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\frac{dV_{(2)}^j}{ds} + \Gamma_{k\alpha}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^\alpha - (\bar{D}_\alpha \delta_k^j) V_{(2)}^k V_{(1)}^\alpha \right) \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\frac{\bar{D}V_{(2)}^j}{ds} - \frac{\bar{D}\delta_k^j}{ds} V_{(2)}^k \right) \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 + 2\varepsilon\lambda g_{ij} V_{(1)}^i \left(\kappa_2 V_{(3)}^j - \kappa_1 V_{(1)}^j + V_{(2)}^q \frac{\bar{D}\delta_q^j}{ds} - \frac{\bar{D}\delta_k^j}{ds} V_{(2)}^k \right) \\
\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 &= 1 - 2\varepsilon\lambda \kappa_1
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

buluruz ve buradan da

$$\frac{ds}{d\bar{s}} = 1 + \varepsilon\lambda \kappa_1 \tag{4.4.6}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi (4.4.3) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{(1)}^i &= \left(V_{(1)}^i + \varepsilon\lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \right) (1 + \varepsilon\lambda \kappa_1) \\
&= V_{(1)}^i (1 + \varepsilon\lambda \kappa_1) + \varepsilon\lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

buluruz. \bar{C} eğrisinin \bar{P} noktasındaki $\bar{V}_{(1)}$ tanjant vektörünü belirleyip paralel yer değiştirme ile P noktasına taşıyalım ve bunu $\bar{\bar{V}}_{(1)}$ ile gösterelim. Bir eğri boyunca paralel vektör alanı

$$\frac{d\bar{V}_{(1)}^i}{ds} + \bar{V}_{(1)}^j {}'\Gamma_{jk}^i \frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0$$

denklemini sağladığından

$$\frac{d\bar{V}_{(1)}^i}{ds} = -\bar{V}_{(1)}^j {}'\Gamma_{jk}^i \frac{d\bar{x}^k}{ds}$$

buluruz. Sonsuz küçük deformasyonlar için

$$\begin{aligned} \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= \bar{V}_{(1)}^i + {}'\Gamma_{jk}^i \bar{V}_{(1)}^j (\bar{x}^k - x^k) \\ &= \bar{V}_{(1)}^i + \varepsilon \lambda {}'\Gamma_{jk}^i \bar{V}_{(1)}^j V_{(2)}^k \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

yazılabilir ve (4.4.7) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= \bar{V}_{(1)}^i + \bar{V}_{(1)}^j {}'\Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda V_{(2)}^k \\ \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \\ &\quad + \varepsilon \lambda \left(V_{(1)}^j (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^j \right) V_{(2)}^k \\ &\quad \cdot \left({}'\Gamma_{jk}^i + \varepsilon \lambda \frac{\partial {}'\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(2)}^l \right) \\ \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda {}'\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k \\ \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) + \varepsilon \lambda \left(\frac{dV_{(2)}^i}{ds} + {}'\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k \right) + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \\ \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) + \varepsilon \lambda \frac{\bar{D}V_{(2)}^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son denklemde Frenet denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned} \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i + V_{(1)}^i \varepsilon \lambda \kappa_1 + \varepsilon \lambda \left(\kappa_2 V_{(3)}^i - \kappa_1 V_{(1)}^i + V_{(2)}^q \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} \right) + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \\ \bar{\bar{V}}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^i + \varepsilon \lambda V_{(2)}^q \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{(1)}^i = V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^i + \varepsilon \left(\lambda V_{(2)}^q \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} V_{(2)}^i \right) \quad (4.4.9)$$

bulunur. Paralel yer değiştirmede açılar değişmediği için $\bar{V}_{(1)}^i$ ve $V_{(2)}^i$ vektörlerinin birbirine ortogonal olmaları gerekir. Dolayısıyla (4.4.9) denklemini $V_{(2)}^i$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \lambda V_{(2)}^q V_{(2)i} \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} &= 0 \\ \frac{d\lambda}{ds} &= -\lambda V_{(2)}^q V_{(2)i} \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

buluruz. Buradan λ 'nın sabit olmadığı görülür. Sabit olması için birim izomorfizmanın kovaryant sabit olması gerekir ki bu durumda da konneksiyon afin konneksiyona indirgenir.

(4.4.10) denklemini kullanırsak (4.4.9) denklemini

$$\bar{V}_{(1)}^i = V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^i \quad (4.4.11)$$

şekline gelir.

Genel olarak, v ve w birbirine ortogonal vektör alanları olmak üzere $u = av + bw$ yazılabilir ve burada

$$\begin{aligned} a &= \cos(u, v) \\ b &= \cos(u, w) = \sin(u, v) \end{aligned}$$

dir. (4.4.11)'de $u = \bar{V}_{(1)}^i$, $v = V_{(1)}^i$ ve $w = V_{(3)}^i$ seçersek $\sin(\bar{V}_{(1)}^i, V_{(1)}^i) = \varepsilon \lambda \kappa_2$ bulunur. Yani $\bar{V}_{(1)}^i$ ile $V_{(1)}^i$ 'nin oluşturduğu açı sadece λ ve burulmanın sabit olması durumunda sabit olur. Bu ise 3c)'ye Riemann-Otsuki uzayında karşılık gelen özelliktir.

Şimdi $\bar{V}_{(2)}^i$ 'yi belirleyelim. Frenet formüllerinden

$$\frac{dV_{(\alpha)}^i}{ds} = \kappa_{\alpha} V_{(\alpha+1)}^i - \kappa_{\alpha-1} V_{(\alpha-1)}^i + V_{(\alpha)}^q \bar{D}\delta_q^i - {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(\alpha)}^j V_{(1)}^k$$

yazarız. (4.4.10) denklemini (4.4.7) denkleminde yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \bar{V}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i + V_{(1)}^i \varepsilon \lambda \kappa_1 + \varepsilon \lambda \frac{dV_{(2)}^i}{ds} - \varepsilon \lambda D\delta_q^i V_{(2)}^q \\ \bar{V}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i + \cancel{V_{(1)}^i \varepsilon \lambda \kappa_1} + \varepsilon \lambda \left(\kappa_2 V_{(3)}^i - \cancel{\kappa_1 V_{(1)}^i} + \cancel{\bar{D}\delta_q^i V_{(2)}^q} - {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^k \right) - \cancel{\varepsilon \lambda D\delta_q^i V_{(2)}^q} \\ \bar{V}_{(1)}^i &= V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \lambda {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^k \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

buluruz. Temel kovaryant türev tanımını ve (4.4.12)'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} \bar{D}\bar{V}_{(1)}^i &= \frac{d\bar{V}_{(1)}^i}{ds} \frac{ds}{d\bar{s}} + {}^i\Gamma_{jk}^i \bar{V}_{(1)}^j \bar{V}_{(1)}^k \\ \bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i + \bar{V}_{(1)}^q D\delta_q^i &= \left[\frac{d}{ds} \left(V_{(1)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \lambda {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^k \right) \right] (1 + \varepsilon \lambda \kappa_1) \\ &+ \left\{ \begin{aligned} &\left[{}^i\Gamma_{jk}^i + \varepsilon \lambda \frac{\partial {}^i\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(2)}^l \right] \\ &\cdot \left(V_{(1)}^j + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^j - \varepsilon \lambda {}^j\Gamma_{rs}^j V_{(2)}^r V_{(1)}^s \right) \left(V_{(1)}^k + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^k - \varepsilon \lambda {}^k\Gamma_{rs}^k V_{(2)}^r V_{(1)}^s \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i + \left(V_{(1)}^q + \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^q - \varepsilon \lambda {}^q\Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \right) D\delta_q^i \\ &= \frac{dV_{(1)}^i}{ds} + \varepsilon \lambda \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i + \varepsilon \lambda \kappa_2 \frac{dV_{(3)}^i}{ds} \\ &- \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^k - \varepsilon \lambda \frac{\partial {}^i\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(1)}^l V_{(2)}^j V_{(1)}^k - \varepsilon \lambda {}^i\Gamma_{jk}^i \frac{dV_{(2)}^j}{ds} V_{(1)}^k \\ &- \varepsilon \lambda {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j \frac{dV_{(1)}^k}{ds} + \varepsilon \lambda \kappa_1 \frac{dV_{(1)}^i}{ds} \\ &+ {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(1)}^k + {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^k - {}^i\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j \varepsilon \lambda {}^k\Gamma_{rs}^k V_{(2)}^r V_{(1)}^s + {}^i\Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^j V_{(1)}^k \\ &- {}^i\Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda {}^j\Gamma_{rs}^j V_{(2)}^r V_{(1)}^s V_{(1)}^k + \varepsilon \lambda \frac{\partial {}^i\Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(2)}^l V_{(1)}^j V_{(1)}^k \end{aligned}$$

buluruz.

$$\begin{aligned}
& \bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i + \underbrace{V_{(4)}^q \bar{D} \delta_q^i}_2 + \underbrace{\varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^q \bar{D} \delta_q^i}_3 - \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \bar{D} \delta_q^i = \\
& \kappa_1 V_{(2)}^i + \underbrace{V_{(4)}^q \bar{D} \delta_q^i}_2 - \underbrace{\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(1)}^k}_1 + \varepsilon \lambda \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i \\
& + \varepsilon \lambda \kappa_2 \left(\kappa_3 V_{(4)}^i - \kappa_2 V_{(2)}^i + \underbrace{V_{(3)}^q \bar{D} \delta_q^i}_3 - \underbrace{\Gamma_{jk}^i V_{(3)}^j V_{(1)}^k}_4 \right) - \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^k \\
& - \varepsilon \lambda \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(1)}^l V_{(2)}^j V_{(1)}^k - \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^i \left(\underbrace{\kappa_2 V_{(3)}^j}_7 - \underbrace{\kappa_1 V_{(1)}^j}_5 + V_{(2)}^q \bar{D} \delta_q^j - \underbrace{\Gamma_{rs}^j V_{(2)}^r V_{(1)}^s}_6 \right) V_{(1)}^k \\
& - \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j \left(\kappa_1 V_{(2)}^k + V_{(1)}^q \bar{D} \delta_q^k - \Gamma_{rs}^k V_{(1)}^r V_{(1)}^s \right) \\
& + \varepsilon \lambda \kappa_1 \left(\kappa_1 V_{(2)}^i + V_{(1)}^q \bar{D} \delta_q^i - \underbrace{\Gamma_{rs}^i V_{(1)}^r V_{(1)}^s}_5 \right) \\
& + \underbrace{\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j V_{(1)}^k}_1 + \underbrace{\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j \varepsilon \lambda \kappa_2 V_{(3)}^k}_7 - \underbrace{\Gamma_{jk}^i V_{(1)}^j \varepsilon \lambda \Gamma_{rs}^k V_{(2)}^r V_{(1)}^s}_6 + \underbrace{\Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda \kappa_1 V_{(3)}^j V_{(1)}^k}_4 \\
& - \Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda \Gamma_{rs}^j V_{(2)}^r V_{(1)}^s V_{(1)}^k + \varepsilon \lambda \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(2)}^l V_{(1)}^j V_{(1)}^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\kappa}_1 V + \varepsilon \Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \delta_q^i \frac{d\lambda}{ds} = \\
& \kappa_1 V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \varepsilon \delta_q^i \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^q \\
& + \varepsilon \lambda \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i - \varepsilon \lambda \kappa_2 \kappa_2 V_{(2)}^i - \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \delta_q^i \Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \\
& - \varepsilon \lambda \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(1)}^l V_{(2)}^j V_{(1)}^k + \varepsilon \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^q \frac{d\lambda}{ds} \delta_q^j V_{(1)}^k \\
& - \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j \kappa_1 V_{(2)}^k + \varepsilon \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(1)}^q \frac{d\lambda}{ds} \delta_q^k + \varepsilon \lambda \Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j \Gamma_{rs}^k V_{(1)}^r V_{(1)}^s \\
& + \varepsilon \lambda \kappa_1 \kappa_1 V_{(2)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^q \frac{d\lambda}{ds} \delta_q^i \\
& - \Gamma_{jk}^i \varepsilon \lambda \Gamma_{rs}^j V_{(2)}^r V_{(1)}^s V_{(1)}^k + \varepsilon \lambda \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} V_{(2)}^l V_{(1)}^j V_{(1)}^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda {}^i \Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \bar{D} \delta_q^i = \\
\kappa_1 V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda \left\{ (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i - \kappa_1 {}^i \Gamma_{jk}^j V_{(2)}^j V_{(2)}^k \right\} \\
- \varepsilon \lambda \left\{ -\frac{\partial {}^i \Gamma_{jk}^i}{\partial x^j} V_{(1)}^j V_{(2)}^k + \frac{\partial {}^i \Gamma_{jk}^i}{\partial x^j} V_{(1)}^j V_{(2)}^l V_{(1)}^k + \right. \\
\left. \left[{}^i \Gamma_{jk}^i \Gamma_{rs}^k V_{(1)}^r V_{(2)}^j V_{(1)}^s - {}^i \Gamma_{jk}^i {}^i \Gamma_{rs}^j V_{(1)}^s V_{(2)}^r V_{(1)}^k \right] \right\} \\
+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i \frac{d\lambda}{ds}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda {}^i \Gamma_{jk}^q V_{(2)}^j V_{(1)}^k \bar{D} \delta_q^i = \\
\kappa_1 V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda \left\{ (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i - \kappa_1 {}^i \Gamma_{jk}^j V_{(2)}^j V_{(2)}^k \right\} \\
- \varepsilon \lambda \left\{ -\frac{\partial {}^i \Gamma_{kl}^i}{\partial x^j} + \frac{\partial {}^i \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} + {}^i \Gamma_{ak}^i \Gamma_{jl}^a - {}^i \Gamma_{al}^i {}^i \Gamma_{jk}^a \right\} V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l \\
+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i \frac{d\lambda}{ds}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i = \kappa_1 V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda \left\{ (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i - \right. \\
\left. \left[\kappa_1 {}^i \Gamma_{jk}^j V_{(2)}^j V_{(2)}^k + {}^i R_{jkl}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l \right] \right\} \\
+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i \frac{d\lambda}{ds} \tag{4.4.13}
\end{aligned}$$

\bar{C} eğrisinin \bar{P} noktasında $\bar{V}_{(2)}$ normal vektörünü bulmak için, bu vektörü paralel yer değiştirme ile P noktasına taşıyalım ve bunu $\bar{\bar{V}}_{(2)}$ ile gösterelim. $\bar{\bar{V}}_{(2)}$ 'nin $V_{(2)}$ ile çakışması için koşulları belirleyelim.

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{V}}_{(2)}^i &= \bar{V}_{(2)}^i + {}'\bar{\Gamma}_{jk}^i \bar{V}_{(2)}^j (\bar{x}^k - x^k) \\
&= \bar{V}_{(2)}^i + {}'\bar{\Gamma}_{jk}^i \bar{V}_{(2)}^j \varepsilon \lambda \bar{V}_{(2)}^k \\
&= \bar{V}_{(2)}^i + \varepsilon \lambda {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k
\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

denklemininden

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 \bar{\bar{V}}_{(2)}^i &= \bar{\kappa}_1 \left(\bar{\bar{V}}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k \right) \\
&= \bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda \bar{\kappa}_1 {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k \\
&= \bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda \left(\kappa_1 + \varepsilon \lambda \frac{\partial \kappa_1}{\partial x^l} V_{(1)}^l V_{(2)}^k \right) {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k \\
&= \bar{\kappa}_1 \bar{V}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda \kappa_1 {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k
\end{aligned}$$

bulunur ve bunu (4.4.13)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_1 \bar{\bar{V}}_{(2)}^i - \varepsilon \lambda \kappa_1 {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k &= \kappa_1 V_{(2)}^i \\
&+ \varepsilon \lambda \left\{ \left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2 \right) V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i - \right. \\
&\quad \left. \left[\kappa_1 {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k + {}'R_{jkl}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l - \kappa_1 {}'\Gamma_{jk}^i V_{(2)}^j V_{(2)}^k \right] \right\} \\
&+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i \frac{d\lambda}{ds} \\
\kappa_1 \bar{\bar{V}}_{(2)}^i &= \kappa_1 V_{(2)}^i + \varepsilon \lambda \left\{ \left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2 \right) V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i + {}'R_{jkl}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l \right\} \\
&+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i \frac{d\lambda}{ds}
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

(4.4.15) denklemini $V_{(3)i}$ ile çarparsak (4.4.10) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\kappa_1 \bar{\bar{V}}_{(2)}^i V_{(3)i} &= V_{(3)i} \kappa_1 V_{(2)}^i \\
&+ \varepsilon \lambda \left\{ \left(\kappa_1^2 - \kappa_2^2 \right) V_{(3)i} V_{(2)}^i + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i V_{(3)i} \right. \\
&\quad \left. + \kappa_2 \kappa_3 V_{(3)i} V_{(4)}^i + V_{(3)i} {}'R_{jkl}^i V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l \right\} \\
&+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i V_{(3)i} - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i V_{(3)i} \frac{d\lambda}{ds}
\end{aligned}$$

$$0 = 0 + \varepsilon \lambda \left\{ \frac{d\kappa_2}{ds} + V_{(3)i} {}^i R_{jkl} V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l \right\} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2$$

bulunur. Bu denklemde

$${}^i R_{jkl} V_{(3)i} V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l = {}^i \gamma_{3121}$$

gösterimini kullanırsak

$$\frac{d\kappa_2}{ds} + {}^i \gamma_{3121} + \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 = 0$$

ya da

$${}^i \gamma_{3121} = \lambda V_{(2)}^q V_{(2)i} \frac{\bar{D}\delta_q^i}{ds} - \frac{d\kappa_2}{ds} \quad (4.4.16)$$

buluruz. Benzer şekilde (4.4.15) denklemini $V_{(4)i}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \kappa_1 \bar{V}_{(2)}^i V_{(4)i} &= \kappa_1 V_{(2)}^i V_{(4)i} \\ &+ \varepsilon \lambda \left\{ (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) V_{(2)}^i V_{(4)i} + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i V_{(4)i} + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i V_{(4)i} + {}^i R_{jkl} V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l V_{(4)i} \right\} \\ &+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i V_{(4)i} - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i V_{(4)i} \frac{d\lambda}{ds} \end{aligned}$$

$$\kappa_2 \kappa_3 V_{(4)r} + \gamma_{4121} V_{(4)r} = 0$$

$${}^i \gamma_{4121} = -\kappa_2 \kappa_3 \quad (4.4.17)$$

buluruz ve $p > 4$ için

$$\begin{aligned} \kappa_1 \bar{V}_{(2)}^i V_{(p)i} &= \kappa_1 V_{(2)}^i V_{(p)i} \\ &+ \varepsilon \lambda \left\{ (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) V_{(2)}^i V_{(p)i} + \frac{d\kappa_2}{ds} V_{(3)}^i V_{(p)i} + \kappa_2 \kappa_3 V_{(4)}^i V_{(p)i} + {}^i R_{jkl} V_{(1)}^j V_{(2)}^k V_{(1)}^l V_{(p)i} \right\} \\ &+ \varepsilon \frac{d\lambda}{ds} \kappa_2 V_{(3)}^i V_{(p)i} - \varepsilon \kappa_1 V_{(1)}^i V_{(p)i} \frac{d\lambda}{ds} \end{aligned}$$

$${}^i \gamma_{p121} = 0 \quad (p > 4) \quad (4.4.18)$$

bulunur. (4.4.16), (4.4.17) ve (4.4.18) denklemleri Riemann-Otsuki uzayında C eğrisinin $n-1$ tane eğrilik arasında $n-2$ -tane “Bertrand denklemini” verir.

Bu sonuçları 3-boyultu Öklid uzayında uygularsak (4.4.16) denkleminden $\kappa_2 = 0$ buluruz ki bu 2b) özelliğini gösterir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇ

Genel konneksiyon kavramı 1958 yılında [1]'de T.Otsuki tarafından tanımlanmış ve Otsuki konneksiyonu adını almıştır. Bu kavram diferansiyellenebilir manifoldlar için afin konneksiyonların genelleştirilmesinden ibarettir. Otsuki konneksiyonu manifoldlar üzerinde afin konneksiyondan daha serbest kullanıma sahip olması nedeniyle yani; klasik diferansiyel geometride geçerli olan bilinen kovaryant türev alma kuralları genel Otsuki konneksiyonları için geçerli olmak zorunda olmadığı için matematiksel fizik ve diferansiyel geometri kullanan matematik dallarında Otsuki konneksiyonu önemli yer tutar. Genel konneksiyonlar A.Moor [30] ve T.Otsuki [31] tarafından Finsler geometrisinde de kullanılmıştır. Genel konneksiyonlar vektör demetleri üstünde ise, [32]'de N.Abe tarafından incelenmiştir. Ayrıca, H. Nagayama [33] genel konneksiyonları kullanarak genel rölativite teorisinde ortaya çıkan genelleştirilmiş Einstein yer çekim denkleminin ilginç sonuçlarına ulaşmıştır. T. Otsuki [34] 1982'de afin konneksiyonlar için oluşturulması mümkün olmayan ancak, genel konneksiyonları kullanmak suretiyle, komşuluklarında geodeziklerin yutulduğu (swallow) noktalara sahip uzayları oluşturmayı başarmıştır.

Bu tez çalışmasında, genel konneksiyonları kullanmak suretiyle, burulmasız (Torsion-free) Riemann uzaylarında eğrilerin deformasyonları incelenmiştir. Bu deformasyonlar kullanılarak involüt ve Bertrand eğri çiftlerinin Riemann uzayındakilerden farklı olan özellikleri bulunmuştur. Bu farkın nedeninin Kronecker deltasının kovaryant türevinin sıfırdan farklı olmasından kaynaklandığı anlaşılmıştır. Ayrıca bu tez kapsamında helis eğrisini tanımlayan deformasyonlar da incelenmiştir. Bu deformasyon Riemann uzayında paralel teğet deformasyonu iken, yani $\Delta V_{(1)}^\lambda = 0$ koşulunu sağlarken,

Riemann–Otsuki uzayında $\Delta V_{(1)}^\lambda = \frac{1}{\xi} \frac{\bar{D}\delta_\beta^\lambda}{ds} \xi^\beta$ koşulunu sağlamaktadır. Benzer şekilde

otoparalel eğrileri otoparalel eğrilere ve çemberi çembere dönüştüren deformasyonlar da incelenmiştir.

Hayden [35] çalışması da göz önüne bulundurularak bu tezde yapılan çalışmalar burulmalı uzaylara genişletebilenler. Burulmalı Riemann-Otsuki uzayında eğrilerin deformasyonları incelenebilir. Ayrıca, burulmalı Riemann-Otsuki uzaylarının altuzaylarının, geodezik altuzaylarının ve hiperyüzeylerinin birer Riemann-Otsuki uzayı olması için gerekli koşulları saptayarak, Otsuki kovaryant diferansiyeli tanımlanabilir. Söz konusu bu altuzayların eğrilikleri arasındaki ilişkiler araştırılabilir ve asimptotik eğriler, asimptotik altuzaylar incelenebilir. Riemann-Otsuki uzayında tanımlı karşılıklı olarak birbirine dik n -tane kongrüans eğrilerinden oluşan n -li ortogonal sistem (orthogonal ennuple) tanımlanabilir ve buna bağlı olarak Ricci dönme katsayıları hesaplanabilir. Bundan başka Riemann-Otsuki uzayının yine bir Riemann-Otsuki uzayı olan altuzayları ve hiperyüzeyleri üzerinde hiperasimptotik eğriler, hipernormal eğriler, hiperdarboux eğrileri incelenebilir

KAYNAKLAR

- [1] OTSUKI, T., 1958, Tangent Bundles of Order 2 and General Connections, *Math. J. Okayama Univ.*, 8, 143-179.
- [2] MOOR, A., 1978, Otsukische Übertragung mit Rekurrentem Masstensor, *Acta Sci. Math.*, 40, 129-142.
- [3] MOOR, A., 1979, Über die Veränderung der Länge der Vektoren in Weyl-Otsukischen Raumen, *Acta Sci. Math.*, 41, 173-185.
- [4] Nadj, Dj.F., 1981, On Subspaces of Riemann-Otsuki Space, *Publ. de l'Inst. Math Beograd*, 30 (44), 53-58
- [5] Nadj, Dj.F., 1981, On the Orthogonal Spaces of the Subspaces of a Riemann-Otsuki Space, *Zbornik Radova PMF Novi Sad*, 11, 201-208
- [6] OTSUKI, T., 1958, On Tangent Bundles of Order 2 and Affine Connections, *Proc. Japan Acad.*, 34, 325-330.
- [7] OTSUKI, T., 1960, On General Connections I, *Math. J. Okayama Univ.*, 9, 99-164.
- [8] OTSUKI, T., 1961, On General Connections II, *Math. J. Okayama Univ.*, 10, 113-124
- [9] OTSUKI, T., 1961, On Metric General Connections, *Proc. Japan Acad.*, 37, 183-188.
- [10] OTSUKI, T., 1990, General Connections, *Math. J. Okayama Univ.*, 32, 227-242.
- [11] KRUPKA, D., KRUPKA, M., 2000, Jets and Contact Elements, *Proceedings of the Seminar on Differential Geometry; Mathematical Publications*, 2, 39-85.
- [12] CLAESSENS, L., 2006, *Field Theory from a Bundle Point of View* [online], Bruxelles, Université Libre de Bruxelles, <http://student.ulb.ac.be/~lclaessee/lectures.pdf>
- [13] CHERN, S.S., CHEN, W. H., LAM, K. S., 1950, *Lectures on differential geometry*, World Scientific Pub Co Inc, 9810241828.
- [14] OTSUKI, T. 1961, On normal general connections, *Kodai Math.Sem.Rep.*, 13, 152-166

- [15] OTSUKI, T., 1962 General connections ΓA and the parallelism of Levi-Civita, Kodai Math.Sem.Rep, 14, (1962), 40-52.
- [16] OTSUKI, T., 1962, A note on metric general connections, Proc. Japan Acad.,38, 409-413.
- [17] NADJ, Dj.F., 1984, The Gauss', Codazzi's and Kühne equations of $R-O_n$ spaces, Acta Math. Hung., Budapest, 44 (3-4), 92-99.
- [18] NADJ, Dj.F., 1986 The Frenet Formula of Riemann-Otsuki space, Zbornik Radova PMF Novi Sad, 16, (1), 95-106.
- [19] NADJ, Dj.F., 1983, Autoparallel Curves of Riemann-Otsuki spaces, 13, Rev.Res. Fac. of Science Univesrity of Novi Sad,13, 227-243.
- [20] HAYDEN, H.A., 1931, Deformation of a curve in a Riemannian n-space which displace certain vectors parallelly at each point, Proc. London Math. Soc. (2), 32, 321-336.
- [21] SCHOUTEN, J. A. and E.R. van Kampen, 1933, Beitrage zur Theorie der Deformation, Prace Mat. Fiz.,41,1-19.
- [22] YANO, K., 1945, Bemerkungen über infinitesimale Transformationen eines Raumes, Proceedings of the Japan Academy, Volume 21, No3-10, 171-178.
- [23] YANO, K., 1949, Sur la theorie des deformations infinitesimales, Journal of the Faculty of Science, Imperial Univesrity of Tokyo, volume 6, 1-75.
- [24] YANO, K., Kazuo, T., Yasuro, T., 1948, On infinitesimal deformations of curves in spaces with linear connection, Jap, J, Math., Volume 19, 433-477.
- [25] PEARS, L.R., 1935, Bertrand curves in Riemannian space, J. London Math. Soc. Volumes1-10, Number 2, 180-183.
- [26] OTSUKI, T., 1963, On curvatures of spaces with general connection I; II, Kodai Math. Sem. Rep., 15,52-61;184-194
- [27] DAVIES, E.T., 1934, On infinitesimal deformations of a space, Ann.Mat.Pur Appl., Volume 12, No1, 145-151.
- [28] YANO, K., ADATI, T., 1944, Paralel tangent deformations, concircular transformation and concurrent vector field, Proc. Imp. Acad., 20, No3, 123-127
- [29] KANBAY, F., DEMİR BÜKER, H., 2004, Involute curves in Weyl-Spaces, Intern. Math. Journal, 5, No4, 315-319.
- [30] MOOR, A., 1982, Über die Begründung von Finsler-Otsukischen Ruamen und ihre Dualitat, Tensor, N.S., 37,121-129

- [31] OTSUKI, T.,1988, Singular point sets of general connection and black holes, Math. J. Okayama Univ., 30, 199-211.
- [32] ABE, N., 1988, General connections on vector bundles, Kodai Math. J., 8, 322-32
- [33] NAGAYAMA, H.,1984, A theory of general relativity by general connections I TRU Math., 20, 173-187.
- [34] OTSUKI, T., 1982, A construction of spaces with general connections which have points swallowing geodesics, Math. J. Okayama Univ. ,24, 157-165
- [35] HAYDEN, H. A., ,1932, Sub-spaces of spaces with torsion, Proc. London Math. Soc.,34, 27-50.

ÖZ GEÇMİŞ

31.08.1975 tarihinde Kosova'nın Prizren şehrinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi , sırasıyla, Emin Durak İlköğretim Okulu ve Gjon Buzuk Fen Lisesinde tamamladım. 1993 yılında Priştine Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdim ve 1998 yılında mezun oldum. 1998-1999 eğitim ve öğretim yılında Priştine Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi kadrosuna atandım. 2001 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladım ve 2005 yılında tamamladım. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora eğitimine kabul edildim. 2007 yılında Beykent Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bilgisayar Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandım ve halen bu göreve devam etmekteyim. İyi derecede arnavutça, sırpça ve ingilizce biliyorum. Evli ve iki çocuk annesiyim.