

**T. C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONSANTRE KÜTLELİ TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN
TİTREŞİM ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ
Murat SARIGÜL**

**Anabilim Dalı: Makine Mühendisliği
Bilim Dalı: Mekanik
MANİSA, 2011**

**T. C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KONSANTRE KÜTLELİ TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN
TİTREŞİM ANALİZİ**

**DOKTORA TEZİ
Murat SARIGÜL**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hakan BOYACI

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Erdoğan ÖZKAYA

Doç. Dr. Gökhan ALTINTAŞ

Doç. Dr. Cesim ATAŞ

Yrd. Doç. Dr. Zekeriya GİRGİN

Anabilim Dalı: Makine Mühendisliği

Bilim Dalı: Mekanik

MANİSA, 2011

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	4
ÖZET.....	5
İNGİLİZCE ÖZET.....	6
SEMBOLLER LİSTESİ.....	7
TABLolar LİSTESİ.....	9
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	10
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	12
BÖLÜM 2. HAMILTON PRENSİBİ İLE SİSTEM MODELİNİN ELDESİ.....	15
BÖLÜM 3. ANALİTİK ÇÖZÜM.....	26
3.1 ÇOK ÖLÇEKLİ METOD YAKLAŞIMI.....	26
3.2 BASKIN REZONANS ÇÖZÜMÜ.....	28
3.3 SİMPEKTİK METOD KULLANIMI.....	33
BÖLÜM 4. SAYISAL ÇÖZÜM.....	44
4.1 LİNEER ÇÖZÜMLER.....	44
4.1.1 Doğal Frekans.....	44
4.1.2 Mod Şekileri.....	49
4.2 NONLİNEER PROBLEMİN DÜZGÜN REJİM ÇÖZÜMLERİ.....	52
4.2.1. Serbest – Sönümsüz Titreşim Çözümleri.....	52
4.2.2. Zorlanmış-Sönümlü Titreşim Çözümleri.....	63
BÖLÜM 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	69
KAYNAKLAR.....	71

ÖNSÖZ

Bu çalışmamın tamamlamasında saygı değer Hocam Prof. Dr. Hakan BOYACI'ya yapmış olduğu yönlendirmeler ve her türlü desteğinden dolayı şükranlarımı sunarım. Ayrıca hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, eğitim hayatım boyunca motivasyonumu sağlayan ablam Halide'yi de burada anmayı üzerime düşen manevi bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada keyfi bir noktada konsantre kütle taşıyan kirişlerin nonlinear titreşimleri incelenmiştir. Kirişin, Timoşenko tipinde olduğu, her iki ucunun basit mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Ele aldığımız kirişlerin uç noktaların hareketsiz olduğu kabulü altında titreşim esnasında kirişin uzamaları hesaba katılmıştır. Enerji yaklaşımını temel alan Hamilton prensibi yardımıyla sistem matematiksel olarak formüle edilmiş, daha sonra türetilmiş hareket denklemlerine zorlama ve sönüm terimleri eklenmiştir. Probleme yaklaşık çözümleri bulmak için, Çok Ölçekli Metod (Pertürbasyon Yöntemi) kullanılmıştır. Baskın rezonans kabulü altında, analitik çözümler türetilmiştir. Pertürbasyon serilerinin ilk terimleri lineer problemi oluşturmaktadır. Yeni Simplektik Yaklaşım yardımıyla, lineer problemi oluşturan etkileşimli diferansiyel denklemler çözülerek doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilmiştir. Pertürbasyon serilerinin diğer terimleri lineer probleme düzeltmeler olarak karşımıza çıkar. Bu düzeltmeleri içeren Faz-Modülasyon denklemleri Yeni Simplektik Yaklaşım kullanılarak elde edilmiştir. Bu denklemlerden, kirişin titreşim esnasında düzgün rejim bölgesinde titreşimsel karakteristik özelliği belirlenmiştir. Bu amaçla, serbest titreşimler için öncelikle nonlinear frekanslar elde edilmiş, daha sonra zorlamayı dahil ederek dış zorlamaya karşılık genlik grafikleri elde edilmiştir. Böylece konsantre kütleli konumu ve büyüklüğünün nonlinear titreşimlere etkileri analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Timoşenko kirişi; simplektik yaklaşım; çok ölçekli metod; lineer olmayan titreşimler.

ABSTRACT

Nonlinear vibrations of beams carrying a concentrated mass on an arbitrary point have been investigated. It is assumed that the beam is of Timoshenko type, and both ends of it have simply supports. According to these assumption, the extensions of the beam under vibration are taken into account since the end points of these beams are immovable. This system is formulated mathematically by using Hamilton Principle based on Energy Approach and then forcing and damping terms are added to the derived equations of motion. To find out approximately solutions of the problem, Method of Multiple Scale(Perturbation Method) have been used. In case of primary resonance, analytical solutions have been derived. First terms of the perturbation series construct the linear problem. By means of New Symplectic Approach, coupled differential equations constructing linear problem have been solved and natural frequencies and mode shapes have been obtained. The other terms of perturbation series appear as corrections to the linear terms. Amplitude-Phase modulation equations including these correction terms have been derived by using New Symplectic Approach. From these equations, vibrational characteristic specify of the beam have been investigated in the region of steady-state during the vibrations. Thus, nonlinear frequencies for free vibrations are calculated first. Then, external excitation versus amplitude graphs have been obtained by including forcing. Therefore, effects of the position and magnitude of the concentrated mass on nonlinear vibrations have been analysed.

Keywords: Timoshenko beam; new symplectic approach; method of multiple scales; nonlinear vibrations.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bölüm 2:

- x : Yatay koordinat
 t : Zaman
 A : Kirişin nötr eksenine dik kesit alanı
 r : Eğrilik yarıçapı
 L : Kiriş uzunluğu
 I : Kirişin alan atalet momenti ($I = A.r^2$)
 J : Kirişin jirasyon ataleti ($J = A.L^2$)
 ρ : Kirişin hacim başına kütle yoğunluğu
 E : Young's(Elastisite) modülü
 G : Kirişin kayma modülü
 $w(x,t)$: Düşey yer değiştirme
 $u(x,t)$: Yatay yer değiştirme
 $\varphi(x,t)$: Toplam dönme
 $\theta(x,t)$: Kesitin rotasyonel dönmesi
 k : Kesitin düzeltme katsayısı(şekil faktörü)
 ε : Elastik uzama
 κ : Eğilme eğriliği
 γ : Kesme deformasyonu
 M : Konsantre kütle büyüklüğü
 x_s : Kütle konumu
 \hat{F} : Enine yöndeki dağılmış boyutsuz dış zorlama
 $\hat{\mu}$: Enine yöndeki boyutsuz sönüm
 χ : Kesme/eğilme oranı
 ν : Narinlik oranı
 α : Konsantre kütle/ kiriş kütlesi oranı(kütle oranı)
 δ : Varyasyon
 \wedge : Boyutsuzluk işareti

Bölüm 3:

- A, \bar{A} : Enine yer değişimin kompleks genliği ve eşleniği
 B, \bar{B} : Dönmenin kompleks genliği ve eşleniği

- ω_1 : Enine yöndeki doğal frekans
 ω_2 : Dönme doğal frekansı
 Y_i, \bar{Y}_i : Enine deplasman mod şekli ve eşleniği
 $\phi_i, \bar{\phi}_i$: Dönme mod şekli ve eşleniği
 Ω : Enine yöndeki dış zorlamanın frekansı
 ε : Küçük pertürbasyon parametresi
 σ : Ayar parametresi
 u : Keyfi fonksiyonlar
 λ : Özdeğer(genel durum)
 $\tilde{\lambda}, \wp$: Özdeğerler(özel durum)
 X : Özvektör(genel durum)
 Z, H : Diferansiyel denklemin mertebesini düşürmek için kullanılan yeni fonksiyonlar(ε mertebesi)
 β, γ : Diferansiyel denklemin mertebesini düşürmek için kullanılan yeni fonksiyonlar(ε^3 mertebesi)
 f : Enine yöndeki dış zorlama genliği.
 μ : Enine yöndeki sönüm.

Bölüm 4:

- n : rotasyonel doğal frekansın enine doğal frekansa oranını
 ν : poisson oranı
 \aleph : lineer çözüme yapılan katkıları belirten terim
 $(\omega_1)_n$: enine yöndeki nonlinear frekans
 $(\omega_2)_n$: rotasyonel nonlinear frekans

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 1. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=0.01$

Tablo 2. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=0.1$

Tablo 3. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=1.0$

Tablo 4. İlk mod için düzeltme katsayıları(§)

Tablo 5. İkinci mod için düzeltme katsayıları(§)

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Timoşenko tipindeki kiriş modelinin uzama ve dönmesi

Şekil 2. Konsantre kütle taşıyan Timoşenko kirişi.

Şekil 3. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.5, \alpha=1, J/I=100$

Şekil 4. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.5, \alpha=1, J/I=10000$

Şekil 5. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.3, \alpha=1, J/I=10000$

Şekil 6. Farklı kütle konumlarına karşılık enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\alpha=1, J/I=10000$,

Birinci mod

Şekil 7. Farklı kütle oranlarına karşılık frekans-kütle konumu grafiği, $n=0.1, J/I=100$, Birinci mod

Şekil 8. Farklı kütle oranlarına karşılık frekans-kütle konumu grafiği, $n=0.1, J/I=100$, İkinci mod

Şekil 9. Farklı frekans oranlarına göre kirişin birinci enine mod şekilleri, $\eta=0.5, \alpha=1$.

Şekil 10. Farklı frekans oranlarına göre kirişin birinci dönme mod şekilleri, $\eta=0.5, \alpha=1$

Şekil 11. Farklı kütle konumlarına göre kirişin birinci enine mod şekilleri, $n=0.1, \alpha=10$

Şekil 12. Farklı kütle konumlarına göre kirişin birinci dönme mod şekilleri, $n=0.1, \alpha=10$

Şekil 13. Farklı kütle konumlarına göre kirişin ikinci enine mod şekilleri, $n=0.1, \alpha=10$

Şekil 14. Farklı kütle konumlarına göre kirişin ikinci dönme mod şekilleri, $n=0.1, \alpha=10$

Şekil 15. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $J/I=100, \alpha=1, \eta=0.3$

Şekil 16. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $J/I=100, \alpha=1, \eta=0.5$

Şekil 17. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $\alpha=1, \eta=0.5, J/I=10000$

Şekil 18. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $\eta=0.3, \alpha=1, J/I=10000$

Şekil 19. Farklı kütle konumları için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $\alpha=1, J/I=10000$, Birinci mod

Şekil 20. Farklı kütle oranlarına karşılık düzeltme katsayısı-kütle konumu grafiği, $J/I=100, n=0.1, \eta=0.5$, Birinci mod

Şekil 21. Farklı kütle oranlarına karşılık düzeltme katsayısı-kütle konumu grafiği, $J/I=100, n=0.1, \eta=0.5$, İkinci mod

Şekil 22. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\alpha=1, n=0.1$

Şekil 23. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\alpha=1, n=0.1$

Şekil 24. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\alpha=1, n=1$

Şekil 24. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\alpha=1, n=1$

Şekil 25. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\alpha=1, n=1$

- Şekil 26. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $n=0.1$
- Şekil 27. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $n=0.1$
- Şekil 28. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.3$, $n=1$
- Şekil 29. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.3$, $n=1$
- Şekil 30. Farklı frekans oranlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$
- Şekil 31. Farklı frekans oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$
- Şekil 32. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=0.1$, $\alpha=1$
- Şekil 33. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\alpha=1$
- Şekil 34. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\alpha=10$
- Şekil 35. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=0.1$, $\eta=0.5$
- Şekil 36. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\eta=0.5$
- Şekil 37. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\eta=0.3$
- Şekil 38. Farklı frekans oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $\eta=0.5$, $\alpha=0.1$
- Şekil 39. Farklı frekans oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Timoşenko kiriş teorisi, 20'nci yüzyıl başlarında Ukrayna doğumlu bilim adamı Stephen Timoshenko tarafından geliştirilmiştir [Timoshenko(1921), (1922)]. Model kesme deformasyonu etkileri ve rotasyonel atalet etkilerini dikkate alır. Dalga boyu kiriş kalınlığına yaklaştığında bu kirişleri, kısa kirişler, sandviç kompozit kirişler ve yüksek zorlamaya maruz kalan kirişlerin tanımlanabilir. Euler-Bernoulli kirişlerinden farklı olarak Timoshenko kirişleri için elde edilen denklemler etkileşimli olup mekâna göre ikinci mertebededir. Bu kirişlerde hesaba katılan deformasyon mekanizmaları kirişin rijitliğini düşürmekte olup, sonuçta bir statik yük altında yüksek çökmeler ve belli mesnetleme durumları için düşük frekanslar elde edilir. Sistemi rezonansa getirecek zorlama uygulanmaması için bu frekansları bilmek çok önemlidir. Hesaplamalarda kolaylık sağlanması açısından öncelikle lineer kabulü altında çözümler elde edilir. Daha sonra kirişin uzamasından kaynaklanan nonlinear etkiler hesaba katılarak gerçek sisteme yakın çözümler elde edilir.

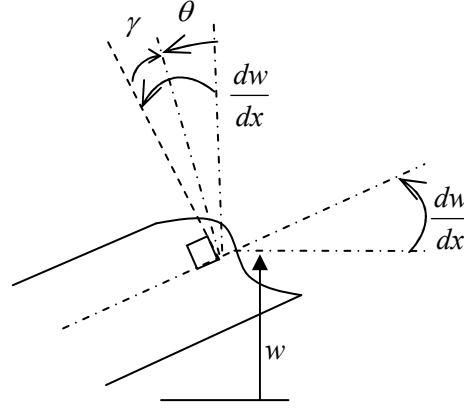
Timoshenko kiriş teorisi temel alınarak gerçekleştirilen çalışmalar şöyledir; Kesitlerdeki değişim, çatlaklar gibi farklı süreksizlikleri dikkate alarak Mei ve ark.(2006) eksenel yüklü Timoşenko kirişlerini incelemiştir. Kirişin dönüşüm ve yansıtma matrislerini türeterek, uygulanan dış kuvvet ve momentler ile uygulanan dalgalar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Loya ve ark.(2006), çatlak Timoşenko kirişlerini ele almış, doğal frekanslarını elde etmiştir. Arboleda-Monsalve ve ark. (2008), genelleştirilmiş uç şartlara sahip, iki parametrelili elastik zemin üzerine oturmuş Timoşenko kiriş-kolonunu çalışmıştır. Kirişin dinamik-rijitlik matrisi ve yük vektörünü türeterek frekans etkisi yanında, eğilme ve kesme deformasyonları sebebiyle olan etkileşim etkilerini, dönel ve rotasyonel kütle etkilerini, eksenel yükü, kesme kuvvetlerini incelemiştir. Banarjee(2001) dinamik rijitlik çözümü üzerine temel alınan yeni bir yaklaşımı kullanarak dönen Timoşenko kirişlerinin serbest titreşim problemini incelemiştir. Ruge ve Birk(2007), elastik zemin üzerine yerleştirilmiş Timoşenko ve Euler-Bernoulli kirişini kullanarak genlikle ilgili olan dinamik rijitlik katsayılarını incelemiştir. van Rensburg ve van der Merwe(2006) Timoşenko kirişlerini ele alarak kısmi diferansiyel denklemlerle birleştirilmiş özdeğer problemleri için sistematik bir yaklaşım sunmuştur. Wang ve ark.(2007), enine kayma deformasyonu ve dönel atalet etkilerini hesaba katarak, nonlocal Timoşenko kirişlerinin serbest titreşimini incelemiştir. Leea ve Sheu(2007) eğiklik açısına sahip dönen üniform Timoşenko kirişini incelemiştir. Yazarlar, uzama deformasyonu ve Coriolis kuvvet etkisini dikkate alarak, serbest titreşimi incelemiştir. Hijmissen and van Horssen(2008), Timoşenko kirişinin enine titreşimlerini incelemiştir. Yazarlar kiriş parametrelerinin frekans genliklerindeki azalma üzerine etkileri incelemiştir. Ke ve ark.(2009), Eringen'in nonlocal elastisite teorisi ve von Kármán geometrik nonlineeritesi üzerine temel alan çift katmanlı karbon nanotüplerinin serbest titreşimlerini incelemiştir. Timoşenko kiriş teorisi vasıtasıyla, enine kesme deformasyonunun ve rotasyonel ataletin etkilerini incelemiştir. Majkut(2009), Timoşenko kirişinin serbest titreşimlerini tanımlayan dördüncü mertebe sahip tek bir diferansiyel denklemi geliştirmiştir. Gunda(2010) enine kesme

ve rotasyonel ataletin, üniform Timoşenko kirişlerinin titreşimine etkilerini incelemişlerdir. Shahba ve ark.(2011) eksen boyunca fonksiyonel olarak kademeli konik Timoşenko kirişlerini çalışmıştır. Sonlu elemanlar metodunu kullanarak serbest titreşim ve kararlılık analizini incelemiştir. Wang ve ark.(2006) Timoşenko kiriş modelini kullanarak, çok katmanlı karbon nano tüplerinin serbest titreşim davranışını incelemiştir. Yang ve ark. (2010) von Karman geometrik nonlineerite, Timoşenko kiriş teorisi ve Eringenin nonlocal elastisite teorisi üzerine temel alan tek katmanlı karbon nanotüplerini(SWCNT) çalışmıştır. Nonlinear serbest titreşim karakteristikleri üzerine uç mesnetleri ile SWCNT'nin uzunluk, radyüs ve nonlocal parametrenin etkilerini araştırmışlardır. Rossi ve ark.(1993) Timoşenko kiriş modelinin analitik ve tam çözümlerini incelemişlerdir. Farklı mesnetleme konfigürasyonlarına karşılık linear frekansın nonlinear frekansa olan oranları bulmuşlardır. Geist ve Mclaughlin(1997), uçları serbest üniform Timoşenko kirişlerini çalışmışlardır. Linear olarak bağımsız iki özfonksiyonun olabilmesi için özdeğerleri belirlemede gerekli ve yeterli şartları elde etmişlerdir. Esmailzadeh ve Ohadi(2000) eksenel ve teğetsel yüklere maruz üniform olmayan Timoşenko kirişlerini çalışmışlardır. Farklı mesnet şartlarına sahip üniform olan ve üniform olmayan kirişlerin frekans davranışlarını incelemişlerdir. Zhong ve Guo(2003), uçları hareket etmeyen basit mesnetli Timoşenko kirişlerinin yüksek genlikli titreşimlerini incelemişlerdir. Elde edilen diferansiyel denklemlerin direk çözümleri üzerine çalışma yapmışlardır. Grant(1978) konsantre kütle taşıyan üniform kirişleri incelemiştir. Farklı mesnetleme durumları için, frekans üzerine kesit alanı ve konsantre kütle etkilerini incelemişlerdir. Abramovich ve Hamburger(1991), küçük bir kütleli ankastre kirişini çalışmış, rotasyonel ataletin ve kesme deformasyonunun sistemin doğal frekansları üzerine etkilerini incelemişlerdir. Chan ve Wang(1997), keyfi bir pozisyonda yayılı kütleyle sahip kısmen yüklü Timoşenko kiriş problemini incelemişlerdir. Frekans değişimleri üzerine hesaplamalı sonuçlar sunmuşlardır. Cha ve Pierre(1998) toplu eklentilere sahip Timoşenko kirişlerini çalışmışlardır. Bileşik dinamiksel sistemin frekans denklemlerini belirlemek için yeni bir yaklaşım kullanmışlardır. Chang(2000) basit mesnetli ortasında rijit bir kütle taşıyan kirişi incelemiştir. Enine kesme deformasyonu etkisini ihmal ederek, hem kirişin rotasyonel ataleti hem de konsantre kütleli içeren genel çözümü elde etmiştir. Lin(2009), çok sayıda nokta kütleli, rotasyonel ataletlere, linear yaylara, rotasyonel yaylara ve yay-kütle sistemlerine sahip çok açıklıklı Timoşenko kirişlerini çalışmıştır. Sistemin serbest titreşim karakteristiklerini incelemiştir. Posiadala(1997) iliştirilmiş ek elemanlara sahip Timoşenko kirişinin serbest titreşim frekansı çözümlerini sunmuştur. Farklı parametrelerin birleşik sistemin frekansı üzerine etkilerini göstermiştir. Wu ve Chen(2001) çok sayıda yay-kütle sistemi taşıyan Timoşenko kirişlerini çalışmıştır. Farklı mesnetleme durumu için doğal frekansları elde etmiştir. Lina ve Tsai(2007) çok sayıda yay-kütle sistemi taşıyan çok açıklıklı kirişleri ele almışlardır. İliştirilen kütle-yay sistemlerinin serbest titreşim karakteristikleri üzerine etkilerini incelemiştir. Yesilce ve ark.(2008) çok sayıda yay-kütle sistemi taşıyan çok açıklıklı Timoşenko kirişlerinin serbest titreşimlerini çalışmıştır. Doğal frekansları ve mod şekillerini bulmuşlardır. Yesilce ve Demirdag(2008) çok sayıda yay-kütle sistemi taşıyan çok açıklıklı üniform Timoşenko kirişlerini ele almışlar. Eksenel zorlama kuvvetinin olup/olmama durumunda, sistemin doğal frekanslarını bulmuşlardır.

Yeni Simplektik Metodun geçmişi şöyledir; Simplektik elastisite yaklaşımı ilk Feng(1985,1986) tarafından hesaplamalı cisim mekaniğinde kullanıldı. Akabinde, Zhong(1991,1992)'un analitik katı mekaniğinde Simplektik Yaklaşım kullanarak yaptığı önce çalışmalardan sonra, Simplektik Yaklaşım çok sayıda araştırmacı tarafından iki boyutlu problemlerin statik analizine uygulandı. Xu ve ark.(1997) dairesel silindirlerdeki Saint-Venant problemini çalışıp, sıfır özdeğer çözümlerini ve onların Hamilton operatör matrisine karşılık gelen Jordan normal formlarını çalıştı. Ayrıca Zhong ile Yao(1997), ve Yao ile Yang (2001), silindiriksel eğime sahip anizotropik kompozit lamina plakalardaki benzer problemleri incelediler. Çok yakın zamanlarda Lim ve ark.(2007,2008) , iki karşıt kenarı basit mesnetli ince plakaların eğilme analizi için Yeni Simplektik Yaklaşımı öne sürdü. Lim(2008) bu Yeni Simplektik Yaklaşımı, uniform olarak dağılmış yüklemeli köşelerinden mesnetli Kirşof plakaların eğilme analizine genişletti. Reissner plakalarının statik ve dinamik analizi için, Zou(1998) tam Simplektik Geometri Çözümünü sundu, fakat bu yukarıda tanımlanan Simplektik Elastisite Yaklaşımına tam olarak benzer değildi. Çünkü basit mesnetli karşıt kenarlar için deneme mod şekil fonksiyonları kendi analizinde hala benimsendi. Kısmen kalın dikdörtgen plakaların tam serbest titreşim çözümlerini bulmak için Li ve Zhong(2009) bir Yeni Simplektik Yaklaşım önermişlerdir.

Bu çalışmada konsantre kütle taşıyan Timošenko kirişinin nonlinear titreşimleri ele alınmıştır. Kiriş her iki ucundan basit mesnetlidir. Baskın rezonans durumu göz önüne alınarak, Pertürbasyon Yöntemlerinden Çok Ölçekli Metod ile analitik çözümler türetilmiştir. Etkileşimli diferansiyel denklemi çözmek için Yeni Simplektik Metod kullanılmıştır. Farklı kütle oranları(konsantre kütle/kiriş kütlesi), kütle konumları doğal frekanslar elde edilmiştir. Genlik-faz modülasyon denklemleri yardımıyla, kirişin titreşim esnasında düzgün rejim çözümlerinin titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Nonlinear frekans-genlik ve zorlama frekansı-genlik eğrileri çizilmiştir. Özkaya ile ark. (1997) ve Pakdemirli ile (1994) çalışmalarından bazı karşılaştırmalar yapılmıştır.

BÖLÜM 2. HAMILTON PRENSİBİ İLE SİSTEM MODELİNİN ELDESİ



Şekil 1. Timoşenko tipindeki kiriş modelinin uzama ve dönmesi

Şekil 1.'de gösterilen Timoşenko kiriş modeli için w düşey yerdeğişimi, θ kesitin rotasyonel dönmesi, γ kesme deformasyonunu vermektedir. Bağımlı değişkenlerin aksenal koordinat x 'e göre kısmi türevlerini belirtmek üzere dw/dx eğilme dönmesini ifade etmektedir.

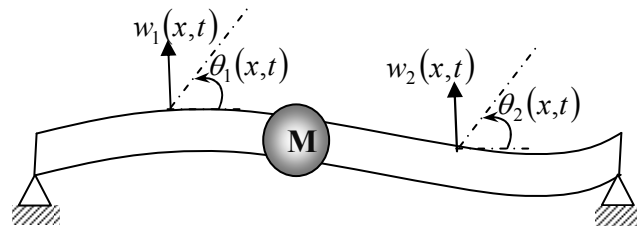
Timoşenko kirişlerinin lineer elastik rejim ile deforme olduğu kabul edildiğinden, Hooke kanunu bu kirişler için geçerlidir. Bu kirişlerin nonlinear uzama terimleri şu şekilde verilebilir;

$$\varepsilon_i = \frac{du_i}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^2 \quad (2.1)$$

$$\kappa_i = \frac{\frac{d\theta_i}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^2}} \approx \frac{d\theta_i}{dx} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^4 \right) \approx \frac{d\theta_i}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_i}{dx} \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^2 \quad (2.2)$$

$$\gamma_i = \tan^{-1} \left(\frac{dw_i}{dx} \right) - \theta_i \approx \left(\frac{dw_i}{dx} - \frac{1}{3} \left(\frac{dw_i}{dx} \right)^3 \right) - \theta_i \approx \frac{dw_i}{dx} - \theta_i \quad (2.3)$$

i şeklinde verilen alt indisler kirişin kütle ile ayrılan farklı bölmelerini u , ε ve κ sırasıyla yatay yer değişim, elastik uzaması ve eğilme eğriliğini belirtmektedir.



Şekil 2. Konsantr kütle taşıyan Timoşenko kirişi.

Şekil 2’de görülen Timoşenko tipi kütle kiriş sistemi için U uzama enerjisi ve T kinetik enerjisi şu şekilde yazılabilir;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{x_s} E.A.\varepsilon_1^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L E.A.\varepsilon_2^2 . dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_s} E.I.\kappa_1^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L E.I.\kappa_2^2 . dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_s} k.G.A.\gamma_1^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L k.G.A.\gamma_2^2 . dx \quad (2.4)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \rho.A.\left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L \rho.A.\left(\frac{dw_2}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} M.\left(\frac{dw_1(x_s,t)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \rho.J.\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L \rho.J.\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 . dx \quad (2.5)$$

Burada d/dt şeklindeki ifade bağımlı değişkenlerin zaman t ’ye göre kısmi türevi, ρ , A , I , E , G ve k sırasıyla kirişin hacim başına kütle yoğunluğu, nötr eksene dik kesit alanı, alan atalet momenti, Young’s(Elastisite) modülü, kayma modülü, kesit düzeltme katsayısı(şekil faktörü) olup, M kirişe iliştirilen konsantre kütle büyüklüğünü belirtmektedir.

Timoşenko kirişlerinde boyuna uzamanın ivmelenmesi diğer terimlere göre çok küçüktür. Dolayısıyla aşağıdaki kabul altında Denklem (2.5)’e aksenal yerdeğiştirmeyle ilgili kinetik enerji ifadesi yerleştirilmemiştir.

$$d^2u/dt^2 \approx 0. \quad (2.6)$$

Sistemin Lagrangian’ı için Hamilton prensibi şöyle verilmiştir;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U).dt = 0 \quad (2.7)$$

Denklem (2.4)-(2.5)’i Denklem (2.6)’a yerleştirirsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \rho.A.\left(\frac{dw_1}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L \rho.A.\left(\frac{dw_2}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} \int_0^{x_s} \rho.J.\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)^2 . dx + \frac{1}{2} \int_{x_s}^L \rho.J.\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)^2 . dx \right. \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} E.I.\left(\frac{d\theta_1}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_1}{dx} \cdot \left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2\right)^2 . dx - \frac{1}{2} \int_{x_s}^L E.I.\left(\frac{d\theta_2}{dx} - \frac{1}{2} \frac{d\theta_2}{dx} \cdot \left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2\right)^2 . dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} E.A.\left(\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2\right)^2 . dx - \frac{1}{2} \int_{x_s}^L E.A.\left(\frac{du_2}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_2}{dx}\right)^2\right)^2 . dx \\ & \left. - \frac{1}{2} \int_0^{x_s} k.G.A.\left(\frac{dw_1}{dx} - \theta_1\right)^2 . dx - \frac{1}{2} \int_{x_s}^L k.G.A.\left(\frac{dw_2}{dx} - \theta_2\right)^2 . dx + \frac{1}{2} M.\left(\frac{dw_1(x_s,t)}{dt}\right)^2 \right\rangle dt = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$i=1,2$ olmak üzere boyutsuzlaştırma terimleri şöyle yazılabilir;

$$I = A.r^2, \quad J = A.L^2, \quad \hat{w}_i(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{w_i(x,t)}{r}, \quad \hat{u}_i(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{u_i(x,t)}{L}, \quad \hat{\theta}_i(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{L}{r} \theta_i(x,t),$$

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{x_s}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot L^4}{E \cdot I}}} \quad (2.9)$$

Zaman ve mekân türevleri aşağıdaki gibidir;

$$\frac{dw_1}{dt} = r \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot L^4}{E \cdot I}}} \cdot \frac{d\hat{w}_1}{d\hat{t}}, \quad \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{r}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho \cdot A \cdot L^4}{E \cdot I}}} \cdot \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{t}}, \quad \frac{dw_i}{dx} = \frac{r}{L} \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}, \quad \frac{d\theta_i}{dx} = \frac{r}{L^2} \cdot \frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}}, \quad \frac{du_i}{dx} = \frac{d\hat{u}_i}{d\hat{x}} \quad (2.10)$$

Denklem (2.9)-(2.10)'u Denklem (2.8)'e yerleştirirsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{t}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{t}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{t}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{t}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \\ & - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \\ & - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \\ & + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}} \right)^2 \cdot d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \frac{1}{2} \cdot \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right)^2 \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Burada χ kesme/eğilme oranı, v narinlik oranı ve α konsantre kütle/ kiriş kütlesi oranı(kütle oranı) olmak üzere aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır;

$$\chi = \frac{k \cdot G}{E}, \quad v = \frac{L^2}{r^2} = \frac{A \cdot L^2}{A \cdot r^2} = \frac{J}{I}, \quad \alpha = \frac{M}{\rho \cdot A \cdot L} \quad (2.12)$$

Denklem (2.11)'deki varyasyonu enerji ifadelerine etki ettirerek aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned} & + \left(\int_0^\eta \frac{d\hat{w}_1}{d\hat{t}} \delta(\hat{w}_1) \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \frac{d\hat{w}_2}{d\hat{t}} \delta(\hat{w}_2) \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot d\hat{x} \right) + \alpha \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}} \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) \Big|_{t_1}^{t_2} \\ & + \left(\int_0^\eta \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{t}} \delta(\hat{\theta}_1) \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{t}} \delta(\hat{\theta}_2) \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot d\hat{x} \right) - \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \frac{d^2 \hat{w}_1}{d\hat{t}^2} \delta(\hat{w}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \frac{d^2 \hat{w}_2}{d\hat{t}^2} \delta(\hat{w}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right) \\ & - \left\langle - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta - \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right. \\ & - \left. \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 - \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\rangle \\ & - \left\langle - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta v^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left[\left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 v^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left[\left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} \int_0^\eta \chi \cdot v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \theta_1 \right) \delta(\hat{w}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \int_\eta^1 \chi \cdot v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \theta_2 \right) \delta(\hat{w}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\} - \left(\int_{t_i}^{t_2} \int_0^\eta \frac{d^2 \hat{\theta}_1}{d\hat{t}^2} \delta(\hat{\theta}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \int_{t_i}^{t_2} \int_\eta^1 \frac{d^2 \hat{\theta}_2}{d\hat{t}^2} \delta(\hat{\theta}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right) \\
& - \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} \int_0^\eta \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right] \delta(\hat{\theta}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \int_\eta^1 \frac{d}{d\hat{x}} \left[\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right] \delta(\hat{\theta}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\} \\
& + \left\{ + \int_{t_i}^{t_2} \int_0^\eta \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right) \delta(\hat{\theta}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \int_{t_i}^{t_2} \int_\eta^1 \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right) \delta(\hat{\theta}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\} \\
& + \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} \left[\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right] \delta(\hat{\theta}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \left[\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right] \delta(\hat{\theta}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \right\} \\
& - \int_{t_i}^{t_2} - \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \delta(\hat{w}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} \\
& - \int_{t_i}^{t_2} - \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \delta(\hat{w}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \\
& + \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \delta(\hat{w}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \delta(\hat{w}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \right\} \\
& + \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right) \delta(\hat{w}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right) \delta(\hat{w}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \right\} - \alpha \cdot \int_{t_i}^{t_2} \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) \cdot d\hat{t} \\
& + \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \right\} \\
& - \left\{ - \int_{t_i}^{t_2} \int_0^\eta v^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \int_\eta^1 v^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Denklem (2.13)'deki çift katlı ve tek katlı denklemler sırasıyla hareket denklemleri ve bu denklemlerin çözümünde kullanılacak olası zaman ve mekân şartlarını vermektedir. Bağımlı değişkenler üzerinde yapılan varyasyonlar birbirinden farklı yönlerde olduğundan, bu denklem ve şartlar ayrı ayrı yazılmalıdır. Zamana bağlı momentum şartları şöyledir;

$$\int_0^\eta \frac{d\hat{w}_1}{d\hat{t}} \delta(\hat{w}_1) \Big|_{t_i}^{t_2} \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \frac{d\hat{w}_2}{d\hat{t}} \delta(\hat{w}_2) \Big|_{t_i}^{t_2} \cdot d\hat{x} + \alpha \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}} \cdot \delta(\hat{w}_1(\hat{x}=\eta, \hat{t})) \Big|_{t_i}^{t_2} = 0 \tag{2.14}$$

Mekâna bağlı şartlar aşağıdaki denklemlerden elde edilir;

$$- \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \delta(\hat{u}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} = 0 \tag{2.15}$$

$$- \int_{t_i}^{t_2} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right\} \delta(\hat{\theta}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} - \int_{t_i}^{t_2} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right\} \delta(\hat{\theta}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right) - v \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) + \frac{1}{v} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_1) \Big|_0^\eta \cdot d\hat{t} \\
& \int_{t_1}^{t_2} \left[-\chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right) - v \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) + \frac{1}{v} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \right] \cdot \delta(\hat{w}_2) \Big|_\eta^1 \cdot d\hat{t} \\
& - \alpha \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} \cdot \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) \cdot d\hat{t} = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Hareket denklemleri aşağıdaki denklemlerden elde edilir;

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta v^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \delta(\hat{u}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} + \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 v^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \delta(\hat{u}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} = 0 \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \left[-\frac{d^2 \hat{w}_1}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right) + v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right) \right\} \right] \delta(\hat{w}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \left[-\frac{d^2 \hat{w}_2}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right) + v \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \right\} \right. \\
& \left. - \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right) \right\} \right] \delta(\hat{w}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} = 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\eta \left[-\frac{d^2 \hat{\theta}_1}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1 \right) + \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \right] \cdot \delta(\hat{\theta}_1) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_\eta^1 \left[-\frac{d^2 \hat{\theta}_2}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot v \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2 \right) + \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \right] \cdot \delta(\hat{\theta}_2) \cdot d\hat{x} \cdot d\hat{t} = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Denklem (2.14) için Hamilton prensibine göre iki zaman arasındaki değişim sıfırdır. Zamana bağlı şartlar çalışma konumuz dışındadır. Mekâna bağlı uç şartlar kendi aralarında denklemi sağlayan ifadelerdir ve aralarında seçilecek olasılıklar mesnet durumlarını belirler. Denklem (2.15-2.17)'den mekâna bağlı şartlar ve Denklem (2.18-2.20)'den hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir;

Mekân şartları;

$$-v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \delta(\hat{u}_1) \Big|_0^\eta - v^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \delta(\hat{u}_2) \Big|_\eta^1 = 0 \tag{2.21}$$

$$-\left\{\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}}\left(1-\frac{1}{2\nu}\left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right)^2\right)\right\}\delta\{\hat{\theta}_1\}\Big|_0^\eta - \left\{\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}}\left(1-\frac{1}{2\nu}\left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right)^2\right)\right\}\delta\{\hat{\theta}_2\}\Big|_\eta^1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[-\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1\right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right) + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1}{d\hat{x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right) \right] \delta(\hat{w}_1) \Big|_0^\eta \\ & + \left[-\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2\right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right) + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2}{d\hat{x}}\right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right) \right] \delta(\hat{w}_2) \Big|_\eta^1 \\ & - \alpha \cdot \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} \cdot \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Çift kartlı integrallerde her bir fonksiyonun varyasyonu sıfır olduğundan aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir:

$$\delta(\hat{u}_1) \neq 0 \text{ ve } \delta(\hat{u}_2) \neq 0 \rightarrow \nu^2 \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{u}_i}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) = 0 \quad (2.24)$$

$$\delta(\hat{w}_1) \neq 0 \text{ ve } \delta(\hat{w}_2) \neq 0 \rightarrow$$

$$-\frac{d^2 \hat{w}_i}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot \nu \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \nu \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(\frac{d\hat{u}_i}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right\} - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right\} = 0 \quad (2.25)$$

$$\delta(\hat{\theta}_1) \neq 0 \text{ ve } \delta(\hat{\theta}_2) \neq 0 \rightarrow -\frac{d^2 \hat{\theta}_i}{d\hat{t}^2} + \chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) \right\} = 0 \quad (2.26)$$

Denklem (2.21) ile Denklem (2.24)'ü beraber ele alalım. Bir fonksiyonun türevi sıfır ise bu fonksiyon bir sabittir. Fonksiyon iki değişkene (x, t) bağlı olduğundan sabit olan bu ifade bu problemin diğer değişkeni olan zamana bağlı olmalıdır. Dolayısıyla Denklem (2.24) aşağıdaki gibi yazılır;

$$\nu^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_i}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) = E_i(t) \quad (2.27)$$

$i=1, 2$ olarak ayrı ayrı tanım kümesi üzerinden integre edilip toplanırsa, Denklem (2.27) aşağıdaki hali alır;

$$\hat{u}_1 \Big|_0^\eta + \hat{u}_2 \Big|_\eta^1 + \frac{1}{2\nu} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}}\right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}}\right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} = \int_0^\eta E_1(t) \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 E_2(t) \cdot d\hat{x} \quad (2.28)$$

Denklem (2.15)'den aşağıdaki ifadenin sabit olarak alınabileceği görülür.

$$\nu^2 \cdot \left(\frac{d\hat{u}_i}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}}\right)^2 \right) \quad (2.29)$$

Bu durum göz önüne alındığında Denklem (2.15) aşağıdaki gibi açık yazılır.

$$E_1(\eta) \cdot \delta(u_1(\eta)) - E_1(0) \cdot \delta(\hat{u}_1(0)) + E_2(1) \cdot \delta(\hat{u}_2(1)) - E_2(\eta) \cdot \delta(\hat{u}_2(\eta)) = 0 \quad (2.30)$$

Denklem (2.30)'dan aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\hat{u}_1(0) = 0 \quad \& \quad \hat{u}_2(1) = 0 \quad (2.31)$$

Geriye kalan terimler aşağıdaki gibidir;

$$E_1 \cdot \delta(\hat{u}_1(\eta)) - E_2 \cdot \delta(\hat{u}_2(\eta)) = 0 \quad (2.32)$$

Buradan çözüm için aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\hat{u}_1(\eta) = \hat{u}_2(\eta) \quad \& \quad E_1 = E_2 \quad (2.33)$$

Bu durumda Denklem (2.28) aşağıdaki hali alır;

$$E_1(t) = E_2(t) = \frac{1}{2 \cdot \nu} \left(\int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right) \quad (2.34)$$

Denklem (2.34) dikkate alınırsa boyutsuz zorlama ve boyutsuz sönüm terimleri eklenerek, Denklem (2.25)-(2.26)'dan hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} \chi \cdot \nu \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d^2 \hat{w}_i}{d\hat{x}^2} - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right\} \\ + \bar{F}_i \cdot \cos(\Omega t) = \frac{d^2 \hat{w}_i}{d\hat{t}^2} + \bar{\mu}_i \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{t}} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \frac{d^2 \hat{\theta}_i}{d\hat{x}^2} + \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \cdot \frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}} = \frac{d^2 \hat{\theta}_i}{d\hat{t}^2} \quad (2.36)$$

Bu durumda Denklem (2.22)'den olası şartları elde edelim;

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \cdot \delta\{\hat{\theta}_1(\eta)\} - \left\{ \frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \cdot \delta\{\hat{\theta}_1(0)\} \\ + \left\{ \frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \cdot \delta\{\hat{\theta}_2(1)\} - \left\{ \frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \right\} \cdot \delta\{\hat{\theta}_2(\eta)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Denklem (2.22)'nin uç mesnet durum ifadelerinden;

$$\hat{\theta}_1(0) = 0 \quad \text{yada} \quad \hat{\theta}_1(0) \neq 0 \quad \text{ise} \quad \hat{\theta}_2(1) = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} = 0 \quad \text{yada} \quad \hat{\theta}_2(1) \neq 0 \quad \text{ise} \quad \frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} = 0 \quad (2.39)$$

Denklem (2.22)'den uç mesnet ifadeler ayrıldıktan sonra geriye kalan denklemler şöyledir;

$$\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \cdot \delta\{\hat{\theta}_1(\eta)\} - \frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \cdot \delta\{\hat{\theta}_1(\eta)\} = 0 \quad (2.40)$$

Eşitlikten aşağıdaki süreklilik şartları elde edilir;

$$\hat{\theta}_1(\eta) = \hat{\theta}_2(\eta) \quad (2.41)$$

$$\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} = \frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \quad (2.42)$$

Denklem (2.23) aşağıdaki gibi açılabilir;

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(\eta) \right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1(\eta)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right) \\ & + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right) \end{aligned} \right\} \delta(\hat{w}_1(\eta)) \\ & \left. \begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(0) \right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_1(0)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right) \\ & + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right) \end{aligned} \right\} \delta(\hat{w}_1(0)) \\ & \left. \begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(1) \right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2(1)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right) \\ & + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right) \end{aligned} \right\} \delta(\hat{w}_2(1)) \\ & \left. \begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(\eta) \right) - \nu \cdot \left(\frac{d\hat{u}_2(\eta)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right) \\ & + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right) \end{aligned} \right\} \delta(\hat{w}_2(\eta)) \quad (2.43) \\ & -\alpha \cdot \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} \cdot \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) \cdot d\hat{t} = 0 \end{aligned}$$

Denklem (2.43)'den uçlarla ilgili terimler aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\begin{aligned}
& - \left\{ -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(0) \right) - \nu \left(\frac{d\hat{u}_1(0)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right\} \cdot \delta(\hat{w}_1(0)) \\
& + \left\{ -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(1) \right) - \nu \left(\frac{d\hat{u}_2(1)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right\} \cdot \delta(\hat{w}_2(1)) = 0
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Denklem (2.44)'den uç şartlar şöyle ele alınabilir;

$$\hat{w}_1(0)=0 \text{ veya } \hat{w}_2(1)=0 \tag{2.45}$$

Yada Denklem (2.45)'in sağlanmadığı durumlar için aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\hat{w}_1(0) \neq 0 \text{ veya } \hat{w}_2(1) \neq 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(0) \right) - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot dx + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot dx \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \\
& + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} = 0 \\
& -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(1) \right) - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot dx + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot dx \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \\
& + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} = 0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Denklem (2.43)'den uç şartları çıkarıldığında geriye kalan ortak şartları veren denklem şöyledir;

$$\begin{aligned}
& + \left\langle -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(\eta) \right) - \nu \left(\frac{d\hat{u}_1(\eta)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right\rangle \cdot \delta(\hat{w}_1(\eta)) \\
& - \left\langle -\chi \cdot \nu \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(\eta) \right) - \nu \left(\frac{d\hat{u}_2(\eta)}{d\hat{x}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \left(\frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right\rangle \cdot \delta(\hat{w}_2(\eta)) - \alpha \cdot \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} \cdot \delta(\hat{w}_1(\eta, \hat{t})) = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Denklem (2.47)'den ortak şartlar şöyledir;

$$\hat{w}_1(\eta) = \hat{w}_2(\eta) \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(\eta) \right) - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \\ & + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \\ & + \chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(\eta) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \\ & - \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} - \alpha \cdot \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta)}{d\hat{t}^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Özetle; hareket denklemlerini veren diferansiyel denklemler;

$$\begin{aligned} & \chi \cdot \nu \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d^2 \hat{w}_i}{d\hat{x}^2} - \frac{1}{\nu} \cdot \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right\} \\ & + \bar{F}_i \cdot \cos(\Omega \cdot t) = \frac{d^2 \hat{w}_i}{d\hat{t}^2} + \bar{\mu}_i \cdot \frac{d\hat{w}_i}{d\hat{t}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_i \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \cdot \frac{d^2 \hat{\theta}_i}{d\hat{x}^2} + \frac{d}{d\hat{x}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_i}{d\hat{x}} \right)^2 \right)^2 \right\} \cdot \frac{d\hat{\theta}_i}{d\hat{x}} = \frac{d^2 \hat{\theta}_i}{d\hat{t}^2} \quad (2.51)$$

şeklinde olup, bu denklemleri sağlayan uç şartlar;

$$\text{Basit - basit} \quad \rightarrow \hat{w}_1(0)=0, \quad \frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} = 0, \quad \hat{w}_2(1)=0, \quad \frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} = 0 \quad (2.52.a)$$

$$\text{Ankastre - ankastre} \quad \rightarrow \hat{w}_1(0)=0, \quad \hat{\theta}_1(0)=0, \quad \hat{w}_2(1)=0, \quad \hat{\theta}_2(1)=0 \quad (2.52.b)$$

$$\text{Kayar - kayar} \quad \rightarrow \frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} = 0, \quad \frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} = 0$$

$$\begin{aligned} & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(0) \right) - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1(0)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(0)}{d\hat{x}} = 0 \\ & -\chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(1) \right) - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2(1)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(1)}{d\hat{x}} = 0 \end{aligned} \quad (2.52.c)$$

ve süreklilik şartları

$$\hat{w}_1(\eta) = \hat{w}_2(\eta), \quad \hat{\theta}_1(\eta) = \hat{\theta}_2(\eta), \quad \frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} = \frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}}$$

$$\begin{aligned}
& + \chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_1(\eta) \right) + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \\
& - \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_1(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_1(\eta)}{d\hat{x}} \\
& - \chi \cdot \nu \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} - \hat{\theta}_2(\eta) \right) - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta \left(\frac{d\hat{w}_1}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} + \int_\eta^1 \left(\frac{d\hat{w}_2}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot d\hat{x} \right\} \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \\
& + \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{d\hat{\theta}_2(\eta)}{d\hat{x}} \right)^2 \cdot \frac{d\hat{w}_2(\eta)}{d\hat{x}} + \alpha \cdot \frac{d^2 \hat{w}_1(\eta, \hat{t})}{d\hat{t}^2} = 0
\end{aligned} \tag{2.53}$$

olarak yazılabilir.

BÖLÜM 3. ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1 ÇOK ÖLÇEKLİ METOD YAKLAŞIMI

Diferansiyel denklemlere yaklaşık çözüm bulmak için Pertürbasyon Yöntemlerinden Çok Ölçekli Metod kullanılacaktır. Bu metoda göre yer değişimlerin aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim.

$$\hat{w}_i(x, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon \cdot w_{i1}(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot w_{i2}(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \cdot w_{i3}(x, T_0, T_1, T_2) \quad (3.1)$$

$$\hat{\theta}_i(x, T_0, T_1, T_2) = \varepsilon \cdot \theta_{i1}(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \cdot \theta_{i2}(x, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 \cdot \theta_{i3}(x, T_0, T_1, T_2) \quad (3.2)$$

Zorlama ve sönüm terimlerinin yaklaşık çözümlerin son mertebesinde ortaya çıkması için aşağıdaki gibi bir ölçeklendirme yapalım.

$$\bar{\mu}_i = \varepsilon^2 \cdot \mu_i \quad \bar{F}_i = \varepsilon^3 \cdot F_i \quad (3.3)$$

Çok ölçekli metoda göre zamana bağlı olan türevler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot D_2, \quad \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot D_0 \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot (D_1^2 + 2 \cdot D_0 \cdot D_2) \quad D_n \equiv \partial / \partial T_n \quad (3.4)$$

Denklem (3.1-3.4)'ü Denklem (2.50-2.53)'e yazalım.

$$\begin{aligned} & + \chi \cdot v \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w''_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w''_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w''_{i3} \right\} - \left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta'_{i3} \right\} \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^{\eta} \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} \right)^2 \cdot dx + \int_{\eta}^1 \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{21} + \varepsilon^2 \cdot w'_{22} + \varepsilon^3 \cdot w'_{23} \right\} \right)^2 \cdot dx \right\} \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot w''_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w''_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w''_{i3} \right\} \\ & - \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} \right)^2 \right) \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta'_{i3} \right\} \right)^2 \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} \right\} + \varepsilon^3 \cdot F_i \cdot \cos(\Omega t) \\ & = \left(D_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot D_0 \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot (D_1^2 + 2 \cdot D_0 \cdot D_2) \right) \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot w_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w_{i3} \right\} + 2 \cdot \varepsilon^2 \cdot \mu_i \cdot \left(D_0 + \varepsilon \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot D_2 \right) \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot w_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w_{i3} \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & + \chi \cdot v \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} - \left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta_{i3} \right\} \right) \\ & + \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} \right)^2 \right) \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta''_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta''_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta''_{i3} \right\} \\ & + \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(\left\{ \varepsilon^1 \cdot w'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot w'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot w'_{i3} \right\} \right)^2 \right) \right\}' \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta'_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta'_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta'_{i3} \right\} \\ & = \left(D_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot D_0 \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot (D_1^2 + 2 \cdot D_0 \cdot D_2) \right) \cdot \left\{ \varepsilon^1 \cdot \theta_{i1} + \varepsilon^2 \cdot \theta_{i2} + \varepsilon^3 \cdot \theta_{i3} \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Bu aşamadan sonra mekâna göre türevleri (') ile göstereyim. Bu durumda Denklem (3.5)-(3.6)'da gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemler ve basit mesnetli durumun şartları ile süreklilik şartları elde edilir;

$0(\varepsilon^1)$ mertebesi

$$\chi \cdot v \cdot (w''_{i1} - \theta'_{i1}) - D_0^2 \cdot w_{i1} = 0 \quad (3.7)$$

$$\chi \cdot v \cdot (w'_{i1} - \theta_{i1}) + \theta''_{i1} - D_0^2 \theta_{i1} = 0 \quad (3.8)$$

$$w_{11}(0)=\theta'_{11}(0)=0, \quad w_{21}(1)=\theta'_{21}(1)=0 \quad (3.9)$$

$$w_{11}(\eta)=w_{21}(\eta), \quad \theta_{11}(\eta)=\theta_{21}(\eta), \quad \theta'_{11}(\eta)=\theta'_{21}(\eta),$$

$$\chi.v.(w'_{11}(\eta)-\theta_{11}(\eta))-\chi.v.(w'_{21}(\eta)-\theta_{21}(\eta))+\alpha.D_0^2 w_{11}(\eta)=0 \quad (3.10)$$

$0(\varepsilon^2)$ mertebesi

$$\chi.v.(w''_{i2}-\theta'_{i2})-D_0^2.w_{i2}=2.D_0.D_1.w_{i1} \quad (3.11)$$

$$\chi.v.(w'_{i2}-\theta_{i2})+\theta''_{i2}-D_0^2\theta_{i2}=2.D_0.D_1.\theta_{i1} \quad (3.12)$$

$$w_{12}(0)=\theta'_{12}(0)=0, \quad w_{22}(1)=\theta'_{22}(1)=0, \quad (3.13)$$

$$w_{12}(\eta)=w_{22}(\eta), \quad \theta_{12}(\eta)=\theta_{22}(\eta), \quad \theta'_{12}(\eta)=\theta'_{22}(\eta)$$

$$\chi.v.(w'_{12}(\eta)-\theta_{12}(\eta))-\chi.v.(w'_{22}(\eta)-\theta_{22}(\eta))+\alpha.D_0^2 w_{12}(\eta)=-2.\alpha.D_0.D_1.w_{11}(\eta) \quad (3.14)$$

$0(\varepsilon^3)$ mertebesi

$$\chi.v.(w''_{i3}-\theta'_{i3})-D_0^2 w_{i3}=2.D_0.D_1.w_{i2}+(D_1^2+2.D_0.D_2)w_{i1}+2.\mu_i.D_0 w_{i1}-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta w_{11}^2.dx+\int_\eta^1 w_{21}^2.dx\right\}.w''_{i1}$$

$$-F_i.\cos(\Omega.t)+\frac{1}{\nu}.\{w'_{i1}.\theta_{i1}'\} \quad (3.15)$$

$$\chi.v.(w'_{i3}-\theta_{i3})+\theta''_{i3}-D_0^2\theta_{i3}=2.D_0.D_1.\theta_{i2}+(D_1^2+2.D_0.D_2)\theta_{i1}+\frac{1}{\nu}.(w_{i1}'^2.\theta_{i1}') \quad (3.16)$$

$$w_{13}(0)=\theta'_{13}(0)=0, \quad w_{23}(1)=\theta'_{23}(1)=0 \quad (3.17)$$

$$w_{13}(\eta)=w_{23}(\eta), \quad \theta_{13}(\eta)=\theta_{23}(\eta), \quad \theta'_{13}(\eta)=\theta'_{23}(\eta),$$

$$\chi.v.(w'_{13}(\eta)-\theta_{13}(\eta))-\chi.v.(w'_{23}(\eta)-\theta_{23}(\eta))+\alpha.D_0^2 w_{13}(\eta)=-2.\alpha.D_0.D_1.w_{12}(\eta)-\alpha.(D_1^2+2.D_0.D_2)w_{11}(\eta)$$

$$-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta w_{11}^2.dx+\int_\eta^1 w_{21}^2.dx\right\}.\{w'_{11}(\eta)-w'_{21}(\eta)\}-\frac{1}{\nu}.\{-\theta_{11}'^2(\eta).w'_{11}(\eta)+\theta_{21}'^2(\eta).w'_{21}(\eta)\} \quad (3.18)$$

Denklem (3.7)-(3.8) homojen yapıda diferansiyel denklemler olup sistemin lineer problemini oluşturmaktadır. Bu problemin çözüldüğü farz edilirse, Denklem (3.11)-(3.12) ile ifade edilen diferansiyel denklem takımlarında çözüm yapabilmek için $D_1 w_{i1}=0$ ve $D_1 \theta_{i1}=0$ olmalıdır. Bu kabul Denklem (3.11)-(3.12) ile Denklem (3.7)-(3.8) ile belirtilen diferansiyel denklemlerin ve Denklem (3.9)-(3.10) ve Denklem (3.13)-(3.14) ile belirtilen şartların aynı yapıda olmasına sebep olur. Kısaca $0(\varepsilon)$ ile $0(\varepsilon^2)$ mertebesi problem ve çözümleri birebir aynıdır. Dolayısıyla çözümlere ek katkısı olmayacağından $0(\varepsilon^2)$ mertebesi ihmal edilir. $0(\varepsilon^3)$ mertebesindeki ifadeler $D_1 w_{12}$, $D_1 \theta_{12}$ de sıfır olacağından son durumda sistemi tarif eden denklemler aşağıdaki gibidir;

$0(\varepsilon)$ mertebesi

$$\chi.v.(w''_{i1} - \theta'_{i1}) - D_0^2.w_{i1} = 0 \quad (3.19)$$

$$\chi.v.(w'_{i1} - \theta_{i1}) + \theta''_{i1} - D_0^2.\theta_{i1} = 0 \quad (3.20)$$

$$w_{11}(0) = \theta'_{11}(0) = 0, \quad w_{21}(1) = \theta'_{21}(1) = 0 \quad (3.21)$$

$$w_{11}(\eta) = w_{21}(\eta), \quad \theta_{11}(\eta) = \theta_{21}(\eta), \quad \theta'_{11}(\eta) = \theta'_{21}(\eta),$$

$$\chi.v.(w'_{11}(\eta) - \theta_{11}(\eta)) - \chi.v.(w'_{21}(\eta) - \theta_{21}(\eta)) + \alpha.D_0^2.w_{11}(\eta) = 0 \quad (3.22)$$

$0(\varepsilon^3)$ mertebesi

$$\chi.v.(w''_{i3} - \theta'_{i3}) - D_0^2.w_{i3} = 2.D_0.D_2.w_{i1} + \frac{1}{\nu}.\{w'_{i1}.\theta_{i1}'^2\}' + 2.\mu_i.D_0.w_{i1} - \frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta w_{11}'^2.dx + \int_\eta^1 w_{21}'^2.dx\right\}.w_{i1}'' - F_i.\cos(\Omega.t) \quad (3.23)$$

$$\theta_{i3}'' + \chi.v.(w'_{i3} - \theta_{i3}) - D_0^2.\theta_{i3} = 2.D_0.D_2.\theta_{i1} + \frac{1}{\nu}.(w_{i1}'^2.\theta_{i1}') \quad (3.24)$$

$$w_{13}(0) = \theta'_{13}(0) = 0, \quad w_{23}(1) = \theta'_{23}(1) = 0 \quad (3.25)$$

$$w_{13}(\eta) = w_{23}(\eta), \quad \theta_{13}(\eta) = \theta_{23}(\eta), \quad \theta'_{13}(\eta) = \theta'_{23}(\eta),$$

$$\chi.v.(w'_{13}(\eta) - \theta_{13}(\eta)) - \chi.v.(w'_{23}(\eta) - \theta_{23}(\eta)) + \alpha.D_0^2.w_{13}(\eta) = -2.\alpha.D_0.D_2.w_{11}(\eta)$$

$$-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta w_{11}'^2.dx + \int_\eta^1 w_{21}'^2.dx\right\}.\{w'_{11}(\eta) - w'_{21}(\eta)\} - \frac{1}{\nu}.\{-\theta_{11}'^2(\eta).w'_{11}(\eta) + \theta_{21}'^2(\eta).w'_{21}(\eta)\} \quad (3.26)$$

3.2 BASKIN REZONANS ÇÖZÜMÜ

Baskın rezonans durumu için $0(\varepsilon)$ mertebesi problemine ait çözümün aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim;

$$w_{i1}(x, T_0, T_2) = A(T_2)e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i(x) + \bar{A}(T_2)e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_i(x) \quad (3.27)$$

$$\theta_{i1}(x, T_0, T_2) = B(T_2)e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i(x) + \bar{B}(T_2)e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_i(x) \quad (3.28)$$

Burada A , ω_1 , Y_i sırasıyla w_{i1} enine yer değişimin kompleks genliği, frekansı(özdeğer) ve özvektörüdür(mod şekli). Benzer olarak B , ω_2 , ϕ_i sırasıyla θ_{i1} rotasyonel yer değişimin kompleks genliği, frekansı ve mod şekli olup, üst çizgiler ele alınan ifadelerin kompleks eşleniğidir. Denklem (3.27)-(3.28)'deki ifadeler Denklem (3.19)-(3.20)'ye yerleştirilirse aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir;

$$\chi.v.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i'' - B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i'\} + \omega_1^2.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i = 0 \quad (3.29)$$

$$\chi.v.\{\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_i''-\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_i'\}+\omega_1^2.\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_i=0 \quad (3.30)$$

$$\chi.v.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i'-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i\}+B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i''+\omega_2^2.B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i=0 \quad (3.31)$$

$$\chi.v.\{\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_i'-\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_i'\}+\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_i''+\omega_2^2.\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_i=0 \quad (3.32)$$

Yukarıda görüldüğü gibi diferansiyel denklem yapıları aynı olan fonksiyonların mod yapıları eşlenikleriyle aynı olur. Bu mertebe problemine ait şartlar aşağıdaki gibi olur;

$$Y_1(0)=\bar{Y}_1(0)=\phi_1'(0)=\bar{\phi}_1'(0)=0, \quad Y_2(1)=\bar{Y}_2(1)=\phi_2'(1)=\bar{\phi}_2'(1)=0 \quad (3.33)$$

$$Y_1(\eta)=Y_2(\eta), \quad \phi_1(\eta)=\phi_2(\eta), \quad \phi_1'(\eta)=\phi_2'(\eta), \quad \bar{Y}_1(\eta)=\bar{Y}_2(\eta), \quad \bar{\phi}_1(\eta)=\bar{\phi}_2(\eta), \quad \bar{\phi}_1'(\eta)=\bar{\phi}_2'(\eta)$$

$$\chi.v.(A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1'(\eta)-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(\eta))-\chi.v.(A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2'(\eta)-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2(\eta))-\alpha.\omega_1^2.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1(\eta)=0$$

$$\chi.v.(\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_1(\eta))-\chi.v.(\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_2'(\eta)-\bar{B}.e^{-i.\omega_2.T_0}.\bar{\phi}_2(\eta))-\alpha.\omega_1^2.\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}.\bar{Y}_1(\eta)=0 \quad (3.34)$$

Denklem (3.27)-(3.28)'i Denklem (3.23)-(3.24)'te tanımlanan $0(\varepsilon^3)$ mertebesi problemi ve Denklem (3.25)-(3.26)'da tanımlanan problemin şartları için kullandığımızda aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$\begin{aligned} &\chi.v.(w_{i3}''-\theta_{i3}')-D_0^2.w_{i3}=-F_i.\cos(\Omega.t)+e^{i.\omega_1.T_0}.[2.i.\omega_1.D_2.A.Y_i+2.i.\omega_1.\mu_i.A.Y_i \\ &+2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.A.(\bar{\phi}_i'.\phi_i'.Y_i')] + A^2.\bar{A}.\left[-\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx\right\}.Y_i'' - \frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\bar{Y}_i''\right] \\ &+ e^{-i.\omega_1.T_0}.\left[-2.i.\omega_1.D_2.\bar{A}.\bar{Y}_i - 2.i.\omega_1.\mu_i.\bar{A}.\bar{Y}_i + 2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.\bar{A}.\bar{\phi}_i'.\bar{Y}_i'\right] \\ &+ \bar{A}^2.A.\left[-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.Y_i'' - \left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx\right\}.\bar{Y}_i''\right] \\ &+ \frac{1}{v}.B^2.A.e^{i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\left(\phi_i'^2.Y_i'\right)' + \frac{1}{v}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\left(\bar{\phi}_i'^2.\bar{Y}_i'\right)' + \frac{1}{v}.B^2.A.e^{i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\left(\phi_i'^2.Y_i'\right)' \\ &+ \frac{1}{v}.B^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\left(\bar{\phi}_i'^2.\bar{Y}_i'\right)' - \frac{1}{2}.A^2.A.e^{3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.Y_i'' \\ &- \frac{1}{2}.\bar{A}^2.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\bar{Y}_i'' \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} &\theta_{i3}'' + \chi.v.(w_{i3}'-\theta_{i3}')-D_0^2.\theta_{i3}=e^{i.\omega_2.T_0}.\left[2.i.\omega_2.D_2.B.\phi_i+2.\frac{1}{v}.\bar{A}.A.B.(\bar{Y}_i'.Y_i'.\phi_i')\right] \\ &+ e^{-i.\omega_2.T_0}.\left[-2.i.\omega_2.D_2.\bar{B}.\bar{\phi}_i+2.\frac{1}{v}.\bar{A}.A.\bar{B}.\bar{Y}_i'.\bar{\phi}_i'\right] + \frac{1}{v}.A^2.B.e^{i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.\left(Y_i'^2.\phi_i'\right)' \\ &+ \frac{1}{v}.\bar{A}^2.\bar{B}.e^{-i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.\left(\bar{Y}_i'^2.\bar{\phi}_i'\right)' + \frac{1}{v}.\bar{A}^2.B.e^{-i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.\left(\bar{Y}_i'^2.\bar{\phi}_i'\right)' + \frac{1}{v}.A^2.\bar{B}.e^{i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.\left(Y_i'^2.\bar{\phi}_i'\right)' \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$w_{13}(0)=\theta'_{13}(0)=0, \quad w_{23}(1)=\theta'_{23}(1)=0 \quad (3.37)$$

$$w_{13}(\eta)=w_{23}(\eta), \quad \theta_{13}(\eta)=\theta_{23}(\eta), \quad \theta'_{13}(\eta)=\theta'_{23}(\eta)$$

$$\begin{aligned} \chi.v.(w'_{13}(\eta)-\theta_{13}(\eta))-\chi.v.(w'_{23}(\eta)-\theta_{23}(\eta))+\alpha.D_0^2 w_{13}(\eta)=e^{i.\omega_1.T_0} & \left[-2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.A.\{-\bar{\phi}'_1(\eta)\phi'_1(\eta)Y_1'(\eta)+\bar{\phi}'_2(\eta)\phi'_2(\eta)Y_2'(\eta)\} \right. \\ & \left. -2.\alpha.i.\omega_1.D_2 A Y_1(\eta)+\bar{A}.A^2.\left\{-\int_0^\eta \bar{Y}_1'Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'Y_2'.dx\right\}.\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\} \right\} \\ & +e^{-i.\omega_1.T_0} \left[-2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.\bar{A}.\{-\bar{\phi}'_1(\eta)\phi'_1(\eta)\bar{Y}_1'(\eta)+\bar{\phi}'_2(\eta)\phi'_2(\eta)\bar{Y}_2'(\eta)\}+2.\alpha.i.\omega_1.D_2 \bar{A}.\bar{Y}_1(\eta) \right. \\ & \left. +\bar{A}^2.A.\left\{-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\}-\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'Y_2'.dx\right\}.\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\}\right\} \right] \\ & -\frac{1}{2}.A^3.e^{3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{2}.\bar{A}^3.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\} \\ & -\frac{1}{v}.B^2.A.e^{i.(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\{-\phi_1'^2(\eta)Y_1'(\eta)+\phi_2'^2(\eta)Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{v}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i.(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta)\bar{Y}_1'(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta)\bar{Y}_2'(\eta)\} \\ & -\frac{1}{v}.\bar{B}^2.A.e^{-i.(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta)Y_1'(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta)Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{v}.B^2.\bar{A}.e^{i.(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\{-\phi_1'^2(\eta)\bar{Y}_1'(\eta)+\phi_2'^2(\eta)\bar{Y}_2'(\eta)\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Denklem (3.35-3.38) ile tanımlanan $0(\varepsilon^3)$ mertebesinin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim;

$$w_{i3}(x,T_0,T_2)=\Psi_i(x,T_2).e^{i.\omega_1.T_0}+W_i(x,T_2)+cc \quad (3.39)$$

$$\theta_{i3}(x,T_0,T_2)=\varphi_i(x,T_2).e^{i.\omega_2.T_0}+\Theta_i(x,T_2)+cc \quad (3.40)$$

Zorlama frekansımız aşağıda belirtildiği gibi enine doğal frekansa yakın olsun;

$$\Omega=\omega_1+\varepsilon^2.\sigma \quad (3.41)$$

Denklem (3.39-3.41)'i Denklem (3.35)-(3.36)'ya yerleştirip, seküler terimleri atarsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz;

$$\begin{aligned} \chi.v.(\Psi_i''e^{i.\omega_1.T_0}-\varphi_i'.e^{i.\omega_2.T_0})+\omega_1^2.\Psi_i.e^{i.\omega_1.T_0}+\chi.v.(\bar{\Psi}_i''e^{-i.\omega_1.T_0}-\bar{\varphi}_i'.e^{-i.\omega_2.T_0})+\omega_1^2.\bar{\Psi}_i.e^{-i.\omega_1.T_0} = \\ -\frac{1}{2}.F_i.e^{i.\omega_1.T_0+i.\sigma.T_2}+e^{i.\omega_1.T_0} \left[A^2.\bar{A} \left[-\int_0^\eta \bar{Y}_1'Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'Y_2'.dx \right] Y_i''-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\bar{Y}_i'' \right] \\ +2.i.\omega_1.D_2 A Y_i+2.i.\omega_1.\mu_i.A Y_i+2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.A.(\bar{\phi}_i'.\phi_i'.Y_i')' \left] +e^{-i.\omega_1.T_0} \left[-2.i.\omega_1.D_2 \bar{A}.\bar{Y}_i-2.i.\omega_1.\mu_i.\bar{A}.\bar{Y}_i \right. \\ \left. +2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.\bar{A}(\bar{\phi}_i'.\phi_i'.\bar{Y}_i')'+\bar{A}^2.A \left[-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\} Y_i''-\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'Y_2'.dx\right\}.\bar{Y}_i'' \right] \right] \\ +-\frac{1}{2}.A^2.A.e^{3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\} Y_i''-\frac{1}{2}.\bar{A}^2.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\bar{Y}_i'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{\nu}.B^2.A.e^{i(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\left(\phi_i'^2.Y_i'\right)'+\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\left(\bar{\phi}_i'^2.\bar{Y}_i'\right)' \\
& +\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.A.e^{i(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\left(\bar{\phi}_i'^2.Y_i'\right)'+\frac{1}{\nu}.B^2.\bar{A}.e^{-i(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\left(\phi_i'^2.\bar{Y}_i'\right)' \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_i''e^{i.\omega_2.T_0}+\chi.\nu.\left(\Psi_i'.e^{i.\omega_1.T_0}-\phi_i.e^{i.\omega_2.T_0}\right)+\omega_2^2.\phi_i.e^{i.\omega_2.T_0} \\
& +\bar{\phi}_i''e^{-i.\omega_2.T_0}+\chi.\nu.\left(\bar{\Psi}_i'.e^{-i.\omega_1.T_0}-\bar{\phi}_i.e^{-i.\omega_2.T_0}\right)+\omega_2^2.\bar{\phi}_i.e^{-i.\omega_2.T_0}= \\
& e^{i.\omega_2.T_0}\left\{2.i.\omega_2.D_2B.\phi_i+2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.B.\left(\bar{Y}_i'.Y_i'.\phi_i'\right)\right\}+\frac{1}{\nu}.A^2.B.e^{i(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.\left(Y_i'^2.\phi_i'\right)' \\
& +e^{-i.\omega_2.T_0}\left\{-2.i.\omega_2.D_2\bar{B}.\bar{\phi}_i+2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.\bar{B}.\left(\bar{Y}_i'.Y_i'.\bar{\phi}_i'\right)\right\}+\frac{1}{\nu}.\bar{A}^2.\bar{B}.e^{-i(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.\left(\bar{Y}_i'^2.\bar{\phi}_i'\right)' \\
& +\frac{1}{\nu}.\bar{A}^2.B.e^{-i(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.\left(\bar{Y}_i'^2.\phi_i'\right)'+\frac{1}{\nu}.A^2.\bar{B}.e^{i(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.\left(Y_i'^2.\bar{\phi}_i'\right)' \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Denklem (3.39)-(3.40)'ta önerilen çözüm fonksiyonuna karşılık seküler terimlerin atıldığı durum için şartlar şöyledir:

$$\Psi_1(0)=\bar{\Psi}_1(0)=\phi_1'(0)=\bar{\phi}_1'(0)=0, \quad \Psi_2(1)=\bar{\Psi}_2(1)=\phi_2'(1)=\bar{\phi}_2'(1)=0 \quad (3.44)$$

$$\Psi_1(\eta)=\bar{\Psi}_1(\eta), \quad \phi_1(\eta)=\bar{\phi}_1(\eta), \quad \phi_1'(\eta)=\bar{\phi}_1'(\eta), \quad \bar{\Psi}_1(\eta)=\Psi_1(\eta), \quad \bar{\phi}_1(\eta)=\phi_1(\eta), \quad \bar{\phi}_1'(\eta)=\phi_1'(\eta)$$

$$\begin{aligned}
& \chi.\nu.\left(\Psi_1'(\eta).e^{i.\omega_1.T_0}-\phi_1(\eta).e^{i.\omega_2.T_0}\right)-\chi.\nu.\left(\Psi_2'(\eta).e^{i.\omega_1.T_0}-\phi_2(\eta).e^{i.\omega_2.T_0}\right)-\alpha.\omega_1^2.\Psi_1(\eta).e^{i.\omega_1.T_0} \\
& +\chi.\nu.\left(\bar{\Psi}_1'(\eta).e^{-i.\omega_1.T_0}-\bar{\phi}_1(\eta).e^{-i.\omega_2.T_0}\right)-\chi.\nu.\left(\bar{\Psi}_2'(\eta).e^{-i.\omega_1.T_0}-\bar{\phi}_2(\eta).e^{-i.\omega_2.T_0}\right)-\alpha.\omega_1^2.\bar{\Psi}_1(\eta).e^{-i.\omega_1.T_0}= \\
& e^{i.\omega_1.T_0}\left[\bar{A}.A^2.\left\{-\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx\right\}.\left\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\right\}-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\left\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\right\}\right\} \\
& -2.\alpha.i.\omega_1.D_2A.Y_1(\eta)-2.\frac{1}{\nu}.\bar{B}.B.A.\left\{-\bar{\phi}_1'(\eta).\phi_1'(\eta).Y_1(\eta)+\bar{\phi}_2'(\eta).\phi_2'(\eta).Y_2(\eta)\right\}\right] \\
& +e^{-i.\omega_1.T_0}\left[\bar{A}^2.A.\left\{-\frac{1}{2}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\left\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\right\}-\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx\right\}.\left\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\right\}\right\} \\
& +2.\alpha.i.\omega_1.D_2\bar{A}.\bar{Y}_1(\eta)-2.\frac{1}{\nu}.\bar{B}.B.\bar{A}.\left\{-\bar{\phi}_1'(\eta).\phi_1'(\eta).\bar{Y}_1(\eta)+\bar{\phi}_2'(\eta).\phi_2'(\eta).\bar{Y}_2(\eta)\right\}\right] \\
& -\frac{1}{2}.A^3.e^{3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\left\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\right\}-\frac{1}{2}.\bar{A}^3.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\left\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\right\} \\
& -\frac{1}{\nu}.B^2.A.e^{i(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\left\{-\phi_1'^2(\eta).Y_1(\eta)+\phi_2'^2(\eta).Y_2(\eta)\right\}-\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\left\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta).\bar{Y}_1(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta).\bar{Y}_2(\eta)\right\} \\
& -\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.A.e^{-i(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\left\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta).Y_1(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta).Y_2(\eta)\right\}-\frac{1}{\nu}.B^2.\bar{A}.e^{i(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\left\{-\phi_1'^2(\eta).\bar{Y}_1(\eta)+\phi_2'^2(\eta).\bar{Y}_2(\eta)\right\} \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Denklem (3.42-3.55)'te eşlenik formdaki terimleri atıp, eksponansiyel terimlere göre ayrıştırma yaparsak aşağıdaki denklemleri elde ederiz;

$$\begin{aligned}
& \chi.v.(\Psi_i'' e^{i.\omega_1.T_0} - \phi_i' e^{i.\omega_2.T_0}) + \omega_1^2 \Psi_i e^{i.\omega_1.T_0} = -\frac{1}{2} F_i e^{i.\omega_1.T_0 + i.\sigma.T_2} \\
& + e^{i.\omega_1.T_0} \left[A^2 \bar{A} \left[-\left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1' Y_1' dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2' Y_2' dx \right\} Y_i'' - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \right\} \bar{Y}_i'' \right] \right. \\
& + 2.i.\omega_1.D_2 A Y_i + 2.i.\omega_1.\mu_i.A Y_i + 2.\frac{1}{\nu} \bar{B}.B.A.(\bar{\phi}_i'.\phi_i'.Y_i')' \left. \right] - \frac{1}{2} A^2.A.e^{3.i.\omega_1.T_0} \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \right\} Y_i'' \\
& + e^{-i.\omega_1.T_0} \left[\bar{A}^2.A \left[-\frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'^2 dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2 dx \right\} Y_i'' - \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1' Y_1' dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2' Y_2' dx \right\} \bar{Y}_i'' \right] \right. \\
& - 2.i.\omega_1.D_2 \bar{A} \bar{Y}_i - 2.i.\omega_1.\mu_i.\bar{A} \bar{Y}_i + 2.\frac{1}{\nu} \bar{B}.B.\bar{A}(\bar{\phi}_i'.\bar{\phi}_i'.\bar{Y}_i')' \left. \right] - \frac{1}{2} \bar{A}^2.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0} \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'^2 dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2 dx \right\} \bar{Y}_i'' \\
& + \frac{1}{\nu} B^2.A.e^{i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0} (\phi_i'^2.Y_i')' + \frac{1}{\nu} \bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0} (\bar{\phi}_i'^2.\bar{Y}_i')' \\
& + \frac{1}{\nu} \bar{B}^2.A.e^{i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0} (\bar{\phi}_i'^2.Y_i')' + \frac{1}{\nu} B^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0} (\phi_i'^2.\bar{Y}_i')'
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_i'' e^{i.\omega_2.T_0} + \chi.v.(\Psi_i' e^{i.\omega_1.T_0} - \phi_i e^{i.\omega_2.T_0}) + \omega_2^2 \phi_i e^{i.\omega_2.T_0} = e^{i.\omega_2.T_0} \left\{ 2.i.\omega_2.D_2 B \phi_i + 2.\frac{1}{\nu} \bar{A}.A.B.(\bar{Y}_i' Y_i' \phi_i')' \right\} \\
& + e^{-i.\omega_2.T_0} \left\{ -2.i.\omega_2.D_2 \bar{B} \bar{\phi}_i + 2.\frac{1}{\nu} \bar{A}.A.\bar{B}(\bar{Y}_i' Y_i' \bar{\phi}_i')' \right\} + \frac{1}{\nu} A^2.B.e^{i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0} (Y_i'^2.\phi_i')' \\
& + \frac{1}{\nu} \bar{A}^2.\bar{B}.e^{-i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0} (\bar{Y}_i'^2.\bar{\phi}_i')' + \frac{1}{\nu} \bar{A}^2.B.e^{-i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0} (\bar{Y}_i'^2.\phi_i')' + \frac{1}{\nu} A^2.\bar{B}.e^{i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0} (Y_i'^2.\bar{\phi}_i')'
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\Psi_1(0) = \phi_1'(0) = 0, \quad \Psi_2(1) = \phi_2'(1) = 0 \tag{3.48}$$

$$\Psi_1(\eta) = \Psi_2(\eta), \quad \phi_1(\eta) = \phi_2(\eta), \quad \phi_1'(\eta) = \phi_2'(\eta) \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
& \chi.v.(\Psi_1'(\eta) e^{i.\omega_1.T_0} - \phi_1(\eta) e^{i.\omega_2.T_0}) - \chi.v.(\Psi_2'(\eta) e^{i.\omega_1.T_0} - \phi_2(\eta) e^{i.\omega_2.T_0}) - \alpha.\omega_1^2.\Psi_1(\eta) e^{i.\omega_1.T_0} = \\
& e^{i.\omega_1.T_0} \left[\bar{A}.A^2 \left\{ -\left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1' Y_1' dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2' Y_2' dx \right\} \{Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta)\} - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2 dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 dx \right\} \{\bar{Y}_1(\eta) - \bar{Y}_2(\eta)\} \right\} \right. \\
& - 2.\alpha.i.\omega_1.A.Y_1(\eta) - 2.\frac{1}{\nu} \bar{B}.B.A. \left\{ -\bar{\phi}_1'(\eta) \phi_1'(\eta) Y_1'(\eta) + \bar{\phi}_2'(\eta) \phi_2'(\eta) Y_2'(\eta) \right\} \left. \right] \\
& + e^{-i.\omega_1.T_0} \left[+\bar{A}^2.A \left\{ -\frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'^2 dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2 dx \right\} \{Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta)\} - \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1' Y_1' dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2' Y_2' dx \right\} \{\bar{Y}_1(\eta) - \bar{Y}_2(\eta)\} \right\} \right. \\
& + 2.\alpha.i.\omega_1.\bar{A}.\bar{Y}_1(\eta) - 2.\frac{1}{\nu} \bar{B}.B.\bar{A} \left\{ -\bar{\phi}_1'(\eta) \bar{\phi}_1'(\eta) \bar{Y}_1(\eta) + \bar{\phi}_2'(\eta) \bar{\phi}_2'(\eta) \bar{Y}_2(\eta) \right\} \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}.A^3.e^{3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta Y_1'^2.dx+\int_\eta^1 Y_2'^2.dx\right\}.\{Y_1'(\eta)-Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{2}.\bar{A}^3.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0}.\left\{\int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx+\int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx\right\}.\{\bar{Y}_1'(\eta)-\bar{Y}_2'(\eta)\} \\
& -\frac{1}{\nu}.B^2.A.e^{i.(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\{-\phi_1'^2(\eta).Y_1'(\eta)+\phi_2'^2(\eta).Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i.(2.\omega_2+\omega_1).T_0}.\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta).\bar{Y}_1'(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta).\bar{Y}_2'(\eta)\} \\
& -\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.A.e^{-i.(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta).Y_1'(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta).Y_2'(\eta)\}-\frac{1}{\nu}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{i.(2.\omega_2-\omega_1).T_0}.\{-\bar{\phi}_1'^2(\eta).\bar{Y}_1'(\eta)+\bar{\phi}_2'^2(\eta).\bar{Y}_2'(\eta)\}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

3.3 SİMPLEKTİK METOD KULLANIMI

Nonlineer titreşimleri ele almak için öncelikle lineer problem çözülmelidir. Lineer problemi oluşturan Denklem (3.30-3.32), Denklem (3.29-3.31)'nin eşleniklerini içerir. Diferansiyel denklem ve karşılık gelen şartları da birebir aynı yapıda olduğundan çözümlerine gerek yoktur. Simplektik Metot ile Denklem (3.29-3.31)'in çözülebilirlik şartını elde etmeye çalışalım. Bu amaçla diferansiyel denklemlerin mertebesini başka bir fonksiyon tanımıyla düşürelim;

$$A.e^{i.\omega_1.T_0}.\frac{\partial Y_i}{\partial x}=A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i \tag{3.51}$$

$$B.e^{i.\omega_2.T_0}.\frac{\partial \phi_i}{\partial x}=B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i \tag{3.52}$$

$$\chi.\nu.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i'-B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i\}+\omega_1^2.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i=0 \tag{3.53}$$

$$\chi.\nu.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i\}+B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i'+\omega_2^2.B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i=0 \tag{3.54}$$

Simplektik matris formunu elde edebilmek için Denklem (3.51-3.54)'den aşağıdaki gibi bir ifade elde edilir;

$$\left[\begin{array}{c} A.e^{i.\omega_1.T_0}.\frac{\partial Y_i}{\partial x} \\ B.e^{i.\omega_2.T_0}.\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \chi.\nu.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i'-B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i\}+\omega_1^2.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i \\ \chi.\nu.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i\}+B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i'+\omega_2^2.B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i \\ B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \tag{3.55}$$

Denklem (3.55) düzenlendiğinde aşağıdaki yapıyı alabileceği görülür.

$$X=e^{\lambda.x} \rightarrow \frac{\partial X}{\partial x}=\lambda.X \tag{3.56}$$

Bu durumda Denklem (3.55)'te ele aldığımız vektör de matris formuna dönüştürülebilir;

$$\left[\begin{array}{cccc} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ \omega_1^2 & 0 & \chi.\nu.\lambda & -\chi.\nu \\ 0 & (-\chi.\nu+\omega_2^2) & \chi.\nu & \lambda \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i \\ B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i \\ A.e^{i.\omega_1.T_0}.Z_i \\ B.e^{i.\omega_2.T_0}.H_i \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \tag{3.57}$$

Denklem (3.57) özdeğer-özvektör problemidir. Özdeğerleri elde etmek için determinantını aldığımızda Denklem (3.57) bize 4 adet kök verecektir. Yapılan sayısal hesaplamalarda özdeğeri veren köklerin iki sanal ve iki reel olarak elde edildiği görülmüştür. Eğer kökler $\mp \lambda_i$ ve $\mp \rho$ şeklinde yazılabilir ise mod şeklini veren fonksiyonlar aşağıdaki gibi önerilebilir;

$$Y_i(x) = c_{i1} \cdot \cos(\lambda_i x) + c_{i2} \cdot \sin(\lambda_i x) + c_{i3} \cdot \cosh(\rho x) + c_{i4} \cdot \sinh(\rho x) \quad (3.58)$$

$$\phi_i(x) = d_{i1} \cdot \cos(\lambda_i x) + d_{i2} \cdot \sin(\lambda_i x) + d_{i3} \cdot \cosh(\rho x) + d_{i4} \cdot \sinh(\rho x) \quad (3.59)$$

Denklem (3.58-3.59), Denklem (3.53)'e yerleştirilirse rotasyonel mod yapısı aşağıdaki formu alır;

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = & \frac{A \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0}}{B \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0}} \cdot \left(c_{i1} \cdot \frac{\{\chi \cdot v \cdot (\cos(\lambda_i x))'' + \omega_1^2 \cdot (\cos(\lambda_i x))\}}{\chi \cdot v \cdot (\sin(\lambda_i x))'} \cdot \sin(\lambda_i x) + c_{i2} \cdot \frac{\{\chi \cdot v \cdot (\sin(\lambda_i x))'' + \omega_1^2 \cdot (\sin(\lambda_i x))\}}{\chi \cdot v \cdot (\cos(\lambda_i x))'} \cdot \cos(\lambda_i x) \right. \\ & \left. + c_{i3} \cdot \frac{\{\chi \cdot v \cdot (\cosh(\rho x))'' + \omega_1^2 \cdot (\cosh(\rho x))\}}{\chi \cdot v \cdot (\sinh(\rho x))'} \cdot \sinh(\rho x) + c_{i4} \cdot \frac{\{\chi \cdot v \cdot (\sinh(\rho x))'' + \omega_1^2 \cdot (\sinh(\rho x))\}}{\chi \cdot v \cdot (\cosh(\rho x))'} \cdot \cosh(\rho x) \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Benzer şekilde Denklem (3.58-3.59), Denklem (3.54)'e yerleştirilirse Denklem (3.60)'dan farklı bir formda rotasyonel mod yapısı elde edilir. Numerik olarak bu ifadeler aynıdır.

Çözülebilirlik şartı için öncelikle denklemlerin homojen hali ele alınır;

$$[\chi \cdot v \cdot \Psi_i'' + \omega_1^2 \cdot \Psi_i] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} - \chi \cdot v \cdot \varphi_i' \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} = 0 \quad (3.61)$$

$$[\chi \cdot v \cdot \Psi_i'] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} + [\varphi_i'' + (-\chi \cdot v + \omega_2^2) \varphi_i] e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} = 0 \quad (3.62)$$

Denklem (3.61)-(3.62)'yi sağlayan şartlar şöyle yazılabilir;

$$\Psi_1(0) = \varphi_1'(0) = 0, \quad \Psi_2(1) = \varphi_2'(1) = 0 \quad (3.63)$$

$$\Psi_1(\eta) = \Psi_2(\eta), \quad \varphi_1(\eta) = \varphi_2(\eta), \quad \varphi_1'(\eta) = \varphi_2'(\eta)$$

$$\chi \cdot v \cdot (\Psi_1'(\eta) \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} - \varphi_1(\eta) \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0}) - \chi \cdot v \cdot (\Psi_2'(\eta) \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} - \varphi_2(\eta) \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0}) - \alpha \cdot \omega_1^2 \cdot \Psi_1(\eta) \cdot e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} = 0 \quad (3.64)$$

Simplektik yaklaşım kullanılarak Denklem (3.61)-(3.62) aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} \cdot \Psi_i' - e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} \cdot \beta_i = 0 \quad (3.65)$$

$$e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \cdot \varphi_i' - e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \cdot \gamma_i = 0 \quad (3.66)$$

$$[\chi \cdot v \cdot \beta_i' + \omega_1^2 \cdot \Psi_i] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} - \chi \cdot v \cdot \gamma_i \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} = 0 \quad (3.67)$$

$$[\chi \cdot v \cdot \beta_i] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} + [\gamma_i' + (-\chi \cdot v + \omega_2^2) \varphi_i] e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} = 0 \quad (3.68)$$

Vektör formunda yazılırsa, Denklem (3.65-3.68) takımı aşağıdaki gibidir;

$$\begin{bmatrix} e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} \cdot \Psi_i' - e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} \cdot \beta_i \\ e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \cdot \varphi_i' - e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \cdot \gamma_i \\ [\chi \cdot v \cdot \beta_i' + \omega_1^2 \cdot \Psi_i] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} - \chi \cdot v \cdot \gamma_i \cdot e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \\ [\chi \cdot v \cdot \beta_i] e^{i \cdot \omega_1 \cdot T_0} + [\gamma_i' + (-\chi \cdot v + \omega_2^2) \varphi_i] e^{i \cdot \omega_2 \cdot T_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$i=1,2$ için Denklem (3.69)'u keyfi fonksiyon ile çarpıp, tanım kümesi üzerinden integre edelim.

$$\int_0^{\eta} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1' - e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_1 \\ e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1' - e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1 \\ [\chi.v.\beta_1' + \omega_1^2.\Psi_1]e^{i.\omega_1.T_0} - \chi.v.\gamma_1.e^{i.\omega_2.T_0} \\ [\chi.v.\beta_1]e^{i.\omega_1.T_0} + [\gamma_1' + (-\chi.v + \omega_2^2).\varphi_1]e^{i.\omega_2.T_0} \end{bmatrix} dx = \int_0^{\eta} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx \quad (3.70)$$

$$\int_{\eta}^1 \begin{bmatrix} u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2' - e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_2 \\ e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2' - e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_2 \\ [\chi.v.\beta_2' + \omega_1^2.\Psi_2]e^{i.\omega_1.T_0} - \chi.v.\gamma_2.e^{i.\omega_2.T_0} \\ [\chi.v.\beta_2]e^{i.\omega_1.T_0} + [\gamma_2' + (-\chi.v + \omega_2^2).\varphi_2]e^{i.\omega_2.T_0} \end{bmatrix} dx = \int_{\eta}^1 \begin{bmatrix} u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx \quad (3.71)$$

Denklem (3.70)-(3.71)'deki fonksiyonların türevlerini keyfi fonksiyonlar üzerine atalım;

$$\int_0^{\eta} \left[\begin{aligned} &\left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1'.u_1 - e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_1.u_1 \right\rangle + \left\langle e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1'.u_2 - e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1.u_2 \right\rangle \\ &+ \left\langle [\chi.v.\beta_1'.u_3 + \omega_1^2.\Psi_1].u_3 \right\rangle e^{i.\omega_1.T_0} - \chi.v.\gamma_1.e^{i.\omega_2.T_0}.u_3 \\ &+ \left\langle [\chi.v.\beta_1.u_4]e^{i.\omega_1.T_0} + [\gamma_1'.u_4 + (-\chi.v + \omega_2^2).\varphi_1].u_4 \right\rangle e^{i.\omega_2.T_0} \end{aligned} \right] dx = \int_0^{\eta} 0 dx \quad (3.72)$$

$$\int_{\eta}^1 \left[\begin{aligned} &\left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2'.u_5 - e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_2.u_5 \right\rangle + \left\langle e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2'.u_6 - e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_2.u_6 \right\rangle \\ &+ \left\langle [\chi.v.\beta_2'.u_7 + \omega_1^2.\Psi_2].u_7 \right\rangle e^{i.\omega_1.T_0} - \chi.v.\gamma_2.u_7.e^{i.\omega_2.T_0} \\ &+ \left\langle [\chi.v.\beta_2.u_8]e^{i.\omega_1.T_0} + [\gamma_2'.u_8 + (-\chi.v + \omega_2^2).\varphi_2].u_8 \right\rangle e^{i.\omega_2.T_0} \end{aligned} \right] dx = \int_{\eta}^1 0 dx \quad (3.73)$$

Kısmi türevleri alıp, integralleri ortak grup yapalım;

$$\begin{aligned} &\left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1'.u_1 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1'.u_2 + \chi.v.\beta_1.u_3.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_1.u_4.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_0^{\eta} \\ &+ \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2'.u_5 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2'.u_6 + \chi.v.\beta_2.u_7.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_2.u_8.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_{\eta}^1 \\ &+ \int_0^{\eta} .e^{i.\omega_1.T_0}.\left\langle \omega_1^2.u_3 - u_1' \right\rangle.\Psi_1.dx + \int_{\eta}^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\left\langle \omega_1^2.u_7 - u_5' \right\rangle.\Psi_2.dx \\ &+ \int_0^{\eta} .e^{i.\omega_2.T_0}.\left\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_4 - u_2' \right\rangle.\varphi_1.dx + \int_{\eta}^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\left\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_8 - u_6' \right\rangle.\varphi_2.dx \\ &+ \int_0^{\eta} .e^{i.\omega_1.T_0}.\left\langle -u_1 + \chi.v.(u_4 - u_3') \right\rangle.\beta_1.dx + \int_{\eta}^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\left\langle -u_5 + \chi.v.(u_8 - u_7') \right\rangle.\beta_2.dx \\ &+ \int_0^{\eta} .e^{i.\omega_2.T_0}.\left\langle -u_2 - u_4' - \chi.v.u_3 \right\rangle.\gamma_1.dx + \int_{\eta}^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\left\langle -u_6 - u_8' - \chi.v.u_7 \right\rangle.\gamma_2.dx = 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Denklem (3.74), şartlar ve integraller olmak üzere iki grupta ele alınabilir;

$$\left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1.u_1 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1.u_2 + \chi.v.\beta_1.u_3.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_1.u_4.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_0^\eta \quad (3.75)$$

$$+ \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2.u_5 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2.u_6 + \chi.v.\beta_2.u_7.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_2.u_8.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_\eta^1 = 0$$

$$\int_0^\eta .e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_3 - u_1' \rangle .\Psi_1.d x + \int_\eta^1 .e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_7 - u_5' \rangle .\Psi_2.d x$$

$$+ \int_0^\eta .e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_4 - u_2' \rangle .\varphi_1.d x + \int_\eta^1 .e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_8 - u_6' \rangle .\varphi_2.d x \quad (3.76)$$

$$+ \int_0^\eta .e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_1 + \chi.v.(u_4 - u_3') \rangle .\beta_1.d x + \int_\eta^1 .e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_5 + \chi.v.(u_8 - u_7') \rangle .\beta_2.d x$$

$$+ \int_0^\eta .e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_2 - u_4' - \chi.v.u_3 \rangle .\gamma_1.d x + \int_\eta^1 .e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_6 - u_8' - \chi.v.u_7 \rangle .\gamma_2.d x = 0$$

Denklem (3.76)'dan aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir;

$$\omega_1^2.u_3 - u_1' = 0, \quad (-\chi.v + \omega_2^2)u_4 - u_2' = 0, \quad -u_1 + \chi.v.(u_4 - u_3') = 0, \quad -u_2 - u_4' - \chi.v.u_3 = 0 \quad (3.77)$$

$$\omega_1^2.u_7 - u_5' = 0, \quad (-\chi.v + \omega_2^2)u_8 - u_6' = 0, \quad -u_5 + \chi.v.(u_8 - u_7') = 0, \quad -u_6 - u_8' - \chi.v.u_7 = 0 \quad (3.78)$$

Denklem (3.77) ile Denklem (3.78) diferansiyel denklem yapıları bakımından aynıdır. Bu denklemlerden üçüncü ve dördüncü terimlerin türevleri alınarak birinci ve ikinci terimler içine yerleştirilirse aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir;

$$\chi.v.(u_3'' - u_4') + \omega_1^2.u_3 = 0, \quad u_4'' + \chi.v.(u_3' - u_4) + \omega_2^2.u_4 = 0 \quad (3.79)$$

$$\chi.v.(u_7'' - u_8') + \omega_1^2.u_7 = 0, \quad u_8'' + \chi.v.(u_7' - u_8) + \omega_2^2.u_8 = 0 \quad (3.80)$$

Elde ettiğimiz diferansiyel denklemlerin nasıl bir keyfi fonksiyonlardan oluştuğuna bakmak istiyoruz. Bu amaçla bir başlangıç noktası olarak ε mertebesi problemi olan Denklem (3.29) ve Denklem (3.31) tekrar göz önüne alalım.

$$\chi.v.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i'' - B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i'\} + \omega_1^2.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i = 0 \quad (3.81)$$

$$B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i'' + \chi.v.\{A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_i' - B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i\} + \omega_2^2.B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_i = 0 \quad (3.82)$$

$i=1$ için Denklem (3.79)-(3.80)'in ilk terimleri Denklem (3.81) ile ve $i=2$ için ikinci terimleri Denklem (3.82) ile aynı formdadır. Buradan bu keyfi fonksiyonların aşağıdaki yapıda olduğu görülür;

$$u_3 = A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1, \quad u_7 = A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2, \quad u_4 = B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1, \quad u_8 = B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2 \quad (3.83)$$

Elde edilen keyfi fonksiyonlar Denklem (3.77-3.78)'de kullanılırsa diğer keyfi fonksiyonlar aşağıdaki gibi elde edilir;

$$u_1 = \chi.v.(B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1 - A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1'), \quad u_2 = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1' - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1$$

$$u_5 = \chi.v.(B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2 - A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2'), \quad u_6 = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2' - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2 \quad (3.84)$$

Keyfi fonksiyonlara ait mesnet şartlarının da ilk mertebeye mesnet şartlarına uygunluğu kontrol edilmelidir. Bunun için öncelikle şartlar da simplektik metod değişkenlerine çevrilmelidir. Bu amaçla Denklem (3.74), uç ve süreklilik şartlarına göre ayrıştırılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$\begin{aligned} & + \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2(1).u_5(1) + e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2(1).u_6(1) + e^{i.\omega_1.T_0}.\chi.v.\beta_2(1).u_7(1) + e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_2(1).u_8(1) \right\rangle \\ & - \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1(0).u_1(0) + e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(0).u_2(0) + e^{i.\omega_1.T_0}.\chi.v.\beta_1(0).u_3(0) + e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1(0).u_4(0) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} & + \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1(\eta).u_1(\eta) + e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(\eta).u_2(\eta) + e^{i.\omega_1.T_0}.\chi.v.\beta_1(\eta).u_3(\eta) + e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1(\eta).u_4(\eta) \right\rangle \\ & - \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2(\eta).u_5(\eta) + e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2(\eta).u_6(\eta) + e^{i.\omega_1.T_0}.\chi.v.\beta_2(\eta).u_7(\eta) + e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_2(\eta).u_8(\eta) \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Denklem (3.63)'deki basit mesnetli durum için Denklem (3.85) kullanılırsa aşağıdaki şartlar elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi_2(1) \neq 0 & \Rightarrow u_6(1) = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2'(1) - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2(1) = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2'(1) = 0 \\ \beta_2(1) \neq 0 & \Rightarrow u_7(1) = A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2(1) = 0 \\ \phi_1(0) \neq 0 & \Rightarrow u_2(0) = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1'(0) - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1(0) = -B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1'(0) = 0 \\ \beta_1(0) \neq 0 & \Rightarrow u_3(0) = A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.87)$$

Bunlar basit mesnetli uç şartlarını sağlamaktadır.

Denklem (3.86), Denklem (3.63)-(3.64)'deki şartlara göre düzenlenirse aşağıdaki hali alır;

$$\begin{aligned} & e^{i.\omega_1.T_0}.(u_1(\eta) - u_5(\eta)).\Psi_1(\eta) \\ & + e^{i.\omega_2.T_0}.(u_2(\eta) - u_6(\eta)).\phi_1(\eta) \\ & + e^{i.\omega_1.T_0}.(\chi.v.\beta_1(\eta).u_3(\eta) - \chi.v.\beta_2(\eta).u_7(\eta)) \\ & + e^{i.\omega_2.T_0}.(\gamma_1(\eta).u_4(\eta) - \gamma_2(\eta).u_8(\eta)) = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

Denklem (3.83)-(3.84)'de keyfi fonksiyonlar ve Denklem (3.33)-(3.34) şartlarını bir arada kullanırsak aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned} & e^{i.\omega_1.T_0}.\left(\chi.v.(B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(\eta) - A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1'(\eta)) - \chi.v.(B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2(\eta) - A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2'(\eta)) \right).\Psi_1(\eta) \\ & + e^{i.\omega_2.T_0}.\left((-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1'(\eta) - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_1(\eta)) - (-B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2'(\eta) - \chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.Y_2(\eta)) \right).\phi_1(\eta) \\ & + e^{i.\omega_1.T_0}.\left(\chi.v.\beta_1(\eta).e^{i.\omega_1.T_0}.AY_1(\eta) - \chi.v.\beta_2(\eta).e^{i.\omega_1.T_0}.AY_2(\eta) \right) \\ & + e^{i.\omega_2.T_0}.\left(\gamma_1(\eta).B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(\eta) - \gamma_2(\eta).B.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2(\eta) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Bu denklemler tekrar düzenlenirse aşağıdaki en sade ifade elde edilir;

$$\begin{aligned}
& A.e^{i.\omega_1.T_0}.e^{i.\omega_1.T_0}.\alpha.\omega_1^2.(-Y_1(\eta)+Y_2(\eta)).\Psi_1(\eta) \\
& +e^{i.\omega_2.T_0}.(B.e^{i.\omega_2.T_0}.(-\phi_1'(\eta)+\phi_2'(\eta))+\chi.v.A.e^{i.\omega_1.T_0}.(-Y_1(\eta)+Y_2(\eta)))\phi_1(\eta) \\
& +A.\chi.v.e^{i.\omega_1.T_0}.e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_1(\eta).(Y_1(\eta)-Y_2(\eta)) \\
& +\chi.v.e^{i.\omega_1.T_0}.e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1(\eta)-\phi_2(\eta)).A.Y_2(\eta) \\
& +e^{i.\omega_2.T_0}.B.e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1(\eta).\phi_1(\eta)-\gamma_2(\eta).\phi_2(\eta)=0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Ortak şartlar dikkate alındığında Denklem (3.90)'ın sıfırlandığı, yani; verilen keyfi fonksiyonların verilen şartları sağladığı görülür. Bu durumda Denklem (3.46)-(3.47)'nin homojen olmayan durumu incelenebilir. Homojen olmayan diferansiyel denklem vektör formunda aşağıdaki gibi yazılır;

$$\int_0^\eta [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1'-e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_1 \\ e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_1'-e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_1 \\ [\chi.v.\beta_1'+\omega_1^2.\Psi_1]e^{i.\omega_1.T_0}-\chi.v.\gamma_1.e^{i.\omega_2.T_0} \\ [\chi.v.\beta_1]e^{i.\omega_1.T_0}+[\gamma_1'+(-\chi.v+\omega_2^2).\phi_1]e^{i.\omega_2.T_0} \end{bmatrix} dx = \int_0^\eta [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{11} \\ N_{12} \end{bmatrix} dx \tag{3.91}$$

$$\int_\eta^1 [u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8] \begin{bmatrix} e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2'-e^{i.\omega_1.T_0}.\beta_2 \\ e^{i.\omega_2.T_0}.\phi_2'-e^{i.\omega_2.T_0}.\gamma_2 \\ [\chi.v.\beta_2'+\omega_1^2.\Psi_2]e^{i.\omega_1.T_0}-\chi.v.\gamma_2.e^{i.\omega_2.T_0} \\ [\chi.v.\beta_2]e^{i.\omega_1.T_0}+[\gamma_2'+(-\chi.v+\omega_2^2).\phi_2]e^{i.\omega_2.T_0} \end{bmatrix} dx = \int_\eta^1 [u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_{21} \\ N_{22} \end{bmatrix} dx \tag{3.92}$$

Burada N ifadeleri için aşağıdaki kısaltmalar yapılmıştır;

$$\begin{aligned}
N_{i1} = & e^{i.\omega_1.T_0} \left[2.i.\omega_1.D_2.A.Y_i + 2.i.\omega_1.\mu_i.A.Y_i + A^2.\bar{A} \left[-\left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx \right\} Y_i'' - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx \right\} \bar{Y}_i'' \right] \right. \\
& - \frac{1}{2}.F_i.e^{i.\sigma.T_2} + 2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.A.(\bar{\phi}_i'.\phi_i'.Y_i')' \left. \right] + \frac{1}{v}.B^2.A.e^{i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\phi_i'^2.Y_i' + \frac{1}{v}.\bar{B}^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1+2.\omega_2).T_0}.\bar{\phi}_i'^2.\bar{Y}_i' \\
& + e^{-i.\omega_1.T_0} \left[-2.i.\omega_1.D_2.\bar{A}.\bar{Y}_i - 2.i.\omega_1.\mu_i.\bar{A}.\bar{Y}_i + \bar{A}^2.A \left[-\frac{1}{2} \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx \right\} Y_i'' - \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx \right\} \bar{Y}_i'' \right] \right. \\
& + 2.\frac{1}{v}.\bar{B}.B.\bar{A}.\bar{\phi}_i'.\phi_i'.\bar{Y}_i' \left. \right] + \frac{1}{v}.\bar{B}^2.A.e^{i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\bar{\phi}_i'^2.Y_i' + \frac{1}{v}.B^2.\bar{A}.e^{-i.(\omega_1-2.\omega_2).T_0}.\phi_i'^2.\bar{Y}_i' \\
& - \frac{1}{2}.A^2.A.e^{3.i.\omega_1.T_0} \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx \right\} Y_i'' - \frac{1}{2}.\bar{A}^2.\bar{A}.e^{-3.i.\omega_1.T_0} \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'^2.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'^2.dx \right\} \bar{Y}_i''
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
N_{i2} = & e^{i.\omega_2.T_0} \left\{ 2.i.\omega_2.D_2B.\phi_i + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.B.(\bar{Y}'_i.Y'_i.\phi'_i) \right\} + e^{-i.\omega_2.T_0} \left\{ -2.i.\omega_2.D_2\bar{B}.\bar{\phi}_i + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.\bar{B}.(\bar{Y}'_i.Y'_i.\bar{\phi}'_i) \right\} \\
& + \frac{1}{\nu}.A^2.B.e^{i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.(Y_i'^2.\phi'_i) + \frac{1}{\nu}.\bar{A}^2.\bar{B}.e^{-i.(2.\omega_1+\omega_2).T_0}.(Y_i'^2.\bar{\phi}'_i) + \frac{1}{\nu}.\bar{A}^2.B.e^{-i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.(Y_i'^2.\phi'_i) \\
& + \frac{1}{\nu}.A^2.\bar{B}.e^{i.(2.\omega_1-\omega_2).T_0}.(Y_i'^2.\bar{\phi}'_i)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Denklem (3.91)-(3.92) için işlemleri sürdürürsek aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$\begin{aligned}
& + \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1.u_1 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1.u_2 + \chi.v.\beta_1.u_3.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_1.u_4.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_0^\eta \\
& + \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2.u_5 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2.u_6 + \chi.v.\beta_2.u_7.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_2.u_8.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_\eta^1 \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_3 - u_1' \rangle.\Psi_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_7 - u_5' \rangle.\Psi_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_4 - u_2' \rangle.\varphi_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_8 - u_6' \rangle.\varphi_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_1 + \chi.v.u_4 - \chi.v.u_3' \rangle.\beta_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_5 + \chi.v.u_8 - \chi.v.u_7' \rangle.\beta_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_2 - \chi.v.u_3 - u_4' \rangle.\gamma_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_6 - \chi.v.u_7 - u_8' \rangle.\gamma_2.dx = \int_0^\eta \{N_{11}.u_3 + N_{12}.u_4\}dx
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_1.u_1 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_1.u_2 + \chi.v.\beta_1.u_3.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_1.u_4.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_0^\eta \\
& + \left\langle e^{i.\omega_1.T_0}.\Psi_2.u_5 + e^{i.\omega_2.T_0}.\varphi_2.u_6 + \chi.v.\beta_2.u_7.e^{i.\omega_1.T_0} + \gamma_2.u_8.e^{i.\omega_2.T_0} \right\rangle_\eta^1 \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_3 - u_1' \rangle.\Psi_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\langle \omega_1^2.u_7 - u_5' \rangle.\Psi_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_4 - u_2' \rangle.\varphi_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\langle (-\chi.v + \omega_2^2)u_8 - u_6' \rangle.\varphi_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_1 + \chi.v.(u_4 - u_3') \rangle.\beta_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_1.T_0}.\langle -u_5 + \chi.v.(u_8 - u_7') \rangle.\beta_2.dx \\
& + \int_0^\eta e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_2 - u_4' - \chi.v.u_3 \rangle.\gamma_1.dx + \int_\eta^1 e^{i.\omega_2.T_0}.\langle -u_6 - u_8' - \chi.v.u_7 \rangle.\gamma_2.dx = \int_\eta^1 (N_{21}.u_7 + N_{22}.u_8).dx
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Denklem (3.95) ile Denklem (3.96) toplanırsa elde edilen ifadenin sol tarafında ortak şartlardan nonlineerite terimleri gelmektedir. Basit mesnetli uç şartlar homojen olduğundan dolayı işlemleri

sürdürdüğümüzde ek terimler gelmez(sıfır etki). Ancak süreklilik şartlarının homojen olmayan kısmı da dikkate alınıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki denklem takımı elde edilir;

$$\begin{aligned}
& e^{2.i.\omega_1.T_0} \left[-2.\alpha.i.\omega_1.A.D_2A.Y_1(\eta) - 2.\frac{1}{\nu}.\bar{B}.B.A.A.\left\{ -\bar{\phi}'_1(\eta)\phi'_1(\eta).Y_1'(\eta) + \bar{\phi}'_2(\eta)\phi'_2(\eta).Y_2'(\eta) \right\} \right. \\
& + \bar{A}.A^3 \left. \left\{ -\int_0^\eta \bar{Y}'_1.Y'_1.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2.Y'_2.dx \right\} \cdot \left\{ Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta) \right\} - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx \right\} \cdot \left\{ \bar{Y}'_1(\eta) - \bar{Y}'_2(\eta) \right\} \right] \cdot Y_1(\eta) \\
& = \int_0^\eta \left\langle e^{2.i.\omega_1.T_0} \left[2.i.\omega_1.A.D_2A.Y_1^2 + 2.i.\omega_1.\mu_1.A^2.Y_1^2 - \frac{1}{2}.A.F_1.e^{i.\sigma.T_2}.Y_1 + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{B}.B.A^2.(\bar{\phi}'_1.\phi'_1.Y_1)' \right. \right. \\
& + A^3.\bar{A} \left. \left. \left[-\int_0^\eta \bar{Y}'_1.Y'_1.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2.Y'_2.dx \right] \cdot Y_1'' - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx \right\} \cdot \bar{Y}_1'' \right] \cdot Y_1 + \frac{1}{\nu}.A^2.B.\bar{B}.e^{i.2.\omega_1.T_0}.(Y_1'^2.\bar{\phi}'_1)'.\phi_1 \right\rangle dx \\
& + \int_\eta^1 \left\langle e^{2.i.\omega_1.T_0} \left[2.i.\omega_1.A.D_2A.Y_2^2 + 2.i.\omega_1.\mu_2.A^2.Y_2^2 - \frac{1}{2}.A.F_2.e^{i.\sigma.T_2}.Y_2 + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{B}.B.A^2.(\bar{\phi}'_2.\phi'_2.Y_2)' \right. \right. \\
& + A^3.\bar{A} \left. \left. \left[-\int_0^\eta \bar{Y}'_1.Y'_1.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2.Y'_2.dx \right] \cdot Y_2'' - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2.dx + \int_\eta^1 Y_2'^2.dx \right\} \cdot \bar{Y}_2'' \right] \cdot Y_2 + \frac{1}{\nu}.A^2.B.\bar{B}.e^{i.2.\omega_1.T_0}.(Y_2'^2.\bar{\phi}'_2)'.B.\phi_2 \right\rangle dx
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\nu}.B^2.A.\bar{A}.e^{2.i.\omega_2.T_0} \cdot \left\{ -\phi_1'^2(\eta).\bar{Y}_1'(\eta) + \phi_2'^2(\eta).\bar{Y}_2'(\eta) \right\} \cdot Y_1(\eta) \\
& = \int_0^\eta \left\langle \frac{1}{\nu}.B^2.\bar{A}.A.e^{2.i.\omega_2.T_0} \cdot (\phi_1'^2.\bar{Y}_1)' \cdot Y_1 + e^{2.i.\omega_2.T_0} \cdot \left\{ 2.i.\omega_2.B.D_2B.\phi_1 + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.B^2.(\bar{Y}'_1.Y'_1.\phi_1)' \right\} \cdot \phi_1 \right\rangle dx \\
& + \int_\eta^1 \left\langle \frac{1}{\nu}.B^2.A.\bar{A}.e^{2.i.\omega_2.T_0} \cdot (\phi_2'^2.\bar{Y}_2)' \cdot Y_2 + e^{2.i.\omega_2.T_0} \cdot \left\{ 2.i.\omega_2.B.D_2B.\phi_2 + 2.\frac{1}{\nu}.\bar{A}.A.B^2.(\bar{Y}'_2.Y'_2.\phi_2)' \right\} \cdot \phi_2 \right\rangle dx
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Denklem (3.97)-(3.98)'de gerekli sadeleştirmeleri yaparsak aşağıdaki denklemler elde edilir;

$$\begin{aligned}
& 2. \alpha . i . \omega_1 . A . D_2 A Y_1^2(\eta) + 2 . \frac{1}{\nu} . \bar{B} . B . A^2 . \left\{ -\bar{\phi}'_1(\eta) . \phi'_1(\eta) . Y_1'(\eta) + \bar{\phi}'_2(\eta) . \phi'_2(\eta) . Y_2'(\eta) \right\} Y_1(\eta) \\
& - \bar{A} . A^3 . \left\{ - \left[\int_0^\eta \bar{Y}'_1 . Y'_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2 . Y'_2 . dx \right] . \left\{ Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta) \right\} - \frac{1}{2} . \left[\int_0^\eta Y_1'^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 . dx \right] . \left\{ \bar{Y}'_1(\eta) - \bar{Y}'_2(\eta) \right\} \right\} . Y_1(\eta) \\
& + 2 . i . \omega_1 . A . D_2 A . \left\{ \int_0^\eta Y_1^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2^2 . dx \right\} + 2 . i . \omega_1 . \mu . A^2 . \left\{ \int_0^\eta Y_1^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2^2 . dx \right\} - \frac{1}{2} . A . \left\{ \int_0^\eta F_1 . Y_1 . dx + \int_\eta^1 F_2 . Y_2 . dx \right\} . e^{i . \sigma . T_2} \\
& + 2 . \frac{1}{\nu} . \bar{B} . B . A^2 . \left\{ \int_0^\eta (\bar{\phi}'_1 . \phi'_1 . Y_1)' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 (\bar{\phi}'_2 . \phi'_2 . Y_2)' . Y_2 . dx \right\} + \frac{1}{\nu} . A^2 . B . \bar{B} . \left\{ \int_0^\eta (Y_1'^2 . \bar{\phi}'_1)' . \phi_1 . dx + \int_\eta^1 (Y_2'^2 . \bar{\phi}'_2)' . \phi_2 . dx \right\} \\
& + A^3 . \bar{A} . \left\{ - \left[\int_0^\eta \bar{Y}'_1 . Y'_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2 . Y'_2 . dx \right] . \left[\int_0^\eta Y_1'' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 Y_2'' . Y_2 . dx \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} . \left[\int_0^\eta Y_1'^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 . dx \right] . \left[\int_0^\eta \bar{Y}_1'' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'' . Y_2 . dx \right] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\nu} . B^2 . A . \bar{A} . \left\{ -\phi_1'^2(\eta) . \bar{Y}'_1(\eta) + \phi_2'^2(\eta) . \bar{Y}'_2(\eta) \right\} Y_1(\eta) + \frac{1}{\nu} . B^2 . \bar{A} . A . \left\{ \int_0^\eta (\phi_1'^2 . \bar{Y}'_1)' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 (\phi_2'^2 . \bar{Y}'_2)' . Y_2 . dx \right\} \\
& + 2 . i . \omega_2 . B . D_2 B . \left\{ \int_0^\eta \phi_1^2 . dx + \int_\eta^1 \phi_2^2 . dx \right\} + 2 . \frac{1}{\nu} . \bar{A} . A . B^2 . \left\{ \int_0^\eta (\bar{Y}'_1 . Y_1' . \phi_1)' . \phi_1 . dx + \int_\eta^1 (\bar{Y}'_2 . Y_2' . \phi_2)' . \phi_2 . dx \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Burada aşağıdaki tanımlamalar yapılarak işlemler sürdürülecektir:

$$\int_0^\eta Y_1^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2^2 . dx = 1, \quad f = \int_0^\eta F_1 . Y_1 . dx + \int_\eta^1 F_2 . Y_2 . dx, \quad \bar{d} = \int_0^\eta \phi_1^2 . dx + \int_\eta^1 \phi_2^2 . dx, \quad \mu_{1,2} = \mu \tag{3.101}$$

\bar{d} ifadesi ilerleyen analitik işlemler ile eksponensiyel terimleri yok edilmiş, integre edildiğinde sabit bir değere karşılık gelen bir dönme mod biçimidir (ters şapka).

$$\begin{aligned}
& 2 . i . \omega_1 . \left\{ 1 + \alpha . Y_1^2(\eta) \right\} D_2 A + 2 . i . \omega_1 . \mu . A - \frac{1}{2} . f . e^{i . \sigma . T_2} \\
& \bar{A} . A^2 . \left\langle - \left[\int_0^\eta \bar{Y}'_1 . Y'_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2 . Y'_2 . dx \right] . \left\{ Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta) \right\} - \frac{1}{2} . \left[\int_0^\eta Y_1'^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 . dx \right] . \left\{ \bar{Y}'_1(\eta) - \bar{Y}'_2(\eta) \right\} \right\} . Y_1(\eta) \\
& + \left\langle - \left[\int_0^\eta \bar{Y}'_1 . Y'_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}'_2 . Y'_2 . dx \right] . \left[\int_0^\eta Y_1'' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 Y_2'' . Y_2 . dx \right] - \frac{1}{2} . \left[\int_0^\eta Y_1'^2 . dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 . dx \right] . \left[\int_0^\eta \bar{Y}_1'' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'' . Y_2 . dx \right] \right\rangle \\
& + A . \bar{B} . B . \frac{1}{\nu} . \left\langle 2 . \left\{ -\bar{\phi}'_1(\eta) . \phi'_1(\eta) . Y_1'(\eta) + \bar{\phi}'_2(\eta) . \phi'_2(\eta) . Y_2'(\eta) \right\} Y_1(\eta) \right. \\
& \left. + 2 . \left[\int_0^\eta (\bar{\phi}'_1 . \phi'_1 . Y_1)' . Y_1 . dx + \int_\eta^1 (\bar{\phi}'_2 . \phi'_2 . Y_2)' . Y_2 . dx \right] + \int_0^\eta (Y_1'^2 . \bar{\phi}'_1)' . \phi_1 . dx + \int_\eta^1 (Y_2'^2 . \bar{\phi}'_2)' . \phi_2 . dx \right\rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$2.i.\omega_2.D_2B.\bar{d} + A.\bar{A}.B.\frac{1}{v} \left\langle \left\{ -\phi_1'^2(\eta).\bar{Y}_1'(\eta) + \phi_2'^2(\eta).\bar{Y}_2'(\eta) \right\} Y_1(\eta) + \left\{ \int_0^\eta (\phi_1'^2.\bar{Y}_1') .Y_1 dx + \int_\eta^1 (\phi_2'^2.\bar{Y}_2') .Y_2 .dx \right\} \right. \\ \left. + 2 \cdot \left\{ \int_0^\eta (\bar{Y}_1'.Y_1'.\phi_1') .\phi_1 .dx + \int_\eta^1 (\bar{Y}_2'.Y_2'.\phi_2') .\phi_2 .dx \right\} \right\rangle = 0 \quad (3.103)$$

Genlik-faz modülasyon için aşağıdaki tanımları yapalım.

$$+ 2.i.\omega_1. \left\{ 1 + \alpha.Y_1^2(\eta) \right\} D_2A + 2.i.\omega_1.\mu.A - \frac{1}{2}.f.e^{i.\sigma.T_2} + \bar{A}.A^2.\Delta_1 + A.\bar{B}.B.\frac{1}{v}.\Delta_2 = 0 \quad (3.104)$$

$$A.\bar{A}.B.\frac{1}{v}.\Delta_3 + 2.i.\omega_2.D_2B.\bar{d} = 0 \quad (3.105)$$

Burada aşağıdaki terimler nonlineerite terimleri olarak ele alınmıştır;

$$\Delta_1 = - \left\{ - \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx \right\} \cdot \left\{ Y_1'(\eta) - Y_2'(\eta) \right\} - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2 .dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 .dx \right\} \cdot \left\{ \bar{Y}_1'(\eta) - \bar{Y}_2'(\eta) \right\} \right\} \cdot Y_1(\eta) \\ + \left\{ - \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'.Y_1'.dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'.Y_2'.dx \right\} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1''.Y_1 .dx + \int_\eta^1 Y_2''.Y_2 .dx \right\} - \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int_0^\eta Y_1'^2 .dx + \int_\eta^1 Y_2'^2 .dx \right\} \cdot \left\{ \int_0^\eta \bar{Y}_1'' .Y_1 .dx + \int_\eta^1 \bar{Y}_2'' .Y_2 .dx \right\} \right\} \quad (3.106)$$

$$\Delta_2 = 2 \cdot \left\{ -\bar{\phi}_1'(\eta).\phi_1'(\eta).Y_1'(\eta) + \bar{\phi}_2'(\eta).\phi_2'(\eta).Y_2'(\eta) \right\} Y_1(\eta) \\ + 2 \cdot \left\{ \int_0^\eta (\bar{\phi}_1'.\phi_1'.Y_1') .Y_1 .dx + \int_\eta^1 (\bar{\phi}_2'.\phi_2'.Y_2') .Y_2 .dx \right\} + \left\{ \int_0^\eta (Y_1'^2.\bar{\phi}_1') .\phi_1 .dx + \int_\eta^1 (Y_2'^2.\bar{\phi}_2') .\phi_2 .dx \right\} \quad (3.107)$$

$$\Delta_3 = \left\{ -\phi_1'^2(\eta).\bar{Y}_1'(\eta) + \phi_2'^2(\eta).\bar{Y}_2'(\eta) \right\} Y_1(\eta) \\ + \left\{ \int_0^\eta (\phi_1'^2.\bar{Y}_1') .Y_1 .dx + \int_\eta^1 (\phi_2'^2.\bar{Y}_2') .Y_2 .dx \right\} + 2 \cdot \left\{ \int_0^\eta (\bar{Y}_1'.Y_1'.\phi_1') .\phi_1 .dx + \int_\eta^1 (\bar{Y}_2'.Y_2'.\phi_2') .\phi_2 .dx \right\} \quad (3.108)$$

Rotasyonel hareketin çözüm fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki dönüşümler yapılabilir;

$$\bar{\phi}.\phi = \frac{\bar{A}.e^{-i.\omega_1.T_0}}{B.e^{-i.\omega_2.T_0}} \frac{A.e^{i.\omega_1.T_0}}{B.e^{i.\omega_2.T_0}} = \frac{\bar{A}.A}{B.B} \cdot \bar{\phi}.\phi, \quad \phi^2 = \frac{A.e^{i.\omega_1.T_0}}{B.e^{i.\omega_2.T_0}} \frac{A.e^{i.\omega_1.T_0}}{B.e^{i.\omega_2.T_0}} = \frac{A^2.e^{2.i.\omega_1.T_0}}{B^2.e^{2.i.\omega_2.T_0}} \cdot \tilde{\phi}^2 \quad (3.109)$$

Burada şapkalı ifadeler ilk mertebe dönmeye ait mod yapısı bulunduğundan sonra genlik ve eksponensiyel terimlerinin olmadığı durumdur. Bu durumda Denklem (3.104)-(3.105) sadeleştirilerek aşağıdaki hale gelir;

$$2.i.\omega_1.m.\dot{A} + 2.i.\omega_1.\mu.A + \left(\Delta_1 + \frac{1}{v}.\Delta_2 \right) \cdot \bar{A}.A^2 = \frac{1}{2}.f.e^{i.\sigma.T_2}, \quad A.\bar{A}.B.\frac{1}{v}.\Delta_3 + 2.i.\omega_2.B.\dot{\bar{d}} = 0 \quad (3.110)$$

Burada aşağıdaki gibi bir dönüşüm yapılmıştır;

$$m = 1 + \alpha.Y_1^2(\eta), \quad \dot{A} = D_2A, \quad \dot{B} = D_2B \quad (3.111)$$

Denklem (110)'a çözüm için kompleks genlikler, genlik ve faz olarak iki kısımda incelenebilir;

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\zeta_1}, \quad B = \frac{1}{2} b e^{i\zeta_2} \quad a = a(T_2), \quad b = b(T_2), \quad \zeta_1 = \zeta_1(T_2), \quad \zeta_2 = \zeta_2(T_2) \quad (3.112)$$

Denklem (3.110)'dan polar formda yazılan genlik-faz modülasyon denklemleri aşağıdaki gibidir;

$$i \omega_1 m \dot{a} - \omega_1 m a (\sigma - \dot{\tau}) + i \omega_1 \mu a + \frac{1}{8} \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \Delta_2 \right) a^3 = \frac{1}{2} f (\cos \tau + i \sin \tau) \quad (3.113)$$

$$i \omega_2 \check{d} \dot{b} - \omega_2 \check{d} b \dot{\zeta}_2 + \frac{1}{8} a^2 b \frac{1}{\nu} \Delta_3 = 0 \quad (3.114)$$

Burada aşağıdaki kabuller yapılmıştır;

$$\tau = \sigma T_2 - \zeta_1, \quad \dot{\zeta}_1 = \sigma - \dot{\tau}, \quad e^{i\tau} = (\cos \tau + i \sin \tau) \quad (3.115)$$

Denklem (3.114)'den sanal ve reel kısımları ayırırsak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz;

$$\omega_1 m \dot{a} + \omega_1 \mu a = \frac{1}{2} f \sin \tau, \quad -\omega_1 m a (\sigma - \dot{\tau}) + \frac{1}{8} \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \Delta_2 \right) a^3 = \frac{1}{2} f \cos \tau \quad (3.116)$$

$$\omega_2 \check{d} \dot{b} = 0, \quad -\omega_2 \check{d} b \dot{\zeta}_2 + \frac{1}{8} a^2 b \frac{1}{\nu} \Delta_3 = 0 \quad (3.117)$$

BÖLÜM 4. SAYISAL ÇÖZÜM

4.1 LİNEER ÇÖZÜMLER

4.1.1 Doğal Frekans

Timoshenko kirişleri üzerinde yapılan çalışmalara bakıldığında, bu çalışmaların enine frekans ile rotasyonel frekans arasındaki eşitlik üzerine temel aldığı görülür. Çalışmamızdaki doğal frekanslar için izleyen kabulü yaptık:

$$\omega_2 = n \cdot \omega_1 \quad (4.1)$$

Bu sebeple n , rotasyonel frekansın enine titreşim frekansına oranı olarak tanımlanabilir. Bu kabul altında Denklem (3.57)'den'den özdeğerler elde edilir, ardından Denklem (3.58)-(3.59)'daki çözüm fonksiyonu kullanılırsa Denklem (3.33)-(3.34)'deki şartlar ile enine yöndeki doğal frekanslar (ω_1) elde edilebilir.

$$\chi = \frac{k}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (4.2)$$

α	η	$(\omega_1)_1$	$(\omega_1)_2$	$(\omega_1)_3$	$(\omega_1)_4$	$(\omega_1)_5$
0.1	0.1	9.7563	37.8414	82.0320	142.1523	220.0498
	0.2	9.5219	36.1283	81.6273	149.6268	235.2649
	0.3	9.2563	36.3592	86.6157	148.7995	219.7275
	0.4	9.0607	38.0507	84.8026	143.4769	235.2649
	0.5	8.9902	39.1621	80.6498	153.0670	219.5412
1	0.1	8.9774	29.6046	64.8077	123.3281	203.6078
	0.2	7.4384	26.7286	72.2423	144.8036	235.2649
	0.3	6.3820	29.5184	85.1838	138.5852	199.5854
	0.4	5.8358	34.9526	78.5128	128.5631	235.2649
	0.5	5.6691	39.1621	66.6606	153.0670	196.8681
10	0.1	5.3120	19.6196	58.0257	118.9895	200.5257
	0.2	3.2510	21.8794	69.5544	143.5071	235.2649
	0.3	2.5224	26.5618	84.5993	134.6713	195.0857
	0.4	2.2209	33.4018	75.8119	124.5349	235.2649
	0.5	2.1355	39.1621	61.2882	153.0670	190.8995

Tablo 1. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=0.01$

Denklem (4.2)'den poisson oranı(ν) ile şekil faktörü(k) yaklaşık olarak verilerek sayısal çözümler yapılabilir. Basit-basit mesnetli durum için simetri sözkonusu olduğundan, hesaplamalarda incelemenin ortaya kadar yapılması yeterlidir. Tablo 1'de $n=0.01$, Tablo 2'de $n=0.1$ ve Tablo 3'de $n=1.0$ olarak seçilerek farklı kütle oranları ve farklı kütle konumlarına karşılık ilk beş doğal frekans elde edilmiştir. $\nu = 10000$, $\nu=0.3$ $k=5/6$, değerlerinin kullanıldığı bu tablolarda sadece ilk mod doğal frekansları artan kütle konumu ile azalmaktadır. Kütle oranı arttıkça bu azalma daha büyük olmaktadır. Diğer modların doğal frekansları konuma göre çok çabuk değişkenlik göstermektedir. Eğer her üç tablo arasında karşılaştırma yapılırsa, düşük doğal frekans oranlarının yüksek enine doğal frekanslara karşılık geldiği görülür. Diğer bir deyişle n katsayısı(frekans oranı) arttıkça rotasyonel doğal frekans değerleri enine

doğal frekans değerlerine yaklaşacaktır. Bu bir bakıma sistem enerjisinin, n değeri 1'e yaklaştıkça rotasyonel dönme moduna aktarıldığını göstermektedir.

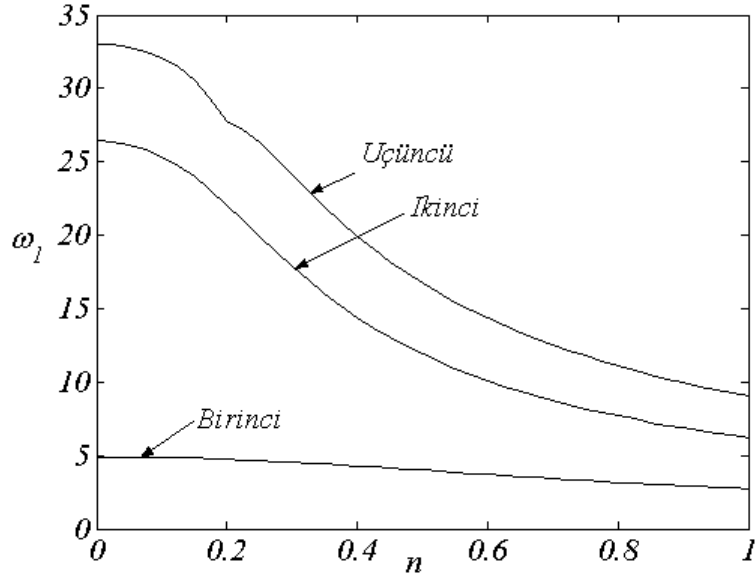
η	α	$(\omega_1)_1$	$(\omega_1)_2$	$(\omega_1)_3$	$(\omega_1)_4$	$(\omega_1)_5$
0.1	0.1	9.3226	32.5054	62.2546	94.9175	128.9918
	0.2	9.1177	31.3991	61.9640	96.9822	132.0778
	0.3	8.8838	31.5350	64.1276	96.8528	129.0992
	0.4	8.7103	32.6258	63.3931	95.2693	132.0778
	0.5	8.6476	33.3221	61.6030	97.9628	129.0950
1	0.1	8.6390	26.9368	53.0513	86.6007	122.7897
	0.2	7.2463	24.5084	56.7692	95.1501	132.0778
	0.3	6.2588	26.5734	63.4757	93.8054	123.1442
	0.4	5.7400	30.5298	60.5348	89.5981	132.0778
	0.5	5.5807	33.3221	54.4156	97.9628	122.9226
10	0.1	5.2483	18.4829	47.7231	83.5388	120.8745
	0.2	3.2358	20.2965	54.9024	94.5222	132.0778
	0.3	2.5149	24.1257	63.178	92.3416	121.0935
	0.4	2.2156	29.3768	59.0924	87.5214	132.0778
	0.5	2.1307	33.3221	51.0500	97.9628	120.6400

Tablo 2. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=0.1$

α	η	$(\omega_1)_1$	$(\omega_1)_2$	$(\omega_1)_3$	$(\omega_1)_4$	$(\omega_1)_5$
0.1	0.1	2.9909	6.1998	9.3653	12.5197	15.6700
	0.2	2.9841	6.1913	9.3629	12.5240	15.6762
	0.3	2.9756	6.1914	9.3712	12.5241	15.6700
	0.4	2.9689	6.1998	9.3686	12.5197	15.6762
	0.5	2.9663	6.2050	9.3619	12.5267	15.6700
1	0.1	2.9679	6.1539	9.3063	12.4597	15.6181
	0.2	2.9017	6.0788	9.2905	12.5042	15.6764
	0.3	2.8260	6.0880	9.3638	12.5034	15.6224
	0.4	2.7704	6.1615	9.3420	12.4677	15.6762
	0.5	2.7503	6.2051	9.2859	12.5267	15.6239
10	0.1	2.7459	5.7696	8.8975	12.0958	15.3284
	0.2	2.2972	5.5404	9.0105	12.4240	15.6762
	0.3	1.9834	5.7310	9.3388	12.4257	15.4493
	0.4	1.8195	6.0400	9.2523	12.2975	15.6762
	0.5	1.7692	6.2051	9.0380	12.5267	15.4722

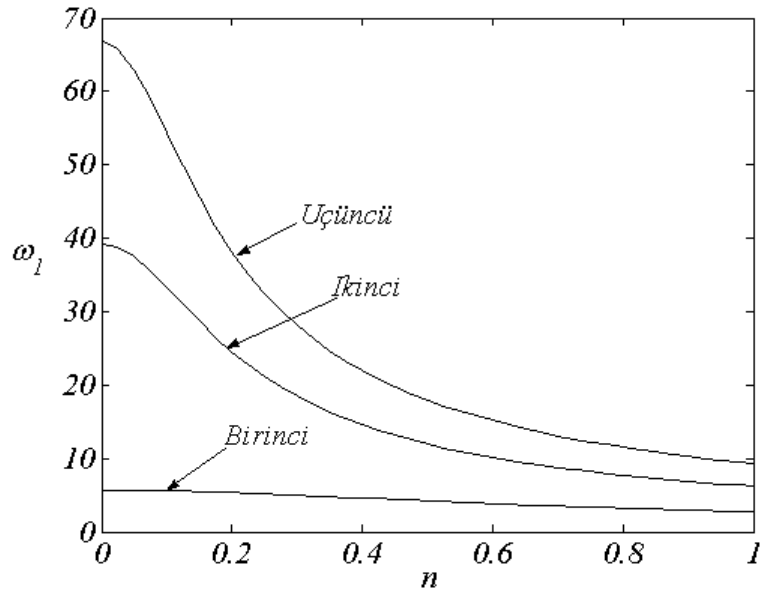
Tablo 3. Farklı kütle konumları ve kütle oranları için enine yöndeki ilk beş doğal frekans, $n=1.0$

Narinlik oranı ($\nu = J/I$), kesme/rijitlik oranı (χ) ya da aşağıdaki karşılık gelen poisson oranı bir çok çalışmada ele alınıp, detaylı bir şekilde incelenmiştir. $\nu=0.3$, $k=5/6$ sabit olarak alınarak doğal frekansların kütle ve diğer kontrol parametrelerine göre nasıl değiştiği Şekil 3-8'de çizilen eğriler üzerinden incelenmiştir.



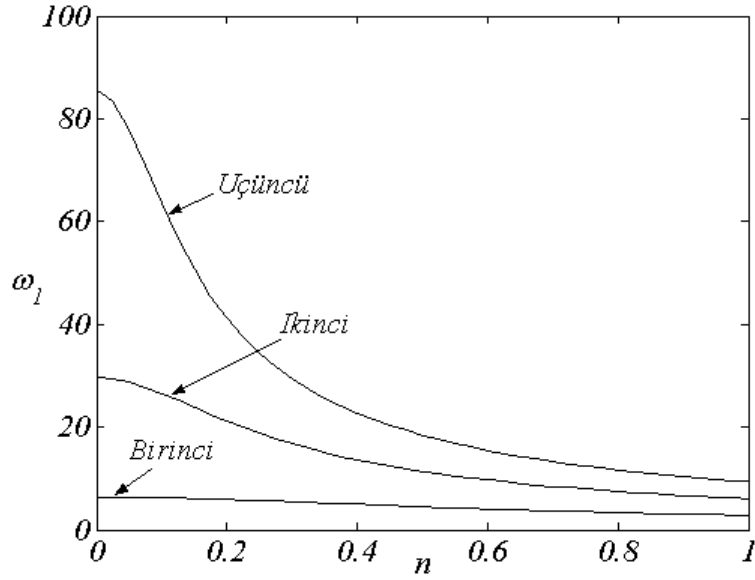
Şekil 3. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.5, \alpha=1, J/I=100$

Şekil 3'de narinlik oranı ($\nu=10000$), poisson oranı ($\nu=0.30$), kesit katsayısı ($k=5/6$), kütle oranı ($\alpha=1$), kütle konumu ($\eta=0.5$) değerleri kullanılarak kiriş titreşiminin ilk üç modu için ω_1 'e karşılık frekans oranı (n) eğrileri çizilebilir. Bu şekilden, frekans oranındaki artışın enine doğal frekansları azalttığı görülür. İkinci ve üçüncü modun doğal frekansları için bu azalış, $0 < n < 0.5$ aralığında daha hızlı ve benzer karakteristiktir.

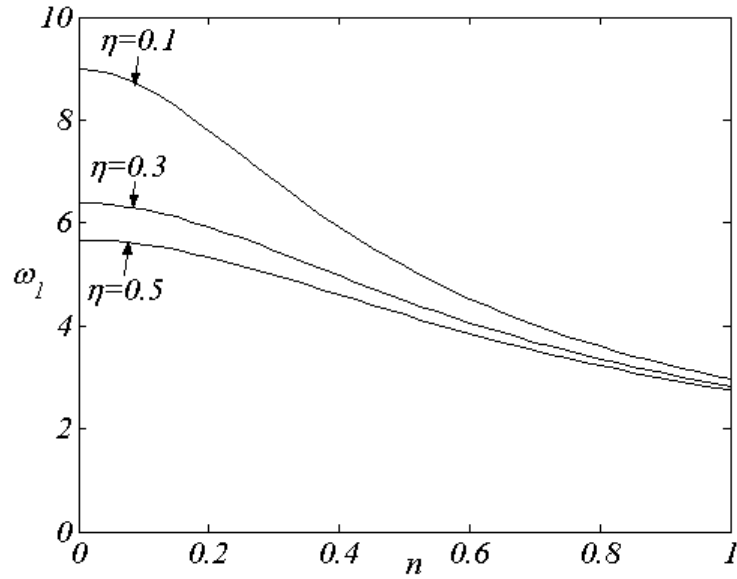


Şekil 4. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.5, \alpha=1, J/I=10000$

Şekil 4'te narinlik katsayısı bir önceki duruma göre daha büyük(10000) seçilmiştir. Bu durumda da frekans oranı artışıyla beraber doğal frekanslar azalmaktadır. Diğer durumdan farklı olarak daha yüksek frekans değerleri küçük frekans oranları için elde edilebilir. Üçüncü mod ikinci moda göre yüksek frekans değerlerine sahiptir.

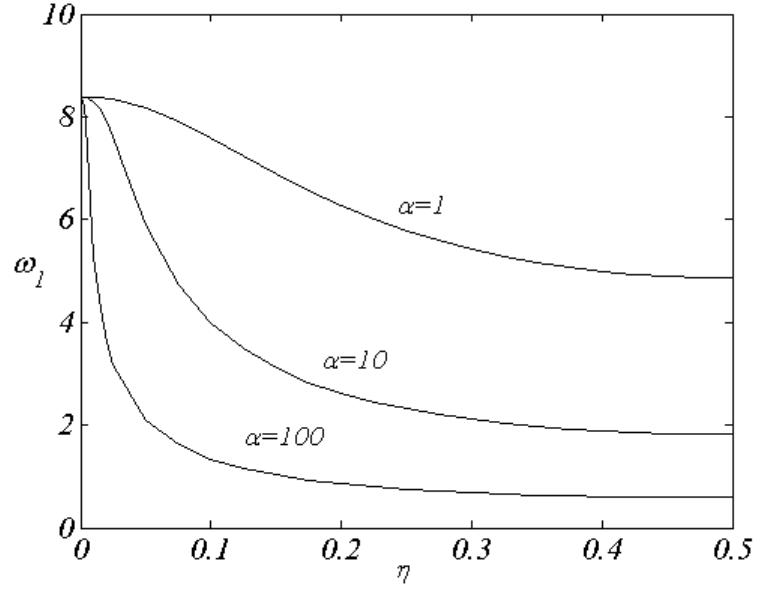


Şekil 5. Kirişin ilk üç modu için enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\eta=0.3, \alpha=1, J/I=10000$

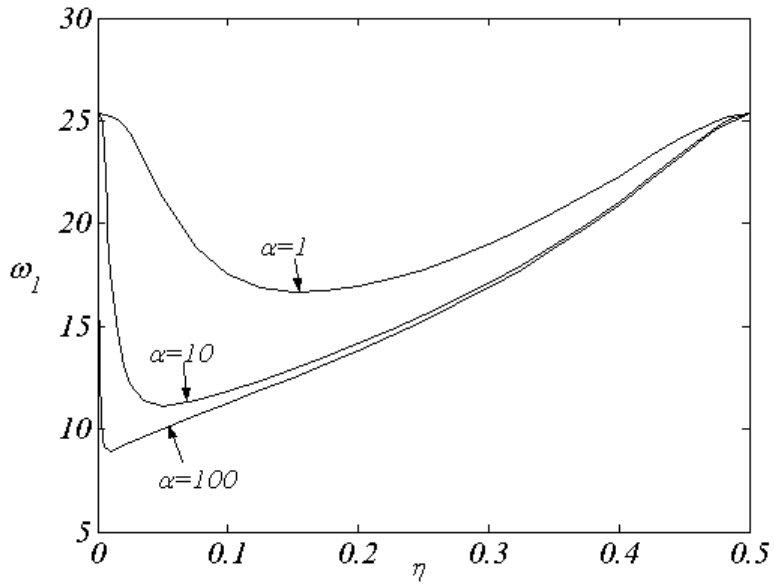


Şekil 6. Farklı kütle konumlarına karşılık enine doğal frekans-frekans oranı grafiği, $\alpha=1, J/I=10000$,
Birinci mod

Şekil 5'te kütle'nin kiriş ucuna yakın olduğu durum ($\eta=0.3$) ele alınmıştır. Bu durumda ikinci modun frekansları birinci moda yakın olmakta, üçüncü mod ile aralarındaki frekans farkının arttığı görülmektedir. Şekil 6'da farklı kütle konumları (0.1, 0.3, 0.5) için doğal frekansın frekans oranıyla değişimi incelenmiştir. Kütle'nin kiriş ucuna yakın olduğu bölgelerde daha yüksek frekanslar elde edilmiştir. Frekans oranı arttıkça doğal frekansların azaldığı görülmektedir. Bu azalış kütle'nin kiriş ucuna yakın olduğu durumlar için daha çok olmaktadır.

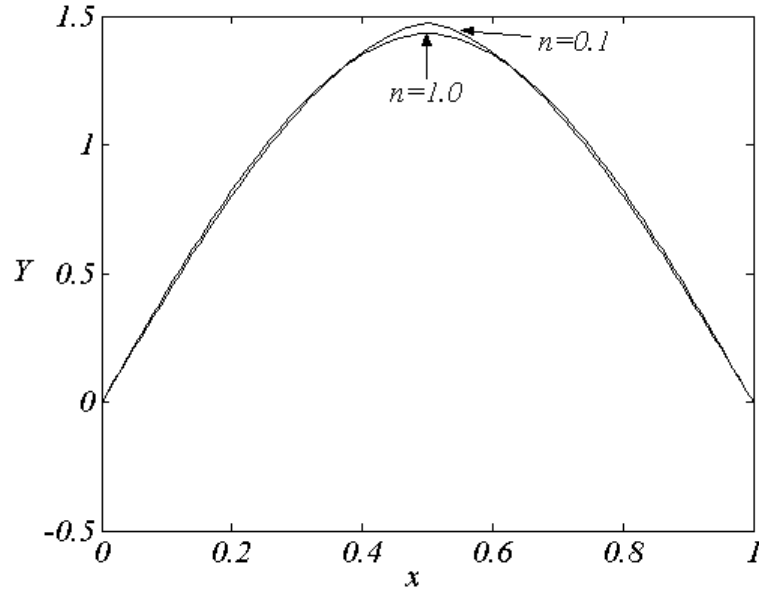


Şekil 7. Farklı kütle oranlarına karşılık frekans-kütle konumu grafiği, $n=0.1$, $J/I=100$, Birinci mod



Şekil 8. Farklı kütle oranlarına karşılık frekans-kütle konumu grafiği, $n=0.1$, $J/I=100$, İkinci mod

Şekil 7’de farklı kütle oranları(1, 10, 100) için birinci mod doğal frekanslarının kütle konumuyla değişimi incelenmiştir. Kütle oranları arttıkça doğal frekansların düştüğü görülmektedir. Kütle kiriş ucundan kiriş ortasına yaklaştırıldıkça her üç kütle durumu için doğal frekanslar azalmaktadır. Bu azalma büyük kütle oranı(100) için kiriş ucuna yakın bölgelerde daha çok olmaktadır. Şekil 8’de farklı kütle oranları(1, 10, 100) için ikinci mod doğal frekanslarının kütle konumuyla değişimi incelenmiştir. Kütle oranları arttıkça doğal frekansların düştüğü görülmektedir. Kiriş uc noktalarında bu frekanslar hızlı bir şekilde azalmakta kiriş ortasına doğru artmaktadır.

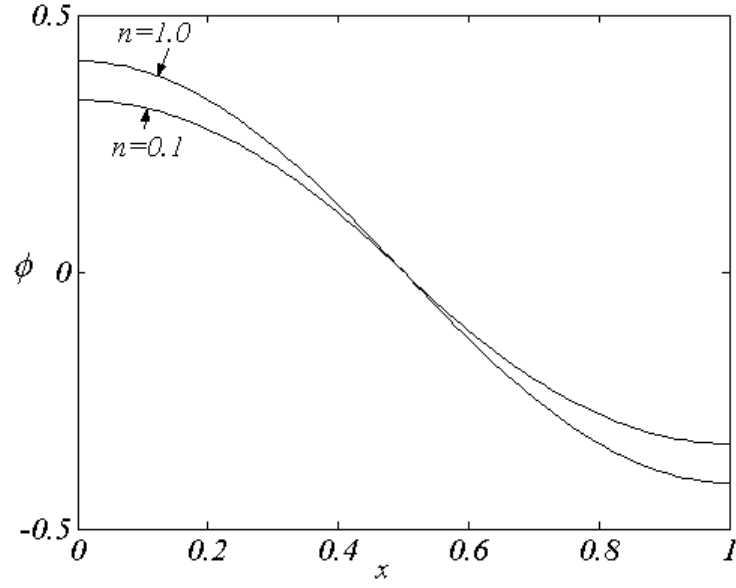


Şekil 9. Farklı frekans oranlarına göre kirişin birinci enine mod şekilleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$.

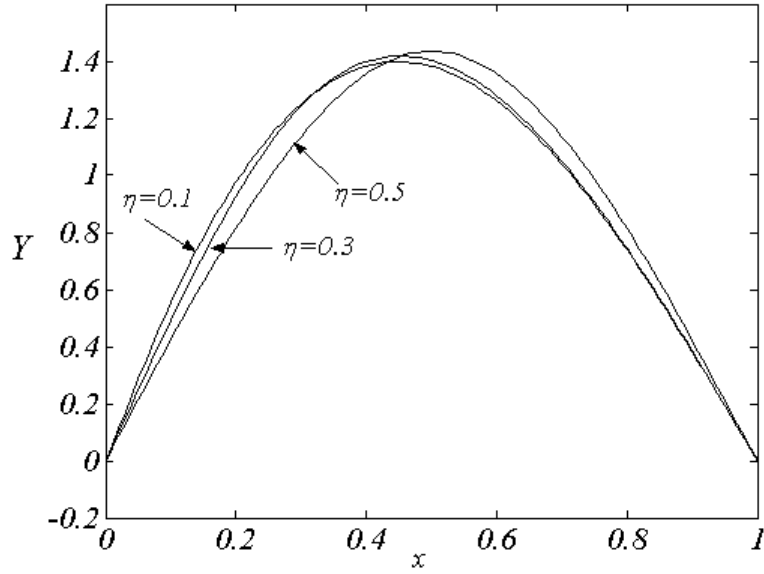
4.1.2 Mod Şekilleri

Denklem (3.58) yardımıyla enine mod şekli ve Denklem (3.60) yardımıyla karşılık gelen dönme mod şekli çizilebilir. Dönme mod şekli çizilirken lineer probleme mahsus olmak üzere $\nu=0.3$, $k=5/6$, $J/I=10000$ ve genlikler oranı $(\frac{Ae^{i.\omega_1.T_0}}{B.e^{i.\omega_2.T_0}}=0.1)$ sabit tutularak çözüm yapılmıştır.

Şekil 9 ve 10’da farklı frekans oranlarına (0.1, 1) karşılık kirişin birinci moduna ait deplasman(Y) ve dönme(ϕ , büyüklük) şekilleri çizilmiştir. Şekil 9’dan düşük frekans oranı (0.1) seçildiği durumda maksimum deplasmanın meydana geldiği, fakat kiriş uçlarına doğru gidildiğinde deplasmanların diğer duruma göre daha az olduğu görülür. Bu durum Şekil 10’daki dönme mod şekline ait grafikten daha iyi görülebilir. Uç noktalarda n değeri 1 seçildiği durumun dönmesi daha fazla olduğu görülmektedir.

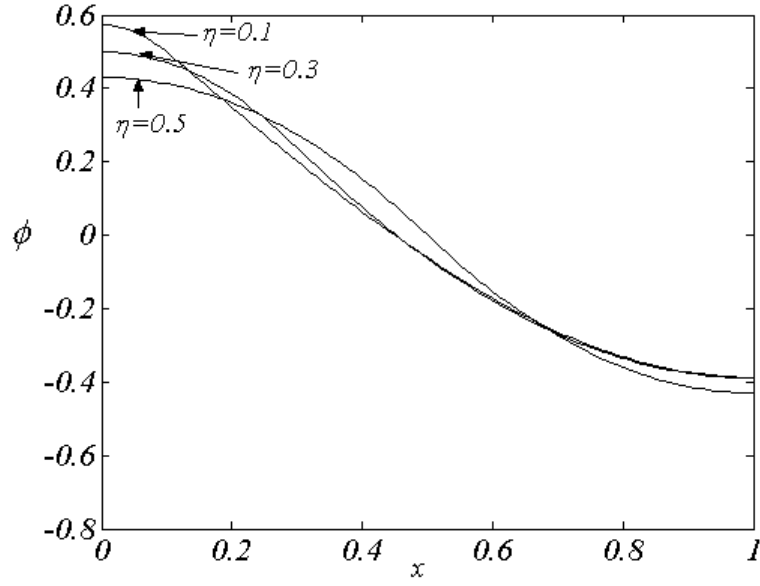


Şekil 10. Farklı frekans oranlarına göre kirişin birinci dönme mod şekilleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$

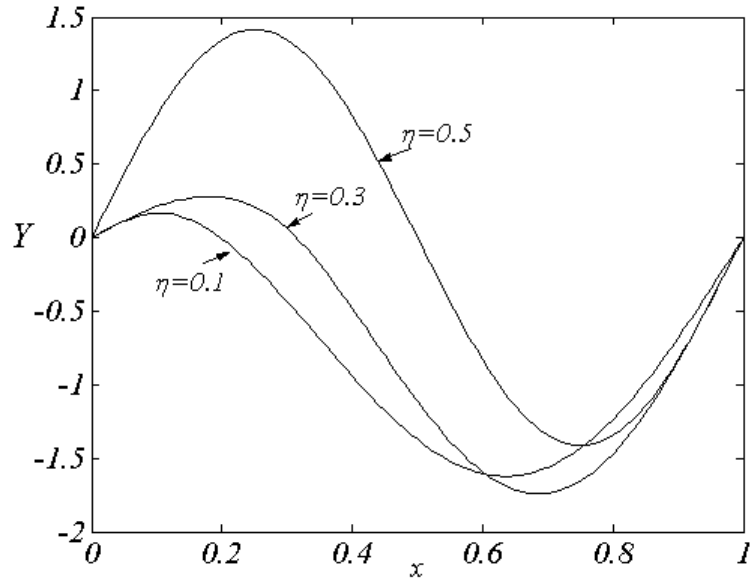


Şekil 11. Farklı kütle konumlarına göre kirişin birinci enine mod şekilleri, $n=0.1$, $\alpha=10$

Şekil 11 ve 12'de farklı kütle konumlarına (0.1, 0.3, 0.5) karşılık kirişin birinci moduna ait deplasman ve dönme şekilleri çizilmiştir. Şekil 11'den kütle kiriş ortasından kiriş uçlarına gittikçe hem maksimum genliklerin hem azaldığı, hem de orta noktadan kütlein bulunduğu tarafa yöneldiği görülür. Şekil 12'deki dönme şekline baktığımızda uçlardaki dönmenin kütle konum artışıyla ters yönde olduğu görülmektedir.



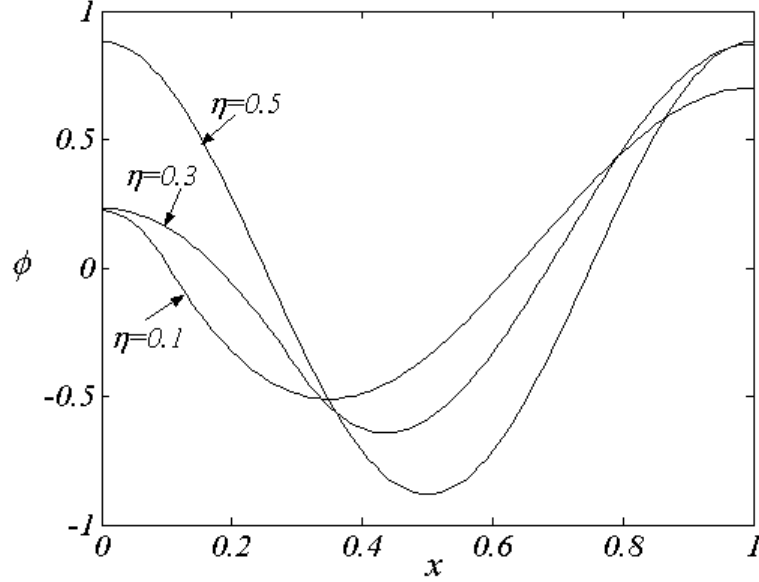
Şekil 12. Farklı kütle konumlarına göre kirişin birinci dönme mod şekilleri, $n=0.1$, $\alpha=10$



Şekil 13. Farklı kütle konumlarına göre kirişin ikinci enine mod şekilleri, $n=0.1$, $\alpha=10$

Şekil 13 ve 14'de farklı kütle konumlarına (0.1, 0.3, 0.5) karşılık kirişin ikinci moduna ait deplasman ve dönme şekilleri çizilmiştir. Şekil 13'den kütle konumu kiriş ortasından uçlara yöneldikçe kütleinin bulunduğu yöndeki genlikler azalmakta, kiriş orta noktasına göre simetrikliğin bozulduğu görülmektedir. Şekil 13'den kütle kiriş ortasından kiriş uçlarına gittikçe maksimum genliklerin hem azaldığı, hem de orta noktadan kütleinin bulunduğu tarafa yöneldiği görülür. Şekil 14'deki dönme şekline baktığımızda uçlardaki dönmenin kütle konum artışıyla ters yönde olduğu görülmektedir. Maksimum dönme

değerlerinin kiriş uçları ve orta noktasında kütle konumunun 0.5 seçildiği durum için elde edilebildiği görülmektedir.



Şekil 14. Farklı kütle konumlarına göre kirişin ikinci dönme mod şekilleri, $n=0.1$, $\alpha=10$

4.2 NONLİNEER PROBLEMİN DÜZGÜN REJİM ÇÖZÜMLERİ

Genliklerin düzgün rejim için zamanla kaybolduğu bu durum aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\dot{a}=0 \ \& \ \dot{b}=0 \quad \rightarrow \quad a=a_0 \ \& \ b=b_0 \text{ (sabit)} \quad (4.3)$$

Burada a_0 ve b_0 cevabın düzgün rejim reel genliklerine karşılık geldiği görülür;

4.2.1. Serbest – Sönümsüz Titreşim Çözümleri

Denklem (4.3) kabulü altında sönümsüz-serbest titreşimler dikkate alınırsa, Denklem (3.116-3.117)'den aşağıdaki denklemler elde edilebilir;

$$\omega_1 \cdot m \cdot a_0 \cdot \dot{\tau} + \frac{1}{8} \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot a_0^3 = 0, \quad -\omega_2 \cdot \check{d} \cdot b_0 \cdot \dot{\zeta}_2 + \frac{1}{8} \cdot a_0^2 \cdot b_0 \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_3 = 0 \quad (4.4)$$

Denklem (4.3-4.4)'te bazı basitleştirmeler yaptıktan sonra aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$\dot{\tau} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_1 \cdot m} \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot a_0^2, \quad \dot{\zeta}_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_2 \cdot \check{d}} \cdot \Delta_3 \cdot a_0^2$$

$\sigma = 0$ alındığı özel durum için $\dot{\tau} = 0 - \dot{\zeta}_1$ olacağından non-lineer frekans aşağıdaki gibidir;

$$(\omega_1)_{nl} = \omega_1 + \zeta_1 = \omega_1 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_1 \cdot m} \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot a_0^2, \quad (\omega_2)_{nl} = \omega_2 + \zeta_2 = \omega_2 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_2 \cdot d} \cdot \Delta_3 \cdot a_0^2 \quad (4.5)$$

Burada aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır;

$$\aleph = \frac{1}{8} \cdot \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot \frac{1}{\omega_1 \cdot m}, \quad (4.6)$$

Burada \aleph nonlineeriteden kaynaklanan düzeltme katsayılarını göstermekte olup lineer frekansa katkıyı belirtmektedir.

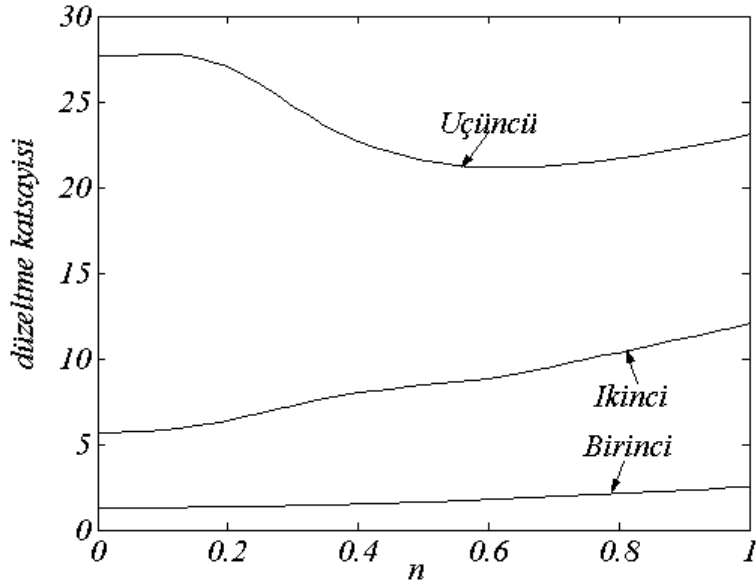
Kesit düzeltme katsayısı $k=5/6$, *poisson oranı* $\nu=0.3$ sabit değerleri için farklı kontrol parametrelerine (narinlik oranı(ν), frekans oranı(n), kütle oranı(α) ve kütle konumu(η)) karşılık *Tablo 4*'te birinci mod ve 5'te ikinci mod için düzeltme katsayıları verilmiştir. *Tablo 4*'ten düşük frekans oranı değerlerinde düzeltme katsayılarının az olduğu görülür. Artan kütle konumu ve kütle oranı ile düzeltmelerin azaldığı görülür. Genel olarak konsantre kütle giriş ortasına yaklaşırken katkılar düşmektedir. İkinci moda ait olan *Tablo 5*'te Bu tabloda frekans oranı arttıkça düzeltmelerin arttığı görülmektedir. Düşük narinlik katsayıları(100) ve düşük kütle oranlarında(0.1, 1) kütle giriş ortasına gittikçe düzeltmeler önce azalmakta sonra artmaktadır. Bu durum yüksek kütle oranları(10) için sürekli artış şeklinde olmaktadır.

α	η	Narinlik $\nu=100$		Narinlik $\nu=10000$	
		$n=0.01$	$n=0.1$	$n=0.01$	$n=0.1$
0.1	0.1	1.8434	1.9249	1.8347	1.9201
	0.2	1.8013	1.8773	1.7897	1.8692
	0.3	1.7539	1.8248	1.7394	1.8125
	0.4	1.7191	1.7881	1.7032	1.7717
	0.5	1.7030	1.7760	1.6903	1.7574
1	0.1	1.6872	1.7523	1.6750	1.7426
	0.2	1.3940	1.4328	1.3658	1.4050
	0.3	1.2304	1.2543	1.1774	1.2020
	0.4	1.1770	1.1933	1.0871	1.1059
	0.5	1.2153	1.2264	1.0604	1.0776
10	0.1	0.8580	0.8733	0.8876	0.9031
	0.2	0.5590	0.5622	0.5587	0.5621
	0.3	0.4701	0.4714	0.4529	0.4545
	0.4	0.4457	0.4462	0.4095	0.4106
	0.5	0.4659	0.4656	0.3972	0.3981

Tablo 4. İlk mod için düzeltme katsayıları(\aleph)

α	η	Narinlik $\nu=100$		Narinlik $\nu=10000$	
		$n=0.01$	$n=0.1$	$n=0.01$	$n=0.1$
0.1	0.1	9.9168	10.1155	7.1632	20.7020
	0.2	9.5397	9.7143	6.7872	20.4214
	0.3	9.4906	9.6839	6.8106	22.4920
	0.4	9.8636	10.0831	7.1731	21.6804
	0.5	10.1839	10.4264	7.4332	19.9167
1	0.1	6.2517	6.4363	4.8148	12.5596
	0.2	4.8942	5.0567	3.8525	15.3967
	0.3	5.6871	5.8493	4.4878	21.5097
	0.4	7.4579	7.7423	5.9469	17.3902
	0.5	10.1839	10.4264	7.4332	11.5537
10	0.1	2.3690	2.4237	2.0246	10.2020
	0.2	3.0330	3.1071	2.5404	13.9478
	0.3	4.1368	4.2325	3.4721	20.9547
	0.4	6.0769	6.2018	5.1723	15.0792
	0.5	10.1839	10.4264	7.4332	8.3017

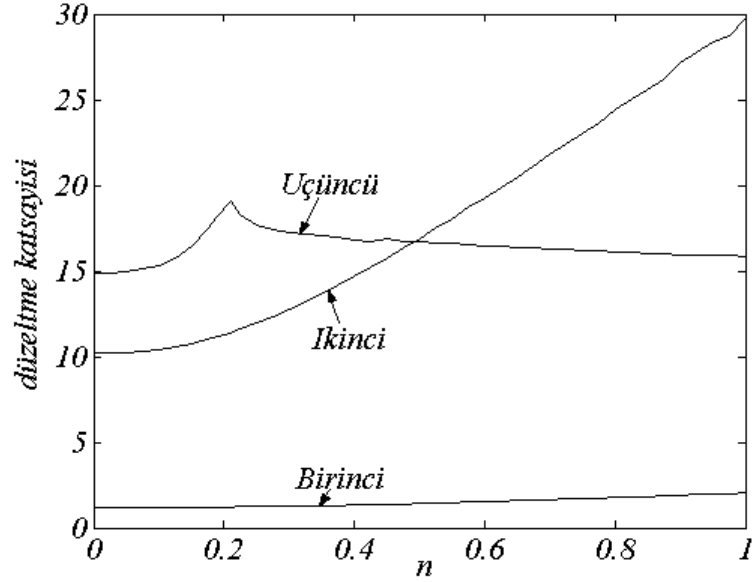
Tablo 5. İkinci mod için düzeltme katsayıları(\aleph).



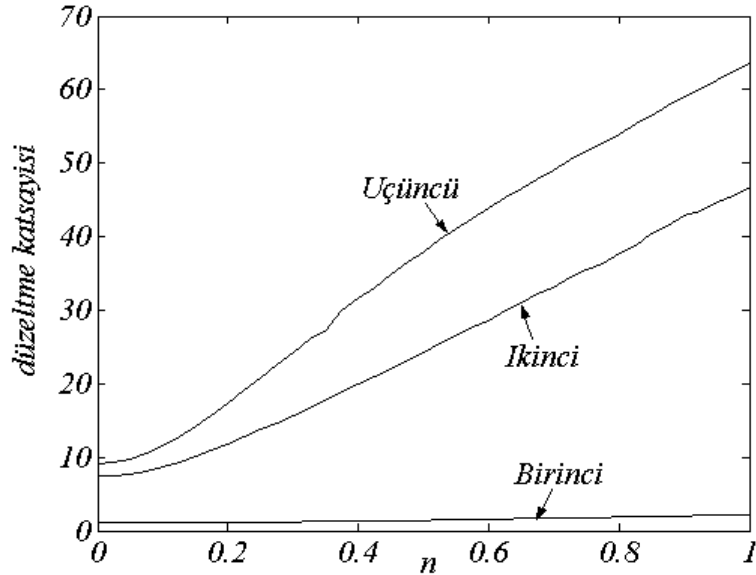
Şekil 15. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $J/I=100$, $\alpha=1$, $\eta=0.3$

Farklı kontrol parametreleri kullanılarak düzeltme katsayılarının daha detaylı olarak nasıl değiştiği grafik üzerinden anlaşılabilir. Bu amaçla Şekil 15-19'da düzeltme katsayılarının frekans oranıyla değişim eğrileri, Şekil 20-21'de düzeltme katsayılarının kütle konumuyla değişim eğrileri çizilmiştir. Eğriler çizilirken $\nu=0.3$, $k=5/6$ değerleri sabit olarak alınmıştır.

Şekil 15’de ilk üç mod için düzeltme katsayısı–frekans oranı grafikleri verilmiştir. Bu eğrilerde düzeltmelerin büyüklükleri birinci, ikinci ve üçüncü mod şeklinde sıralanabilir. Birinci ve ikinci mod için düzeltmeler frekans oranıyla artmaktadır. Diğer mod için düzeltmeler frekans oranı artışıyla beraber azalmaktadır.

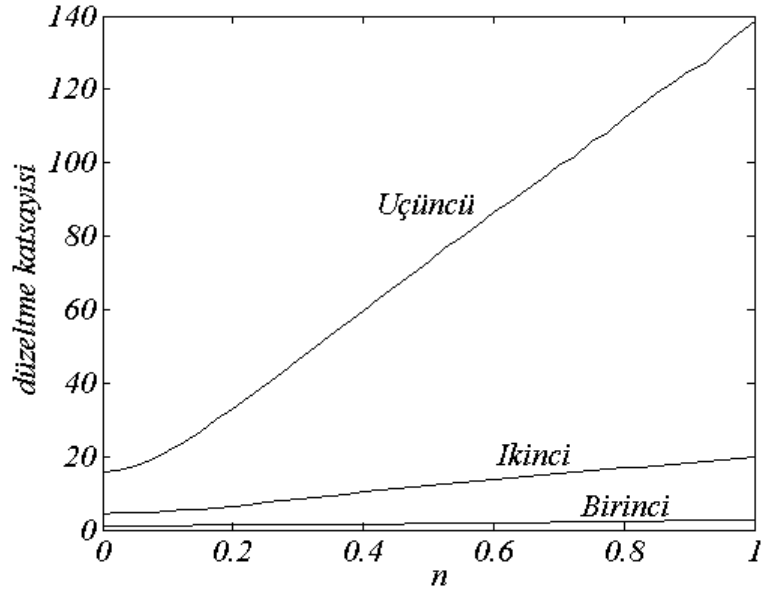


Şekil 16. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $J/I=100$, $\alpha=1$, $\eta=0.5$

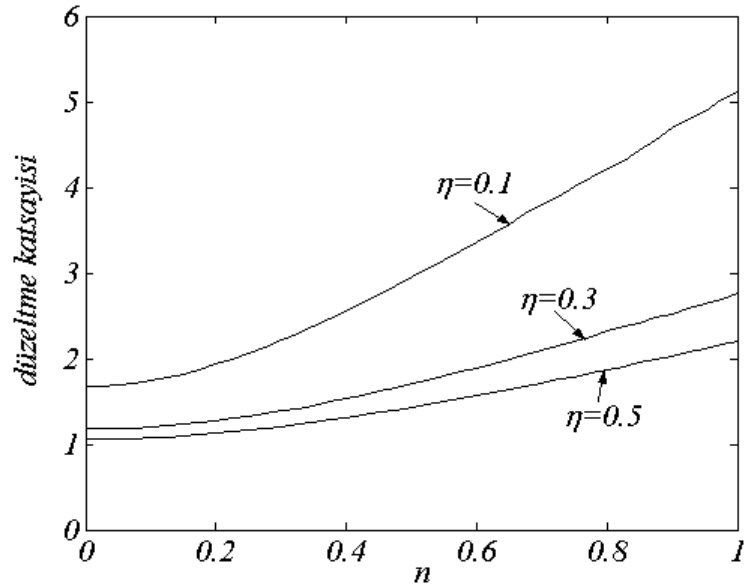


Şekil 17. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $\alpha=1$, $\eta=0.5$, $J/I=10000$

Şekil 16’de kütle konumu kiriş ortası alınarak düzeltme katsayısı–frekans oranı eğrileri çizilmiştir. Bu eğrilerde birinci ve ikinci mod düzeltmeleri frekans oranıyla artmaktadır. Frekans oranı artışıyla beraber üçüncü modun düzeltmeleri önce artmakta daha sonra azalmaktadır. Şekil 17’de narinlik oranı yüksek seçilerek(10000) düzeltme katsayısı–frekans oranı eğrileri çizilmiştir. Bu eğrilerde düzeltmelerin büyüklükleri birinci, ikinci ve üçüncü mod şeklinde sıralanabilir. Frekans oranı artışıyla beraber birinci, ikinci ve üçüncü mod düzeltmeleri artmaktadır.



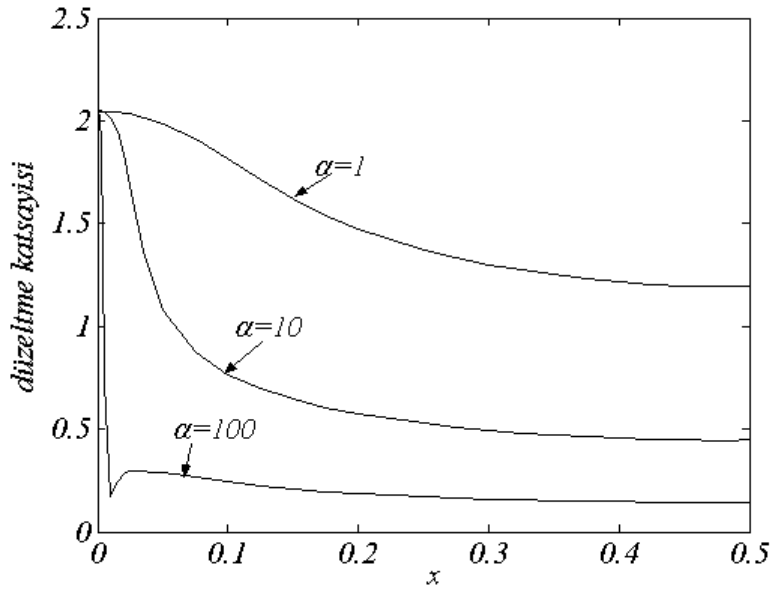
Şekil 18. Kirişin ilk üç modu için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği, $\eta=0.3, \alpha=1, J/I=10000$



Şekil 19. Farklı kütle konumları için düzeltme katsayısı-frekans oranı grafiği,
 $\alpha=1, J/I=10000$, Birinci mod

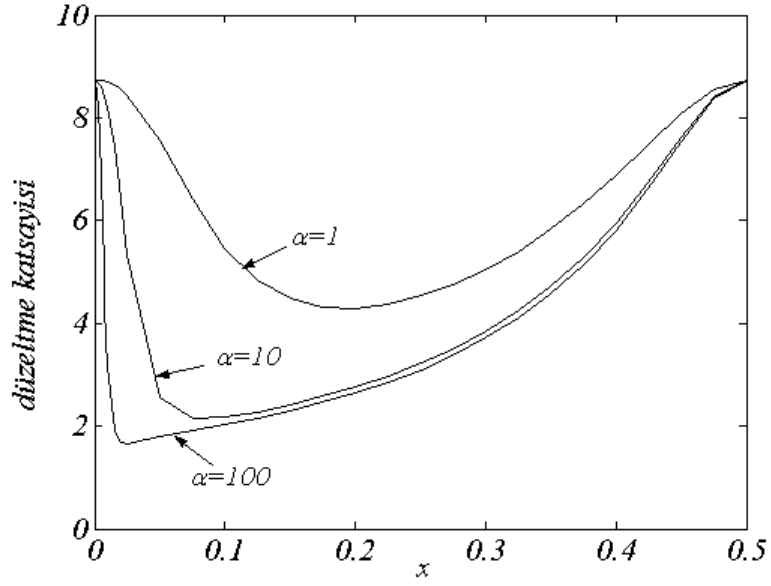
Şekil 18’de kütle konumunu orta nokta dışında seçilerek simetrik olmayan bir yükleme yapılarak düzeltme katsayısı–frekans oranı eğrileri çizilmiştir. Bu eğrilerde düzeltme katsayısı büyüklükleri birinci, ikinci ve üçüncü mod şeklinde sıralanabilir. Diğerlerine göreceli olarak büyük artışın olduğu üçüncü mod düzeltme katsayılarının frekans oranıyla artması, simetrik olmayan durumun üçüncü moda daha büyük etki meydana getirmesinden kaynaklanmaktadır.

Şekil 19’da farklı kütle konumlarına karşılık(0.1, 0.3, 0.5) birinci moda ait düzeltme katsayısı–konum grafiği çizilmiştir. Her üç durum için düzeltmeler konumla beraber artmaktadır. Kütle giriş ortasından giriş ucuna yaklaştırdıkça düzeltmelerin daha da arttığı görülmektedir.



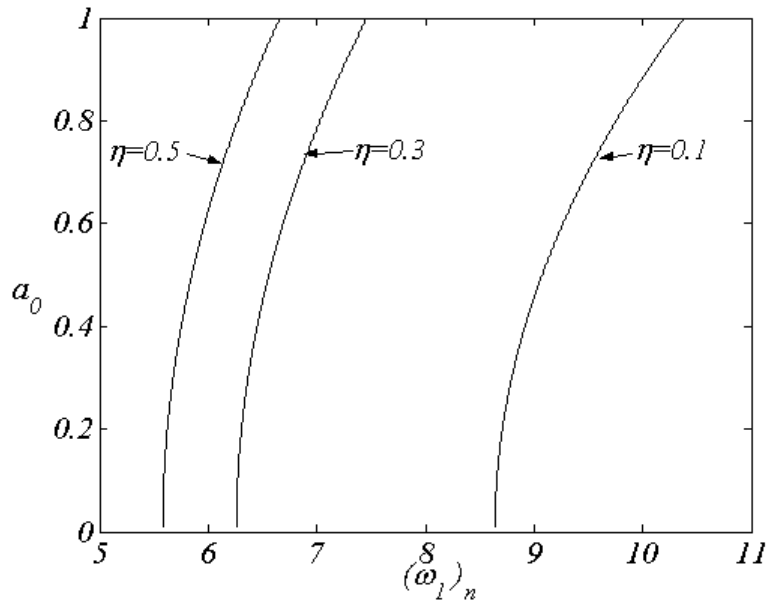
Şekil 20. Farklı kütle oranlarına karşılık düzeltme katsayısı–kütle konumu grafiği,
 $J/I=100$, $n=0.1$, $\eta=0.5$, Birinci mod

Şekil 20 ve 21’de sırasıyla birinci modu ve ikinci modun farklı kütle oranlarına(1, 10, 100) karşılık düzeltme katsayısı–kütle konum grafikleri çizilmiştir. Her iki mod için ne kadar büyük kütle oranı seçilirse düzeltmelerin o kadar az olacağı söylenebilir. Birinci mod için kütle konumu giriş ortasına yaklaştırdıkça düzeltmelerin azalacağı grafiklerden görülebilir. İkinci moda bakıldığında kütle konumu giriş ucundan giriş ortasına gittikçe düzeltmelerin azalacağı daha sonra artacağı görülebilir.

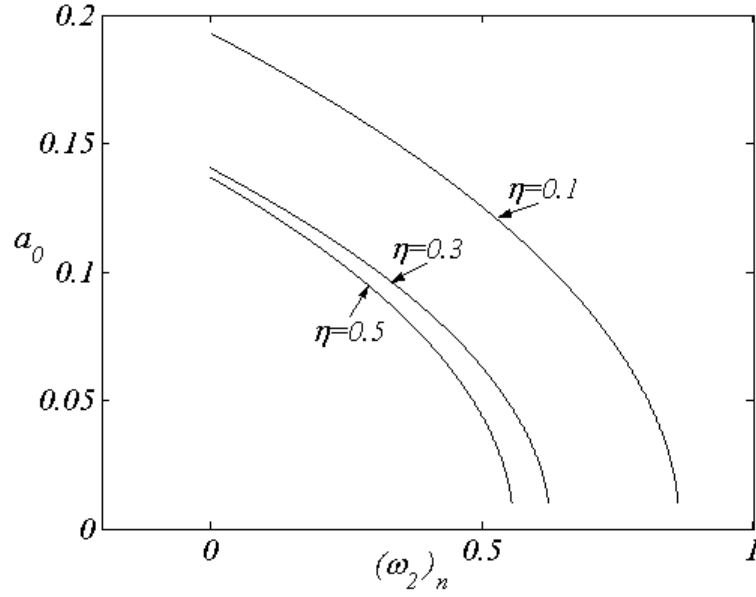


Şekil 21. Farklı kütle oranlarına karşılık düzeltme katsayısı-kütle konumu grafiği
 $J/I=100$, $n=0.1$, $\eta=0.5$, İkinci mod

Denklem (4.5)'e bakıldığında genlikle(a_0) nonlineer frekanslar(enine yönde(ω_1)_n, rotasyonel(ω_2)_n) arasında parabolik bir ilişki olduğu görülmektedir. $\nu=0.3$, $k=5/6$, $\nu=10000$ değerleri kullanılarak, Şekil 22-29'da kirişin birinci modlarının $a_0-(\omega_1)_n$ ve $a_0-(\omega_2)_n$ grafikleri çizilmiştir. Şekil 22-25'de farklı kütle konumlarının, Şekil 26-29'da farklı kütle oranlarının, Şekil 30-31'de farklı frekans oranlarının genlik-nonlineer frekans eğrilerine etileri belirlenmeye çalışılmıştır.

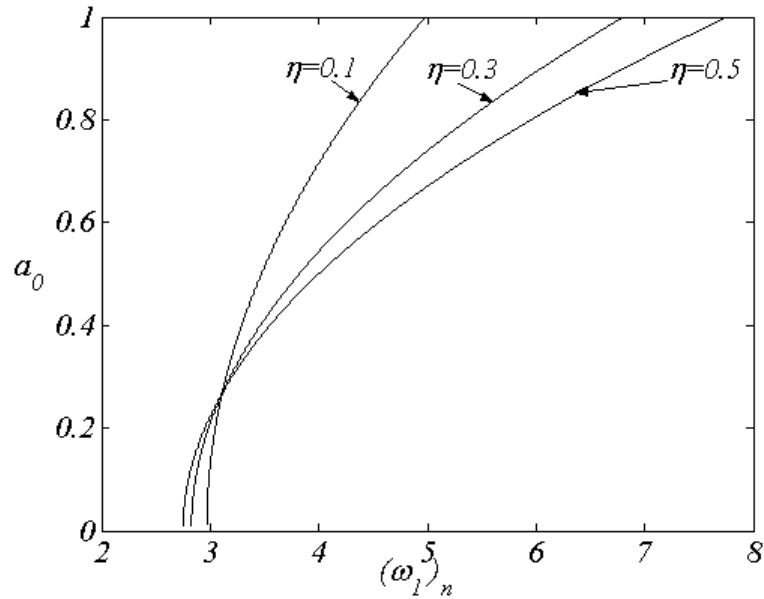


Şekil 22. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-enine nonlineer frekans grafikleri, $\alpha=1$, $n=0.1$

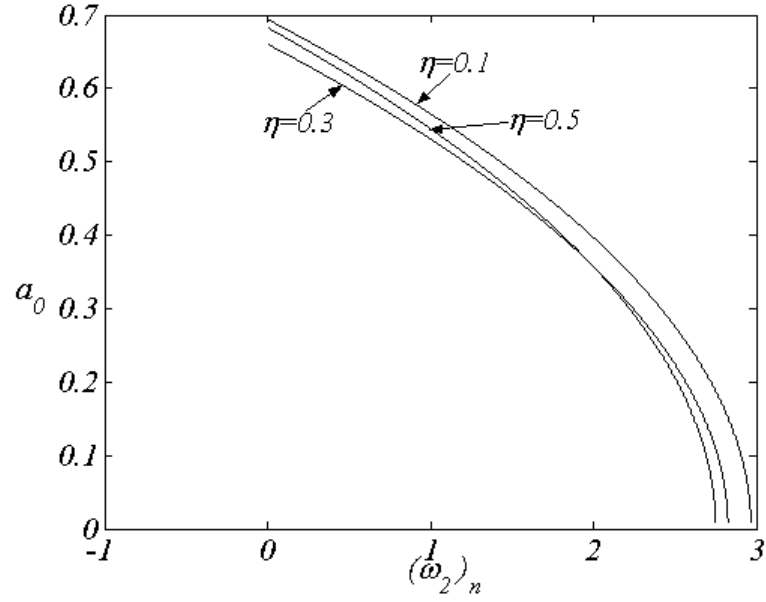


Şekil 23. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\alpha = 1$, $n = 0.1$

Farklı η değerleri için Şekil 22’de $(\omega_1)_n - a_0$ eğrileri ve yine aynı parametre değerleri için Şekil 23’de $(\omega_2)_n - a_0$ eğrileri çizilmiştir. Kütle ortaya doğru gittikçe $(\omega_1)_n$ ve $(\omega_2)_n$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Kütle yerleşimlerinden bağımsız olarak genlik arttıkça $(\omega_1)_n$ değerlerinin arttığı buna karşın $(\omega_2)_n$ değerlerinin azaldığı bu eğrilerden görülebilmektedir. Bu ise enine ve rotasyonel frekanslar arasındaki etkileşimden kaynaklanmaktadır. Şekil 22’nin Özkaya ve ark.(1997) çalışmasıyla benzer özellik göstermektedir.

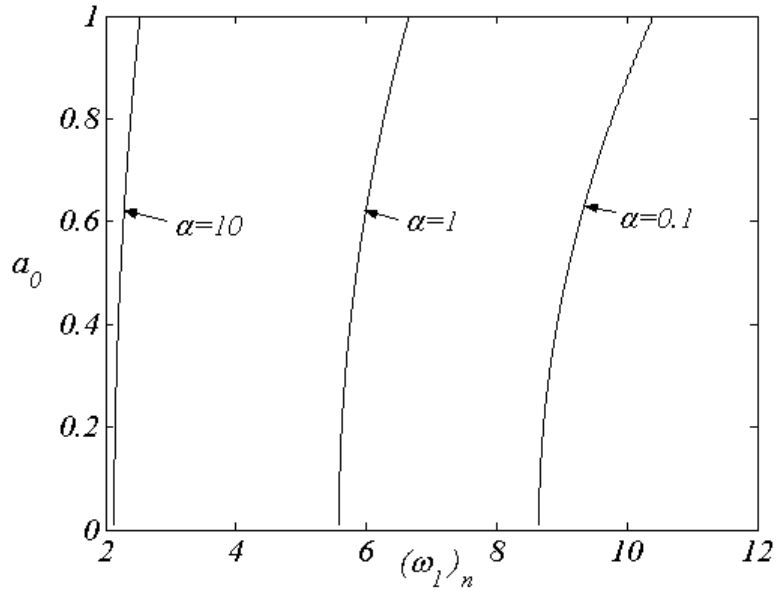


Şekil 24. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\alpha = 1$, $n = 1$

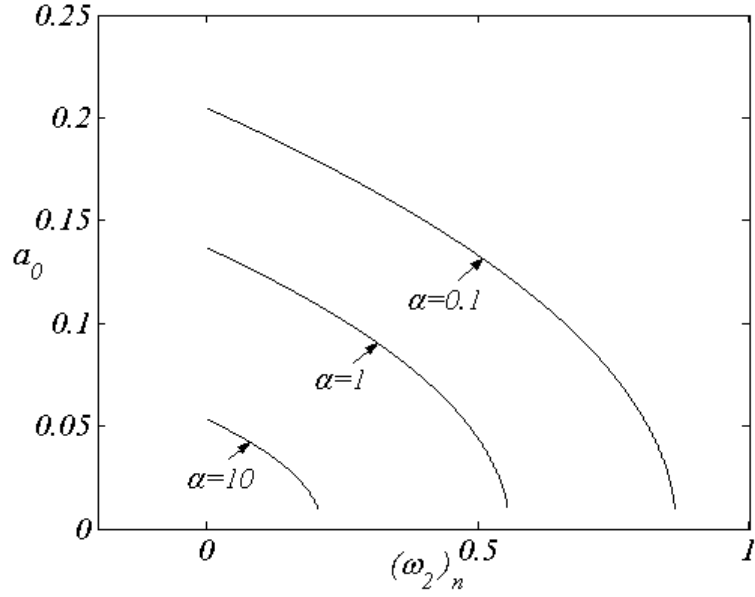


Şekil 25. Farklı kütle konumlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlinear frekans grafikleri, $\alpha = 1$, $n = 1$

Şekil 22 ve 23'den farklı olarak $n=1$ seçilip farklı η değerlerine karşılık Şekil 24'de $(\omega_1)_n - a_0$ eğrileri, Şekil 25'de $(\omega_2)_n - a_0$ eğrileri çizilmiştir. Yine bu durumda genlikle beraber $(\omega_1)_n$ değerlerinin arttığı, $(\omega_2)_n$ değerlerinin azaldığı görülür. Kütle kirişin ortasına doğru gittikçe $(\omega_1)_n$ değerlerinin genlikle beraber daha çok arttığı görülmektedir.

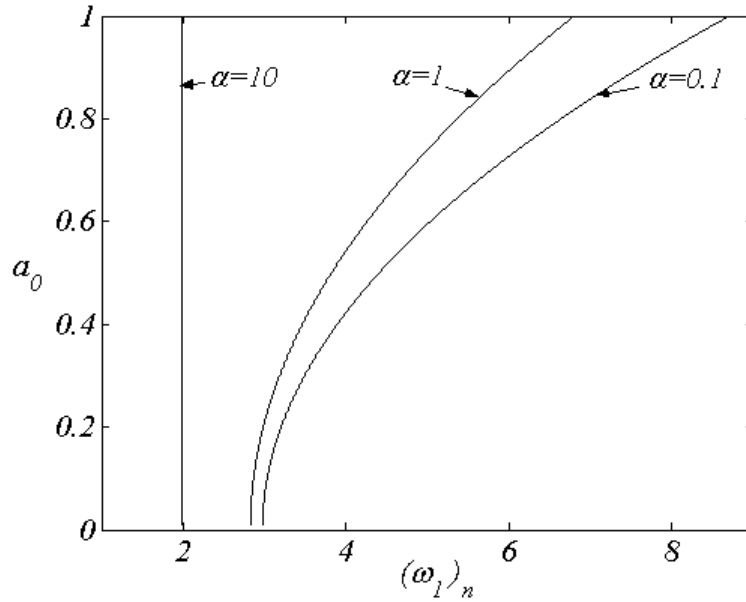


Şekil 26. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-enine nonlinear frekans grafikleri, $\eta = 0.5$, $n = 0.1$

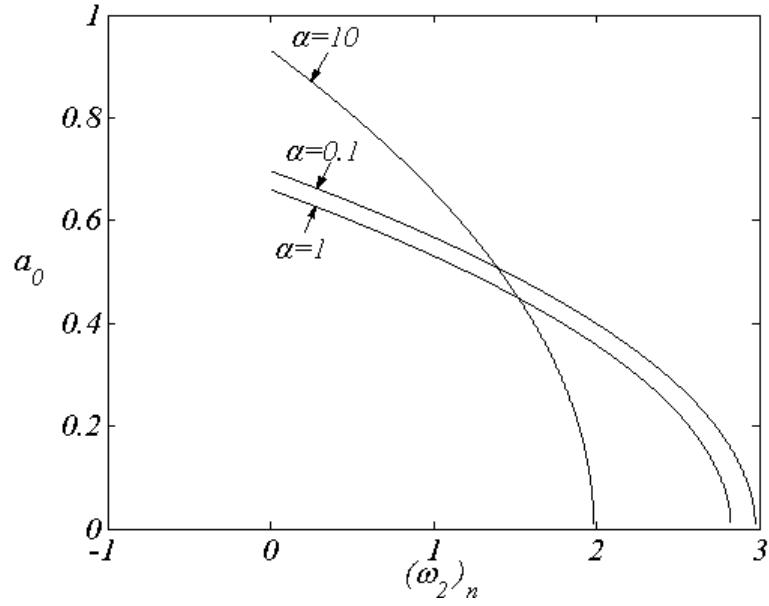


Şekil 27. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlineer frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $n=0.1$

Farklı α değerleri için Şekil 26'da $(\omega_1)_n$ - a_0 eğrileri, ve yine aynı parametre değerleri için Şekil 27'de $(\omega_2)_n$ - a_0 eğrileri çizilmiştir. Kütle oranı büyüdükçe $(\omega_1)_n$ ve $(\omega_2)_n$ değerlerinin azaldığı görülmektedir. Seçilen kütle büyüklükleri dikkate alındığında genlik arttıkça $(\omega_1)_n$ değerlerinin arttığı buna karşın $(\omega_2)_n$ değerlerinin azaldığı bu eğrilerden görülebilmektedir.

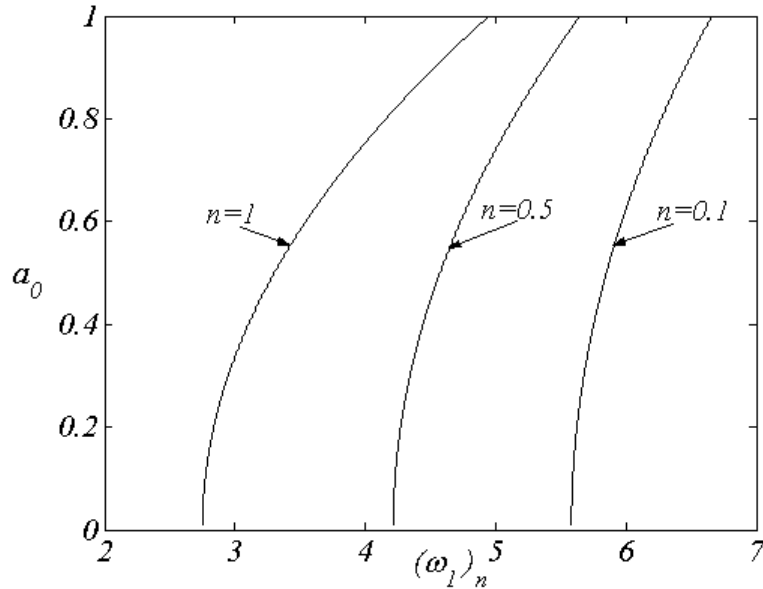


Şekil 28. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-enine nonlineer frekans grafikleri, $\eta=0.3$, $n=1$

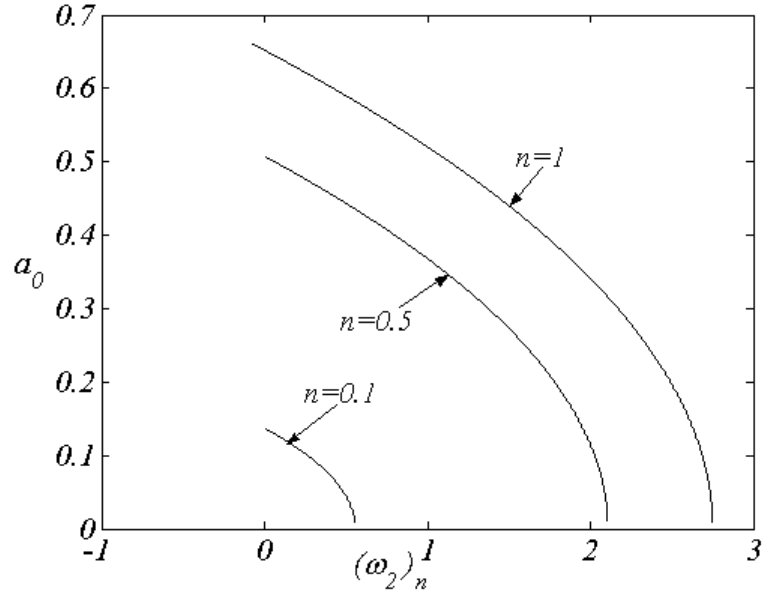


Şekil 29. Farklı kütle oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlineer frekans grafikleri, $\eta=0.3$, $n=1$

Şekil 26 ve 27'den farklı olarak $n=1$ seçilip, farklı α değerlerine karşılık Şekil 28'da $(\omega_1)_n$ - a_0 eğrileri ve Şekil 29'da $(\omega_2)_n$ - a_0 eğrileri çizilmiştir. Genel olarak $(\omega_1)_n$ değerlerinin genlikle arttığı, $(\omega_2)_n$ değerlerinin genlikle azaldığı görülmektedir. Kütle oranı büyüdükçe $(\omega_1)_n$ değerlerini belirleyen düzeltmelerin daha da azaldığı görülmektedir.



Şekil 30. Farklı frekans oranlarına karşılık genlik-enine nonlineer frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$



Şekil 31. Farklı frekans oranlarına karşılık genlik-rotasyonel nonlineer frekans grafikleri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$

Farklı n değerleri için Şekil 30'de $(\omega_1)_n$ - a_0 eğrileri, Şekil 31'de $(\omega_2)_n$ - a_0 eğrileri çizilmiştir. Frekans oranı büyüdükçe $(\omega_1)_n$ için düzeltmelerin arttığı, buna karşın $(\omega_2)_n$ için düzeltmelerin frekansları azaltıcı ve paralel yönde olduğu görülür.

4.2.2. Zorlanmış-Sönümlü Titreşim Çözümleri

Denklem (4.3) kabulü altında sönümlü zorlanmış titreşimler dikkate alınır, Denklem (3.116-3.117)'den aşağıdaki denklemler elde edilebilir;

$$\omega_1 \cdot \mu \cdot a_0 = \frac{1}{2} \cdot f \cdot \sin \tau, \quad -\omega_1 \cdot m \cdot a_0 \cdot (\sigma - \dot{\tau}) + \frac{1}{8} \cdot \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot a_0^3 = \frac{1}{2} \cdot f \cdot (\cos \tau) \quad (4.7)$$

$$-\omega_2 \cdot \check{d} \cdot b_0 \cdot \dot{\zeta}_2 + \frac{1}{8} \cdot a_0^2 \cdot b_0 \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_3 = 0 \quad (4.8)$$

Denklem (4.7-4.8)'te bazı basitleştirmeler yaptıktan sonra aşağıdaki ifadeler elde edilir;

$$-\omega_1 \cdot m \cdot a_0 \cdot (\sigma - \dot{\tau}) + \frac{1}{8} \cdot \left(\Delta_1 + \frac{1}{\nu} \cdot \Delta_2 \right) \cdot a_0^3 = \mp \sqrt{\frac{1}{4} \cdot f^2 - (\omega_1 \cdot \mu \cdot a_0)^2} \quad (4.9)$$

$$\dot{\zeta}_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_2 \cdot \check{d}} \cdot \Delta_3 \cdot a_0^2 \quad (4.10)$$

Denklem (4.10)'da $\dot{\tau} = 0$ olması durumunda aşağıdaki denklemler elde edilir;

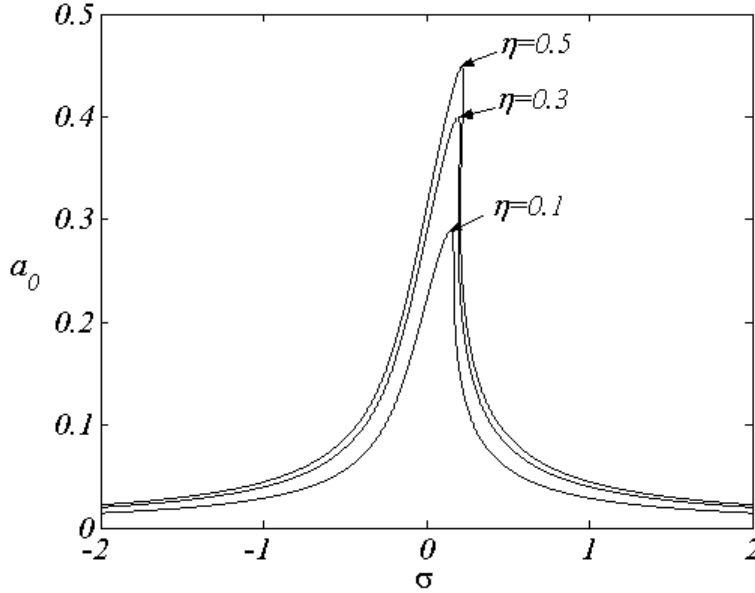
$$\sigma = \aleph \cdot a_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\check{f}}{2 \cdot a_0 \cdot \omega_1} \right)^2 - \check{\mu}^2} \quad (4.11)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\omega_2 \cdot d} \cdot \Delta_3 \cdot a_0^2 \quad (4.12)$$

Burada zorlama ve sönüm terimleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

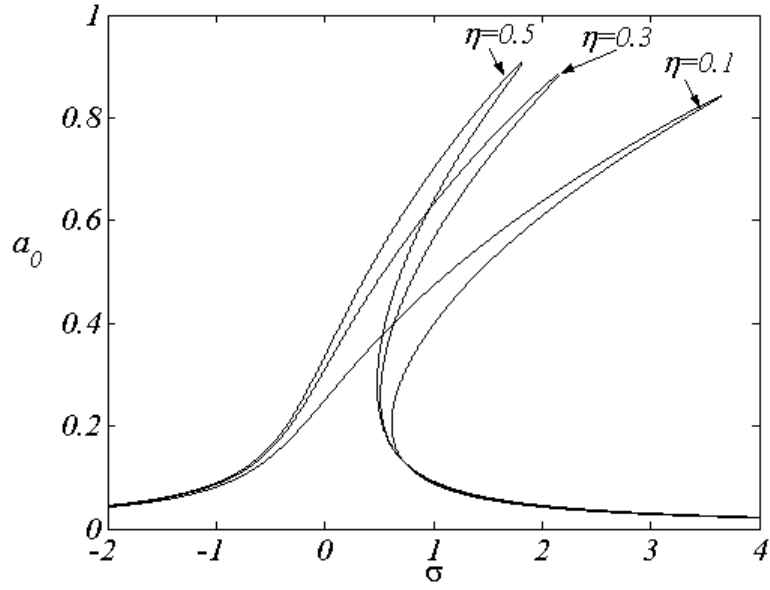
$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{m}, \quad \tilde{f} = \frac{f}{m} \quad (4.13)$$

Zorlama frekansındaki değişim Denklem (4.11)'de gösterildiği gibi σ ayar parametre ile ifade edilmektedir. Kirişin birinci modları için zorlama frekansı(σ) ile genlik(a_0) arasındaki ilişkiler Şekil 32-39'da değişik α, η ve n değerleri için gösterilmiştir. Bu incelemeler yapılırken $\nu=0.3$, $k=5/6$, $\nu = 10000$, $f=1$ ve $\mu=0.1$ olarak ele alınmıştır. a_0 - σ arasındaki ilişkiyi gösteren eğrilere sağdan ve soldan yaklaştığımızda ulaşamadığımız bir bölge bulunmaktadır. Bu bölgeye sıçrama bölgesi denir.

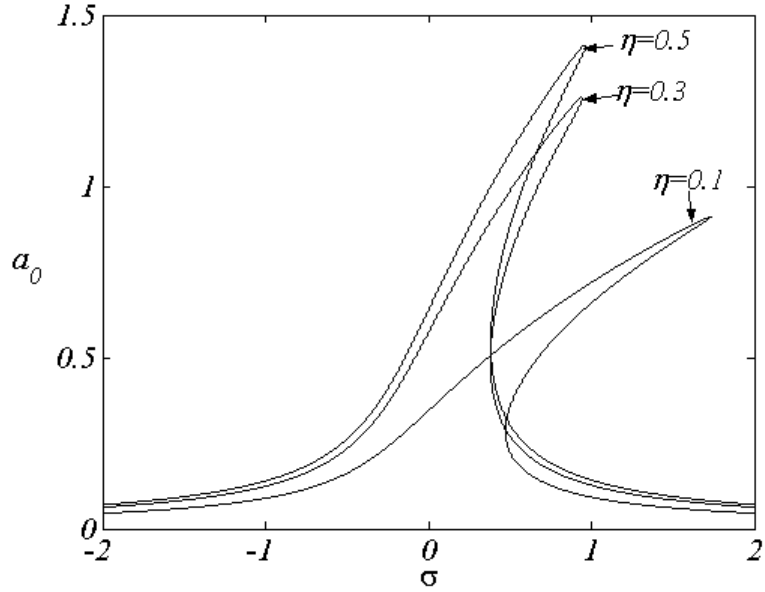


Şekil 32. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı-genlik eğrileri, $n=0.1$, $\alpha=1$

Şekil 32-34'de değişik η değerleri için a_0 ile σ arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 32'de kütle kiriş orta noktasına yaklaştıkça maksimum genlik değerlerinin arttığı görülür. Şekil 33'de n değeri artırılmıştır($n=1$). Bu durumda eğrilerden konumdaki artışın sertleştirici tipindeki davranışa sahip olduğu, sıçrama bölgesi genişlediği görülür. Ayrıca maksimum genliklerin bir önceki duruma göre azalmakta olduğu görülür. Şekil 34'de bir önceki durumdan farklı olarak kütle oranı büyük seçilmiştir ($\alpha=10$). Bu durumda kütle büyüklüğü kiriş ortasına yakın bölgelerde ($\eta=0.3, 0.5$) etkinliğini göstermekte ve sıçrama bölgesini daraltmakta, maksimum genlikleri arttırmaktadır.



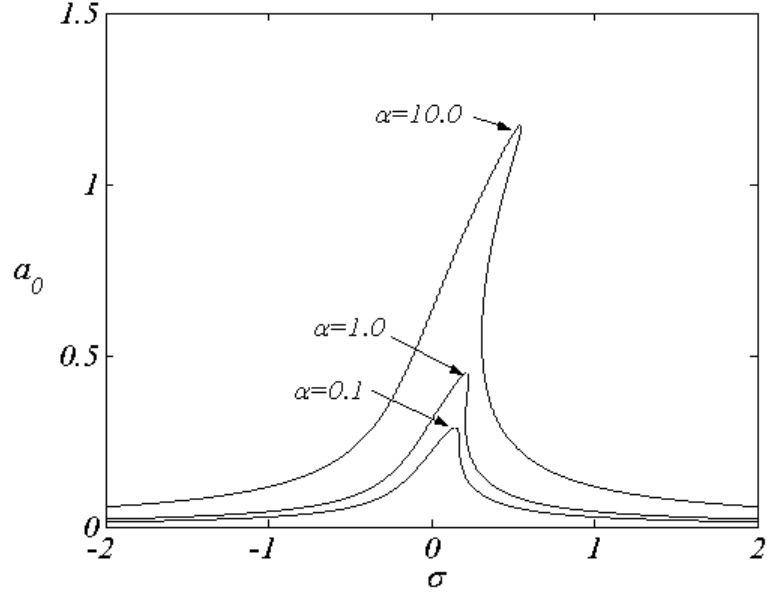
Şekil 33. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\alpha=1$



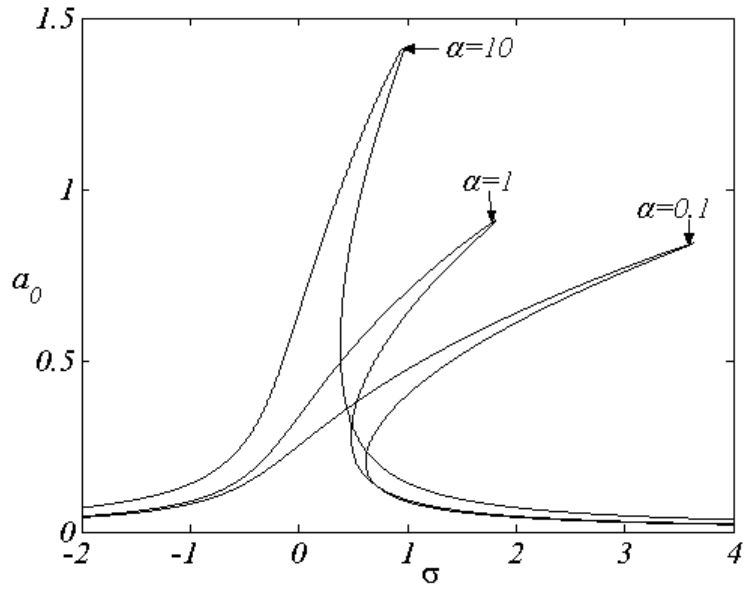
Şekil 34. Farklı kütle konumlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\alpha=10$

Şekil 35-37'de değişik α değerleri için a_0 ile σ arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 35'de kütle oranındaki artışın sertleştirici tipindeki davranışa sahip olduğu görülür. Bu durumda maksimum genlik değerleri arttığı, sıçrama bölgesinin genişlediği kaldığı görülmektedir. Şekil 36'da bir önceki duruma göre frekans oranı artırılmış($n=1$), kütle oranının azalması maksimum genlikleri azalttığı gibi sıçrama bölgesini de çok genişlettiği görülmüştür. Bu durumda sertleştirici etkinin kütle oranı azalması ile arttığı söylenebilir. Şekil 37'de farklı bir kütle konumu ($\eta=0.3$) gözönüne alınarak inceleme yapılmış, bir önceki

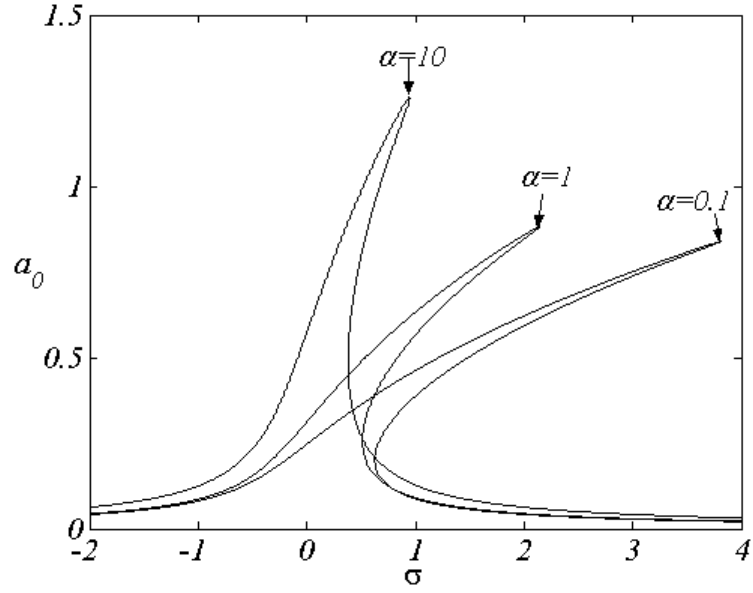
şekille benzer yönde davranışlar elde edilmiştir. Şekil 32 Euler tipindeki kirişlere(Özkaya ve ark.-1997) yakın özellik göstermektedir.



Şekil 35. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=0.1$, $\eta=0.5$

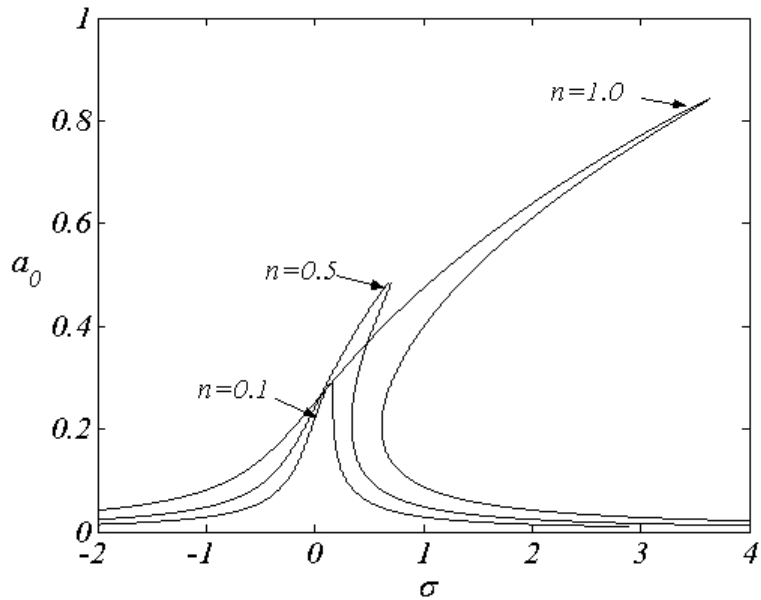


Şekil 36. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\eta=0.5$

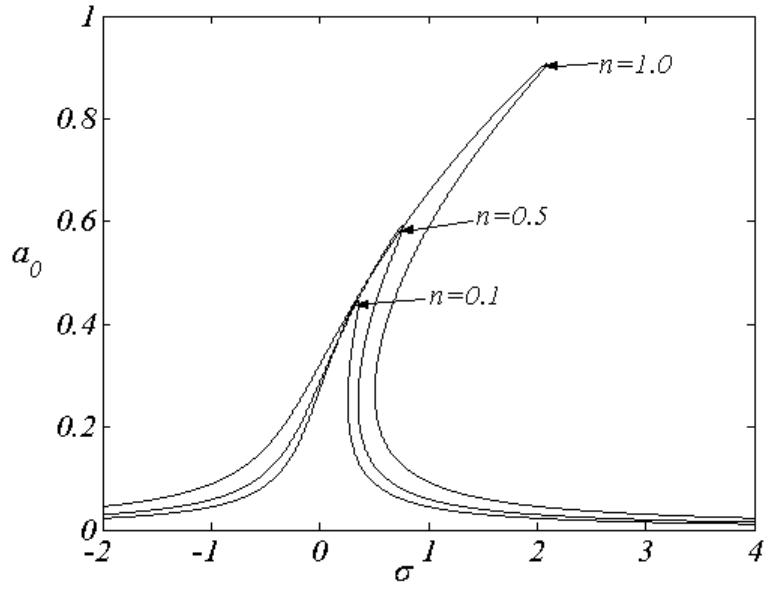


Şekil 37. Farklı kütle oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $n=1$, $\eta=0.3$

Şekil 38-39'da değişik n değerleri için a_0 ile σ arasındaki ilişki gösterilmiştir. Şekil 38'deki eğrilerden frekans oranının sertleştirici tipinde davranışa sahip olduğu görülmektedir. Frekans oranı artarken maksimum genliklerin arttığı, sıçrama bölgesinin genişlediği görülmektedir. Şekil 39'te kütle oranı büyük seçilmiş ($\alpha=1$), bir önceki şekle benzer davranışlar elde edilmekle beraber sıçrama bölgesinin genişliğinin daha az, fakat maksimum genliklerin arttığı gözlenmiştir ($n=0.1$, $n=0.5$).



Şekil 38. Farklı frekans oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $\eta=0.5$, $\alpha=0.1$



Şekil 39. Farklı frekans oranlarına karşılık zorlama frekansı–genlik eğrileri, $\eta=0.5$, $\alpha=1$

BÖLÜM 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada konsantre kütle taşıyan Timoşenko tipindeki kirişler için nonlinear titreşimler incelenmiştir. İnceleme; farklı kontrol parametrelerinin kütle kiriş sisteminin doğal frekansını nasıl değiştireceği ve baskın rezonans durumu için kütle-kiriş sistemi nasıl bir titreşim davranışı sergileyeceği sorusu üzerine temel almıştır. Bu amaçla Timoşenko kiriş teorisi kullanılarak, kütle-kiriş sistemi modellenmiş ve bu basit diferansiyel denklemler ve şartlarına dönüştürülmüştür. Çok Ölçekli Metod (Pertürbasyon Metodu) ile analitik çözümler elde edilmiştir. Yeni Simplektik Metod kullanımıyla etkileşimli diferansiyel denklemlerden meydana gelen hareket denklemleri ve karşılık gelen şartları uygun formda çözülebilmıştır. Bu çözümlerde lineer problem için doğal frekanslar, mod şekilleri, sistemin nonlinear problemi için nonlinear frekans-genlik ve zorlama frekansı-genlik ifadelerini verecek denklemler elde edilebilmiştir. Enine yöndeki doğal frekans ile rotasyonel doğal frekans arasında bir bağlantının olduğu varsayılmıştır. Bu kabul altında, sistemin düzgün rejim durumundaki nümerik çözümleri elde edilmiştir.

Nümerik çözümlerde doğal frekansın çeşitli kontrol parametreleri ile nasıl değiştiği araştırılmıştır. Konsantre kütlelerin kiriş kütlelerine oranı veren kütle oranı arttıkça enine yöndeki birinci mod frekanslarının azaldığı görülmektedir. Kütlelerin kiriş uç mesnetlerin kiriş orta noktasına kadar olan uzaklığını belirten kütle konumu arttıkça enine yöndeki birinci mod frekanslarının azaldığı görülmektedir. İkinci mod için bu durum önce azalma ardından artma şeklindedir. Enine yöndeki titreşim frekansının dönme titreşim frekansına oranını belirten frekans oranı arttıkça enine yöndeki ilk üç modun frekansı düşmektedir. Bu düşüş ikinci ve üçüncü mod frekansları için daha fazla olmaktadır. Euler tipindeki kiriş frekanslarından literatürdeki Timoşenko tipindeki kiriş frekanslarına dönmektedir.

Frekans oranı artışı enine mod şeklinde maksimum deplasmanların olmasına sebep olmakta, fakat kiriş uçlarındaki dönme azaltmaktadır. Kütle konumu arttıkça enine yöndeki maksimum deplasmanlar artmakta, buna karşın dönme deplasmanının uçlarda azalmasına sebep olmaktadır.

Enine yöndeki lineer doğal frekanslara nonlinear terimlerin yaptıkları katkı farklı parametreler üzerinde incelenmiştir. Buna göre frekans oranındaki artışıyla beraber nonlinear terimlerin(uzama v.b) enine yöndeki birinci ve ikinci moduna yaptıkları katkılar artmaktadır. Bu katkılar enine yöndeki birinci mod gözöüne alındığında kütle konumu ve kütle oranı arttıkça azalmaktadır.

Serbest-sönümsüz titreşimler göz önüne alınarak nonlinear frekans-genlik eğrileri çizilmiştir. Genel olarak genlik artışıyla sistemin enine yöndeki nonlinear frekansları artmakta, dönme yönündeki nonlinear frekansları azalmaktadır. Kütle kiriş ortasına gittikçe enine yöndeki nonlinear frekanslara olan katkılar(düzeltilmeler) benzer yönde olup nonlinear frekansın artışını sağlar. Dönme modunun nonlinear frekansları da ters yönde etki yapıp nonlinear frekanslarının genlikle azalmasına sebep olur. Kütle oranı

arttıkça enine yöndeki nonlinear frekanslara yapılan düzeltmeler azalmaktadır. Frekans oranı artışı enine yöndeki frekanslara yapılan katkıları arttırmakta, nonlinear frekansları azaltmaktadır.

Zorlanmış-sönümlü titreşimler titreşimler göz önüne alınarak zorlama frekansı-genlik eğrileri çizilmiştir. Bu eğrilerde kütle konumu arttıkça maksimum genliklerin arttığı, sıçrama bölgesinin genişlediği, sistemin sertleştirici yay özelliği gösterdiği görülmüştür. Kütle oranının artışıyla maksimum genliklerin arttığı, sıçrama bölgesinin daraldığı görülmektedir. Frekans oranları arttıkça maksimum genliklerin arttığı, sıçrama bölgesinin genişlediği, sistemin sertleştirici yönünde özelliğe sahip olduğu görülmüştür.

Timoşenko kirişindeki bazı kontrol parametrelerini değiştirerek, sonuçlarımızın Euler tipindeki kiriş üzerine temel alan Pakdemirli ve ark.(1994) ve Özkaya ve arkş(1997)'nin çalışmalarıyla benzerlik gösterdiği görülmüştür. Buna göre tezden elde edilen verilere göre aşağıdaki çalışmalar yapılabilir;

—Timoşenko kirişlerinin iç rezonans, parametrik rezonans gibi titreşim esnasında olabilecek özel durumları incelenebilir.

— Timoshenko kirişlerinin çok sayıda konsantre kütleli durumları incelenebilir, bu durumun eksenel hareketli hali incelenebilir.

— Konsantre kütle yerine yay konularak ele alınan tez benzeri bir çalışma yapılabilir.

— Etkileşimli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Simplektik metod nonlinear titreşimler için kullanılabilir. Buradan yola çıkarak, Timoshenko kiriş teorisini kullanan membran, plakanın keyfi noktasında kütleli, yaylı durumları incelenebilir. Böylece önceden önerilen sinüs ve cosinüs gibi klasik şekil fonksiyonunu veren formlardan bağımsız olarak, bu sistemlerin nonlinear titreşimleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Abramovich H. and Hamburger O., 1991: “*Vibration of cantilever Timoshenko beam with a tip mass*”, Journal of Sound and Vibration, 148(1), 162-170.
- Abramovich H. and Hamburger O. 1992: “*Vibration of a uniform cantilever Timoshenko beam with translational and rotational springs and with a tip mass*”, Journal of Sound and Vibration, 154(1), 67-80.
- Arboleda-Monsalve L.G., Zapata-Medina D.G., Aristizabal-Ochoa J.D., 2008: “*Timoshenko beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector*”, Journal of Sound and Vibration, 310, 1057–1079.
- Banarjee J.R., 2001: “*Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beams*”, Journal of Sound and Vibration, 247(1), 97-115.
- Cha P.D. and Pierre C., 1998: “*Free vibrations of uniform Timoshenko beams with lumped attachments*”, Journal of Sound and Vibration, 211(2), 162-165.
- Chan K.T. and Wang X.Q., 1997: “*Free vibration of a Timoshenko beam partially loaded with distributed mass*”, Journal of Sound and Vibration, 206(3), 242-258.
- Chang C.H., 2000: “*Free vibration of a simply supported beam carrying a rigid mass at the middle*”, Journal of Sound and Vibration, 237(4), 733-744.
- Esmailzadeh E. and Ohadi A.R., 2000: “*Vibration and stability analysis of non-uniform Timoshenko beams under axial and distributed tangential loads*”, Journal of Sound and Vibration, 236(3), 443-456.
- Feng K., 1985: “*On difference scheme and symplectic geometry*”, in: Proceedings of the Beijing Symposium Differential Geometry and Differential Equations, Beijing, pp. 42–58.
- Feng K., 1986: “*Difference schemes for Hamiltonian formalism and symplectic geometry*”, J. Comput. Math. 4, 279–289.
- Geist B., McLaughlin J. R., 1997: “*Double Eigenvalues for the Uniform Timoshenko Beam*”, Appl. Math. Lett. 10(3), 129-134.
- Grant D.A., 1978: “*The effect of rotary inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams carrying a concentrated mass*”, Journal of Sound and Vibration, 57(3), 357-365.
- Gunda J. B., Gupta R.K., Janardhan G.R., G. Rao V., 2010: “*Large amplitude free vibration analysis of Timoshenko beams using a relatively simple finite element formulation*”, International Journal of Mechanical Sciences, 52, 1597–1604.
- Hijmissen J.W., van Horssen W.T., 2008: “*On transverse vibrations of a vertical Timoshenko beam*”, Journal of Sound and Vibration, 314, 161–179.
- Ke L.L., Xiang Y., Yang J., Kitipornchai S., 2009: “*Nonlinear free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory*, Computational Materials Science, 47, 409–417.
- Leea S. Y., Sheu J. J., 2007: “*Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam*”, Journal of Sound and Vibration, 304, 606–624.

- Li R., Zhong Y., 2009 “*On new symplectic approach for exact free vibration solutions of moderately thick rectangular plates with two opposite edges simply supported*”, International Journal of Engineering and Applied Sciences 1(3), 13-28.
- Lim C.W., Yao W.A., Cui S., 2008, “*Benchmarks of analytical symplectic solutions for bending of corner-supported rectangular thin plates*”, The IES Journal Part A. 1, 106–115.
- Lim C.W., Cui S., Yao W.A., 2007: “*On new symplectic elasticity approach for exact bending solutions of rectangular thin plates with two opposite sides simply supported*”, Int. J. Solids Struct. 44, 5396–5411.
- Lin H.-Y., 2009: “*On the natural frequencies and mode shapes of a multispan Timoshenko beam carrying a number of various concentrated elements*”, Journal of Sound and Vibration, 319, 593–605.
- Lin H.-Y., Tsai Y.-C., 2007: “*Free vibration analysis of a uniform multi-span beam carrying multiple spring-mass systems*”, Journal of Sound and Vibration, 302, 442–456.
- Loya J.A., Rubio L., Fernandez-Saez J., 2006: “*Natural frequencies for bending vibrations of Timoshenko cracked beams*”, Journal of Sound and Vibration, 290, 640–653.
- Majkut L., 2009: “*Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation*”, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 47(1), 193-210.
- Mei C., Karpenko Y., Moody S., Allen D., 2006: “*Analytical approach to free and forced vibrations of axially loaded cracked Timoshenko beams*”, Journal of Sound and Vibration, 291, 1041–1060.
- Nayfeh, A.H., Mook, D.T., 1979: “*Nonlinear Oscillations*”, Willey, New-York.
- Nayfeh A.H., 1981: “*Introduction to Perturbation Techniques*”, Willey, New-York.
- Özkaya E., Pakdemirli M., and Öz H.R., 1997: “*Non-linear vibrations of a beam-mass system under different boundary conditions*”, Journal of Sound and Vibration 199(4), 679-696.
- Özkaya E. 2002: “*Non-linear transverse vibrations of simply supported beam carrying concentrated masses*”, Journal of Sound and Vibration, 257(3), 413–424.
- Pakdemirli M., Nayfeh A.H. 1994: “*Nonlinear vibrations of a beam-spring-mass system*”, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers\ Journal of Vibration and Acoustics, 166, 433-438.
- Posiadala B., 1997: “*Free vibrations of uniform Timoshenko beams with attachments*”, Journal of Sound and Vibration, 204(2), 359-369.
- Ruge P., Birk C., 2007: “*A comparison of infinite Timoshenko and Euler–Bernoulli beam models on Winkler foundation in the frequency- and time-domain*”, Journal of Sound and Vibration, 304, 932–947.
- Rossi R.E., Laura P.A.A., Avalos D.R., Larrondo H., 1993: “*Free vibrations of Timoshenko beams carrying elastically mounted concentrated masses*”, Journal of Sound and Vibration, 165(2), 209-223.
- Shahba A., Attarnejad R., Marvi M. T., Hajilar S., (in press-2011): “*Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions*”, Composites: Part B.
- Timoshenko, S. P., 1921: *On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section*, Philosophical Magazine, 744.

- Timoshenko, S. P., 1922: *On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section*, Philosophical Magazine, p. 125.
- Xu X.S., Zhong W.X., Zhang H.W., 1997: “*The Saint–Venant problem and principle in elasticity*”, Int. J. Solids Struct. 34, 2815–2827.
- Yang J., Ke L.L., Kitipornchai S., 2010: “*Nonlinear free vibration of single-walled carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory*”, Physica E, 42, 1727–1735.
- Yao W.A., Yang H., 2001: “*Hamiltonian system based Saint Venant solutions for multi-layered composite plane anisotropic plates*”, Int. J. Solids Struct., 38, 5807–5817.
- Yesilce Y., Demirdag O., 2008: “*Effect of axial force on free vibration of Timoshenko multi-span beam carrying multiple spring-mass systems*”, International Journal of Mechanical Sciences, 50, 995–1003.
- Yesilce Y., Demirdag O., Catal S., 2008: “*Free vibrations of a multi-span Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems*”, Sadhana, 33(4), 385-401.
- Zhong W.X., 1991: “*Plane elasticity problem in strip domain and Hamiltonian system*”, J. Dalian Univ. Tech. 31, 373–384 (in Chinese).
- Zhong W.X., 1992: “*On the reciprocal theorem and adjoint symplectic orthogonal relation*”, Acta Mech. Sin. 24, 432–437 (in Chinese).
- Zhong W.X., Yao W.A., 1997: “*The Saint Venant solutions of multi-layered composite plates*”, Adv. Struct. Eng. 1, 127–133.
- Zhong H. and Guo Q., 2003: “*Nonlinear Vibration Analysis of Timoshenko Beams Using the Differential Quadrature Method*”, Nonlinear Dynamics, 32, 223–234.
- Zou G., 1998: “*An exact symplectic geometry solution for the static and dynamic analysis of Reissner plates*”, Comput. Method Appl. Mech. Eng. 156, 171–178.
- Van Rensburg N.F.J., Van der Merwe A.J., 2006: “*Natural frequencies and modes of a Timoshenko beam*”, Wave Motion, 44, 58–69.
- Wang C.M., Zhang Y. Y. and He X. Q., 2007: “*Vibration of nonlocal Timoshenko beams*”, Nanotechnology, 18, 105401-9.
- Wang C.M., Tanb V.B.C., Zhang Y.Y., 2006: “*Timoshenko beam model for vibration analysis of multi-walled carbon nanotubes*”, Journal of Sound and Vibration, 294, 1060–1072.
- Wu J.-S. and Chen D.-W., 2001: “*Free vibration analysis of a Timoshenko beam carrying multiple spring-mass systems by using the numerical assembly technique*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50, 1039-1058.