

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BAİRE UZAYLARI

**Hazırlayan
Saliha ATAK**

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

Yüksek Lisans Tezi

**Haziran 2011
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

BAİRE UZAYLARI

Yüksek Lisans Tezi

**Hazırlayan
Saliha ATAK**

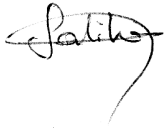
**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA**

**Haziran 2011
KAYSERİ**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

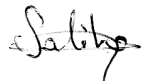
Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kurallar ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Saliha ATAK



YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI

BAİRE UZAYLARI adlı yüksek lisans tezi Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.



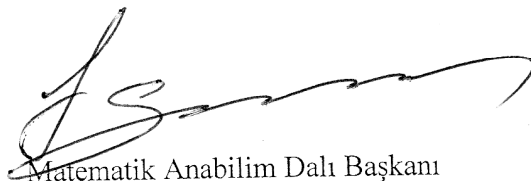
Tezi Hazırlayan

Saliha ATAK



Danışman

Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA



Matematik Anabilim Dalı Başkanı

Prof. Dr. Fuat GÜRCAN

Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA danışmanlığında **Saliha ATAK** tarafından hazırlanan “**Baire Uzayları**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

.....

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet Baran

Üye : Yrd. Doç .Dr Muammer Kula

Üye : Yrd. Doç .Dr. Ali Deliceoğlu



ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 28/06/2011 tarih ve 2011/22-12 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

28.06/2011..

Prof.Dr. Necmettin MARAŞLI

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

“Baire Uzayları” isimli yüksek lisans tezi çalışmalarım süresince desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen ve yönlendiren saygı değer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA’ ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

BAİRE UZAYLARI

Saliha ATAK

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2011

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Muammer KULA

ÖZET

Bu çalışmada Baire uzayların tanımlanması için gerekli olan özellikler, belli başlı bazı teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Giriş kısmında kısaca Baire uzayların tarihçesi üzerinde durulmuş olup literatür taraması mahiyetindedir.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Çalışmamızın birinci bölümünde [1], [2], [3], [4] ve [5]'de verilen topoloji tanımı ve özellikleri, iç nokta, dış nokta, kapanış, sınır, yığılma noktası tanımları verilmiştir. Hiçbir yerde yoğun olmayan cümleleri tanımlayıp buna bağlı olarak yetersiz ve yetersiz olmayan cümleler kavramları [6], [7], [8] referanslı kaynaklar kullanılarak incelenmiştir. Bir (X, τ) topolojik uzayında X in bir A alt cümlesinin kapanışının içi boş ise, A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İkinci bölümde [9] referanslı kaynaktan yararlanılarak Baire uzayı tanımlanmış ve Baire uzaylarının karakteristik özellikleri verilmiştir. Her Bir Baire uzayın yetersiz olmayan olduğu ve herhangi bir topolojik uzayın açık (kapalı) Baire uzay ve kapalı (açık) yetersiz cümlelerin birleşimi olarak yazılabileceği gösterilmiştir. [10]'da verilen Baire uzaylarının G_δ cümleler karakteri, yarı sürekli fonksiyonlar ifade edilmiş ve [11], [12]'den yararlanılarak Baire uzaylarının süzgeç karakterleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak vektör uzayı, topolojik vektör uzayı, normlu uzay ve Banach uzayı tanımlanıp bu uzayların Baire uzayları olması için gerekli şartlar ifade edilmiştir. [13]'de ifade edilen Baire Kategori Teoremi, [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20]'de verilen Açık Dönüşüm Teoremi ve Kapalı Grafik Teoremlerini içeren kategori teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Bir topolojik vektör uzayında her yetersiz olmayan uzayın bir Baire uzay olduğu gösterilmiştir.

Son bölümde Baire uzaylarının özelliklerinin kısa bir özeti verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Uzay, Topolojik Vektör Uzayları, Hiçbir Yerde Yoğun Olmayan Cümleler, Yetersiz ve Yetersiz Olmayan Cümleler, Baire Uzayları

BAIRE SPACES

Saliha ATAK

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, June 2011

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Muammer KULA

ABSTRACT

In this thesis, the characteristics necessary for the identification of Baire spaces, and some of the main theorems are stated and proved.

The introduction part is a brief review of the literature and focuses on the history of the characteristics of Baire spaces.

The study consists of four chapters.

In the first chapter, topology definition and properties, the internal point, the outer point, closure, border and accumulation point definitions [1], [2], [3], [4], [5] are given. We introduce the concept of nowhere dense sets, and based on that, the concepts of meager and nonmeager sets [6], [7], [8] have been studied. In a topological space (X, τ) , if the interior of the closure of a subset A of X is said to be empty, A is nowhere dense sets.

In the second chapter, we define Baire spaces and characterizations of them [9]. We show that every Baire space is nonmeager and that any topological space can be written as the union of an open (closed) Baire space and of a closed (open) meager set. G_δ sentences for the character of Baire spaces, semi-continuous functions [10] and the filter character of Baire spaces are examined [11], [12], [13].

In the third chapter, mainly, vector space, topological vector space, normed space and Banach space are described and the necessary conditions for these spaces to be Baire spaces are expressed. Baire's Category Theorem [13], Open Mapping Theorem [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] and category theorems containing the Closed Graph Theorems have been expressed and proved. In a topological vector space, it has been shown that each space which is nonmeager is a Baire space.

In the last chapter is a brief summary of properties of Baire spaces.

Keywords: Topological Spaces, Topological Vector Spaces, Nowhere Dense Sets, Meager and Nonmeager Sets, Baire Spaces.

İÇİNDEKİLER

BAİRE UZAYLARI

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK	ii
YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI	iii
KABUL VE ONAY	iv
TEŞEKKÜR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	viii
GİRİŞ	1

1. BÖLÜM:

BAİRE UZAYLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ

1.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
1.2. Hiçbir Yerde Yoğun Olmayan Cümleler	6
1.3. Yetersiz ve Yetersiz Olmayan Cümleler.	18

2. BÖLÜM:

BAİRE UZAYLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

2.1. Baire Uzayları	26
2.2. Baire Uzaylarının G_δ Cümleler Karakteri	32
2.3. Yarı Sürekli Fonksiyonlar ve Baire Uzayları	35
2.4. Baire Uzaylarının Süzgeç Karakterleri	40

3. BÖLÜM:**KATEGORİ TEOREMLERİ**

3.1. Temel Kavramlar ve Ön Hazırlık.....	45
3.2. Baire Uzay Olan Topolojik Vektör Uzayları.....	51
3.3. Baire Kategori Teoremi	56
3.4. Kapalı Grafik Teoremi ve Açık Dönüşüm Teoremi	61

4. BÖLÜM:**BAİRE UZAYLARININ ÖZELLİKLERİNİN ÖZETİ**

Baire Uzaylarının Özelliklerinin Özeti.....	66
KAYNAKLAR	68

ÖZGEÇMİŞ

GİRİŞ

Baire uzayı, yoğun, açık cümlelerin sayılabilir adetteki kesişiminin yoğun olduğu bir uzay olarak ilk kez Bourbaki tarafından tanımlanmıştır [21]. Kompakt Hausdorff uzaylar ve tamamen metriklenebilir uzaylar Baire uzaylarının klasik örnekleridir [22].

Baire uzayları ile ilgili [23], [24], [25], [26], [27] kaynakları gibi birçok kitap ve makale yazılmıştır. Bu çalışmanın amacı elde edilen sonuçları bir araya getirmektir. Bu sonuçların birçoğunu detaylı bir şekilde ispatlayacağız.

Baire Kategori Teoremi 1897 de William Osgood ve 1899 da Rene Baire ın birbirinden bağımsız çalışmalarıyla ispat edilmiş olup sırasıyla her ikisi de her tam metrik uzayın bir Baire uzay olduğunu ifade etmiştir. [24] referanslı kaynakta ifade edilen bu teorem fonksiyonel analizdeki en önemli işlevsel sonuçları oluşturur: Kapalı Grafik Teoremi, Açık Dönüşüm Teoremi gibi... Bu çalışma Baire uzayları ile Kapalı Grafik Teoremi ve Açık Dönüşüm Teoremi için [25], [26], [27] kaynaklarında verilen topolojik uzayların ve topolojik vektör uzaylarının birçok tipi hakkındaki teoremleri daha genel olarak inceler ve daha geniş tertibini sunar.

Bu çalışmada Baire teoremi formülasyonunu yetersiz cümleler kavramı yardımıyla elde edeceğiz.

Bir Baire uzayda [6], [7], [8] referanslı kaynaklarda da ifade edildiği gibi yetersiz cümle ve artık cümle (yetersiz cümlelerin tümleyenini) kavramları vardır. Baire uzaydaki herhangi bir artık cümlelerin yoğun olduğu temel bir gerçektir. Bu gerçek, analizde, belirli tip küme veya noktaların hatta fonksiyonların varlığını ispatlamak için standart bir araçtır.

Bir (X, τ) topolojik uzayı, [20]'de verilen tanımıyla boştan farklı her alt cümlesi yetersiz olmayan ise veya sayılabilir açık, yoğun alt cümlelerinin kesişimi X de yoğun ise, (X, τ) bir Baire uzaydır.

1. BÖLÜM

BAİRE UZAYLARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan genel tanımlar ve bunlarla ilgili bazı teoremler ifade edildi.

Tanım 1.1.1.

X boştan farklı bir küme ve τ da X in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise, τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

- $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$
- τ nun sonlu sayıdaki alt cümlelerinin kesişimi τ nun bir elemanı yani;

$$G_1, G_2, \dots, G_n \in \tau \text{ ise } \bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau \text{ dır.}$$

- τ nun keyfi adetteki alt cümlelerinin birleşimi τ nun bir elemanı yani;

$$\forall i \in I \text{ için } G_i \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau \text{ dır.}$$

τ nun elemanlarına da açık küme denir.

Tanım 1.1.2.

Bir (X, τ) topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ alt cümlesi verilsin. Eğer A^c açık ise, A ya kapalı bir cümle denir.

Önerme 1.1.3.

Bir (X, τ) topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) \emptyset ve X cümleleri kapalıdır.
- ii) Kapalı cümlelerin sonlu birleşimleri de kapalıdır.
- iii) Kapalı cümlelerin keyfi kesişimleri de kapalıdır.

Topoloji, açık cümleler cinsinden tanımlandığı gibi kapalı cümleler cinsinden de aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Önerme 1.1.4.

X boştan farklı bir cümle ve K , X in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise, tüm kapalı cümlelerinin sınıfı K olacak şekilde X üzerinde bir tek topoloji vardır.

- i) $\emptyset, K \in \tau$
- ii) $K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_n} \in K$ ise, $\bigcup_{r=1}^n K_{i_r} \in K$
- iii) $\forall r \in I$ için $K_r \in K$ ise, $\bigcap_{r \in I} K_r \in K$

Önerme 1.1.5.

Bir (X, τ) topolojik uzayında bir G alt cümlesi için G açıktır ancak ve ancak $\forall x \in G$ için $x \in U_x \subseteq G$ olacak şekilde bir $U_x \in \tau$ vardır.

Tanım 1.1.6.

a) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G \subseteq A$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa, yani A cümlesi a nın bir komşuluğu ise, a elemanına A nın bir iç noktası denir. A nın tüm iç noktalarının cümlesine A nın içi denir ve A° ile gösterilir.

$$A^\circ = \bigcup \{G \subseteq A \mid G \in \tau\}$$

Bir $A \subseteq X$ alt cümlesi açıktır ancak ve ancak $A = A^\circ$ dır.

A° , A nın kapsadığı en büyük açık cümledir.

b) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. Eğer x in her G açık komşuluğu için;

$$(G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

ise, $x \in X$ noktasına A nın bir yığılma noktası denir ve A nın tüm yığılma noktalarının cümlesi A' ile gösterilir. O halde

$$x \in A' \text{ dır ancak ve ancak } G \cap A \subseteq \{x\} \text{ dır.}$$

olacak şekilde x in en az bir G açık komşuluğu vardır.

c) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A cümlesini kapsayan en küçük kapalı cümleye A nın kapanışı denir ve \bar{A} ile gösterilir.

$$A \text{ kapalıdır ancak ve ancak } A = \bar{A} \text{ dır.}$$

$\bar{A} = X$ ise, A ya X de yoğun cümle denir.

d) (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ verilsin. A^c nın iç noktalarının cümlesi olan $(A^c)^\circ$ ye A nın dışı denir ve A^d ile gösterilir. A nın içine ve dışına ait olmayan noktaların cümlesi olan

$$\{ x \in X \mid x \notin A^\circ \text{ ve } x \notin A^d \}$$

A nın sınırı denir ve A^s ile gösterilir.

$$A^s = (A^\circ \cup A^d)^c \text{ olup } X = A^\circ \cup A^d \cup A^s \text{ dır.}$$

Sonuç 1.1.7.

- i) $A^\circ \subseteq A$ ve A° açıktır.
- ii) A açıktır ancak ve ancak $A^\circ = A$ dır.
- iii) A° , A nın kapsadığı en geniş açık cümledir.
- iv) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
- v) $A \subseteq B$ ise, $A^\circ \subseteq B^\circ$ dır.
- vi) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ ve $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$
- vii) $A \subset \bar{A}$ ve \bar{A} kapalıdır.
- viii) A kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} = A$
- ix) $\overline{(A)} = \bar{A}$
- x) $A \subseteq B$ ise, $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ dır.

- xi) $\overline{A \cup B} = (\overline{A \cup B})$ ve $(\overline{A \cap B}) \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
- xii) $A \subseteq B$ ise, $A' \subseteq B'$ dir.
- xiii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ ve $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$
- xiv) $\overline{A} = A \cup A'$
- xv) A kapalıdır ancak ve ancak $A = A^o \cup A^s$ dir.
- xvi) $A^s = \overline{A} \setminus A^o$
- xvii) $A^s = \emptyset$ ancak ve ancak A hem açık hem kapalıdır.
- xviii) $A^s \cap A = \emptyset$ ancak ve ancak A açıktır.

Tanım 1.1.8.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu takdirde

$$\tau_A = \{ A \cap G \mid G \in \tau \}$$

sınıfı A üzerinde bir topoloji olup bu topoloji A üzerindeki alt topoloji ve (A, τ_A) ikilisi alt uzay olarak adlandırılır. $E \subseteq A$ için

- i) $E_A^o \supset A \cap E^o$
- ii) $(\overline{E_A}) = A \cap \overline{E}$
- iii) $(E_A)^s \subset A \cap E^s$

Not 1.1.9.

Bir (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) $A^o = (\overline{A^c})^c$
- ii) $(A^o)^c = \overline{A^c}$
- iii) $\overline{A} = \left[(A^c)^o \right]^c$

1.2. HİÇBİR YERDE YOĞUN OLMAYAN CÜMLELER

Tanım 1.2.1.

Bir (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ alt cümlesi verilsin. Eğer $(\overline{A})^o = \emptyset$ ise, A ya hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve eğer $(\overline{A})^o \neq \emptyset$ ise, A ya herhangi bir yerde yoğun cümle denir.

Not 1.2.2.

- i) 1.1.7. ve 1.1.9. dan A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir ancak ve ancak $\left[\overline{(A^c)^o}\right] = X$ yani $(\overline{A^d}) = X$ dir. $(\overline{A})^o = \emptyset$ ancak ve ancak $\left[\overline{(A^c)^o}\right] = X$ ancak ve ancak $(\overline{A^d}) = X$ olmasıdır).
- ii) Eğer A herhangi bir kapalı cümle ise, A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir ancak ve ancak $A^o = \emptyset$ ancak ve ancak $A^s = A$ dır.

Örnek 1.2.3.

- a) Boş cümle, hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Gerçekten de üzerindeki alışılmış topolojiye göre boş cümle hem açık hem kapalı olduğundan $(\overline{\emptyset})^o = \emptyset^o = \emptyset$ dır.
- b) \mathbb{Q} , rasyonel sayılar cümlesi \mathbb{R} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir. Gerçekten de $\forall x \in \mathbb{Q}^c$ için $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ dır. Çünkü $\forall \varepsilon > 0$ için $[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}] \neq \emptyset$ dır. O halde $\mathbb{Q}^c \subset \overline{\mathbb{Q}}$ ve $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ olduğundan $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ olup $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ dir. $(\overline{\mathbb{Q}})^o = \mathbb{R}^o = \mathbb{R} \neq \emptyset$ olduğundan \mathbb{Q} , \mathbb{R} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir.
- c) \mathbb{Z} , tam sayılar cümlesi \mathbb{R} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Ancak \mathbb{Z} , \mathbb{Z} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir. Gerçekten de \mathbb{R} , alışılmış topoloji ile göz önüne alınsın. Buna göre \mathbb{Z} kapalıdır. Çünkü $\mathbb{Z}^c = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ olup burada her bir $(n, n+1)$ açık aralığı alışılmış topolojiye göre açık olduğundan \mathbb{Z}^c açıktır. O halde \mathbb{Z} kapalıdır. Yani $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ dir. $(\overline{\mathbb{Z}})^o = \mathbb{Z}^o = \emptyset$ dır. Kabul edelim ki $\mathbb{Z}^o \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists a \in \mathbb{Z}^o$ vardır $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{Z}$ dır. Fakat $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığında sonsuz çoklukta reel sayı

mevcuttur. O halde $(\overline{\mathbb{Z}})^{\circ} = \mathbb{Z}^{\circ} = \emptyset$ olur ki buradan \mathbb{Z}, \mathbb{R} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Fakat $\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}}$ alt uzay topolojisine göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir. Çünkü $\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}}$ alt uzay topolojisine göre kapalıdır. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ ve $(\overline{\mathbb{Z}})^{\circ} = \mathbb{Z}^{\circ} = \mathbb{Z} \neq \emptyset$ olur ki buradan $\mathbb{Z}, \tau_{\mathbb{Z}}$ alt uzay topolojisine göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir.

d) Boştan farklı bir $A \subseteq X$ için A, A da hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir. Çünkü A, A da kapalı ve açık olduğundan $\overline{A} = A$ olup $(\overline{A})^{\circ} = A^{\circ} = A \neq \emptyset$ dır.

e) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ cümlesi \mathbb{R} de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Çünkü $A^c = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$ olup A^c açık yani A kapalıdır.

$\overline{A} = A$ dır. $(\overline{A})^{\circ} = A^{\circ} = \emptyset$ dur. Kabul edelim ki $A^{\circ} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists a \in A^{\circ}$ vardır ancak ve ancak $\exists \varepsilon > 0$ için $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$ dır. Fakat $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığında sonsuz çoklukta reel sayı vardır. O halde $A^{\circ} = \emptyset$ dır.

Önerme 1.2.4.

Bir (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ alt cümlesi verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) A, X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.
- ii) $X \setminus \overline{A}, X$ de yoğundur.
- iii) X in boştan farklı her U açığı için, X in $V \subset U$ ve $V \cap A = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı bir V açığı mevcuttur.
- iv) X in boştan farklı her U açığı için, X in $V \subset U$ ve $V \cap \overline{A} = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı bir V açığı mevcuttur.

İspat:

(i) \Rightarrow (ii) A , X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olsun. O halde $(\bar{A})^o = \emptyset$ dır.

1.1.9. (i) den $A^o = (\bar{A}^c)^c$ dır. A yerine \bar{A} yazılırsa

$$\emptyset = (\bar{A})^o = \left[(\bar{A})^c \right]^c$$

$$\emptyset^c = \left\{ \left[(\bar{A})^c \right]^c \right\}^c$$

$$\emptyset^c = X = \left[(\bar{A})^c \right]$$

$$X = \overline{(X \setminus \bar{A})}$$

olur ki bu $X \setminus \bar{A}$ nın X de yoğun olduğunu gösterir.

(i) \Rightarrow (iii) ve (i) \Rightarrow (iv) $U \in \tau$ olsun. Göstereceğiz ki $U \cap A = \emptyset$ dır. $U = V$ alalım.

Kabul edelim ki $U \cap A \neq \emptyset$ olsun. O halde $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$ olur. Çünkü $A \subset \bar{A} \Rightarrow U \cap A \subset U \cap \bar{A}$ olup $U \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$ olur.

Bu durumda $U \subset \bar{A}$ olması mümkün değildir. Çünkü öyle olsa A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olamaz. O halde $u \in U \cap (\bar{A})^c$ olup $U \cap (\bar{A})^c$ boştan farklı bir açıktır.

Çünkü $U \in \tau$ ve \bar{A} kapalı olduğundan $(\bar{A})^c$ açıktır. O halde bunların kesişimleri de açıktır. Buradan $V = U \cap (\bar{A})^c$ alırsak, V boştan farklı bir açık ve $V \subset U$ olur.

$A \subset \bar{A} \Rightarrow (\bar{A})^c \subset A^c$ olduğundan

$$V \subset (\bar{A})^c \subset A^c$$

$$(V \cap A) \subset (A^c \cap A) = \emptyset$$

Buradan $V \cap A = \emptyset$ dır.

Benzer şekilde

$$V \subset (\bar{A})^c$$

$$(V \cap \bar{A}) \subset ((\bar{A})^c \cap \bar{A}) = \emptyset$$

Buradan $V \cap \bar{A} = \emptyset$ dır.

(iv) \Rightarrow (iii) X in boştan farklı her U açığı için $V \cap \bar{A} = \emptyset$ ve $V \subset U$ olacak şekilde X in boştan farklı bir V açığı mevcut olsun.

$A \subset \bar{A}$ olduğundan $V \cap A \subset V \cap \bar{A}$ dır.

$V \cap \bar{A} = \emptyset$ olduğundan $V \cap A = \emptyset$ olur.

(iii) \Rightarrow (i) Kabul edelim ki A herhangi bir yerde yoğun olsun. O halde $(\bar{A})^o \neq \emptyset$ dır.

Buradan $U \subset \bar{A}$ olacak şekilde boştan farklı bir U açığı mevcuttur. Böylece $V \subset U$ olacak şekilde her V açığı için,

$$V \subset U \subset \bar{A} \Rightarrow V \subset \bar{A}$$

$A \subset \bar{A}$ olduğundan $V \cap A \subset V \cap \bar{A}$ dır. Buradan

$$V \cap \bar{A} = \emptyset \Rightarrow V \cap A = \emptyset$$

$$V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow V \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

Bu ise, hipotezimizle çelişir. O halde A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Lemma 1.2.5.

(X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve $B^o = \emptyset$ ise, $(A \cup B)^o = \emptyset$ dır.

İspat:

Kabul edelim ki $(A \cup B)^o \neq \emptyset$ olsun. O halde $V \subset A \cup B$ olacak şekilde V açığı vardır.

A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan $(\bar{A})^o = \emptyset$ dır. O halde \bar{A} , V açığını içermez. Çünkü kapsadığı en büyük açık boş cümledir.

$x \in V \cap (\bar{A})^c$ olacak şekilde boştan farklı $V \cap (\bar{A})^c$ açığı mevcuttur.

$$\left[V \cap (\overline{A})^c \right] \cap A = V \cap \left[(\overline{A})^c \cap A \right] = \emptyset$$

$\Rightarrow V \cap (\overline{A})^c \subset A^c$ dir.

$V \cap (\overline{A})^c \subset V \subset A \cup B$ olduğundan $V \cap (\overline{A})^c \subset B$ dir.

Buradan $V \cap (\overline{A})^c \in B^o$ dir ($V \cap (\overline{A})^c \in \tau$ olduğundan).

Bu ise, $B^o = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $(A \cup B)^o = \emptyset$ dur.

Önerme 1.2.6.

- i) Hiçbir yerde yoğun olmayan bir cümlelerin herhangi bir alt cümlesi, hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.
- ii) Sonlu sayıda, hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin birleşimi, hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.
- iii) Sonlu sayıda açık, yoğun cümlelerin kesişimi yoğundur (açıktır).

İspat:

i) A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olsun. Yani ; $(\overline{A})^o = \emptyset$ olsun. $B \subset A$ alalım.

$$\overline{B} \subset \overline{A} \text{ ve } (\overline{B})^o \subset (\overline{A})^o \text{ dir.}$$

A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan $(\overline{A})^o = \emptyset$. O halde $(\overline{B})^o = \emptyset$ dır.

Bu ise, B'nin hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğunu gösterir.

ii) A ve B hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olsunlar. $A \cup B$ nin hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğunu gösterelim (sonlu sayıda olduğundan iki tanesi için göstermek yeterlidir).

İki türlü ispat yapacağız.

İspat 1) $A \cup B$ nin hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğunu göstermeliyiz. 1.2.2.

den $(A \cup B)^d$, X de yoğun ise, $A \cup B$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Yani

göstermek istiyoruz ki; $\left[\overline{(A \cup B)^d} \right] = X$ dir.

$$\begin{aligned}
\left[(A \cup B)^d \right] &= \left[\overline{(A \cup B)^c} \right] = \left[\overline{(\bar{A} \cup \bar{B})^c} \right] \\
&= \left[(\bar{A})^c \cap (\bar{B})^c \right] \\
&= \left[(A^c)^o \cap (B^c)^o \right]
\end{aligned}$$

$(A^c)^o$ ve $(B^c)^o$ açık olduğundan 1.2.2. den ispatımız $(A^c)^o \cap (B^c)^o$ nın yoğun olduğunu göstermeye denktir. O halde (iii) nın ispatını yaparsak bunu da ispatlamış olacağız.

(iii) $U \neq \emptyset$ açık bir cümle ise,

$U \cap (A^c)^o$ açık ve boştan farklıdır. Çünkü $(A^c)^o$ yoğundur ve buradan

$\{ U \cap (A^c)^o \} \cap (B^c)^o$ açık ve boştan farklı olur $\{ (B^c)^o \}$ yoğun olduğundan $\}$.

Kesişimin birleşme özelliğinden

$$\left[U \cap (A^c)^o \right] \cap (B^c)^o = U \cap \left[(A^c)^o \cap (B^c)^o \right] \text{ olur.}$$

Bu kesişim açık ve boştan farklıdır. O halde $(A^c)^o \cap (B^c)^o$ yoğundur. Aynı zamanda $(A^c)^o$ ve $(B^c)^o$ açık olduğundan kesişimleri de açıktır. Yani sonlu sayıdaki açık ve yoğun cümlelerin kesişimi açık ve yoğundur.

İspat 2) A ve B hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olsunlar. Yani $(\bar{A})^o = \emptyset$ ve $(\bar{B})^o = \emptyset$ olsun.

$(\bar{A})^o = \bar{A}$, $\left[(\bar{A})^o \right]^o = (\bar{A})^o = \emptyset$ olur ki buradan \bar{A} hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Benzer şekilde \bar{B} da hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B} = \overline{\overline{A \cup B}}$$

$$\overline{(A \cup B)}^o = \left[\overline{(A)} \cup \overline{(B)} \right]^o = \emptyset \text{ dur.}$$

O halde $A \cup B$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Önerme 1.2.7.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Eğer A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ise, $A \subset F^s$ olacak şekilde bir F kapalı cümlesi mevcuttur.
- ii) Eğer A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ise, $A \subset U^s$ olacak şekilde bir U açık cümlesi mevcuttur.
- iii) Herhangi bir açık U cümlesinin sınırı, U^s , hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.
- iv) Herhangi bir kapalı F cümlesinin sınırı, F^s , hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İspat:

i) A hiçbir yerde yoğun olmayan bir cümle olsun. O halde $\overline{(A)}^o = \emptyset$ dur. 1.1.6. dan

$$X = A^o \cup A^d \cup A^s \text{ idi.}$$

$A \subset \overline{A}$ olduğundan

$$X = \overline{(A)}^o \cup \overline{(A)}^s \cup \overline{(A)}^d = \overline{(A)}^s \cup \overline{(A)}^d$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi X ile A yi kesiştirelim.

$$A = A \cap X = \left(A \cap \overline{(A)}^s \right) \cup \left(A \cap \overline{(A)}^d \right) \text{ dir.}$$

Fakat $\left(A \cap \overline{(A)}^d \right) = \emptyset$. O halde $A = \left(A \cap \overline{(A)}^s \right)$ olur.

Böylece $A \subset \overline{(A)}^s$ olur. \overline{A} kapalı olduğundan $\overline{A} = F$ alırsak $A \subset F^s$ olur ki bu da ispatımızı tamamlar.

ii) ispat (i) ye benzer şekilde yapılabilir.

iii) U açık bir cümle olsun. U^c kapalıdır.

1.1.7. den $U^s = \overline{(U^c)} \cap \overline{U}$ dir.

O halde $U^s \subset \overline{(U^c)}$ dır ve U^c kapalı olduğundan $\overline{(U^c)} = U^c$ olup $U^s \subset U^c$ dır.

Varsayalım ki U^s , boştan farklı bir V açık cümlesini ihtiva etsin. Yani U^s hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olmasın. Fakat U^s ındaki bir noktanın komşuluğu V açığı olduğundan U ile çakışır. Bu ise, U^c nın U^s ni içermesiyle çelişir. O halde U^s nın iç noktası yoktur. Yani $\overline{(U^s)} = \emptyset$ dur.

iv) F kapalı bir cümle olsun. $U^c = F$ alırsak ispat (iii) de ki gibi yapılabilir.

Dikkat edilirse keyfi alt cümlelerin sınırı hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olmak zorunda değildir. Örneğin, A ve A^c yoğun cümleler olsa, A nın sınırı tüm uzaydır.

Önerme 1.2.8.

Y , X topolojik uzayının bir alt uzayı ve $A \subset Y$ olsun. O halde;

- i) Eğer A , Y ye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ise, A , X e göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.
- ii) Eğer Y açık veya yoğun alt uzay ve A , X de ki topolojiye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ise, bu takdirde A , Y deki alt uzay topolojiye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İspat:

i) Önerme 1.2.4 ün (iii) şikkını kullanacağız.

A , Y üzerindeki alt uzay topolojiye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve U , X de boştan farklı, açık bir cümle olsun. Eğer $U \cap Y = \emptyset$ ise, bu takdirde $V = U$ olacak şekilde bir V seçersek, o halde $V \cap A = \emptyset$ olur. Diğer taraftan $U \cap Y \neq \emptyset$ ise, bu takdirde $U \cap Y$, Y üzerindeki topolojiye göre boştan farklı bir açık olur. Buradan $V \cap A = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı ve Y ye göre açık bir V cümlesi vardır. Ancak $V = W \cap Y$ olacak şekilde X de, boştan farklı bir W açığı için;

$$\emptyset = V \cap A = (W \cap Y) \cap A = W \cap (Y \cap A) = W \cap A \text{ dır.}$$

O halde A , X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

ii) Y , X de açık ve $A \subset Y$ olacak şekildeki A cümlesi X deki topolojiye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olsun. U , Y de boştan farklı bir açık ve yine boştan farklı X de açık bir W açığı için $U = W \cap Y$ olsun. $W \cap Y$, X de açık olur. $V \subset W \cap Y$ ve $V \cap A = \emptyset$ olacak şekilde, X de boştan farklı bir V açık cümlesi vardır. Fakat V , Y deki topolojiye göre açık ve $V \subset U$ olduğundan A , Y deki topolojiye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Y , X de yoğun ve U , Y de boştan farklı açık bir cümle olsun. Bu takdirde herhangi bir W açık cümlesi için $U = W \cap Y$ dir. A , X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan, $V \subset W$ ve $V \cap A = \emptyset$ olacak şekilde X de boştan farklı bir V açığı vardır. O halde $V \cap A \cap Y = \emptyset$ ve $Y \cap V \subset Y \cap W = U$ dir.

Fakat $Y \cap V$ boştan farklıdır. Çünkü Y , Y de yoğun ve $Y \cap V$, Y deki topolojiye göre açıktır. O halde A , Y ye göre hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Önerme 1.2.9.

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Bir A cümlesi hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir ancak ve ancak $A \cap (\bar{A})^o = \emptyset$ dur.
- ii) Bir A cümlesi hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir ancak ve ancak $A \cap (\bar{A})^o \neq \emptyset$ dur.

İspat:

i) (\Rightarrow) A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olsun. O halde $(\bar{A})^o = \emptyset$ dur. Buradan $A \cap (\bar{A})^o = A \cap \emptyset = \emptyset$ dir.

(\Leftarrow) $A \cap (\bar{A})^o = \emptyset$ olsun. A yerine \bar{A} yazarsak $\bar{A} \cap (\bar{A})^o = \emptyset$ olur. O halde

$$\left[(\bar{A}) \cap (\bar{A})^o \right]^o = \emptyset^o = \emptyset \text{ dir.}$$

Fakat

$$\emptyset = \left[(\bar{A}) \cap (\bar{A})^o \right]^o = (\bar{A})^o \cap \left[(\bar{A})^o \right]^o$$

$$= (\bar{A})^o \cap (\bar{A})^o = (\bar{A})^o \text{ olur.}$$

O halde $(\bar{A})^o = \emptyset$ olup A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

ii) (\Rightarrow) A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olmasın. O halde $(\bar{A})^o \neq \emptyset$ dur.

Buradan $A \cap (\bar{A})^o \neq \emptyset$ dır.

(\Leftarrow) $A \cap (\bar{A})^o \neq \emptyset$ olsun. $A \subset \bar{A}$ olduğundan $\bar{A} \cap (\bar{A})^o \neq \emptyset$ olur.

$$\left[(\bar{A}) \cap (\bar{A})^o \right]^o \neq \emptyset$$

Fakat

$$\begin{aligned} \emptyset \neq \left[(\bar{A}) \cap (\bar{A})^o \right]^o &= (\bar{A})^o \cap \left[(\bar{A})^o \right]^o \\ &= (\bar{A})^o \cap (\bar{A})^o = (\bar{A})^o \text{ olur.} \end{aligned}$$

O halde $(\bar{A})^o \neq \emptyset$ olup A hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir.

Önerme 1.2.10.

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın hiçbir yerde yoğun olmayan herhangi bir N alt cümlesi, X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İspat:

U, boştan farklı keyfi bir açık olsun. $U \cap A = \emptyset$ ise, $N \subset A$ olduğundan $U \cap N = \emptyset$ olur. Buradan $U \cap N = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı U nun bir alt cümlesini buluruz ki bu U nun kendisidir.

$U \cap A \neq \emptyset$ ise, bu takdirde A nın A da ki topolojiye göre boştan farklı bir alt cümlesidir. Buradan, N, A da hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan,

$[W \cap (U \cap A)] \cap N = \emptyset$ olacak şekilde X de açık ve boştan farklı bir W vardır ki,

$U \cap A$ nın A da açık ve boştan farklı olmak üzere $W \cap (U \cap A)$ açığı mevcuttur.

Dikkat edelim ki; $(W \cap U) \cap A \neq \emptyset$ dır. O halde $W \cap U$ boştan farklı ve açıktır.

Fakat $W \cap U \cap A \cap N = W \cap U \cap N$ dir. O halde $(W \cap U) \cap N = \emptyset$ olur. Böylece U nun boştan farklı bir $W \cap U$ açık alt cümlesini bulmuş oluruz.

Önerme 1.2.11.

(X, τ) topolojik uzay ve herhangi bir $A \subset X$ için $A \setminus (\bar{A})^o$, hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İspat:

1.1.9. (i) den $A^o = \left[\overline{(A)^c} \right]^c \Rightarrow (A^o)^c = \overline{(A^c)}$ ve 1.1.9. (iii) den $\bar{A} = \left[(A^c)^o \right]^c$ dir.

$$\begin{aligned} A \setminus (\bar{A})^o &= A \cap \left[(\bar{A})^o \right]^c \\ &= A \cap \left[\overline{(A)^c} \right]^c \quad \left\{ \text{(i)den } (\bar{A})^o = \left[\overline{(A)^c} \right]^c \Rightarrow \left[(\bar{A})^o \right]^c = \left[\left[\overline{(A)^c} \right]^c \right]^c = \overline{(A)^c} \right\} \\ &= A \cap \left[(A^c)^o \right]^c \quad \left\{ \text{(iii)den } (\bar{A})^c = \left[\left((A^c)^o \right)^c \right]^c = (A^c)^o \right\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan

$$\overline{A \setminus (\bar{A})^o} = \overline{A \cap \left[(A^c)^o \right]^c} \subset \bar{A} \cap \left[(A^c)^o \right]^c \text{ dir.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \left[\overline{A \setminus (\bar{A})^o} \right]^o &\subset \left[\bar{A} \cap \left[(A^c)^o \right]^c \right]^o = (\bar{A})^o \cap \left[\left[(A^c)^o \right]^c \right]^o \\ &= (\bar{A})^o \cap \left[\overline{(A)^c} \right]^o \\ &= (\bar{A})^o \cap \left[\left((\bar{A})^o \right)^c \right]^o \\ &= (\bar{A})^o \cap \left[\overline{(\bar{A})^o} \right]^c \end{aligned}$$

O halde $\left[\overline{A \setminus (\bar{A})^o} \right]^o \subset (\bar{A})^o \cap \left[\overline{(\bar{A})^o} \right]^c = \emptyset$ dur.

Buradan $\left[\overline{A \setminus (\overline{A})^o} \right]^o = \emptyset$ olur ki

bu $A \setminus (\overline{A})^o$ nın A da hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğunu gösterir.

1.3. YETERSİZ VE YETERSİZ OLMAYAN CÜMLELER

Tanım 1.3.1.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A alt cümlesi hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir ailesinin birleşimi ise, A yetersiz (meager) cümle, exhaustible ya da ilk kategori (Cat I) olarak adlandırılır.

A cümlesinin bir x noktasında yetersiz (meager) olması için gerek ve yeter şart $U_x \cap A$, X de yetersiz olacak şekilde x in en az bir tane U_x komşuluğu mevcut olmasıdır.

Yetersiz cümle, X de yoğun olabilir. Örneğin $X = \mathbb{R}$ için \mathbb{Q} yetersiz ve yoğundur. X uzayının tamamı da yetersiz olabilir. Örneğin $X = \mathbb{Z}$ için X in yetersiz olduğu açıktır.

Tanım 1.3.2.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A yetersiz cümle değilse; A yetersiz olmayan (nonmeager) cümle, inexhaustible ya da ikinci kategori (Cat II) olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.3.

(X, τ) topolojik uzayının bir A alt cümlesi için; A artık (comeager) bir cümledir ancak ve ancak $X \setminus A$, X de yetersiz bir cümledir.

Tanım 1.3.4.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Yetersiz cümleler olan $A \subset X$ cümlelerinin koleksiyonuna Cat I ve yetersiz olmayan $A \subset X$ cümlelerin koleksiyonuna da Cat II denir.

Dikkat edilirse X yetersiz olmayan cümle ise, Cat II, tüm artık cümleleri içerir.

Örnek 1.3.5.

a) Eğer \mathbb{Q} rasyonel sayılar cümlesini, tek nokta cümlelerinin sayılabilir birleşimi olarak göz önüne alırsak, \mathbb{R} nın yetersiz bir alt cümlesi olur. Çünkü tek nokta cümleleri kapalı ve içleri boştur. Yani her biri hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerdir.

b) $\{a\}$ cümlesinin hem açık hem kapalı olduğu herhangi bir topolojik uzay, yetersiz olmayan bir cümledir. Çünkü bu uzaydaki, a yı içeren cümlelerden hiçbiri, hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir. Gerçekten de hiçbir yerde yoğun olmayan bir A cümlesi için; $\{a\} \subset A$ olsun. Bu durumda 1.2.6. (i) den, $\{a\}$ cümlesi hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olur. O halde $[\overline{\{a\}}]^o = \emptyset$ dur. Fakat $\overline{\{a\}} = \{a\}$ ve $\{a\}^o = \{a\}$ olduğundan $[\overline{\{a\}}]^o = \{a\}^o = \{a\} = \emptyset$ olur. Bu bir çelişkidir.

c) Tek nokta cümlelerinin kapalı alt cümle oldukları bir topolojik uzayda, bu cümleler her zaman yetersiz olmayan alt cümledirler.

Önerme 1.3.6.

(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Eğer A yetersiz cümle ise, iç noktası olmayan, sayılabilir adetteki kapalı cümlelerin birleşimi A yı içerir.
- ii) Eğer A artık cümle ise, A sayılabilir açık yoğun cümlelerin kesişimini içerir.
- iii) Eğer X yetersiz olmayan cümle ise, X in herhangi bir artık alt cümlesi yetersiz olmayan cümledir.

İspat:

i) Kabul edelim ki A yetersiz cümle olsun. O halde A , sayılabilir adetteki, hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin birleşimidir. Yani; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{B_n})^o = \emptyset$, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ dir. Fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $B_n \subset \overline{B_n}$ olduğundan, $(\overline{B_n})^o = \emptyset$ olan kapalı $\overline{B_n}$ cümleleriyle birlikte

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n}$$

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} \text{ olur.}$$

ii) Kabul edelim ki A artık cümle olsun. O halde A yetersiz bir cümlenin tümleyenidir.

Yani;

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } (\overline{B_n})^o = \emptyset \text{ olmak üzere } A^c = B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \text{ dır.}$$

Buradan

$$A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B_n)^c \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B_n^c)^o$$

olup A artık cümlesi açık ve yoğun olan $(B_n^c)^o$ cümlelerinin sayılabilir adetteki kesişimlerini içerir. Bu da ispatımızı tamamlar.

iii) Kabul edelim ki A, X in yetersiz olan, artık bir alt cümlesi olsun. O halde $X \setminus A$ yetersizdir.

Yetersiz cümlelerin birleşimi yetersiz olduğundan;

$X = A \cup (X \setminus A)$ yetersiz olacaktır ki bu bir çelişkidir.

Tanım 1.3.7.

$Y, (X, \tau)$ topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. A, üzerindeki alt uzay topolojisine göre Y nin bir alt cümlesi olarak düşünüldüğünde, eğer A yetersiz ise, $A \subset Y$ cümlesi Y üzerindeki alt uzay topolojisine göre yetersizdir.

Not 1.3.8.

1.2.8. den eğer $(Y, \tau_Y), (X, \tau)$ topolojik uzayının alt uzayı ve Y nin bir A alt cümlesi, Y üzerindeki alt uzay topolojisine göre yetersiz ise, bu takdirde, A, X e göre yetersizdir. Tersine, $(Y, \tau_Y) (X, \tau)$, topolojik uzayının alt uzayı ve Y nin bir A alt cümlesi X in üzerindeki topolojiye göre yetersiz olmayan cümle ise, A, (Y, τ_Y) alt uzay topolojisine göre yetersiz olmayandır.

Aynı zamanda Y, X de açık veya yoğunsa bu takdirde X üzerindeki topolojiye göre yetersiz olan Y nin her A alt cümlesi, Y ye göre de yetersizdir. Tersine olarak Y, X de

açık veya yoğunsa bu takdirde Y üzerindeki alt uzay topolojisine göre yetersiz olmayan Y nin her A alt cümlesi X e göre yetersiz olmayandır.

Teorem 1.3.9.

Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Yetersiz cümlelerin her alt cümlesi yetersizdir. Yani; $B \in \text{Cat I}$ olacak şekilde $\forall A \subset B$ için $A \in \text{Cat I}$ dir.
- ii) Sayılabilir adetteki yetersiz cümlelerin birleşimi yetersizdir. Yani; $A_n \in \text{Cat I}$ olacak şekilde her $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \text{Cat I}$ dir.
- iii) X in $F^o = \emptyset$ olacak şekildeki her kapalı F alt cümlesi yetersizdir. Yani $F \in \text{Cat I}$ dir.
- iv) Her $f: X \rightarrow X$ homeomorfizmi için $A \subset X$ ve $f(A)$, X de aynı kategoriye sahiptir. Yani;

$A \in \text{Cat I}$ dir ancak ve ancak $f(A) \in \text{Cat I}$ dir.

$A \in \text{Cat II}$ dir ancak ve ancak $f(A) \in \text{Cat II}$ dir.

İspat:

i) Kabul edelim ki $B \in \text{Cat I}$ olsun. O halde hiçbir yerde yoğun olmayan $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ler için

$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ dir. $A \subset B$ alalım. Buradan

$A = A \cap B = A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n)$ olur.

Diğer yandan

$\overline{(A \cap B_n)} \subset \bar{A} \cap \overline{(B_n)} \subset \bar{B}_n$ dir.

Buradan

$\left[\overline{(A \cap B_n)}\right]^o \subset \left[\overline{(A_n)} \cap \overline{(B_n)}\right]^o \subset \left(\bar{B}_n\right)^o = \emptyset$ olur.

Buradan görülüyor ki $\left[\overline{(A \cap B_n)}\right]^o = \emptyset$ dir. O halde $A \cap B_n$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için, A da bu cümlelerin sayılabilir birleşimi olduğundan yetersiz cümledir.

ii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayılabilir adetteki yetersiz cümlelerin bir ailesi olsun. O halde; $\forall A_n$ için $A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n_m}$ olacak şekilde, hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin $\{A_{n_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ dizisi mevcuttur. Buradan

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} A_{n_m}$$

olur ki bu da sayılabilir adetteki hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin birleşiminin, sayılabilir adetteki birleşimidir.

iii) F kapalı bir cümle olsun. O halde $\overline{F} = F$ dir. Hipotezden $(F)^o = (\overline{F})^o = \emptyset$ dur. O halde F hiçbir yerde yoğun olmayan bir cümledir ve açıktır ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için, hiçbir yerde yoğun olmayan $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cümlelerin ailesinin birleşimidir. O halde F yetersiz cümledir.

iv) Kabul edelim ki A yetersiz bir cümle olsun. O halde A, sayılabilir adetteki hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin birleşimidir. Yani, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olmak üzere $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ dır.

$$f(A) = f\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(A_n) \text{ olur.}$$

f homeomorfizm olduğundan

$$f\left(\left(\overline{A_n}\right)^o\right) = \left[f\left(\overline{A_n}\right)\right]^o = \left[\overline{f(A_n)}\right]^o \text{ olur.}$$

Fakat $\forall n \in \mathbb{N}$ için A_n ler hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerdi. O halde,

$$\left[\overline{f(A_n)}\right]^o = f\left(\left(\overline{A_n}\right)^o\right) = f(\emptyset) = \emptyset$$

olur ki bu da $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(A_n)$ lerin hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olduğunu gösterir. O halde $f(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(A_n)$ yetersiz bir cümledir.

Tersine olarak, $f(A)$ yetersiz bir cümle ise, A da yetersiz bir cümledir.

Benzer şekilde $A \in \text{Cat II}$ dir ancak ve ancak $f(A) \in \text{Cat II}$ olmasıdır.

1.3.9. (ii) den kolayca görebiliriz ki yetersiz cümlelerin herhangi bir ailesinin birleşimi de yetersizdir.

Teorem 1.3.10 (Banach Kategori Teoremi).

(X, τ) topolojik uzayında açık, yetersiz cümlelerin herhangi bir ailesinin birleşimi yetersizdir.

İspat: \mathcal{V} , boştan farklı açık, yetersiz cümlelerin bir ailesi olsun. Göstermek istiyoruz ki, $\bigcup \mathcal{V}$ yetersizdir.

S cümlesini, her bir koleksiyonun her bir elemanı \mathcal{V} nun bir elemanı içinde ihtiva edilecek şekilde, boştan farklı açık cümlelerin koleksiyonunun tüm ayrık ikililerinin cümlesi olarak alalım. Zorn lemmasından, S de ki her zincirin S de bir üst sınırı varsa S bir maksimal elemana sahiptir. Bu maksimal eleman, $\nu = \{V_i \mid i \in I\}$ olsun.

Şimdi, hiçbir yerde yoğun olmayan her $N_{i,n}$ cümleleri ve $\forall i \in I$ için $V_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{i,n}$, ve her n için $N_n = \bigcup_{i \in I} N_{i,n}$ olsun. Göstereceğiz ki N_n hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

K, boştan farklı ve açık bir cümle olsun. $i \in I$ için $K \cap V_i \neq \emptyset$ alalım ve indis cümlesine de I_o diyelim.

1.2.4. (iii) den $K \cap V_i$ nin boştan farklı ve açık, $\forall i \in I_o$ için $W_i \cap N_{i,n} = \emptyset$ olacak şekilde bir W_i alt cümlesi vardır.

$W = \bigcup_{i \in I_o} W_i$ alalım. O halde $W \subset K$ ve her n için

$$W \cap \bigcup_{i \in I} N_{i,n} = W \cap N_n = \emptyset \text{ olur.}$$

O halde N_n hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Aynı zamanda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (W \cap N_n) = W \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n = \emptyset \text{ dır.}$$

Fakat

$$\bigcup \nu = \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \text{ dır.}$$

Buradan, N_n ler hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler ve hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir adetteki birleşimleri yetersiz olduğundan $\bigcup \nu$ yetersiz cümle olur. Şimdi göstereceğiz ki, $(\overline{\bigcup \vartheta}) \setminus \bigcup \nu$ X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Kabul edelim ki olmasın.

Bu cümle kapalı cümle olduğundan cümlenin kapanışı kendisine eşit olup;

$$U = \left[\overline{(\overline{\bigcup \vartheta}) \setminus \bigcup \nu} \right]^0 = \left[(\overline{\bigcup \vartheta}) \setminus \bigcup \nu \right]^0 \neq \emptyset \text{ dir.}$$

Fakat $\bigcup \vartheta$ açıktır.

$$\begin{aligned} W \subset \left((\overline{\bigcup \vartheta}) \setminus \bigcup \nu \right) \subset \overline{(\bigcup \vartheta)} &= (\bigcup \vartheta)^o \cup (\bigcup \vartheta)^s \\ &= (\bigcup \vartheta) \cup (\bigcup \vartheta)^s \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan

$$W = \left[W \cap (\bigcup \vartheta) \right] \cup \left[W \cap (\bigcup \vartheta)^s \right] \text{ dir.}$$

İddia ediyoruz ki $W \cap (\bigcup \vartheta) \neq \emptyset$ dir. Aksi takdirde $W \cap (\bigcup \vartheta) = \emptyset$ olursa buradan

$$W = \left[W \cap (\bigcup \vartheta)^s \right] \text{ olur. Bu şekilde } W \text{ hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olur. Çünkü}$$

hiçbir yerde yoğun olmayan $(\bigcup \vartheta)^s$ cümlesinin alt cümlesidir. Diğer taraftan $W \subset \overline{W}$ olduğundan $W = W^o \subset (\overline{W})^o = \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir.

O halde $W \cap (\bigcup \vartheta) \neq \emptyset$ dir.

Şimdi $\vartheta = \{U_a\}_{a \in A}$ olsun. O halde $\bigcup \vartheta = \bigcup_{a \in A} U_a$ ve

$$\emptyset \neq W \cap (\bigcup \vartheta) = \bigcup_{a \in A} (U_a \cap W) \text{ dir.}$$

Bazı $a_o \in A$ için $U_{a_o} \cap W \neq \emptyset$ dur. Fakat $W \cap \bigcup \nu = \emptyset$ ve $U_{a_o} \cap W$, yetersiz U_{a_o} cümlesinin bir alt cümlesi olduğundan $U_{a_o} \cap W$ açık ve yetersizdir. Böylece $(U_{a_o} \cap W) \cap \bigcup \nu = \emptyset$ olup $U_{a_o} \cap W \notin \nu$ dir. Buradan $U_{a_o} \cap W$ yi ν sınıfına ekler ve ikişer ayrıık cümlelerden daha büyük bir cümle elde ederiz ki bunların her biri ϑ de ki

bir elemanın alt cümlesidir. Bu ise, v nin maksimal eleman olmasıyla çelişir. O halde $\overline{(U \vartheta)} \setminus Uv$ hiçbir yerde yoğun olmayan bir cümledir.

$$(U \vartheta) \subset \left[\overline{(U \vartheta)} \setminus Uv \right] \cup (Uv)$$

olup $(U \vartheta)$, yetersiz bir cümlenin alt cümlesi olduğundan yetersizdir.

2. BÖLÜM

BAİRE UZAYLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

2.1. BAİRE UZAYLARI

Teorem 2.1.1.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) X in yoğun, açık alt cümlelerinin sayılabilir adetteki kesişimleri X de yoğundur.
- ii) X in her yetersiz alt cümlesi, X de bir iç noktaya sahip değildir.
- iii) X in boştan farklı, her açık alt cümlesi X de yetersiz olmayan bir cümledir.
- iv) X in artık her alt cümlesi X de yoğundur.
- v) Boştan farklı her U açığı için; her bir F_n kapalı olmak üzere $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ise,

$(F_{n_0})^o \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat:

(i) \Rightarrow (ii) $B \in \text{Cat I}$ olacak şekilde keyfi bir cümle olsun. O halde $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olmak üzere $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ dir. Buradaki herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$(\overline{A_n})^o = \emptyset \text{ ve } \left[(\overline{A_n})^o \right]^c = X \text{ dır.}$$

1.1.9. (i) den $(A^o)^c = (\overline{A^c})$ eşitliğinde A yerine $\overline{A_n}$ yazarsak;

$$\left[(\overline{A_n})^o \right]^c = \left[(\overline{A_n})^c \right] = X$$

olur ki bu eşitlik herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{A_n})^c$ nın X de yoğun olduğunu gösterir.

Hipotezimizden $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{A_n})^c$ yoğun olup buradan $X = \left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{A_n})^c \right]$ dir.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\overline{A_n})^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right)^c$ olduğundan dolayı

$$\emptyset = X^c = \left[\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right)^c \right]^c = \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right]^o \text{ dir.}$$

Her n için $A_n \subset \overline{A_n}$ olduğundan

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \text{ ve } \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^o \subset \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \right)^o = \emptyset \text{ olur.}$$

O halde $\emptyset = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^o = B^o$ dir. Yani yetersiz bir cümle olan B , X de bir iç noktaya sahip değildir.

(ii) \Rightarrow (iii) Kabul edelim ki $U \notin \text{Cat II}$ olacak şekilde boştan farklı bir U açığı mevcut olsun. O halde $U \in \text{Cat I}$ dir. Buradan $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ olacak şekilde hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin bir $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. U açık olduğundan $U^o = U \neq \emptyset$ dir. Bu durumda X in yetersiz bir alt cümlesi olan U nun en az bir iç noktaya sahip olduğunu söylemiş oluruz ki bu kabulümüzle çelişir. O halde boştan farklı her açık, yetersiz olmayan bir cümledir.

(iii) \Rightarrow (iv) Kabul edelim ki $A^c \subset X$, X de artık bir cümle olsun. A^c nın X de yoğun olduğunu göstereceğiz.

A^c artık ise, $(A^c)^c = A$, X de yetersiz bir cümledir. 1.3.9. (i) den $A^o \subset A$ de yetersiz bir cümledir. Fakat A^o açık ve hipotezden $A^o = \emptyset$ dir.

1.1.9. (i) den $A^o = (\overline{A^c})^c = \emptyset$ olup $(\overline{A^c}) = X$ olur ki bu A^c nın X de yoğun olduğunu gösterir.

(iv) \Rightarrow (i) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ yoğun, açık cümlelerin bir dizisi olsun.

$$1.1.9. \text{ (iii) den } \left(\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \right) = \left[\left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c \right)^o \right]^c = \left[\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^o \right]^c \text{ olur.}$$

1.2.4. den, A_n ler yoğun, açık cümleler ise, A_n^c kapalı ve hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerdir. Buradan; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$ yetersiz bir cümledir. O halde yetersiz bir cümlenin alt

cümlesi yetersiz olduğundan $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^o$ yetersizdir.

O halde hipotezden;

$$\left[\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^o \right]^c = \left(\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} \right) \text{ } X \text{ de yoğundur.}$$

(iii) \Rightarrow (v) Boştan farklı her U açığı için her bir F_n kapalı olmak üzere, $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$

olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(F_n)^o = \emptyset$ olsa F_n hiçbir yerde yoğun olmayan bir cümle olur.

Bu durumda da U yetersizdir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde $(F_n)^o \neq \emptyset$ olur.

(v) \Rightarrow (iii) U , boştan farklı ve açık olsun. Eğer U yetersiz ise, her bir F_n kapalı olmak üzere $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ dir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(F_n)^o = \emptyset$ olur ki bu hipotezimizle çelişir. O

halde U yetersiz olmayan bir cümledir.

Tanım 2.1.2.

Teorem 2.1.1. de verilen özelliklerden bir tanesini sağlayan herhangi bir topolojik uzay bir Baire uzaydır. Açık bir şekilde görülüyor ki her bir Baire uzay yetersiz olmayandır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Ters, topolojik vektör uzaylarında doğrudur.

Aksine Örnek:

$\mathbb{Q} \cup (0,1)$ cümlesi ile \mathbb{R} den üretilen standart metrikten oluşan uzayı göz önüne alalım.

\mathbb{R} Baire uzay olduğundan ve $\mathbb{Q} \cup (0,1)$ açık, yetersiz olmayan $(0,1)$ alt uzayı ihtiva

ettiğinden bu metrik uzay yetersiz olmayandır. Aynı zamanda $\{t \in \mathbb{Q} \mid t > 1\}$ olacak şekilde yetersiz, açık cümleleri de ihtiva ettiğinden bu uzay Baire uzay değildir. Dikkat edelim ki aynı zamanda bu bir tam olmayan metriktir (tam olmayan metrik uzay yetersiz olmayan olduğundan). \mathbb{Q} metrik uzayı yetersizdir. Aynı zamanda bir Baire uzay değildir. Çünkü $\{q_n\}$ dizisi \mathbb{Q} nun elemanlarından oluşan bir dizidir. Bu takdirde her bir n için $\mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$, \mathbb{Q} nun bir açık, yoğun alt cümlesidir ki bunun $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{Q} \setminus \{q_n\})$ boştur. Bu ise, 2.1.1. (i) ile çelişir.

Teorem 2.1.3.

X Baire uzayının boştan farklı her açık Y alt uzayı bir Baire uzaydır.

İspat:

2.1.1. (iii) den, aynı zamanda X de de açık olan, boştan farklı ve açık $U \subset Y$, X de yetersiz olmayan bir cümledir ve 1.3.8. den U , Y de yetersiz olmayan bir cümledir. O halde Y bir Baire uzaydır.

Bu teoremden şu sonucu çıkarabiliriz. Baire uzayın her bir x noktası için, x i kapsayan her bir N_x komşuluğu bir Baire uzaydır. Diğer yandan;

Teorem 2.1.4.

Eğer X topolojik uzayının her bir noktası, Baire uzay olan bir komşuluğa sahipse, X Baire uzaydır.

İspat:

A , X de boştan farklı keyfi bir açık cümle olsun. A nın X de yetersiz olmadığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki A yetersiz olsun. Keyfi bir $a \in A$ ve a nın Baire uzay olan bir V komşuluğunu seçelim. $A \cap V$, yetersiz A cümlesinin bir alt cümlesi olduğundan 1.3.9. (i) den X de yetersizdir.

Fakat V açık ve $A \cap V$, V nın açık bir alt cümlesi olduğundan 1.3.7. den $A \cap V$, V ye göre yetersiz olur. Bu ise, V nin Baire uzay olmasıyla çelişir. O halde A yetersiz olmayan bir cümledir.

Teorem 2.1.5.

X Baire uzayında herhangi bir yetersiz cümlelerin tümleyeni bir Baire uzaydır.

İspat:

A , X de yetersiz bir cümle olsun. O halde $Y = A^c$, 2.1.1. (iv) den X de yoğundur. B , Y ye göre yetersiz olsun. O halde 1.3.8. den B , X e göre yetersiz, 1.3.9. (ii) den de $A \cup B$, X e göre yetersizdir. X de

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = Y \cap B^c = Y \setminus B \text{ dir.}$$

Bu aynı zamanda Y de B^c demektir ki, 2.1.1. (iv) den B^c , X de yoğundur ve böylece Y de yoğundur. 2.1.1. (iv) den de Y bir Baire uzaydır.

Teorem 2.1.6.

Baire uzay olan, yoğun bir alt uzayı içeren her uzay bir Baire uzaydır.

İspat:

Kabul edelim ki yoğun, Baire alt uzay olan Y yi içeren X uzayı Baire uzay olmasın. O halde X in boştan farklı, açık, yetersiz bir U alt cümlesi vardır. Buradan, $U \cap Y$, X in boştan farklı, açık, yetersiz bir alt cümlesi olur ki 1.3.8. den $U \cap Y$, Y de yetersizdir.

Bu ise, Y nin Baire uzay olmasıyla çelişir. O halde X bir Baire uzaydır.

Teorem 2.1.7.

X topolojik uzayında, Baire uzaylar olan açık alt uzayların herhangi bir ailesinin birleşimi bir Baire uzaydır.

İspat:

ϑ , X in açık, Baire alt uzaylarının bir ailesi olsun. Kabul edelim ki $\bigcup_{W \in \vartheta} W$ Baire uzay

olmasın. O halde, $\bigcup_{W \in \vartheta} W$ ye göre açık, yetersiz bir V alt cümlesi vardır.

$U \in \vartheta$ olsun. $U \cap V$, $\bigcup_{W \in \vartheta} W$ ye göre açık, yetersiz bir alt cümle olur. Aynı zamanda

$U \cap V$, 1.3.8. den U ye göre açık, yetersiz cümledir. Bu ise, 2.1.1. (iii) den U nun bir Baire uzay olmasıyla çelişir.

Teorem 2.1.8.

Bir topolojik uzayda Baire uzay olan alt uzayların sonlu sayıdaki birleşimi bir Baire uzaydır.

İspat:

Sonlu adetteki birleşim olduğundan iki Baire uzayın birleşiminin Baire uzay olduğunu göstermek yeterlidir.

Y ve Z uzayları birer Baire uzay ve $X = Y \cup Z$ olsun. $X \setminus \bar{Y}$ ve $X \setminus \bar{Z}$ sırasıyla Z ve Y de açıktır ve 2.1.3. den her ikisi de birer Baire uzaydır.

2.1.7. den

$$V = (X \setminus \bar{Y}) \cup (X \setminus \bar{Z}) = X \setminus (\bar{Y} \cap \bar{Z})$$

olarak tanımlanan V , X in açık bir Baire alt uzayıdır.

$X \setminus \bar{V}$, Baire uzay olan \bar{Y} nin açık bir alt cümlesi olduğundan, $X \setminus \bar{V}$, X in açık Baire alt uzayı olur. Böylece $V \cup (X \setminus \bar{V})$, X in yoğun Baire alt uzayıdır. 2.1.6. dan, yoğun Baire alt uzay içeren uzay, Baire uzay olduğundan X bir Baire uzaydır.

Teorem 2.1.9.

Herhangi bir X topolojik uzayı, açık (kapalı) Baire uzayı ve kapalı (açık) yetersiz cümlelerin birleşimi olarak yazılabilir.

İspat:

C , X in tüm açık, yetersiz alt cümlelerinin birleşimi olsun. 1.3.10. Banach Kategori Teoreminden C , X de yetersiz ve açıktır. O halde $C^c = B$ kapalıdır. B nin bir Baire uzay olduğunu göstereceğiz.

U , B nin boştan farklı, açık bir alt cümlesi ve X de açık ve boştan farklı bir V cümlesi için, $U = B \cap V$ olsun. Göstermeliyiz ki U , B de yetersiz olmayan bir cümledir. Farz edelim ki U , B de yetersiz olsun. O halde $U = B \cap V$, X e göre yetersizdir. Burada V yetersiz olsa $V \subset C$ ve $B \cap V = \emptyset$ olurdu. Bu ise, bir çelişkidir. Çünkü $\emptyset \neq U = B \cap V$ dir. O halde $V \not\subset C$ dir. Fakat V ayrık birleşim olarak yazılabildiğinden,

$$V = (C \cap V) \cup (B \cap V) \text{ dir.}$$

$(B \cap V)$, X de yetersiz ve $(C \cap V)$, X de açık olduğundan $(C \cap V)$ de X de yetersizdir. Buradan V , X de yetersizdir. Bu ise, bir çelişkidir. O halde U , B de yetersiz olmayan bir cümle ve B bir Baire uzaydır.

Şimdi

$$X = C \cup C^s \cup C^d = \overline{C} \cup C^d \text{ olur.}$$

Fakat C açık olduğundan C^s , X de hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve $\overline{C} = C \cup C^s$ dir. C yetersiz ve C^s hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve 1.3.9. (iii) den yetersizdir.

Yetersiz cümlelerin birleşimi yetersiz olduğundan \overline{C} da X de yetersiz bir cümledir.

$C^d = (C^c)^o = B^o$ dır. Göstermek istiyoruz ki B^o bir Baire uzaydır. B bir Baire uzay idi.

2.1.3 ten Baire uzayın boştan farklı, açık her alt uzayı bir Baire uzay olduğundan B^o bir Baire uzaydır.

O halde, X , kapalı Baire B cümlesi ve açık, yetersiz C cümlesinin birleşimi olarak ya

da açık, Baire B^o cümlesi ve kapalı, yetersiz \overline{C} cümlesinin birleşimi olarak yazılabilir.

2.2. BAİRE UZAYLARININ G_δ CÜMLELER KARAKTERİ

Tanım 2.2.1.

Bir G_δ cümlesi açık cümlelerin bir dizisinin sayılabilir kesişimi olan bir cümledir.

Tanım 2.2.2.

Bir F_σ cümlesi kapalı cümlelerin bir dizisinin sayılabilir birleşimi olan bir cümledir.

Dikkat edelim ki bir G_δ cümlelerin tümleyeni bir F_σ cümlesidir ve terside doğrudur.

Teorem 2.2.3.

Bir X topolojik uzayı bir Baire uzaydır ancak ve ancak X de ki her yetersiz G_δ cümlesi, hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

İspat:

(\Rightarrow) X bir Baire uzay ve A , X de yetersiz bir G_δ cümlesi olsun. O halde A^c bir F_σ cümlesidir. Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için F_n ler kapalı olmak üzere $A^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ dir.

Şu halde

$\overline{A} \cap A^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\overline{A} \cap F_n)$ de aynı zamanda bir F_σ -cümlesidir.

$$(\overline{A} \cap A^c)^o = (\overline{A})^o \cap (A^c)^o = (\overline{A})^o \cap (\overline{A})^c$$

dir ve $A^o \subset A$ olduğundan $A^o \cap A^c = \emptyset$ olup buradan

$$(\overline{A} \cap A^c)^o = (\overline{A})^o \cap (\overline{A})^c = \emptyset \text{ olur.}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{A} \cap F_n) \subset (\overline{A} \cap A^c)$ olduğundan $(\overline{A} \cap F_n)^o \subset (\overline{A} \cap A^c)^o = \emptyset$ elde

ederiz. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(\overline{A} \cap F_n)$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Buradan

$(\overline{A} \cap A^c)$ yetersiz cümledir. Fakat iki yetersiz cümlelerin birleşimi yetersiz olduğundan

$\overline{A} = A \cup (\overline{A} \cap A^c)$ olup \overline{A} yetersizdir. X bir Baire uzay olduğundan 2.1.1. (ii) den

$(\overline{A})^o = \emptyset$ dur. Yani A hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

(\Leftarrow) Şimdi göstermemiz gerekir ki bir X uzayında her yetersiz G_δ cümlesi hiçbir yerde

yoğun olmayan cümle iken X bir Baire uzaydır. Kabul edelim ki X bir Baire uzay

olmasın. O halde 2.1.1. (iii) den X in yetersiz olan boştan farklı bir U açık cümlesi

vardır. Fakat özel olarak boştan farklı her açık cümle bir G_δ cümlesidir. O halde,

hipotezimizden, U hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olacağından $(\overline{U})^o = \emptyset$ olur.

Fakat $U \neq \emptyset$ ve $U \subset \overline{U}$ dir. Buradan $\emptyset = (\overline{U})^o \supset U^o = U \neq \emptyset$ olup bu bir çelişkidir. O

halde boştan farklı hiçbir U açık cümlesi yetersiz olamaz. O halde X bir Baire uzaydır.

Sonuç 2.2.4.

\mathbb{Q} , \mathbb{R} de bir G_δ cümlesi değildir.

İspat:

Dikkat edilirse \mathbb{Q} , her biri hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olan tek nokta alt cümleleri (tek nokta cümleleri kapalı ve içi boş) nın sayılabilir birleşimi olduğundan yetersizdir. O halde eğer \mathbb{Q} , G_δ cümlesi olsaydı 2.2.3. den \mathbb{R} Baire uzayına göre \mathbb{Q} hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olurdu. Fakat $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ve $(\overline{\mathbb{Q}})^o = \mathbb{R}^o = \mathbb{R} \neq \emptyset$ olup bu bir çelişkidir.

Teorem 2.2.5.

Y , X Baire uzayının bir alt uzayı olsun. Y yetersizdir ancak ve ancak $X \setminus Y$, X in yoğun bir G_δ - alt cümlesini içerir.

İspat:

(\Rightarrow) Kabul edelim ki Y yetersiz olsun. Yani, $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi $Y = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ olacak şekilde,

hiçbir yerde yoğun olmayan alt cümlelerin bir dizisi olsun. X bir Baire uzay olduğundan

$$\bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus \overline{U_n}) \subset \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus U_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty U_n = X \setminus Y$$

2.1.1. (i) den $\bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus \overline{U_n})$, X in yoğun bir G_δ - alt cümlesi olur ki $X \setminus Y$ nin

içerisindedir. Çünkü 1.2.4. den $X \setminus \overline{U_n}$, X de açık ve yoğundur.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki $U = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$, $X \setminus Y$ nin içerdiği X in yoğun G_δ - alt cümlesi olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $X \setminus \overline{U} = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^\infty U_n \right)} \subset \overline{U_n}$ dir. Buradan her bir U_n açık ve yoğundur. O

halde $\forall n$ için 1.2.4. den $X \setminus U_n$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

Şimdi,

$X \setminus U = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^\infty U_n \right) = \bigcup_{n=1}^\infty X \setminus U_n$ olup X de yetersizdir ve Y yi içerir. O halde 1.3.9. den

Y yetersizdir.

Sonuç 2.2.6.

Bir Baire uzayın her yoğun G_δ alt uzayı bir Baire uzaydır.

İspat:

U , X Baire uzayının yoğun bir G_δ alt uzayı olsun. 2.2.5. den $X \setminus U$, X de yetersizdir.

O halde 2.1.5. den U bir Baire uzaydır.

Şimdi yukarıdaki teorem 2.2.5. in yetersiz olmayan uzaylar sınıfına genelleştirilmesini ispat edeceğiz.

Teorem 2.2.7.

Yetersiz olmayan bir uzayın her yoğun G_δ - alt cümlesi yetersiz olmayandır.

İspat:

X yetersiz olmayan bir uzay ve $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, X in keyfi, yoğun G_δ - alt cümlesi olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için, $X = \overline{U} = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right)} \subset \overline{U_n}$ dir. Buradan her bir U_n açık ve yoğundur.

Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için 1.2.4. den $X \setminus U_n$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir. Şimdi

$X \setminus U = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus U_n$ olup X de yetersizdir. $X = U \cup (X \setminus U)$ olduğundan,

U yetersiz olsa X yetersiz olacaktır. Bu ise, hipotezimizle çelişir. O halde U yetersiz olmayan bir cümledir.

2.3. YARI SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE BAİRE UZAYLARI**Tanım 2.3.1.**

X topolojik uzayı üzerinde reel değerli bir f fonksiyonu verilsin. Eğer,

$\forall x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ için, $f(x) > r$ ($f(x) < r$) iken,

$\forall x' \in U$ için $f(x') > r$ ($f(x') < r$) olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu

mevcut ise, f fonksiyonuna alt (üst) yarı süreklî fonksiyon denir.

Yani; $\{x \in X \mid f(x) > r\}$ cümlesinin X de açık olmasıdır. Eşdeğer olarak,

$\forall \varepsilon > 0$ için $x' \in U_x$ iken

$f(x') > f(x) - \varepsilon$ ($f(x') < f(x) + \varepsilon$) olacak şekilde $\exists U_x$ komşuluğu

varsa f fonksiyonuna $x \in X$ noktasında alt (üst) yarı sürekliliği denir.

Önerme 2.3.2.

X uzayı üzerinde, f reel değerli, yarı sürekliliği bir fonksiyon ve D , f in sürekliliği olmadığı X in tüm noktalarının cümlesi olsun. O halde D yetersizdir.

İspat:

f , alt yarı sürekliliği fonksiyon olsun. $\forall r \in \mathbb{Q}$ için

$G_r = \{x \in X \mid f(x) > r\}$ cümlesini tanımlayalım.

$\forall r \in \mathbb{Q}$ için G_r açık ve $\overline{G_r} \setminus G_r = G_r^s$ kapalı ve hiçbir yerde yoğun olmayan cümledir.

D nin yetersiz olduğunu ispatlamak için 1.3.6. (i) kullanmak yeterli olacaktır. Bunun için

$$D \subset \bigcup \{ (G_r)^s \mid r \in \mathbb{Q} \}$$

olduğunu gösterelim.

$x \in D$ olsun ve f fonksiyonu x noktasında sürekliliği olmasın. O halde her U_x komşuluğu için $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki;

$$f(x') \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

olacak şekilde en az bir tane $x' \in U_x$ mevcuttur. Fakat f , x noktasında alt yarı sürekliliği olduğundan

$\forall \varepsilon' > 0$ için $x' \in U_x'$ iken $f(x') > f(x) - \varepsilon$ olacak şekilde U_x' mevcuttur.

$\varepsilon = \varepsilon'$ seçelim. O halde herhangi bir U_x için $f(x') \geq f(x) + \varepsilon$ olacak şekilde $x' \in U_x$ vardır.

Özellikle herhangi bir U_x için, $U_x \cap U_x'$ alırsak;

$f(x') \geq f(x) + \varepsilon$ olacak şekilde $x' \in (U_x \cap U_x')$ vardır. Buradan $\forall r \in (f(x), f(x) + \varepsilon)$

için $f(x') > r$ olacak şekilde $x' \in (U_x \cap U_x')$ vardır. O halde $U_x \cap G_r$ boştan farklıdır.

Şimdi; x , G_r^s 'nin bir iç noktası değildir. $f(x) < r$ dir. Bu yüzden $x \in G_r^s$ dir.

O halde

$$x \in \bigcup \{ (G_r)^s \mid r \in \mathbb{Q} \}$$

ve böylece $D \subset \bigcup \{ (G_r)^s \mid r \in \mathbb{Q} \}$ olur ki bu D 'nin yetersiz olduğunu gösterir.

Önerme 2.3.3.

Eğer X uzayı, üzerinde yetersiz ise, X in herhangi bir noktasında sürekli olmayan, alttan (üstten) sınırlı yarı sürekli f fonksiyonu mevcuttur.

İspat:

X yetersiz olduğundan; $n \in \mathbb{N}$ için $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ olacak şekilde, kapalı, hiçbir yerde yoğun olmayan F_n cümleleri mevcuttur.

$\forall x \in X$ için $f(x) = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid x \in F_n \}$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi, X in boştan farklı her U açık alt cümlesi için U yu örten sonlu sayıda F_n cümleleri olmasın.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için F_n hiçbir yerde yoğun olmayan cümle ve hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sonlu birleşimi hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan F_n , açık bir alt cümle içermez. O halde F_n , U üzerinde sınırlı değildir.

$x \in X$ olsun. O halde $x \in F_n$ ve $f(x) = n$ dir. Buradan her U_x için, $f(x') > n+M$ olacak şekilde $x' \in U_x$ vardır. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alırsak; $f(x') \notin \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \right)$ olur ki buradan f sürekli değildir.

$g = 1 - \frac{1}{f}$ olarak tanımlayalım. f sınırlı olmadığından $\frac{1}{f}$ sınırlı ve $1 - \frac{1}{f}$ de sınırlıdır.

O halde g fonksiyonu X de sınırlıdır. Aynı zamanda f sürekli olmadığından $\frac{1}{f}$

sürekli değil ve $1 - \frac{1}{f}$ sürekli değildir. O halde g , X in hiçbir noktasında sürekli

değildir.

g nin alt yarı sürekli olduğunu göstermeliyiz. Bunun için f in alt yarı sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü $f^{-1} = \frac{1}{f}$ ters fonksiyonu yarı sürekli fonksiyondur ve 1 sabit fonksiyonu yarı süreklidir. O halde $g = 1 - \frac{1}{f}$ yarı sürekli olacaktır.

Şimdi; $\forall k = 1, 2, \dots$ için

$$\bigcup_{n=1}^k F_n = \{ x \in X \mid f(x) \leq k \}$$

olduğundan bu cümle kapalı bir cümledir. Buradan $\{ x \in X \mid f(x) > k \}$ açıktır ve 2.3.1. den f alt yarı sürekli fonksiyondur.

2.3.2. ve 2.3.3. önermelerinin bir sonucu olarak aşağıdaki ifadeyi verebiliriz.

Sonuç 2.3.4.

Bir X uzayı yetersiz olmayandır ancak ve ancak X üzerindeki her yarı sürekli fonksiyon, X in en az bir noktasında süreklidir.

İspat:

(\Rightarrow) X yetersiz olmayan olsun. 2.3.2. den X üzerindeki her yarı sürekli f fonksiyonu için, f in sürekli olmadığı tüm noktaların cümlesi yetersizdir. Buradan, eğer f , X in hiçbir noktasında sürekli değilse X yetersiz olacaktır. Bu ise, kabulümüzle çeliştiğinden f en az bir noktada sürekli olmak zorundadır.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki X yetersiz olsun. 2.3.3. den X üzerinde, hiçbir noktada sürekli olmayan, sınırlı, yarı sürekli bir fonksiyon mevcuttur. Bu ise, hipotezimizle çelişir. O halde X yetersiz olmayandır.

Teorem 2.3.5.

X uzayı bir Baire uzaydır ancak ve ancak her yarı sürekli (sınırlı) f fonksiyonu için f in X üzerinde sürekli olduğu tüm noktalar cümlesi X de yoğundur.

İspat:

(\Rightarrow) Kabul edelim ki X bir Baire uzay olsun. O halde 2.3.4. den her yarı süreklî fonksiyon en az bir noktada süreklîdir. Böylece herhangi bir yarı süreklî fonksiyonun süreklî olduğu noktalar cümlesi boştan farklıdır.

2.3.2. den herhangi bir yarı süreklî fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar cümlesi yetersizdir ve X Baire uzay olduğundan 2.1.1. (iv) den bu yetersiz cümlemin tümleyeni (fonksiyonun süreklî olduğu noktalar cümlesi) X de yoğunudur.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki X bir Baire uzay olmasın. O halde 2.1.1. den X in yetersiz, boştan farklı bir U açık alt cümlesi vardır. 2.3.3. den bu U cümlesi üzerinde, hiçbir noktada süreklî olmayan sınırlı, yarı süreklî bir f fonksiyonu vardır.

U açık olduğundan U da kısıtlaması f olacak şekilde, X üzerinde sınırlı, yarı süreklî bir g fonksiyonu mevcuttur.

Şimdi; X üzerindeki g fonksiyonu, X in boştan farklı açık alt cümlesinin hiçbir noktasında süreklî değildir. Bu ise, g nin süreklî olduğu noktalar cümlesinin X de yoğun olmasıyla çelişir. Bu yüzden X bir Baire uzay olmak zorundadır.

Teorem 2.3.6

X uzayı bir Baire uzaydır ancak ve ancak $\forall x \in X$ için $\{ f(x) \mid f \in C \}$ üstten sınırlı olacak şekilde, X üzerinde, alt yarı süreklî fonksiyonların bir ailesi C olmak üzere, X in boştan farklı her U açık alt cümlesi için $y \in V$ ve $f \in C$ iken, $f(y) \leq k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı ve U nun boştan farklı bir V açık alt cümlesi vardır.

İspat:

(\Rightarrow) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \{ x \in U \mid f(x) \leq n, \forall f \in C \}$ olsun. $M_x, \{ f(x) \mid f \in C \}$ için bir sınır ise, herhangi bir $n \geq M_x$ için $F_n \neq \emptyset$ dur. Şimdi; her F_n, U nun kapalı bir alt cümlesidir. X uzayı Baire uzay olduğundan U yetersiz olamaz. Buradan bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\overline{F_k} = F_k$ ve $(F_k)^o \neq \emptyset$ olur ki $(F_k)^o = V$ alırsak U nun boştan farklı V açık alt cümlesinin varlığını ispat etmiş oluruz.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki X bir Baire uzay olmasın. O halde yetersiz olan bir U açığı mevcuttur. Bu U açığını, X in hiçbir yerde yoğun olmayan alt cümlelerinin sayılabilir

birleşimi olarak tanımlayalım. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$ olsun.

$\forall x \in U$ için $f(x) = \inf \{ n \in \mathbb{N} \mid x \in W_n \}$ olarak tanımlansın. O halde, U nun boştan farklı, açık V alt cümlesi için, her bir W_n hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan, $\sup \{ f(x) \mid x \in V \} = \infty$ olacak şekilde, U üzerinde tanımlı f fonksiyonu alt yarı sürekli fonksiyondur. Çünkü U , sonlu sayıda W_n ler ile örtülemeyen açık bir cümledir. U , X de açık olduğundan, f , X üzerinde alt yarı sürekli fonksiyonlara genişletilebilir.

Her bir Baire uzay yetersiz olmayan olduğundan 2.3.6. ya benzer sonuç yetersiz olmayan uzaylar için de verilebilir.

2.4. BAİRE UZAYLARININ SÜZGEÇ KARAKTERİ

Tanım 2.4.1.

X boş olmayan bir cümle ve $P(X) = \{ A \mid A \subset X \}$, X in kuvvet cümlesini gösterson.

\mathcal{F} , $P(X)$ in bir alt sınıfı aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa X üzerinde bir (öz) süzgeçtir.

$f1) \emptyset \in \mathcal{F}$ dır.

$f2) \forall A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$ dır.

$f3) \forall A \in \mathcal{F}$ ve $A \subseteq B$ ise, $B \in \mathcal{F}$ dır.

($f1$) ve ($f2$) aksiyomundan \mathcal{F} süzgecine ait sonlu sayıda kümelerin kesişiminin boş olamayacağı ve ($f3$) aksiyomundan \mathcal{F} süzgecine ait herhangi sayıda kümelerin birleşiminin \mathcal{F} süzgecine ait olduğu anlaşılır. Ayrıca ($f1$) aksiyomundan $P(X)$

kümesinin kendisi bir süzgeç değildir. (f3) aksiyomu ise, süzgeçlerin artan bir yapıda olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.2.

$X \neq \emptyset$, $\beta \subseteq P(X)$ olsun. β aşağıdaki şartları sağlıyor ise, β ya X üzerinde bir süzgeç bazı denir.

- i) $\emptyset \notin \beta$
- ii) $\forall B_1, B_2 \in \beta$ için $\exists B_3 \in \beta$ vardır öyleki $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ dir.

X üzerindeki \mathcal{F} süzgecinin β alt cümlesi, \mathcal{F} nın bir bazıdır ancak ve ancak \mathcal{F} in her elemanı β nın bir elemanını içerir.

Tanım 2.4.3.

$\mathcal{F}, (X, \tau)$ topolojik uzayında bir süzgeç ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $x \in A$ noktası, \mathcal{F} süzgecinin her elemanının kapanışına ait ise, \mathcal{F} süzgecinin yığılma noktasıdır. Yani;

N_x , x in keyfi bir komşuluğu ve \mathcal{F} bir süzgeç olmak üzere,

x , \mathcal{F} de bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak $\forall U \in N_x$ ve $\forall B \in \mathcal{F}$ için $U \cap B \neq \emptyset$ dur.

Tanım 2.4.4.

Bir X topolojik uzayının bir örtüsüne, her $x \in X$ noktası, bu noktayı örten elemanların sadece sonlu sayıdakilerine aitse sonlu nokta olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.5.

Bir X uzayının alt cümlelerinin ailesine, eğer $\forall x \in X$ noktası, X uzayının alt cümlelerinin ailesinin sonlu sayıda elemanlarıyla kesişen bir komşuluğa sahipse yerel sonludur denir.

Teorem 2.4.6.

X topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) X bir Baire uzaydır.
- ii) X in her sonlu nokta açık örtüsü, noktaların yoğun cümlesinde yerel sonludur.
- iii) X in her sayılabilir sonlu nokta açık örtüsü, noktaların yoğun bir cümlesinde yerel sonludur.

İspat:

(i) \Rightarrow (ii) Kabul edelim ki X bir Baire uzay ve X in sonlu nokta açık örtüsü \mathcal{V} olsun.

$\forall x \in X$ için $f(x)$ fonksiyonunu x i içeren, \mathcal{V} nin bütün elemanlarını kapsayan cümlelerin kardinali olarak alalım.

$$\{ x \in X \mid f(x) > a \} = \bigcup \{ \bigcap \{ C \in \mathcal{V} \mid x \in C \} \mid f(x) > a \}$$

cümlesinde $\forall a \in \mathbb{R}$ için f alt yarı sürekli fonksiyondur (2.3.1.).

p , f in sürekli olduğu bir nokta olsun. O halde p yi içeren bir V açığı vardır öyle ki

f in sürekliliğinden $\left(f(p) - \frac{1}{2}, f(p) + \frac{1}{2} \right)$ aralığı $f(V)$ yi içerir. Böylece

$U = \{ \bigcap \{ C \in \mathcal{V} \mid p \in C \} \}$ x in p yi içeren açık bir alt cümlesi olur.

Şimdi $U \subset V$ olduğundan, p yi içermeyen \mathcal{V} nin herhangi bir elemanı U ile kesişemez. Bu yüzden U sadece p yi içeren \mathcal{V} nin elemanlarıyla kesişir (ki bunlar \mathcal{V} sonlu nokta örtüsü olduğundan sonlu adettedir). O halde \mathcal{V} p noktasında yerel sonludur.

Fakat 2.3.5. den f in sürekli olduğu noktalar cümlesi X de yoğundur. O halde \mathcal{V} noktaların yoğun bir cümlesinde yerel sonludur.

(ii) \Rightarrow (iii) X in herhangi bir sayılabilir örtüsü, X in bir örtüsü olduğundan (ii) \Rightarrow (iii) olduğu açıktır.

(iii) \Rightarrow (i) Kabul edelim ki X Baire uzay olmasın. O halde 2.1.1. den X in yetersiz olan bir U açığı mevcuttur. Bu U açığını hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir birleşimi olarak tanımlayalım. $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n = U \setminus \bigcup_{m=1}^n \overline{A_m}$ olsun.

Tüm A_n ler hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olduğundan, U yu içeren X in herhangi bir açık alt cümlesi, her bir U_n ile kesişmek zorundadır. Bu yüzden

$\{X, U_1, U_2, \dots\}$ X in sayılabilir sonlu nokta açık örtüsüdür ki bu $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ in herhangi

bir noktasında, tanım 2.4.5. den yerel sonlu değildir. Buradan kabulümüzle çelişiriz. O halde X bir Baire uzaydır.

Bu son teorem yetersiz olmayan cümleler için verilen aşağıdaki teoreme denktir.

Teorem 2.4.7.

Bir X uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) X yetersiz olmayandır.
- ii) X in her sonlu nokta açık örtüsü, herhangi bir yerde yerel sonludur.
- iii) X in her sayılabilir adette sonlu nokta açık örtüsü, herhangi bir yerde yerel sonludur.

Tanım 2.4.8.

Aşağıdaki şartı sağlayan bir (X, τ) topolojik uzayına regüler uzay denir.

K kapalı bir cümle ve $x \notin K$ ise, $K \subseteq G$ ve $x \in H$ olacak şekilde G ve H ayrık açık cümleleri vardır.

Teorem 2.4.9.

Eğer X uzayı regüler uzay ise, aşağıda verilen ifadeler denktir.

- i) X bir Baire uzaydır.
- ii) X üzerindeki her sonlu nokta, açık β süzgeç bazı, $\bigcup \beta$ nin noktalarının yoğun cümlesinde yerel sonludur.
- iii) X üzerindeki her sayılabilir, sonlu nokta, regüler açık β süzgeç bazı, $\bigcup \beta$ nin noktalarının yoğun cümlesinde yerel sonludur.
- iv) $\bigcup \beta$ nin hiçbir noktasında yerel sonlu olmayan, her sayılabilir, sonlu nokta, regüler açık β süzgeç bazı bir yığılma noktasına sahiptir.

İspat:

(i) \Rightarrow (ii) Bir Baire uzayın açık alt uzayı bir Baire uzay olduğundan, Baire uzay üzerinde açık β süzgeç bazı için $\cup \beta$ bir Baire uzaydır. Bu yüzden 2.4.6. dan $\cup \beta$ Baire uzay ise, noktaların yoğun cümlesinde yerel sonludur.

(ii) \Rightarrow (iii) 2.4.6. dan açıktır.

(iii) \Rightarrow (iv) açıktır.

(iv) \Rightarrow (i) Kabul edelim ki X bir Baire uzay olmasın. O halde 2.1.1 den X in boştan farklı bir U açığı yetersizdir. Bu yüzden U lightly kompakt değildir. Yani; X in açık cümlelerinin her yerel sonlu koleksiyonu sonlu değildir.

$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayılabilir sonsuz, U nun boştan farklı alt cümlelerinin yerel sonlu koleksiyonu olsun. O halde her bir V_n , X de yetersizdir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{V_{n,m}\}$, $V_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{n,m}$ ve $V_{n,0} = \emptyset$ olacak şekilde X in hiçbir yerde yoğun olmayan alt cümlelerinin bir dizisi olsun.

Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $W_{n,1} = V_n$ olacak şekilde X in boştan farklı alt cümlelerinin bir

$\{W_{n,m}\}$ dizisi vardır ve her m için $(\overline{W_{n,m-1}}) \subset W_{n,m}$ dir.

$\forall n, m$ için

$$U_{n,m} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} W_{k,n} \right) - \left(\bigcup_{r=0}^m \bigcup_{k=0}^r (\overline{V_{n-mrk}}) \right)$$

tanımlayalım. $F = \{U_{n,m} \mid n \geq 1, m \geq 0\}$ olsun.

O halde F , $\cup F$ in hiçbir noktasında yerel sonlu olmayan ve yığılma noktası olmayan; sayılabilir, sonlu nokta, regüler açık süzgeç bazıdır. Bu ise, hipotezimizle çelişir.

3. BÖLÜM

KATEGORİ TEOREMLERİ

3.1. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖN HAZIRLIK

Bu bölümde, bölümün daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan, analizin farklı dallarındaki sonuçlar ve tanımlar ifade edildi.

Tanım 3.1.1.

X bir cümle, K bir cisim olsun.

$+$: $X \times X \rightarrow X$ \cdot : $K \times X \rightarrow X$

iki fonksiyon olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(X, K, +, \cdot)$ dördlüsüne bir vektör uzayı ya da lineer uzay denir.

$$L1) \forall x, y, z \in X \text{ için } (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L2) \forall x, y \in X \text{ için } x + y = y + x$$

$$L3) \exists 0 \in X, \forall x \in X \text{ için } 0 + x = x + 0 = x$$

$$L4) \forall x \in X, \exists -x \in X \text{ için } x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$L5) \forall a \in K, \forall x, y \in X \text{ için } a(x + y) = ax + ay$$

$$L6) \forall a, b \in K, \forall x \in X \text{ için } (a + b)x = ax + bx$$

$$L7) \forall a, b \in K, \forall x \in X \text{ için } a(bx) = (ab)x$$

$$L8) \forall x \in X \text{ için } 1 \cdot x = x$$

Fonksiyonel analizde, cisim genelde \mathbb{R} ve \mathbb{C} dir. Eğer cisim \mathbb{R} ise, X vektör uzayı, reel vektör uzayı, eğer cisim \mathbb{C} ise, X vektör uzayı, kompleks vektör uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.2.

A, \mathbb{R} cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her bir $x \in A$ elemanını bir $\|x\| \in \mathbb{R}$ elemanına eşleyen ve aşağıdaki şartları sağlayan

$$\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonuna bir norm ve $(A, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

N1: $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ dır ancak ve ancak $x = \theta$ dır.

N2: $x, y \in A$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

N3: $a \in \mathbb{R}$ ve $x \in A$ için $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$

Burada x, y birer vektör ve a bir skalerdir.

Tanım 3.1.3.

X bir vektör uzayı ve d bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir psedometrik ve (X, d) ikilisine psedometrik vektör uzayı denir.

i) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, x) = 0$

ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

X vektör uzayı üzerindeki psedometrik şartlarıyla birlikte

iv) $d(x, y) = 0$ iken $x = y$

şartını da sağlıyorsa metrik vektör uzayı olarak adlandırılır.

Psedometrik (metrik) sabittir (invarianttır) ancak ve ancak $\forall x, y, z$ için

$d(x + z, y + z) = d(x, y)$ dir.

x ve y arasındaki uzaklık $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde olduğunda her normlu uzay bir metrik uzay olarak düşünülebilir.

Tanım 3.1.4.

N bir normlu lineer uzay olsun. Eğer N , norm metriğine göre tam ise, N ye bir Banach uzayı denir. Yani bir Banach uzayı tam ve normlu uzaydır.

Tanım 3.1.5.

X bir vektör uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun. $\forall x, y \in Y$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$(\alpha.x + (1-\alpha).y) \in Y$ oluyorsa Y ye konvektir denir.

$V \subseteq X$, $\forall x \in V$ ve $\alpha \in K$ için $|\alpha| \leq 1$ iken $\alpha.x \in V$ oluyorsa V ye dengelidir denir.

Eğer $Y \subseteq X$ dengeli ve konveks ise, Y mutlak konveks ya da disk olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.6.

(X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Eğer Y cümlesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa Y ye bir kompakt cümle denir.

A , X in açık alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ deki her bir G açık cümlesi A nın bir alt sınıfı üzerinden birleşim olarak yazılabiliyorsa yani, A nın bir A_i alt sınıfı için

$G = \bigcup_{A_i \in A_i \in A} A_i$ ise, A sınıfına τ için bir baz denir.

$x \in X$ ve x in açık komşuluklarının sınıfı B_x olsun. x in her G açık komşuluğu için

$B \subseteq G$ olacak şekilde $B \in B_x$ varsa B_x sınıfına x noktasında bir yerel baz denir.

Tanım 3.1.7.

Vektör uzayı aksiyomları τ da sürekli olacak şekilde τ , X vektör uzayı üzerinde bir topoloji olsun. O halde τ , X üzerinde bir vektör topoloji ve (X, τ) topolojik vektör uzayıdır.

Vektör uzayı üzerindeki toplama işleminin sürekli olması demek

$$f : X \times X \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

Şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun sürekli olması demektir (burada $X \times X$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisidir).

Eğer $x, y \in X$ ve U , $x + y$ nın bir komşuluğu ise, $U_1 + U_2 \subset U$ olacak şekilde x in U_1, U_2 komşulukları mevcuttur. y için de benzer durum geçerlidir.

Benzer şekilde skaler çarpımın sürekli olması demek

$$g : K \times X \rightarrow X$$

$$(\alpha, x) \rightarrow \alpha.x$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonunun sürekli olması demektir.

Eğer $x \in X$, $\alpha, \beta \in K$ ve $\alpha.x$ in bir U komşuluğu varsa bu takdirde x in herhangi bir V komşuluğu ve $r > 0$ için $|\beta - \alpha| < r$ iken $\beta V \subset U$ elde edilir.

Not 3.1.8.

$\forall a \in X$ için

$T_a(x) = a + x$, $x \in X$, X in X üzerinde bir homeomorfizmdir.

Sıfırdan farklı her α skaleri için

$S_\alpha(x) = \alpha.x$, $x \in X$, X in X üzerinde bir homeomorfizmdir. X in her Y vektör alt uzayı, alt uzay topolojisi ile birlikte bir topolojik vektör uzayıdır. Buradan Y ye X topolojik vektör uzayının bir alt uzayı denir. Yani topolojik vektör uzayı olma özelliği kalıtsaldır.

Tanım 3.1.9.

X bir topolojik vektör uzayı olsun. X topolojik vektör uzayının bir Y cümlesine, her $t > s$ için $Y \subset tV$ olacak şekildeki 0 ' ın her V komşuluğuna bir $s > 0$ sayısı karşılık geliyorsa sınırlıdır denir.

Tüm $|a| \leq r$ için $a.x \in Y$ olacak şekildeki $\forall x \in X$ için r pozitif sayısı mevcutsa

$Y \subset X$ alt cümlesine emici (absorbent) denir.

X in bir S alt cümlesi simetriktir ancak ve ancak $S = -S$ dir.

(X, τ) bir topolojik uzay, $Y \subset X \times X$ bir denklik bağıntısı ve

$X/Y = \{ x + y \mid x \in X \}$ bölüm cümlesi olsun. Genelde $p: X \rightarrow X/Y$ bölüm

fonksiyonuna göre X/Y üzerindeki bitiş topolojisi bir bölüm topolojisi ve bu topoloji ile birlikte X/Y bölüm uzayı olarak bilinir. Burada p fonksiyonu sürekli ve örtendir.

Not 3.1.10.

(X, τ) bir topolojik uzay, Y boştan farklı bir cümle ve $f: X \rightarrow Y$ örten bir fonksiyon olmak üzere bir $G \subseteq Y$ alt cümlesi bölüm topolojisine göre açıktır ancak ve ancak

$f^{-1}(G)$ cümlesi X de açıktır. Buna denk olarak Y de bir K cümlesi bölüm topolojisine göre kapalıdır ancak ve ancak $f^{-1}(K)$ cümlesi X de kapalıdır.

Önerme 3.1.11.

(X, τ) topolojik vektör uzayı ve $Y \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) 0 , her dengeli veya emici (absorbent) cümleye aittir.
- ii) 0 in tüm komşulukları dengeli ve emicidir.
- iii) Y sınırlıdır ancak ve ancak Y , 0 in her komşuluğu tarafından absorbe edilir.
- iv) Y konveks ise, Y° de konvektir.
- v) Y dengeli ise, Y° de dengelidir.
- vi) \overline{X} bir topolojik vektör uzayıdır.
- vii) Bölüm fonksiyonu açık, lineer, sürekli ve X/Y bölüm uzayı Hausdorff uzayıdır ancak ve ancak Y kapalıdır.

Her bir τ topolojik vektör uzayı herhangi bir yerel baz tarafından oluşturulabilir. Bu yüzden her zaman 0 noktasında bir yerel bazı göz önüne alacağız. Bir topolojik vektör uzayının bir yerel bazı, 0 in bir komşuluğu β nın bir elemanını ihtiva edecek şekilde 0 in komşuluklarının bir β koleksiyonudur.

Şimdi X i herhangi bir vektör uzayı ve tüm emici olan disklerin süzgeç bazını da β ile gösterelim. Bu takdirde β yerel konveks topoloji ([35], sayfa 78) üretir ki buna en ince yerel konveks topoloji denir ve τ_F ile gösterilir.

Tanım 3.1.12.

X ve Y birer topolojik vektör uzayı olsunlar. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu lineerdir ancak ve ancak tüm $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $f(\alpha.x + \beta.y) = \alpha.f(x) + \beta.f(y)$ dir.

X den Y ye tüm lineer fonksiyonlar cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir.

Eğer Y de ki 0 in her V komşuluğuna X de 0 in bir U komşuluğu mevcut ve karşılık gelecek ki bu da tüm $f \in F$ için $f(U) \subset V$ şartını sağlıyorsa boştan farklı $F \subset L(X, Y)$ alt cümlesine denk süreklidir denir.

Teorem 3.1.13.

$F \subset L(X, Y)$ olsun. O halde

- i) Eğer F denk sürekli ise, F , sınırlı her cümle üzerinde düzgün sınırlıdır ki bu da sınırlı cümleler üzerinde düzgün yakınsaklığın topolojisine göre sınırlı olan F e denktir.
- ii) F , $A \subset X$ alt cümlesi üzerinde noktasal sınırlıdır ancak ve ancak $\forall x \in X$ ve $\forall f \in F$ için $f(x)$ in sınırlı olmasıdır. $f(x)$ in sınırlı olması için gerek ve yeter şart Y de 0 in her V komşuluğu için $\bigcap \{ f(x) \mid f \in F \}$ cümlesinin A nın her noktasını absorbe etmesidir.
- iii) Bir A cümlesi üzerinde f düzgün süreklidir ancak ve ancak Y de 0 in her V komşuluğu için $\bigcap_{f \in F} f^{-1}(V)$ cümlesi A yı absorbe etmesidir.
- iv) İki vektör arasında tanımlı bir lineer fonksiyon süreklidir ancak ve ancak fonksiyon sınırlıdır.

Tanım 3.1.14.

(X, τ) topolojik vektör uzayı olsun. Bu takdirde

- i) Eğer elemanları konveks olan bir β yerel bazı varsa X yerel konvektir.
- ii) Eğer 0 in sınırlı bir komşuluğu varsa X yerel sınırlıdır.
- iii) Eğer 0 in kapanışı kompakt olan bir komşuluğu varsa X yerel kompakttır.
- iv) Eğer τ , d metriği ile bağdaşabilen ise, X metriklenebilirdir.
- v) Eğer τ ile bağdaşabilen bir norm tarafından üretilen metrik olacak şekilde X üzerinde bir norm varsa X normlanabilirdir.
- vi) Eğer X in her kapalı ve sınırlı alt cümlesi kompakt ise, X Heine-Borel özelliğine sahiptir.
- vii) Eğer X üzerinde tam, sabit bir metrik tarafından üretilmiş bir τ topolojisi varsa X bir F-uzayıdır.
- viii) Eğer X uzayı bir yerel konveks F-uzayı ise, X bir Frechet uzayıdır.

Önerme 3.1.15.

(X, τ) topolojik vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i) Eğer X yerel sınırlı ise, X sayılabilir yerel bir baza sahiptir.

- ii) X metriklenelirdir ancak ve ancak X sayılabilir yerel bir baza sahiptir.
- iii) X psedometriklenelirdir ancak ve ancak X sayılabilir yerel bir baza sahiptir.
- iv) Eğer X psedometriklenelir ise, 0 in her bir diski dengeli ve d sabit olacak şekilde X için bir d psedometriği vardır ki bunun X üzerindeki topolojisi d sabit ve 0 in her bir diski dengeli olacak şekilde bir topolojidir.
- v) X normlanelirdir ancak ve ancak X yerel konveks ve yerel sınırlıdır.
- vi) 0 in her U komşuluğu $V + V \subset U$ olacak şekilde 0 in bir V komşuluğunu içerir.
- vii) 0 in her komşuluğu, 0 in dengeli bir komşuluğunu içerir.
- viii) 0 in her konveks komşuluğu, 0 in dengeli, konveks bir komşuluğunu içerir.
- ix) X in her sonlu boyutlu alt uzayı kapalıdır.
- x) X regüler topolojik uzaydır (hatta X in Hausdorff uzay olduğunu varsayalım). Yani $\overline{U} \subset V$ olacak şekilde 0 in herhangi bir V komşuluğu için 0 in bir U komşuluğu vardır.
- xi) X bir Hausdorff uzaydır ancak ve ancak 0 in tüm komşuluklarının kesişimi $\{0\}$ dir.
- xii) X bir Hausdorff uzaydır ancak ve ancak X bir T_0 uzaydır ancak ve ancak $\forall x \in X$ için $\{x\}$ cümleleri kapalıdır.
- xiii) 0 in her komşuluğu, 0 in simetrik bir V komşuluğunu içerir.

3.2. BAİRE UZAY OLAN TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARI

Önerme 3.2.1.

X topolojik vektör uzayının bir Y alt uzayı ya yoğun ya da hiçbir yerde yoğun olmayandır. Sonuç olarak yetersiz olmayan bir X uzayının her alt uzayı X de yoğundur.

İspat:

Kabul edelim ki Y hiçbir yerde yoğun olmayan alt uzay olmasın. Yani $(\overline{Y})^o \neq \emptyset$ olsun.

O halde 0 , \overline{Y} nin bir iç noktasıdır. Bu iç noktanın, $\emptyset \neq U \subset \overline{Y} \subset X$ olacak şekilde bir

U açık komşuluğu mevcuttur. Buradan \bar{Y} , 0 ın bir komşuluğudur ve bu yüzden emicidir.

Aynı zamanda 3.1.11. (vi) den \bar{Y} bir vektör uzaydır. O halde $\emptyset \neq U \subset \bar{Y} \subset X$ olacak şekilde 0 ın bir U açık komşuluğu vardır. Böylece bir $x \in U$ için $U - x$ 0 ın bir komşuluğu ve $U - x \subset \bar{Y}$ ve buradan $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(U - x) \subset \bar{Y}$ dir.

Fakat $U - x$ emici olduğundan $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n(U - x) = X$ dir. O halde $X \subset \bar{Y}$ dir. O halde Y , X de yoğundur.

Teorem 3.2.2.

X topolojik vektör uzayı bir Baire uzaydır ancak ve ancak X yetersiz olmayandır.

İspat:

(\Rightarrow) 1.1. bölümde, bir topolojik uzayda, bir Baire uzayın yetersiz olmayan olduğunu göstermiştik. Her topolojik vektör uzayı bir topolojik uzay olduğundan, X topolojik vektör uzayı bir Baire uzaydır.

(\Leftarrow) Kabul edelim X bir Baire uzay olmasın. O halde X , yetersiz, açık U alt cümlesini içermelidir. U yu 0 ın bir komşuluğu farz edelim. 3.1.11. (ii) den U emicidir ve aynı zamanda $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ de yetersizdir. Bu ise, X in yetersiz olmayan olmasıyla çelişir. O halde X bir Baire uzaydır.

Lemma 3.2.3.

A, B cümleleri X topolojik uzayının birer alt cümlesi olsunlar. Eğer B kapalı ve $A^o = \emptyset$ ise, $(A \cup B)^o = B^o$ dir.

İspat:

Kabul edelim ki $x \in (A \cup B)^o$ ve $G \subset (A \cup B)$ olacak şekilde G , x in bir açık komşuluğu olsun. $G \subset (A \cup B)$ olduğundan $G \cap B^c \subset A$ dir. Bu $G \cap B^c = \emptyset$ olmasını

sağlar. Yani $G \subset B$ dir. O halde $x \in B^o$ dir. O halde $(A \cup B)^o \subset B^o$ dir. Herhangi A ve B cümleleri için her zaman $B^o \subset (A \cup B)^o$ olduğundan $(A \cup B)^o = B^o$ dir.

Teorem 3.2.4.

Bir X topolojik vektör uzayı bir Baire uzaydır ancak ve ancak $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ olacak şekilde X in hiçbir yerde yoğun olmayan U alt cümleleri yoktur.

İspat:

(\Rightarrow) Eğer X bir Baire uzaysa, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ olacak şekilde hiçbir yerde yoğun olmayan U cümlesi mevcut değildir. Mevcut olsaydı X yetersiz olurdu.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki X bir Baire uzay olmasın. Bu durumda 3.2.2. den X yetersizdir. O halde $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U$ olacak şekilde $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin bir dizisi mevcuttur. Tüm U_n ler boş olamayacağından X üzerindeki topoloji indiskre olamaz.

3.1.15. (viii) den W , 0 in dengeli komşuluğu olsun ve $V + V \subset W$ olacak şekilde, 0 in kapalı dengeli V komşuluğunu seçelim.

Dikkat edelim ki $V = V \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V \cap U_n)$ dir.

$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n^{-1}(V \cap U_n))$ olarak tanımlayalım.

Teoremi ispatlamak için, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ olacak şekildeki U cümlesinin hiçbir yerde yoğun olmadığını göstermeliyiz.

Dikkat edilirse herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $(V \cap U_n) \subset nU$ dir.

Bu nedenle herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için;

$$kV = k \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V \cap U_n) \right] \subset k \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU \right] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU \text{ dir.}$$

V emici olduğundan yani $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} kV = X$ olduğundan $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$ dir.

Kabul edelim ki U hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olmasın. O halde bir

$y \in (\bar{U})^o$ vardır. $N \subset \bar{U}$ olacak şekilde N , y nin açık bir komşuluğu olsun. Dikkat edelim

ki herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$\bar{U} = \overline{\left(\bigcup_{n < k} n^{-1}(V \cap U_n) \right)} \cup \overline{\left(\bigcup_{n \geq k} n^{-1}(V \cap U_n) \right)}$$
 dir.

Şimdi $\bigcup_{n < k} n^{-1}(V \cap U_n)$ hiçbir yerde yoğun olmayandır (boştan farklı cisim elemanı ve

homeomorfizmlerin çarpımı hiçbir yerde yoğun olmayan cümleleri koruduğundan).

O halde,

$$\left(\bigcup_{n < k} n^{-1}(V \cap U_n) \right)^o = \emptyset$$

dir. Böylece Lemma 3.2.3. den herhangi $k \in \mathbb{N}$ için $N \subset \bar{U} \subset \overline{\left(\bigcup_{n \geq k} n^{-1}(V \cap U_n) \right)}$ dir.

V dengeli olduğundan tüm k ler için

$$\bigcup_{n \geq k} n^{-1}(V \cap U_n) \subset k^{-1}V$$

dir. $x \notin W$ ve $y \pm dx \in N$ olacak şekilde $d > 0$ seçelim. Buradan tüm k ler için

$$2dx = (y + dx) - (y - dx) \in N - N \subset k^{-1}V + k^{-1}V \subset k^{-1}W$$
 dir.

k yı $k^{-1} \leq 2d$ olacak şekilde seçersek W dengeli olduğundan

$$x = \left(\frac{1}{2}kd \right) (2kdx) \in W$$

olur. Buradan $2dx \notin k^{-1}W$ olur ki bu bir çelişkidir.

Teorem 3.2.5.

X bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer X bir Baire uzay ve alt uzayların sayılabilir $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesi tarafından örtülüyorsa U_p bir Baire uzaydır ve X de yoğun olacak şekilde belli bir $p \in \mathbb{N}$ mevcuttur.

İspat:

X bir Baire uzay olduğundan U_p , X de yetersiz olmayan olacak şekilde p pozitif tamsayısı mevcuttur. Buradan U_p hiçbir yerde yoğun olmayan cümle değildir ve kendi içinde yetersiz olmayandır. O halde 3.2.1. ve 3.2.2. den U_p , X de yoğundur ve bir Baire uzaydır.

Teorem 3.2.6 (Baire Teoremi).

Eğer (X, d) psedometrik uzay ve A , X in içi boştan farklı tam alt cümlesi ise, A , X de yetersiz olmayandır.

İspat:

Kabul edelim ki A yetersiz olsun. O halde A , hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin sayılabilir adetteki birleşimidir. F_n ler hiçbir yerde yoğun olmayan cümleler olmak üzere $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ dir. $n = 1$ için F_1 hiçbir yerde yoğun olmayan cümle olduğundan $(\overline{F_1})^c$ X de yoğundur. A° açık cümlesiyle kesiştirirsek; $A^\circ \cap (\overline{F_1})^c = A^\circ \setminus (\overline{F_1})$ açık cümlesi boştan farklı olur. O halde $V_1 \subset (A^\circ \setminus \overline{F_1})$ olacak şekilde en fazla 1 yarıçaplı V_1 kapalı diski vardır. Buradan $V_n \subset ((V_{n-1})^\circ \setminus \overline{F_n})$ olacak şekilde yarıçapı en fazla 2^{-n} olan kapalı bir V_n diski seçilebilir. A tam olduğundan, V_n cümlelerinin kesişimi boştan farklıdır ve bu kesişimin bir noktası, A nın bir elemanıdır ki bu da hiçbir F_n e ait değildir. Bu ise, $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ olmasıyla çelişir. O halde A , X de yetersiz olmayandır.

3.3. BAİRE KATEGORİ TEOREMİ

Tanım 3.3.1.

Bir X uzayı, eğer boştan farklı her kapalı alt uzayı kendi içinde yetersiz olmayan ise, tümüyle yetersiz olmayan (totally nonmeager or Baire space in the strong sense) olarak adlandırılır.

Önerme 3.3.2.

Bir X uzayı tümüyle yetersiz olmayandır ancak ve ancak boştan farklı her kapalı alt uzayı bir Baire uzaydır.

İspat:

(\Rightarrow) Kabul edelim ki X uzayı tümüyle yetersiz olmayan olsun. O halde X in boştan farklı her kapalı alt uzayı yetersiz olmayandır. F , X in boştan farklı kapalı bir alt uzayı ve U , F in boştan farklı açık alt uzayı olsun. O halde F in boştan farklı her kapalı alt cümlesi X de kapalı olduğundan F tümüyle yetersiz olmayandır. Bu yüzden $(\overline{U_F})$ kendi içinde yetersiz olmayandır. Şimdi U , $(\overline{U_F})$ nın yoğun açık alt cümlesidir ve 2.2.5. dan yetersiz olmayan bir uzayın her yoğun alt cümlesi yetersiz olmayan olduğundan U yetersiz olmayandır. U açığı keyfi, boştan farklı, yetersiz olmayan olduğundan F bir Baire uzaydır.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki X in boştan farklı her kapalı alt uzayı bir Baire uzay olsun. Her Baire uzay yetersiz olmayan olduğundan X in boştan farklı her kapalı alt uzayı yetersiz olmayan olur. O halde 3.3.1. den X tümüyle yetersiz olmayandır.

Önerme 3.3.3.

Tümüyle yetersiz olmayan bir uzayın her G_δ alt uzayı tümüyle yetersiz olmayandır.

İspat:

X tümüyle yetersiz olmayan bir uzay, G boştan farklı X in bir G_δ alt uzayı ve F , G nin boştan farklı kapalı bir alt cümlesi olsun. Bu durumda $F \subset G$ ve $F \subset \overline{F}$

olduğundan $F = G \cap \overline{F}$ dır. Buradan F, \overline{F} Baire uzayının yoğun bir G_δ alt cümlesi olur. O halde 2.2.6. dan F bir Baire uzaydır ve 3.3.2. den G tümüyle yetersiz olmayandır.

Yerel kompakt Hausdorff uzaylar ve tam metriklenabilir uzaylar topolojik uzayların iki önemli sınıfıdır ki bunlar Baire uzaylar içinde sık kullanılırlar. Şimdi bunlar için iki farklı ispat vereceğiz. Tam metrik uzayların Baire uzaylar olduğunu söyleyen klasik teorem Baire Kategori Teoremi olarak bilinir.

Tanım 3.3.4.

Bir (X, τ) topolojik uzayı yerel kompakttır ancak ve ancak x in her U_x açık komşuluğu için $x \in (V_x)^o$ ve $V_x \subset U_x$ olacak şekilde V_x kompakt cümlesi mevcuttur. Böylesi V_x cümleleri, x in kompakt komşulukları olarak adlandırılır.

Temel gerçek şudur ki bir X Hausdorff uzayı yerel kompakttır ancak ve ancak X in her noktası bir kompakt komşuluğa sahiptir ([34], sayfa 130).

Teorem 3.3.5 (Baire Kategori Teoremi).

Eğer X

- i) bir tam metrik uzay ya da
- ii) bir yerel kompakt Hausdorff uzaysa bu takdirde X bir Baire uzaydır.
- iii) Ayrıca X tümüyle yetersiz olmayandır.

İspat:

Her bir durum için göstereceğiz ki X in yoğun, açık cümlelerinin herhangi sayılabilir kesişimi X de yoğundur ve bu yüzden de X bir Baire uzay olacaktır.

Bunun için $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, X in yoğun, açık alt cümlelerinin bir dizisi ve U, X in boştan farklı açık alt cümlesi olsun. $U_1 = U$ olacak şekilde, boştan farklı açık cümlelerin bir $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini tümevarımsal olarak tanımlayabiliriz ve herhangi bir U_n için D_n ler yoğun olduğundan (herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için)

$(\overline{U_{n-1}}) \subset U_n \subset D_n$ olacak şekilde U_{n-1} cümlesi mevcuttur.

Buradan

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset \left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n} \right) \subset \left(U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \right)$$

dir. $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right)$ nın yoğun olduğunu göstermek için, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{U_n})$ nın boş olmadığını

göstermek yeterlidir. Bunun için X de ki keyfi bir U açığı $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right)$ ile kesişir ki bu da

$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right)$ X de yoğun demektir.

Şimdi bunu iki ayrı durum olarak inceleyelim.

i) U_n ni $\forall n \in \mathbb{N}$ için yarıçapı $\frac{1}{n}$ den küçük olan açık disk olarak göz önünde

bulundurabiliriz. O halde, açıktır ki, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_{n-1} \subset U_n$ ile birlikte $(\overline{U_n})$, bir tam metrik uzayın kapalı, boştan farklı alt cümleleridir ve aynı zamanda $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(U_n) = 0$

dır. Buradan $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right)$ bir tek nokta içerir. O halde boştan farklıdır.

ii) Bu durumda $(\overline{U_n})$ kompakt olacak şekilde U_n ni göz önüne alacağız. O halde $n \in \mathbb{N}$ için, $(\overline{U_n})$ boştan farklı kapalı cümlelerin artan bir dizisini oluşturur ve bunların kesişimi boştan farklıdır.

Dikkat edelim ki X in boştan farklı, kapalı her alt uzayı relatif topolojide bir tam metrik uzay (sırasıyla yerel, kompakt Hausdorff uzay) dır. Buradan X bir Baire uzaydır. O halde X tümüyle yetersiz olmayandır.

Teorem 3.3.6.

Eğer aşağıdaki özelliklere sahip $A, B, C, D \in \tau^*$ olacak şekildeki X in boştan farklı τ^* in cümleleri arasında ' $<$ ' bağıntısı mevcutsa (X, τ) topolojik uzayı bir Baire uzaydır.

- i) Eğer $A < B$ ise, $A \subset B$ dir.
- ii) Boştan farklı her B açık cümlesi için $A < B$ olacak şekilde $A \in \tau^*$ mevcuttur.
- iii) Eğer $A \subset B < C \subset D$ ise, $A < D$ dır ve
- iv) eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n > A_{n-1}$ ise, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ dir.

İspat:

Kabul edelim ki X bir Baire uzay olmasın. O halde X boştan farklı, yetersiz, açık bir G cümlesini içerir. Bu taktirde birleşimi G yi içeren hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin bir $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi mevcuttur.

Şimdi $U_n > U_{n-1}$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n \cap (D_1, \dots, D_n) = \emptyset$ olacak şekilde açık cümlelerin bir $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini oluşturmak istiyoruz.

$(D_1)^o = \emptyset$ olduğundan açıktır ki D_1 , G yi içeremez. O halde $G \cap (D_1)^c$, D_1 ile kesişmeyen G nin boştan farklı bir alt cümlesidir. (ii) den $U_1 < G \cap (D_1)^c$ olacak şekilde boştan farklı U_1 açığı mevcuttur. Şimdi (iii) den $U_1 < G$ dir. U_1 boştan farklı bir açık cümle olduğundan $D_1 \cup D_2$, U_1 açığını ihtiva etmez. $U_2 < U_1$ ve $U_2 \cap (D_1 \cup D_2) = \emptyset$ olacak şekilde boştan farklı U_2 açık cümlesi olmak zorundadır.

O halde tümevarımdan istediğimiz $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini oluşturabiliriz. Açıktır ki,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) = \emptyset \text{ dir.}$$

Bu durumda (iv) den $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \neq \emptyset$ iken

$$\emptyset = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \right) \supset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \text{ dir.}$$

Bu ise, bir çelişkidir.

Şimdi bu teoremi kullanarak yerel kompakt Hausdorff uzayların ve tam psedometrik uzayların 3.3.6. nın şartlarını sağladığını ispat edebiliriz ve buradan da bunların Baire uzaylar olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 3.3.7.

Bir tam psedometrik (X, d) uzayı bir Baire uzaydır.

İspat:

X uzayının herhangi bir E alt cümlesi için $d(E) = \min(1, \sup\{d(x, y) \mid x, y \in E\})$ olarak tanımlayalım. Dikkat edelim ki eğer $E \subset F$ ise, $d(E) \leq d(F)$ anlamında d monotondur.

Şimdi boştan farklı herhangi bir A, B açık cümleleri için $\bar{A} \subset B$ ve $d(A) \leq \frac{1}{2}d(B)$ olacak şekilde $A < B$ olarak tanımlayalım.

İspatı tamamlamak için yukarıdaki gibi tanımlanmış olan ‘<’ bağıntısının 3.3.6. de ki şartları sağladığını gösterelim.

- i) $A \subset \bar{A} \subset B$ olduğundan $A < B$ dir.
- ii) G , boştan farklı bir açık, $x \in G$ olsun ve $B(x, y) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ olacak şekilde $r > 0$ seçelim. Eğer $d = \sup\{d(y, z) \mid y, z \in B(x, r)\}$ olarak alırsak $U = B\left(x, \frac{d}{4}\right)$ yuvarını seçebiliriz. U , $d(U) \leq \frac{1}{2}d(G)$ ve $\bar{U} \subset G$ şartını sağlayacaktır ve buradan $U < G$ dir.
- iii) Eğer $A \subset B \subset C \subset D$ ise, $\bar{A} \subset \bar{B} \subset C \subset D$ dir. Aynı zamanda $d(A) < d(B) < \frac{1}{2}d(C) < \frac{1}{2}d(D)$ dir. Buradan da $A < D$ dir.
- iv) A_n , ‘<’ bağıntısına göre azalan her biri boştan farklı açık cümlelerin bir dizisi olsun. Boştan farklı her E cümlesi için $d(E) \leq 1$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(A_n) \leq 2^{-n-1}$ dir. Her A_n den bir a_n noktası seçerek bir Cauchy dizisi elde ederiz. X bir tam uzay olduğundan $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X de bir a

noktasına yakınsayacaktır. A_n cümlelerinin dizisi azalıyor olduğundan tüm $n \geq k$ ler için $a_n \in A_k$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \in \overline{A_n}$ dir. Buradan $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ dir. O halde $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ dir.

Teorem 3.3.8.

Her yerel kompakt Hausdorff X uzayı bir Baire uzaydır.

İspat:

Şimdi, X de boştan farklı herhangi iki açık A, B cümleleri için, A relatif kompakt (yani \overline{A} kompakt) ve $\overline{A} \subset B$ olacak şekilde $A < B$ bağıntısını tanımlayalım. İspatı tamamlamak için yukarıdaki gibi tanımlanmış olan ' $<$ ' bağıntısının 3.3.6. deki şartları sağladığını gösterelim.

- i) Eğer $A < B$ ise, o halde $A \subset \overline{A} \subset B$ olup $A \subset B$ dir.
- ii) X deki herhangi bir B açığı için X de $\overline{A} \subset B$ ve \overline{A} kompakt olacak şekilde boştan farklı A açığı vardır. O halde tanımdan $A < B$ dir.
- iii) Eğer $A \subset B < C \subset D$ ise, bu takdirde A relatif kompakt ve $\overline{A} \subset \overline{B} \subset C \subset D$ dir. Buradan da $A < D$ dir.
- iv) $\{A_n\}$, azalan ' $<$ ' bağıntısı ile birlikte boştan farklı açık cümlelerin bir dizisi

olsun. $\overline{A_2}$ kompakt uzayında $\{A_n \mid n \geq 2\}$ cümleleri bir süzgeç bazı oluşturur. Buradan bir a yığılma noktasına sahiptir ve

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_{n-1}} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ dir. O halde } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset \text{ dir.}$$

3.4. KAPALI GRAFİK TEOREMİ VE AÇIK DÖNÜŞÜM TEOREMİ

Tanım 3.4.1.

X ve Y birer cümle ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. O halde f in grafiği, $X \times Y$ kartezyen çarpımında tüm $(x, f(x))$ noktalarının cümlesidir.

Önerme 3.4.2.

X bir topolojik uzay ve Y Hausdorff uzay olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm ise, f in grafiği kapalıdır.

İspat:

$X \times Y$ de $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ f in grafiği ve H , $X \times Y$ de G nın tümleyeni olsun. H da bir (x_o, y_o) noktasını alalım. Buradan $y_o \neq f(x_o)$ dir. O halde Y bir Hausdorff uzay olduğundan Y de $f(x_o)$ ve y_o in sırasıyla V ve W ayrık açık komşulukları vardır. f sürekli olduğundan $f(U) \subset W$ olacak şekilde x_o in bir U komşuluğu vardır. O halde (x_o, y_o) in H da $U \times V$ komşuluğu vardır. Buradan H açık ve G onun tümleyeni olduğundan kapalıdır.

Teorem 3.4.3 (Kapalı Grafik Teoremi).

Bir X topolojik vektör uzayından tam metriklenebilir bir Y topolojik vektör uzayına tanımlı lineer T dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise, sürekli dir.

- i) T nın grafiği $X \times Y$ de kapalıdır ve
- ii) Y de, 0 in her V komşuluğu için $T^{-1}(V)$ nın kapanışı X de 0 in bir komşuluğudur.

Eğer X yetersiz olmayan ise, (ii) şartı otomatik olarak sağlanır.

İspat:

3.1.15. (iv) den Y topolojisini üreten bir d sabit (invariant) psedometriği vardır.

Bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{y \in Y \mid d(0, y) \leq \varepsilon\}$ tanımlayalım. Şimdi $x \in T^{-1}(\overline{A(\varepsilon)})$ olsun.

a) $y_o = 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, y_{n-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ ve

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in T^{-1}\left(\overline{y_n + A\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)}\right)$

olacak şekilde Y de tümevarımsal olarak bir $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini oluşturalım.

Açıktır ki $y_o = 0$ ise, (a) ve (b) sağlanır. Kabul edelim ki y_o, y_1, \dots, y_n ler seçilmiş olsun. O halde (b) ve (ii) den

$$x \in T^{-1} \left(\overline{y_n + A \left(\frac{\varepsilon}{2^n} \right)} \right) + T^{-1} \left(\overline{A \left(\frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right)} \right) \text{ dir.}$$

Buradan $T(x') \in y_n + A \left(\frac{\varepsilon}{2^n} \right)$ olacak şekilde $x' \in X$ vardır ve

$$x \in x' + T^{-1} \left(\overline{A \left(\frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right)} \right) \subset T^{-1} \left(\overline{T(x') + A \left(\frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right)} \right) \text{ dir.}$$

$y_{n-1} = T(x')$ olsun. (a) ve (b) şartları sağlansın. $n \in \mathbb{N}$ için $W_n = y_n + A \left(\frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \right)$ olsun. O

halde (a) dan $W_n \supset W_{n-1}$ dir. Y tam olduğundan $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ vardır. Buradan da

$y \in W_0 = A(2\varepsilon)$ dir. Şimdi (x, y) nın T nın grafiğinin kapanışında olduğunu göstermek istiyoruz. U ve V sırasıyla x ve y nın keyfi komşulukları olsunlar. O halde

$W_n \subset V$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi (b) den $x \in T^{-1}(\overline{W_n}) \subset T^{-1}(\overline{V})$ dir.

Dolayısıyla $U \cap T^{-1}(\overline{V}) \neq \emptyset$ ve buradan $U \times V$, T nın grafiği ile kesişir. U ve V keyfi olduklarından (x, y) T nın grafiğindedir. Bundan dolayı $x \in T^{-1}(A(2\varepsilon))$ ve $T^{-1}(\overline{A(\varepsilon)}) \subset T^{-1}(A(2\varepsilon))$ dir. O halde T süreklidir.

Sonuç 3.4.4.

X ve Y Banach uzaylar olsunlar. $D(T)$, X in bir vektör alt uzayı olsun ve $T: D(T) \rightarrow Y$ bir kapalı grafik ile lineer bir dönüşüm olsun. O halde eğer $D(T)$, X de kapalı ise, T süreklidir.

Sonuç 3.4.5.

Bir tam psedometriklenabilir topolojik vektör uzayından yetersiz olmayan bir Hausdorff topolojik vektör uzayına örten bire bir, sürekli, lineer bir T dönüşümü topolojik izomorfizmdir.

İspat:

T sürekli olduğundan böylesi bir dönüşümün tersi kapalı bir grafiğe sahiptir. T nın grafiği $X \times Y$ nın kapalı bir alt cümlesidir. T bire bir ve örtendir. T^{-1} in grafiği $Y \times X$

in bir alt cümlesidir. $Y \times X$ uzayı, $f(y, x) = (x, y)$ dönüşümü altında $X \times Y$ uzayına homeomorfiktir. O halde f altında T^{-1} in grafiğinin görüntüsü T nın grafiğine özdeştir. Dolayısıyla 3.4.3. den T^{-1} sürekli olup T bir topolojik izomorfizmdir.

Önerme 3.4.6.

Tam psedometriklenabilir bir X topolojik vektör uzayının açık, sürekli, lineer T dönüşümü altındaki görüntüsü tam ve psedometriklenebilir.

İspat:

X de yerel bir bazın elemanlarının görüntülerinin bir ailesi T nın değer cümlesinde bir yerel bazdır. Buradan Y değer uzayı aynı topolojiye sahip olacaktır. Dolayısıyla psedometriklenebilir olacaktır.

Kabul edelim ki Y tam olmasın. O halde Y de limiti olmayan bir $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi vardır. $U_1 = X$ olacak şekilde $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, X için yerel bir baz ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_{n-1} + U_{n-1} \subset U_n$ olsun. U_n cümlelerinin görüntülerinin ailesi Y için yerel bir baz olduğundan kabul edebiliriz ki (eğer gerekirse $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in bir alt dizisini seçerek) tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $x_n - x_{n-1} \in T(U_n)$ dir.

$T(y_1) = x_1$ olacak şekilde X de bir y_1 ve $n > 1$ için $T(y_n) = x_n - x_{n-1}$ olacak şekilde

U_n de bir y_n seçelim. $z_n = \sum_{k=1}^n y_k$ olsun. Bu durumda tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $T(z_n) = x_n$ ve

$\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisidir. Çünkü $z_n - z_{n-1} \in U_n$ ve buradan

$z_{n-p} - z_n \in U_{n-1} + \dots + U_{n-p} \subset U_n$ dir. Fakat $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, X in bir x noktasına yakınsaktır

ve bu yüzden $T(z_n) = x_n$, Y nın bir noktasına yakınsar ki bu bir çelişkidir. Buradan

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ yakınsaktır. O halde Y bir tam uzaydır.

Teorem 3.4.7 (Açık Dönüşüm Teoremi).

T , bir tam psedometriklenebilir X topolojik vektör uzayından bir Hausdorff Y topolojik vektör uzayına tanımlı sürekli, lineer bir dönüşüm olsun. Eğer T nın değer cümlesi Y de yetersiz olmayan ise, $T : X \rightarrow Y$ dönüşümünde Y uzayı tam ve metriklenebilir. T dönüşümü ise, açık bir dönüşümdür.

İspat:

T sürekli ve $\{0\}$ cümlesi Y de kapalı olduğundan T nın çekirdeği

$N = \{x \in X \mid T(x) = 0\}$ X de kapalıdır. O halde 3.1.11. (vii) den X/N bölüm uzayı bir Hausdorff uzay ve bölüm fonksiyonu Q açık ve sürekli. Dolayısıyla 3.4.6. dan X/N tam ve metriklenebilirdir. Görülebilir ki, $SoQ = T$ olacak şekilde $S: X/N \rightarrow Y$ üretilmiş bir dönüşüm vardır. T nın $T(x)$ değer cümlesi yetersiz olmayan olduğundan Y de yoğun ve yetersiz olmayandır. 3.4.5. den $S: X/N \rightarrow T(x)$ örten bir topolojik izomorfizmdir.

Özel olarak $T(x)$ tamdır ve buradan $T(x) = Y$ dir. O halde T açık bir dönüşüm, Y uzayı tam ve metriklenebilirdir.

Sonuç 3.4.8.

Bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına tanımlı sürekli lineer bir dönüşüm açıktır.

4. BÖLÜM

BAİRE UZAYLARININ ÖZELLİKLERİNİN ÖZETİ

Şimdi bu bölümde Baire uzaylarıyla ilgili diğer bölümlerde ele alınan özelliklerin bir özetini vereceğiz.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- i) X in yoğun, açık alt kümelerinin sayılabilir adetteki kesişimleri X de yoğundur.
- ii) X in her yetersiz alt kümesi, X de bir iç noktaya sahip değildir.
- iii) X in boştan farklı, her açık alt kümesi X de yetersiz olmayan bir kümedir.
- iv) X in artık her alt kümesi X de yoğundur.
- v) Boştan farklı her U açığı için; her bir F_n kapalı olmak üzere $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ ise, $(F_{n_0})^o \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
- vi) X de yetersiz her G_δ alt kümesi hiçbir yerde yoğun olmayan kümedir.
- vii) X de her yarı sürekli (sınırlı) f fonksiyonu için, f in X üzerinde sürekli olduğu tüm noktalar kümesi X de yoğundur.
- viii) $\forall x \in X$ için $\{f(x) \mid f \in C\}$ üstten sınırlı olacak şekilde, X üzerinde, alt yarı sürekli fonksiyonların bir ailesi C olmak üzere, X in boştan farklı her U açık alt kümesi için $y \in V$ ve $f \in C$ iken, $f(y) \leq k$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı ve U nun boştan farklı bir V açık alt kümesi vardır.
- ix) X in her sonlu nokta açık örtüsü, noktaların yoğun bir kümesinde yerel sonludur.
- x) X in her sayılabilir sonlu nokta açık örtüsü, noktaların yoğun bir kümesinde yerel sonludur.

- xi) X üzerindeki her sonlu nokta, açık β süzgeç bazı, $\cup \beta$ nın noktalarının yoğun cümlesinde yerel sonludur.
- xii) X üzerindeki her sayılabilir, sonlu nokta, regüler açık β süzgeç bazı, $\cup \beta$ nın noktalarının yoğun cümlesinde yerel sonludur.
- xiii) $\cup \beta$ nın hiçbir noktasında yerel sonlu olmayan, her sayılabilir, sonlu nokta, regüler açık β süzgeç bazı bir yığılma noktasına sahiptir.

(i)–(x) özelliklerinden herhangi birini sağlayan herhangi bir topolojik uzay bir Baire uzay olarak adlandırılır. Ek olarak eğer X bir regüler uzay ve (ix)–(xiii) şartlarından herhangi birini sağlıyorsa yine bir Baire uzay olur.

KAYNAKLAR

1. Engelking, R., 1976. General Topology. PWN, Warszawa.
2. Kelley, J. L., 1955. General Topology. Van Nostrand, New York.
3. Kuratowski, K., 1966. Topology I. Academic Pres, New York.
4. Mycielski, J., 1963. On the axiom of determinateness. *Fundamenta Mathematicae*, 53: 205-224, MR 28#4911.
5. Mycielski, J., 1966. On the axiom of determinateness II. *Fundamenta Mathematicae*, 59: 203-212, MR 35#1489.
6. Jech, T., 1971. Introduction to set theory, Lecture notes in math, No: 217. Springer-Verlag, Berlin and New York.
7. Kuratowski, K., Mostowski, A., 1968. Set Theory. PWN, Warszawa.
8. Cohen, J. P., 1966. Set theory and the continuum htpothesis. Benjamin, New York.
9. Mccoy, R. A., 1972. A Baire space extension. *Proceedngs of the American mathematical society*, Vol. 33, (1) : 199-202.
10. Gentry, K. R., Hoyle, H. B., 1971. Somewhat continuous functions. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 96: 5-12.
11. Saxon, S., 1986. (LF)- spaces, quasi- Baire spaces, and the strongest locally convex topology. *Annals of Mathematics*, 274: 627-641.
12. Todd, Aaron., Saxon, A. Stephan., 1973. A property of locally convex Baire spaces. *Annals of Mathematics, Journal*, 206: 23-34.
13. Srinivasan, J., 1967. Some remarks of Baire spaces. *Portugalie Mathematica*, 26: 213-219.
14. Byczkowski, T., Pol, R., 1976. On the closed graph and open mapping theorems. *Bulletin L' Academie Polonaise des Science, Serie des Sciences Mathematiques*, 24: 723-726.
15. Dominik, Noll., 1986. Baire spaces ang graph theorems. *Proceeding of the American Mathematical Society*, Vol 96, number 1, January.
16. Levin, V. L., Ralkow, D. A., 1963. Closed graph theorems for uniform spaces. *Soviet Mathematics- Doklady*, 4, 796.
17. Frolik, Z., 1961. Remarks concerning the invariance of Baire spaces under mappings. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 86: 381-385.

18. Tibor, Neubrunn., 1977. A note on mappings of Baire spaces. *Mathematica Slovaca*, Vol 27. No 2: 173-176.
19. Robertson, A. P., Robertson, W., 1956. On the closed graph theorem. *Proceedings of the Glasgow Mathematical Association*, 3: 9-12.
20. Capliuk, Simone., 1998. Baire spaces. California State University, Ph. D. Thesis, Long Beach, 128 s.
21. Bourbaki, N., 1966. *Elements of Mathematics: General Topology*, part2. Addison-Wesley Reading Mass.
22. Hausdorff, F., 1932. *Mengenlehre*, Lüpzig.
23. Ceder, J. G., 1961. Some generalizations of metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 11: 105-125.
24. Dieudonne, J., 1969. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Pres, New York.
25. Köthe, G., 1979. *Topological Vector Spaces, II*. Springer- Verlag, New York.
26. Horvath, J., 1966. *Topological vector spaces and distributions*. Reading Massachusetts, Addison- Wesley, Vol 1.
27. Choquet, G., 1969. *Lecture on analysis*. Vol 1: Integration and topological vector spaces. Benjamin, New York, MR 40#3252.
28. Bourbaki, N., 1958. *Topologie Generale*. Chapter 9, Paris.
29. Husain, T., 1966. *Introduction to Topological groups*. Sounders, Philadelphia.
30. Fogelgren, J. R., McCoy, R. A., 1971. Some topological properties defined by homeo- morfism groups. *Archiv der Mathematic*, 9: 1-6.
31. Herlich, H., 1966. Nicht alle T_2 - minimalen Raume sind von 2. Kategorie. *Mathematische Zeitschrift*, 91.
32. Kaplan, S., 1952. Cartesian products of reals. *American Journal of Mathematics*, 74: 936-954.
33. Saxon, S., 1972. Nuclear and product spaces, Baire- like spaces and the strongest locally convex topology. *Annals of Mathematics, Journal*, 197: 87-106.
34. Wilard, S., 1970. *General Topology*. Addison- Wesley publishing company, Reading.
35. Narici, L., Beckenstein, E., 1985. *Topological Vector Spaces*. Marcel Dekker, Inc, New York.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı : Saliha ATAK
Uyruđu : Türkiye (TC)
Doğum Yeri : Beypazarı / ANKARA
Doğum Tarihi : 10.02.1987
Medeni Durumu : Bekar
Adres : Hacıkara Mah. Sanayi Sitesi 769 ada F blok no:8
BEYPAZARI/ANKARA
E-Mail : saliha-atak@hotmail.com
Tel : 0 543 340 31 59

EĞİTİM

Derece	Kurum	Mezuniyet Tarihi
Tezli Yüksek Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	
Lisans	Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2009
Lise	Beypazarı N.K.V Anadolu Lisesi	2005

YABANCI DİL

İngilizce