

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**STOKASTİK OLARAK BİRBİRLERİNE BAĞLI İKİ BİLEŞENİN  
OLUŞTURDUĞU SİSTEMLERİN (SERİ-PARALEL) BAZI İKİ BOYUTLU  
ÜSTEL DAĞILIMLAR İÇİN BOZULMA ORANLARININ ÖZELLİKLERİNİN  
BELİRLENMESİ**

**Berna GÜVENDİREN**

**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA  
2010**

**Her hakkı saklıdır**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKASTİK OLARAK BİRBİRLERİNE BAĞLI İKİ BİLEŞENİN OLUŞTURDUĞU SİSTEMLERİN (SERİ-PARALEL) BAZI İKİ BOYUTLU ÜSTEL DAĞILIMLAR İÇİN BOZULMA ORANLARININ ÖZELLİKLERİNİN BELİRLENMESİ

Berna GÜVENDİREN

Ankara Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILMAZ

Bileşenlerin ortak yaşam zamanlarının iki boyutlu üstel dağılımlı olduğu durum göz önüne alınarak seri ve paralel sistemlerin bozulma oranlarının, bağımsız durumdaki sistemin bozulma oranlarına göre karşılaştırılması araştırılmıştır. Bulgular ışığında; Gumbel I., II. ve III. tip, Block ve Basu'nun, Cowan'ın, Marshall ve Olkin'in ve Singpurwalla ve Youngren'in iki boyutlu üstel dağılımları için bozulma oranı sıralamaları elde edilmeye çalışılmıştır. Sıralama yapılmasının mümkün olmadığı bazı durumlar ortaya çıkmıştır, bu durumlar için ise koşulları daha hafif olan stokastik sıralamanın yapılabildiği gösterilmiştir. Bunun yanında, bağımlı iki bileşenden oluşan seri ve paralel sistemlerin bozulma oranlarının kendisini oluşturan bileşenininki gibi davranıp davranmadığı da araştırılmıştır.

**Temmuz 2010, 83 sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** Bozulma oranı, bozulma oranı sıralaması, bağımlı bileşenleri olan sistemler, iki boyutlu üstel dağılımlar

## ABSTRACT

Master Thesis

CHARACTERIZATION OF THE HAZARD RATES OF SYSTEMS (PARALLEL AND SERIES) COMPOSED OF TWO STOCHASTICALLY DEPENDENT COMPONENTS FOR SOME BIVARIATE EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS

Berna GÜVENDİREN

Ankara University  
Graduate School Institute of Natural and Sciences  
Department of Statistics

Supervisor: Asist Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

We investigate a comparison between hazard rates of those systems and the hazard rate of system with independent components by considering the system (series or parallel) composed of two components having the bivariate exponential distribution. In the light of these findings; we try to obtain a hazard rate ordering for Gumbel Type I, II. ve III., Block and Basu's, Cowan's, Marshall and Olkin's and Singpurwalla and Youngren's bivariate exponential distributions. There are some situations that make imposible to have ordering, for those situations we show that stochastic ordering which is the weaker could be done. Besides, we find out that whether the hazard rates of the systems (series or parallel) with dependent components behave like its components or not.

**July 2010, 83 pages**

**Keywords :** Hazard rate, hazard rate ordering, system with dependent components, bivariate exponential distributions

## TEŐEKKÖR

Çalıőmalarımnda bilgi ve önerilerini esirgemeyen, titizlikle destek veren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet YILMAZ'a (Ankara Üniversitesi Fen Fakóltesi) ve eğitimin süresince göstermiő oldukları anlayıő ve fedakarlıktan dolayı annem İffet ve babam Erdal'a teşekkür ederim.

Berna Güvendiren

Ankara, Temmuz 2010

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Sistem.....	5
2.2 Güvenilirlik.....	6
2.3 Sistem Güvenilirliği.....	6
2.4 Yaşlanma Kavramı.....	10
2.5 Bozulma Kavramı.....	11
2.5.1 Artan bozulma oranı (Increasing Failure Rate) IFR kavramı.....	12
2.5.2 Azalan bozulma oranı (Decreasing Failure Rate) DFR kavramı.....	12
2.5.3 Sabit bozulma oranı (Constant Failure Rate) CFR Kavramı.....	12
2.6 Önceki Çalışmalar.....	20
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	26
3.1 Stokastik Sıralama.....	26
3.2 Bozulma Oranı Sıralaması.....	27
3.3 Olabilirlik Oranı Sıralaması.....	33
3.4 Ortalama Kalan Yaşam Sıralaması.....	35
3.5 Bileşenleri Bağımsız Olan İki Bileşenli Sistemlerin Karakterizasyonu.....	38
3.6 Bileşenleri Bağımlı Olan İki Bileşenli Sistemlerin Karakterizasyonu.....	41
3.7 Bazı İki Boyutlu Üstel Dağılımlar .....	45
3.7.1 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (I. Tip Model) .....	45
3.7.2 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (II. Tip Model) .....	46
3.7.3 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (III. Tip Model) .....	46
3.7.4 Block ve Basu'nun İki Boyutlu Üstel Dağılımı .....	47
3.7.5 Cowan'ın İki Boyutlu Üstel Dağılımı .....	48
3.7.6 Marshall ve Olkin'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı .....	48

3.7.7 Singpurwalla ve Youngren'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı .....	49
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>50</b>
4.1 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (I. Tip Model) için Karakterizasyon.....	50
4.2 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (II. Tip Model) için Karakterizasyon.....	54
4.3 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (II. Tip Model) için Karakterizasyon.....	59
4.4 Block ve Basu'nun İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon.....	61
4.5 Cowan'ın İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon.....	65
4.6 Marshall ve Olkin'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon.....	68
4.7 Singpurwalla ve Youngren'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon.....	70
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ .....</b>	<b>74</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>78</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ .....</b>	<b>83</b>

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Sistemlerin oluşturulma biçimlerine göre gösterimi.....	5
Şekil 2.2 Havuz sistemi.....	7
Şekil 2.3 Paralel bağlı pompalar.....	8
Şekil 2.4 Azalmayan bozulma oranı.....	14
Şekil 2.5 Artmayan bozulma oranı.....	14
Şekil 2.6 Küvet biçimli bozulma oranı.....	15
Şekil 2.7 Ters küvet biçimli bozulma oranı.....	15
Şekil 2.8 Modifiye küvet biçimli bozulma oranı.....	15
Şekil 2.9 Roller-Coaster şekilli bozulma oranı.....	16
Şekil 2.10 Yararlı yaşam zamanı.....	16
Şekil 2.11 Parçanın bozulma oranı tahmini .....	19
Şekil 2.12 Paralel sistemin bozulma oranı tahmini.....	20
Şekil 3.1 Seri bağlı piller.....	30
Şekil 3.2 Karşılaştırmalı pil ömürleri .....	31

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 1000 özdeş pompadan bozulanların sayısı .....	18
Çizelge 2.2 1000 özdeş paralel sistemden bozulanların sayısı .....	19
Çizelge 3.1 A marka pil ömrü.....	30
Çizelge 3.2 B marka pil ömrü.....	31
Çizelge 3.3 A marka pillerin kullanıldığı radyonun çalışma süreleri ve bozulma oranı.....	31
Çizelge 3.4 B marka pillerin kullanıldığı radyonun çalışma süreleri ve bozulma oranı.....	31
Çizelge 5.1 Monotonluk ve Bozulma Oranı Sıralaması.....	74
Çizelge 5.2 Bağımlılık Durumu ve Stokastik Sıralama.....	76

## 1. GİRİŞ

Bileşenleri uyumlu (bileşenin çalışıp çalışmama durumu sistemin çalışma durumunu etkileyen bileşenler) olan sistemlerde genellikle bir bileşenin davranışı diğerini etkilemektedir. Sisteme gelen yükün paylaşımında veya bir şokun etkisinde iken bileşenlerin birbirinden bağımsız olarak davranması gerçek hayatta pek karşılaşılabılır bir durum değildir. Genellikle sistemi oluşturan parçalar birbirleri ile stokastik anlamda bir bağımlılık içindedir. Burada amaç, böyle bir bağımlılığın sistemin bozulma oranını nasıl etkilediğini araştırmaktır.

Sistem güvenilirliğinin teorisi kurulurken, sistemi oluşturan bileşenlerin birbirinden bağımsız olduğu düşünülmekte idi. Ancak, son zamanlardaki çalışmalar bu bileşenlerin bağımlı olduğu durum veya en azından birliktelik içinde olduğu durum göz önüne almaktadır. Bu koşullar altında, bileşenlerin çalışma zamanlarının rasgele değişken olduğu düşünülerek sistem güvenilirliğinin hesaplanması, sistemin bozulma oranının hesaplanması ve bu bozulma oranının monotonluğunun araştırılması konularına literatürde rastlanmaktadır.

Bu tez çalışmasının ana teması; bazı iki boyutlu üstel dağılımların, bağımlı durumlarda sistemi oluşturan bileşenlerin ortak dağılımları yardımı ile bağımsız durumdan bağımlı duruma bozulma oranının nasıl değiştiğine ilişkin bir sıralamanın ortaya çıkarılmasıdır. Bu amaçla, çalışmanın güvenilirlik teorisine en azından iki bileşenli sistemler için katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bileşenlerin veya sistemin zamanla gelişmesi veya bozulması olarak tanımlanan yaşlanma kavramı güvenilirlik analizinde önemli bir yer almaktadır. Tek değişkenli yaşlanma kavramına ilişkin çalışmalar literatürde oldukça yaygındır. Tabiki tek değişkenlide verilen bu kavramların, çok değişkenli yaşam zamanları için de genelleştirilmesi istenebilir. Çünkü kompleks sistemlerde bileşen sayısı birden fazladır. Bu bileşenler aynı çevre koşulları altında çalışır ve genellikle yaşam süreleri birbirlerine bağlıdır. Literatürde de uzun zamandır iki ve çok değişkenli yaşlanmayla ilgili

çalışmalar yapılmaktadır. Çok değişkenli yaşlanma çalışmalarına Harris (1970) ve Brindley ve Thompson (1972) öncülük etmiştir.

Tek değişkenli yaşam zamanının modellenmesinde önerilen birçok yaşam zamanı dağılımı bulunmaktadır. Literatürde çoğunlukla karşılaşılanlar Üstel dağılım, Gamma, Budanmış Normal, Weibull, Lognormal, Birnbaum-Saunders, Ters Gaussian, Gompertz, Makeham, Lineer Hata Oranı, Lomax Dağılımı, Log-Lojistik, BurrXII, Üstel Geometrik ve Genelleştirilmiş Üstel Geometrik Dağılımı biçiminde verilebilir. Yaşam zamanlarının dağılımlarını modelleme, hem mühendislik hem de biometrik güvenilirliğinde karşılaşılmaktadır. Üçüncü bir uygulama alanı olarak ekonometri verilebilir. Örneğin Heckman ve Singer (1986) işsizlik periyodunun uzunluğu, bir malın satılması için geçen süre gibi değişkenleri modellemede güvenilirlik teorisinden faydalanarak çalışmalar yapmışlardır.

Yaşam zamanlarını veya bu yaşam zamanlarının dağılımlarının bir karşılaştırmasını yapmak gerek mühendislik, gerek tıp gerekse de iktisadi alanlarda önemli olabilir. Örneğin getirisi farklı olan A ve B tipindeki fonksiyonların zamanla hangisinin tercih edileceği istatistiksel olarak birimli ölçütlere göre belirlenmektedir. Bu ve benzeri durumlarda iki dağılımı karşılaştırmanın en kolay yolu onların ortalamalarını karşılaştırmaksa da böyle bir karşılaştırma genellikle pek bilgi verici değildir. Ayrıca bazen ortalamalar mevcut olmayabilir. İki dağılım hakkındaki mümkün bilginin değişik formlarını temel alan birçok sıralamanın kullanışı yaygındır. Örneğin, ortalaması eşit iki dağılım yayılım niceliği bakımından karşılaştırılmak istenilirse onların standart sapmalarını karşılaştırmak bilinen bir yoldur. Fakat yukarıdaki sorunlar burada da karşımıza çıkabilir. O nedenle yayılım sıralamaları önerilmiştir.

İki rasgele değişkeni karşılaştırmanın bir diğer yolu bozulma oranı sıralamasıdır. Bozulma oranı, bir parçanın birim zaman aralığı içindeki bozulmalarının sıklığıdır denilebilir. Bozulma oranı sıralaması ise iki farklı parçanın bozulma oranlarının büyüklük bakımından karşılaştırılmasına olanak sağlayan kısmi bir sıralamadır. Bu konuya ilişkin fazla kaynak bulunmamakla beraber Ross (1983), Lehmann ve Rojo

(1992) ye bakılabilir. Boland (1998), iki ürünü karşılaştırırken insanların gerçekte anladığı şeyin bozulma oranı olduğuna dair bir örnek vermiştir.

Birim yaştaki bir sistem veya bileşenin kalan ömrünü açıklamakta kullanılan ve özellikle endüstride uygulama alanı bulan ortalama kalan yaşam süresi yaşam dağılımlarında kullanılan önemli bir kriterdir. Ortalama kalan yaşam süresi fonksiyonunun teorik özellikleri Cox (1962), Kotz ve Shanbhag (1980), Hall ve Wellner (1981) ayrıca Bhattacharjee (1982) tarafından verilmiştir. Limit özellikleri ise Meilişon (1972) ile Balkema ve De Haan (1974) tarafından çalışılmıştır. Bu konu tezde tanım düzeyinde verilmiştir, tezin uygulama kısmında özellikle bozulma oranı sıralaması üzerinde durulmuştur.

Bozulma oranı ve ortalama kalan yaşam süresi kavramları yaşam zamanlarını modellemede ve bu modelleri karşılaştırma bakımından önemli birer araç olmaktadır. Sistemler veya bileşenler yaşamlarının çoğunu, bozulma oranı bakımından kuvvet biçimli eğrinin düz kısmında geçirirler. Üstel dağılım, sabit bozulma oranı özelliğinden dolayı bu düz kısmı modellemede kullanışlıdır. Çoğu sistemde; bileşenlerinin davranışları genellikle birbirleri ile ilişkilidir. Bir şokun etkisinde veya yük paylaşımında birbirlerinden bağımsız olması pek gerçekçi bir durum değildir. Örneğin, maruz kalınan soğğun böbreklere karşı uygulanan bir şok olduğu düşünülürse, böbrekler bu şokun etkisini paylaşırlar. Eğer böbreklerinden biri işlemez duruma gelirse diğeri ile biraz daha yaşam sürdürebilir. Bu ise aslında böbreklerin birbirlerine paralel bağlı olabileceğini ve birbirlerinden etkilenebileceğini göstermektedir. Bileşenlere gelen şokların zamanlarının Poisson sürecine uyduğu varsayımı altında türetilmiş birçok üstel dağılım modeli bulunmaktadır. Tez çalışmasında; bu şekilde elde edilen iki boyutlu üstel dağılımlardan Gumbel dağılımının 3 modeli de incelenmiştir, daha sonra Block ve Basu'nun, Cowan'ın, Marshall ve Olkin'in ve son olarak da Singpurwalla ve Youngren'in iki boyutlu üstel dağılımları göz önünde alınarak, seri ve paralel sistemlerin bozulma oranlarının sıralamasına yer verilmiştir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde sistem, güvenilirlik ve yaşlanma kavramları ile ilgili genel tanımlar verildikten sonra bozulma sıralaması ile ilgili yapılmış önceki çalışmalar kapsamlı bir şekilde verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, bazı stokastik sıralamalar; stokastik sıralama, bozulma oranı sıralaması, olabilirlik oranı sıralaması ve ortalama kalan yaşam sıralaması kavramları verilmiştir. Bu sıralamalar arasındaki ilişkilerden bazıları literatürde olmayan yöntemler ile elde edilmesi önerilmiştir. Bileşenleri bağımsız iki bileşenli sistemlerin bozulma oranları arasındaki ilişiden bahsedilmiş ve ardından bu sistemler ve bileşenleri arasındaki sıralamalara değinilmiştir. Tezin amacına göre kullanılacak araç Alt Bölüm 3.6 da önerilmiştir. Bu aracın özellikleri Lemma 3.2 de verilmiştir. İki bileşenli sistemler ve sistemin bileşenleri için bozulma oranı sıralamasına göre oldukça kolay elde edilebilen stokastik sıralama Lemma 3.1 de önerilmiştir. Tezde adı geçen İki Boyutlu üstel dağılımlar, bu dağılımların çıkış noktaları ve güvenilirlikteki önemleri Alt Bölüm 3.7 de kısaca verilmiştir.

Bu iki boyutlu dağılımlar için seri ve paralel sistemler düşünülerek, bileşenlerinin bağımsız olmuş olması durumundaki seri ve paralel sistemler ile bozulma oranı bakımından karşılaştırılması Dördüncü Bölümde yapılmıştır. Ayrıca bağımlı sistemlerin bozulma oranının monotonluğu da incelenmiştir. Tezin diğer özgün kısmı da bu bölümde yer almaktadır.

Tezin Tartışma ve Sonuç Bölümünde ise; bulgular sonucunda bazı durumlarda bozulma oranı sıralamasının yapılamadığı görülmüş ve bu durumlarda yaşam zamanları arasındaki bağımlılık yapısını kullanarak hiç olmazsa stokastik olarak sıralanabildiği gösterilmiştir. Tezde elde edilen sistemlerin bozulma oranının monotonluk bakımından nasıl değiştiği sonraki çalışmalar için öneri olarak sunulmuştur.

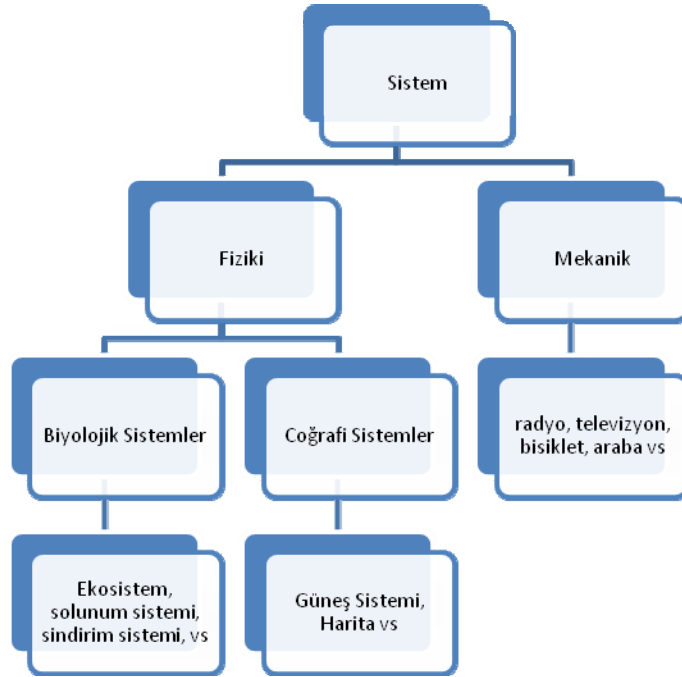
Çalışmada önerilen yöntemin ve yapılan uygulamalarda elde edilen sonuçların güvenilirlik teorisine iki bileşenli bağımlı sistemler için katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Sistem

Bazı parçalardan oluşan bir kümeyi göz önüne alalım. Bu parçalar belirli bir amaç doğrultusunda bir araya gelmişse, bu kümeye sistem adı verilir. Sistemi oluşturan parçalara ise bileşen adı verilir. Kuşkusuz bu bileşenlerin sistemde ne şekilde ve nasıl çalışacağına sistemin yapısı karar vermektedir.

Sistemleri oluşma biçimine göre kendi içlerinde fiziki ve mekanik sistemler olmak üzere ikiye ayırabiliriz.



Şekil 2.1 Sistemlerin oluşturulma biçimlerine göre gösterimi

Sistemin tanımı çok geniş anlamda verildiği için, yukarıdaki diyagrama pek bağlı kalınmayabilir. Örneğin, bir inşaatı tamamlamak amacı ile bir araya gelmiş ustaların, inşaat işçilerinin, inşaat mühendislerinin, tesisat ustalarının ve mimarın yanı sıra kullanılacak malzemeler ve teçhizatlar da sistemi oluşturabilir.

## 2.2 Güvenilirlik

Bir parçanın veya sistemin belirlenen çevre ve işleyiş koşulları altında, önceden belirli bir zaman aralığında kendisinden istenilen görevini yürütebilmesi yeteneğidir.

Güvenirlik analizinde asıl çözüm aranan problem; birim yaştan ötesindeki yaşam zamanıdır. Yani  $x$  zaman kadar yaşamış olan sistem veya bileşenin daha fazla yaşamasıyla ilgilenilmektedir.

## 2.3 Sistem Güvenilirliği

$n$  bileşenden oluşan bir sistem düşünölsün. Öyle ki bu bileşenlerin çalışma durumları  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  rasgele değişkenleri ile gösterilsin ve bu rasgele değişkenler birbirinden stokastik anlamda bağımsız olsunlar.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{i. bileşen çalışıyor} \\ 0 & \text{i. bileşen çalışmıyor} \end{cases}$$

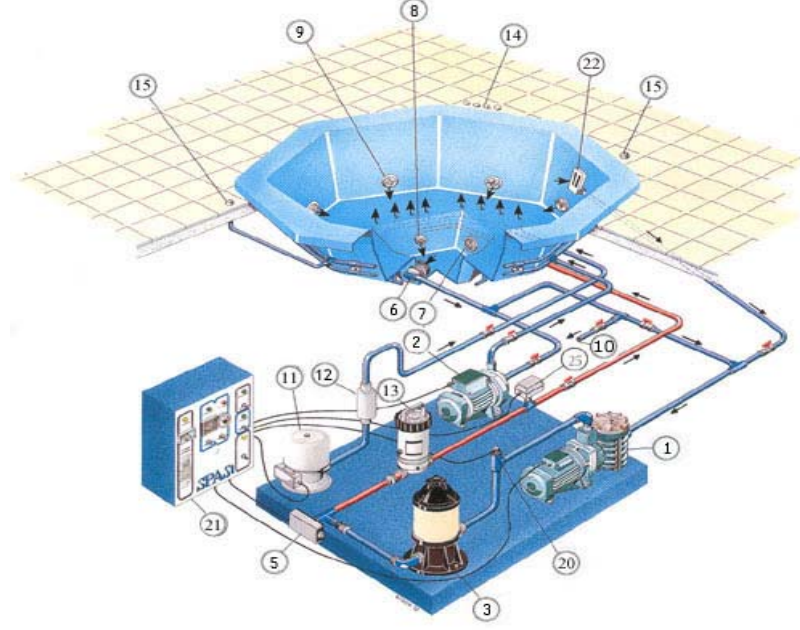
ve  $E[X_i]$ ;  $X_i$  rasgele değişkeninin beklenen değerini göstermek üzere, her bir bileşenin güvenilirliği  $E[X_i] = P(X_i = 1) = p_i$  ve sistemi oluşturan bileşenlerin hangi matematik yapıda olduğunu gösteren yapı fonksiyonu  $\phi$  ile gösterilirse

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{sistem çalışıyor} \\ 0 & \text{sistem çalışmıyor} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre sistemin güvenilirliği yapı fonksiyonunun beklenen değerine eşittir ve bileşenler bağımsız olduğundan sistemin güvenilirliği bileşenlerin güvenilirliklerinin bir fonksiyonu olarak yazılabilir. Öyle ki bu fonksiyon  $h(p_1, p_2, \dots, p_n)$  ile gösterilirse;

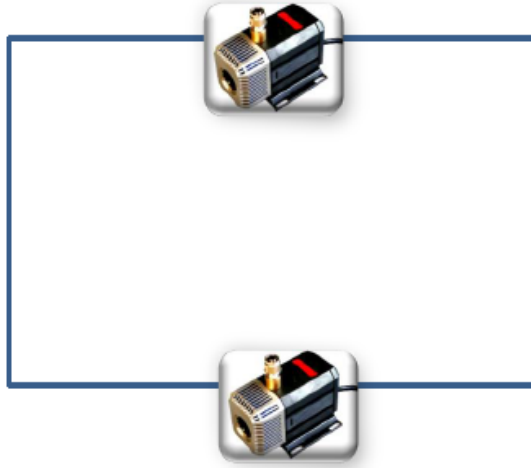
$$E[\phi(X_1, X_2, \dots, X_n)] = 1P(\text{Sistemin çalışması}) = h(p_1, p_2, \dots, p_n)$$

eşitliği ile elde edilir (Barlow ve Proschan 1975). Bunu bir örnek üzerinde açıklamaya çalışalım;



Şekil 2.2 Havuz sistemi

Şekil 2.2’de (1) ve (2) nolu pompaların havuz suyunu tahliye etmek için kullanıldığını düşünelim. Bu pompaların çalışma durumları birbirinden bağımsız ve sırası ile %95 ve %96 olasılıkları ile çalıştıklarını varsayalım. Bu iki pompa birbirine paralel bağlı ise havuz tahliye sisteminin güvenilirliğini hesap etmeye çalışalım;



Şekil 2.3 Paralel bağlı pompalar

$$h(p_1, p_2) = 1 - P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 1 - P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$$

$$h(p_1, p_2) = 1 - (1 - .95) * (1 - .96) = 0.997$$

olarak hesaplanır.

Burada dikkat edilmesi gereken husus bileşen güvenilirliğinin herhangi bir belirlenmiş zamanda hesaplanmış olmasıdır. Sistemin güvenirligi ise o anda hesaplanmış değerdir. Kısacası eğer 2. yıldaki güvenirlilik yukarıdaki gibi ise bundan 5 yıl sonraki güvenirlilik aynı olamaz.

Bu sebeple bileşenlerin ve onların oluşturduğu sistemin yaşlanma ile karşı karşıya geldiğini aslında güvenirligin zaman içinde değişebileceğini söylemek mümkündür.

Şimdi  $T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenleri sırası ile birinci ve ikinci pompanın yaşam zamanlarını gösterebiliriz. Ayrıca  $S_i(t) = P(T_i > t) = 1 - F_i(t)$   $i=1,2$  pompaların yaşam fonksiyonlarını temsil etsin. Buna göre,  $i$ . bileşenin zamana bağlı olarak çalışma durumu

$$X_i(t) = \begin{cases} 1, & T_i > t \\ 0, & T_i \leq t \end{cases}$$

ile gösterildiğinde,  $i$ . bileşenin  $(0,t]$  aralığındaki güvenirligi

$$E[X_i(t)] = 1P(T_i > t) = S_i(t)$$

biçiminde verilir. Sistemin güvenilirliği ise, bileşenlerin çalışma zamanları bağımsız olduğundan

$$h(S_1(t), S_2(t)) = E[\phi(X_1(t), X_2(t))]$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre havuz suyu tahliye sisteminin güvenilirliği

$$h(S_1(t), S_2(t)) = 1 - P(T_1 \leq t, T_2 \leq t) = 1 - F_1(t)F_2(t)$$

dir. Örneğin pompaların yaşam zamanlarının dağılımı ortalaması 3 yıl olan üstel dağılıma uyduğu bilgisi verilmiş olsa idi havuz suyu pompalama sisteminin en az 2 yıl çalışması olasılığı (güvenirliği)

$$h(S_1(2), S_2(2)) = 1 - (1 - e^{-2/3})(1 - e^{-2/3}) = 0.763$$

olarak hesap edilirdi.

Güvenirlik hesabının içine zaman kavramı da girince, tabiattaki her bir parçanın veya sistemin yaşlanma ile karşı karşıya geldiğini hatırlatmak gerekir. Ancak yaşlanmanın etkisi bileşenden bileşene veya sistemden sisteme iyi veya kötü yönde değişmektedir. Örneklerle açıklamak gerekirse,

- Sıfır kilometre bir otomobil ile hız yapmaya kalktığınızda motor zorlanır. Bu sebeple “motoru açmak” tabirini kullanmak yerinde olur. İlk zamanlar motorda zorlanma yaşanır fakat motor açıldıkça tam randımanına ulaşılır. Zaman geçtikçe motorun parçaları yıpranır ve tekrar zorlama yapar. Bu durumda motorun ilk zamanlar bozulması olasılığı yüksek iken kısa zamanda düşerek neredeyse sabitlenir. Zaman geçtikçe bu olasılık artar.

- Yeni doğan çocuklarda hastalığa karşı bağışıklık son derece düşüktür. Bağışıklık sistemi bazı hastalıkların çocuk yaşta atılması ile gelişir ve hastalıklara karşı daha dayanıklı olur. Vücut yaşlandıkça direnç artar. Bu durumda kişi yaşlı guruba dahil oluncaya kadar hastalanma olasılığı azalır.
- Bina inşaatlarında kolon dikilirken demir ve çimento karışımı kullanılır. Kolon atma işlemi bittikten sonra kolonun dayanıklılığı çok azdır. Ancak beton kurdukça dayanıklılık artmaktadır. Bir zaman sonra gerek nem gerek havanın etkisinde kalan kolonun dayanıklılığı tekrar azalmaya başlayacaktır. Çimento ve demir karışımı, kolonun belirli zaman aralıklarında dayanıklılığı ölçüldüğünde tıpkı araba motoru örneğindeki gibi bir durum ortaya çıkacaktır. Önce gençleşen sonra sabit süren ve sonra da yaşlanan bir grafik çizer.
- “İşleyen demir ışıldar” ata sözünün çıkış noktası düşünüldüğünde, işlek bir demir yolundaki tren rayları ile kullanılmayan hatlardaki tren raylarının dayanıklılığı aynı olmamaktadır.

Yine de zamana göre sürekli gençleşme eğilimi içinde olan sistemler de bulunmamaktadır.

## 2.4 Yaşlanma Kavramı

Yaşlanma kavramı güvenilirlik analizi içinde çok önemli bir yere sahiptir. “Yaşlanmama”; parçanın yaşının kalan ömür dağılımına hiçbir etkisi olmaması anlamına gelirken, “Pozitif Yaşlanma”; parçanın yaşı arttıkça yaşam zamanının azalması yönünde etki etmesi, “Negatif Yaşlanma” ise parçanın yaşam zamanına olumlu etki etmesidir.

Yaşlanma kavramı; bileşenlerin veya sistemin zamanla gelişmesi veya bozulmasıdır.  $T$  rasgele değişkeni bir sistemin ya da bileşenin yaşam zamanını göstermek üzere,  $t$  kadar yaşamış bir parçanın en az  $x$  kadar süre daha yaşaması olasılığı,

$$P(T > t + x | T > t) = \frac{S(t + x)}{S(t)}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

## 2.5 Bozulma Kavramı

Yaşlanma kavramı irdelendiğinde; yaşlanmanın etkileri bozulma kavramını ortaya çıkarmıştır.  $T$  rasgele değişkeni bir sistemin ya da bileşenin yaşam zamanını göstermek üzere,  $t$  kadar yaşamış bir parçanın  $x$  kadar süre daha yaşayamaması olasılığı,

$$1 - \frac{S(t + x)}{S(t)} = \frac{S(t) - S(t + x)}{S(t)} = P(T \leq t + x | T > t)$$

biçiminde ifade edilir. Kısaca yukarıdaki olasılık  $t$  yaşındaki bir parçanın  $(t, t + x]$  aralığında hata vermesi bozulması olasılığıdır. Eğer  $x \rightarrow 0$  alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(t + x) - F(t)}{S(t)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{F(t + x) - F(t)}{x S(t)} = x \frac{dF(t)}{S(t)}$$

eşitliği elde edilir. Eğer yukarıdaki eşitlik  $x$  kadar artışa bölünürse birim başına bozulma oranı elde edilir ki bu elde edilen orana bozulma oranı adı verilir. Yani

$$r(t) = \frac{\frac{dF(t)}{dt}}{S(t)} = -\frac{\frac{dS(t)}{dt}}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln S(t)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan  $S(t)$  ile bozulma oranı  $r(t)$  arasındaki ilişkiyi aşağıdaki gibi yazmak mümkün olmaktadır:

$$S(t) = e^{-\int_0^t r(z) dz} = e^{-R(t)}$$

Burada  $R(t)$  birikimli bozulma oranını ifade etmektedir (Lai ve Xie, 2006).

Şimdi bozulma oranının monotonluğu hakkında ilgili kavramları vermeye çalışalım:

Literatürde yaşlanmanın özelliklerine göre bozulma oranı farklı sınıflandırmalara ayrılmaktadır. Bunlar; artan, azalan ve sabit bozulma oranlarıdır.

### 2.5.1 Artan bozulma oranı (Increasing Failure Rate) IFR kavramı

(i) Eğer  $t$  yaşındaki bir bileşenin en az  $x$  zaman kadar daha yaşaması olasılığı,  $\frac{S(t+x)}{S(t)}$ ,  $t$  nin azalan bir fonksiyonu ise ilgili yaşam dağılımı artan bozulma oranına

(IFR) sahiptir denilir.

(ii)  $R(t)$  bozulma oranı  $t$  nin azalmayan fonksiyonu ise ilgili yaşam dağılımı IFR dir.

(iii)  $T$  rasgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu  $f(t)$  olmak üzere,  $\log f(t)$  konkav bir fonksiyon ise ilgili yaşam dağılımı IFR dir (Barlow ve Proschan, 1975).

### 2.5.2 Azalan bozulma oranı (Decreasing Failure Rate) DFR kavramı

(i) Eğer  $t$  yaşındaki bir bileşenin en az  $x$  zaman kadar daha yaşaması olasılığı,  $\frac{S(t+x)}{S(t)}$ ,  $t$  nin artan bir fonksiyonu ise ilgili yaşam dağılımı azalan bozulma oranına

(DFR) sahiptir denilir.

(ii)  $r(t)$  bozulma oranı  $t$  nin artmayan fonksiyonu ise ilgili yaşam dağılımı DFR dir.

(iii)  $T$  rasgele değişkeninin (bileşenin yaşam zamanının) yoğunluk fonksiyonu  $f(t)$  olmak üzere,  $\log f(t)$  konveks bir fonksiyon ise ilgili yaşam dağılımı DFR dir.

### 2.5.3 Sabit bozulma oranı (Constant Failure Rate) CFR kavramı

(i) Eğer  $t$  yaşındaki bir bileşenin en az  $x$  zaman kadar daha yaşaması olasılığı,  $\frac{S(t+x)}{S(t)}$ ,  $t$  nin bir fonksiyonu değilse ilgili yaşam dağılımı sabit bozulma oranına

(CFR) sahiptir denilir.

(ii)  $r(t)$  bozulma oranı sabit fonksiyonu ise ilgili yaşam dağılımı CFR dir.

Sabit bozulma oranı kavramını ifade etmeye çalışalım;

$$\frac{S(t+x)}{S(t)} = S(x|t) = S(x)$$

eşitliğinden çıkan sonuç; sistem yada bileşen hangi yaşta olursa olsun en az  $x$  kadar daha yaşaması olasılığı sabittir. Yukarıdaki ifadeden

$$S(t+x) = S(t)S(x)$$

eşitliği yazılabilir. Yaşam fonksiyonu ile bozulma oranı arasındaki ilişki hatırlanırsa, bu eşitlik

$$e^{-R(t+x)} = e^{-R(t)}e^{-R(x)}$$

biçiminde yazılır. Her iki tarafın logaritması alınırsa,

$$R(t+x) = R(t) + R(x)$$

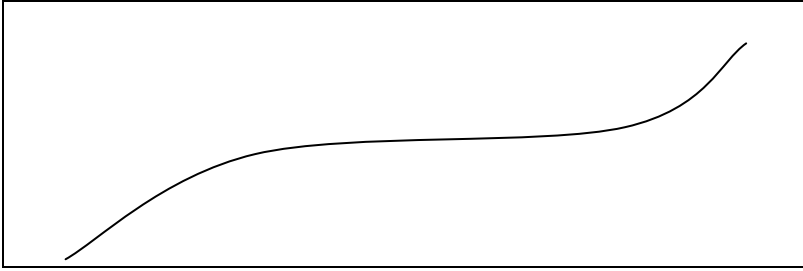
eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikten birikimli bozulma oranı fonksiyonunun lineer olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Eğer  $R(t)$ 'nin  $\int_0^t r(z)dz$  eşitliği ile verildiği hatırlanırsa,  $r(z)$  nin sabit olduğu sonucu çıkmaktadır. Bu tür bozulma oranları üstel dağılım ile modellenir, öyle ki bu sonuç birinci dereceden homojen diferansiyel denklemin çözülmesi ile elde edilebilir,  $c$  sabit bir reel sayıyı göstermek üzere;

$$cS(t) + \frac{d}{dt}S(t) = 0, \quad S(0) = 1$$

Güvenirlikle ilgilenen mühendisler monoton yaşlanmaya çok önem vermektedirler. Birçok uygulamada yaşların etkisinin yararlı olduğu görülmüştür. Fakat bir süre sonra pozitif yaşlanmanın olduğu durumlarda aşınmaların başladığı da ortaya çıkmıştır. Şu an birçok şirket, özellikle elektronik malzeme üretenler sürecin kesinlikle küvet şekilli bozulma oranı dağılımı özelliğine sahip olduğunu kabul etmiştir. Bu sonuç, endüstride kazanılan deneyim, birçok deney ve veri toplanması sonucunda elde edilmektedir. Fakat küvet biçimli bozulma oran fonksiyonu sistemlerin yaşam dönemlerini açıklamakta kullanılan tek yol değildir. Sistemlerin yaşam dönemlerini açıklarken kullanılan diğer grafikler; azalmayan, artmayan, küvet biçimli, ters küvet biçimli ve roller-coaster biçimleridir. Bozulma oranı şekillerinden en çok kullanılanı ise küvet biçimli bozulma oranıdır. Kısaca şekillere değinilirse;

$r(t) : \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^+$  bozulma oranı fonksiyonu olmak üzere;

1) Bütün  $t$ 'ler için  $r'(t) > 0 \Rightarrow$  azalmayan bozulma oranı



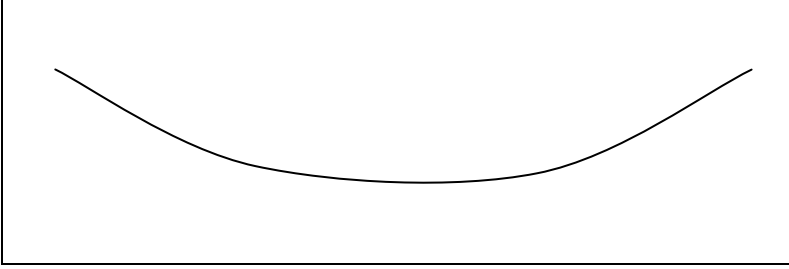
Şekil 2.4 Azalmayan Bozulma Oranı

2) Bütün  $t$ 'ler için  $r'(t) < 0 \Rightarrow$  artmayan bozulma oranı



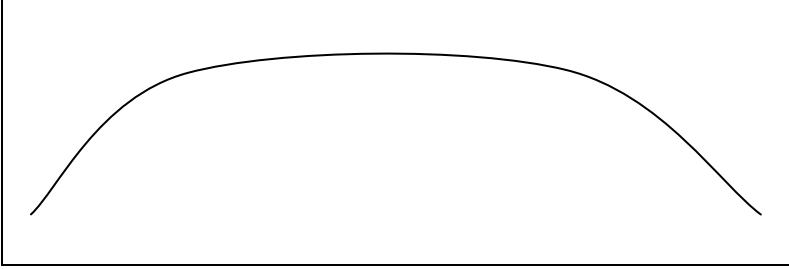
Şekil 2.5 Artmayan Bozulma Oranı

3)  $t \in (0, t_0)$  için  $r'(t) < 0, r'(t_0) = 0, r'(t) > 0$  öyle ki,  $t > t_0$  küvet biçimli bozulma oranı



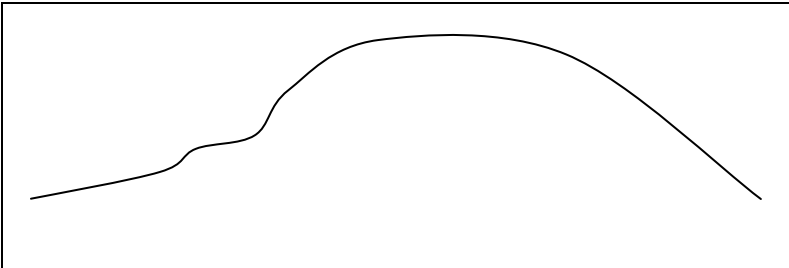
Şekil 2.6 Küvet Biçimli Bozulma Oranı

4)  $t \in (0, t_0)$  için  $r'(t) > 0, r'(t_0) = 0, r'(t) < 0$  öyle ki,  $t > t_0$  ters küvet biçimli.



Şekil 2.7 Ters Küvet Biçimli Bozulma Oranı

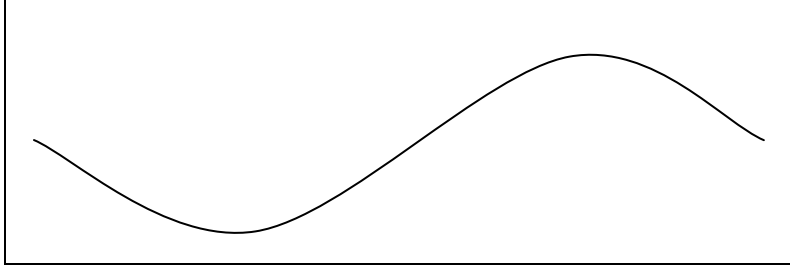
5) Eğer  $r(t)$  önce azalmayan daha sonra küvet şeklinde ise modifiye küvet şeklindedir.



Şekil 2.8 Modifiye Küvet Biçimli Bozulma Oranı

6) Var olan bir  $n$  için  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$  ve her bir aralık  $[t_{j-1}, t_j]$ ,  $1 \leq j \leq n+1$  öyle ki  $t_0 = 0, t_{n+1} = \infty$  olmak üzere,  $r(t)$  monoton ve herhangi iki komşu aralıkta karşıt

monotonluğa sahip olsun. Bu durumda Roller-Coaster şeklinde bozulma oranı adı verilir Wong (1988, 1989, 1991).



Şekil 2.9 Roller-Coaster Şekilli Bozulma Oranı

$r(t)$ 'nin önce azalan sonra sabit seyreden daha sonra da artan bir yapı izlediği durumlarıyla ilgili olarak Rajarshi ve Rajarshi (1988) ve daha sonra da Lai vd.(2001) çalışmışlardır. Küvet şekilli bozulmalar önceleri mühendislik literatüründe görülmekteydi. Örneğin Kao (1959), Kamins (1962) ve Krohn (1969). Küvet şekilli bozulma oranı hakkındaki teorik çalışmaların ise fazla bir geçmişi yoktur.

Küvet biçimli bozulma oranına ait grafiğe geri dönülürse küvetin alt kısmı yararlı zamanı, küvetin uç kısımları ise yararsız fakat doğal olan zamanı göstermektedir.



Şekil 2.10 Yararlı yaşam zamanı

Çoğu sistem ya da bileşen yaşamlarının çok uzun bir kısmını küvet biçimli eğrinin düz kısmında geçirmektedirler. Bu kısmın modellenmesi için üstel dağılım modeli kullanılmaktadır. Bunun nedeni açıklanmaya çalışılırsa;

1. Sabit bozulma oranı özelliğinden dolayı üstel dağılım, küvetin düz ve uzun kısmı için en iyi dağılımdır. Çünkü birçok bileşen yaşamlarının büyük bir kısmını bu bölümde geçirirler.
2. Havuzun uzun kenarına parçalanarak bakılırsa, belirlenen zaman aralığı için oradaki sürekli değişimi (ivmeyi) bulmakta üstel dağılım çok kullanışlıdır. Böylelikle herhangi bir modelin tahminini, parçalı üstel dağılım ile bulup birleştirebiliriz.

Genel olarak üstel dağılıma bakıldığında;

Üstel Dağılım; istatistiksel süreç türlerinde geniş bir alana sahiptir. Son dönemlerde en çok yaşam testlerinde kullanılmaktadır. Çünkü önceki yaşı ne olursa olsun ek bir zaman aralığında yaşaması olasılığı her zaman aynıdır. Bu durum da zamanla yaşlanmayan bileşenler anlamındadır. Basit yapılar işe yaramadığında, üstel dağılımın modifikasyonlarının da kullanılabilir olması önemli bir kullanım alanı sağlamaktadır. Aynı zamanda  $\forall t \geq 0$  için  $r(t) = \lambda$  dır, yani sabit bozulma oranına sahiptir. Ayrıca üstel dağılımlar tek boyutlu olduklarında parçanın yaşam zamanını açıklarken, iki boyutlu alındıklarında iki bileşenin birliktelik halindeki yaşam zamanlarını açıklamaktadır. Şok etkisi ile parçanın hasar gördüğü durumlarda üstel dağılımın önemi daha da ortaya çıkmaktadır.

Aşağıdaki örnekte yaşam zamanı üstel dağılımlı olan özdeş pompalardan 1000 tane alınarak parçanın bozulma oranı grafiği elde edilmiştir. Daha sonra Şekil 2.3’de görüldüğü gibi bu pompalar birbirlerine paralel bağlanmış ve havuz sistemi için bozulma oranı grafiği elde edilmiştir.

**Örnek 2.1** 1000 tane pompanın paralel bağlı olarak çalıştığı bir havuz 3’er aylık dilimlerde kontrol ediliyor ve bozulan parçalar saptanıyor. Bu pompalar için elde edilen sonuçlar sırası ile Çizelge 2.1 - 2.2’de verilmiştir.

Periyodik olarak alınan veriler yardımıyla bozulma oranının tahminini hesaplamak için  $(t, t + 3]$  zaman aralığı göz önüne alınarak;

$$\hat{r}(t) = \left\{ \frac{\{(t, t + 3] \text{ zaman aralığında bozulan parçaların sayısı}\} / 3}{\{t \text{ anında sağlam parçaların sayısı}\}} \right\}$$

formülü kullanılacaktır (Öztürk ve Özbek, 2007).

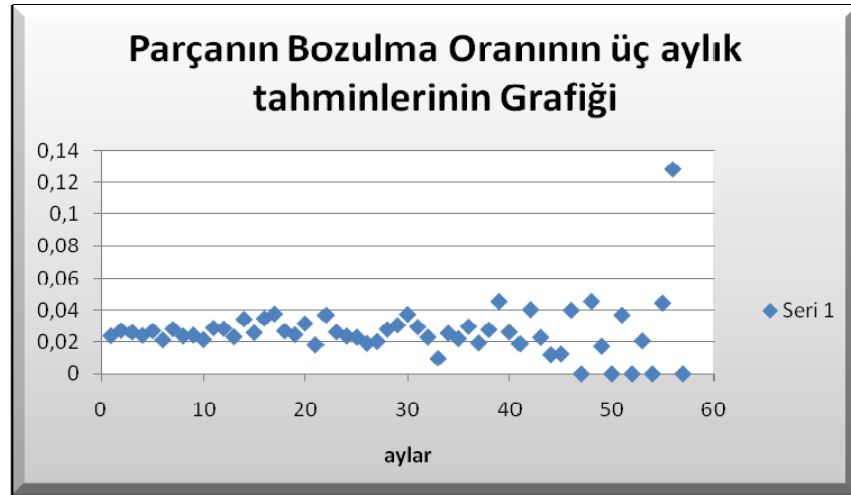
Çizelge 2.1 1000 özdeş pompadan bozulanların sayısı

Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı	Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı	Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı
0	1000	72	0,024	60	181	829	0,018416	120	35	967	0,019048
3	928	148	0,027299	63	171	848	0,037037	123	33	971	0,040404
6	852	215	0,026213	66	152	860	0,026316	126	29	973	0,022989
9	785	272	0,024204	69	140	870	0,02381	129	27	974	0,012346
12	728	331	0,027015	72	130	879	0,023077	132	26	975	0,012821
15	669	374	0,021425	75	121	886	0,019284	135	25	978	0,04
18	626	427	0,028222	78	114	893	0,020468	138	22	978	0
21	573	468	0,023851	81	107	902	0,028037	141	22	981	0,045455
24	532	507	0,024436	84	98	911	0,030612	144	19	982	0,017544
27	493	539	0,021636	87	89	921	0,037453	147	18	982	0
30	461	579	0,028923	90	79	928	0,029536	150	18	984	0,037037
33	421	615	0,028504	93	72	933	0,023148	153	16	984	0
36	385	642	0,023377	96	67	935	0,00995	156	16	985	0,020833
39	358	679	0,034451	99	65	940	0,025641	159	15	985	0
42	321	704	0,025961	102	60	944	0,022222	162	15	987	0,044444
45	296	735	0,03491	105	56	949	0,029762	165	13	992	0,128205
48	265	765	0,037736	108	51	952	0,019608	168	8	992	0
51	235	784	0,02695	111	48	956	0,027778				
54	216	800	0,024691	114	44	962	0,045455				
57	200	819	0,031667	117	38	965	0,026316				

Çizelge 2.2 1000 özdeş paralel sistemden bozulanların sayısı

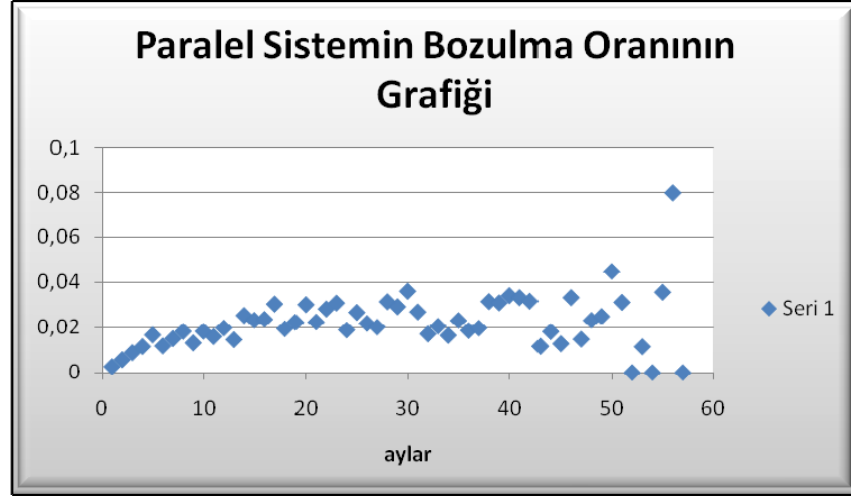
Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı	Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı	Aylar	Sağlam Parça Sayısı	Toplam Bozulan Parça Sayısı	Bozulma Oranı
0	1000	8	0,002667	60	341	682	0,022483	120	70	937	0,033333
3	992	24	0,005376	63	318	709	0,028302	123	63	943	0,031746
6	976	50	0,00888	66	291	736	0,030928	126	57	945	0,011696
9	950	83	0,011579	69	264	751	0,018939	129	55	948	0,018182
12	917	129	0,016721	72	249	771	0,026774	132	52	950	0,012821
15	871	160	0,011864	75	229	786	0,021834	135	50	955	0,033333
18	840	198	0,015079	78	214	799	0,020249	138	45	957	0,014815
21	802	242	0,018288	81	201	818	0,031509	141	43	960	0,023256
24	758	272	0,013193	84	182	834	0,029304	144	40	963	0,025
27	728	312	0,018315	87	166	852	0,036145	147	37	968	0,045045
30	688	345	0,015988	90	148	864	0,027027	150	32	971	0,03125
33	655	384	0,019847	93	136	871	0,017157	153	29	971	0
36	616	411	0,01461	96	129	879	0,020672	156	29	972	0,011494
39	589	456	0,025467	99	121	885	0,016529	159	28	972	0
42	544	494	0,023284	102	115	893	0,023188	162	28	975	0,035714
45	506	530	0,023715	105	107	899	0,018692	165	25	981	0,08
48	470	573	0,030496	108	101	905	0,019802	168	19	981	0
51	427	598	0,019516	111	95	914	0,031579				
54	402	625	0,022388	114	86	922	0,031008				
57	375	659	0,030222	117	78	930	0,034188				

Parçaların bozulma oranlarına ilişkin şekil aşağıdaki gibidir



Şekil 2.11 Parçanın bozulma oranı tahmini

Şekilden parçaların bozulma oranlarının sabit bir eğilimde dağıldığı görülmektedir. Sistemin bozulma oranlarına ilişkin grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.12 Paralel sistemin bozulma oranı tahmini

Şekilden görüleceği üzere sistemin bozulma oranı artma eğilimindedir. Bileşenler sabit bozulma oranına sahip olmasına rağmen onların oluşturdukları paralel sistemde bozulma oranı artma eğiliminde olmaktadır.

Bozulma oranı ve sıralamasıyla ilgili yapılan önceki çalışmalar aşağıdaki alt bölümde verilmiştir. Konuya ilişkin kaynak taraması olabildiğince geniş tutulmuştur.

## 2.6 Önceki Çalışmalar

Bozulma oranı fonksiyonu tutarlı sistemler ve bileşenlerinin bozulma oranı arasındaki ilişkiyi bozulma oranı sıralamasını kullanarak Boland ve Proshan (1994) çalışmıştır. Sistemi iyileştirmek için, sistem kararlılığını iyileştirmişler, sistem kararlılık iyileştirilmeleri yapıldığında sistemin stokastik olarak nasıl değiştiğini incelemişlerdir. Çalışmalarında orantılı bozulma oranlı  $n$  de  $k$  lı sistemler için sıra istatistiklerinin stokastik karşılaştırmalarını uygulamışlardır.

El-Neweihi ve Sethuraman (1993), sistemlerin bazı bileşenlerini farklı yollarla güçlendirerek güvenilirliği maksimum yapmanın güvenilirlik teorisinin önemli bir teması olduğunu vurgulayarak, bu maksimizasyonun bileşenlerin yaşam zamanı sıralamalarıyla ve yedeklerle desteklenerek yapılması üzerine çalışmışlardır. Schur ve Al

fonksiyonlarını en iyi sonuca aktif ve durağan tutarlılığı farklı setlerle, minimum tamir ve shock-threshold modellerde kullanmışlardır.

Aly ve Kochar (1993), marjinal dağılımların bozulma oranı veya olabilirlik oranı sıralamasını koruduğu durumda bağımlı rasgele değişkenler için bozulma oranı sıralaması ile iki değişkenli ölçek modelleri arasındaki ilişkiyi çalışmışlardır.

Boland vd.(1994), çalışmalarında bozulma oranı sıralamasını; hata oranı fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak rasgele değişkenlerin sıralamaları bakımından karşılaştırmasını yapmışlardır. Çalışmalarında bozulma oranı sıralamasının, stokastik sıralamadan daha güçlü fakat olabilirlik oran sıralamasından daha zayıf olduğunu göstermişlerdir. Bozulma oranı sıralaması güvenilirlik analizinde ve yaşam analizlerinde, bozulma oranı fonksiyonunun önemli olduğu bölgelerde kullanışlı olduğuna değinmişler ve makalelerinde daha önceki çalışmalardaki bozulma oranı sıralamaları hatırlatılmış, tutarlı sistemler için yeni sonuçlar vermişlerdir. Makalede n de k lı sistemlerin yaşam zamanlarının bozulma oranı sıralamasını vermişlerdir.

Boland ve El-Neweihi (1995), dizayn mühendislerinin stokastik sonuçlardan, bileşenlerin kararlılığının sistem kararlılığından üstün olduğunun bilincinde olduklarına değinmişlerdir. Güvenirlik analizinde ve yaşam testinde bozulma oranına önem verilmektedir ve bu nedenden dolayı da, bu durumun daha güçlü olan stokastik sıralamalar için, örneğin bozulma oranı sıralaması için nasıl olduğunu incelemişlerdir. Şaşırtıcı bir şekilde yedekler orjinal parçaların dağılımıyla eşleşmediği durumlarda seri sistem için bu durumunun sağlanmadığını, yedeklerin eşleşmesi durumunda sağlandığını göstermişlerdir. Çalışmalarında bu durumu n de k lı sistem;G (arka arkaya k tanesinin bozulması durumu) sistemlerde var olduğunu düşünmektedirler ve bu durumu cold-standby kararlılıkta incelemişlerdir.

Tutarlı sistemlerin formasyonu altında bileşenler ve sistemin ters bozulma oranı sıralaması için yeterli koşullarını Nanda vd.(1998) vermişlerdir. n de k lı sistemlerde de bu koşulların sağlandığını göstermişlerdir. Aynı dağılımlı ve aynı dağılımlı olunmadığı iki durum incelenmiştir. Aynı zamanda, uyumlu sistemlerin olabilirlik oranı sıralaması

için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Aynı dağılımlı olmayan bileşenlerden oluşan seri ve paralel sistemler bileşenin ters bozulma oranı ve sistemin ters bozulma fonksiyonu arasındaki ilişkinin karakterizasyonu üzerine çalışmışlardır.

Choi ve Kim (1998), her bir bileşenin yaşam zamanı  $\lambda_k$  ortalamalı üstel dağılıma sahip olan seri sistemler için bileşen düzeyindeki stanby kararlılığın sistem düzeyindekinden olabilirlik oranı sıralaması ve bozulma oranı sıralamasına göre bakıldığında dahi iyi olduğunu göstermiştir.

Tutarlı sistemleri karşılaştırmak için var olan metotları ve kriterleri Kochar vd.(1999) tartışmışlardır. Bileşenler bağımsız ve aynı dağılımlı olduğu durumlarda tutarlı sistemlerin karşılaştırılması için teorik metotlar çıkarmışlardır. Bütün bu karşılaştırmalar sistemin işaretinin bir fonksiyonu biçiminde temsil edilen, sistem yaşam zamanının dağılımı göz önüne alınarak yapılmıştır.

Akmadi ve Arghami (2001), rekor değerlerin dağılımının güvenilirlik özellikleri üzerinde durmuşlardır; stokastik, bozulma oranı ve ortalama kalan yaşam zamanı sıralamaları göz önüne alınarak yaşam zamanları ve rekor değerleri arasındaki sıralama ilişkisini ortaya koymuşlardır.

Gupta ve Nanda (2001), üstelleştirilmiş rasgele değişkenler için ters bozulma oranı sıralamasını elde etmişlerdir.

Asadi vd.(2004) çalışmalarında güvenilirlik analizinde asıl ilgilenilen problemin, birim yaşın ötesindeki yaşam zamanı olduğuna değinerek, bilgi fonksiyonları  $t$  de bağımlı kalan yaşam zamanı dağılımı olduğunu ve bunların dinamik olduğuna değinmişlerdir. Çalışmalarında, monoton yoğunluk fonksiyonuna sahip dağılım fonksiyonları için sistemlerdeki düzensizliğin kalan yaşam zamanına bağlı olduğu düşüncesi ile, bozulma oranı fonksiyonu ile bağdaştırarak dinamik düzensizlik sıralamasının bozulma oranı sıralaması ile ilişkili olduğunu göstermişlerdir. Uygulamalarda, bazı parametrik ailelerin dağılımlarının dinamik düzensizlik sıralaması, sistem yaşam zamanı dağılımlarının sıralamaları, paralel ve seri sistem şeklinde bağlanan bileşenlerin kaydedilen değerleri

ve bozulma fonksiyonu ile ortalama kalan yaşam zamanı fonksiyonunun geliştirilen yollarındaki MDE (Maksimum Dinamik Düzensizlik) modellerin formülasyonunu vermişlerdir.

Khaledi ve Kochar (2005), pozitif bağımlılık ile çok değişkenli bozulma oranı sıralaması arasındaki ilişkiyi kapulalar yardımı ile ortaya çıkarmışlardır.

Gupta vd.(2006), iki rasgele değişkenin minimum (maksimum) bozulma oranının (ters bozulma oranının) bileşenlerinin hata oranlarının toplamı olduğunu ayrıca marjinalerin hata oranı monotonluğu minimum (maksimum) (ters) hata oranının monotonluğu ile tanımlandığına değindikleri çalışmalarında, iki bileşenli dağılımlar için bu sonucun her zaman geçerli olmadığını göstermişlerdir. Farlie-Gumbel-Morgenstern ve Sarmanov gibi iyi bilinen iki boyutlu dağılım ailesinde mininun (maksimum) sistemlerin bozulma oranı monotonluğunu çalışmışlardır.

Valdés ve Zequeira (2006), iki bileşenden oluşan seri sistemi göz önüne alıp ilk olarak, herbir bileşenin yedeği kendisine paralel bağlı yeni bir sistem oluşturmuşlardır. İkinci olarak, yedeklerin birbirleri ile yer değiştirdiği sistemi düşünmüşler, çalışmalarında, bu iki yeni sistemin birbirleri ile bozulma oranı bakımından karşılaştırılmasını yapmışlardır.

Bağımlı değişkenli sistemlerde güvenilirlik önemli çalışma başlıklarındandır fakat çalışmalarda genellikle bağımsız değişkenler kullanılmıştır. Ancak, Navarro ve Lai (2007) bağımlılığın sistem performansını nasıl etkilediğini göstermeye çalışmışlardır. Bağımsız bileşenlerde var olan bazı sonuçları bağımlı bileşenler durumuyla karşılaştırmışlardır. İki bileşenin çoğunlukla üstel parametreleri için, güçlü (zayıf) olan paralel (seri) sistemlerin stokastik sıralamalarını göstermişlerdir. Buldukları genel sonuçları bazı ortak iki değişkenli modellerin güvenilirlik teorilerine uygulamışlardır.

Kochar ve Xu (2007), aynı dağılıma sahip  $n$  bileşenli bağımsız iki bileşen setinden oluşturulan paralel sistemlerin olabilirlik oranı sıralamasını yapmışlardır. Bunun yanı

sıra yine iki bileşen seti için onlardan oluşturulan paralel sistem ile seri sistemin yaşam zamanlarının farkına ilişkin ters bozulma oranı sıralamasını incelemişlerdir.

Yol setlerinden (uyumlu bir sistemi çalıştıran bileşenlerin her bir seti ) elde edilen seri sistemlerin karma dağılımları biçiminde temsil edilen uyumlu sistemlerin dağılımlarını kullanarak uyumlu sistemler için kuyruk bozulma oranı sıralamasını (sıra istatistiklerinin bozulma oranına dayalı sıralama) Navarro (2007) çalışmıştır.

Păltănea (2008), bileşenlerin yaşam zamanı  $n$  de  $n-1$  sistemlerin (fail-safe sistem) bozulma oranı sıralamalarını elde etmeye çalışmıştır.

Joo ve Mi (2010), bileşenlerin yaşam zamanları birbirinden bağımsız ve üstel dağılımlı paralel sistemler için bozulma oranı fonksiyonlarının karşılaştırılmasını üstel parametrelerin majorizasyonuna (baskınlık) dayanarak elde etmişlerdir. Bunun yanında, Marshal-Olkin ve Gumbel II. tip iki boyutlu üstel dağılımlarını göz önüne alarak, bağımlı bileşenleri olan paralel sistemlerin karşılaştırılmasını çalışmışlardır.

Ortak güvenilirlik fonksiyonu log-konkav (log-konveks) olduğunda seri ve paralel sistemlerin bozulma oranlarının monotonluğu üzerine Navarro ve Shaked (2009) çalışmışlardır.

Zhao ve Li (2009), ilk durum olarak parametreleri birbirinden farklı ve üstel dağılımlı yaşam zamanlarına sahip  $n$  bileşenden paralel ve seri sistem oluşturmuşlar, ikinci durum olarak da aynı üstel dağılımlı  $n$  bileşenden oluşan diğer bir paralel ve seri sistem oluşturmuşlardır. Birinciden oluşturulan paralel ve seri sistemin yaşam zamanlarının farkının benzer biçimde ikinciden oluşturulan farktan hem stokastik sıralama bakımından hem de olabilirlik oranı bakımından büyük olduğunu göstermişlerdir.

Navarro ve Spizzichino (2009), aynı yaşam zamanı kapulasını paylaşan bileşenlerden oluşan vektörlerin oluşturduğu seri ve paralel sistemlerin stokastik olarak karşılaştırmasını çalışmışlardır. Ortak kapuladaki bazı koşullar altında, heterojen bileşenli seri sistem, ortak güvenilirlik fonksiyonuna sahip homojen bileşenli seri

sistemden daha kötü olduğunu göstermişlerdir. Öyle ki, heterojen bileşenlerin güvenilirlik fonksiyonlarının ortalamasına eşittir. Fakat bu özelliğin keyfi seçilen her kapula için sağlanmadığını da göstermişlerdir. Benzer özellikleri paralel sistemler ve tutarlı sistemler için de göstermişlerdir.

Zhao ve Hu (2010), homojen olmayan geometrik rasgele değişkenlerin toplamı için bozulma oranı sıralamasını elde etmişlerdir. Bunu yaparken parametrelerin geometrik ortalamaları ile bozulma oranı arasındaki ilişkiye dikkat etmişlerdir.

Bu çalışmalar ışığında bağımlı iki bileşenli sistemler için bozulma oranının nasıl karakterize edilebileceğini ortaya çıkarmak amacı ile bir dönüşüm kullanarak literatürde ele alınmayan bazı üstel dağılımlar için sistemlerin bozulma oranlarının karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca bileşenlerin birbirlerine bağımlı olduğu durumda bozulma oranlarının bileşenlerine göre değişip değişmediği tartışılmıştır.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde stokastik sıralama, ortalama kalan ömür sıralaması, bozulma oranı sıralaması ve olabilirlik oranı sıralamasının tanımları özel olarak bu bölümde verilmiştir. Bu sıralamaların birbirleri ile olan ilişkileri farklı bir bakış açısı ile gösterilmeye çalışılmıştır. Bağımlı durum ile ilgili tartışmalara geçmeden önce bağımsız bileşenlerden oluşan paralel sistemin bozulma oranı ile seri sistemin bozulma oranı arasındaki ilişki ortaya çıkarılmıştır.

Sıralama tanımlarının arkasından bileşenlerin yaşam zamanları birbirinden bağımsız olan iki bileşenli seri ve paralel sistemlerin karakterizasyonu verilmiştir. Benzer karakterizasyonun bileşenler bağımlı olduğu durumda ortaya çıkabilmesi için sistemin yaşam fonksiyonu üzerinde bir dönüşüm önerilmiştir. Bu dönüşümün özellikleri verilerek hangi koşullarda sıralamaları ortaya çıkardığından bahsedilmiştir.

#### 3.1 Stokastik Sıralama

Stokastik sıralama güvenilirlik analizinde, özellikle de sistem güvenilirliği uygulamalarında çok kullanılan bir metottur. Çünkü sonlu beklenen değere sahip iki yaşam zamanının ortalama uzunluğunu karşılaştıran bir sıralamadır.

$T_1$  ve  $T_2$  gibi yaşam zamanını gösteren iki rasgele değişkeni göz önüne alalım.  
 $\forall t \in (0, \infty)$  için

$$S_{T_1}(t) \leq S_{T_2}(t)$$

ise  $T_1$  yaşam zamanı,  $T_2$  yaşam zamanından stokastik olarak daha küçüktür denilir ve

$$T_1 \leq_{st} T_2$$

ile gösterilir. Eğer  $E[T_i] < \infty$  ve  $\int_0^{\infty} S_{T_i}(t) dt < \infty$ ,  $i = 1, 2$  varsayımları altında,

$E[T_i] = \int_0^{\infty} S_{T_i}(t) dt$  olduğu hatırlanırsa, yukarıdaki eşitsizliğe denk olarak,

$$E[T_1] \leq E[T_2]$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür (Shaked ve Shanthikumar, 1994).

### 3.2 Bozulma Oranı Sıralaması

Bozulma oranı sıralaması; bozulma oranı fonksiyonlarını göz önünde bulundurarak rasgele değişkenlerin birim zamandaki bozulma hızları bakımından karşılaştırmasını yapmaktır. Öyle ki;

$T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenleri negatif değerler almayan ve mutlak sürekli dağılımları (dolayısı ile yoğunluk fonksiyonları bulunan) olan iki yaşam zamanını gösterebilir.  $T_1$  rasgele değişkeninin bozulma oranı  $r(t)$  ile ve  $T_2$  rasgele değişkeninin bozulma oranı  $q(t)$  ile gösterilmek üzere,  $\forall t \in (0, \infty)$  için

$$r(t) \geq q(t)$$

ise,  $T_1$  rasgele değişkeni  $T_2$  rasgele değişkenine göre daha küçük bir güvenilirliğe ya da daha çok bozulmaya sahip olabileceği söylenir ve bu

$$T_1 \leq_{hr} T_2$$

biçiminde ifade edilir. Bunun anlamı,  $T_1$  rasgele değişkeni bozulma oranı sıralamasına göre  $T_2$  rasgele değişkeninden daha küçük olduğu anlamındadır. Bu rasgele değişkenler

yaşam zamanlarını gösterdiği için  $T_1$  rasgele değişkeni  $T_2$  rasgele değişkenine göre daha küçük yaşam zamanını temsil etmektedir.

Bozulma oranı sıralamasına denk tanımları aşağıdaki alt maddeler halinde vermek mümkündür:

I.  $\forall t \in (0, \infty)$  için

$$\frac{S_{T_1}(t)}{S_{T_2}(t)}$$

oranı  $t$  nin artmayan bir fonksiyonudur.

II.  $\forall t < t'$  için

$$S_{T_1}(t)S_{T_2}(t') \geq S_{T_2}(t)S_{T_1}(t')$$

III.  $\forall t$  ve  $\forall x > 0$  için

$$P(T_1 > t + x | T_1 > t) \leq P(T_2 > t + x | T_2 > t)$$

Bu üç denk tanım  $T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenlerinin mutlak sürekli olmadığı durumlar için de geçerlidir. Sadece kesikli değerler alan rasgele değişkenler için aşağıdaki denk tanım verilebilir:

IV.  $T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenleri  $\{0,1,2,\dots\}$  kesikli değerlerini alan rasgele değişkenler olsunlar. Bu durumda,

$$\frac{P(T_1 = n)}{P(T_1 > n)} \geq \frac{P(T_2 = n)}{P(T_2 > n)}, \quad n \in \{0,1,2,\dots\}$$

ise  $T_1 \leq_{hr} T_2$  dir.

Sadece sürekli dağılımlar için aşağıdaki denk tanım verilebilir.

V.  $\forall u \in (0,1)$  için,

$$\frac{S_{T_1} S_{T_2}^{-1}(u)}{u}$$

oranı  $u$  nun azalmayan bir fonksiyonudur. Burada  $S^{-1}(u)$ ,  $S(t)$  nin ters fonksiyonudur (Shaked ve Shanthikumar, 1994).

Stokastik sıralama ile bozulma oranı sıralaması arasındaki ilişki için bozulma oranı sıralamasının stokastik sıralamayı gerektirdiği söylenebilir. Yani;

$$(i) T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$$

ilişkisi geçerlidir. Bu ilişkiyi kolaylıkla göstermek mümkündür.

$$r(t) \geq q(t)$$

olduğundan, güvenilirlik fonksiyonu ile bozulma oranı fonksiyonu arasındaki ilişki hatırlanırsa;

$$\underbrace{e^{-\int_0^t r(z) dz}}_{S_{T_1}(t)} \leq \underbrace{e^{-\int_0^t q(z) dz}}_{S_{T_2}(t)}$$

sonucuna ulaşılmış olur.

$$(ii) T_1 \leq_{hr} T_2 \Leftrightarrow [T_1 | T_1 > t] \leq_{st} [T_2 | T_2 > t]$$

bu çift yönlü gerektirme denk tanım (III) den kolaylıkla görülmektedir.

Aşağıdaki açıklayıcı örnekte bileşenlerin, sistemi bozulma oranı bakımından nasıl etkilediği gösterilmeye çalışılmıştır.

**Örnek 3.1** A ve B marka pillerden 50 şer çift alınarak küçük bir el radyosuna takılıyor. Radyonun bu iki tür pil için çalışma süreleri saat olarak belirleniyor. Piller pil besleme yatağına seri bağlandıkları için radyonun güç sistemi aşağıdaki gibi olacaktır:



Şekil 3.1 : Seri bağlı piller

A marka pilden alınan ikişerli çiftlerin ( $A_1, A_2$ ) bozulma zamanları ve sistemin bozulma zamanları verilmiştir.

Çizelge 3.1 A marka pil ömrü

	A1	A2	A1^A2		A1	A2	A1^A2		A1	A2	A1^A2		A1	A2	A1^A2
1	1,00	0,14	0,14	26	3,14	0,28	0,28	51	0,65	10,07	0,65	76	0,10	2,06	0,10
2	9,79	0,15	0,15	27	0,94	2,86	0,94	52	0,07	0,00	0,00	77	8,44	0,18	0,18
3	9,52	3,68	3,68	28	1,53	3,23	1,53	53	0,62	0,30	0,30	78	1,13	19,80	1,13
4	13,2	4,71	4,71	29	1,83	2,17	1,83	54	5,50	1,20	1,20	79	0,91	0,84	0,84
5	1,08	1,10	1,08	30	2,08	0,57	0,57	55	0,28	3,20	0,28	80	0,01	0,33	0,01
6	0,86	1,78	0,86	31	0,14	0,09	0,09	56	0,43	1,32	0,43	81	2,48	0,46	0,46
7	0,64	3,08	0,64	32	0,63	0,50	0,50	57	24,0	1,76	1,76	82	0,51	6,00	0,51
8	12,3	3,02	3,02	33	2,42	2,97	2,42	58	1,95	3,19	1,95	83	0,26	2,71	0,26
9	7,92	2,77	2,77	34	7,56	5,68	5,68	59	6,02	0,35	0,35	84	15,39	0,86	0,86
10	8,03	2,91	2,91	35	0,33	0,54	0,33	60	5,98	11,88	5,98	85	10,88	1,34	1,34
11	14,5	1,73	1,73	36	2,54	2,71	2,54	61	5,39	5,46	5,39	86	8,89	3,55	3,55
12	4,90	3,53	3,53	37	3,11	2,02	2,02	62	5,48	8,46	5,48	87	0,38	1,21	0,38
13	3,02	9,97	3,02	38	9,64	3,43	3,43	63	2,71	11,71	2,71	88	6,26	0,16	0,16
14	3,6	14,5	3,60	39	0,78	19,8	0,78	64	2,41	1,91	1,91	89	4,58	5,17	4,58
15	1,47	12,8	1,47	40	0,55	16,7	0,55	65	1,64	2,60	1,64	90	6,22	1,82	1,82
16	3,36	0,39	0,39	41	1,39	0,19	0,19	66	0,80	7,00	0,80	91	3,13	7,79	3,13
17	4,97	4,35	4,35	42	9,23	1,00	1,00	67	5,70	13,58	5,70	92	3,62	2,91	2,91
18	22,2	1,20	1,20	43	2,79	0,80	0,80	68	14,0	3,28	3,28	93	1,79	12,97	1,79
19	0,92	9,75	0,92	44	2,84	2,12	2,12	69	9,52	9,53	9,52	94	4,46	1,40	1,40
20	0,86	0,35	0,35	45	3,37	0,57	0,57	70	6,99	9,20	6,99	95	0,91	7,34	0,91
21	11,0	0,77	0,77	46	9,15	0,31	0,31	71	5,19	17,29	5,19	96	2,35	8,34	2,35
22	0,29	3,11	0,29	47	0,77	3,93	0,77	72	2,75	1,78	1,78	97	9,09	5,72	5,72
23	0,25	6,08	0,25	48	9,84	3,81	3,81	73	0,28	4,43	0,28	98	0,92	16,73	0,92
24	12,8	15,4	12,8	49	0,42	11,3	0,42	74	0,57	1,32	0,57	99	0,87	1,23	0,87
25	2,60	3,47	2,60	50	6,54	2,87	2,87	75	3,05	0,24	0,24	100	0,27	8,15	0,27

B marka pilden alınan ikişerli çiftlerin ( $B_1, B_2$ ) bozulma zamanları ve sistemin bozulma zamanları ise Çizelge 3.2’de verilmiştir.

Çizelge 3.2 B marka pil ömrü

	B1	B2	B1^B2		B1	B2	B1^B2		B1	B2	B1^B2		B1	B2	B1^B2
1	3,67	2,61	2,61	26	10,16	4,36	4,36	51	6,00	1,25	1,25	76	1,89	11,13	1,89
2	2,24	5,80	2,24	27	0,07	3,87	0,07	52	8,62	0,05	0,05	77	3,97	0,70	0,70
3	0,53	0,38	0,38	28	26,32	7,93	7,93	53	1,21	14,21	1,21	78	5,92	11,20	5,92
4	2,18	8,62	2,18	29	32,44	5,07	5,07	54	1,82	1,96	1,82	79	0,03	3,74	0,03
5	0,57	5,92	0,57	30	2,39	9,91	2,39	55	2,76	4,02	2,76	80	0,40	8,22	0,40
6	1,84	12,4	1,84	31	7,06	12,4	7,06	56	19,6	1,08	1,08	81	3,93	15,37	3,93
7	5,45	1,28	1,28	32	8,18	11,1	8,18	57	1,77	1,83	1,77	82	1,44	18,35	1,44
8	3,77	16,5	3,77	33	1,01	23,2	1,01	58	1,80	3,05	1,80	83	10,79	0,07	0,07
9	6,76	1,91	1,91	34	2,65	3,16	2,65	59	0,37	0,33	0,33	84	13,08	0,57	0,57
10	10,4	9,70	9,70	35	0,70	0,34	0,34	60	2,44	1,68	1,68	85	0,43	11,48	0,43
11	8,03	11,5	8,03	36	9,47	10,3	9,47	61	13,9	3,47	3,47	86	1,09	4,20	1,09
12	2,98	7,44	2,98	37	31,72	2,34	2,34	62	5,70	14,01	5,70	87	0,73	2,75	0,73
13	5,74	1,76	1,76	38	5,52	2,40	2,40	63	4,09	8,53	4,09	88	4,08	7,25	4,08
14	1,15	7,01	1,15	39	3,60	5,03	3,60	64	9,78	2,57	2,57	89	3,02	6,26	3,02
15	8,85	10,8	8,85	40	5,50	5,19	5,19	65	10,4	2,30	2,30	90	4,90	1,49	1,49
16	4,38	5,52	4,38	41	3,51	1,02	1,02	66	5,08	2,80	2,80	91	0,72	4,84	0,72
17	2,46	0,48	0,48	42	0,65	8,74	0,65	67	0,95	5,55	0,95	92	0,07	15,28	0,07
18	2,97	12,7	2,97	43	2,78	28,6	2,78	68	2,46	2,25	2,25	93	16,49	14,74	14,74
19	5,42	1,02	1,02	44	5,24	10,5	5,24	69	2,13	6,42	2,13	94	8,17	1,22	1,22
20	5,74	3,24	3,24	45	2,64	13,9	2,64	70	15,3	2,97	2,97	95	0,96	6,09	0,96
21	7,14	1,33	1,33	46	8,17	27,0	8,17	71	2,71	2,71	2,71	96	6,59	4,02	4,02
22	3,22	4,01	3,22	47	2,54	7,46	2,54	72	2,04	3,23	2,04	97	6,76	5,74	5,74
23	1,74	2,32	1,74	48	3,93	11,5	3,93	73	2,13	2,04	2,04	98	1,02	0,43	0,43
24	6,12	41,5	6,12	49	10,83	6,33	6,33	74	10,2	5,36	5,36	99	3,08	5,80	3,08
25	19,1	10,5	10,59	50	0,41	9,58	0,41	75	7,18	5,20	5,20	100	2,99	4,61	2,99

A marka pil kullanıldığında radyo sistemine ait 15'er dakikalık ölçümlerle elde edilen bozulma oranları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.3 A marka pillerin kullanıldığı radyonun çalışma süreleri ve bozulma oranı

Saat	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25
Sağlam parça sayısı	100	90	72	65	52	47	44	41	34	32	30	27	23	20
Toplam bozulmuş parça sayısı	10	28	35	48	53	56	59	66	68	70	73	77	80	82
t anındaki bozulma oranı	0,40	0,80	0,39	0,80	0,38	0,26	0,27	0,68	0,24	0,25	0,40	0,59	0,52	0,40
Saat	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6	6,25	6,5	6,75
Sağlam parça sayısı	18	14	13	13	12	10	10	9	7	4	3	3	3	3
Toplam bozulmuş parça sayısı	86	87	87	88	90	90	91	93	96	97	97	97	97	98
t anındaki bozulma oranı	0,89	0,29	0,00	0,31	0,67	0,00	0,40	0,89	1,71	1,00	0,00	0,00	0,00	1,33

B marka pil kullanıldığında radyo sisteminin bozulma oranları aşağıdaki gibidir.

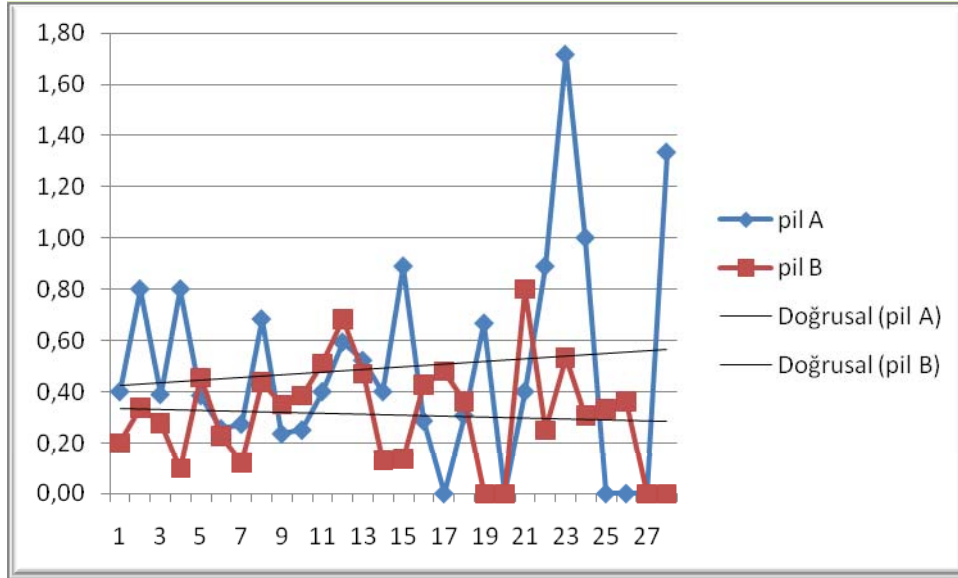
Çizelge 3.4 B marka pillerin kullanıldığı radyonun çalışma süreleri ve bozulma oranı

Saat	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25
Sağlam parça sayısı	100	95	87	81	79	70	66	64	57	52	47	41	34	30
Toplam bozulan parça sayısı	5	13	19	21	30	34	36	43	48	53	59	66	70	71
t anındaki Bozulma oranı	0,20	0,34	0,28	0,10	0,46	0,23	0,12	0,44	0,35	0,38	0,51	0,68	0,47	0,13

Saat	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6	6,25	6,5	6,75
Sağlam parça sayısı	29	28	25	22	20	20	20	16	15	13	12	11	10	10
Toplam bozulan parça sayısı	72	75	78	80	80	80	84	85	87	88	89	90	90	90
t anındaki Bozulma oranı	0,14	0,43	0,48	0,36	0,00	0,00	0,80	0,25	0,53	0,31	0,33	0,36	0,00	0,00

A ve B marka piller kullanılarak çalıştırılan radyonun bozulma oranının grafik gösterimi Şekil 3.2 de verilmiştir.



Şekil 3.2 Karşılaştırmalı pil ömürleri

B marka pil kullanıldığında radyo daha uzun süre ile çalışmaktadır. Çünkü bozulma oranı daha düşük seyretmektedir.

### 3.3 Olabilirlik Oranı Sıralaması

Stokastik sıralamalar iç içe kümeler şeklinde düşünülürse, en içteki diğer bütün kümelerce kapsanan sıralama olabilirlik oranı sıralamasıdır. Literatürde en bilinen şekli ile tanımı aşağıdaki gibidir;

$T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenlerinin yoğunluk fonksiyonları sırası ile  $f_{T_1}(t)$  ve  $g_{T_2}(t)$  olsun.  $\forall t < t'$  için

$$\frac{f_{T_1}(t)}{g_{T_2}(t)} \geq \frac{f_{T_1}(t')}{g_{T_2}(t')}$$

ise olabilirlik oranı bakımından  $T_1$  rasgele değişkeni  $T_2$  rasgele değişkeninden daha küçüktür denilir ve

$$T_1 \leq_{lr} T_2$$

ile gösterilir.

Şimdi olabilirlik oranı sıralaması ile ilgili denk tanımları verelim:

(i)  $T_1 \leq_{lr} T_2 \Leftrightarrow G_{T_2} F_{T_1}^{-1}$  konveks bir fonksiyondur.

$G_{T_2} F_{T_1}^{-1}$  konveks bir fonksiyon olduğundan  $\frac{dG_{T_2} F_{T_1}^{-1}(u)}{du}$  ifadesi  $u$  nun azalmayan bir

fonksiyonudur. Eğer  $F_{T_1}^{-1}(u) = t$  alınırsa,  $\frac{dG_{T_2}(t)}{dF_{T_1}(t)} = \frac{\frac{dG_{T_2}(t)}{dt}}{\frac{dF_{T_1}(t)}{dt}} = \frac{g_{T_2}(t)}{f_{T_1}(t)}$  oranı  $t$  nin

azalmayan bir fonksiyonudur. Buradan da sonuç elde edilir.

(ii)  $\forall t \leq t'$  için  $[T_1 | t \leq T_1 \leq t'] \leq_{st} [T_2 | t \leq T_2 \leq t']$  ise  $T_1 \leq_{lr} T_2$  dir.

Koşullu olasılık ve  $\leq_{st}$  nin tanımı gereği

$$\frac{P(x < T_1 \leq t')}{P(t < T_1 \leq t')} \leq \frac{P(x < T_2 \leq t')}{P(t < T_2 \leq t')}$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\int_x^{t'} f_{T_1}(v) dv \left[ \int_t^x g_{T_2}(u) du + \int_x^{t'} g_{T_2}(v) dv \right] \leq \int_x^{t'} g_{T_2}(v) dv \left[ \int_t^x f_{T_1}(u) du + \int_x^{t'} f_{T_1}(v) dv \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ortalama Değer Teoremi uygulandığında bu eşitsizlik,

$$\begin{aligned} (t'-x)f_{T_1}(\xi_2)[(x-t)g_{T_2}(\xi_1) + (t'-x)g_{T_2}(\xi_2)] \leq \\ [(x-t)f_{T_1}(\xi_1) + (t'-x)f_{T_1}(\xi_2)](t'-x)g_{T_2}(\xi_2) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (t'-x)(x-t)f_{T_2}(\xi_2)g_{T_2}(\xi_1) + (t'-x)(t'-x)f_{T_1}(\xi_2)g_{T_2}(\xi_2) \\ \leq \\ (x-t)(t'-x)f_{T_1}(\xi_1)g_{T_2}(\xi_2) + (t'-x)(t'-x)f_{T_1}(\xi_2)g_{T_2}(\xi_2) \end{aligned}$$

eşitliliği elde edilir ki buradan,

$$f_{T_1}(\xi_2)g_{T_2}(\xi_1) \leq f_{T_1}(\xi_1)g_{T_2}(\xi_2) \Rightarrow \frac{f_{T_1}(\xi_2)}{g_{T_2}(\xi_2)} \leq \frac{f_{T_1}(\xi_1)}{g_{T_2}(\xi_1)}$$

sonucu elde edilir.

Olabilirlik oranı ile bozulma oranı sıralaması arasındaki ilişki;

$$T_1 \leq_{lr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{hr} T_2$$

Bunu denk tanım (I) den faydalanarak göstermeye çalışalım:

$$S_{T_2}(t) + G_{T_2}(t) = 1$$

eşitliği geçerlidir.

$$F_{T_1}(t) = 1 - u \text{ ve } S_{T_1}(t) = u$$

alınıp yukarıdaki eşitlikte yerine yazıldığında

$$S_{T_2} S_{T_1}^{-1}(u) + G_{T_2} F_{T_1}^{-1}(1 - u) = 1 \Rightarrow S_{T_2} S_{T_1}^{-1}(u) = 1 - G_{T_2} F_{T_1}^{-1}(1 - u)$$

eşitliği elde edilir.  $G_{T_2} F_{T_1}^{-1}$  dönüşümü konveks olduğundan  $u$  nun azalmayan bir fonksiyonu olup  $1 - G_{T_2} F_{T_1}^{-1}(1 - u)$  ifadesi  $u$  nun azalmayan bir fonksiyonudur. Bozulma oranı sıralamasının (V.) denk tanımından olabilirlik oranı sıralamasının bozulma oranı sıralamasını gerektirdiği sonucuna ulaşılır.

### 3.4 Ortalama Kalan Yaşam Sıralaması

Güvenirlikte, istatistiksel analizlerde ve birçok alanda ortalama kalan yaşam çalışılmıştır ve birçok sonuç türetilmiştir.  $t$  yaşındaki bir bileşen veya sistemin kalan yaşam süresi ortalama kalan yaşam zamanı olarak adlandırılır. Bir parça için optimal hata verene kadarki süreyi bulmak için ortalama kalan yaşam önemli bir kriterdir.

Guess ve Proschan (1988) bu metodun teori ve uygulamalarını yeniden ele almıştır. Son 20 yıldır birçok kişi tarafından konuyla ilgili makaleler yazılmış ve birçok revizyon önemli hale gelmiştir. Tezin konusu gereği bu konuya yer verilmeyecektir.

Ortalama kalan yaşam sıralamasının matematik tanımı aşağıda verilmiştir.

Sonlu ortalamaya sahip  $t$  yaşındaki bir parçanın kalan ortalama yaşamı

$$m(t) = \begin{cases} E[T - t > 0 | T > t], & t < t^* \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

fonksiyonu ile belirlenir. Burada  $t^* = \sup\{t : S(t) > 0\}$  dir. Bu tanıma göre,

$$m_{T_1}(t) \leq m_{T_2}(t) \Rightarrow T_1 \leq_{mrl} T_2$$

sıralaması verilebilir. Yani  $T_1$  yaşam zamanına sahip parçanın kalan ömrü  $T_2$  ninkine göre daha kısadır. Eğer  $m(t)$  fonksiyonu biraz daha açılırsa;

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty z f(z) dz}{S(t)} = \frac{zF(z)|_t^\infty - \int_t^\infty F(z) dz}{S(t)} = \frac{tS(t) + \int_t^\infty S(z) dz}{S(t)} = t + \frac{\int_t^\infty S(z) dz}{S(t)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik,  $t$  yaşındaki bir parçanın kalan ortalama yaşam zamanının doğal olarak  $t$  den daha küçük olamayacağını göstermektedir. Buna göre, aynı yaştaki iki parça için  $\leq_{mrl}$  bakımından sıralama yapılırken toplamdaki ikinci terim dikkate alınır.

Şimdi bu sıralamanın diğer sıralamalar ile olan ilişkisini vermeye çalışalım:

$$(i) T_1 \leq_{hr} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{mrl} T_2$$

bozulma oranına ilişkin denk tanım (III) den,  $\forall t$  ve  $\forall x > 0$  için

$$\frac{S_{T_1}(t+x)}{S_{T_1}(t)} \leq \frac{S_{T_2}(t+x)}{S_{T_2}(t)}$$

eşitsizliği geçerli olup, bu eşitsizlik aşağıdaki gibi yeniden düzenlendiğinde

$$S_{T_1}(t+x)S_{T_2}(t) \leq S_{T_2}(t+x)S_{T_1}(t)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan, eşitsizliğin her iki tarafı  $x$  değişkenine göre integrali alındığında;

$$S_{T_2}(t) \int_0^{\infty} S_{T_1}(t+x) dx \leq S_{T_1}(t) \int_0^{\infty} S_{T_2}(t+x) dx$$

eşitsizliği de yazılabilir. Şimdi  $t+x=z$  dönüşümü alınıp son ifadeye uygulanırsa,

$$S_{T_2}(t) \int_t^{\infty} S_{T_1}(z) dz \leq S_{T_1}(t) \int_t^{\infty} S_{T_2}(z) dz \Rightarrow \frac{\int_t^{\infty} S_{T_1}(z) dz}{S_{T_1}(t)} \leq \frac{\int_t^{\infty} S_{T_2}(z) dz}{S_{T_2}(t)}$$

elde edilir ki, aynı yaşta iki parça için ortalama geriye kalan yaşam zamanı bakımından birinci parçanın ikinci parçaninkinden daha küçüktür. Yani,  $T_1 \leq_{mrl} T_2$  sıralaması geçerlidir.

$$(ii) T_1 \leq_{mrl} T_2 \Rightarrow T_1 \leq_{st} T_2$$

$t \rightarrow 0$  için  $m_{T_1}(0) \leq m_{T_2}(0)$  geçerli olup,

$$m(0) = \frac{\int_0^{\infty} S(z) dz}{S(0)} = E[T]$$

eşitliği ile sonuca ulaşılır.

Bu dört sıralama arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\leq_{lr} \Rightarrow \leq_{hr} \Rightarrow \leq_{mrl} \Rightarrow \leq_{st}$$

(Lai ve Xai, 2006)

Burada dikkat edilirse olabilirlik oran sıralaması en güçlü sıralama iken stokastik sıralama koşulları en hafif olan, en zayıf sıralamadır.

Kompleks sistemlerde bileşen sayısı birden fazladır. Bu bileşenler aynı koşullar altında çalışır ve genellikle yaşam süreleri birbirlerine bağlıdır. Literatürde de uzun zamandır iki ve çok değişkenli yaşlanmayla ilgili çalışmalar yapılmaktadır.

Muazzam bir uygulama alanına sahip olsa da iki ve çok boyutlu stokastik yaşlanma, tek boyutludan oldukça zordur. Bu konuda daha çok çalışmalar yapılabilir.

Xie ve Lai (1996), yedekleri paralel bağlı sistemler üzerinde çalışan diğer yazarlar gibi, değişkenleri bağımsız varsaymıştır. Bu varsayım gerçek hayatta nadiren geçerlidir. Ayrıca güvenilirlik analizinde bileşenlerin yaşam zamanları genellikle bağımlıdır. Güvenirlik yapısında iki bileşen ya yükü bölüşürler ya da gerilime dayanan aynı grupta yer alırlar. Bu da iki yaşam zamanının birbirleriyle ilişkili olmalarına, ya da bağımlı olmalarına neden olur. Genelde pozitif bağımlı olduklarından bozulma zamanları aynı zamanda uzun veya kısa olmaya meyillilerdir.

Şimdi de bağımsız çalışma zamanı olduğu durumlarda iki bileşenli sistemlerin bozulma oranını açıklamaya çalışalım.

### 3.5 Bileşenleri Bağımsız Olan İki Bileşenli Sistemlerin Karakterizasyonu

$T_{ss}^0$  rasgele değişkeni bağımsız bileşenli seri sistemin yaşam zamanını,  $T_{ps}^0$  rasgele değişkeni ise benzer yapıda paralel sistemin yaşam zamanını gösterebilir. Sistemi oluşturan bileşenlerin özdeş olduğunu yani aynı dağılıma sahip olduğunu kabul edelim.

$$F_{ss}^0(t) = P(T_{ss}^0 \leq t) = 1 - P(T_{ss}^0 > t) = 1 - (1 - F(t))^2 \quad (3.1)$$

ve

$$F_{ps}^0(t) = P(T_{ps}^0 \leq t) = F(t)^2 \quad (3.2)$$

ilgili sistemlerin yaşam zamanlarının dağılım fonksiyonlarını temsil etmektedirler. Bunun yanı sıra,

$$f_{ss}^0(t) = \frac{d}{dt} F_{ss}^0(t) = 2(1 - F(t))f(t) \quad (3.3)$$

$$f_{ps}^0(t) = \frac{d}{dt} F_{ps}^0(t) = 2F(t)f(t) \quad (3.4)$$

yoğunluk fonksiyonları sırası ile seri ve paralel sistemin yaşam zamanlarının yoğunluk fonksiyonlarını temsil etmektedirler. (3.1) ve (3.2) ifadelerinden

$$F_{ss}^0(t) + F_{ps}^0(t) = 2F(t) \quad (3.5)$$

ve

$$f_{ss}^0(t) + f_{ps}^0(t) = 2f(t) \quad (3.6)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür. Sırası ile bozulma oranlarını hesaplayalım:

$$r_{ss}^0(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t)^2 = 2r(t) \quad (3.7)$$

ve

$$r_{ps}^0(t) = \frac{f_{ps}^0(t)}{S_{ps}^0(t)} = \frac{2F(t)f(t)}{1 - F(t)^2} = 2r(t) \frac{F(t)}{1 + F(t)} \quad (3.8)$$

Buradan  $r_{ps}^0(t)$  ile  $r_{ss}^0(t)$  arasındaki ilişki

$$r_{ps}^0(t) = r_{ss}^0(t) \frac{F(t)}{1 + F(t)} = r_{ss}^0(t) \left[ 1 - \frac{1}{1 + F(t)} \right] \quad (3.9)$$

biçiminde bulunabilir.

(3.7) ifadesinden görüldüğü üzere, seri sistemin bozulma oranı monotonluk özelliğini korur. Yani bileşen(ler) IFR, DFR veya CFR özelliğine sahipse sistem bu özelliğini korumaktadır. Ancak, (3.9) dan görüleceği üzere paralel sistem için bu şekilde bir monotonluk sağlanamamaktadır. Sadece IFR bakımından monotonluğunu korumaktadır.

Bundan sonra, sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam zamanı ile sistemin yaşam zamanını stokastik olarak karşılaştırmaya çalışalım. Diğer sıralamaları gerektirdiğinden, öncelikle olabilirlik oranı sıralamasının varlığı araştırılacaktır:

$$\frac{f_{ss}^0(t)}{f(t)} = 2(1 - F(t))$$

oranı  $t$  nin azalan bir fonksiyonu olduğundan,

$$T_{ss}^0 = \min\{T_1, T_2\} \leq_{lr} T_i, \quad i = 1, 2$$

sıralaması geçerlidir. Burada şunu not etmek gerekir ki, hiçbir seri sistem yapısı gereği kendisini oluşturan bileşenlerden daha uzun yaşayamaz. (3.6) ifadesinden hemen görüleceği üzere,  $\frac{f_{ps}^0(t)}{f(t)}$  oranı  $t$  nin azalmayan bir fonksiyonudur. Buradan,

$$T_i \leq_{lr} T_{ps}^0 = \max\{T_1, T_2\}, \quad i = 1, 2$$

sıralaması elde edilir. Doğası gereği hiçbir paralel sistem kendisini oluşturan bileşenlerin yaşam zamanından daha az yaşayamaz. Bu iki sıralamadan elde edilen sonuç

$$T_{ss}^0 \leq_{lr} T_i \leq_{lr} T_{ps}^0, \quad i = 1, 2$$

biçimindedir.

Bileşenleri uyumlu olan sistemlerde genellikle bir bileşenin davranışı diğerini etkilemektedir. Sisteme gelen yükün paylaşımında veya bir şokun etkisinde iken bileşenlerin birbirinden bağımsız olarak davranması gerçek hayatta pek karşılaşılabılır bir durum değildir.

Örneğin sıvı atık temizlemek için kullanılan havuzda iki su arıtıcı pompanın çalıştığını düşünelim. Arıtıcılardan birinin bozulması, diğerine gelen yükün daha fazla olmasına ve daha çabuk tıkanarak işlevini göremez hale gelmesine neden olabilir. Genellikle sistemi oluşturan parçalar birbirleri ile stokastik anlamda bir bağımlılık veya bir birliktelik içindedir.

Bu durum göz önüne alınarak, sistemi oluşturan bileşenlerin böyle bir bağımlılık yapısında sistemin bozulma oranını nasıl etkileyeceği araştırılacaktır.

### 3.6 Bileşenleri Bağımlı Olan İki Bileşenli Sistemlerin Karakterizasyonu

Seri sistemi göz önüne alalım, bu sistemin t anındaki güvenilirliği,

$$P(T_{ss} > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = S(t, t) = S_{ss}(t)$$

dir. Paralel sistemin güvenilirliği ise,

$$\begin{aligned} P(T_{ps} > t) &= P(T_1 > t, T_2 > t) + P(T_1 \leq t, T_2 > t) + P(T_1 \leq t, T_2 > t) \\ &= 1 - F(t, t) \\ &= S_{ps}(t) \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Yine bu iki güvenilirlik fonksiyonu arasındaki ilişki verilmek istenirse,

$$S_{ss}(t) + S_{ps}(t) = 2S(t) \tag{3.10}$$

ile ifade edilir.

Yaşam fonksiyonları üzerinde tanımlanan dönüşüm yardımı ile sistem ile bileşenin, sistem ile bileşenleri bağımsız durumdaki sistemin olabilirlik oranı, bozulma oranı ve ortalama kalan ömür ve stokastik sıralamalar ortaya çıkarılacaktır.

$$\psi_{(\cdot)}(u) = S_{(\cdot)}S^{-1}(u) : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

dönüşümü tanımlansın. Burada  $S_{(\cdot)}$  seri veya paralel sistemin yaşam fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu dönüşüm ile  $(0, \infty)$  aralığından  $(0,1)$  aralığına geçiş yapılması sağlanır ve bu sayede bazı dağılımlar için iki yaşam zamanı arasındaki bozulma oranı sıralamasını analitik olarak görmek mümkün olmaktadır.

**Lemma 3.1** Özdeş parçaları olan bağımlı sistemler için,

$$T_{ss} \leq_{st} T \leq_{st} T_{ps}$$

sıralaması geçerlidir.

**Gösterim:** (3.10) ifadesinden,  $S(t) = \frac{1}{2} S_{ps}(t) + \frac{1}{2} S_{ss}(t)$  biçiminde yazılır. O halde bileşenin yaşam fonksiyonu paralel ve seri sistemin konveks bileşimidir. Dolayısı ile,  $S_{ss}(t) \leq S(t) \leq S_{ps}(t)$  sonucuna ulaşılmış olur. Bu sonucu diğer bir yolla da göstermek mümkündür:

$$S_{ps}(t) = 1 - F(t, t) \geq 1 - F(t) = S(t)$$

ve

$$S(t) \geq P(T_1 > t, T_2 > t) = S_{ss}(t)$$

eşitsizlikleri geçerli olup,

$$S_{ss}(t) \leq S(t) \leq S_{ps}(t) \tag{3.11}$$

sıralaması elde edilir. Stokastik sıralamanın tanımından sonuca ulaşılır.

Şimdi yukarıda tanımlanan dönüşümün hangi durumlarda ne tür sıralamaları çıkardığına ilişkin lemma aşağıda verilecektir.

**Lemma 3.2**

- (i)  $\psi_{ss}(u)$  konveks ise,  $T_{ss} \leq_{lr} T$
- (ii)  $\frac{\psi_{ss}(u)}{u}$  azalmayan bir fonksiyon ise,  $T_{ss} \leq_{hr} T$
- (iii)  $\psi_{ps}(u)$  konkav ise,  $T \leq_{lr} T_{ps}$
- (iv)  $\frac{\psi_{ps}(u)}{u}$  artmayan bir fonksiyon ise,  $T \leq_{hr} T_{ps}$

Not: Burada,  $\psi_{ss}(u)$  konkav olamaz aynı zamanda  $\psi_{ps}(u)$  de konveks olamaz.

**Gösterim:** Öncelikle notun ne demek olduğunu açıklığa kavuşturalım:  $\psi_{ss}(u)$  dönüşümünün konkav olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $\forall \alpha \in [0,1]$  için ve  $\forall 0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$  için;

$$\psi_{ss}((1-\alpha)u_1 + \alpha u_2) \geq \alpha \psi_{ss}(u_2) + (1-\alpha)\psi_{ss}(u_1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Özel olarak,  $u_1 = 0$  ve  $u_2 = 1$  seçilsin. Bu durumda da yukarıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\psi_{ss}(\alpha) \geq \alpha \underbrace{\psi_{ss}(1)}_1 + (1-\alpha) \underbrace{\psi_{ss}(0)}_0 = \alpha$$

Halbuki  $\psi_{ss}(S(t)) = S_{ss}(t)$  olup, (3.11) ifadesine göre  $\psi_{ss}(S(t)) \leq S(t)$  dir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik geçerli ise  $\psi_{ss}(S(t)) \leq S(t)$  olmamalı idi. Bu bir çelişki oluşturduğundan dolayı  $\psi_{ss}(u)$  konkav olamaz. Yine (3.10) ifadesinden,  $\psi_{ps}(u) = 2u - \psi_{ss}(u)$  eşitliğini yazmak mümkündür. Buradan  $\psi_{ps}(u)$  dönüşümünün de konveks olamayacağı açıktır.

(i)  $\psi_{ss}(u)$  konveks ise,  $\frac{d}{du}\psi_{ss}(u)$  türevi  $u$  nun azalmayan bir fonksiyonudur.

$u = S(t)$  alınırsa

$$\frac{d}{dS(t)}\psi_{ss}(S(t)) = \frac{dS_{ss}(t)}{dS(t)} = \frac{\frac{dS_{ss}(t)}{dt}}{\frac{dS(t)}{dt}} = \frac{f_{ss}(t)}{f(t)}$$

ifadesi  $t$  nin artmayan bir fonksiyonudur. Yani,  $\forall t < t'$  için

$$\frac{f_{ss}(t)}{f(t)} \geq \frac{f_{ss}(t')}{f(t')}$$

eşitsizliği geçerlidir. Olabilirlik oranı sıralamasının tanımı gereğince, seri sistemin yaşam zamanı, bileşeninden daha küçüktür. Yani,  $T_{ss} \leq_{hr} T$  sıralaması geçerlidir.

(ii) Eğer (i) geçerli ise, yani  $\psi_{ss}(u)$  konveks ise,  $\forall 0 \leq u_1 < u_2 < u_3 \leq 1$  için

$$\frac{\psi_{ss}(u_2) - \psi_{ss}(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{\psi_{ss}(u_3) - \psi_{ss}(u_2)}{u_3 - u_2} \leq \frac{\psi_{ss}(u_3) - \psi_{ss}(u_1)}{u_3 - u_1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizliğin sol ve sağ tarafındaki ifadeler alınır ve yine özel olarak  $u_1 = 0$  seçilirse, elde edilen eşitsizlik;

$$\frac{\psi_{ss}(u_2) - \psi_{ss}(0)}{u_2} \leq \frac{\psi_{ss}(u_3) - \psi_{ss}(0)}{u_3} \Rightarrow \frac{\psi_{ss}(u_2)}{u_2} \leq \frac{\psi_{ss}(u_3)}{u_3}$$

biçimindedir. Dolayısı ile konvekslik (ii) yi gerektirir. Ancak (i) nin koşulu daha ağır olduğundan (ii) koşulu önerilmiştir.

(iii) ve (iv) gösterimleri, (i) in sonucundan ve (3.10) ifadesinden açıkça görülmektedir.

Bundan sonraki bölümde, bazı iki boyutlu sürekli yaşam dağılımları, özellikle de üstel dağılımla modellenmiş yaşam dağılımları incelenecektir.

### 3.7 Bazı İki Boyutlu Üstel Dağılımlar

Tek boyutlu üstel dağılım parçanın yaşam zamanını açıklamada kullanılmaktadır (Balakrishnan ve Basu 1995). İki boyutlu üstel dağılım ise iki bileşenin birlikte yaşam zamanlarını açıklamada kullanılmaktadır. İki boyutlu üstel dağılımın önemi parçalara şok etkisi ile hasar veren durumlarda ortaya çıkmaktadır. Örneğin  $N_1$  ve  $N_2$ ; 1. ve 2. parçaya etki eden şok sayısını göstermek üzere,  $N_1$  ve  $N_2$  genellikle iki boyutlu geometrik dağılırlar. Marshall ve Olkin'in ve Downton'ın iki boyutlu üstel dağılımları bu tür durumlardan türetilmiştir. İki boyutlu üstel dağılım karışımları da aynı ortamda iki bileşenin bulunduğu durumlarda kullanılmaktadır. Özellikle marjinalleri üstel dağılan iki boyutlu üstel dağılımların güvenilirlikteki önemi; marjinallerinin yaşlanmasının zamana bağlı olmamasıdır.

Marjinalleri üstel dağılan iki boyutlu dağılımlar x-y eksenindeki dönüşümlerle herhangi iki boyutlu dağılımdan elde edilebilmektedir. Bu durum kapulalarla gösterilebilmektedir. Örneğin,  $u = 1 - e^{-x}$  ve  $v = 1 - e^{-y}$  dönüşümleri ile iki boyutlu kapulalardan iki boyutlu üstel dağılımı elde etmek mümkündür. Fakat tezde bu konudan bahsedilmemiştir.

İki boyutlu üstel dağılımların uygulamaları üzerine Basu (1988) ile Balakrishnan ve Basu (1995) çalışmışlardır.

#### 3.7.1 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (I. Tip Model)

Marjinalleri Üstel(1) olan  $(T_1, T_2)$  rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu Gumbel (1960) tarafından önerilmiştir. Buna göre ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = 1 - e^{-t_1} - e^{-t_2} + e^{-(t_1+t_2+\theta t_1 t_2)}, \quad t_1, t_2 > 0, \quad \theta \in [0, 1]$$

ve yaşam fonksiyonu;

$$S(t_1, t_2) = e^{-(t_1+t_2+\theta t_1 t_2)}, \quad t_1, t_2 > 0, \quad \theta \in [0,1]$$

şeklindedir. Burada  $\theta$  pozitif birliktelik parametresidir.  $\theta = 0$  durumu  $T_1$  ve  $T_2$  nin bağımsız olmasına karşılık gelmektedir.

### 3.7.2 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (II. Tip Model)

Gumbel'in ikinci modeli, Farlie Gumbel Morgenstern (FGM) iki boyutlu dağılımının marjinal dağılımlarının Üstel olması durumudur. Buna göre,  $(T_1, T_2)$  rasgele vektörünün marjinalleri Üstel( $\lambda$ ) dağılmak üzere ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = (1 - e^{-\lambda t_1})(1 - e^{-\lambda t_2}) \left[ 1 + \alpha e^{-\lambda(t_1+t_2)} \right] \quad t_1, t_2 > 0, \quad \alpha \in [-1,1], \quad \lambda > 0$$

şeklinde olup yaşam fonksiyonu

$$S(t_1, t_2) = e^{-\lambda(t_1+t_2)} \left[ 1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t_1})(1 - e^{-\lambda t_2}) \right]$$

şeklindedir. Burada  $\lambda$  bileşenlerin bozulma oranını,  $\alpha$  ise birliktelik parametresini göstermektedir (Gumbel, 1960).  $\alpha = 0$  durumu bağımsızlığı ifade etmektedir.

### 3.7.3 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılım (III. Tip Model)

Marjinalleri Üstel(1) dağılmak üzere, Gumbel'in III. Tip modelinin dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = 1 - e^{-t_1} - e^{-t_2} + e^{-(t_1^m + t_2^m)^{1/m}}, \quad t_1, t_2 > 0, \quad m \geq 1$$

şeklindedir (Gumbel, 1960). Burada  $m$  birliktelik parametresini göstermektedir ve  $m = 1$  durumu bağımsızlığı ifade etmektedir. Yaşam fonksiyonu ise;

$$S(t_1, t_2) = e^{-(t_1^m + t_2^m)^{1/m}}, \quad t_1, t_2 > 0, \quad m \geq 1$$

biçimindedir.

### 3.7.4 Block ve Basu'nun İki Boyutlu Üstel Dağılımı

$(T_1, T_2)$  rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = 1 - \frac{\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1) - \frac{\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2) \\ + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\delta \min(t_1, t_2)\} + \frac{\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\}$$

şeklindedir (Block ve Basu 1974). Burada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$  pozitif reel sayılar ve  $\delta = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$  şeklinde tanımlanmaktadır ayrıca,  $\lambda_i$   $i$ . bileşene gelen ortalama şok zamanını,  $\lambda_{12}$  de bileşenlere gelen ortak şok zamanını göstermektedir.  $\delta$  ise toplam şok süresini ifade etmektedir. Ortak yaşam fonksiyonu ise,

$$S(t_1, t_2) = \frac{\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\delta \max(t_1, t_2)\}$$

biçimindedir. Burada marjinal dağılımlar Üstel değildir fakat iki üstel dağılımın bir karmasıdır;

$$F_1(t_1) = 1 - \frac{\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1\} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\delta t_1\}$$

$T_2$  rasgele değişkeninin marjinali de benzer şekildedir.

### 3.7.5 Cowan'ın İki Boyutlu Üstel Dağılımı

Marjinaleri Üstel(1) olan  $(T_1, T_2)$  rasgele vektörü için ortak dağılım fonksiyonu,

$$H(t_1, t_2) = 1 - e^{-t_1} - e^{-t_2} + e^{-\frac{1}{2}(t_1+t_2+\sqrt{t_1^2+t_2^2-2t_1t_2\cos\alpha})}$$

$t_1, t_2 > 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$  şeklindedir (Cowan 1987). Yaşam fonksiyonu ise;

$$S(t_1, t_2) = e^{-\frac{1}{2}(t_1+t_2+\sqrt{t_1^2+t_2^2-2t_1t_2\cos\alpha})}$$

biçimindedir. İki boyutlu yüzeyde tanımlanan poisson sürecinden türetilmiş olup burada  $\alpha$  iki vektör arasındaki açıdır.

### 3.7.6 Marshall ve Olkin'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı

Marjinaleri sırasıyla  $\lambda_1 + \lambda_{12}$ ,  $\lambda_2 + \lambda_{12}$  parametrelili üstel dağılmak üzere  $(T_1, T_2)$  rasgele vektörünün ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1} - e^{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2} + e^{-\lambda_{12}\max(t_1, t_2)} \quad t_i > 0, \lambda_i > 0, \lambda_{12} > 0 \quad (i = 1, 2)$$

yaşam fonksiyonu,

$$S(t_1, t_2) = e^{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)}, \quad t_i > 0, \lambda_i > 0, \lambda_{12} > 0 \quad (i = 1, 2)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Marshall ve Olkin 1967).

Her zaman ölümcül olan şokların etkisinde kalan iki bileşenden oluşan bir sistem ele alınsın. Rasgele  $X$  anında gelen bir şok birinci bileşeni, rasgele  $Y$  anında gelen bir başka şok ikinci bileşeni ve rasgele  $Z$  anında gelen diğer bir şok ise her iki bileşeni de

öldürmektedir.  $X, Y$  ve  $Z$  anlarında gelen bu şoklar birbirinden bağımsız olup sırasıyla  $\lambda_1, \lambda_2$  ve  $\lambda_{12}$  ortalamalar ile ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} > 0$ ) Poisson sürecine göre gelmektedir.  $T_1$  ve  $T_2$  rasgele değişkenleri sırasıyla birinci ve ikinci bileşenin yaşam zamanlarını göstermek üzere

$$T_1 = \min(X, Z)$$

$$T_2 = \min(Y, Z)$$

biçiminde tanımlanır.

### 3.7.7 Singpurwalla ve Youngren'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı

Çevre koşulları zamana göre stokastik olarak değişen ve bileşenlerin bu koşullardan etkilenmeleri aynı düzeyde olmayan iki bileşenli sistemlerin yaşam zamanlarını modellemede kullanılmasını Singpurwalla ve Youngren (1993) önermiştir. Buna göre

ortak dağılım fonksiyonu;

$$H(t_1, t_2) = 1 - e^{-\frac{\theta}{2}t_1} - e^{-\frac{\theta}{2}t_2} + \sqrt{\frac{1 - \theta \min(t_1, t_2) + \theta \max(t_1, t_2)}{1 + \theta(t_1 + t_2)}} e^{-\theta \max(t_1, t_2)} ; t_1, t_2 > 0, \theta > 0$$

ve ortak yaşam fonksiyonu,

$$S(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{1 - \theta \min(t_1, t_2) + \theta \max(t_1, t_2)}{1 + \theta(t_1 + t_2)}} e^{-\theta \max(t_1, t_2)} ; t_1, t_2 > 0, \theta > 0$$

biçiminde tanımlıdır. Burada  $\theta$ , bileşenlere etki eden ortak şok parametresini temsil etmektedir.

#### 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

İki boyutlu üstel dağılımlar, güvenilirlik içerisinde bir şekilde yer almaktadır. Güvenirlik derken bir parçanın ya da bir organizmanın bozulma veya ölümü göz önüne alınmaktadır. Kullanılmaya başlanması ile bozulması arasında geçen zaman düşünülmektedir. Tez çalışması, bileşenlerin yaşam zamanları ortak bir etki altında iken sistemin yaşam zamanını, ortak etki olmadığı durum ile karşılaştırılmasına dayanmaktadır.

Bu bölümde öncelikle, iki boyutlu üstel dağılımlardan Gumbel dağılımının 3 modelinin bozulma oranı sıralamaları seri ve paralel sistemler için araştırılmıştır. Daha sonra Block ve Basu'nun, Cowan'ın, Marshall ve Olkin'in ve son olarak da Singpurwalla ve Youngren'in iki boyutlu üstel dağılımları göz önüne alınarak bozulma oranı sıralaması bakımından seri ve paralel sistemleri incelenmiştir.

Dağılımların bazılarında, özellikle  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  arasında bozulma oranı sıralamasını yapmak mümkün olmamıştır. Sistemlerin bozulma oranının monotonluğuna bakıldığında ise yine çoğu sistemin bileşenlerinin sahip olduğu bozulma oranı özelliğini sağlamadığı görülmüştür.

##### 4.1 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (I. Tip Model) için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Bileşenleri özdeş olan seri sistemin güvenilirlik fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = \exp\{-(2t + \theta t^2)\}$$

ve buna bağlı olarak yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{ss}(t) = (2 + 2\theta t) \exp\{-(2t + \theta t^2)\}$$

olup, bozulma oranının tanımından;

$$r_{ss}(t) = -\frac{d \ln S_{ss}(t)}{dt} = 2(1 + \theta t)$$

dir. Görüldüğü üzere  $r_{ss}(t)$ ,  $t$  nin artan bir fonksiyonudur.

Bileşenleri CFR olan seri sistemin kendisi IFR oldu. Bu durumda monotonluk sağlanmamıştır.

Şimdi  $\psi_{ss}(\cdot)$  dönüşümünü kullanarak bileşenle sistemin kendisini sıralayalım;

$$\psi_{ss}(u) = S_{ss} S^{-1}(u) = u^2 e^{-\theta(-\ln(u))^2}$$

$(-\ln(u))^2$  konkav bir fonksiyon olduğundan,  $e^{-\theta(-\ln(u))^2}$  hem pozitif tanımlı hem de konveks bir fonksiyondur. Bunun yanında  $u^2$  fonksiyonu da konveks bir fonksiyon olup  $\psi_{ss}(u)$  'nun kendisi de konvekstir. Lemma 3.2 (i) gereğince

$$T_{ss} \leq_{lr} T$$

sıralaması geçerlidir. Şimdi bileşenleri bağımsız olduğu durumdaki sistemi, yani  $T_{ss}^0$  'ı düşünüp yukarıdaki sıralamada nerede yer alıyor buna bakalım:

$$\varphi_{ss}^0(u) = S_{ss} S_{ss}^{0-1}(u) = u e^{-\theta(-\frac{1}{2}\ln(u))^2}$$

fonksiyonu da konveks olduğundan,

$$T_{ss} \leq_{lr} T_{ss}^0$$

sıralaması geçerlidir. Hemen bileşenleri bağımsız seri sistem ile bileşenin kendisini sıralayalım.  $S_{ss}^0(t) = S(t)^2$  ile  $S(t)$  üzerindeki dönüşüm ise  $\psi_{ss}^0(u) = S_{ss}^0 S^{-1}(u) = u^2$  olup konveks bir fonksiyondur. Dolayısı ile yukarıdaki sıralamayı,

$$T_{ss} \leq_{lr} T_{ss}^0 \leq_{lr} T$$

biçiminde geliřtirmek mümkündür.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistemin güvenilirlik fonksiyonu

$$S_{ps}(t) = 2S(t) - S_{ss}(t)$$

ve ilgili yoğunluk fonksiyonu

$$f_{ps}(t) = 2f(t) - f_{ss}(t)$$

olup, paralel sistemin bozulma oranı

$$\begin{aligned} r_{ps}(t) &= \frac{f_{ps}(t)}{S_{ps}(t)} = \frac{2f(t) - f_{ss}(t)}{2S(t) - S_{ss}(t)} \\ &= \frac{2S(t) - r_{ss}(t)S_{ss}(t)}{2S(t) - S_{ss}(t)} \\ &= 2 \frac{1 - (1 + \theta t)e^{-(t+\theta^2)}}{2 - e^{-(t+\theta^2)}} \end{aligned}$$

biçimindedir. Bu ifadenin birinci türevine bakılarak monotonluğu hakkında bir kanıya varılmaya çalışılırsa;

$$\frac{dr_{ps}(t)}{dt} = \frac{2e^{-(t+\theta^2)} \left[ (2\theta t + 1)^2 - 2\theta + \theta e^{-(t+\theta^2)} \right]}{\left[ e^{-(t+\theta^2)} - 2 \right]^2}$$

ifadesindeki  $\theta e^{-(t+\theta^2)}$  fonksiyonu için

$$\theta e^{-(t+\theta^2)} \geq \theta - \theta(t + \theta^2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik türev ifadesinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}\frac{dr_{ps}(t)}{dt} &\geq \frac{2e^{-(t+\theta^2)} \left[ (2\theta t + 1)^2 - 2\theta + \theta - \theta(t + \theta t^2) \right]}{\left[ e^{-(t+\theta^2)} - 2 \right]^2} \\ &= \frac{2e^{-(t+\theta^2)} \left[ 3\theta^2 t^2 + 3\theta t + 1 - \theta \right]}{\left[ e^{-(t+\theta^2)} - 2 \right]^2} \geq 0\end{aligned}$$

alt sınırı elde edilir. Görüldüğü üzere birinci türev negatif tanımlı değildir. Buradan  $r_{ps}(t)$ 'nin azalmayan olduğu söylenebilir. Seri sistemde olduğu gibi paralel sistemde de monotonluk korunmamıştır.

Şimdi  $\psi_{ps}(\cdot)$  dönüşümü kullanarak bileşenle sistemin kendisini sıralayalım;

$\psi_{ps}(u) = 2u - \psi_{ss}(u)$  olduğu için konkav bir fonksiyondur. Lemma 3.2 (iii) gereği

$$T \leq_{lr} T_{ps} \quad (4.1)$$

sıralaması geçerlidir. Bu durumda,  $T_{ps}^0$  in yerini belirlememiz gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki dönüşümleri göz önüne alalım:

$$\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$$

ve bu dönüşümün ters dönüşümü

$$\psi_{ps}^{0^{-1}}(v) = (1-v)^{\frac{1}{2}}$$

olup ,

$$\psi_{ps}(\psi_{ps}^{0^{-1}}(v)) = 2(1-v)^{\frac{1}{2}} - \psi_{ss}((1-v)^{\frac{1}{2}})$$

dönüşümü elde edilir. Kolaylık olması bakımından,  $\psi_{ps}^{0^{-1}}(v) = \eta(v)$  denilsin.  $\eta(v)$

konkav bir fonksiyon olup,  $\psi_{ps}(\eta(v))$  için

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\psi_{ss}(\eta(v))}{dv^2} &= \frac{d}{dv} \left[ \frac{d\psi_{ps}(\eta(v))}{dv} \right] \\
&= \frac{d}{dv} [\psi'_{ps}(\eta(v))\eta'(v)] \\
&= \psi''_{ps}((\eta(v))\eta'(v))^2 + \psi'_{ps}(\eta(v))\eta''(v)
\end{aligned}$$

ikinci dereceden türevi elde edilir. Burada,  $\psi_{ps}$  ve  $\eta(v)$  konkav fonksiyonlardır. Bunun yanında  $\psi_{ps}$  azalmayan bir fonksiyon olduğundan, türev ifadesindeki her iki toplam da negatiftir. Buradan  $\psi_{ps}(\eta(v)) = \psi_{ps}(\psi_{ps}^{0-1}(v))$  konkav bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Yine Lemma 3.2 (iii) ün sonucu olarak,

$$T_{ps}^0 \leq_{lr} T_{ps} \quad (4.2)$$

sıralaması elde edilir. Görüldüğü üzere, (4.1) ile (4.2) ifadeleri karşılaştırılamamaktadır. Ancak  $\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$  konkav bir fonksiyon olduğundan,  $T$  bu sıralamanın en solunda yer alacaktır. Buna göre,

$$T \leq_{lr} T_{ps}^0 \leq_{lr} T_{ps}$$

sıralaması elde edilir.

## 4.2 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (II. Tip Model) için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Seri sistem için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = S^2(t)[1 + \alpha F^2(t)] = e^{-2\lambda t} [1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})^2]$$

ve buna bağlı olarak bozulma oranı fonksiyonu;

$$r_{ss}(t) = 2\lambda \left[ 1 - \alpha \frac{(1 - e^{-\lambda t})e^{-\lambda t}}{1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})^2} \right]$$

elde edilir. Buradan, seri sistemin bozulma oranının bileşeninki gibi sabit olmadığı söylenebilir.

$\psi_{ss}(u)$  dönüşümü,

$$\psi_{ss}(u) = S_{ss}S^{-1}(u) = u^2(1 + \alpha(1-u)^2)$$

şeklindedir.

$S_{ss}^0(t) = e^{-2\lambda t}$  olup,  $\psi_{ss}^0(u)$  dönüşümü,

$$\psi_{ss}^0(u) = u^2$$

şeklindedir.  $\psi_{ss}^0(u)$  ve  $\psi_{ss}(u)$  fonksiyonları karşılaştırmak istenilirse;

$$\frac{\psi_{ss}(u)}{\psi_{ss}^0(u)} = 1 + \alpha(1-u)^2$$

oranının artan mı azalan mı olduğuna bağlı olarak sıralama belirlenecektir. Oranın ilk türevine bakılırsa,

$$\frac{d\psi_{ss}(u)}{d\psi_{ss}^0(u)} = -2\alpha(1-u) \text{ olup, bu türevin işareti } \alpha \text{ 'nın işaretine göre incelenecektir;}$$

$\alpha > 0$  ise oranı artmayandır, bu durumda  $T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss}$  dır,

$\alpha < 0$  ise oranı azalmayandır ve sıralama  $T_{ss} \leq_{hr} T_{ss}^0$  şeklindedir. Şimdi  $T$  'nin bu sıralamanın neresinde olacağına bakılması gerekir;

$$\frac{\psi_{ss}^0(u)}{u} = u \text{ olduğundan } T_{ss}^0 \leq_{hr} T \text{ sıralaması geçerlidir. Eğer } T_{ss} \text{ ile } T \text{ nin sıralaması}$$

yapılırsa, bu üç rasgele değişkenin sıralaması verilebilir. Ona göre;

$$\frac{\psi_{ss}(u)}{u} = u(1 + \alpha(1-u)^2)$$

olup  $\alpha < 0$  durumunda, fonksiyon azalmayan olduğundan  $T_{ss} \leq_{hr} T$  sıralaması geçerlidir.

$\alpha > 0$  durumunda ise türevin işaretine bakılarak karar verilecektir.

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{\psi_{ss}(u)}{u} &= 1 + \alpha(1-u)^2 + u(-2\alpha(1-u)) \\ &= 1 + \alpha(1-u)(1-u-2u) \\ &= 1 + \alpha(1-4u+3u^2) \end{aligned}$$

$3u^2 - 4u + 1$  ikinci dereceden polinom konkav olup minimum noktasına  $\frac{2}{3}$  de sahiptir.

Bu değerin polinomda yerine konulması ile aşağıdaki alt sınır elde edilir;

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{\psi_{ss}(u)}{u} &\geq 1 + \alpha\left(1 - \frac{8}{3} + \frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{3} > 0 \end{aligned}$$

görüldüğü üzere türev pozitif tanımlıdır. Dolayısı ile  $\frac{\psi_{ss}(u)}{u}$  azalmayan olup,  $T_{ss} \leq_{hr} T$  sıralaması geçerlidir.

Seri sistem için  $T, T_{ss}$  ve  $T_{ss}^0$  rasgele değişkenlerinin sıralaması

$$\alpha < 0 \Rightarrow T_{ss} \leq_{hr} T_{ss}^0 \leq_{hr} T$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$$

biçiminde verilir.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistem için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t} [1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})^2]$$

olup, bozulma oranı fonksiyonu

$$r_{ps}(t) = \lambda \left[ 1 - \frac{\alpha e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) - 3\alpha e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) + 1}{2 - e^{-\lambda t} (1 + \alpha(1 - e^{-\lambda t})^2)} \right]$$

dır. Buradan görülmektedir ki seri sistem gibi, paralel sistem için de monotonluk korunmamıştır.

$\psi_{ps}(u)$  dönüşümü;

$$\psi_{ps}(u) = 2u - u^2(1 + \alpha(1 - u)^2)$$

şeklindedir. Fonksiyonun ikinci türevinin işaretine bakılırsa,

$$\frac{d}{du} \psi_{ps}(u) = 2 - 2u - 2\alpha u - 4\alpha u^3 + 6\alpha u^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} \psi_{ps}(u) &= -2 - 2\alpha + 12\alpha u - 12\alpha u^2 \\ &= -2 + \alpha - 12\alpha \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 \end{aligned}$$

$\alpha > 0$  durumunda, ikinci türev negatif işaretlidir.

$\alpha < 0$  durumunda,  $\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 \leq \frac{1}{4}$  eşitsizliği göz önüne alınır;

$$-2 + \alpha - 12\alpha \left(\frac{1}{2} - u\right)^2 \leq -3\alpha + \alpha - 2 = -2(\alpha + 1) \leq 0$$

olup, ikinci türev bu durumda da negatiftir.

Bu durumda  $\alpha \in [-1, 1]$  iken ikinci türevin işareti negatif, yani  $\psi_{ps}(u)$  konkavdır.

Lemma 3.2 (iv)'den

$$T \leq_{hr} T_{ps}$$

elde edilir.

Benzer adımlar  $T_{ps}^0$  ile  $T$  nin karşılaştırması için yapılacaktır.

$$\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$$

$$\frac{d}{du} \psi_{ps}^0(u) = 2 - 2u$$

$$\frac{d^2}{du^2} \psi_{ps}^0(u) = -2$$

buradan  $\psi_{ps}^0(u)$  konkav bir fonksiyondur. Bu durumda Lemma 3.2 (iv)'den

$$T \leq_{hr} T_{ps}^0$$

sıralaması elde edilir.

Şimdi  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  sıralaması için

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2 - u(1 + \alpha(1 - u)^2)}{2 - u}$$

oranı göz önüne alınacaktır. Bu orana dikkat edilirse,

$$\frac{\psi_{ps}(0)}{\psi_{ps}^0(0)} = 1 \text{ ve } \frac{\psi_{ps}(1)}{\psi_{ps}^0(1)} = 1$$

olmak üzere  $u$ 'nun farklı değerleri için oran aynı değeri almaktadır. Rolle Teoremi gereğince bu oran monoton olamaz. Bu durumda,  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  bozulma oranı bakımından karşılaştırılmamaktadır. Ayrıca  $\alpha = 0$  durumunda bağımsızlık söz konusudur ve  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  birbirine eşittir.

### 4.3 Gumbel İki Boyutlu Üstel Dağılımı (III. Tip Model) için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Marjinal dağılımları Üstel(1) için seri sistemin yaşam zaman fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = e^{-2^{\frac{1}{m}} t}$$

ve sistemin bozulma oranı,

$$r_{ss}(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_{ss}(t) = 2^{\frac{1}{m}}$$

olup, bileşenin bozulma oranı ise,

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t) = 1$$

dir. Hemen görüleceği gibi seri sistem, bileşeninki gibi CFR özelliğine sahiptir. Yani monotonluk korunmaktadır. Bunun yanında  $r_{ss}(t) \geq r(t)$  olup,

$$T_{ss} \leq_{hr} T$$

sıralaması da hemen yazılabilir.

(3.7) ifadesinden  $r_{ss}^0(t) > 2r_{ss}(t)$  olup,

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre, yaşam zamanları sıralaması ise;

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$$

şeklinde elde edilir.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistemin yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = 2e^{-2t} - e^{-2^{\frac{1}{m}}t}$$

olmak üzere, bozulma oranı fonksiyonu;

$$r_{ps}(t) = 1 - \frac{(2^{\frac{1}{m}}e^{-2^{\frac{1}{m}}t} - 2e^{-t})}{2e^{-t} - e^{-2^{\frac{1}{m}}t}}$$

biçiminde yazılır, görüldüğü gibi bu oran sabit değildir. Dolayısı ile monotonluk sağlanamaz.

$\psi_{ps}(u)$  dönüşümü;

$$\psi_{ps}(u) = 2u - u^{2^{\frac{1}{m}}}$$

ile verilir  $T$  ve  $T_{ps}$  karşılaştırılması için,

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{u} = 2 - u^{2^{\frac{1}{m}}-1}$$

oranına bakıldığında,  $1 \leq 2^{\frac{1}{m}}$  olduğundan bu oran  $u$  da artmayandır. Buradan;

$$T \leq_{hr} T_{ps}$$

sıralaması geçerli olur.

$\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$  konkav olduğundan  $T \leq_{hr} T_{ps}^0$  sıralaması yazılır.

Şimdi  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  rasgele değişkenleri karşılaştırılmak istenirse

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2u - u^{2^{\frac{1}{m}}}}{2u - u^2} = \frac{2 - u^{2^{\frac{1}{m}}-1}}{2 - u}$$

oranının monotonluğunu kontrol etmek yeterli olacaktır. Bu orana dikkat edilirse;

$$u = 1 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

elde edilir ki bu durumda  $T_{ps}^0$  ve  $T_{ps}$  karşılaştırılmaz çünkü Rolle Teoremi gereği bu oran monoton olamaz. Ayrıca  $m = 1$  durumunda bağımsızlık söz konusudur ve  $T_{ps}^0$  ve  $T_{ps}$  birbirine eşittir.

#### 4.4 Block ve Basu'nun İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Bileşenleri özdeş seri sistemin yaşam fonksiyonu,

$$S_{ss}(t) = \frac{\delta}{2\lambda} \exp\{-(2\lambda + \lambda_{12})t\} - \frac{\lambda_{12}}{2\lambda} \exp\{-\delta t\} = e^{-\delta t}$$

biçiminde elde edilir. Bozulma oranı fonksiyonu ise;

$$r_{ss}(t) = \delta$$

dir. Burada hemen dikkat çekmek gerekir ki, bileşenlerin yaşam zamanının bozulma oranı sabit değildir. Çünkü marjinalerin dağılımı üstel dağılımın bir karmasıdır. Bunu görmek için; bileşenlerin önce yaşam fonksiyonunu, sonra da bozulma oranını elde edelim.

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\delta}{2\lambda} e^{-\lambda t - \lambda_{12} t} - \frac{\lambda_{12}}{2\lambda} e^{-\delta t} \\ &= e^{-(\lambda + \lambda_{12})t} \left[ \frac{\delta}{2\lambda} - \frac{\lambda_{12}}{2\lambda} e^{-\lambda t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(t) &= (\lambda + \lambda_{12}) - \frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\delta - \lambda_{12} e^{-\lambda t}}{2\lambda} \right) \\
&= \lambda + \lambda_{12} - \frac{\lambda_{12} \lambda e^{-\lambda t}}{\delta - \lambda_{12} e^{-\lambda t}}
\end{aligned}$$

Görüldüğü üzere seri sistemin bileşenine ait bozulma oranı sabit değildir. Bozulma oranının yönü tespit edilmek istenirse  $r(t)$  nin birinci türevine bakılabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
r'(t) &= \lambda_{12} \lambda^2 e^{-\lambda t} (\delta - \lambda_{12} e^{-\lambda t}) + \lambda_{12}^2 \lambda^2 e^{-2\lambda t} \\
&= \delta \lambda_{12} \lambda^2 e^{-\lambda t} > 0
\end{aligned}$$

olduğundan bileşen IFR özelliğine sahiptir.

Seri sistem bozulma oranı bakımından bileşeninki ile benzer özellik göstermemektedir.

Buradaki sonuç oldukça ilginçtir. Çünkü bileşeni IFR olan seri sistemin kendisi CFR oldu. Yani sistemde iyileşme görülmüştür.

Şimdi yaşam zamanlarını sıralayabilmek için  $\psi_{ss}(u)$  dönüşümü göz önüne alınacaktır.

Ona göre,

$$\psi_{ss}(u) = \frac{\delta}{2\lambda} u^{\frac{\delta}{\lambda}} - \frac{\lambda_{12}}{2\lambda} u^{\frac{\delta}{\lambda}} = u^{\frac{\delta}{\lambda}}$$

olup,  $T_{ss}$  ile  $T$  rasgele değişkenlerini karşılaştırmak için,

$$\frac{\psi_{ss}(u)}{u} = u^{\frac{\delta}{\lambda}-1}$$

oranı yazılır. Bu oran azalmayan olduğundan Lemma 3.2 (ii) gereği

$$T_{ss} \leq_{hr} T$$

sıralaması elde edilir.  $T_{ss}$  ve  $T_{ss}^0$  karşılaştırılırsa;

$$\frac{\psi_{ss}(u)}{\psi_{ss}^0(u)} = \frac{u^\delta}{u^{2(\lambda+\lambda_{12})} \left( \frac{\delta}{2\lambda} - \frac{\lambda_{12}}{2\lambda} u^\lambda \right)^2}$$

ifadesinin birinci turevi alındığında, turevin pay ifadesi  $-\frac{\lambda_{12}u^{\lambda_{12}-1}}{2\lambda}(\delta(1-u^\lambda))$  olduğundan  $\frac{\psi_{ss}(u)}{\psi_{ss}^0(u)}$  oranı  $u$  'da artmayandır ve

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss}$$

sıralaması elde edilir.  $T_{ss}^0 \leq_{hr} T$  olduğu göz önüne alındığında üçlü sıralama;

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$$

biçiminde elde edilir.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistemin yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = e^{-(\lambda+\lambda_{12})t} \left( \frac{2\delta - (\delta + \lambda_{12})e^{-\lambda t}}{2\lambda} \right)$$

şeklindedir. Bozulma oranı fonksiyonu ise;

$$r_{ps}(t) = \lambda + \lambda_{12} - \frac{(\lambda_{12} + \delta)\lambda e^{-\lambda t}}{2\delta - (\lambda_{12} + \delta)e^{-\lambda t}}$$

eşitliği ile verilir. Paralel sistemin monotonluğuna bakılırsa;

bozulma oranı fonksiyonunun birinci türevi

$$r'_{ps}(t) = \frac{2\delta(\delta + \lambda_{12})\lambda^2 e^{-\lambda t}}{[2\delta - (\delta + \lambda_{12})e^{-\lambda t}]^2} \geq 0$$

olduğundan paralel sistem IFR özelliğine sahiptir. Dolayısı ile monotonluk sağlanmaktadır, çünkü bileşen IFR iken sistem IFR özelliğini taşımaktadır.

$T_{ps}$  ile  $T$  yaşam zamanını karşılaştırırsak;

$$\psi_{ps}(u) = \frac{u^{(\lambda_{12}+\lambda)} \left( \frac{2\delta - (\delta + \lambda_{12})u^\lambda}{2\lambda} \right)}{u^{(\lambda_{12}+\lambda)} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right)} = 1 + \delta \left( \frac{1 - u^\lambda}{\delta - \lambda_{12}u^\lambda} \right)$$

olmak üzere, bu oranın birinci turevini bakılırsa;

$$\frac{d}{du} \frac{\psi_{ps}(u)}{u} = \delta \frac{-2\lambda^2 u^{\lambda-1}}{(\delta - \lambda_{12}u^\lambda)^2} \leq 0$$

olduğundan verilen oran artmayandır. Buna göre

$$T \leq_{hr} T_{ps}$$

elde edilir.  $T \leq_{hr} T_{ps}^0$  sıralaması her zaman geçerli olduğuna göre,  $T_{ps}$  ile  $T_{ps}^0$ 'ın karşılaştırılması gerekmektedir.

$$\begin{aligned} \psi_{ps}^0(u) &= u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right) \left( 1 - u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right) \right) \\ \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} &= \frac{u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{2\delta - \delta u^\lambda - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right)}{u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right) \left( 2 - u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right) \right)} \\ &= \frac{(2\delta - u^\lambda(\delta + \lambda_{12}))}{(\delta - \lambda_{12}u^\lambda) \left( 2 - u^{\lambda_{12}+\lambda} \left( \frac{\delta - \lambda_{12}u^\lambda}{2\lambda} \right) \right)} \end{aligned}$$

şeklindedir, oranın monotonluğu araştırılacaktır;

$$u = 1 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

ve

$$u = 0 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

elde edilir ki, bu durumda  $T_{ps}^0$  ve  $T_{ps}$  karşılaştırılmaz çünkü Rolle Teoremi gereği  $\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)}$  oranı monoton olamaz. Dolayısıyla karşılaştırma yapılamamaktadır.

#### 4.5 Cowan'ın İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Bileşenlerin marjinal yaşam zamanları Üstel(1) olmak üzere seri sistemin yaşam fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = e^{-\frac{1}{2}(2t + \sqrt{2t^2 - 2t^2 \cos \alpha})} = e^{-t(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \cos \alpha})}$$

şeklindedir, bozulma oranı ise;

$$r_{ss}(t) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \cos \alpha}$$

biçiminde elde edilir. Buradan görülmektedir ki,  $r_{ss}(t)$   $t$ 'nin bir fonksiyonu olmadığından verilen  $\alpha \in [0, \pi]$  için sabittir, yani monotonluk korunur.

$T_{ss}^0$  rasgele değişkeninin yaşam fonksiyonu,

$$S_{ss}^0(t) = e^{-2t}$$

ve bozulma oranı;

$$r_{ss}^0(t) = 2$$

olup, bileşenin bozulma oranı ise,  $r(t) = 1$  dir.

Buna göre tanım gereği,  $1 \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \leq 2$  olduğundan  $r(t) \leq r_{ss}(t) \leq r_{ss}^0(t)$  elde edilir ve yaşam fonksiyonlarının sıralaması;

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$$

şeklindedir.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Marjinal dağılımları Üstel(1) olan paralel sistemin yaşam zamanına ilişkin yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = 2e^{-t} - e^{-t \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)}$$

şeklindedir. Ayrıca bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} r_{ps}(t) &= -\frac{d}{dt} \ln \left( -e^{-t} - e^{-t \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)} \right) \\ &= -\frac{d}{dt} \ln \left( e^{-t} (2 - e^{-t \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)}) \right) \\ &= 1 - \frac{d}{dt} \ln \left( 2 - e^{-t \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)} \right) \\ &= 1 - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} e^{-t \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)}}{2 - e^{-t \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buradan da  $r_{ps}(t)$ 'nin monotonluk özelliğini korumadığı söylenebilir.

Yaşam zamanlarını sıralamak için  $\psi_{ps}(u)$  dönüşümü;

$$\psi_{ps}(u) = 2u - u^{(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\alpha})}$$

biçiminde tanımlanır. Hemen görüleceği üzere  $\psi_{ps}(u)$  konkav bir fonksiyon olup, Lemma 3.2 (ii) den dolayı  $T \leq_{hr} T_{ps}$  sıralaması geçerlidir.  $\psi_{ps}^0(u)$  dönüşümü ;

$$\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$$

olmak üzere,  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  rasgele değişkenlerinin sıralamasına bakılırsa;

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2 - u^{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\alpha}}}{2 - u}$$

oranı  $\alpha$ 'nın aldığı değerlere göre değişmektedir. Öyle ki;

$$0 < \alpha < \pi, \quad \text{iken} \quad u = 0 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

$$u = 1 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

olduğundan fonksiyon monoton olamaz, dolayısı ile  $T_{ps}$  ile  $T_{ps}^0$  in karşılaştırılması mümkün değildir.

$$\alpha = 0, \quad \text{iken} \quad \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2u}{2u - u^2} = \frac{2}{2 - u}$$

elde edilir.  $\frac{2}{2-u}$  fonksiyonu  $u$  arttıkça azalmayan olduğundan

$$T_{ps} \leq_{hr} T_{ps}^0$$

sıralaması elde edilir. Benzer şekilde;

$$\alpha = \pi, \quad \text{iken} \quad \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2-u}{2-u} = 1$$

elde edilir. Görüleceği üzere, bu durum bağımsızlığa karşılık gelmektedir yani  $T_{ps}$  ile  $T_{ps}^0$  birbirine eşittir.

#### 4.6 Marshall ve Olkin'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Bileşenleri özdeş olan seri sistem için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = e^{-2\lambda t + \lambda_{12}t}$$

olmak üzere sistemin bozulma oranı;

$$r_{ss}(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_{ss}(t) = 2\lambda + \lambda_{12}$$

olduğundan seri sistemin bozulma oranı sabittir. Bileşeni ile benzer özellik göstermektedir.

$$S_{ss}^0(t) = e^{-2t(\lambda + \lambda_{12})}$$

olmak üzere bozulma oranı;

$$r_{ss}^0(t) = -\frac{d}{dt} \ln S_{ss}^0(t) = 2\lambda + 2\lambda_{12}$$

elde edilir.

Parçanın yaşam zamanı için ise;

$$S(t) = e^{-\lambda t + \lambda_{12}t}$$

olmak üzere bozulma oranı;

$$r(t) = -\frac{d}{dt} \ln S(t) = \lambda + \lambda_{12}$$

elde edilir. Üçünün karşılaştırması yapılırsa;

$$2\lambda + 2\lambda_{12} \geq 2\lambda + \lambda_{12} \geq \lambda + \lambda_{12}$$

yani

$$r_{ss}^0(t) \geq r_{ss}(t) \geq r(t)$$

elde edilir ve yaşam zamanları;

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$$

şeklinde sıralanır.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistem için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = 2e^{-(\lambda+\lambda_{12})t} - e^{-(2\lambda+\lambda_{12})t}$$

olup, bozulma oranı fonksiyonu,

$$\begin{aligned} r_{ps}(t) &= -\frac{d}{dt} \ln(2e^{-(\lambda+\lambda_{12})t} - e^{-(2\lambda+\lambda_{12})t}) \\ &= -\frac{d}{dt} \ln(e^{-(\lambda+\lambda_{12})t} (2 - e^{-\lambda t})) \\ &= \lambda + \lambda_{12} - \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{2 - e^{-\lambda t}} \end{aligned}$$

olduğundan sabit bozulma oranına sahip değildir. Sıralama için ise,  $\psi_{ps}(u) = 2u - u^{\frac{2\lambda+\lambda_{12}}{\lambda+\lambda_{12}}}$

ve  $\psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} &= \frac{2u - u^{\frac{2\lambda + \lambda_{12}}{\lambda + \lambda_{12}}}}{2u - u^2} \\ &= \frac{2 - u^{\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_{12}}}}{2 - u}\end{aligned}$$

oranı elde edilir.  $u = 0$  ve  $u = 1$  için bu oranın aldığı değerlere bakılırsa;

$$u = 1 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

olup Rolle teoremi gereğince oranın monoton olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla  $T_{ps}^0$  ve  $T_{ps}$  için bir karşılaştırma söz konusu değildir. Ayrıca,  $\lambda_{12} = 0$  durumunda bağımsızlık söz konusudur,  $T_{ps}^0$  ve  $T_{ps}$  birbirine eşittir.

$T_{ps}$  ve  $T$  rasgele değişkenleri karşılaştırıldığında;

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{u} = \frac{2u - u^{\frac{2\lambda + \lambda_{12}}{\lambda + \lambda_{12}}}}{u} = 2 - u^{\frac{\lambda}{\lambda + \lambda_{12}}}$$

oranının  $u$  da artmayan fonksiyonu elde edilir. Buna göre sıralama;

$$T \leq_{hr} T_{ps}$$

şeklinde elde edilir.

#### 4.7 Singpurwalla ve Youngren'in İki Boyutlu Üstel Dağılımı için Karakterizasyon

Seri sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

$T_{ss}$  için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ss}(t) = \sqrt{\frac{e^{-\theta t}}{1+2\theta t}}$$

eşitliği ile verilir.

Sistemin bozulma oranı,

$$r_{ss}(t) = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} [-\theta t - \ln(1+2\theta t)] = \frac{3\theta + 2\theta^2 t}{2 + 4\theta t}$$

biçiminde bulunur. Buradan seri sistemin bozulma oranının sabit olmadığı görülmektedir.

Sırası ile bileşenin yaşam fonksiyonu ve bozulma oranı aşağıda verilmiştir.

$$S(t) = e^{-\frac{\theta}{2}t} \quad \text{ve} \quad r(t) = \frac{\theta}{2}$$

Eğer  $r_{ss}(t)$  ifadesini biraz daha açılırsa,

$$r_{ss}(t) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{1+2\theta t} = r(t) + \frac{\theta}{1+2\theta t}$$

elde edilir ki, buradan da  $r_{ss}(t) > r(t)$  olduğundan;

$$T_{ss} \leq_{hr} T$$

sonucuna ulaşılır.

Ayrıca  $r_{ss}^0(t) = 2r(t)$  olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$T_{ss}^0 \leq_{hr} T$$

elde edilir.

$T_{ss}^0$  ve  $T_{ss}$  in karşılaştırılması için;  $r_{ss}(t)$  ve  $r_{ss}^0(t)$  bozulma oranları göz önünde bulundurulacaktır. Ona göre,  $r_{ss}(t)$  yeniden düzenlenip yazıldığında  $r_{ss}(t) = \theta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{1+2\theta t} \right]$  eşitliği ile verilir. Eğer  $t < \frac{1}{2\theta}$  ise  $r_{ss}(t) > r_{ss}^0(t)$ ,  $t > \frac{1}{2\theta}$  olduğunda ise  $r_{ss}(t) < r_{ss}^0(t)$  eşitsizliği geçerlidir. Bozulma oranı sıralamasının tanımı gereği  $T_{ss}$  ve  $T_{ss}^0$  karşılaştırılması mümkün değildir.

Paralel sistem için monotonluk ve sıralamaya bakılırsa;

Paralel sistem için yaşam fonksiyonu;

$$S_{ps}(t) = 2e^{-\frac{\theta t}{2}} - \left( \frac{e^{-\theta t}}{1+2\theta t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olup bozulma oranı fonksiyonu;

$$\begin{aligned} r_{ps}(t) &= -\frac{d}{dt} \ln \left( 2e^{-\frac{\theta t}{2}} - \frac{e^{-\frac{\theta t}{2}}}{\sqrt{1+2\theta t}} \right) \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{d}{dt} \ln \left( 2 - (1+2\theta t)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{\frac{1}{2}(1+2\theta t)^{-\frac{3}{2}} 2\theta}{2 - (1+2\theta t)^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \theta \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\theta t)^{\frac{3}{2}} - (1+2\theta t)} \right] \end{aligned}$$

biçiminde verilir. Görüleceği üzere, paralel sistemin bozulma oranı sabit değildir.

Sıralama için  $\psi_{ps}(u)$  dönüşümü

$$\psi_{ps}(u) = 2u - \frac{u}{(1-4 \ln u)^{\frac{1}{2}}}$$

dır. Benzer şekilde,  $T_{ps}^0$  rasgele değişkeninin yaşam fonksiyonu ve  $\psi_{ps}^0(u)$  dönüşümü

$$S_{ps}^0(t) = 2e^{-\frac{\theta t}{2}} - e^{-\theta \frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad \psi_{ps}^0(u) = 2u - u^2$$

dir.  $T_{ps}$  ile  $T_{ps}^0$  rasgele değişkenlerini karşılaştırmak için,

$$\frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = \frac{2u - \frac{u}{(1-4\ln u)^{\frac{1}{2}}}}{2u - u^2} = \frac{2 - \frac{1}{(1-4\ln u)^{\frac{1}{2}}}}{2 - u}$$

oranının monotonluğu incelenecektir.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

ve

$$u = 1 \Rightarrow \frac{\psi_{ps}(u)}{\psi_{ps}^0(u)} = 1$$

olduğundan bu oran monoton olamaz, dolayısı ile  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  bozulma oranı bakımından karşılaştırılmaz.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Seri ve paralel sistemler için farklı özellikler gösteren bozulma oranı sıralaması incelenerek sistemlerde nasıl farklılıklar gösterdiği teorik olarak verilmiş ve örneklerle açıklanmaya çalışılmıştır. Sistemler bileşenlerinin bağımlı olduğu durumlar için yedi adet üstel ortak dağılım hem seri hem de paralel sistem için incelendiğinde, sistemlerin bazılarında karşılaştırma yapılamamıştır. Çizelge 5.1’de yapılan uygulama çalışmalarda ortaya çıkan monotonluk durumu ve üçlü sıralama özet olarak verilmiştir.

Çizelge 5.1 Monotonluk ve Bozulma Oranı Sıralaması

Dağılım	Sistem	Bileşen ve Sistem Monotonluğu	Üçlü Sıralama
<b>Gumbel I</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunmuyor	$T_{ss} \leq_{lr} T_{ss}^0 \leq_{lr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	$T \leq_{lr} T_{ps}^0 \leq_{lr} T_{ps}$
<b>Gumbel II</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunmuyor	$\alpha < 0 \Rightarrow T_{ss} \leq_{hr} T_{ss}^0 \leq_{hr} T$ $\alpha > 0 \Rightarrow T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
<b>Gumbel III</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunuyor	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
<b>Block ve Basu</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunmuyor	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
<b>Cowan</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunuyor	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
<b>Marshall ve Olkin</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunuyor	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
<b>Singpurwalla ve Youngren</b>	Seri Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta
	Paralel Sistem	Monotonluk Korunmuyor	Üçlü sıralama yapılamamakta

Çizelge 5.1 incelendiğinde görülmektedir ki; incelenen iki boyutlu üstel dağılımların hepsinde ortaya çıkan sonuçlardan birisi, seri sistemlerde sistemin yapısı gereği sistem kendisini oluşturan bileşenlerden daha uzun süre yaşayamazken paralel sistemlerde ise, sistem kendisini oluşturan bileşenlerden daha az yaşayamamaktadır. Bileşenlerin yaşam zamanları birbirlerine bağımlı da olsa bağımsız da olsa bu sonucun değişmediği söylenebilir.

Ayrıca Çizelge 5.1 den de görülmektedir ki; öncelikle seri sistemde Gumbel I. ve II. Tip, Block ve Basu, Singapurwalla ve Youngren iki boyutlu üstel dağılımlarında monotonluk korunmazken, Gumbel III. Tip, Cowan, Marshal ve Olkin iki boyutlu üstel dağılımlarında monotonluk korunmaktadır. Paralel sistemlerde ise, Block ve Basu dışında hiçbir dağılımda monotonluk korunmamıştır.

Çizelge 5.2 de ise özet halde, yapılan uygulama çalışmasında bozulma oranı sıralaması yapılamadığında stokastik sıralama yapılması durumdaki sonuçlar verilmiştir. Bunun nedeni ise bağımlılığın sistemlerin bozulma oranını nasıl etkilediğinin araştırılması ve bozulma oranı sıralaması yapılamadığı durumlarda koşulları daha düşük olan bir sıralamanın yapılabilir olduğunun gösterilmek istenmesidir.

Bağımlılığa ilişkin ortaya çıkan sonuçları şöyle özetleyebiliriz;

Gumbel (I. Tip) ve  $\alpha < 0$  durumunda Gumbel (II. Tip) iki boyutlu üstel dağılımları negatif kadran bağımlıdır (NKB). Bu yönde bir bağımlılık olduğunda  $T_{ss}$ , yaşam zamanı  $T_{ss}^0$ 'dan daha küçük olmaktadır. Diğer geri kalan dört dağılımda ve  $\alpha > 0$  için Gumbel (II. Tip) dağılımında ise bu durum tam tersidir. Singapurwalla ve Youngren'in iki boyutlu üstel dağılımı incelendiğinde ise ne seri sistemde ne de paralel sistemde  $T_{( )}$  ile  $T_{( )}^0$  karşılaştırılmamaktadır. Ancak paralel sistemler için bozulma oranı sıralamasının yapılamadığı durumlar karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, Gumbel (I. Tip) ve  $\alpha = 0$  durumunda Cowan'ın iki boyutlu üstel dağılımları göz önüne alındığında karşılaştırma yapılırken diğerlerinde böyle bir karşılaştırma yapılamamaktadır. Bu nedenle bozulma oranı sıralamasından daha gevşek koşullara sahip olan stokastik

sıralama ile  $T_{ps}$  ile  $T_{ps}^0$ 'ın karşılaştırılması, Singapurwalla ve Youngren'in iki boyutlu üstel dağılımı göz önüne alındığında ise ek olarak  $T_{ss}$  ile  $T_{ss}^0$ 'ın karşılaştırılması yapılmıştır. Tez çalışmasında, ortalama kalan ömür sıralamasına değinilmemiştir. Çünkü bu sıralama ayrı bir araştırma konusudur.

Çizelge 5.2 Bağımlılık Durumu ve Stokastik Sıralama

Dağılım	Sistem	Bağımlılık Durumu	Üçlü Sıralama (Bozulma Oranı Sıralaması)	Üçlü Sıralama (Stokastik Sıralama)
Gumbel I	Seri Sistem	Negatif Kadran Bağımlı	$T_{ss} \leq_{lr} T_{ss}^0 \leq_{lr} T$	-
	Paralel Sistem	Negatif Kadran Bağımlı	$T \leq_{lr} T_{ps}^0 \leq_{lr} T_{ps}$	-
Gumbel II	Seri Sistem	$\alpha < 0 \Rightarrow$ NKB $\alpha > 0 \Rightarrow$ PKB	$\alpha < 0 \Rightarrow T_{ss} \leq_{hr} T_{ss}^0 \leq_{hr} T$ $\alpha > 0 \Rightarrow T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$	-
	Paralel Sistem	$\alpha < 0 \Rightarrow$ NKB $\alpha > 0 \Rightarrow$ PKB	Üçlü sıralama yapılamamakta	$\alpha < 0 \Rightarrow$ $T \leq_{st} T_{ps}^0 \leq_{st} T_{ps}$ $\alpha > 0 \Rightarrow$ $T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$
Gumbel III	Seri Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$	-
	Paralel Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$
Block ve Basu	Seri Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$	-
	Paralel Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$
Cowan	Seri Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$	-
	Paralel Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$
Marshall ve Olkin	Seri Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	$T_{ss}^0 \leq_{hr} T_{ss} \leq_{hr} T$	-
	Paralel Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$
Singpurwalla ve Youngren	Seri Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T_{ss}^0 \leq_{st} T_{ss} \leq_{st} T$
	Paralel Sistem	Pozitif Kadran Bağımlı	Üçlü sıralama yapılamamakta	$T \leq_{st} T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$

Çizelge 5.2 incelenirse, bozulma oranı bakımından sıralama yapılamamış olan dağılımların stokastik olarak sıralamalarının yapılabilir olduğu görülmektedir, bu sıralamalar yapılırken de dağılımların bağımlılığı göz önünde bulundurulmuştur. Bağımlılık ve sıralama arasındaki ilişkiye kısaca değinilirse; pozitif kadran bağımlılığın (PKB) tanımından,  $S(t_1, t_2) \geq S_{T_1}(t_1)S_{T_2}(t_2)$  eşitsizliğinin  $\forall (t_1, t_2) \in (0, \infty)$  için geçerli olduğu hatırlanırsa, bu son eşitsizliğin  $S_{ss}(t) \geq S_{ss}^0(t)$  eşitsizliğini gerektirdiği açıktır. Stokastik sıralamanın tanımından  $T_{ss}^0 \leq_{st} T_{ss}$  olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Öte yandan,  $S_{ps}(t) = 2S(t) - S_{ss}(t)$  olduğu hatırlanırsa,  $S_{ps}(t) \leq S_{ps}^0(t)$  eşitsizliğinin de geçerli olduğu görülür. Açıkça,  $T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$  dır. Bu sonuç negatif kadran bağımlı olan  $(T_1, T_2)$  çiftleri için tam tersinedir. Yani  $T_{ss} \leq_{st} T_{ss}^0$  ve  $T_{ps}^0 \leq_{st} T_{ps}$  sıralamaları geçerlidir.

Bu tartışmadan, Gumbel (II. Tip,  $\alpha > 0$ ), Gumbel (III. Tip), Block ve Basu, Cowan, Marshal ve Olkin, Singapurwalla ve Youngren iki boyutlu üstel dağılımları pozitif kadran bağımlılığı sergilediğinden,  $T_{ps} \leq_{st} T_{ps}^0$  sıralamasının sağlandığı söylenebilir. Sonuç olarak, bozulma oranı sıralaması bakımından karşılaştırılamayan  $T_{ps}$  ve  $T_{ps}^0$  rasgele değişkenlerinin hiç olmazsa stokastik anlamda sıralanabilmektedir. Bunun yanında, Gumbel (II. Tip,  $\alpha < 0$ ) iki boyutlu üstel dağılımı negatif kadran bağımlı bir aileden olduğundan  $T_{ps}^0 \leq_{st} T_{ps}$  biçiminde bir sıralama yapılabilir. Singapurwalla ve Younger'in iki boyutlu üstel dağılımına sahip  $(T_1, T_2)$  rasgele vektörü göz önüne alındığında, oluşturulan seri sistem için  $T_{ss}^0 \leq_{st} T_{ss}$  geçerlidir.

Öneri olarak, bahsedilen iki boyutlu üstel dağılımların göz önüne alındığı paralel ve seri sistemlerde bozulma oranının sistemi oluşturan bileşenlerine göre nasıl ve hangi yönde değiştiği incelenebilir. Bu konuda fazlaca çalışma bulunmamaktadır.

## KAYNAKLAR

- Akmadi, J. and Arghami, N.R. 2001. Some Univariate Stochastic Orders on Record Values, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 30: 1, 69 - 74.
- Aly, E.E. and Kochar, S.C. 1993. On Hazard Rate Ordering of Dependent Variables, *Adv Appl. Prob.* 25, 477-482.
- Asadi, M., Ebrahimi, N., Hamedani, G.G. and Sofi, E.S. 2004. Maximum Dynamic Entropy Models, *Journal of Applied Probability*, Vol. 41, No. 2 pp. 379-390.
- Balakrishnan, N. and Lai, C.D. 2009. *Continuous bivariate distributions*, Second Edition, Springer.
- Balakrishnan, N. and Basu, A.P. (Eds.) 1995. *The Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications*. Taylor and Francis, Philadelphia.
- Balkema, A. A. and De Hann, L. 1974. Residual Life at Great Age, *Annals of Probability*, 2(5), 792 – 804.
- Barlow, R. and Proschan, F. 1975. *Statistical theory of reliability and life testing*. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- Basu, A.P. 1988. Multivariate Exponential Distributions and Their Applications in Reliability, *Handbook of Statistics, Volume 7, Quality Control and Reliability*, P.R. Krishnaiah, and C.R. Rao (eds.), pp. 467–476. North-Holland, Amsterdam.
- Bhattacharjee, M.C. 1982. The Class of Mean Residual Lives and Some Consequences, *SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods*, 3, 56 – 65.
- Block, H.W. and Basu, A.P. 1974. A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 69, No. 348, pp. 1031-1037.
- Boland, P.J. and Proschan, F. 1994. Stochastic Order in System Reliability Theory. In: M. Shaked and J.G. Shanthikumar, Editors, *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego pp. 485–508.
- Boland, P.J. 1998. An Arrangement Increasing Property Of The Marshall–Olkin Bivariate Exponential. *Statistics And Probability Letters*, 37, 167–170.
- Boland, P.J., El-Newehi, E. and Proschan, F. 1994. Application of The Hazard Rate Ordering in Reliability And Order Statistics, *Journal Of Applied Probability*, Vol. 31, No. 1, pp. 180-192.

- Boland, P.J. and El-Newehi, E. 1995. Component Redundancy vs System Redundancy in Hazard Rate Ordering, IEEE Transactions On Reliability, Vol. 44, No. 4, pp. 614-619.
- Brindley, E. C. Jr. and Thompson, W. A. Jr. 1972. Dependence and Aging Aspects of Multivariate Survival, Journal of the American Statistical Association, 67, 822 – 830.
- Choi, I.K. and Kim, G-W. 1998. The Failure Rate And Likelihood Ratio Ordering Of Standby Redundant Systems, Korean J. Comp. & Appl. Math. Vol. 5, No. 1, pp. 41 – 50.
- Cowan R. 1987. A Bivariate Exponential Distributions Arising in Random Geometry, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Part A, pp.103-111.
- Cox, D. R. 1962. Renewal Theory, Methuen & Co., London.
- El-Newehi, E. and Sethuraman, J. 1993. Optimal Allocation Under Partial Ordering of Lifetimes of Components, Advances in Applied Probability, 25, 914-925.
- Guess, F. and Proschan, F. 1988. Mean Residual Life: Theory and Applications, In P. R. Krishnaiah and C. R. Rao (editors), Handbook of Statistics, Vol 7, pp. 215 - 224, Elsevier Science, Amsterdam.
- Gumbel, E.J. 1960. Bivariate exponential distributions, Journal of the American Statistical Association 55, 698–707.
- Gupta, R.D. and Nanda, A.K. 2001. Some Results On Reversed Hazard Rate Ordering, Communications in Statistics - Theory and Methods, Volume 30, Issue 11 November, pp. 2447 - 2457.
- Gupta, R.C., Gupta, R.D. and Gupta, P.L. 2006. Monotonicity of The (Reversed) Hazard Rate of The (Maximum) Minimum in Bivariate Distributions, Metrika, 63, pp. 223–241, Springer.
- Hall, W. J. and Wellner, J. A. 1981. Mean Residual Life, In M. Csörgö, D. A. Dawson, J. N. K. Rao and A. K. Md. E. Saleh (Editors), Proceeding of the International Symposium on Statistics and Related Topics, pp. 169 – 184, North Holland, Amsterdam.
- Harris, R.A. 1970. Multivariate Definition for Increasing Hazard Rate Distribution, Annals of Mathematical Statistics, 41, 713-717.
- Heckman, J.J. and Singer, B. 1986. Economics Analysis of Longitudinal Data, In Z. Griliches and M. D. Intriligator (Editors), Handbook of Econometrics, Vol. 3, pp. 1689-1763, North Holland, Amsterdam.

- Joo, S. and Mi, J. 2010. Some Properties of Hazard Rate Functions of Systems with Two Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 140, 444 – 453.
- Kamins, M. 1962. Rules for Planned Replacement of Aircraft and Missile Parts, RAND Memo RM-2810-PR, RAND Corp, Santa Monica, California.
- Kao, J.H.K. 1959. A Graphical Estimation of Mixed Weibull Parameters in Life Testing of Electronic Tubes, *Technometrics*, 1, 389 – 407.
- Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. 2005. Dependence, Dispersiveness, and Multivariate Hazard Rate Ordering, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 19:4, 427-446.
- Kochar, S., Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. 1999. The “Signature” of a Coherent System and Its Application to Comparisons Among Systems, *Naval Research Logistics*, Vol. 46.
- Kochar, S. and Xu, M. 2007. Stochastic Comparisons of Parallel Systems When Components Have Proportional Hazard Rates, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 21, 597 - 609.
- Kotz, S. and Shanbhag, D. N. 1980 . Some New Approaches to Probability Distributions, *Advances in Applied Probability*, 12, 903 - 921.
- Krohn, C.A. 1969. Hazard Versus Renewal Rate of Electronic Items, *IEEE Transactions on Reliability*, R-18(2), 64 - 73.
- Lai, C.D., Xie, M. and Murthy, D.N.P. 2001. Bathtub-Shaped Failure Rate Life Distributions. In N. Balakrishnan and C. R. Rao (Editors), *Handbook of Statistics, Vol 20, Advances in Reliability*, pp. 69 - 104 , Elsevier Science, Amsterdam.
- Lai, C.D. and Xie, M. 2006. *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*, Springer, New York.
- Lehmann, E. L. and Rojo, J. 1992. Invariant Directional Orderings. *Annals of Statistics*, Vol. 20, Number 4, 2100-2110.
- Marshall, A. W. and Olkin, I. 1967. A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 291 - 302.
- Meilijson, I. 1972. Limiting properties of the mean residual life functions, *Annals of Mathematical Statistics*, 43(1), 354 - 357.

- Nanda, A.K., Jain, K. and Singh, H. 1998. Preservation of Some Partial Orderings Under the Formation of Coherent Systems, *Statistics & Probability Letters*, 39, 123 –131.
- Navarro, J. 2007. Tail Hazard Rate Ordering Properties Of Order Statistics And Coherent Systems, *Naval Research Logistics*, Vol. 54.
- Navarro, J. and Lai, C-D. 2007. Ordering Properties of Systems with Two Dependent Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 36: 3, 645 – 655.
- Navarro, J. and Shaked, M. 2009. Some Properties of The Minimum and The Maximum of Random Variables With Joint Logconcave Distributions, *Metrika* 71:313 - 317, Springer.
- Navarro, J. and Spizzichino, F. 2009. Comparisons of The Series and Parallel Systems with Components Sharing The Same Copula, *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*
- Öztürk, F. ve Özbek, L. 2007. Matematiksel modelleme ve simülasyon.
- Păltănea E. 2008. On The Comparison in Hazard Rate Ordering of Fail-Safe Systems, *Journal of Statistical Planning and Inference* 138, 1993 – 1997.
- Rajarshi, S. and Rajarshi, M.B. 1988. Bathtub Distributions: a review, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 17(8), 2597 – 2621.
- Ross, S.M. 1983. *Stochastic Processes*, Wiley, Newyork.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. 1994. *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego.
- Singpurwalla, N.D. and Youngren, M.A. 1993. Multivariate Distributions Induced by Dynamic Environments, *Scandinavian Journal of Statistics*, Vol. 20, No. 3, pp. 251-261.
- Wong, K. L. 1988. The bathtub does not hold water any more, *Quality and Reliability Engineering International*, 4, 279 – 282.
- Wong, K. L. 1989. Roller-coaster curve is in, *Quality and Reliability Engineering International*, 5(1), 29 – 36.
- Wong, K. L. 1991. The Physical Basis for the Roller-Coaster Hazard Rate Curve for Electronics, *Quality and Reliability Engineering International*, 7(6), 489 – 495.
- Xie, M. and Lai, C.D. 1996. On the Increase of The Expected Lifetime by Parallel Redundancy, *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 13, 171 – 179.

- Valdés, J.E. and Zequeira, R.I. 2006. On The Optimal Allocation of Two Active Redundancies in A Two-Component Seri System, *Operations Research Letters* 34, pp. 49 – 52.
- Zhao, P. and Li, X. 2009. Stochastic Order Of Sample Range From Heterogeneous Exponential Random Variables, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 23, 17–29.
- Zhao, P. and Hu, T. 2010. On Hazard Rate Ordering of The Sums of Heterogeneous Geometric Random Variables, *Journal of Multivariate Analysis*, Vol. 101, issue 1, pp. 44-51.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Berna GÜVENDİREN

**Doğum Yeri:** Ankara

**Doğum Tarihi:** 30.01.1980

**Medeni Hali:** Bekar

**Yabancı Dili:** İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

**İlkokul** : Gazi İlkokulu, 1991

**Hazırlık** : Yükseliş Koleji, 1992

**Orta Okul** : Evrensel Kolej, 1995

**Lise** : Gazi Çiftliği Lisesi, 1998

**Lisans** : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 2004

**Yüksek** : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik  
Anabilimdalı, Ağustos 2010

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl :

Sakarya Üniversitesi, Uzman, 2004 – 2006

Hacettepe Üniversitesi, Uzman, 2006 - ...