

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KİSMİ DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN ÇOK
DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Muhammed YİĞİDER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2011

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

Kısmi Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı İle Nümerik Çözümü

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Muhammed YİĞİDER tarafından hazırlanan bu çalışma 29/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İmza :

Üye : Doç. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Doç. Dr. Murat SUBAŞI

İmza :

Üye : Doç. Dr. Mustafa YAMAN

İmza :

(imza)

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum
Enstitü Müdürü
Prof. Dr. Ömer AKBULUT

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirışlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

KİSMİ DİFERANSİYEL- CEBİRSEL DENKLEMLERİN ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Muhammed YİĞİDER

Atatürk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde, mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem sistemlerini çözmek için bir metot sunuldu. İlk olarak, kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem sisteminin iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu ile seri çözümleri elde edildi. Daha sonra bu seriler Çok Değişkenli Padé Yaklaşımıyla rasyonel serilere dönüştürüldü. Bu şekilde verilen kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem sistemi nümerik olarak çözüldü. İki farklı problem ele alındı. Problemlerin nümerik çözümleri ile tam çözümleri karşılaştırıldı.

2011, 80 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kısmi diferansiyel-cebirselsel denklemler, Kuvvet serileri, Diferansiyel dönüşüm metodu, Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS WITH MULTIVARIATE PADE APPROXIMATIONS

Muhammed YİĞİDER

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, a method is described for solving systems of partial differential-algebraic equations (PDAEs) arising in sciences and engineering. Firstly, the series solutions of partial differential-algebraic equations is obtained with two-dimensional transformation method. Then the series are transformed into rational series by using Multivariate Padé Approximations. After the given partial differential-algebraic equations are solved numerically. Two different problems have been handled. The numerical solutions of problems compared with their exact solutions.

2011, 80 pages

Keywords: Partial differential-algebraic equations (PDAEs), Power series, Differential transform method, Multivariate Padé Approximations.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma sırasında yöneticiliğimi üstlenip değerli bilgi ve katkılarını esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK hocama en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Murat SUBAŞI'ya, Sayın Doç. Dr. Mustafa YAMAN'a, ve Erzurum Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Engin ÖZKAN ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa KUDU olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde her zaman desteğini hissettiğim değerli anne ve babama ve değerli eşime de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed YİĞİDER

Temmuz 2011

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Diferansiyel- Cebirsel Denklemler	7
2.3. Kısmi Diferansiyel- Cebirsel Denklemler.....	8
2.4. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm	11
2.5. Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı	17
2.5.1. Padé Yaklaşımının Hesaplanması.....	22
2.5.2. Padé Tablosu	24
3. MATERYAL ve YÖNTEM	32
3.1. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm	32
3.2. Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı	42
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	52
4.1. Test problemi	52
4.2. Test problemi	67
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	74
KAYNAKLAR	75
EKLER.....	78
EK 1:Nümerik Metodun Programı.....	78
ÖZGEÇMİŞ.	81

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. (2.11) problemindeki $v_1(x)$ ' in grafiği ve diferansiyel dönüşüm metodu	15
Şekil 2.2. (2.11) problemindeki $v_2(x)$ ' in grafiği ve diferansiyel dönüşüm metodu	16
Şekil 2.3. $f(x) = \sqrt{(1+\frac{x}{2})/(1+2x)}$ i ve $f(x)$ in $[1/1]$ Padé yaklaşımı	29
Şekil 2.4. $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ Taylor serisi ve $r(x)$ Padé yaklaşımı	31
Şekil 3.1. $f(x, y) = 1 + (x/0.1 - y) + \sin(xy)$ fonksiyonu	50
Şekil 3.2. $f(x, y)$ 'nin $P_3(x, y) = 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2$ Taylor açılımı.....	50
Şekil 3.3. $r_{1,1}(x, y) = (1 + 10x - 10.1y/1 - 10.1y)$ Padé yaklaşımı	51
Şekil 4.1. $u_1(x, t)$ nin grafiği	65
Şekil 4.2. $u_1(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının grafiği	65
Şekil 4.3. $u_2(x, t)$ nin değerleri	66
Şekil 4.4. $u_2(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri	66
Şekil 4.5. $u_3(x, t)$ nin değerleri	66
Şekil 4.6. $u_3(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri	66
Şekil 4.7. $u_1(x, t)$ nin değerleri	72
Şekil 4.8. $u_1(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri	72
Şekil 4.9. $u_2(x, t)$ nin değerleri	73
Şekil 4.10. $u_2(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri	73
Şekil 4.11. $u_3(x, t)$ nin değerleri	73
Şekil 4.12. $u_3(x, t)$ ve $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri	73

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri.....	12
Çizelge 2.2. (2.11) problemindeki $v_1(x)$ ' in nümerik çözümü	15
Çizelge 2.3. (2.11) problemindeki $v_2(x)$ ' in nümerik çözümü	16
Çizelge 2.4. Padé tablosu	25
Çizelge 2.5. e^x 'in Padé yaklaşımının bir kısmı.....	26
Çizelge 2.6. $f(x) = e^{-x}$, $P_5(x)$ ve $r(x)$ 'in değerleri	30
Çizelge 3.1. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel işlemleri	40
Çizelge 4.1. Tam çözümle $u_1(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	64
Çizelge 4.2. Tam çözümle $u_2(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	64
Çizelge 4.3. Tam çözümle $u_3(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	65
Çizelge 4.4. Tam çözümle $u_1(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	71
Çizelge 4.5. Tam çözümle $u_2(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	71
Çizelge 4.6. Tam çözümle $u_3(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)	72

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilim dallarında, pratikte karşılaşılan problemlerin matematiksel modellemeler oluşturması büyük bir önem taşımaktadır. Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüleştirmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı başlangıç şartlarını, sınır şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları elde etmek gerekir. Bu konuda yapılan çalışmalar bilgisayar teknolojisinin gelişmesi sonucunda 20. yüzyılın sonuna doğru oldukça büyük bir hız kazanmıştır. Birçok modellemeye ait problemler genelde diferansiyel-cebirselsel denklem veya kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle, diferansiyel-cebirselsel ve kısmi diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümlerinin araştırılması, matematiksel modelleme teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır.

Diferansiyel-cebirselsel denklem kavramı ilk kez Petzold (1982) tarafından kullanılmıştır. Sonra Gear and Petzold (1984), Brennan (1989), Ascher and Petzold (1998), Petzold (1995) diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Hairer (1989) diferansiyel-cebirselsel denklemlerin çözümü için Runge – Kutta yöntemini kullanmıştır. Ascher and Spiteri (1994) sınır değeri verilmiş diferansiyel- cebirselsel denklemlerin çözümü için sıralama (collocation) metodunu kullanmışlardır. Çelik and Bayram (2003, 2004) diferansiyel-cebirselsel denklemlerin çözümünde Padé yaklaşımını kullanmışlardır. Hosseini (2006) lineer ve nonlinear diferansiyel-cebirselsel denklemlerin çözümü için Adomian yöntemini kullanmıştır. Diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine yapılan çalışmaların yanı sıra Campbell (1995) ve Marz (2003, 2004) lineer ve nonlinear diferansiyel-cebirselsel denklemlerin indeksini ve çözülebilirliğini incelemişler, Hosseini (2005) de yüksek indeksli diferansiyel-cebirselsel denklemlerde indeks indirgeme için bir yöntem sunmuştur.

Marszalek (1997) kısmi diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin analizi üzerine çalışmalar yapmıştır. Lucht and Strehmel (1997a, 1997b, 1999) sabit katsayılı lineer kısmi diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin indeksleri, başlangıç ve sınır değer tutarlılıkları, ve nümerik çözümleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. Martinson and Barton (2000, 2002) kısmi türevli diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlerin karakteristik analizi ve diferansiyel indeks üzerine çalışmışlardır. Debrabant and Strehmel (2005) lineer kısmi türevli diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemlere uygulanan Runge-Kutta metodunun yakınsaklığını incelemişlerdir.

Diferansiyel dönüşüm metodu, ilk olarak Zhou (1986) tarafından elektrik devre analizinde lineer ve non-lineer başlangıç değer problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Jang and Chen (2000) diferansiyel dönüşüm yöntemini başlangıç değer problemlerinin çözümünde kullanmışlardır. Hassan (2002) bazı özdeğer problemlerinin çözümünde diferansiyel dönüşüm metodundan faydalanmıştır. Köksal and Herdem (2002) diferansiyel dönüşüm metodunu nonlinear devre analizine uygulamışlardır. Ayaz (2004) ve Liu (2007) diferansiyel- cebirselleştirilmiş denklemlerin çözümünde diferansiyel dönüşüm metodunun kullanışlı olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca Chen and Ho (1999), Jang and Chen(2001), Ayaz (2003) ve Yang (2006) iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunu kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulamışlardır.

Padé yaklaşımlarının geçmişi çok eskidir. Henri Eugène Padé tarafından kullanılan şekliyle günümüze ulaşana kadar birçok ünlü matematikçi farklı problemlere çözüm bulabilmek amacıyla Padé yaklaşımlarını kullandı. Euler, C.G.J. Jacobi, Michell Rolle, George Ferdinand Frobenius, Jean Darboux ve Daniel Bernoulli gibi matematikçiler tarafından matematiğin farklı alanlarında farklı problemlere çözüm bulabilmek için kullanıldı (Brezinski, 1991).

Günümüzde yaygın bir şekilde Padé yaklaşımları, diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde, kuvvet serilerinin analitik devam problemlerinde, ortogonal polinomlar üzerinde çalışılmasında (Markov fonksiyonları için Padé denklemlerinde payda

denkleminin ortogonal olduğu bilinmektedir), kuvvet serilerine ait singüleritenin, sıfır noktalarının, köklerin ve kutup notalarının bulunmasında kullanılır.

Padé yaklaşımlarının diğ er nümerik yaklaşımlara göre daha iyi sonuçlar vermesi, bu yaklaşıma olan ilgiyi artırdı ve sadece matematikte değı l, fizikte, kimyada, astronomide ve daha farklı bilimsel alanlarda kullanılmasına yol açtı.

Tek değı şkenli Padé yaklaşımları üzerine birçok çalışma yapılmasına rağmen, çok değı şkenli Padé yaklaşımları üzerine yapılan çalışma sayısı oldukça sınırlıdır. Çok değı şkenli Padé yaklaşımlarının tanımı ilk kez 1973 te J.S.R. Chisholm tarafından, daha genel tanımlama ise Levin tarafından yapılmıştır. Teorisini ve temel kavramlarını işleyen ilk kapsamlı makale ise 1983 te Annie Cuyt tarafından yayınlanmıştır. (Guillaume and Huard, 2000). Tek değı şkenlilerin birçok özelliğı açıklığa kavuşturulmasına rağmen, çok değı şkenliler için yapılan çalışmalar çok sınırlıdır. Fakat çok değı şkenli Padé yaklaşımlarının, tek değı şkenli Padé yaklaşımlarının birçok özelliğini kapsadığını söylemek mümkündür.

Birçok çalışmada tek değı şkenli Padé yaklaşımları ile diğ er nümerik yaklaşımlar kıyaslandığında, Padé yaklaşımlarının daha iyi bir yaklaşım gösterdiği bilinmektedir. Fakat çok değı şkenli Padé yaklaşımları için literatürde, diğ er nümerik yaklaşımlarla yapılan karşılaştırmaları kapsayan araştırmalara rastlamak hemen hemen mümkün değildir.

Bu tezde, Kısmi diferansiyel-cebirs el denklemlerin nümerik çözümü incelenecektir. Önce kısmi diferansiyel-cebirs el denklemlerin; Diferansiyel dönüşüm metodu ile seri çözümleri elde edilecek daha sonra bu seriler çok değı şkenli Padé yaklaşımı ile rasyonel serilere dönüştürülerek nümerik çözümleri hesaplanacaktır. Metot, test problemine uygulanacak ve problemlerin nümerik çözümleri ile analitik çözümleri karşılaştırılacaktır. Ayrıca EK 1’ de bir problem üzerinde diferansiyel dönüşüm metodunun Matlab programlama dilinde programı verilecektir.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1 Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir. Genel olarak;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci mertebeden türevidir. (2.1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülürse

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu ise (2.1) in açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.1.2: m. dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.1.3: Bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ile iki veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya kısmi diferansiyel denklem denir. Buna göre u bağımlı $x_1, x_2, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0 \quad (2.3)$$

bağıntısı bir bağımlı ve n – bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$xu_x - yu_y = xyu$$

$$u_{xxx} - uu_y + u^2 = 0$$

birer kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.1.4: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots + a_n (x - c)^n + \dots$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir. Eğer bu ifadede $c = 0$ olursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0$$

olur.

Tanım 2.1.5: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c$ 'deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Teorem 2.1.6: $f(x, y)$ fonksiyonu ve ilk n mertebeden kısmi türevi kapalı bir bölgede sürekli ve açık bölgede $n+1$ inci mertebeden türevi mevcut ise

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + R_n \end{aligned}$$

dir. Burada R_n , Lagrange kalanı olarak adlandırılır

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k), \quad 0 < \theta < 1$$

ile verilir ve

$$\begin{aligned} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) &= h f_x(a, b) + k f_y(a, b) \\ \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) &= h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \\ &\dots \end{aligned}$$

dir.

2.2 Diferansiyel- Cebirsel Denklemler

Diferansiyel- cebirsel denklem sistemi başlangıç şartları ile birlikte

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \quad (2.4.a)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1 \quad (2.4.b)$$

formundadır. (2.4.a) denkleminde genel non-lineer kapalı (implicit) diferansiyel-cebirsel denklem denir. Burada $F \in R^n$, $y \in R^n$ ve $t \in R$ dir. Diferansiyel-cebirsel denklem açık olarak

$$F(y', y, x, t) = 0 \quad (2.5.a)$$

$$G(x, y, t) = 0 \quad (2.5.b)$$

şeklinde yazılabilir. Burada y diferansiyel değişkenin ve x de cebirsel değişkenin vektörleridir. Eğer (2.4.a) ve (2.4.b) sistemi n tane denkleme sahipse p tanesi diferansiyel değişken ise $(n - p)$ tanesi cebirsel değişkendir.

Örnek 2.2.1: Aşağıdaki başlangıç değerleri ile verilen denklem sistemini düşünelim.

$$y_1' + y_3 y_2' - (y_2 + 1)y_3' = -y_1 + 1 + \sin(x)$$

$$(y_3 + 1)y_1' + y_1 y_2' = -e^{-x} \quad (2.6)$$

$$y_1 y_2 y_3 - e^{-x} \sin(x) \cos(x) = 0$$

Başlangıç değerleri

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere yukarıdaki (2.6) denklem sistemi bir diferansiyel-cebirsal denklemdir.

2.3 Kısmi Diferansiyel- Cebirsal Denklemler

Fen bilimlerinde ve mühendislikte, farklı tip denklem sistemleri içeren birçok matematiksel model yer almaktadır. Bu sistemler,

- Parabolik ve eliptik diferansiyel denklemler
- Parabolik, eliptik ve adi diferansiyel denklemler veya
- Eliptik ve adi diferansiyel denklemler ve cebirsal denklemler

içerebilirler.

Farklı tipteki denklemlerin kombinasyonları için birçok olasılık vardır. Bu şekildeki sistemler, kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem olarak adlandırılır ve uygulamalarda bu sistemler genellikle uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla tamamlanabilirler. Bu sistemler, bazı kabuller altında bir Laplace dönüşümü veya bir Fourier analizi ile diferansiyel-cebirselsel denkleme indirgenebilirler.

Örnek 2.3.1: $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ türlerin yoğunluğu ve $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ besin kaynaklarının yoğunluk vektörleri olmak üzere, m besin kaynağına bağlı n türün bir popülasyon modeli,

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = D\Delta u_j + f_j(u, v), \quad j = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = g_i(u, v), \quad i = 1, \dots, m$$

olarak verilsin. $D > 0$, f_j, g_i , uygun başlangıç ve sınır şartlarının verildiğini kabul edelim. Bu sistem bir reaksiyon-difüzyon modeli olarak değerlendirilebilir. Burada u_j , yayılmış madde konsantrasyonu olarak ve v_i , parçacıkları yayılmayan madde konsantrasyonu olarak görülebilir. Yukarıdaki denklemde n parabolik kısmi türevli diferansiyel denklem, m adi diferansiyel denklem vardır.

Bu tezde biz;

$$J = (0, t_e), \quad \Omega = (-l, l) \text{ ve } A, B, C \in R^{n \times n} \quad (t_e > 0, \quad l > 0) \text{ olmak üzere,}$$

$$Au_t(t, x) + Bu_{xx}(t, x) + Cu(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in J \times \Omega$$

şeklindeki sabit katsayılı kısmi diferansiyel-cebirselsel denklemlerin nümerik çözümünü inceleyeceğiz. Eğer $A = 0$ veya $B = 0$ olursa sistem adi diferansiyel denkleme ya da diferansiyel-cebirselsel denkleme dönüşür.

Örnek 2.3.2: $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $t \in J$, $x \in \Omega = (-1, 1)$, $a, b > 0$, $c_i \neq 0$ ve $f_i(t, x)$
 $i = 1, 2, 3$

fonksiyonları smooth (yeterince düzgün) olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{xx} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_3 & 0 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$u_j(t, -1) = u_j(t, 1) = 0, \quad j \in M_{BC}, \quad u_i(0, x) = g_i(x) \sin(\pi x), \quad i \in M_{IC}$$

denklemini kısmi diferansiyel- cebirselsel denklemdir. Bu denklemini

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{1_t} \\ u_{2_t} \\ u_{3_t} \end{pmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$u_{1_t} - u_{1_{xx}} + c_1 u_2 = f_1$$

$$a u_{2_t} - b u_{2_{xx}} + c_2 u_3 = f_2$$

$$c_3 u_2 = f_3$$

şeklinde yazabiliriz.

2.4. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

Bir $y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (2.7)$$

(2.7) denkleminde $y(x)$ asıl(orijinal) fonksiyon $Y(k)$ da T- fonksiyonu olarak

adlandırılan dönüşüm fonksiyonudur. $Y(k)$ nın diferansiyel ters dönüşümü,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. (2.7) ve (2.8) denklemlerinden

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) denklemine göre diferansiyel dönüşümün Taylor serisi açılımından türetildiği düşünülebilir. Fakat bu metot sembolik olarak türevleri hesaplamamaktadır. Yukarıdaki (2.7) ve (2.8) denklemlerinin tanımlarından, Çizelge 2.1. deki temel matematiksel işlemlerin dönüşüm fonksiyonlarıyla uyduğu kolaylıkla görülebilir ve ispatlanabilir. Uygulamalarda, $y(x)$ fonksiyonu sonlu bir seriyle ifade edilir ve (2.7) denklemi

$$y(x) = \sum_{k=0}^m x^k Y(k) \quad (2.10)$$

olarak yazılabilir. (2.9) denklemi, $\sum_{k=m+1}^{\infty} x^k Y(k)$ ifadesinin ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunu ifade eder (Ayaz 2003).

Çizelge 2.1 Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl(Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm(Transform) fonksiyonu
$y(x) = u(x) \pm v(x)$	$Y(k) = U(k) \pm V(k)$
$y(x) = cw(x)$	$Y(k) = cW(k)$
$y(x) = dw / dx$	$Y(k) = (k+1)W(k+1)$
$y(x) = d^j w / dx^j$	$Y(k) = (k+1)(k+2) \cdots (k+j)W(k+j)$
$y(x) = u(x)v(x)$	$Y(k) = \sum_{r=0}^k U(r)V(k-r)$
$y(x) = x^j$	$Y(k) = \delta(k-j) = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

Örnek 2.4.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -(1+x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

diferansiyel- cebirsel denklemini ve

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v'_1(0) \\ v'_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

başlangıç değerlerini göz önüne alalım. (2.11) denklemi,

$$v_1'(x) - xv_2'(x) + v_1(x) - v_2(x) - xv_2(x) = 0 \quad (2.13)$$

$$v_2(x) = \sin x \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir.

Çizelge (2.1)'deki diferansiyel dönüşüm (transform) metodonun temel özelliklerini kullanarak ve (2.13) ve (2.14) denklemlerinin dönüşümünü (transformunu) alarak;

$$V_1(k+1) = \frac{1}{(k+1)} \left[\sum_{r=0}^k (k-r+1) \delta(r-1) V_2(k-r+1) - V_1(k) + V_2(k) + \sum_{r=0}^k \delta(r-1) V_2(k-r) \right] \quad (2.15)$$

$$v_2(x) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!} x^k \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.15) denkleminde $k = 0, 1, \dots, m$ değerleri için $V_1(k)$ serisinin katsayıları

$$V_1(1) = -1, V_1(2) = \frac{3}{2!}, V_1(3) = -\frac{1}{3!}, V_1(4) = -\frac{3}{4!}, V_1(5) = -\frac{1}{5!}, V_1(6) = -\frac{7}{6!} \dots$$

$$V_2(1) = 1, V_2(2) = 0, V_2(3) = \frac{1}{3!}, V_2(4) = 0, V_2(5) = \frac{1}{5!}, V_2(6) = 0, V_2(7) = -\frac{1}{7!} \dots$$

olarak bulunur ve aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$$V_1(k) = \begin{cases} -\frac{1}{k!}, & k \text{ tek ise} \\ \frac{k+1}{k!}, & k \text{ çift ve } \frac{k+2}{2} \text{ çift ise,} \\ -\frac{(k-1)}{k!}, & k \text{ çift ve } \frac{k+2}{2} \text{ tek ise,} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$V_2(k) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k!}, & k \text{ tek ise} \\ 0, & k \text{ çift ise} \end{cases} \quad (2.18)$$

$V_1(k)$ ve $V_2(k)$ değerleri (2.8) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$v_1^*(x) = 1 - x + \frac{3}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (2.19)$$

$$v_2^*(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots \quad (2.20)$$

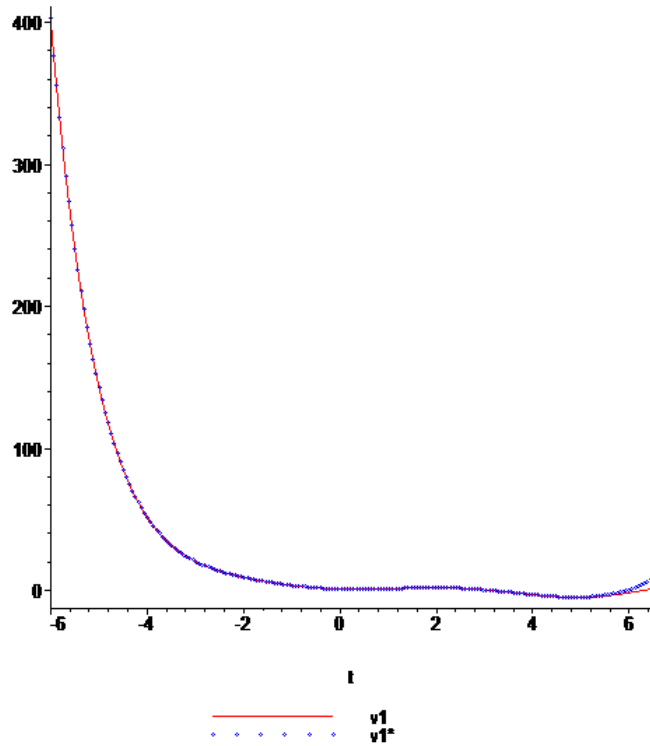
sonuçları elde edilir. Analitik çözüm ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + x \sin(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Burada analitik çözüm ile nümerik çözüm aşağıdaki tablo ve şekiller üzerinde karşılaştırıldığında çözümlerin birbirleri ile uyumlu olduğu görülür.

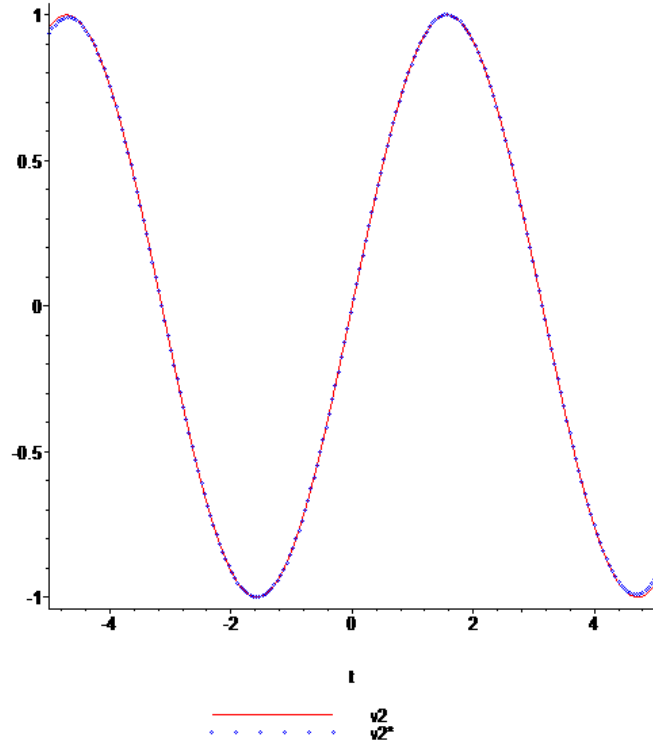
Çizelge 2.2. (2.11) problemindeki $v_1(x)$ ' in nümerik çözümü

x	$v_1(x)$	$v_1^*(x)$	$ v_1(x) - v_1^*(x) $
0.1	0.9148207597	0.9148207597	0
0.2	0.8584646193	0.8584646193	0
0.3	0.8294742827	0.8294742826	0.1×10^{-9}
0.4	0.8260873829	0.8260873829	0
0.5	0.8462434290	0.8462434290	0
0.6	0.8875971201	0.8875971201	0
0.7	0.9475376848	0.9475376849	0.1×10^{-9}
0.8	1.023213837	1.023213836	0.1×10^{-8}
0.9	1.111563878	1.111563879	0.1×10^{-8}
1.0	1.209350426	1.209350425	0.1×10^{-8}

**Şekil 2.1.** (2.11) problemindeki $v_1(x)$ ' in grafiği ve diferansiyel dönüşüm metodu

Çizelge 2.3. (2.11) problemindeki $v_2(x)$ ' in nümerik çözümü

x	$v_2(x)$	$v_2^*(x)$	$ v_2(x) - v_2^*(x) $
0.1	0.09983341665	0.09983341664	0.1×10^{-10}
0.2	0.1986693308	0.1986693309	0.1×10^{-9}
0.3	0.2955202067	0.2955202067	0
0.4	0.3894183423	0.3894183422	0.1×10^{-9}
0.5	0.4794255386	0.4794255387	0.1×10^{-9}
0.6	0.5646424734	0.5646424734	0
0.7	0.6442176872	0.6442176872	0
0.8	0.7173560909	0.7173560909	0
0.9	0.7833269096	0.7833269095	0.1×10^{-9}
1.0	0.8414709848	0.8414709847	0.1×10^{-9}

**Şekil 2.2.** (2.11) problemindeki $v_2(x)$ ' in grafiği ve diferansiyel dönüşüm metodu

2.5. Tek Değişkenli Padé Yaklaşımı

f fonksiyonu $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ yani;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad (c_0 \neq 0) \quad (2.22)$$

şeklinde bir kuvvet serisiyle temsil edilsin. Bu durumda bu kuvvet serisinin Padé yaklaşımı

$$[m/n] = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \quad (2.23)$$

şeklinde bir rasyonel fonksiyondur (polinomların oranı). Payın derecesi m , paydanın derecesi n dir. (2.23) de $m+1$ tane payın katsayısı ve $n+1$ tane de paydanın katsayısı vardır. Burada (2.23)'nin paydasının tanımsız olmaması için $b_0 = 1$ alınmalıdır. Bu seçimle (2.23)'nin payının $m+1$ tane bağımsız katsayısı ve paydasının n tane bağımsız katsayısı olur. Tüm yaklaşımda $m+n+1$ tane bilinmeyen katsayı vardır. $[m/n]$, (2.22)'deki kuvvet serisinin ilk $m+n+1$ terimine karşılık gelir (Baker and Grave-Morris 1996).

(2.22)'deki $1, x, x^2, \dots, x^{m+n}$; $m+n$ dereceli kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımını

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} + O(x^{m+n+1}) \quad (2.24)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.24) denkleminde

$$(b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + \cdots) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + O(x^{m+n+1}) \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.25) denklemindeki $x^{m+1}, x^{m+2}, \dots, x^{m+n}$ katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} b_n c_{m-n+1} + b_{n-1} c_{m-n+2} + \cdots + b_0 c_{m+1} &= 0 \\ b_n c_{m-n+2} + b_{n-1} c_{m-n+3} + \cdots + b_0 c_{m+2} &= 0 \\ \vdots & \\ b_n c_m + b_{n-1} c_{m+1} + \cdots + b_0 c_{m+n} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

sistemi elde edilir. $b_0 = 1$ olduğu için, (2.26) denklemi n tane lineer denklemden oluşur.

Yani;

$$\begin{bmatrix} c_{m-n+1} & c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & \cdots & c_m \\ c_{m-n+2} & c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & \cdots & c_{m+1} \\ c_{m-n+3} & c_{m-n+4} & c_{m-n+5} & \cdots & c_{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \cdots & c_{m+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ c_{m+3} \\ \vdots \\ c_{m+n} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

olur. Buradan b_i katsayıları bulunur. Diğer yandan (2.24) denkleminde payın katsayıları olan $a_0, a_1, \dots, a_m$ katsayıları $1, x, x^2, \dots, x^m$ terimlerin katsayılarının eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ \vdots & \\ a_m &= c_m + \sum_{i=1}^{\min(m,n)} b_i c_{m-i} \end{aligned} \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Böylece (2.27) ve (2.28) denklemleri Padé yaklaşımının pay ve paydası olarak tanımlanır. Dolayısıyla bu denklemlere Padé denklemleri denir. Buna göre;

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemler yardımıyla x^{m+n} inci dereceden $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisine karşılık gelen $[m/n]$ Padé yaklaşımı oluşturulur. Yani verilen $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ kuvvet serisini keyfi dereceden Maclaurin serisine dönüştürerek, bu serinin keyfi Padé yaklaşımı (serisi) oluşturulur. (Bundan sonra p ve q 'nün kesin polinomsal dereceleri ∂ ile, seri içerisindeki dereceleri ω ile gösterilecektir)

Bir $f(x)$ fonksiyonu için $[m/n]_f(x)$ Padé yaklaşımı problemi; Padé yaklaşımında pay ve payda polinomları olan

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$$

polinomlarını bulmayı içerir. Yani,

$$[m/n]_f(x) = \frac{p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i}{q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i}$$

olur.

(2.24) ifadesinde, yapılan içler dışlar çarpımıyla elde edilen (2.26) ve (2.28) denklemlerinde

$[m/n]_f(x)$ bulunurken;

$$\begin{aligned} \partial(p) &\leq m \\ \partial(q) &\leq n \\ \omega(fq - p) &\geq m + n + 1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

durumu söz konusudur.

Teorem 2.5.1: Eğer p_1, q_1 ve p_2, q_2 polinomları (2.30) durumunu sağlarsa bu durumda $p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$ olur.

İspat: $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$ ifadesi $(fq_2 - p_2)q_1 - (fq_1 - p_1)q_2$ şeklinde de yazılabilir. (2.30) durumundan

$$\left. \begin{aligned} \omega(fq_1 - p_1) &\geq m + n + 1 \\ \omega(fq_2 - p_2) &\geq m + n + 1 \end{aligned} \right\} \text{ olduğundan}$$

Buradan $\omega(p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1) \geq m + n + 1$ elde edilir. Fakat $(p_1 q_2 - p_2 q_1)(x)$ polinomunun

derecesi en fazla $m + n$ olacağından, $p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1$ olur.

Teorem 2.5.1' in bir sonucu olarak, p_1 / q_1 ve p_2 / q_2 rasyonel ifadeleri birbirine denktir.

Çalışmamızda şimdiye kadar sadece orijin merkezli kuvvet serileri için Padé yaklaşımının tanımını verdik. Orijin merkezli olmayan ve herhangi bir nokta merkez alınarak da Padé yaklaşımı tanımlanabilir. Aşağıdaki şekilde tanımlanan;

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i \quad (c_0 \neq 0)$$

kompleks uzayda x_0 merkezli bir kuvvet serisi olsun. Bu kuvvet serisi için (m, n) dereceli Padé yaklaşımını bulmak mümkündür. Orijin merkezli kuvvet serilerinde kullandığımız yöntemler burada da aynen geçerlidir. Buna göre;

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i (x - x_0)^i \quad \text{ve} \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i$$

şeklinde ifade edilir ve

$$(fq - p)(x) = \sum_{i \geq m+n+1} d_i (x - x_0)^i$$

ifadesinden (2.26) ve (2.28) denklem sistemindekine benzer lineer denklem sistemleri elde edilir ve aynı şekilde çözülür. Ayrıca (2.30)' deki durum burada da aynen geçerlidir.

Teorem 2.5.2: $r_{m,n}(x)$ rasyonel fonksiyonu bir f fonksiyonuna ait (m, n) dereceli Padé yaklaşımı olmak üzere; her negatif olmayan m, n sayısı için f fonksiyonuna ait tek bir (m, n) dereceli $r_{m,n}(x)$ Padé yaklaşımı vardır.

2.5.1 Padé Yaklaşımının Hesaplanması

Padé yaklaşımının hesaplanmasında literatürde farklı algoritmalar kullanılmaktadır. Bu çalışmada en yaygın ve kullanışlı olan determinant formülleri kullanılmıştır. Bu yöntem şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

serisiyle temsil edilen fonksiyonun (m, n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)}$$

olarak tanımlanırsa,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^n b_i x^i}$$

ifadesinin içler dışlar çarpımıyla oluşan denklem sistemi ve bu sistemdeki katsayılar determinant yöntemiyle bulunabilir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \text{ için;}$$

$$F_k(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i, \quad k \geq 0$$

$$F_k(x) = 0, \quad k < 0$$

yazılabilir.

Teorem 2.5.1.1: Eğer bir f fonksiyonu için (m, n) dereceli Padé yaklaşımı

$$r_{m,n}(x) = \frac{p_0(x)}{q_0(x)} \quad \text{ve} \quad D_{m,n} = \begin{pmatrix} c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_{m+} \end{pmatrix}$$

olarak ifade ediliyor ve $D = \det D_{m,n} \neq 0$ ise;

$$p_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} F_m(x) & xF_{m-1}(x) & \cdots & x^n F_{m-n}(x) \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix} \quad \text{ve} \quad q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & & & \\ \vdots & & D_{m,n} & \\ c_{m+n} & & & \end{vmatrix}$$

olur.

İspat: $D \neq 0$ olduğundan, yukarıdaki (2.26) denklem sisteminde $b_0 = 1$ alındığında bu homojen (2.26) denklem sisteminin tek çözümü olduğu görülmüştü. Aynı şekilde aşağıdaki homojen denklem sistemi de aşikar olmayan (nontrivial) çözüme sahiptir.

$$\begin{cases} 1 - q_0(x)b_0 + xb_1 + x^2b_2 + \cdots + x^n b_n = 0 \\ c_{m+1}b_0 + c_m b_1 + \cdots + c_{m+1-n} b_n = 0 \\ \vdots \\ c_{m+n}b_0 + c_{m+n-1}b_1 + \cdots + c_m b_n = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Böylece katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşittir. Yani;

$$\begin{vmatrix} 1-q_0(x) & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} = 0$$

Aynı zamanda $q_0(x)$ için bir denklem ifadesinin de olduğu gösterilebilir. Eğer $f(x)q_0(x)$ ifadesi göz önüne alınırsa;

$$f(x)q_0(x) = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} f(x) & xf(x) & \cdots & x^n f(x) \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

ifadesi elde edilir. $p_0(x)$ polinomu $f(x)q_0(x)$ serilerindeki m den küçük yada m' ye eşit dereceye sahip tüm terimleri içerdiğinden (2.32) ifadesinde $p_0(x)$ 'in determinant formatını elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Determinant algoritması birçok ekleme ve çarpım işlemlerini ihtiva ettiğinden m ve n 'nin küçük değerlerini hesaplamada daha kullanışlıdır. Bu algoritma, yalnızca kapalı formdaki formüllerin açılmasında ve bulunmasında yardımcı olur.

2.5.2 Padé Tablosu

Genel anlamda bir $f(x)$ fonksiyonunun Padé yaklaşımını

$$[m/n] = [m/n]_f = [m/n](x) = [m/n]_f(x) = r_{m,n}$$

şeklinde değişik formlarda ifade edebiliriz.

Yaklaşımlara ait tablo sistematik olarak Henri Eugène Padé tarafından verildiği için hem yaklaşıma, hem de tabloya Padé'nin ismi verilmiştir. Genel anlamda bir fonksiyona ait Padé tablosu aşağıdaki gibidir.

Çizelge 2.4. Padé tablosu

$n \backslash m$	0	1	2	...
0	$[0/0]$	$[1/0]$	$[2/0]$	...
1	$[0/1]$	$[1/1]$	$[2/1]$	...
2	$[0/2]$	$[1/2]$	$[2/2]$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Yukarıdaki Çizelge 2.4. formatına uygun e^x 'in Padé yaklaşımlarına ait Padé tabloları aşağıdaki gibidir. (Çizelge 2.5.)

Çizelge 2.5. e^x 'in Padé yaklaşımının bir kısmı

$m \backslash n$	0	1	2	...
0	1	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{1-x+\frac{1}{2}x^2}$	...
1	$1+x$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}$	...
2	$1+x+\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}x^2}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2}$	...
3	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3}{1-\frac{1}{4}x}$	$\vdots$	
4	$1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$	$\vdots$	$\ddots$	
$\vdots$				

Yukarıda Çizelge 2.5. te de görüldüğü gibi, Padé tablosunda birinci sütun f fonksiyonuna ait serinin kısmi toplamalarını verir. İlk satır ise $\frac{1}{f}$ fonksiyonunun kısmi toplamalarının terslerini içerir.

Şimdi, tek değişkenli bir fonksiyona ait Padé yaklaşımının nasıl elde edileceğini ve Padé yaklaşımının ait olduğu fonksiyonla uyumlu olup olmadığına bakalım (Şekil 2.1.).

Örnek 2.5.2.1

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}x}{1 + 2x}} = 1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 - \dots$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $[1/1]$ Padé yaklaşımını hesaplayalım (2. dereceden Padé yaklaşımını). Burada bize verilen fonksiyonun (kuvvet serisinin) x^2 'li terimine kadar olan kısmının Padé yaklaşımını bulacağız (keyfi dereceden). Bu fonksiyonda

$$c_0 = 1, c_1 = \frac{3}{4} \text{ ve } c_2 = \frac{39}{32} \text{ dir.}$$

Bu kuvvet serisine karşılık gelen Padé yaklaşımı

$$1 - \frac{3}{4}x + \frac{39}{32}x^2 = \frac{a_0 + a_1x}{1 + b_1x} + O(x^3)$$

şeklinde dir. Bu ifadede içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$(1+b_1x)(1-\frac{3}{4}x+\frac{39}{32}x^2)=a_0+a_1x+O(x^3)$$

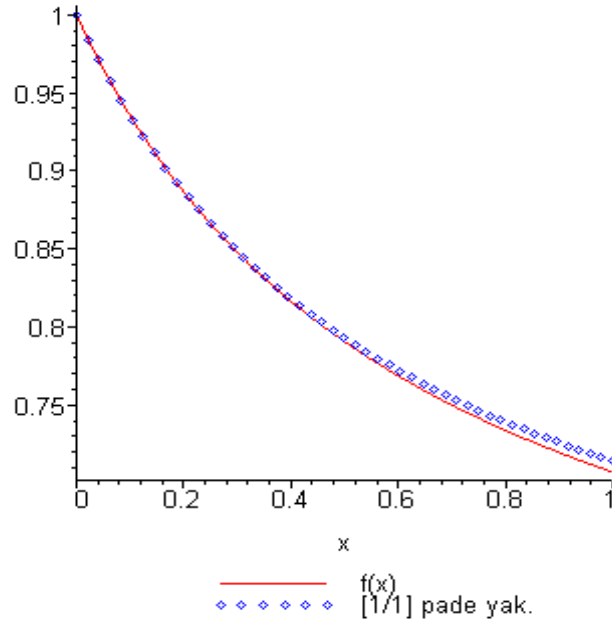
olur. (2.27) denkleminde

$$(-\frac{3}{4})b_1=-\frac{39}{32} \Rightarrow b_1=\frac{13}{8} \quad \text{olur.}$$

(2.27) denkleminde $a_0=1$ ve $a_1=\frac{7}{8}$ olur. O halde verilen kuvvet serisine karşılık gelen 2. dereceden Padé yaklaşımı

$$[1/1]=\frac{1+\frac{7}{8}x}{1+\frac{13}{8}x}$$

şeklinde bulunur. $x \geq 0$ için $f(x)$ ile Padé yaklaşımını aşağıdaki şekilde karşılaştıralım.



Şekil 2.3. $f(x) = \sqrt{(1+\frac{x}{2})/(1+2x)}$ ve $f(x)$ in $[1/1]$ Padé yaklaşımı

Özellikle $f(\infty) = \frac{1}{2} = 0.5$ ve $[1/1](\infty) = \frac{7}{13} = 0.54\dots$ dır. Herhangi bir özel metot uygulamaksızın Padé yaklaşımı (2.29) denklemlerinden direkt olarak hesaplanır.

Örnek 2.5.2.2 Bir fonksiyona ait keyfi dereceden kuvvet serisinin mi (Taylor serisi) yoksa Padé yaklaşımının mı daha iyi sonuç verdiği incelenirse seçilen fonksiyonun Taylor açılımı ve Padé yaklaşımı hesaplanarak karşılaştırılmalıdır. Fonksiyon olarak;

$f(x) = e^{-x}$ fonksiyonunu ele alınırsa; bu fonksiyonun beşinci dereceden kuvvet serisi (Taylor açılımı)

$$P_5(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5$$

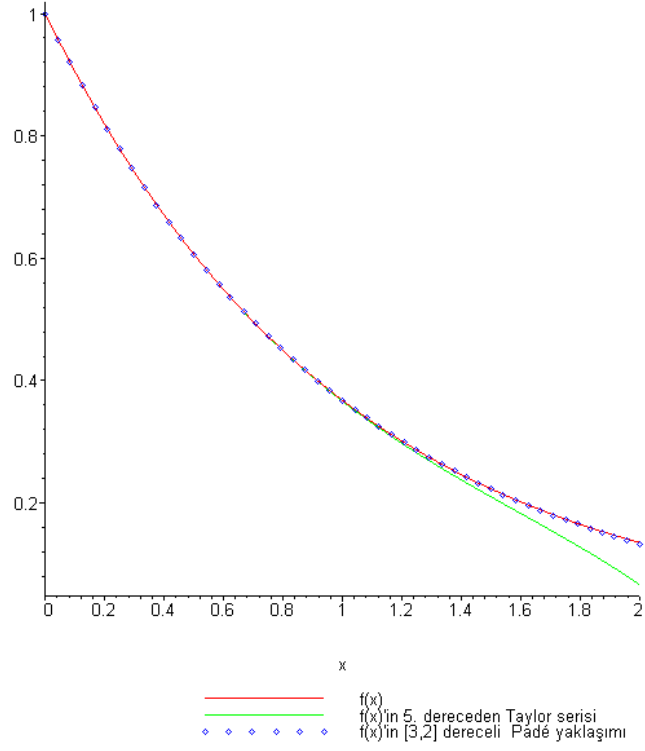
şeklindedir. Bu kuvvet serisinin $m = 3$ ve $n = 2$ için, $[3, 2]$ dereceli, yani beşinci dereceden Pade yaklaşımı (2.27) denklemlerinden

$$r(x) = \frac{1 - \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x^2 - \frac{1}{60}x^3}{1 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{20}x^2} \quad \text{olarak bulunur. } f(x) = e^{-x}, P_5(x) \text{ ve } r(x) \text{ 'i aşağıdaki}$$

tablo ve şekilde karşılaştıralım. (Çizelge 2.6. ve Şekil 2.4.)

Çizelge 2.6. $f(x) = e^{-x}$, $P_5(x)$ ve $r(x)$ 'in değerleri

x	e^{-x}	$p_5(x)$	$ e^{-x} - p_5(x) $	$r(x)$	$ e^{-x} - r(x) $
0.1	0.9048374180	0.9048374167	0.13×10^{-8}	0.9048374179	0.10×10^{-9}
0.2	0.8187307531	0.8187306667	8.64×10^{-8}	0.8187307456	7.55×10^{-9}
0.3	0.7408182207	0.7408172500	9.70×10^{-7}	0.7408181414	7.93×10^{-8}
0.4	0.6703200460	0.6703146667	5.38×10^{-6}	0.6703196347	4.11×10^{-7}
0.5	0.6065306597	0.6065104167	2.02×10^{-5}	0.6065292096	1.45×10^{-6}
0.6	0.5488116361	0.5487520000	5.96×10^{-5}	0.5488076312	4.00×10^{-6}
0.7	0.4965853038	0.4964369167	1.48×10^{-5}	0.4965759550	9.34×10^{-6}
0.8	0.4493289641	0.4490026667	3.26×10^{-4}	0.4493096647	1.93×10^{-5}
0.9	0.4065696597	0.4069167500	6.52×10^{-4}	0.4065333809	3.62×10^{-5}
1.0	0.3678794412	0.3666666667	1.21×10^{-3}	0.3678160920	6.33×10^{-5}



Şekil 2.4. $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu, $P_5(x)$ Taylor serisi ve $r(x)$ Padé yaklaşımı.

Şekilde görüldüğü gibi Padé yaklaşımı kuvvet serisinden daha iyi bir yaklaşım sergilemektedir. Padé serisinin iyi bir sonuç vermesi için $n \leq m \leq n + 2$ olmalıdır. Bu şart Padé serisinin kararlı halidir. Burada m ve n sırasıyla Padé serisindeki pay ve paydanın derecesidir. Padé yaklaşımı, seri çözümün fonksiyonlara daha hızlı yakınsamasını sağlamak için kullanılır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

$w(x, y)$ asıl (orijinal) fonksiyon olmak üzere,

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan $W(k, h)$ fonksiyonuna dönüşüm (transform) fonksiyonu denir. $W(k, h)$ T-fonksiyonu olarak adlandırılır. $W(k, h)$ 'ın diferansiyel ters dönüşümü ise,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır. (3.1) ve (3.2) denklemlerinden

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{0,0} x^k y^h \quad (3.3)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1: Eğer $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ ise,

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h) \quad (3.4)$$

olur (Ayaz 2004).

Teorem 3.1.2: Eğer $w(x, y) = cu(x, y)$ ise, $(c : sabit)$

$$W(k, h) = cU(k, h) \quad (3.5)$$

olur.

Teorem 3.1.3: Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ ise,

$$W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h) \quad (3.6)$$

olur.

Teorem 3.1.4: Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ ise,

$$W(k, h) = (h + 1)U(k, h + 1) \quad (3.7)$$

olur.

Teorem 3.1.5: Eğer $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ ise,

$$W(k, h) = (k + 1)(k + 2) \cdots (k + r)(h + 1)(h + 2) \cdots (h + s) \times U(k + r, h + s) \quad (3.8)$$

olur.

Teorem 3.1.6: Eğer $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s) \quad (3.9)$$

olur.

Teorem 3.1.7: Eğer $w(x, y) = x^m y^n$ ise,

$$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m \text{ ve } h=n, \\ 0, & k \neq m \text{ ve } h \neq n, \end{cases} \quad (3.10)$$

olur.

Teorem 3.1.8: Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1) U(r+1, h-s) V(k-r+1, s) \quad (3.11)$$

olur.

İspat: Diferansiyel dönüşümün tanımından

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(0,0)} = U(1,0) V(1,0),$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1! 0!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(0,0)},$$

$$= \frac{1}{1! 0!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right]_{(0,0)},$$

$$= 2U(2,0)V(1,0) + 2U(1,0)V(2,0) ,$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right]_{(0,0)} ,$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 4U(2,0)V(2,0) + 3U(1,0)V(3,0) ,$$

$$W(0,1) = U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1) ,$$

$$W(1,1) = 2U(2,1)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + 2U(1,1)V(2,0) + 2U(1,0)V(2,1) ,$$

$$W(2,2) = 3U(3,2)V(1,0) + 3U(3,1)V(1,1) + 3U(3,0)V(1,2) + 4U(2,2)V(2,0)$$

$$+ 4U(2,1)V(2,1) + 4U(2,0)V(2,2) + 3U(1,2)V(3,0) + 3U(1,1)V(3,1)$$

$$+ 3U(1,0)V(3,2)$$

olur. Eğer bunlar genelleştirilirse;

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s).$$

elde edilir.

Teorem 3.1.9: Eğer $w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ ise,

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1) \quad (3.12)$$

olur.

İspat: Diferansiyel dönüşümün tanımından,

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} = U(0,1)V(0,1) ,$$

$$\begin{aligned} W(1,0) &= \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} , \\ &= \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} \right]_{(0,0)} , \\ &= U(1,1)V(0,1) + U(0,1)V(1,1) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2,0) &= \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} , \\ &= U(0,1)V(2,1) + U(1,1)V(1,1) + U(2,1)V(0,1) , \end{aligned}$$

$$W(0,1) = 2U(0,2)V(0,1) + 2U(0,1)V(0,2) ,$$

$$W(1,1) = 2U(0,2)V(1,1) + 2U(0,1)V(1,2) + 2U(1,2)V(0,1) + 2U(1,1)V(0,2) ,$$

$$\begin{aligned} W(2,2) &= 3U(0,3)V(2,1) + U(0,2)V(2,2) + 3U(0,1)V(2,3) + 3U(1,3)V(1,1) \\ &\quad + 4U(1,2)V(1,2) + 3U(1,1)V(1,3) + 3U(2,3)V(0,1) + 4U(2,2)V(0,2) \\ &\quad + 3U(2,1)V(0,3) \end{aligned}$$

olur. Eğer bunlar genelleştirilirse;

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (h-s+1)(s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1).$$

elde edilir.

Teorem 3.1.10: Eğer $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1) \quad (3.13)$$

olur.

İspat: Diferansiyel dönüşümün tanımından,

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)} = U(1,0)V(0,1),$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)},$$

$$= \frac{1}{1!0!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{(0,0)},$$

$$= 2U(2,0)V(0,1) + U(1,0)V(1,1),$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(0,0)},$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + U(1,0)V(2,1) ,$$

$$W(0,1) = 2U(1,0)V(0,2) + U(1,1)V(0,1) ,$$

$$W(1,1) = 4U(2,0)V(0,2) + 2U(2,1)V(0,1) + 2U(1,0)V(1,2) + U(1,1)V(1,1) ,$$

$$W(2,2) = 9U(3,0)V(0,3) + 6U(3,1)V(0,2) + 3U(3,2)V(0,1) + 6U(2,0)V(1,3)$$

$$+4U(2,1)V(1,2) + 2U(2,2)V(1,1) + 3U(1,0)V(2,3) + 2U(1,1)V(2,2)$$

$$+U(1,2)V(2,1)$$

olur. Eğer bunlar genelleştirilirse;

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1).$$

Teorem 3.1.11: Eğer $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)w(x, y)$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Omega(k-r-t, p) \quad (3.14)$$

olur.

Teorem 3.1.12: Eğer $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \times V(t+1, s)\Omega(k-r-t+1, p) \quad (3.15)$$

olur.

Teorem 3.1.13: Eğer $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$ ise,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p) \times V(t, s)\Omega(k-r-t+2, p) \quad (3.16)$$

olur. Yukarıdaki teoremlerin belirttiği dönüşüm kuralları aşağıdaki tablo ile gösterilebilir.

Çizelge 3.1. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metodunun temel işlemleri

Asıl (Orijinal) fonksiyon	Dönüşüm (Transform) fonksiyonu
$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
$w(x, y) = cu(x, y)$	$W(k, h) = cU(k, h)$
$w(x, y) = \partial u(x, y) / \partial x$	$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$
$w(x, y) = \partial u(x, y) / \partial y$	$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$
$w(x, y) = \partial^{r+s} u(x, y) / \partial x^r \partial y^s$	$W(k, h) = (k+1) \dots (k+r)(h+1) \dots (h+s)U(k+r, h+s)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$
$w(x, y) = x^m y^n$	$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \begin{cases} 1, & k=m, h=n \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)w(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)\Omega(k-r-t, p)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)$

Şimdi iki boyutlu diferansiyel dönüşüm (transform) metoduyla, bir kısmi diferansiyel denklemin nasıl çözüldüğüne bir örnek verelim.

Örnek 3.1.14:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.17)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{c} x^2, \quad x > 0, \quad c > 0, \quad (c : \text{keyfi sabit}) \quad (3.18)$$

Yukarıda (3.18) başlangıç şartıyla verilen (3.17) kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. İki boyutlu diferansiyel dönüşümün temel işlemlerine göre (3.17) denkleminin iki boyutlu dönüşümü alınır,

$$(h+1)U(k, h+1) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s) \\ \times U(k-r+1, s) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(k-r+2) \times U(r, h-s)U(k-r+2, s). \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.18) başlangıç şartını, (3.19) denkleminde uygularsak,

$$U(i, 0) = 0, \quad i = 0, 1, 3, \dots, m, \quad (3.20)$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{c}. \quad (3.21)$$

elde edilir. (3.20) ve (3.21) denklemlerini (3.19) de yerine yazarsak, $m \rightarrow \infty$ durumu göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
U(2,1) &= \frac{6}{c^2}, \\
U(2,2) &= \frac{36}{c^3}, \\
U(2,3) &= \frac{216}{c^4}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir. Bütün $W(k, h)$ değerleri (3.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u(x, t) = x^2 \left(\frac{1}{c} + \frac{6}{c^2} t + \frac{36}{c^3} t^2 + \frac{216}{c^4} t^3 + \dots \right). \tag{3.23}$$

elde edilir. Verilen denklemin analitik çözümü;

$$u(x, t) = x^2 \left(\frac{1}{c - 6t} \right) \tag{3.24}$$

şeklindedir.

3.2 Çok Değişkenli Padé Yaklaşımı

Önceki bölümde tek değişkenli Padé yaklaşımlarının nasıl elde edildiklerinden ve literatürde de benzer yöntemlerin uygulandığından bahsettik. Son yıllarda bu teknikler, çok değişkenli Padé yaklaşımlarına da uyarlandı. Fakat tek değişkenli Padé yaklaşımlarındaki gibi teknikler arasındaki benzerliklerden bahsetmek mümkün değil. Bununla beraber; aşağıda çok değişkenli Padé yaklaşımlarının tanımı için, tek değişkenli Padé yaklaşımları için kullanılan özelliklerin geçerli olmaya devam ettiği görülecektir.

Biz burada iki değişkenli fonksiyonlar için Padé yaklaşımını kullanacağız. Çünkü ikiden fazla değişkene sahip fonksiyonlar için genelleştirme yapılabileceği açıktır.

$$f(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} c_{ij} x^i y^j$$

Taylor serisiyle temsil edilen iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ fonksiyonu için tek değişkenli Padé yaklaşımının;

$$p(x) = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & x \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & x^n \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}, \quad q(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \cdots & x^n \\ c_{m+1} & c_m & \cdots & c_{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix}$$

denklemleriyle verildiğini biliyoruz.

$p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerinde j 'inci satırı x^{j+m-1} ile çarptıktan sonra, $p(x)$ ve $q(x)$ ifadelerindeki j 'inci sütunu x^{j-1} 'e bölelim. ($j = 2, \dots, n+1$). Bu pay ve paydanın x^{mn} ile çarpımıyla sonuçlanır. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^m c_i x^i & \sum_{i=0}^{m-1} c_i x^i & \cdots & \sum_{i=0}^{m-n} c_i x^i \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_{m+1} x^{m+1} & c_m x^m & \cdots & c_{m+1-n} x^{m+1-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} x^{m+n} & c_{m+n-1} x^{m+n-1} & \cdots & c_m x^m \end{vmatrix}} \cdot (D = \det D_{m,n} \neq 0)$$

elde edilir.

Yukarıdaki determinant doğrudan iki değişkenli $f(x, y)$ fonksiyonu için yazılabilir.

Yani $\sum_{i=0}^k c_i x^i$ toplamının yerine $f(x, y)$ fonksiyonunun k 'inci dereceden Taylor açılımının kısmi toplamı yazıldığında, $c_k x^k$ ifadesi $f(x, y)$ fonksiyonuna ait k 'inci dereceden tüm terimleri içerir. Burada iki değişkenli $c_{ij} x^i y^j$ teriminin derecesi $i + j$ 'dir denilir.

Eğer ,

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} \sum_{i+j=0}^m c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=0}^{m-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=0}^{m-n} c_{ij} x^i y^j \\ \sum_{i+j=m+1}^m c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m}^{m-1} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n}^m c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1}^m c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m}^m c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sum_{i+j=m+1} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m} c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m+1-n} c_{ij} x^i y^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i+j=m+n} c_{ij} x^i y^j & \sum_{i+j=m+n-1}^m c_{ij} x^i y^j & \cdots & \sum_{i+j=m}^m c_{ij} x^i y^j \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

olarak tanımlarsak, $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ 'nin formlarının aşağıdaki şekilde olduğunu görmek kolaydır.

$$\begin{aligned}
p(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+m} a_{ij} x^i y^j \\
q(x, y) &= \sum_{i+j=mn}^{mn+n} b_{ij} x^i y^j
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Burada (3.27) ifadeleri için aşağıdaki (3.28) durumu söz konusudur.

$$\begin{cases}
\omega(p) \geq mn \\
\partial(p) \leq mn + m \\
\omega(q) \geq mn \\
\partial(q) \leq mn + n \\
\omega[(fq - p)(x, y)] \geq mn + m + n + 1
\end{cases} \tag{3.28}$$

Tek değişkenli Padé yaklaşımlarında (2.28) durumuyla kıyaslandığında p ve q 'nün dereceleri, p, q 'nün mertebesi (Padé yaklaşımının derecesi) ve $fq - p$ 'nin derecesinin mn kadar kaydığı görülmektedir. Fakat Padé yaklaşımının indirgenemez formu elde edildiğinde bunun kaybolduğu görülecektir (Cuyt and Wuytack 1987).

Teorem 3.2.1: Eğer $p(x, y)$ ve $q(x, y)$, (3.25) ve (3.26) ile verilirse;

$$(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j \text{ olur (Cuyt, 1983).}$$

İspat: Eğer ;

$$A_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} a_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, m)$$

$$B_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} b_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, \dots, n)$$

$$C_k(x, y) = \sum_{i+j=mn+k} c_{ij} x^i y^j \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak ifade edilirse $(fq - p)(x, y) = \sum_{i+j \geq mn+m+n+1} d_{ij} x^i y^j$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{cases} C_0(x, y)B_0(x, y) = A_0(x, y) \\ C_1(x, y)B_0(x, y) + C_0(x, y)B_1(x, y) = A_1(x, y) \\ \vdots \\ C_m(x, y)B_0(x, y) + \dots + C_{m-n}(x, y)B_n(x, y) = A_m(x, y) \end{cases} \quad (3.29a)$$

$$\begin{cases} C_{m+1}(x, y)B_0(x, y) + C_{m+1-n}(x, y)B_n(x, y) = 0 \\ \vdots \\ C_{m+n}(x, y)B_0(x, y) + \dots + C_m(x, y)B_n(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.29b)$$

Burada $k < 0$ için $C_k = 0$ dır. Bu notasyonlara göre;

$$p(x, y) = \sum_{k=0}^m A_k(x, y) \quad \text{ve} \quad q(x, y) = \sum_{k=0}^n B_k(x, y) \quad \text{olarak da ifade edilebilir.}$$

$$B_0(x, y) = \begin{vmatrix} C_m(x, y) & \dots & C_{m+1-n}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m+n-1}(x, y) & & C_m(x, y) \end{vmatrix}$$

olarak seçip, Cramer kuralını uygulayarak $B_k(x, y)$ için yukarıdaki homojen denklem sistemini çözdükten sonra, yukarıdaki denklem sistemlerinde $A_k(x, y)$ ' de yerine yazarsak; (3.25) ve (3.26) determinantlarını, yani; $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ ifadelerini elde ederiz. (3.25) ve (3.26)' da verilen $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ (3.28) için bir çözüm oluşturur. Bu da ispatımızı tamamlar.

Burada $p(x, y)$ ve $q(x, y)$ ifadelerine çok değişkenli Padé denklemleri denir. Ve

$$r_{m,n}(x, y) = \frac{p_0}{q_0}(x, y)$$

ifadesine de $f(x, y)$ fonksiyonunun (m, n) dereceli indirgenemez Padé yaklaşımı denir.

Teorem 3.2.2: Her m ve n sayısı için, $f(x, y)$ fonksiyonunun tek bir tane (m, n) dereceli çok değişkenli Padé yaklaşımı vardır (Cuyt and Wuytack 1987).

Yukarıdaki tanımdan sonra, çok değişkenli Padé yaklaşımı için aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 3.2.3:

$f(x, y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + \sin(xy)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyona ait seri açılımı

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 10^i xy^{i-1} + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(xy)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$= 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2 + \dots$ şeklinde olur.

$m = n = 1$ olarak alınır; yani m ve n 'nin dereceleri 1 olarak alınır; $p(x, y)$ ve $q(x, y)$,

(3.25) ve (3.26) Padé denklemleri kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1+10x & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x + 100x^2 - 101xy$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 101xy & 10x \end{vmatrix} = 10x - 101xy$$

Buna göre;

$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{10x + 100x^2 - 101xy}{10x - 101xy}$$

elde edilir. Bu ifadenin indirgenemez formu;

$$r_{1,1}(x, y) = \frac{1+10x-10.1y}{1-10.1y} \text{ şeklinde bulunur.}$$

Görüldüğü gibi indirgenemez formu elde ettiğimizde, $mn=1$ kadar artan derecede kaybolmaktadır. Fakat bu her zaman olmayabilir. Aşağıdaki örnekte bu açıkça görülmektedir.

Örnek 3.2.4: $m=1$ ve $n=2$ alınırsa; (3.28)'i sağlayan (3.25) ve (3.26) Padé denklemlerini kullanarak $p(x, y)$ ve $q(x, y)$;

$$p(x, y) = \begin{vmatrix} 1+10x & 1 & 0 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2$$

$$q(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101xy & 10x & 1 \\ 1000xy^2 & 101xy & 10x \end{vmatrix} = 100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2$$

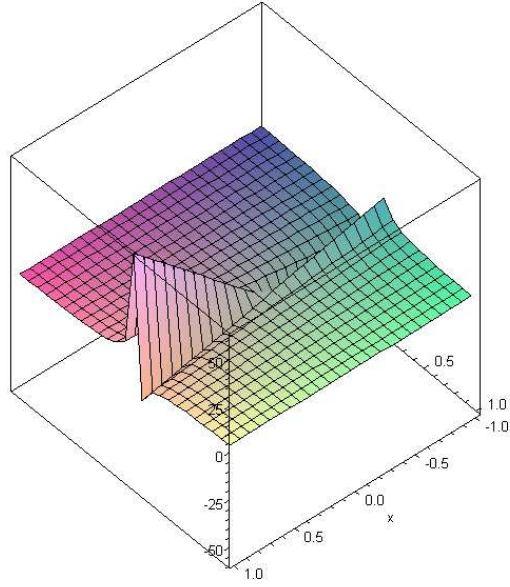
bulunur. Buradan,

$$\frac{p}{q}(x, y) = \frac{100x^2 - 101xy + 1000x^3 - 2020x^2y + 1000xy^2}{100x^2 - 101xy + 1010x^2y - 1000xy^2 + 201x^2y^2}$$

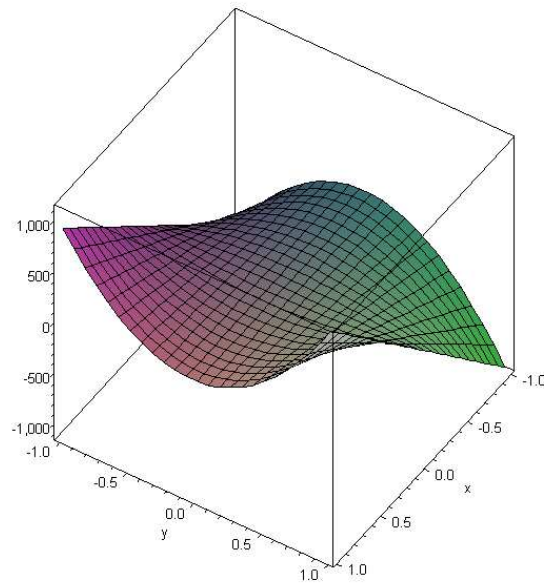
bulunur. $\frac{p}{q}(x, y)$ ifadesinin indirgenemez formu ise;

$$r_{1,2}(x, y) = \frac{x - 10.1y + 10x^2 - 20.2xy + 10y^2}{x - 1.01y + 10.1xy - 10y^2 + 2.01xy^2} \text{ bulunur.}$$

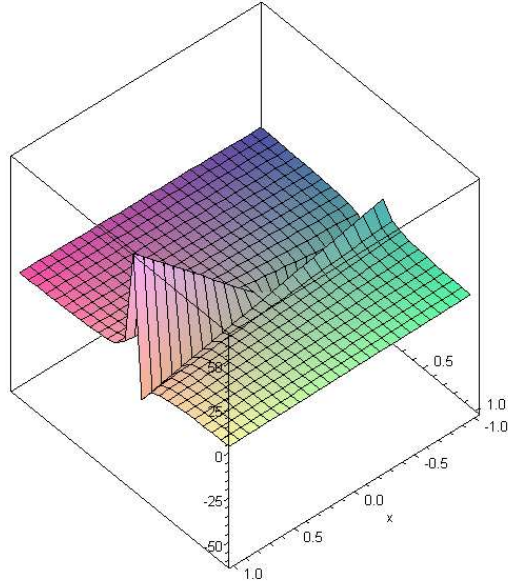
$f(x, y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + \sin(xy)$ fonksiyonuna ait Taylor açılımının ve $r_{1,2}(x, y)$ çok değişkenli Padé yaklaşımlarının grafiğini, $f(x, y)$ fonksiyonun grafiğiyle karşılaştırdığımızda Padé yaklaşımının Taylor serisinden çok daha iyi bir yaklaşım sergilediği görülmektedir ((Şekil 3.1.), (Şekil 3.2.), (Şekil 3.3.)).



Şekil 3.1. $f(x, y) = 1 + (x/0.1 - y) + \sin(xy)$ fonksiyonu



Şekil 3.2. $f(x, y)$ 'nin $P_3(x, y) = 1 + 10x + 101xy + 1000xy^2$ Taylor açılımı



Şekil 3.3. $r_{1,2}(x, y) = (1 + 10x - 10.1y) / (1 - 10.1y)$ Padé yaklaşımı.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Önceki bölümlerde iki boyutlu diferansiyel dönüşümü kullanarak diferansiyel denklemlerin seri çözümlerinin elde edilebileceğini ve elde edilen bu kuvvet serilerinin çok değişkenli Padé yaklaşımı ile rasyonel serilere dönüştürülebildiğini gördük. Bu bölümde ise kullandığımız metodu iki farklı kısmi diferansiyel-cebirselsel denklem sistemine uyguladık. Elde ettiğimiz nümerik çözümle tam çözümü tablo ve şekil üzerinde karşılaştırdık.

Örnek 4.1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u = f \quad (4.1)$$

$$x \in [-0.5, 0.5], \quad t \in [0, 1].$$

$$U_1(0, t) = 0, \quad U_{1x}(0, t) = -\sin(t)$$

$$U_2(0, t) = 0, \quad U_{2x}(0, t) = -\cos(t)$$

Kısmi diferansiyel-cebirselsel denklemini göz önüne alalım. Burada

$$f_1 = -x(x-1)(2\sin(t) + \cos(t)) - (e^t + t^5)(x^2 - x + 2)$$

$$f_2 = x(x-1)(e^t + 5t^4 - \cos(t)) - 2(e^t + t^5 + \cos(t)) \quad (4.2)$$

$$f_3 = -x(x-1)(e^t + t^5)$$

şeklindedir. Analitik çözüm ise

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} x(x-1)\sin(t) \\ x(x-1)\cos(t) \\ x(x-1)(e^t + t^5) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

dir. Sonuç olarak (4.1) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1xx} \\ u_{2xx} \\ u_{3xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

$$u_{2t} - u_{3xx} - u_1 - u_2 - u_3 = f_1$$

$$u_{3t} - u_{2xx} - u_{3xx} - u_2 = f_2 \quad (4.5)$$

$$-u_3 = f_3$$

şeklinde yazılabilir. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel tanımını kullanarak (4.5) denkleminin diferansiyel dönüşümünü alırsak;

$$(k+1)U_2(h, k+1) - (h+1)(h+2)U_3(h+2, k) - U_1(h, k) - U_2(h, k) - U_3(h, k) = F_1(h, k)$$

$$(k+1)U_3(h, k+1) - (h+1)(h+2)U_2(h+2, k) - (h+1)(h+2)U_3(h+2, k) - U_2(h, k) = F_2(h, k)$$

$$-U_3(h, k) = F_3(h, k) \quad (4.6)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada f_1 , f_2 ve f_3 fonksiyonlarının $x = 0$, $t = 0$ civarındaki Taylor serileri,

$$\begin{aligned}
f_1(x, t) &= -2 + 2x - 2t - 2x^2 + 3xt - t^2 - 3x^2t - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{12}xt^4 \\
&\quad + \frac{1}{6}x^2t^3 - \frac{121}{60}t^5 - \frac{1}{12}x^2t^4 - \frac{41}{40}xt^5 - \frac{1}{360}t^6 - \frac{41}{40}x^2t^5 - \frac{1}{2520}t^7 \\
f_2(x, t) &= -4 - 2t - xt - \frac{1}{3}t^3 - xt^2 + x^2t - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{6}xt^3 + x^2t^2 - 5xt^4 + \frac{1}{6}x^2t^3 \\
&\quad - \frac{121}{60}t^5 + 5x^2t^4 - \frac{1}{120}xt^5 - \frac{1}{2520}t^7 - \frac{1}{360}xt^6 + \frac{1}{120}x^2t^5 \\
f_3(x, t) &= x + xt - x^2 + \frac{1}{2}xt^2 - x^2t + \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{24}xt^4 - \frac{1}{6}x^2t^3 + \frac{121}{120}xt^5 \\
&\quad - \frac{1}{24}x^2t^4 + \frac{1}{720}xt^6 - \frac{121}{120}x^2t^5
\end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklindedir. Burada (4.6) denklemindeki $F_1(h, k)$, $F_2(h, k)$ ve $F_3(h, k)$ değerleri (4.7) de verilen serilerin katsayılarıdır.

$$-U_3(h, k) = F_3(h, k)$$

olduğundan (4.6) daki üçüncü denklem ile $F_3(h, k)$ serisinin katsayıları eşitlenirse $U_3(h, k)$ değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U_3(0, k) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$U_3(1, 0) = -1, \quad U_3(1, 1) = -1, \quad U_3(1, 2) = -\frac{1}{2}, \quad U_3(1, 3) = -\frac{1}{6}$$

$$U_3(1, 4) = -\frac{1}{24}, \quad U_3(1, 5) = -\frac{121}{120}, \quad U_3(1, 6) = -\frac{1}{720}, \quad U_3(1, 7) = -\frac{1}{5040}$$

$$\begin{aligned}
U_3(2,0) = 1, \quad U_3(2,1) = 1, \quad U_3(2,2) = \frac{1}{2}, \quad U_3(2,3) = \frac{1}{6} \\
U_3(2,4) = \frac{1}{24}, \quad U_3(2,5) = \frac{121}{120}, \quad U_3(2,6) = \frac{1}{720}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Şimdi $U_1(h, k)$, $U_2(h, k)$ değerlerini bulmaya çalışalım. Başlangıç şartlarını kullanarak

$$U_2(0, t) = 0, \quad U_2(1, t) = -\cos t$$

olduğundan $U_2(0, j)$, $U_2(1, j)$ değerleri $-\cos t$ fonksiyonunun Taylor açılımı kullanılarak

$$U_2(0, k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$U_2(1, 0) = -1, \quad U_2(1, 1) = 0, \quad U_2(1, 2) = \frac{1}{2}, \quad U_2(1, 3) = 0, \quad U_2(1, 4) = -\frac{1}{24}$$

$$U_2(1, 5) = 0, \quad U_2(1, 6) = \frac{1}{720}, \quad U_2(1, 7) = 0, \quad U_2(1, 8) = -\frac{1}{40320} \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$U_1(0, t) = 0, \quad U_1(1, t) = -\sin t$$

olduğundan $U_1(0, j)$, $U_1(1, j)$ değerleri $-\sin t$ fonksiyonunun Taylor açılımı kullanılarak

$$U_1(0, h) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$U_1(1, 0) = 0, \quad U_1(1, 1) = -1, \quad U_1(1, 2) = 0, \quad U_1(1, 3) = \frac{1}{6}$$

$$U_1(1,4) = 0, \quad U_1(1,5) = -\frac{1}{120}, \quad U_1(1,6) = 0, \quad U_1(1,7) = \frac{1}{5040}$$

şeklinde elde edilir. (4,6) denklemlerinin ilk iki tanesi

$$k = 0, h = 0, \quad k = 1, h = 0, \quad k = 2, h = 0 \dots$$

şeklinde k, h değerleri sırasıyla yazılarak düzenlenirse aşağıdaki

$$h = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ için,}$$

$$2U_2(2,0) + U_2(0,0) = 2, \quad U_2(0,1) - U_1(0,0) - U_2(0,0) = 0$$

$$2U_2(2,1) + U_2(0,1) = 0, \quad 2U_2(0,2) - U_1(0,1) - U_2(0,1) = 0$$

$$2U_2(2,2) + U_2(0,2) = -1, \quad 3U_2(0,3) - U_1(0,2) - U_2(0,2) = 0$$

$$2U_2(2,3) + U_2(0,3) = 0, \quad 4U_2(0,4) - U_1(0,3) - U_2(0,3) = 0$$

$$2U_2(2,4) + U_2(0,4) = \frac{1}{12}, \quad 5U_2(0,5) - U_1(0,4) - U_2(0,4) = 0 \quad (4.10)$$

$$2U_2(2,5) + U_2(0,5) = 0, \quad 6U_2(0,6) - U_1(0,5) - U_2(0,5) = 0$$

$$2U_2(2,6) + U_2(0,6) = -\frac{1}{360}, \quad 7U_2(0,7) - U_1(0,6) - U_2(0,6) = 0$$

denklemleri elde edilir.

$$h = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ için,}$$

$$6U_2(3,0) + U_2(1,0) = -1, \quad U_2(1,1) - U_1(1,0) - U_2(1,0) = 1$$

$$6U_2(3,1) + U_2(1,1) = 0, \quad 2U_2(1,2) - U_1(1,1) - U_2(1,1) = 2$$

$$6U_2(3,2) + U_2(1,2) = \frac{1}{2}, \quad 3U_2(1,3) - U_1(1,2) - U_2(1,2) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
6U_2(3,3) + U_2(1,3) &= 0, & 4U_2(1,4) - U_1(1,3) - U_2(1,3) &= -\frac{1}{3} \\
6U_2(3,4) + U_2(1,4) &= -\frac{1}{24}, & 5U_2(1,5) - U_1(1,4) - U_2(1,4) &= \frac{1}{24} \\
6U_2(3,5) + U_2(1,5) &= 0, & 6U_2(1,6) - U_1(1,5) - U_2(1,5) &= \frac{1}{60} \\
6U_2(3,6) + U_2(1,6) &= \frac{1}{720}, & 7U_2(1,7) - U_1(1,6) - U_2(1,6) &= -\frac{1}{720} \\
6U_2(3,7) + U_2(1,7) &= 0, & 8U_2(1,8) - U_1(1,7) - U_2(1,7) &= -\frac{1}{2520}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

denklemleri elde edilir.

$h = 2, \quad k = 0,1,2,3,4,5,6$ için,

$$\begin{aligned}
12U_2(4,0) + U_2(2,0) &= 1, & U_2(2,1) - U_1(2,0) - U_2(2,0) &= -1 \\
12U_2(4,1) + U_2(2,1) &= 0, & 2U_2(2,2) - U_1(2,1) - U_2(2,1) &= -2 \\
12U_2(4,2) + U_2(2,2) &= -\frac{1}{2}, & 3U_2(2,3) - U_1(2,2) - U_2(2,2) &= \frac{1}{2} \\
12U_2(4,3) + U_2(2,3) &= 0, & 4U_2(2,4) - U_1(2,3) - U_2(2,3) &= \frac{1}{3} \\
12U_2(4,4) + U_2(2,4) &= -\frac{1}{120}, & 5U_2(2,5) - U_1(2,4) - U_2(2,4) &= -\frac{1}{24} \\
12U_2(4,5) + U_2(2,5) &= 0, & 6U_2(2,6) - U_1(2,5) - U_2(2,5) &= -\frac{1}{60}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemleri çözmek için öncelikle başlangıç şartlarından elde ettiğimiz $U_2(0, k) = 0$ değerlerini (4.10) sisteminin sol tarafındaki eşitliklerde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
U_2(2,0) &= 1, & U_2(1,1) &= 0, & U_2(2,2) &= -\frac{1}{2}, & U_2(2,3) &= 0, \\
U_2(2,4) &= \frac{1}{24}, & U_2(2,5) &= 0, & U_2(2,6) &= -\frac{1}{720}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

katsayılarını elde ederiz. Benzer şekilde yine başlangıç şartlarından elde ettiğimiz (4.9) deki $U_2(1,k)$ değerlerini (4.11) ve (4.12) denklem sistemlerinin sol tarafındaki eşitliklerde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
U_2(3,k) &= 0 & k &= 0,1,2 \dots \\
U_2(4,k) &= 0 & k &= 0,1,2 \dots
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olduğunu görürüz. Daha sonra $U_1(h,k)$ değerlerini elde etmek için yukarıda elde ettiğimiz $U_2(0,k)$ değerlerini (4.10) denklem sisteminin sağ tarafındaki eşitliklerde yerine yazarsak

$$U_1(0,k) = 0, \quad k = 0,1,2 \dots \tag{4.15}$$

katsayıları bulunur. Yine benzer şekilde (4.9) ve (4.13) deki $U_2(1,k)$, $U_2(2,k)$ değerlerini (4.11) ve (4.12) denklem sistemlerinin sağ tarafındaki eşitliklerde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
U_1(1,0) &= 0, & U_1(1,1) &= -1, & U_1(1,2) &= 0, & U_1(1,3) &= -\frac{1}{6} \\
U_1(1,4) &= 0, & U_1(1,5) &= -\frac{1}{120}, & U_1(1,6) &= 0, & U_1(1,7) &= \frac{1}{5040} \\
U_1(2,0) &= 0, & U_1(2,1) &= 1, & U_1(2,2) &= 0, \\
U_1(2,3) &= -\frac{1}{6}, & U_1(2,4) &= 0, & U_1(2,5) &= \frac{1}{120}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

katsayıları da bulunmuş olur. Elde ettiğimiz bütün $U(h, k)$ değerlerini (3.2) denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ serilerini (seri çözümlerini) elde ederiz.

$$u_1(x, t) = -xt + x^2t + \frac{1}{6}xt^3 - \frac{1}{6}x^2t^3 - \frac{1}{120}xt^5 + \frac{1}{120}x^2t^5 + \frac{1}{5040}xt^7$$

$$u_2(x, t) = -x + x^2 + \frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{24}xt^4 + \frac{1}{24}x^2t^4 + \frac{1}{720}xt^6 - \frac{1}{720}x^2t^6$$

$$u_3(x, t) = -x - xt + x^2 - \frac{1}{2}xt^2 + x^2t - \frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{24}xt^4 + \frac{1}{6}x^2t^3 - \frac{121}{120}xt^5 + \frac{1}{24}x^2t^4$$

$$- \frac{1}{720}xt^6 + \frac{121}{120}x^2t^5 - \frac{1}{5040}xt^7 + \frac{1}{720}x^2t^6 \quad (4.17)$$

Şimdi $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ ve $u_3(x, t)$ kuvvet serilerini çok değişkenli Padé serilerine (yaklaşımına) dönüştürmek için (3.25), (3.26) determinant ifadelerini kullanacağız. Buna göre istenen Padé serileri $r_1(x, t)$, $r_2(x, t)$ ve $r_3(x, t)$ şeklinde aşağıdaki gibi

$m = 3$, $n = 2$ için

$$p_1(x, t) = \begin{vmatrix} -xt + x^2t & -xt & 0 \\ \frac{1}{6}xt^3 & x^2t & -xt \\ \frac{1}{6}x^2t^3 & \frac{1}{6}xt^3 & x^2t \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{6}x^3t^5 + \frac{1}{6}x^4t^5 - x^5t^7 + x^6t^7\right)$$

$$= (-0.1666666667x^3t^5 + 0.1666666667x^4t^5 - x^5t^7 + x^6t^7)$$

olarak

$$q_1(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{6}xt^3 & x^2t & -xt \\ \frac{1}{6}x^2t^3 & \frac{1}{6}xt^3 & x^2t \end{vmatrix} = x^4t^2 + \frac{1}{6}x^2t^4 + \frac{1}{36}x^2t^6 + \frac{1}{6}x^4t^4$$

$$= x^4t^2 + 0.1666666667 x^2t^4 + 0.02777777777 8x^2t^6 + 0.1666666667 x^4t^4$$

şeklinde elde edilir. Buna göre

$$r_1(x,t) = (-0.1666666667 x^3t^5 + 0.1666666667 x^4t^5 - x^5t^7 + x^6t^7) /$$

$$(x^4t^2 + 0.1666666667 x^2t^4 + 0.02777777777 8x^2t^6 + 0.1666666667 x^4t^4)$$

rasyonel serisi elde edilir. $U_2(x,t)$ için benzer işlemleri yaparak

$$p_2(x,t) = \begin{vmatrix} -x + x^2 + \frac{1}{2}xt^2 & -x + x^2 & -x \\ -\frac{1}{2}x^2t^2 & \frac{1}{2}xt^2 & x^2 \\ -\frac{1}{24}xt^4 & -\frac{1}{2}x^2t^2 & \frac{1}{2}xt^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}x^3t^4 - \frac{1}{2}x^5t^2 + \frac{1}{24}x^4t^4 + \frac{1}{2}x^6t^2 + \frac{5}{48}x^3t^6 + \frac{5}{24}x^5t^4$$

$$= -0.2500000000 x^3t^4 - 0.5000000000 x^5t^2 + 0.0416666666 7x^4t^4 + 0.5000000000 x^6t^2$$

$$+ 0.1041666667 x^3t^6 + 0.2083333333 x^5t^4$$

$$q_2(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}x^2t^2 & \frac{1}{2}xt^2 & x^2 \\ -\frac{1}{24}xt^4 & -\frac{1}{2}x^2t^2 & \frac{1}{2}xt^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}x^4t^4 + \frac{1}{2}x^4t^2 + \frac{1}{4}x^4t^4 + \frac{5}{24}x^3t^4 + \frac{1}{48}x^2t^6$$

$$= 0.2500000000 x^4t^4 + 0.5000000000 x^4t^2 + 0.2500000000 x^4t^4 + 0.2083333333 3x^3t^4$$

$$+ 0.0208333333 x^2t^6$$

şeklinde elde edilir. Buna göre

$$r_2(x,t) = \left(-\frac{1}{4}x^3t^4 - \frac{1}{2}x^5t^2 + \frac{1}{24}x^4t^4 + \frac{1}{2}x^6t^2 + \frac{5}{48}x^3t^6 + \frac{5}{24}x^5t^4 \right) /$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4t^4 + \frac{1}{2}x^4t^2 + \frac{1}{4}x^4t^4 + \frac{5}{24}x^3t^4 + \frac{1}{48}x^2t^6 \right)$$

$$= (-0.2500000000x^3t^4 - 0.5000000000x^5t^2 + 0.04166666667x^4t^4 +$$

$$0.5000000000x^6t^2 + 0.1041666667x^3t^6 + 0.2083333333x^5t^4) /$$

$$(-0.2500000000x^3t^4 - 0.5000000000x^5t^2 + 0.04166666667x^4t^4 + 0.5000000000x^6t^2$$

$$+ 0.1041666667 x^3t^6 + 0.2083333333 x^5t^4)$$

rasyonel serisi elde edilir. $U_3(x,t)$ için benzer işlemleri yaparak

$$\begin{aligned}
p_3(x, t) &= \begin{vmatrix} -x - xt + x^2 - \frac{1}{2}xt^2 + x^2t & -x - xt + x^2 & -x \\ -\frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 & -\frac{1}{2}xt^2 + x^2t & -xt + x^2 \\ -\frac{1}{24}xt^4 + \frac{1}{6}x^2t^3 & -\frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 & -\frac{1}{2}xt^2 + x^2t \end{vmatrix} \\
&= \frac{5}{24}x^4t^4 - \frac{1}{12}x^3t^4 - \frac{1}{2}x^5t^2 + \frac{1}{2}x^6t^2 - \frac{1}{144}x^3t^6 - \frac{1}{8}x^5t^4 + \frac{1}{3}x^4t^3 - \frac{1}{24}x^3t^5 - \frac{1}{2}x^5t^3 + \frac{1}{24}x^4t^5 + \\
&\quad \frac{1}{6}x^6t^3 \\
&= 0.2083333333 x^4t^4 - 0.0833333333 x^3t^4 - 0.5000000000 x^5t^2 + 0.5000000000 x^6t^2 \\
&\quad - 0.0694444444 x^3t^6 - 0.1250000000 x^5t^4 + 0.3333333333 x^4t^3 - 0.0416666667 x^3t^5 - \\
&\quad 0.5000000000 x^5t^3 + 0.0416666667 x^4t^5 + 0.1666666667 x^6t^3 \\
q_3(x, t) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 & -\frac{1}{2}xt^2 + x^2t & -xt + x^2 \\ -\frac{1}{24}xt^4 + \frac{1}{6}x^2t^3 & -\frac{1}{6}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2 & -\frac{1}{2}xt^2 + x^2t \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{12}x^2t^4 - \frac{1}{3}x^3t^3 + \frac{1}{2}x^4t^2 + \frac{1}{144}x^2t^6 - \frac{1}{24}x^3t^5 - \frac{1}{24}x^2t^5 + \frac{5}{24}x^3t^4 + \frac{1}{12}x^4t^4 - \frac{1}{3}x^4t^3 \\
&= 0.0833333333 x^2t^4 - 0.3333333333 x^3t^3 + 0.5000000000 x^4t^2 + 0.0694444444 x^2t^6 - \\
&\quad 0.0416666667 x^3t^5 - 0.0416666667 x^2t^5 + 0.2083333333 x^3t^4 + 0.0833333333 x^4t^4 - \\
&\quad 0.3333333333 x^4t^3
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre

$$r_3(x,t) = \left(\frac{5}{24} x^4 t^4 - \frac{1}{12} x^3 t^4 - \frac{1}{2} x^5 t^2 + \frac{1}{2} x^6 t^2 - \frac{1}{144} x^3 t^6 - \frac{1}{8} x^5 t^4 + \frac{1}{3} x^4 t^3 - \frac{1}{24} x^3 t^5 - \frac{1}{2} x^5 t^3 + \right. \\ \left. \frac{1}{24} x^4 t^5 + \frac{1}{6} x^6 t^3 \right) / \left(\frac{1}{12} x^2 t^4 - \frac{1}{3} x^3 t^3 + \frac{1}{2} x^4 t^2 + \frac{1}{144} x^2 t^6 - \frac{1}{24} x^3 t^5 - \frac{1}{24} x^2 t^5 + \frac{5}{24} x^3 t^4 + \right. \\ \left. \frac{1}{12} x^4 t^4 - \frac{1}{3} x^4 t^3 \right)$$

$$= (0.2083333333 x^4 t^4 - 0.0833333333 x^3 t^4 - 0.5000000000 x^5 t^2 + 0.5000000000 x^6 t^2 - \\ - 0.0694444444 x^3 t^6 - 0.1250000000 x^5 t^4 + 0.3333333333 x^4 t^3 - 0.0416666667 x^3 t^5 - \\ 0.5000000000 x^5 t^3 + 0.0416666667 x^4 t^5 + 0.1666666667 x^6 t^3) / (0.0833333333 x^2 t^4 - \\ 0.3333333333 x^3 t^3 + 0.5000000000 x^4 t^2 + 0.0694444444 x^2 t^6 - 0.0416666667 x^3 t^5 - \\ 0.0416666667 x^2 t^5 + 0.2083333333 x^3 t^4 + 0.0833333333 x^4 t^4 - 0.3333333333 x^4 t^3)$$

rasyonel serisi elde edilir. Elde ettiğimiz değerleri Çizelge 4.1.' de incelersek analitik çözümle nümerik çözümün uyumlu olduğunu görürüz.

Çizelge 4.1. Tam çözümle $u_1(x, t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

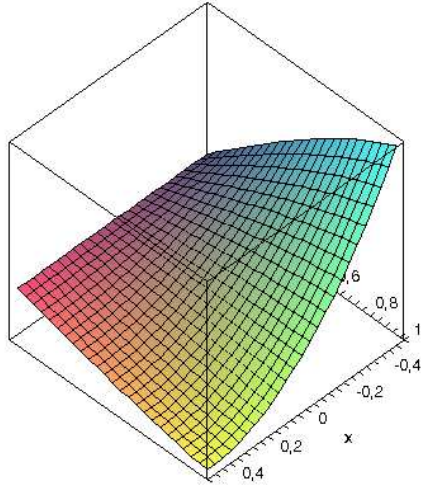
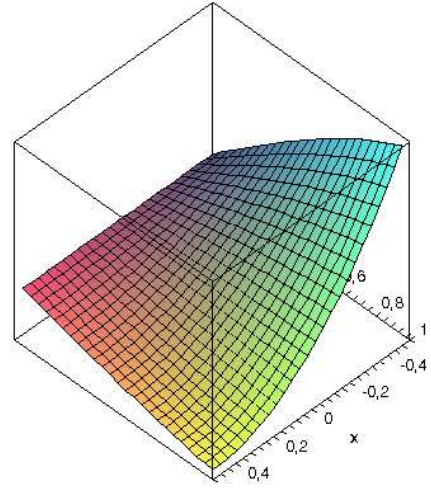
x	$u_1(x, t)$	$r_{3.2}(x, t)$	$ u_1(x, t) - r_{3.2}(x, t) $
-0.5	0.007499875000	0.007499874999	1.10^{-12}
-0.4	0.005599906667	0.005599906668	1.10^{-12}
-0.3	0.003899935000	0.003899935000	0
-0.2	0.002399960000	0.002399960000	0
-0.1	0.001099981667	0.001099981668	1.10^{-12}
0.1	-0.0008999850001	-0.0008999850006	5.10^{-13}
0.2	-0.001599973333	-0.001599973333	0
0.3	-0.002099965000	-0.002099965000	0
0.4	-0.002399960000	-0.002399960000	0
0.5	-0.002499958334	-0.002499958334	1.10^{-12}

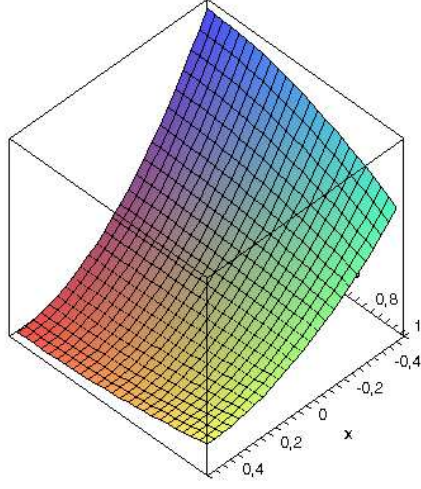
Çizelge 4.2. Tam çözümle $u_2(x, t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

x	$u_2(x, t)$	$r_{3.2}(x, t)$	$ u_2(x, t) - r_{3.2}(x, t) $
-0.5	0.07499625003	0.07499625011	8.10^{-10}
-0.4	0.5599720002	0.5599720006	4.10^{-10}
-0.3	0.3899805000	0.3899805002	2.10^{-10}
-0.2	0.2399880001	0.2399880002	1.10^{-10}
-0.1	0.1099945000	0.1099945001	1.10^{-10}
0.1	-0.08999550004	-0.08999550002	2.10^{-11}
0.2	-0.1599920001	-0.1599929999	2.10^{-10}
0.3	-0.2099895001	-0.2099895999	2.10^{-10}
0.4	-0.2399880001	-0.2399889999	2.10^{-10}
0.5	-0.2499875001	-0.2499875001	6.10^{-10}

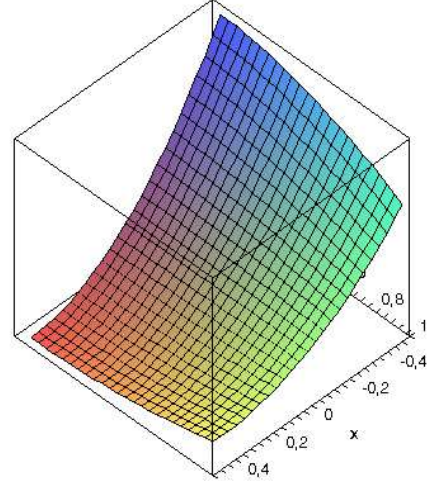
Çizelge 4.3. Tam çözümle $u_3(x, t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

x	$u_3(x, t)$	$r_{3,2}(x, t)$	$ u_3(x, t) - r_{3,2}(x, t) $
-0.5	0.7575376252	0.7575376251	$1 \cdot 10^{-10}$
-0.4	0.5656280935	0.5656280938	$3 \cdot 10^{-10}$
-0.3	0.3939195651	0.3939195651	0
-0.2	0.242120401	0.242120401	0
-0.1	0.1111055184	0.1111055184	0
0.1	-0.09090451503	-0.09090451504	$1 \cdot 10^{-10}$
0.2	-0.1616080267	-0.1616080267	0
0.3	-0.2121105351	-0.2121105350	$1 \cdot 10^{-10}$
0.4	-0.2424120401	-0.2424120401	0
0.5	-0.2525125418	-0.2525125418	$3 \cdot 10^{-10}$

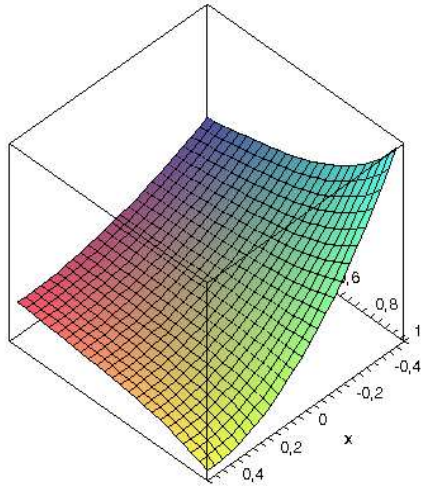
**Şekil 4.1.** $u_1(x, t)$ nin değerleri.**Şekil 4.2.** $u_1(x, t)$ 'nin $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri



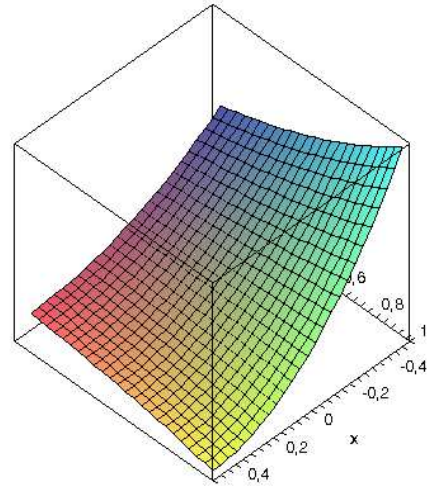
Şekil 4.3. $u_2(x, t)$ nin değerleri.



Şekil 4.4. $u_2(x, t)$ 'nin $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri.



Şekil 4.5. $u_3(x, t)$ nin değerleri.



Şekil 4.6. $u_3(x, t)$ 'nin $r_{3,2}(x, t)$ Padé yaklaşımının değerleri.

Örnek 4.2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} u_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} u_{xx} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} u = f \quad (4.18)$$

$$x \in [-0.5, 0.5], \quad t \in [0, 1].$$

$$U_1(0, t) = 0, \quad U_{1x}(0, t) = 0$$

$$U_2(0, t) = 0, \quad U_{2x}(0, t) = 0$$

$$U_3(0, t) = 0, \quad U_{3x}(0, t) = 0$$

Kısmi diferansiyel-cebirselsel denklemini göz önüne alalım. Burada

$$f_1 = -x^2 e^{-\frac{1}{2}t} - 2e^{-t}$$

$$f_2 = -x^2 e^{-t} - \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{1}{2}t} \quad (4.19)$$

$$f_3 = -x^2 e^{-t} + \frac{1}{2} x^2 e^{-\frac{1}{2}t} + (x^2 - 2) \sin t$$

şeklindedir. Analitik çözüm ise

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} x^2 e^t \\ x^2 e^{-\frac{1}{2}t} \\ x^2 \sin t \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

dir. Sonuç olarak (4.18) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1xx} \\ u_{2xx} \\ u_{3xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$2u_{2t} - u_{1xx} = f_1$$

$$u_{1t} - u_{2t} - u_2 = f_2 \quad (4.22)$$

$$u_{1t} - u_{2t} - u_{3xx} + u_3 = f_3$$

şeklinde yazılabilir. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunun temel tanımını kullanarak (4.22) denkleminin dönüşümünü alırsak;

$$\begin{aligned} 2(k+1)U_2(k+1, h) - (h+1)(h+2)U_1(k, h+2) &= F_1(k, h) \\ (k+1)U_1(k+1, h) - (k+1)U_2(k+1, h) - U_2(k, h) &= F_2(k, h) \\ (k+1)U_1(k+1, h) - (k+1)U_2(k+1, h) - (h+1)(h+2)U_3(k, h+2) + U_3(k, h) &= F_3(k, h) \end{aligned} \quad (4.23)$$

eşitliklerini elde ederiz. Örnek 4.1'deki metot bu problem için uygulanırsa benzer yolla $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ serilerini aşağıdaki şekilde

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= x^2 - x^2t + \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{6}x^2t^3 + \frac{1}{24}x^2t^4 - \frac{1}{120}x^2t^5 + \frac{1}{720}x^2t^6 \\ u_2(x, t) &= x^2 - \frac{1}{2}x^2t + \frac{1}{8}x^2t^2 - \frac{1}{48}x^2t^3 + \frac{1}{384}x^2t^4 - \frac{1}{3840}x^2t^5 - \frac{1}{46080}x^2t^6 \\ u_3(x, t) &= x^2t - \frac{1}{6}x^2t^3 + \frac{1}{120}x^2t^5 \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ ve $u_3(x, t)$ kuvvet serilerini çok değişkenli Padé serilerine (yaklaşımına) dönüştürmek için (3.25), (3.26) determinant ifadelerini kullanacağız. Buna göre istenen Padé serileri $r_1(x, t)$, $r_2(x, t)$ ve $r_3(x, t)$ şeklinde aşağıdaki gibi

$$m = 3, n = 2 ; \text{ için}$$

$$p_1(x,t) = \begin{vmatrix} x^2 - x^2 t & x^2 & 0 \\ \frac{1}{2} x^2 t^2 & -x^2 t & x^2 \\ -\frac{1}{6} x^2 t^3 & \frac{1}{2} x^2 t^2 & -x^2 t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^6 t^2 - \frac{1}{6} x^6 t^3$$

$$= 0.50000000000 \ x^6 t^2 + 0.16666666667 \ x^6 t^3$$

$$q_1(x,t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} x^2 t^2 & -x^2 t & x^2 \\ -\frac{1}{6} x^2 t^3 & \frac{1}{2} x^2 t^2 & -x^2 t \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x^4 t^2 + \frac{1}{12} x^4 t^4 + \frac{1}{3} x^4 t^3$$

$$= 0.50000000000 \ x^4 t^2 + 0.08333333333 \ 3x^4 t^4 + 0.33333333333 \ x^4 t^3$$

$$r_1(x,t) = (\frac{1}{2} x^6 t^2 - \frac{1}{6} x^6 t^3) / (\frac{1}{2} x^4 t^2 + \frac{1}{12} x^4 t^4 + \frac{1}{3} x^4 t^3)$$

$$= (0.50000000000 \ x^6 t^2 + 0.16666666667 \ x^6 t^3) /$$

$$(0.50000000000 \ x^4 t^2 + 0.08333333333 \ 3x^4 t^4 + 0.33333333333 \ x^4 t^3)$$

$$p_2(x,t) = \begin{vmatrix} x^2 - \frac{1}{2} x^2 t & x^2 & 0 \\ \frac{1}{8} x^2 t^2 & -\frac{1}{2} x^2 t & x^2 \\ -\frac{1}{48} x^2 t^3 & \frac{1}{8} x^2 t^2 & -\frac{1}{2} x^2 t \end{vmatrix} = \frac{1}{8} x^6 t^2 - \frac{1}{48} x^6 t^3$$

$$= 0.1250000000 \ x^6 t^2 - 0.0208000000 \ 0 x^6 t^3$$

$$q_2(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{8} x^2 t^2 & -\frac{1}{2} x^2 t & x^2 \\ -\frac{1}{48} x^2 t^3 & \frac{1}{8} x^2 t^2 & -\frac{1}{2} x^2 t \end{vmatrix} = \frac{1}{8} x^4 t^2 + \frac{1}{192} x^4 t^4 + \frac{1}{24} x^4 t^3$$

$$= 0.1255000000 \ 0 x^4 t^2 + 0.0052083333 \ 33 x^4 t^4 + 0.0416666666 \ 7 x^4 t^3$$

$$r_2(x, t) = \left(\frac{1}{8} x^6 t^2 - \frac{1}{48} x^6 t^3 \right) / \left(\frac{1}{8} x^4 t^2 + \frac{1}{192} x^4 t^4 + \frac{1}{24} x^4 t^3 \right)$$

$$= (0.1250000000 \ x^6 t^2 - 0.0208000000 \ 0 x^6 t^3) /$$

$$(0.1255000000 \ 0 x^4 t^2 + 0.0052083333 \ 33 x^4 t^4 + 0.0416666666 \ 7 x^4 t^3)$$

$$p_3(x, t) = \begin{vmatrix} x^2 t & 0 & 0 \\ 0 & x^2 t & 0 \\ -\frac{1}{6} x^2 t^3 & 0 & x^2 t \end{vmatrix} = x^6 t^3$$

$$q_3(x, t) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x^2 t & 0 \\ -\frac{1}{6} x^2 t^3 & 0 & x^2 t \end{vmatrix} = \left(x^4 t^2 + \frac{1}{6} x^4 t^4 \right)$$

$$r_3(x, t) = \left(x^6 t^3 \right) / \left(x^4 t^2 + \frac{1}{6} x^4 t^4 \right)$$

$$= \left(x^6 t^3 \right) / \left(x^4 t^2 + 0.1666666667 \ x^4 t^4 \right)$$

elde edilir. Elde ettiğimiz değerleri Çizelge 4.4' te incelersek analitik çözümle nümerik çözümün uyumlu olduğunu görürüz.

Çizelge 4.4. Tam çözümle $u_1(x, t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

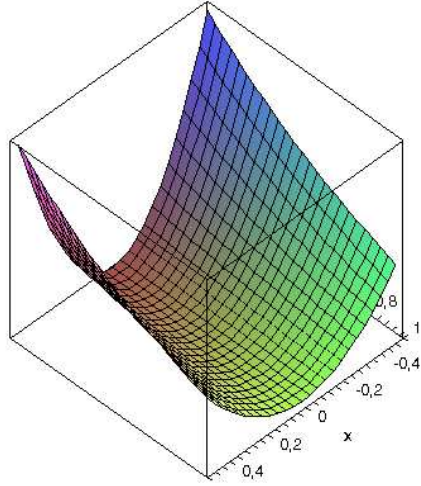
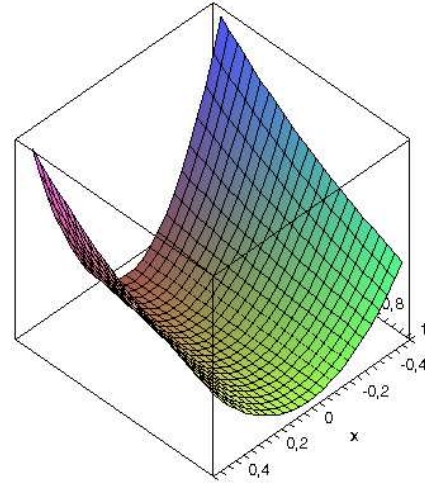
x	$u_1(x, t)$	$r_{3,2}(x, t)$	$ u_1(x, t) - r_{3,2}(x, t) $
-0.5	0.2475124584	0.2475124584	0
-0.4	0.1584079734	0.1584079734	0
-0.3	0.08910448503	0.08910448502	$1 \cdot 10^{-11}$
-0.2	0.03960199335	0.03960199334	$1 \cdot 10^{-11}$
-0.1	0.009900498337	0.009900498336	$1 \cdot 10^{-12}$
0.1	0.009900498337	0.009900498336	$1 \cdot 10^{-12}$
0.2	0.03960199335	0.03960199334	$1 \cdot 10^{-11}$
0.3	0.08910448503	0.08910448502	$1 \cdot 10^{-11}$
0.4	0.1584079734	0.1584079734	0
0.5	0.2475124584	0.2475124584	0

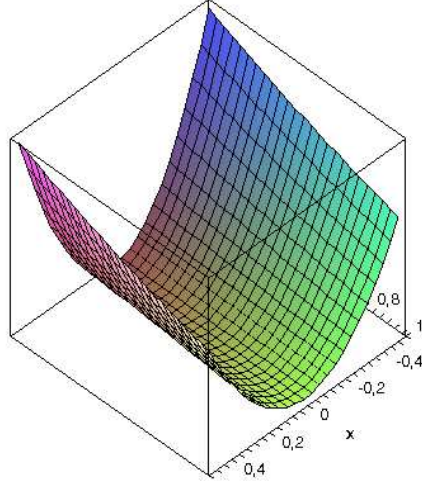
Çizelge 4.5. Tam çözümle $u_2(x, t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

x	$u_2(x, t)$	$r_{3,2}(x, t)$	$ u_2(x, t) - r_{3,2}(x, t) $
-0.5	0.2487531198	0.2487531198	0
-0.4	0.1592019967	0.1592019967	0
-0.3	0.08955112313	0.08955112314	$1 \cdot 10^{-11}$
-0.2	0.03980049917	0.03980049917	0
-0.1	0.009950124792	0.009950124793	$1 \cdot 10^{-12}$
0.1	0.009950124792	0.009950124793	$1 \cdot 10^{-12}$
0.2	0.03980049917	0.03980049917	0
0.3	0.08955112313	0.08955112314	$1 \cdot 10^{-12}$
0.4	0.1592019967	0.1592019967	0
0.5	0.2487531198	0.2487531198	0

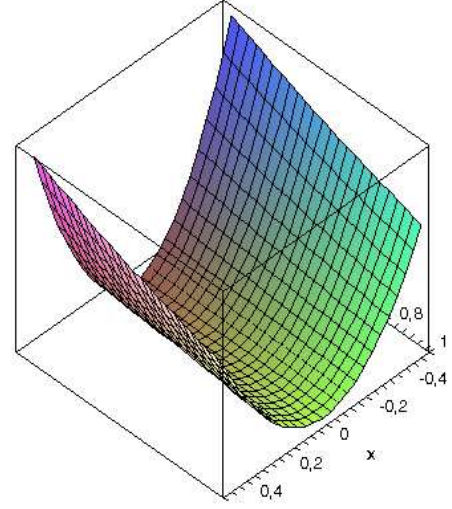
Çizelge 4.6. Tam çözümle $u_3(x,t)$ in nümerik olarak karşılaştırılması ($t = 0.01$)

x	$u_3(x,t)$	$r_{3,2}(x,t)$	$ u_3(x,t) - r_{3,2}(x,t) $
-0.5	0.002499958334	0.002499958333	$1 \cdot 10^{-12}$
-0.4	0.001599973333	0.001599973333	0
-0.3	0.0008999850001	0.0008999850001	$1 \cdot 10^{-13}$
-0.2	0.0003999933334	0.0003999933333	$1 \cdot 10^{-13}$
-0.1	0.00009999833334	0.00009999833333	$1 \cdot 10^{-14}$
0.1	0.00009999833334	0.00009999833333	$1 \cdot 10^{-14}$
0.2	0.0003999933334	0.0003999933333	$1 \cdot 10^{-13}$
0.3	0.0008999850001	0.0008999850001	$1 \cdot 10^{-13}$
0.4	0.001599973333	0.001599973333	0
0.5	0.002499958334	0.002499958333	$1 \cdot 10^{-12}$

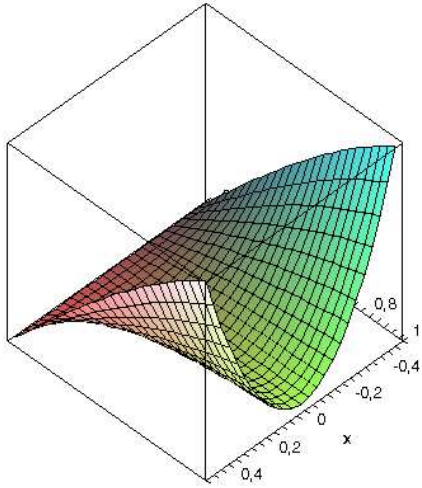
**Şekil 4.7.** $u_1(x,t)$ nin değerleri**Şekil 4.8.** $u_1(x,t)$ ve $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımının değerleri



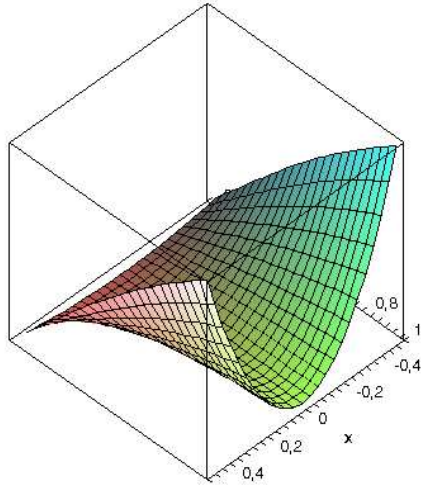
Şekil 4.9. $u_2(x,t)$ nin değerleri.



Şekil 4.10. $u_2(x,t)$ ve $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımının değerleri.



Şekil 4.11. $u_3(x,t)$ nin değerleri.



Şekil 4.12. $u_3(x,t)$ ve $r_{3,2}(x,t)$ Padé yaklaşımının değerleri.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan birçok matematiksel modelin analitik çözümünü bulmak çok zor veya imkânsız olabilir. Bu durumda yaklaşık çözümler kullanılır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların birçoğunda yaklaşık çözüme sahip sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Özellikle hızlı sonuç veren, algoritması kolay hazırlanabilen ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler son derece ilgi çekici olup hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır.

Bu tezde nümerik metot, kısmi diferansiyel-cebirsal denklemlerin çözümüne uygulandı. İki boyutlu diferansiyel dönüşüm metoduyla problem için bir seri çözüm elde edildi. Padé yaklaşımı seri çözümü fonksiyona daha hızlı yakınsatmak için kullanıldı. Çok değişkenli Padé yaklaşımı ile elde edilen çözüm ile tam çözümün uygunluğu görüldü. Bir başka deyişle sonuç oldukça kullanışlıdır. Bu yüzden metot birçok karmaşık kısmi diferansiyel-cebirsal denklem sisteminin çözümüne uygulanabilir.

KAYNAKLAR:

- Adomian, G., 1984. Convergent series solution of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 11, 225-230.
- Ascher, U.M. and Spiteri, R.J., 1994. Collocation software for boundary value differential-algebraic equations. *SIAM, J. Science Computation*, 15, 938–952.
- Ascher, U.M. and Petzold, L.R., 1998. *Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia
- Ayaz, F., 2003. On the two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 143, 361-374.
- Ayaz, F., 2004. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152, 649-657.
- Baker, G. A. and Graves-Morris, P., 1996, *Padé Approximants*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Barrio, R., 2005. Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs. *Applied Mathematics and Computation*, 163, 525-545.
- Bildik, N. and Konuralp, A., 2006. Two-dimensional differential transform method, Adomian's decomposition method and variational iteration method for partial differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 83 (12), 973-987.
- Brenan, K.E. and Campbell, S.L. and Petzold, L.R., 1989. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, Elsevier, New York, USA.
- Brezinski, C., 1991. *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg Germany.
- Campbell, S. L. and Gear, C. W., 1995. The index of general nonlinear DAEs. *Numerical Mathematics*, 72, 173-196.
- Celik, E., 2002. *Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü*. Doktora Tezi, Erzurum.
- Celik, E. and Bayram, M., 2003. Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Padé' series. *Applied Mathematics and Computation*, 137, 57–65.
- Celik, E. and Bayram, M., 2003. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Padé' series. *Applied Mathematics and Computation*, 137, 151–160.
- Celik, E. and Bayram, M., 2004. Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications. *Applied Mathematics and Computation*, 154, 405–413.
- Chen, C. K. and Ho, S. H., 1999. Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation*, 106, 171-179.
- Cuyt, A., 1983. Multivariate Padé approximants. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 96 (1), 283-293.
- Cuyt, A. and Wuytack, L., 1987. *Nonlinear Methods in Numerical Analysis* Amsterdam.
- Debrabant, K. And Strehmel, K., 2005. Convergence of Runge- Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations. *Applied Numerical Mathematics*, 53, 213-229.
- Gear, C.W. ve Petzold, L.R., 1984. ODE systems for the solution of differential-algebraic systems. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 21, 716–728.

- Guillaume, P. and Huard, A., 2000, Multivariate Padé Approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 121, 197-219.
- Hairer, E. and Lubich, C. H. and Roche, M., 1989. The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge- Kutta methods, *Lecture Notes in Mathematics*, 1409, Springer, Berlin.
- Hassan, I. H., 2002. On solving some eigenvalue problems by using a differential transformation. *Applied Mathematics and Computation*, 127, 1-22.
- Hosseini, M. M., 2006. Adomian decomposition method for solution of differential-algebraic equations. *Computational and Applied Mathematics*, 197, 495-501.
- Jang, M. J. and Chen, C. L. and Liu, Y. C., 2001. Two-dimensional differential transform for partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 121, 261-270.
- Köksal, M. and Herdem, S., 2002. Analysis of nonlinear circuits by using differential Taylor transform. *Computer and Electrical Engineering*, 28, 513-525.
- Liu, H. And Song, Y., 2007. Differential transform method to applied to high index differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 184, 748-753.
- Lucht, W. Strehmel, K. and Liebenow, C.E., 1997. Linear Partial Differential-Algebraic Equations, Part I. *Reports of the Institute of Numerical Mathematics*, Report No: 17.
- Lucht, W. Strehmel, K. and Liebenow, C.E., 1997. Linear Partial Differential-Algebraic Equations, Part II. *Reports of the Institute of Numerical Mathematics*, Report No:18
- Lucht, W. Strehmel, K. and Liebenow, C.E., 1999. Indexes and special discretization methods for linear partial differential partial-algebraic equations. *BIT Numerical Mathematics*, 39 (3), 484-512
- Marszalek, W., 1997. Analysis of Partial Differential-Algebraic Equations. Ph.D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh.
- Martinson, W. and Barton, P., 2000. A differentiation index for partial differential-algebraic equations. *SIAM, Journal of Science and Computation*, 21 (6), 2295-2315.
- Martinson, W. and Barton, P., 2000. Index and characteristic analysis of linear PDAE systems. *SIAM, Journal of Science and Computation*, 24 (3), 905-923.
- Marz, R., 2003. The index of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term. *Results in Mathematics*, 42, 308-338.
- Marz, R., 2004. Solvability of linear differential-algebraic equations with properly stated leading term. *Results in Mathematics*, 45, 88-105.
- Petzold, L. R., 1982. Differential-algebraic Equations are not ODEs. *SIAM. Journal of Science Statistics and Computation*, 3, 367-384.
- Petzold, L. R., 1995. Numerical Solution of Differential-Algebraic Equations, *Advances in Numerical Analysis IV*.
- Strehmel, K. Debrabant, K., 2005. Convergence of Runge-Kutta methods applied to linear partial differential-algebraic equations. *Applied Numerical Mathematics*, 53, 213-229.
- Turut, V., 2007. Çok Değişkenli Padé Yaklaşımları ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.
- Turut, V. and Çelik, E. and Yiğider, M., 2010. Multivariate Padé approximation for solving Partial differential equations (PDE). *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, 66 (9), 1159-1173.
- Yiğider, M. and Çelik, E., 2010. The numerical solution of partial differential-algebraic equations (PDAEs) by multivariate Padé approximation. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 4 (1), 67-75.

- Yang, X. and Liu, Y., 2006. A numerical solution of second order linear partial differential equations by differential transform. *Applied Mathematics and Computation*, 173 (2), 792-802.
- Zhou, J.K., 1986. *Differential Transform and Its Applications for Electrical Circuits*. Huarjung University Press, Wuhan, China.

EKLER

Ek 1 de Diferansiyel dönüşüm metodunun ilk problem için MATLAB programlama dilinde hazırlanan programı verildi.

EK 1 (Nümerik Metodun Programı)

```

clc
clear
syms x t F1 F2 F3 d U1 U2 U3
ff1=-2*x*(x-1)*sin(t)-2*exp(t)-2*t^5-x*(x-1)*cos(t)-x*(x-1)*(exp(t)+t^5);
ff2=x*(x-1)*(exp(t)+5*t^4)-2*cos(t)-2*exp(t)-2*t^5-x*(x-1)*cos(t);
ff3=-x*(x-1)*(exp(t)+t^5);
N=input('Enter N, N=')
for i=0:N
    for j=0:N
        d=diff(ff1, 'x', i);
        dd=(diff(d, 't', j)/(factorial(i)*factorial(j)));
        x=0; t=0;
        F1(i+1, j+1)=eval(dd);
        clear x t
        syms x t

    end
end
for i=0:N
    for j=0:N
        d=diff(ff2, 'x', i);
        dd=(diff(d, 't', j)/(factorial(i)*factorial(j)));
        x=0; t=0;
        F2(i+1, j+1)=eval(dd);
        clear x t
        syms x t

    end
end
for i=0:N
    for j=0:N
        d=diff(ff3, 'x', i);

```

```

        dd=diff(d, 't', j)/(factorial(i)*factorial(j));
        x=0; t=0;
        F3(i+1, j+1)=eval(dd);
        clear x t
        syms x t
    end
end
%find U_3
for i=0:N
    for j=0:N
        U3(i+1, j+1)=-F3(i+1, j+1) ;
    end
end
%find U_2 by boundry valu
for j=0:N
    U2(1, j+1)=0;
end
for j=0:N
    t=0;
    U2(2, j+1)=eval(diff(' -cos(t)', 't', j)/factorial(j));
    clear t
    syms t
end
for i=0:(N-2)
    for j=0:(N-1)
        jj=j+1;
        ii=i+1;
        U2(ii+2, jj)=-((F2(ii, jj)+U2(ii, jj)+(i+1)*(i+2)*U3(ii+2, jj)-
        (j+1)*U3(ii, jj+1)))/((i+1)*(i+2));
    end
end
U2ap=0;
for i=0:(N-2)
    for j=0:(N-1)
        jj=j+1;
        ii=i+1;
        U2ap=U2(ii, jj)*x^i*t^j+U2ap;
    end
end
U3ap=0;
for i=0:(N-2)
    for j=0:(N-1)
        jj=j+1;
        ii=i+1;
        U3ap=U3(ii, jj)*x^i*t^j+U3ap;
    end
end

```

```

end
%find U_1
for i=0:(N-2)
    for j=0:(N-1)
        jj=j+1;
        ii=i+1;
        U1(ii,jj)=-
        (F1(ii,jj)+U2(ii,jj)+U3(ii,jj)+(i+1)*(i+2)*U3(ii+2,jj)-
        (j+1)*U2(ii,jj+1));
    end
end
U1ap=0;
for i=0:(N-2)
    for j=0:(N-1)
        jj=j+1;
        ii=i+1;
        U1ap=U1(ii,jj)*x^i*t^j+U1ap;
    end
end
U3ap
U2ap
U1ap

```

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Erzurum’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum da tamamladı. 1999 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2003 yılında mezun oldu. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans programından mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Doktora öğrenimine başladı. 2007 yılında Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen aynı üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.