



**İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK
ANALİZİ İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM**

**Bilgisayar Yük.Müh. Eylem YÜCEL DEMİREL
Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Danışman
Prof.Dr.Sabri ARIK**

Aralık, 2009

İSTANBUL

ÖNSÖZ

Bu çalışma 15/01/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



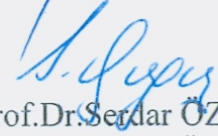
Prof.Dr.Sabri ARIK (Danışman)
İstanbul Üniversitesi



Prof.Dr.Ahmet SERTBAŞ
İstanbul Üniversitesi



Prof.Dr.İlhami YAVUZ
Beykent Üniversitesi



Prof.Dr.Serdar ÖZOĞUZ
İstanbul Teknik Üniversitesi



DoçDr.A.Halim ZAIM
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımından dolayı değerli hocam Prof.Dr. Sabri ARIK'a en içten dileklerle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşlarım Sibel SENAN KUCUR ve Tolga ENSARİ'ye ayrıca bana her zaman destek olan eşime ve aileme teşekkürü borç bilirim.

Aralık, 2009

Eylem YÜCEL DEMİREL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iii
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	3
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	6
3.1. MATRİS VE VEKTÖR NORMLARI.....	7
3.2. MATRİS SINIFLARI.....	9
3.3. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ.....	10
3.3.1 Lyapunov Kararlılık Teoremi.....	11
3.3.2 Hurwitz Kararlılık Teoremi.....	12
3.3.3 LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi.....	13
3.4. AKTİVASYON FONKSİYONLARI.....	14
4. GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARINDA KARARLILIK ANALİZİ.....	17
4.1. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞI MODELİ.....	18
4.2. DENGİ NOKTASININ VARLIĞI VE TEKLİĞİ ANALİZİ.....	23
4.3. DENGİ NOKTASININ KARARLILIK ANALİZİ	33
5. BULGULAR.....	49
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	70
KAYNAKLAR.....	72
ÖZGEÇMİŞ.....	82

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 5.1 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü.....	53
Şekil 5.2 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü.....	53
Şekil 5.3 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü.....	54
Şekil 5.4 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \ -0.4]$ için sistemin çözümü.....	55
Şekil 5.5 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \ -0.4]$ için sistemin çözümü.....	56
Şekil 5.6 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \ -0.4]$ için sistemin çözümü.....	56
Şekil 5.7 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \ -0.6]$ için sistemin çözümü.....	58
Şekil 5.8 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \ -0.6]$ için sistemin çözümü.....	58
Şekil 5.9 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \ -0.6]$ için sistemin çözümü.....	59
Şekil 5.10 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü.....	61
Şekil 5.11 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü.....	61
Şekil 5.12 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü.....	62
Şekil 5.13 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü.....	62
Şekil 5.14 : $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4 \ -0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü.....	66
Şekil 5.15 : $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4$	

	$-0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü.....	66
Şekil 5.16 :	$g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4$	
	$-0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü.....	67
Şekil 5.17 :	$g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4$	
	$-0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü.....	67

ÖZET

GEÇİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ İÇİN GENEL BİR YAKLAŞIM

Bu tez çalışmasında, ayırık zaman gecikmeli sürekli-zamanlı ve çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust yakınsama özelliklerinin bir analizi yapılmıştır.

Yapay sinir ağlarında denge noktasının varlığı, tekliği ve kararlılığı oldukça önemlidir. Bu yönde yapılan çalışmalarda, farklı yapay sinir ağı modelleri için, üstel kararlı, robust kararlı, kesin kararlı gibi çeşitli kararlılık türleri incelenmektedir. Bu tez çalışmasında Hopfield tipi yapay sinir ağı modelinin denge noktasının varlık, teklik ve kararlılık analizi yapılmıştır.

Yapay sinir ağlarının donanımsal uygulamalarında, elektronik devreler gerçekleştirirken kullanılan elektronik bileşenlerin toleranslarından dolayı sistemin ağı parametrelerinde bazı değişiklikler meydana gelebilir. Bu gibi durumlarda yapay sinir ağının kararlılık özelliklerinin parametre değerlerindeki bu küçük sapmalardan etkilenmemesi istenir. Başka bir deyişle bu uygulamalarda kullanılan yapay sinir ağı, global robust kararlı olmalıdır.

Çalışmamızda, uygun Lyapunov fonksiyonları kullanarak, denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılığı için bazı yeterli koşullar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların sistemin ağı parametreleri türünden ifade edilmesi, bu sonuçların kolaylıkla doğrulanabilmesini sağlamaktadır. Sonuçlarımızı literatürde var olan ilgili sonuçlarla karşılaştırmak için bazı örnekler verilmiştir. Bu karşılaştırma, bizim sonuçlarımızın gecikmeli yapay sinir ağları için bir takım yeni robust kararlılık kriterleri belirlediğini ispatlamaktadır. Son olarak sonuçların özgünlüğü, bilgisayar uygulamaları verilerek desteklenmiştir.

SUMMARY

A GENERAL FRAMEWORK FOR STABILITY ANALYSIS OF DELAYED NEURAL NETWORKS

In this thesis, global robust convergence properties of continuous-time neural networks with discrete time delays and multiple time delays are analysed.

Existence, uniqueness and the stability of equilibrium point of neural networks are very important. In published studies for this research area, various stability types, such as exponential stability, robust stability, absolute stability are investigated for different neural network models. In this thesis existence, uniqueness and stability analysis of equilibrium point of Hopfield type neural networks are made.

In hardware implementation of neural networks, two main parameters might have impact on the equilibrium and stability properties of neural networks which are time delays occurring during the processing and transmission of the signals and deviations in the network parameters due to the tolerances of electronic components employed in the design. Such parameter uncertainties may result in instability and poor performance of the neural networks. To avoid this situation, the neural network must be global robust stable.

By employing suitable Lyapunov functionals, some sufficient conditions for the existence, uniqueness and global asymptotic stability of the equilibrium point are derived in this study. The conditions can be easily verified as they can be expressed in terms of the network parameters only. Some numerical examples are also given to compare our results with previous robust stability results derived in the literature. This comparison proved to establish a new set of robust stability criteria for delayed neural networks. Finally, the results obtained are supported by giving computer applications.

1. GİRİŞ

Yapay sinir ağları son yıllarda örüntü tanıma, görüntü işleme, çağrışımlı bellek tasarımı, optimizasyon problemlerinin çözümü gibi uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tür uygulamalarda, tasarlanan yapay sinir ağının kararlılığının sağlanması çok önemlidir. Bu yüzden, ağın dinamik davranışının analizi, ağın pratik tasarımı ve uygulaması için gerekli bir adımdır. Yapay sinir ağlarının sergileyeceği dinamik davranış uygulanacağı problemin yapısına göre değişiklik gösterir. Örneğin yapay sinir ağı, çağrışımlı bellek olarak çalışacak şekilde tasarlandığında, yapay sinir ağının birden çok denge noktasına sahip olması istenir. Diğer taraftan yapay sinir ağı, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanıldığında yapay sinir ağının, global asimptotik kararlı olan tek bir denge noktasına sahip olması istenir. Literatürde yapay sinir ağı modelleri için denge noktasının bir ya da birden fazla olması durumlarında sağladığı koşulların incelendiği bir çok çalışma mevcuttur. [1]-[19] referans numaralarıyla verilen çalışmalarda ve bu çalışmaların atıfta bulunduğu yayınlarda farklı yapay sinir ağı modelleri için çeşitli kararlılık sonuçları incelenmiştir. Bu tez çalışmasında Hopfield tipi yapay sinir ağı modellerinin denge ve kararlılık koşulları incelenmektedir.

Hopfield 1980'lerin başında, yeni bir dinamik yapay sinir ağı modeli ortaya koymuştur ve sistem dinamiği için pozitif değerler alan bir Lyapunov fonksiyonu önermiştir. Bu fonksiyon, yapay sinir ağlarında simetrik bağlantı matrislerinin varlığı koşuluna dayanmaktadır. Hopfield, bu Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevinin negatif yarı-tanımlı olduğunu göstermiştir. Bu, sistemin global kararlı olduğu anlamına gelmektedir. Bu nedenle simetrik bağlantı matrisinin kullanılması, sistemin global kararlılığını garantiler; fakat denge noktasının tek ya da birden fazla olması konusunda yorum yapılamaz. Bu konuda yorum yapılabilmesi için iki parametrenin belirlenmesi gerekir. Bu parametreler, aktivasyon fonksiyonlarının karakteristiği ve nöronlar arasındaki bağlantı katsayılarının değerleridir.

Yapay sinir ağı modeline gecikme parametresinin eklenmesi, yapay sinir ağı modelinin dinamik davranışında önemli etkilere neden olmaktadır. Yapay sinir ağlarında kullanılan nöronlar bir işlemsel kuvvetlendirici ve ona bağlı direnç ve kapasite elemanları ile oluşturulan bir devre ile modellenmektedir. Bu devrelerde kuvvetlendiricilerin sonlu anahtarlama hızı ve ağın

doğal iletişim zamanı nedeniyle nöronlar arası etkileşimde ağın kararlılığını etkileyen zaman gecikmelerinin varlığı kaçınılmazdır. Bu durum, gecikmeli yapay sinir ağlarının kararlılığı konusunda yapılan çalışmaların artmasına neden olmuştur. Zaman gecikmesi bir sistem için zararlı olabilir. Diğer taraftan, hareketli görüntünün işleyişinde, ağa sinyal iletiminden dolayı, gecikmenin gerekliliği gösterilmiştir. Bu nedenle gecikmeli yapay sinir ağlarının kararlılığına çalışmak pratik olarak gerekmektedir ve birçok çalışmada kullanılmaktadır[20]-[49].

Yapay sinir ağının kararlılığı, yapay sinir ağı uygulamaları ve tasarımlarındaki parametre değişimleri, harici bozulmalar ve modelleme hatalarının varlığından kaynaklanan sapmalardan dolayı tahribata uğramaktadır. Modellemedeki bu sapmalar doğrudan sistemin dinamik davranışını etkiler. Bu nedenle, sistemin denge noktasının kararlılığı analiz edilirken, denge noktasının kararlılık özelliklerinin parametre değerlerindeki bu küçük sapmalardan etkilenmemesi istenir. Bunun için, yapay sinir ağının robust kararlı olması gerekmektedir. Son zamanlarda yapılan gecikmeli yapay sinir ağları için global robust kararlılık sonuçları [50]-[90] arasındaki referanslarda gösterilmektedir.

Bu tez çalışmasının amacı, gecikme parametreleri ve sistem parametrelerindeki belirsizliğin yapay sinir ağına etkilerini dikkate alarak, denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığı için yeni kriterler belirlemektir. Öncelikle tezin ikinci bölümünde literatürde kullanılan yapay sinir ağı modelleri incelenmektedir. Üçüncü bölümde analizlerimizde önemli yeri olan matris teorisi ile ilgili bazı temel kavramlar ve doğrusal olmayan sistemlerin analizinde kullanılan bazı temel teoremler incelenmektedir. Ayrıca kararlılık koşullarının elde edilmesinde etkili olması nedeniyle literatürde kullanılmış olan aktivasyon fonksiyonları da bu bölümde verilmektedir. Dördüncü bölümde kullanacağımız yapay sinir ağı modelleri tanımlanmakta ve bu yapay sinir ağı modellerinde kullanacağımız varsayımlar verilmektedir. Daha sonra, Lyapunov teoremlerinden yararlanarak, tanımladığımız yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimptotik kararlılığını sağlayan yeni koşullar elde edilmektedir. Son olarak beşinci bölümde elde edilen kararlılık koşulları, literatürde daha önce elde edilmiş olan robust kararlılık koşullarıyla karşılaştırılmaktadır. Ayrıca elde edilen sonuçların gerçekleştirilebilirliğini göstermek için sayısal örnekler, simülasyon sonuçları ile birlikte sunulmaktadır.

2. GENEL KISIMLAR

Son yıllarda, dinamik yapay sinir ağları, örneklerin sınıflandırılması, çağrışımlı bellekler ve optimizasyon gibi uygulamalarda başarılı bir şekilde kullanılmışlardır. Yapay sinir ağlarının kararlılığı önemli bir dinamik davranış özelliğidir. Yapay sinir ağlarının global kararlılığını analiz eden bir çok çalışma yapılmıştır. Genellikle amaç, incelenen yapay sinir ağı modelinin sistem parametreleri arasında ilişki kuran koşulları elde etmektir. Yapay sinir ağları, doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemleri ile tanımlandığından dolayı, bu koşulların elde edilmesi oldukça zordur ve karmaşık analizler gerektirmektedir. Literatürde ilk kullanılan model, Hopfield tarafından ortaya konan yapay sinir ağı modelidir [91]. Bu modelin dinamik davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile tanımlanır :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Yukarıdaki denklem vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Af(x(t)) + u \quad 2.1$$

Bu denklemde, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ durum vektörünü, $C = \text{diag}(c_i > 0)$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ağırlık katsayılarını temsil eden matrisi, $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ nöron aktivasyonlarını, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ giriş vektörünü, n ise nöron sayısını göstermektedir.

Bu modelde gecikme etkisi göz önüne alınmamıştır. Fakat, teorik ve pratik açıdan, yapay sinir ağlarının elektronik gerçekleştirilmesinde nöronlar arasındaki bilgi iletiminde doğal bir gecikme olacağından gecikme parametresinin sistem denkleminde ilave edilmesi gereklidir. Bu nedenle, gecikmeli yapay sinir ağı modeli, görüntü işleme gibi bazı pratik problemlerin uygulamalarında sıkça kullanılmıştır. Zaman gecikmeleri yapay sinir ağlarının osilasyon yapmasına, kararlı hal durumundan kararsız hal durumuna geçmesine, periyodik çözümler üretmesine kadar farklı dinamik davranışlar göstermesine neden olur. Bu nedenle sisteme gecikme parametresi ilave edi-

lerek, sistemin kararlılık analizinin bu duruma göre yapılması önemlidir. Gecikmeli bir yapay sinir ağının dinamik davranışını karakterize eden sistem modeli aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmiştir [30]:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau)) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

Burada $\tau > 0$ sisteme eklenen sabit gecikme parametresidir. (2.2) numaralı denklem, vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Af(x(t - \tau)) + u \quad (2.3)$$

(2.3) denklem modelinde tek bir gecikme parametresi kullanılmıştır. Bu modelde, nöronlar arasındaki iletim gecikmelerinin aynı olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım, yapay sinir ağı modelinin matematiksel analizi açısından kolaylık sağladığı için makul görülmüştür. Fakat, teorik olarak bütün nöronlar arasındaki gecikmenin aynı olması mümkün olmadığından, her iki nöron arasındaki gecikmenin farklı olduğu düşünülerek daha gerçekçi bir yapay sinir ağı modeli göz önüne alınmalıdır. Bu durumda (2.3) ile tanımlanan gecikmeli yapay sinir ağı modelinden daha genel olarak Gopalsamy ve He tarafından sistem denklemlerine farklı zaman gecikmeleri (τ_{ij}) eklenerek sistem değiştirilmiştir [31]. Bu yapay sinir ağı modeli aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi ile tanımlanabilir.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

Burada τ_{ij} , i . nöron ile j . nöron arasındaki iletim gecikmesini ifade eder.

Yukarıda, gecikme parametrelerinin sistem denkleminde ilave edilmesinin gerekliliğine değinilmiştir. Bununla birlikte, özellikle hareket içeren uygulamalarda belirli birtakım problemleri çözmek için gecikme parametresi sistem denklemlerine bazen özellikle ilave edilir. Bu düşünce ile geliştirilmiş ve daha önce ifade etmiş olduğumuz yapay sinir ağı modellerini de genelleştirmiş olan bu en genel gecikmeli yapay sinir ağı sisteminin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Son zamanlarda birçok araştırmacı yapay sinir ağlarının kararlılık özelliklerini analiz etmiş ve (2.1) – (2.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelleri için denge noktasının tekliği ve global asimtotik kararlılığı için çeşitli yeterli koşullar sunmuşlardır. (2.5) ile verilen yapay sinir ağı modeli genişletilerek, gecikme parametrelerinin zamana bağlı olduğu yapay sinir ağı modeli aşağıdaki şekilde verilmiştir [20]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau(t))) + u \quad (2.6)$$

Burada $\tau(t)$ iletim gecikmesini, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n \times n}$ nöronların ağırlık katsayılarını temsil eden bağlantı matrislerini göstermektedir.

Bu tez çalışmasının amacı, Hopfield tipi yapay sinir ağı modellerinin global robust kararlılığını analiz ederek yeni yeterli koşullar elde etmektir. Bu amaçla tez kapsamında yapılan ilk çalışmada, ayrık zaman gecikmeli yapay sinir ağlarının global robust yakınsama özellikleri incelenmiştir. Bunun için ilk önce (2.6) ile verilen yapay sinir ağı modelinin ağ parametrelerinin gerçek değerlerinden sapma sınırları belirlenmiş, daha sonra da bu sınırlayıcı koşullar altında yapay sinir ağının dinamik denkleminde hareketle, bazı matris norm ilişkileri ve Lyapunov teoremi kullanılarak kararlılık analizi yapılmıştır. Bu analiz sonucunda ise sistemin global robust kararlılığını sağlayan yeni yeterli koşullar elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu koşullar literatürde yayınlanmış diğer sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tez kapsamında yapılan diğer çalışmada ise çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağları için denge noktasının global robust asimtotik kararlılığı incelenmiştir. Bunun için de (2.5) ile verilen yapay sinir ağı modeli ele alınmıştır. Uygun Lyapunov fonksiyonları kullanılarak yapay sinir ağlarının bu sınıfının global robust asimtotik kararlılığı için gecikmeden bağımsız yeterli koşullar elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarla literatürde var olan ilgili sonuçları karşılaştırmak için bazı örnekler verilmiştir. Yapılan karşılaştırmalar, bu tezde elde edilen sonuçların gecikmeli yapay sinir ağları için yeni robust kararlılık kriterleri belirlediğini ispatlamaktadır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Yapay sinir ağlarında denge noktasının kararlılığı, genel olarak, incelenen sistemin bağlantı matrisi elemanlarına uygulanan kısıtlama koşullarına dayanır. Yani, bağlantı matrisi üzerindeki koşullar dinamik sinir sisteminin kararlı durum davranışını belirler. Bu nedenle yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde matrislerin bazı türleri, yapay sinir ağları için istenen kararlılık koşullarının türetilmesinde özel bir öneme sahiptir. Sonuç olarak, dinamik yapay sinir ağlarının denge noktasının analiz edilmesinde matris teorisi çok önemli bir araçtır.

Bu nedenle, matris sınıflarıyla ilişkili temel tanımlar ve bu matris sınıflarına ait bazı önemli özellikler aşağıda verilmektedir. Öncelikle matrisler ve vektörler ile ilgili bazı sembolik gösterimler sunulacaktır.

Matrisler büyük harfle gösterilecektir. Örneğin A ya da P . Bir A matrisinin transpozu A^T şeklinde gösterilir. A^T , A matrisinin satırları ile sütunları yer değiştirilerek oluşturulur. Simetrik bir A matrisi için $A = A^T$ 'dir. A^{-1} , A matrisinin tersini göstermektedir. λ_i , verilen herhangi bir A matrisinin i . özdeğerini gösterir. $\lambda_M(A)$ ve $\lambda_m(A)$ sırasıyla A matrisinin maksimum ve minimum özdeğerlerini göstermektedir. $\det(A)$, A matrisinin determinantını ifade eder. Pozitif (negatif olmayan) köşegen bir P matrisi, $P = \text{diag}\{p_i > 0\}$ ($P = \text{diag}\{p_i \geq 0\}$) ile gösterilir. $|A|$, A matrisinin her bir elemanının mutlak değeri alındıktan sonra oluşturulan matristir.

Vektörler küçük harflerle gösterilecektir. Örneğin x ya da v . n adet elemanı olan ve bu elemanları $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile temsil edilen bir x vektörü $x = [x_1 \ x_2 \dots x_n]^T$ şeklinde gösterilir ve bir sütun vektörünü temsil eder. x^T ise x vektörünün transpozunu gösterir ve bir satır vektörüdür. $|x| = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)^T$ olarak kullanılacaktır.

$x_1, \dots, x_n$ reel sayılar olmak üzere, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ n -boyutlu vektörlerin kümesi, R^n ile gösterilen n -boyutlu Öklit Uzayını tanımlar. R , bir-boyutlu Öklit Uzayıdır ve tüm reel sayıları kapsar. R^n 'deki vektörler karşı bileşenleri ilave edilerek toplanabilir. Bir skaler ile çarpımı, her bileşeninin o skaler ile çarpımı ile elde edilir. x ve y vektörlerinin iç çarpımı $x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ şeklindedir.

3.1. MATRİS VE VEKTÖR NÖRMLARI

Bu tez kapsamında vektör ve matris normları oldukça sık kullanılmaktadır. Bu nedenle literatürde kullanılan bazı temel vektör ve matris normlarına değinmekte fayda vardır. Reel değerli bir fonksiyon olan $\|x\|$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ vektörünün normudur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- $\forall x \in R^n$ için $\|x\| > 0$ ve sadece $x = 0$ için $\|x\| = 0$.
- $\forall x, y \in R^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- $\forall \alpha \in R$ ve $\forall x \in R^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Bir x vektörünün p . normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Genelde norm kullanıldığında, sadece herhangi bir norm tarafından sağlanan 3 temel özellikten çıkarılan sonuçların özellikleri kullanılır. Bu gibi durumlarda normun herhangi bir p -normu olabileceği belirtilir. p indisi kullanılmaz.

Tez çalışmasında kullanılan üç vektör normu $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ ve $\|x\|_\infty$, aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\|x\|_1 = (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Eğer $\|\cdot\|_\alpha$ ve $\|\cdot\|_\beta$ iki farklı p -normlarıysa, her $x \in R^n$ için şu şekilde c_1 ve c_2 pozitif sabitleri vardır:

$$c_1\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2\|x\|_\alpha$$

Kural 3.1.1.

Herhangi $x \in R^n$ için

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Reel elemanlı $m \times n$ boyutlu A matrisi, R^n 'den R^m 'ye, $y = Ax$ doğrusal dönüşümünü tanımlar. A 'nın p -normu şu şekilde tanımlanır :

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

$p = 1, 2, \infty$ için $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisinin üç matris normu aşağıdaki şekildedir :

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Kural 3.1.2.

Herhangi $m \times n$ boyutlu A reel matrisi ve $n \times q$ boyutlu B matrisi için

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_{\infty} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_{\infty}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p$$

3.2. MATRİS SINIFLARI

Aşağıda bazı matris sınıflarının tanımları verilmiştir :

Tanım 3.2.1

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bütün özdeğerleri sıfırdan büyük ise, bu A matrisi pozitif tanımlıdır ve $A > 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.2.2

$n \times n$ boyutlu simetrik bir A matrisinin bazı özdeğerleri sıfırdan büyük ve bazı özdeğerleri sıfıra eşit ise, bu A matrisi pozitif yarı tanımlıdır ve $A \geq 0$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.2.3

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bütün özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ise, bu A matrisi pozitif kararlıdır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.2.4

$n \times n$ boyutlu bir A matrisinin bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfırdan büyük ve bazı özdeğerlerinin gerçekteki kısmı sıfıra eşit ise, bu A matrisi pozitif yarıkararlıdır. Bu özelliğe sahip matrisler aynı zamanda H_o -kararlı matrisi olarak da isimlendirilir ve $A \in H_o$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.2.5

Herhangi bir $A = (a_{ij})$ matrisinin elemanları $a_{ii} \geq 0$ ve $a_{ij} \leq 0$ özellikleri ile verilmiş olsun. Bu özelliklere sahip A matrisinin Z_n kümesinin bir elemanı olduğu kabul edilir.

Tanım 3.2.6

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi aynı zamanda pozitif kararlı bir matris ise, bu durumda A matrisi tekil olmayan M -matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K$ ifadesi ile gösterilir.

Tanım 3.2.7

A matrisi Z_n kümesinin bir elemanı olsun. Eğer A matrisi aynı zamanda pozitif yarıkararlı bir matris ise, bu durumda A matrisi M -matrisi olarak isimlendirilir ve $A \in K_o$ ifadesi ile gösterilir.

3.3. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞLARININ KARARLILIK ANALİZİ

Dinamik yapay sinir ağı uygulamalarında, tasarlanan yapay sinir ağının her giriş vektörü için tek ve global asimtotik kararlı bir denge noktasına yakınsamasının sağlanması oldukça önemlidir. Bu yüzden, dinamik yapay sinir ağlarının kararlılık analizleri pratik tasarımlar için gereklidir. Bu tezde, yapay sinir ağlarının kararlılık koşulları elde edilirken, literatürde bilinen genel kararlılık teoremlerinden faydalanılacaktır.

Kararlılık analizine geçmeden önce, üzerinde çalıştığımız yapay sinir ağı modelinin denge noktasının kararlılık koşullarını saptamak için kullanacağımız doğrusal olmayan dinamik sistemlerin kararlılık teorisinden elde edilen bazı temel sonuçları açıklamakta fayda vardır.

Aşağıdaki doğrusal olmayan dinamik sistemi ele alalım:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Aynı zamanda $f(x(t))$ 'nin $f(0) = 0$ 'ı sağladığını varsayalım. Yukarıdaki skaler sistem, aşağıdaki vektör formunda yazılabilir:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$f(x^*) = 0$ koşulunu sağlayan sabit x^* vektörü bu dinamik sistemin denge noktası olarak isimlendirilir.

x^* denge noktasının asimtotik kararlı olması için, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif bir δ vardır :

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

Asimtotik kararlılıkta, tek bir denge noktası vardır ve $t \rightarrow \infty$ iken, tüm $x(t)$ çözümleri bu denge noktasına yakınsamaktadır.

Denge noktasının kararlılığı genellikle, pozitif enerji fonksiyonunun tanımlandığı ve denge noktasının kararlılık özellikleriyle ilgili bir sonuç çıkarmak için zamana bağlı türevinin incelendiği Lyapunov yöntemiyle karakterize edilir. Bu yöntem, 1900'lü yılların başlarında, diferansiyel eşitliklerin kararlılığını göstermek için Alexander Lyapunov isimli Rus bilim adamı tarafından ortaya atılmıştır.

3.3.1. Lyapunov Kararlılık Teoremi

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin denge noktası $x^* = 0$ olsun. Bu durumda $f(0) = 0$ olacaktır. $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$ pozitif tanımlı, sürekli ve türevi alınabilir bir fonksiyon olsun. $V(x(t))$ fonksiyonunun zamana göre türevi $\dot{V}(x(t))$ ile gösterilir ve aşağıda verilen eşitlik ile ifade edilir :

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x(t))}{\partial x_i(t)} f_i(x(t)) = \frac{\partial V(x(t))}{\partial x(t)} f(x(t))$$

Eğer $V(0) = 0$, $V(x(t)) > 0 \quad \forall x(t) \neq 0$ iken

- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$, $\forall x(t) \in R^n$ ise denge noktası $x^* = 0$ kararlıdır.
- $\dot{V}(x(t)) < 0$, $\forall x(t) \neq 0$ ise denge noktası $x^* = 0$ asimtotik kararlıdır.

- $\dot{V}(x(t)) > 0, \forall x(t) \neq 0$ ise denge noktası $x^* = 0$ kararsızdır.

Bu teorem Lyapunov'un Direkt Metodu olarak adlandırılır. Bu metodun üstünlüklerinden biri denge noktasının kararlılık özelliklerini, sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmeden belirlememizi sağlamasıdır.

3.3.2. Hurwitz Kararlılık Teoremi

$x = 0, \dot{x}(t) = f(x(t))$ ile tanımlanmış sistemin denge noktası olsun. $\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin $x = 0$ civarında lineerleştirilmiş modeli aşağıdaki ifade ile verilir:

$$A = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x(t)} \right|_{x=0}$$

Burada $A, \dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin Jacobian'ı olarak isimlendirilir.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sisteminin orijini, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmının ancak ve ancak negatif ya da sıfır olması durumunda kararlıdır.

Ayrıca A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif ise orijin asimtotik kararlıdır. A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısmı negatif olduğunda, A matrisine kararlılık matrisi ya da Hurwitz matrisi denir.

Eğer A 'nın, reel kısmı pozitif olan en az bir özdeğeri varsa, orijinin kararsız olacağı söylenir.

Aslında yukarıdaki teoremler denge noktası için aynı asimtotik kararlılık sonucunu belirtir. Bu iki teorem arasındaki bağı bulmak için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu ele alalım.

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$$

Burada P reel simetrik pozitif tanımlı matristir. Sistemin yörüngeleri boyunca $V(x(t))$ 'nin türevi aşağıdaki *Lyapunov denklemi* ile verilir :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)[PA + A^T P]x(t) = -x^T(t)Qx(t)$$

Burada Q aşağıdaki şekilde tanımlanmış simetrik bir matristir :

$$-Q = PA + A^T P$$

Ancak ve ancak verilmiş her pozitif tanımlı Q matrisi için *Lyapunov denklemini* sağlayan pozitif tanımlı P matrisi varsa, A kararlılık matrisidir. Buradan, eğer Q pozitif tanımlı ise Lyapunov kararlılık teoremine göre $\dot{x}(t) = f(x(t))$ 'nin orijininin asimtotik kararlı olduğu sonucuna varabiliriz, yani, A 'nın tüm özdeğerlerinin reel kısımları negatiftir.

Şimdi de Lyapunov teoreminin daha genel bir hali olan, LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi'ne göz atalım.

3.3.3. LaSalle'nin Değişmezlik İlkesi

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemi için denge noktası $x^* = 0$ olsun. $V(x(t)) : D \rightarrow R$ orijin civarındaki D kümesi üzerinde tanımlanmış türevi alınabilir pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. Ayrıca D kümesi içerisinde $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ olsun. Şimdi aşağıdaki S kümesini göz önüne alalım.

$$S = \{x(t) \in D \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin asimtotik karardır.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ sistemi için denge noktası $x^* = 0$ olsun. $V(x(t)) : R^n \rightarrow R$ sürekli, türevi alınabilen, pozitif tanımlı ve radyal sınırsız ($\|x\| \rightarrow \infty$ iken $V(x(t)) \rightarrow \infty$) bir fonksiyon ve $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ olsun. Aşağıdaki S kümesini göz önüne alalım.

$$S = \{x(t) \in R^n \mid \dot{V}(x(t)) = 0\}$$

Orijin dışında hiç bir çözümün S içinde sonsuza kadar kalamayacağını varsayalım. Bu durumda, orijin global asimtotik kararlıdır.

Lyapunov teoreminden farklı olarak, LaSalle Prensibi $V(x(t))$ fonksiyonunun pozitif tanımlı olmasını gerektirmez. Bununla birlikte, radyal sınırsızlığı kontrol etmek pozitif tanımlı fonksiyonlar için daha kolaydır. Ayrıca her pozitif tanımlı fonksiyon radyal sınırsız olmayabilir. Örnek olarak aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$V(x(t)) = (x_1(t) - x_2(t))^2$$

$x_1(t) = x_2(t)$ için $V(x(t)) = 0$ 'dır. Yani $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ olmasına rağmen, $V(x(t)) \rightarrow \infty$ değildir.

3.4. AKTİVASYON FONKSİYONLARI

Genel olarak yapay sinir ağlarının kararlılık koşullarını elde etmedeki etkenlerden biri kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının özellikleridir. Örneğin bir Hopfield yapay sinir ağ modelinin denge noktasının varlığını, tekliğini ve kararlılığını belirleyebilmek için sınırlı ve sürekli artan bir aktivasyon fonksiyonu kullanılması çeşitli faydalar sağlamaktadır. Bunun sebebi, böyle bir yapay sinir ağının kararlılığını belirlemede kullanılacak uygun Lyapunov fonksiyonlarının daha kolay bulunabilmesi ve sistem parametreleri üzerindeki kısıtlamaların daha az olmasıdır. Buna karşın her türlü problemde aynı tipte aktivasyon fonksiyonları kullanılmaz. Bazı özel optimizasyon problemlerinde sınırlı olmayan ve sürekli artmayan fonksiyonların kullanılması daha iyi sonuç vermektedir [5]. Kararlılık analizi, denge noktasının varlığını garanti eden sınırlı aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı yapay sinir ağ modellerinde, sınırsız aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı modellere göre çok daha kolaydır. Bu tezde kararlılık koşullarını elde etmek ve daha önceden gerçekleştirilmiş olan kararlılık analizi çalışmaları ile karşılaştırmak için gerekli olan aktivasyon fonksiyonları aşağıda verilmiştir :

3.4.1. Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

Sınırlı aktivasyon fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlar :

$$|f_i(x)| \leq M_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.1)$$

Burada M_i pozitif bir sabittir. Bu özelliği sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in \mathcal{B}$ ile gösterilir.

3.4.2. Sürekli Artan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

Sürekli artan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlar :

$$0 < \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \forall x, y \in R, x \neq y \quad (3.2)$$

Burada μ_i pozitif sabitlerdir. Bu özelliği sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in \mathcal{S}$ ile gösterilir. Bu tür fonksiyonlar sürekli artan bir özelliğe sahiptir. Bu koşul oldukça sınırlayıcıdır ve bu varsayım birçok durumda da kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının karakteristiğini ifade etmekte yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle yapay sinir ağlarında kullanılacak aktivasyon fonksiyonlarının kümesini daha geniş tutmakta yarar vardır. Çünkü böyle bir seçim yapay sinir ağlarının, kullanıldığı uygulamalardaki performansını da pozitif yönde etkiler. Bu nedenle kullanılabilecek daha geniş bir aktivasyon fonksiyonu kümesi aşağıda verilmiştir.

3.4.3. Azalmayan Türevi Sınırlı Aktivasyon Fonksiyonları:

Azalmayan türevi sınırlı aktivasyon fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlar:

$$0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall x, y \in R, x \neq y \quad (3.3)$$

Burada μ_i pozitif sabitlerdir. Bu özelliği sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu

küme $f \in \mathcal{K}$ ile gösterilecektir. $\mathcal{K}$ sınıfı, $\mathcal{S}$ sınıfına göre daha fazla sayıda aktivasyon fonksiyonu içermesine rağmen yine de monoton artan bir özelliğe sahiptir. Bu kümedeki fonksiyonlar kesin artmamakla birlikte azalmayan fonksiyonlardır, yani türevleri sıfır ya da pozitif olabilir. Literatürde $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{K}$ sınıfında olmayan, türevlerinin negatif olabileceği aktivasyon fonksiyonları da sıkça kullanılmıştır. Bu özelliklere sahip aktivasyon fonksiyonları kümesi aşağıda tanımlanmıştır.

3.4.4. Lipschitz Aktivasyon Fonksiyonları:

Lipschitz aktivasyon fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlar:

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \mu_i |x - y|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall x, y \in R, x \neq y \quad (3.4)$$

Burada $\mu_i > 0$ Lipschitz sabitini belirtmektedir. Bu özelliği sağlayan aktivasyon fonksiyonlarının oluşturduğu küme $f \in \mathcal{L}$ ile gösterilecektir.

4. GECİKMELİ YAPAY SİNİR AĞLARINDA ROBUST KARARLILIK ANALİZİ

Yapay sinir ağları, dinamik davranışının kararlı durumlar sergileyebilmesi nedeni ile bilgi işleme problemlerinde alternatif sistemler olarak kullanılabilir. Çünkü, bilgi işleme problemlerinde işlenecek bilgi genel olarak kararlı durum formundadır. Diğer yandan, nöron durumlarının zamanla değiştiği göz önüne alındığında bu tür davranış tarzına sahip olan yapay sinir ağlarının tasarımında, sistem dinamiğinin analizi oldukça önem arz etmektedir. Özellikle, tasarlanan sistemin farklı denge noktalarının kararlılık özelliklerinin incelenmesi son derece önemlidir.

Hopfield'ın oluşturduğu ilk yapay sinir ağı modeli bazı optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Söz konusu modelde Hopfield'ın kullandığı enerji fonksiyonu ile sistemin kararlı olduğunun gösterilebilmesi için sınırlı ve kesin artan aktivasyon fonksiyonu kullanılmalı ve nöronlar arası etkileşim simetrik olmalıdır. Ancak Hopfield modeli üzerinde daha sonra yapılan çalışmalarda kararlılığın sağlanabilmesi için sınırlılık ve simetri gibi kısıtlamaların zorunlu olmadığı gösterilmiştir. Bu sayede Hopfield yapay sinir ağı modelinden yararlanılarak pek çok değişik kararlılık analizi yapılmıştır.

Yapay sinir ağlarının elektronik gerçekleştirilmesinde, zaman gecikmesi kaçınılmazdır. Zaman gecikmeleri genel olarak yapay sinir ağlarının dinamik davranışı üzerinde önemli bir etkiye sahip olmaktadır. Bu nedenle, gecikmenin sistem davranışı üzerindeki etkisini de göz önüne alarak kararlılık analizinin buna göre yapılması gerekmektedir.

Yapay sinir ağlarının modellenmesinde kullanılan elektronik devre elemanlarının dış etkiler nedeniyle değer değiştirmesi sistem dinamiğini etkilemektedir. Bu parametrik belirsizlik ise yapay sinir ağlarının kararlı yapısını bozar. Bu nedenle, yapay sinir ağlarının robust kararlı olması bu parametre belirsizliklerinden etkilenmemesini sağlar.

4.1. DİNAMİK YAPAY SİNİR AĞI MODELİ

Bu tez kapsamında yapılan çalışmalarda, aşağıdaki iki farklı diferansiyel denklem modeli ile tanımlanmış gecikmeli yapay sinir ağı sistemleri göz önüne alınacaktır.

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_{ij})) + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

Yukarıdaki denklemlerde, n nöronların sayısını; $x_i(t)$, t zamanında i . nöronun durumunu; $f_i(\cdot)$ nöronların durum-çıkış ilişkisini belirleyen doğrusal olmayan aktivasyon fonksiyonları; a_{ij} ve b_{ij} sırasıyla t ve $t - \tau_j(t)$ ya da t ve $t - \tau_{ij}$ zamanlarında j ve i nöronları arasındaki etkileşim katsayısını; $\tau_j(t)$ zamanla değişen gecikmeleri; τ_{ij} , işaret j nöronundan i nöronuna iletilirken meydana gelen gecikmeyi; u_i , i . nörona ait sabit girişi; c_i ise i nöronunun yakınsama hızını ifade etmektedir.

Bazen (4.2) modelinin özel durumlarını analiz etmek daha kolay olmaktadır. Bu yüzden bu tezde özellikle gecikme parametrelerinin kararlılık sonuçları üzerindeki etkilerini daha azaltmak için $\tau_{ij} = \tau_j$ özel durumu da göz önüne alınacaktır. $\tau_{ij} = \tau_j$ için (4.2) ile verilen yapay sinir ağı modeli aşağıdaki formda yazılabilir :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j)) + u_i \quad (4.3)$$

(4.1) ve (4.3) denklemleri vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau(t))) + u \quad (4.4)$$

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t - \tau)) + u \quad (4.5)$$

Bu denklemlerde $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ durum vektörünü, $C = \text{diag}(c_i > 0)$ pozitif diyagonal matrisi, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ve $B = (b_{ij})_{n \times n}$ sırasıyla gecikmesiz ara bağlantı matrisi ve gecikmeli ara bağlantı matrisini ifade etmektedir. $f(x(t)) = (f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t)))^T$ ile $f(x(t - \tau(t))) = (f_1(x_1(t - \tau_1(t))), f_2(x_2(t - \tau_2(t))), \dots, f_n(x_n(t - \tau_n(t))))^T$ lineer olmayan aktivasyon fonksiyonların vektörünü ve $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ sabit giriş vektörünü ifade etmektedir.

Literatürde (4.1)-(4.5) ile verilen yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının varlığını, tekliğini ve global asimtotik kararlılığını sağlayan koşulların elde edildiği pek çok çalışma vardır. Söz konusu çalışmalarda denge noktasının istenilen kararlılık özelliklerini sağlayan yeni koşullar, sistemin aktivasyon fonksiyonu ve parametreleri üzerinde farklı varsayımlar yapılarak geliştirilen Lyapunov fonksiyonları sayesinde elde edilmiştir. Çalışmalarda elde edilen koşullar test edilirken nöronların bağlantı matrisleri incelenir. Bu matrislerin matris teorisine bağlı olarak belli özellikleri sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Matrislerde bu özellikler test edilirken parametre değerlerindeki küçük sapmaların test sonucunu etkilediği görülmüştür. (4.1) ve (4.2) ile verilen yapay sinir ağı modelinin bu sapmalardan etkilenmemesi için sistem parametrelerinin, robust kararlılığı sağlaması amacıyla tanımlanan, alt ve üst sınırlar arasında olması gereklidir. Buna göre bu yapay sinir ağı modelinde yer alan matrisler için aşağıdaki tanım aralıklarının kullanılması gerekmektedir :

$$C_I := \{C = \text{diag}(c_i) : 0 < \underline{C} \leq C \leq \overline{C}, i.e., 0 < \underline{c}_i \leq c_i \leq \overline{c}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$A_I := \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.6)$$

$$B_I := \{B = (b_{ij}) : \underline{B} \leq B \leq \overline{B}, i.e., \underline{b}_{ij} \leq b_{ij} \leq \overline{b}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$$

Analizlere geçmeden önce, kararlılık koşullarının elde edilmesinde önemli rolü olan bazı tanım ve kuralları ifade etmekte fayda vardır:

Yukarıdaki bilgiler ışığında yapay sinir ağlarının robust kararlılığı için aşağıdaki genel tanım yapılabilmektedir:

Tanım 4.1.1 [58]:

(4.1) ve (4.2) ile tanımlanan yapay sinir ağının denge noktası $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ bütün $C \in C_I$, $A \in A_I$, $B \in B_I$ için global asimtotik kararlı ise bu yapay sinir ağı global asimtotik robust kararlıdır.

Tanım 4.1.2 [1]:

C^0 'ın elemanı olan ve $H : R^n \rightarrow R^n$ tanımlı bir H operatörünün kendi üzerinde homeomorfizm olması için H operatörünün birebir ve örten olması ve tersi olan H^{-1} 'in de C^0 kümesine ait olması gerekir.

Kural 4.1.1 [1]:

C^0 kümesine ait ve tersi alınabilir $H : R^n \rightarrow R^n$ operatörünün örten olması için aşağıdaki koşulun sağlanması yeterlidir:

$$\|x\| \rightarrow \infty \text{ iken } \|H(x)\| \rightarrow \infty$$

Kural 4.1.2 [1]:

$H : R^n \rightarrow R^n$ tanımlanmış bir operatör olsun. $H \in C^0$ ise ve her $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ koşulu sağlanıyorsa H operatörünün tersi mevcuttur ve $H^{-1} \in C^0$ 'dır.

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ (4.1) ile verilen yapay sinir ağı modelinin denge noktası olsun. Bu durumda x^* aşağıdaki denklemi sağlar.

$$-Cx^* + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0 \quad (4.7)$$

Ayrıca aşağıdaki operatör göz önüne alınsın.

$$H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u = 0 \quad (4.8)$$

(4.7) ve (4.8) denklemleri incelendiğinde (4.8) denkleminin çözümünün (4.7) denkleminin denge noktasındaki çözümüne eşit olduğu görülür. Bu nedenle, (4.7) denkleminin bir tek çözümünün olabilmesi için (4.8) ile verilen $H(x) = 0$ operatörünün R^n 'de homeomorfizm olması gerekir.

Yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki kural ifade edilebilmektedir.

Kural 4.1.3 [1]:

(4.1) ve (4.2) ile ifade edilen yapay sinir ağı modellerinin en az bir denge noktasının var olması ve bu denge noktasının tek olması için $H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u = 0$ ile tanımlanan operatörün aşağıdaki iki şartı sağlaması gerekir.

$$(i) \quad x, y \in R^n, \forall x \neq y \text{ için } H(x) \neq H(y),$$

$$(ii) \quad \|x\| \rightarrow \infty \text{ iken } \|H(x)\| \rightarrow \infty$$

Böylece (4.1) ve (4.2) ile tanımlanan yapay sinir ağlarının denge noktasının varlığı ve tekliği için ihtiyaç duyulan temel araçlar elde edilmiştir. Bunu takiben aşağıda verilmiş olan sonuç, elde edilecek bazı sonuçların ispatında önemli rol oynamaktadır :

Kural 4.1.4 [58] :

$A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ ve $B \in [\underline{B}, \overline{B}]$ aralıkları ile tanımlanmış olsun. Ayrıca A^*, A_*, B^*, B_* matrisleri aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}) \quad A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$$

$$B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B}) \quad B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$$

Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir :

$$\|A\|_2 \leq \|A^*\|_2 + \|A_*\|_2$$

$$\|B\|_2 \leq \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$$

Kural 4.1.5'i vermeden önce aşağıdaki eşitlikleri incelemekte fayda vardır :

A matrisi, $A \in A_I := \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ şeklinde reel bir matris olsun. Bu durumda a_{ij} aşağıdaki şekilde açıklanabilir :

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(\overline{a}_{ij} + \underline{a}_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}), \quad -1 \leq \sigma_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$ ve $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\overline{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$ ile $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$, $-1 \leq \sigma_{ij} \leq 1, i, j = 1, 2, \dots, n$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda, A matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$A = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}) + \tilde{A} = A^* + \tilde{A}$$

Buna göre aşağıda verilen sonuç kolay bir şekilde ispatlanabilir :

Kural 4.1.5 :

Eğer $A \in A_I := \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}, i.e., \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$ ise, herhangi bir P pozitif diyagonal matrisi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$$

burada $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$.

İspat :

Herhangi bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ vektörü için :

$$\begin{aligned} x^T(PA + A^T P)x &= x^T(PA^* + A^{*T} P)x + x^T(P\tilde{A} + \tilde{A}^T P)x \\ &= x^T(PA^* + A^{*T} P)x + x^T P \tilde{A} x + x^T \tilde{A}^T P x \\ &\leq x^T(PA^* + A^{*T} P)x + |x^T P \tilde{A}| |x| + |x^T \tilde{A}^T P| |x| \end{aligned}$$

$|\tilde{a}_{ij}| \leq \frac{1}{2}(\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ olması, $|\tilde{A}| \leq A_*$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, $|x^T|P|\tilde{A}||x| \leq |x^T|PA_*|x|$ olduğu açıkça anlaşılır. Böylece

$$PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$$

olduğunu belirterek aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\begin{aligned} x^T(PA + A^T P)x &\leq x^T(PA^* + A^{*T} P)x + |x^T|PA_*|x| + |x^T|A_*^T P|x| \\ &= x^T(PA^* + A^{*T} P)x + |x^T|(PA_* + A_*^T P)|x| \\ &\leq x^T(PA^* + A^{*T} P)x + \|PA_* + A_*^T P\|_2 x^T x \\ &= x^T(PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I)x \end{aligned}$$

4.2. DENGİ NOKTASININ VARLIĞI VE TEKLİĞİ ANALİZİ

Teorem 4.2.1 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için $f \in \mathcal{L}$ koşulu sağlansın ve $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$, $L = \text{diag}(\ell_i > 0)$ olsun. Eğer,

$$\Omega = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)I - \left(\frac{1}{\alpha}(\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + \frac{1}{\beta}(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) L^2 > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif α ve β sabitleri mevcut ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

İspat :

Denge noktasının varlığını ve tekliğini ispatlamak için aşağıdaki operatör kullanılacaktır :

$$H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u \quad (4.9)$$

(4.4) sisteminin denge noktası x^* aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$-Cx^* + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0$$

$H(x) = 0$ 'ın her çözümü (4.4)'ün denge noktası olduğu için Kural 4.1.3'ten de anlaşıldığı gibi eğer $H(x)$, R^n 'de homeomorfizm ise yapay sinir ağı sistemi (4.4) her u giriş vektörü için tek bir denge noktasına sahiptir. $\Omega > 0$ olması durumunda, $H(x)$ 'in R^n 'de homeomorfizm olduğu ispatlanacaktır. Bunun için, $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in R^n$ gibi iki vektör seçilir. (4.9) ile tanımlanan $H(x)$ için, aşağıdaki denklem yazılabilir :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.10)$$

Bu teoremden kullanılan aktivasyon fonksiyonları için $x \neq y$ olması durumunda iki durum ortaya çıkmaktadır. Birinci durum $x \neq y$ iken $f(x) - f(y) = 0$, diğer durum ise $f(x) - f(y) \neq 0$ olmasıdır.

$x \neq y$, $f(x) - f(y) = 0$ olma durumu incelendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y)$$

Burada C pozitif diyagonal matris olduğu için $x - y \neq 0$ olması $H(x) \neq H(y)$ olmasını sağlar. Bunun dışında $x - y \neq 0$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$ olması durumu değerlendirildiğinde (4.10)'un her iki tarafının $2(x - y)^T$ ile çarpılması ile aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned} 2(x - y)^T(H(x) - H(y)) &= -2(x - y)^T C(x - y) \\ &\quad + 2(x - y)^T A(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(x - y)^T B(f(x) - f(y)) \\ &\leq -2(x - y)^T \underline{C}(x - y) + \alpha(x - y)^T(x - y) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}(f(x) - f(y))^T A^T A(f(x) - f(y)) \\ &\quad + \beta(x - y)^T(x - y) \\ &\quad + \frac{1}{\beta}(f(x) - f(y))^T B^T B(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq -2(x-y)^T \underline{C}(x-y) + \alpha(x-y)^T(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \|A\|_2^2 (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
&\quad + \beta(x-y)^T(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \|B\|_2^2 (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
&\leq -2(x-y)^T \underline{C}(x-y) \\
&\quad + \alpha(x-y)^T(x-y) + \frac{1}{\alpha} \|A\|_2^2 (x-y)^T L^2(x-y) \\
&\quad + \beta(x-y)^T(x-y) + \frac{1}{\beta} \|B\|_2^2 (x-y)^T L^2(x-y)
\end{aligned}$$

$\|A\|_2 \leq \|A^*\|_2 + \|A_*\|_2$ ve $\|B\|_2 \leq \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$ olduğu için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned}
2(x-y)^T(H(x) - H(y)) &\leq -2(x-y)^T \underline{C}(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 (x-y)^T L^2(x-y) \\
&\quad + \alpha(x-y)^T(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{\beta} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 (x-y)^T L^2(x-y) \\
&\quad + \beta(x-y)^T(x-y) \\
&= -(x-y)^T \Omega(x-y)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$\Omega > 0$ olması,

$$(x-y)^T(H(x) - H(y)) < 0, \forall x \neq y$$

olmasını sağlar. Buradan $x \neq y$ olduğunda $H(x) \neq H(y)$ olduğu sonucuna ulaşılabilir.

$\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ koşulunu sağlamak için, (4.11)'de $y = 0$ alalım, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$2x^T(H(x) - H(0)) \leq -x^T \Omega x$$

eşitsizliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$2\|x\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 \geq \lambda_m(\Omega) \|x\|_2^2$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ ve $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ eşitsizliklerini kullanarak, $2\|H(x)\|_1 \geq \lambda_m(\Omega)\|x\|_2 - 2\|H(0)\|_1$ eşitsizliği elde edilir. $\|H(0)\|_1$ sonlu olduğu için, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olur. Bu nedenle, Teorem 4.2.1'in koşulları altında, yapay sinir ağı (4.4) tek bir denge noktasına sahiptir.

Teorem 4.2.2 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için $f \in \mathcal{L}$ koşulu sağlansın ve $\hat{A} = (a_{ij}^*)_{n \times n}$, $a_{ij}^* = \max\{|a_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}$ $\hat{B} = (b_{ij}^*)_{n \times n}$, $b_{ij}^* = \max\{|b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$, $L = \text{diag}(\ell_i > 0)$ olsun. Eğer,

$$\Theta = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)L^2 - \frac{1}{\alpha}\hat{A}\hat{A}^T - \frac{1}{\beta}\hat{B}\hat{B}^T > 0$$

koşulunu sağlayan pozitif α ve β sabitleri mevcut ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

İspat :

İspatın yapılabilmesi için öncelikle aşağıdaki eşitsizliklerin belirlenmesi gerekir :

$$\begin{aligned}
2(x - y)^T A(f(x) - f(y)) &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i - y_i)(f_j(x) - f_j(y)) \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_i - y_i| |f_j(x) - f_j(y)| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_j |a_{ij}| |x_i - y_i| |x_j - y_j| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_j a_{ij}^* |x_i - y_i| |x_j - y_j| \\
&= 2|x - y|^T \hat{A} L |x - y| \\
&\leq \alpha |x - y|^T L^2 |x - y| + \frac{1}{\alpha} |x - y|^T \hat{A} \hat{A}^T |x - y| \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2(x-y)^T B(f(x) - f(y)) &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_i - y_i)(f_j(x) - f_j(y)) \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |x_i - y_i| |f_j(x) - f_j(y)| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_j |b_{ij}| |x_i - y_i| |x_j - y_j| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \ell_j b_{ij}^* |x_i - y_i| |x_j - y_j| \\
&= 2|x-y|^T \hat{B} L |x-y| \\
&\leq \beta |x-y|^T L^2 |x-y| + \frac{1}{\beta} |x-y|^T \hat{B} \hat{B}^T |x-y| \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$-2(x-y)^T C(x-y) \leq -2|x-y|^T \underline{C} |x-y| \quad (4.14)$$

Aşağıdaki eşitliğin de belirtilmesi gerekmektedir :

$$\begin{aligned}
2(x-y)^T (H(x) - H(y)) &= -2(x-y)^T C(x-y) + 2(x-y)^T A(f(x) - f(y)) \\
&\quad + 2(x-y)^T B(f(x) - f(y)) \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Bu nedenle, (4.12)-(4.14)'ü (4.15)'te kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned}
2(x-y)^T (H(x) - H(y)) &\leq -2|x-y|^T \underline{C} |x-y| \\
&\quad + \alpha |x-y|^T L^2 |x-y| + \frac{1}{\alpha} |x-y|^T \hat{A} \hat{A}^T |x-y| \\
&\quad + \beta |x-y|^T L^2 |x-y| + \frac{1}{\beta} |x-y|^T \hat{B} \hat{B}^T |x-y| \\
&= -|x-y|^T \Theta |x-y| \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$\Theta > 0$ olduğu için

$$(x-y)^T (H(x) - H(y)) < 0, \forall x \neq y$$

olur. Bu eşitsizlikten de $x \neq y$ iken $H(x) \neq H(y)$ sonucu elde edilir.

(4.16)'da $y = 0$ iken

$$2x^T(H(x) - H(0)) \leq -|x|^T \Theta |x|$$

olur. Bu eşitsizlikten, aşağıdaki eşitsizlik elde edilebilir :

$$2\|x\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 \geq \lambda_m(\Theta) \|x\|_2^2$$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ ve $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ eşitsizliklerini kullanarak, $2\|H(x)\|_1 \geq \lambda_m(\Theta) \|x\|_2 - 2\|H(0)\|_1$ eşitsizliği elde edilir. $\|H(0)\|_1$ sonlu olduğu için, $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olur. Bu nedenle, Teorem 4.2.2'nin koşulları altında, yapay sinir ağı (4.4) tek bir denge noktasına sahiptir.

(4.4) ile verilen yapay sinir ağı sistemi için denge noktasının varlığının ve tekliğinin ispatı tamamlanmıştır. (4.5) ile verilen yapay sinir ağı sistemi için denge noktasının varlığının ve tekliğinin ispatı Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4'te verilmektedir.

Teorem 4.2.3 :

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için $f \in \mathcal{K}$ koşulu sağlansın ve $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$, $r = \min(\frac{p_i c_i}{\mu_i})$, $\tau_{ij} = \tau_j$ olsun. Eğer,

$$\Phi = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris mevcut ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

İspat :

İspatı gerçekleştirebilmek için denge noktasının varlığını ve tekliğini belirten koşulları göstermek ve (4.5) ile ilgili aşağıdaki eşlemeyi tanımlamak gereklidir :

$$H(x) = -Cx + Af(x) + Bf(x) + u \quad (4.17)$$

x^* 'ın, (4.5)'in denge noktası olması halinde aşağıdaki eşitliği sağladığı bilinmektedir :

$$-Cx^* + Af(x^*) + Bf(x^*) + u = 0$$

$H(x) = 0$ 'ın her çözümünün, (4.1)'in denge noktası olduğu açıktır. Bu yüzden, Kural 4.1.3'e göre $H(x)$, R^n 'de homeomorfizm ise (4.5)'te tanımlanan yapay sinir ağı sisteminin her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır denilebilir. $H(x)$ 'in R^n 'de homeomorfizm olduğunu ispatlamak için, $x \neq y$ olmak üzere $x \in R^n$ ve $y \in R^n$ vektörlerini incelemek gereklidir. (4.17) ile tanımlanan $H(x)$ için aşağıdaki denklem yazılabilir :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y) + A(f(x) - f(y)) + B(f(x) - f(y)) \quad (4.18)$$

$\mathcal{K}$ sınıfına ait fonksiyonlar için, $x \neq y$ olması durumunda, $f(x) - f(y) = 0$ veya $f(x) - f(y) \neq 0$ olur. $x \neq y$ ve $f(x) - f(y) = 0$ durumları için, aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$H(x) - H(y) = -C(x - y)$$

Burada C pozitif diyagonal matris olduğu için $x - y \neq 0$ olması $H(x) \neq H(y)$ olmasını sağlar. $x - y \neq 0$ ve $f(x) - f(y) \neq 0$ olması durumu incelenirken $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris olsun. Bu durumda (4.18)'in her iki tarafı $2(f(x) - f(y))^T P$ ile çarpılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned} 2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) &= -2(f(x) - f(y))^T PC(x - y) \\ &\quad + 2(f(x) - f(y))^T PA(f(x) - f(y)) \\ &\quad + 2(f(x) - f(y))^T PB(f(x) - f(y)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Buna göre aşağıdaki eşitlik yazılabilir :

$$2(f(x) - f(y))^T PA(f(x) - f(y)) = (f(x) - f(y))^T (PA + A^T P)(f(x) - f(y))$$

Kural 4.1.5'ten $PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$ olduğu biliniyor. Böylece, aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned}
& (f(x) - f(y))^T (PA + A^T P)(f(x) - f(y)) \\
& \leq (f(x) - f(y))^T (PA^* + A^{*T} P)(f(x) - f(y)) \\
& \quad + \|PA_* + A_*^T P\|_2 (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Aynı zamanda Kural 4.1.4'ten $\|PB\|_2 \leq \|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)$ olduğu biliniyor. Böylece, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T PB(f(x) - f(y)) \\
& \leq 2\|PB\|_2 \|f(x) - f(y)\|_2^2 \\
& \leq 2\|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Aşağıdaki eşitsizliği yazmak da mümkündür:

$$\begin{aligned}
-2(f(x) - f(y))^T PC(x - y) &= -2 \sum_{i=1}^n p_i c_i (f_i(x_i) - f_i(y_i))(x_i - y_i) \\
&\leq -2 \sum_{i=1}^n \frac{p_i c_i}{\mu_i} (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&\leq -2r \sum_{i=1}^n (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&= -2r(f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Burada $r = \min(\frac{p_i c_i}{\mu_i})$. (4.20)-(4.22)'yi (4.19)'da kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \\
& \leq -2r(f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
& \quad + (f(x) - f(y))^T (PA^* + A^{*T} P)(f(x) - f(y)) \\
& \quad + \|PA_* + A_*^T P\|_2 (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
& \quad + 2\|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.23) aşağıdaki eşitsizliğe denktir :

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) \leq -(f(x) - f(y))^T \Phi (f(x) - f(y)) \tag{4.24}$$

Eğer $f(x) - f(y) \neq 0$ ve $\Phi > 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır :

$$2(f(x) - f(y))^T P(H(x) - H(y)) < 0$$

P pozitif diyagonal matris olduğu için $f(x) - f(y) \neq 0$ olması $H(x) \neq H(y)$ olduğunu gösterir. Bu da tüm $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ olması demektir.

$y = 0$ için, (4.24) aşağıdaki şekli alır :

$$2(f(x) - f(0))^T P(H(x) - H(0)) \leq -(f(x) - f(0))^T \Phi(f(x) - f(0))$$

Bunu aşağıdaki şekilde de yazmak mümkündür :

$$|2(f(x) - f(0))^T P(H(x) - H(0))| \geq (f(x) - f(0))^T \Phi(f(x) - f(0))$$

Bu da aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$2\|P\|_\infty \|f(x) - f(0)\|_\infty \|H(x) - H(0)\|_1 > \lambda_m(\Phi) \|f(x) - f(0)\|_2^2$$

$\|f(x) - f(0)\|_\infty \leq \|f(x) - f(0)\|_2$, $\|H(x) - H(0)\|_1 \leq \|H(x)\|_1 + \|H(0)\|_1$ ve $\|f(x) - f(0)\|_2 \geq \|f(x)\|_2 - \|f(0)\|_2$ durumları kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\|H(x)\|_1 > \frac{\lambda_m(\Phi) \|f(x)\|_2 - \lambda_m(\Phi) \|f(0)\|_2 - 2\|P\|_\infty \|H(0)\|_1}{2\|P\|_\infty}$$

$\|P\|_\infty$, $\|H(0)\|_1$ ve $\|f(0)\|_2$ sonlu olduğu için $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olur. Böylece, Kural 4.1.4'ten $H(x) : R^n \rightarrow R^n$ eşlemesinin, R^n 'de homeomorfizm olduğu ve yapay sinir ağı sistemi (4.2)'nin çözümü olan $H(x^*) = 0$ gibi tek bir x^* olduğu anlaşılmıştır. Böylece, denge noktasının varlığının ve tekliğinin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.4 :

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları için $f \in \mathcal{K}$ koşulu sağlansın ve $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $\hat{B} = (b_{ij}^*)_{n \times n}$, $b_{ij}^* = \max\{|b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$, $r = \min(\frac{p_i \xi_i}{\mu_i})$ olsun. Eğer,

$$\Theta = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - \|P\|_2(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty)I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris mevcut ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde her u giriş vektörü için tek bir denge noktası vardır.

İspat:

Öncelikle aşağıdaki eşitsizliği belirtmekte fayda vardır :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T P B(f(x) - f(y)) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} (f_i(x_i) - f_i(y_i))(f_j(x_j) - f_j(y_j)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i |b_{ij}| |f_i(x_i) - f_i(y_i)| |f_j(x_j) - f_j(y_j)| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| ((f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 + (f_j(x_j) - f_j(y_j))^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j |b_{ji}| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}^*| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j |b_{ji}^*| (f_i(x_i) - f_i(y_i))^2 \\
&\leq \|P\|_2 (\|\hat{B}\|_\infty + \|\hat{B}\|_1) (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.25}$$

(4.20), (4.22) ve (4.25)'i (4.19)'da kullanarak, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned}
& 2(f(x) - f(y))^T P (H(x) - H(y)) \\
&\leq -2r(f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
&\quad + (f(x) - f(y))^T (PA^* + A^{*T}P)(f(x) - f(y)) \\
&\quad + \|PA_* + A_*^T P\|_2 (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y)) \\
&\quad + \|P\|_2 (\|\hat{B}\|_\infty + \|\hat{B}\|_1) (f(x) - f(y))^T (f(x) - f(y))
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Bu da aşağıdaki eşitsizliğe denktir :

$$2(f(x) - f(y))^T P (H(x) - H(y)) \leq -(f(x) - f(y))^T \Theta (f(x) - f(y)) \tag{4.27}$$

(4.27), (4.24) ile tamamen aynı biçimdedir. (4.24)'teki Φ , Θ ile değiştirildiğinde (4.27) elde edilir. (4.24) için, $\Phi > 0$ olursa $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olduğu ve tüm $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ olduğu ispatlanmıştı. Bu yüzden, $\Theta > 0$ olduğunda $\|x\| \rightarrow \infty$ iken $\|H(x)\| \rightarrow \infty$ olduğu ve tüm $x \neq y$ için $H(x) \neq H(y)$ olduğu sonucuna varılabilir. Böylece, denge noktasının varlığının ve tekliğinin ispatı tamamlanmıştır.

4.3. DENGİ NOKTASININ KARARLILIK ANALİZİ

Denge noktasının varlığı ve tekliği ispatlandıktan sonra denge noktasının kararlılık analizini gerçekleştirebilmek için yeni Lyapunov fonksiyonları tanımlayarak bu fonksiyonların Lyapunov teoremleri ışığında analizlerini yaparak sonuçlar elde edilecektir. Elde edilecek kararlılık sonuçlarının ispatlarını kolaylaştırmak için öncelikle sistem (4.4)'e ait denge noktasını orijine ötele-mekte fayda vardır. $z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümü kullanılarak (4.4) ile verilen yapay sinir ağı modelini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek mümkündür :

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(z_j(t - \tau_j(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.28)$$

Burada $g_i(z_i(\cdot)) = f_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - f_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$. g_i fonksiyonunun f_i aktivasyon fonksiyonu üzerindeki varsayımları sağladığı kolaylıkla doğrulanabilir, yani $f \in \mathcal{L}$ olması, $g \in \mathcal{L}$ olması demektir. Aynı zamanda $g_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ olduğunu da belirtmek gerekir. Dönüştürülmüş sistemin denge noktası $z^* = 0$, (4.4) ile verilen sistemin denge noktası olan x^* ile aynı dinamik davranış özellikleri sergiler. Bu nedenle sistem (4.4)'ün denge noktasının kararlılığı üzerinde düşünmektense dönüştürülmüş sistem (4.28)'in orijininin kararlılığını ispatlamak yeterlidir.

Yapay sinir ağı sistemi (4.28) vektör-matris formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir :

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau(t))) \quad (4.29)$$

Burada $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T \in R^n$ dönüştürülen sistemin durum vektörüdür. Aktivasyon fonksiyonları $g(z(t)) = (g_1(z_1(t)), g_2(z_2(t)), \dots, g_n(z_n(t)))^T$ vektörü ile temsil edilir.

Ayrıca $g(z(t - \tau)) = (g_1(z_1(t - \tau_1)), g_2(z_2(t - \tau_2)), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n)))^T$ dir.

Denge noktasının kararlılık koşullarının elde edilmesine aşağıdaki teorem ile başlanabilir :

Teorem 4.3.1 :

(4.29) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve τ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\Omega^* = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)I - \left(\frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 - \mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) L^2 > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.29) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global asimtotik kararlıdır.

İspat :

Aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu oluşturalım :

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + \frac{k}{\beta} \frac{1}{1 - \mu} \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i(t)}^t g_i^2(z_i(\zeta)) d\zeta + \epsilon \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i(t)}^t z_i^2(\zeta) d\zeta$$

Burada k ve ϵ daha sonra belirlenecek pozitif sabitlerdir. Fonksiyonun zamana bağlı türevi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \\ &\quad + 2z^T(t)Bg(z(t - \tau(t))) + \frac{k}{\beta} \frac{1}{1 - \mu} \sum_{i=1}^n g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad - \frac{k}{\beta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu} \right) g_i^2(z_i(t - \tau_i(t))) + \epsilon \sum_{i=1}^n z_i^2(t) \\ &\quad - \epsilon \sum_{i=1}^n (1 - \dot{\tau}_i(t)) z_i^2(t - \tau_i(t)) \\ &\leq -2z^T(t)\underline{C}z(t) + \alpha z^T(t)z(t) + \frac{1}{\alpha} g^T(z(t))A^T Ag(z(t)) \\ &\quad + \beta z^T(t)z(t) + \frac{1}{\beta} g^T(z(t - \tau(t)))B^T Bg(z(t - \tau(t))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k}{\beta} \frac{1}{1-\mu} \sum_{i=1}^n g_i^2(z_i(t)) - \frac{k}{\beta} \sum_{i=1}^n g_i^2(z_i(t - \tau_i(t))) \\
& + \epsilon z^T(t) z(t) \\
\leq & -2z^T(t) \underline{C} z(t) + \alpha z^T(t) z(t) \\
& + \beta z^T(t) z(t) + \frac{1}{\alpha} \|A\|_2^2 g^T(z(t)) g(z(t)) \\
& + \frac{1}{\beta} \|B\|_2^2 g^T(z(t - \tau(t))) g(z(t - \tau(t))) \\
& + \frac{k}{\beta} \frac{1}{1-\mu} g^T(z(t)) g(z(t)) \\
& - \frac{k}{\beta} g^T(z(t - \tau(t))) g(z(t - \tau(t))) + \epsilon z^T(t) z(t) \\
\leq & -2z^T(t) \underline{C} z(t) + \alpha z^T(t) z(t) + \beta z^T(t) z(t) \\
& + \frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 g^T(z(t)) g(z(t)) \\
& + \frac{1}{\beta} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 g^T(z(t - \tau(t))) g(z(t - \tau(t))) \\
& + \frac{k}{\beta} \frac{1}{1-\mu} g^T(z(t)) g(z(t)) \\
& - \frac{k}{\beta} g^T(z(t - \tau(t))) g(z(t - \tau(t))) + \epsilon z^T(t) z(t)
\end{aligned}$$

$k = (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq -2z^T(t) \underline{C} z(t) + \alpha z^T(t) z(t) + \beta z^T(t) z(t) \\
& + \frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 g^T(z(t)) g(z(t)) \\
& + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1-\mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 g^T(z(t)) g(z(t)) + \epsilon z^T(t) z(t) \\
& \leq -2z^T(t) \underline{C} z(t) + \alpha z^T(t) z(t) + \beta z^T(t) z(t) \\
& + \frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 z^T(t) L^2 z(t) \\
& + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1-\mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 z^T(t) L^2 z(t) + \epsilon z^T(t) z(t) \\
& = -z^T(t) \Omega^* z(t) + \epsilon z^T(t) z(t) \\
& \leq -(\lambda_{\min}(\Omega^*) - \epsilon) \|z(t)\|_2^2
\end{aligned}$$

$\epsilon < \lambda_{\min}(\Omega^*)$ seçeneği tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmasını sağlar. $z(t) = 0$ olsun. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde olur :

$$\dot{V}(z(t)) = -\frac{k}{\beta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - \dot{\tau}_i(t)}{1 - \mu} \right) g_i^2(z_i(t - \tau_i(t))) - \epsilon \sum_{i=1}^n (1 - \dot{\tau}_i(t)) z_i^2(t - \tau_i(t))$$

$$\leq -\epsilon(1-\mu) \sum_{i=1}^n z_i^2(t - \tau_i(t))$$

Burada tüm $z(t - \tau(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Diğer taraftan, eğer $z(t) = z(t - \tau(t)) = 0$ ise, (aynı zamanda $g(z(t)) = g(z(t - \tau(t))) = 0$ olması anlamına gelir), $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur. Bu nedenle, sadece ve sadece $z(t) = z(t - \tau(t)) = g(z(t)) = g(z(t - \tau(t))) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur, aksi halde $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Böylece, sistem (4.29)'un orijini veya sistem (4.4)'ün denge noktası global asimtotik kararlıdır sonucunu çıkarılabilir. Ya da (4.4) sistemi global asimtotik robust kararlıdır denilebilir.

Teorem 4.3.2 :

(4.29) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\Theta^* = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)L^2 - \frac{1}{\alpha}\hat{A}\hat{A}^T - \frac{1}{\beta(1-\mu)}\hat{B}\hat{B}^T > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.29) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinin orijini global asimtotik kararlıdır.

İspat :

Aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonunu oluşturalım :

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + \beta \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i(t)}^t \ell_i^2 z_i^2(\zeta) d\zeta$$

Fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) + 2z^T(t)Bg(z(t - \tau(t))) \\ &\quad + \beta \sum_{i=1}^n \ell_i^2 z_i^2(t) - \beta \sum_{i=1}^n (1 - \dot{\tau}_i(t)) \ell_i^2 z_i^2(t - \tau_i(t)) \\ &\leq -2|z(t)|^T C |z(t)| + 2|z(t)|^T |A| |g(z(t))| + 2|z(t)|^T |B| |g(z(t - \tau(t)))| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta \sum_{i=1}^n \ell_i^2 z_i^2(t) - \beta \sum_{i=1}^n (1 - \dot{\tau}_i(t)) \ell_i^2 z_i^2(t - \tau_i(t)) \\
\leq & -2|z(t)|^T \underline{C} |z(t)| + 2|z(t)|^T \hat{A} |g(z(t))| + 2|z(t)|^T \hat{B} |g(z(t - \tau(t)))| \\
& +\beta |z(t)|^T L^2 |z(t)| - \beta (1 - \mu) |z(t - \tau(t))|^T L^2 |z(t - \tau(t))|
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir :

$$\begin{aligned}
2|z(t)|^T \hat{A} |g(z(t))| & \leq \alpha |g^T(z(t))| |g(z(t))| + \frac{1}{\alpha} |z(t)|^T \hat{A} \hat{A}^T |z(t)| \\
& \leq \alpha |z(t)|^T L^2 |z(t)| + \frac{1}{\alpha} |z(t)|^T \hat{A} \hat{A}^T |z(t)|
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
2|z(t)|^T \hat{B} |g(z(t - \tau(t)))| & \leq \beta (1 - \mu) |g^T(z(t - \tau(t)))| |g(z(t - \tau(t)))| \\
& \quad + \frac{1}{\beta (1 - \mu)} |z(t)|^T \hat{B} \hat{B}^T |z(t)| \\
& \leq \beta (1 - \mu) |z(t - \tau(t))|^T L^2 |z(t - \tau(t))| \\
& \quad + \frac{1}{\beta (1 - \mu)} |z(t)|^T \hat{B} \hat{B}^T |z(t)|
\end{aligned} \tag{4.32}$$

(4.31) ve (4.32), (4.30)'da kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) & \leq -2|z(t)|^T \underline{C} |z(t)| + \alpha |z(t)|^T L^2 |z(t)| + \frac{1}{\alpha} |z(t)|^T \hat{A} \hat{A}^T |z(t)| \\
& \quad + \beta |z(t)|^T L^2 |z(t)| + \frac{1}{\beta (1 - \mu)} |z(t)|^T \hat{B} \hat{B}^T |z(t)| \\
& = |z(t)|^T \left(-2\underline{C} + (\alpha + \beta) L^2 + \frac{1}{\alpha} \hat{A} \hat{A}^T + \frac{1}{\beta (1 - \mu)} \hat{B} \hat{B}^T \right) |z(t)| \\
& = -|z(t)|^T \Theta^* |z(t)|
\end{aligned}$$

$\Theta^* > 0$ olması tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmasını sağlar. $z(t) = 0$ olsun. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi olur :

$$\dot{V}(z(t)) = -\beta \sum_{i=1}^n (1 - \dot{\tau}_i(t)) \ell_i^2 z_i^2(t - \tau_i(t)) \leq -\beta (1 - \mu) \sum_{i=1}^n \ell_i^2 z_i^2(t - \tau_i(t))$$

Burada tüm $z(t - \tau(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur . Diğer taraftan, $z(t) = z(t - \tau(t)) = 0$

ise, (aynı zamanda $g(z(t)) = g(z(t - \tau(t))) = 0$ olması anlamına gelir), $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur. Bu nedenle, sadece ve sadece $z(t) = z(t - \tau(t)) = g(z(t)) = g(z(t - \tau(t))) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur aksi halde $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Böylece, sistem (4.29)'un orijini veya sistem (4.4)'ün denge noktası global asimtotik kararlıdır sonucu çıkarılabilir. Diğer bir deyişle yapay sinir ağı modeli (4.4) global asimtotik robust kararlıdır denilebilir.

Teorem 4.2.1 ve 4.3.1'in sonuçları birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 4.3.3 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\Omega^* = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)I - \left(\frac{1}{\alpha}(\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 - \mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) L^2 > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat :

Teorem 4.3.3'ün ispatı, $\Omega^* > 0$ olması $\Omega > 0$ olmasını sağlar, gerçeğine dayanmaktadır.

Teorem 4.2.2 ve 4.3.2'nin sonuçları birleştirilerek aşağıdaki sonuç elde edilir :

Teorem 4.3.4 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\Theta^* = 2\underline{C} - (\alpha + \beta)L^2 - \frac{1}{\alpha} \hat{A} \hat{A}^T - \frac{1}{\beta(1 - \mu)} \hat{B} \hat{B}^T > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat :

Teorem 4.3.4'ün ispatı, $\Theta^* > 0$ olması $\Theta > 0$ olmasını sağlar, gerçeğine dayanmaktadır.

Kararlılık koşullarını sadece ağ parametreleri açısından açıklamak için, α ve β 'nin bazı özel seçenekleri için Teorem 4.3.3 ve 4.3.4'ün sonuçları özelleştirilebilir :

Sonuç 4.3.1 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Aynı zamanda $c_m = \min(\underline{c}_i)$ ile $r = \frac{c_m}{\ell_M}$ ve $\ell_M = \max(\ell_i)$ olsun. Eğer,

$$\Omega_1^* = r - \left((\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2) + \frac{1}{1 - \mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) \right) > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat:

Eğer

$$2c_m - \left(\alpha + \frac{\beta}{1 - \mu} \right) - \left(\frac{1}{\alpha} (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 - \mu} (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) \ell_M^2 > 0$$

ise $\Omega^* > 0$ olur. $\alpha = (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)\ell_M$ ve $\beta = (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)\ell_M$ alınırsa, yukarıdaki eşitsizlikten $\Omega_1^* > 0$ sonucu elde edilir. Bu şekilde, Sonuç 4.3.1'in ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.2 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\Theta_1^* = r - \|\hat{A}\|_2 - \frac{1}{(1-\mu)} \|\hat{B}\|_2 > 0$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat:

Eğer

$$2c_m - \left(\alpha + \frac{\beta}{1-\mu} \right) \ell_M^2 - \frac{1}{\alpha} \|\hat{A}\|_2^2 - \frac{1}{\beta(1-\mu)} \|\hat{B}\|_2^2 > 0$$

ise, $\Theta^* > 0$ olur. $\alpha = \frac{\|\hat{A}\|_2}{\ell_M}$ ve $\beta = \frac{\|\hat{B}\|_2}{\ell_M}$ olsun. Yukarıdaki eşitsizlikten $\Theta_1^* > 0$ sonucu elde edilir. Bu şekilde, Sonuç 4.3.2'nin ispatı tamamlanmış olur.

Sistem (4.4) için denge noktasının kararlılık analizi tamamlanmış oldu. Elde edilen koşulları, literatürde var olan koşullarla karşılaştırmadan önce yapay sinir ağı sistemi (4.5) için denge noktasının kararlılık analizini incelemekte fayda vardır :

Sistem (4.5)'in denge noktası x^* 'ı orijine öteleyelim. $z_i(\cdot) = x_i(\cdot) - x_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ dönüşümü kullanılarak sistem (4.5)'i aşağıdaki şekilde yeniden ifade etmek mümkündür :

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(z_j(t - \tau_{ij})), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.33)$$

Burada $g_i(z_i(\cdot)) = f_i(z_i(\cdot) + x_i^*) - f_i(x_i^*), i = 1, 2, \dots, n$. g_i fonksiyonunun f_i üzerindeki varsayımları sağladığı kolaylıkla doğrulanabilir, yani $f \in \mathcal{K}$ olması, $g \in \mathcal{K}$ olduğunu gösterir. Aynı zamanda $g_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ olduğunu da belirtmek gerekir. Bu nedenle sistem (4.2)

ya da (4.5)'in x^* 'ının kararlılığı üzerinde düşünmektense dönüştürülmüş sistem (4.33)'ün orijininin kararlılığını ispatlamak yeterlidir.

$\tau_{ij} = \tau_j$ için, (4.33) aşağıdaki biçimde olur :

$$\dot{z}_i(t) = -c_i z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(z_j(t - \tau_j)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Bu eşitlik aşağıdaki şekilde düzenlenebilir :

$$\dot{z}(t) = -Cz(t) + Ag(z(t)) + Bg(z(t - \tau)) \quad (4.34)$$

Burada $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$, $g(z(t)) = (g_1(z_1(t)), g_2(z_2(t)), \dots, g_n(z_n(t)))^T$ ve $g(z(t - \tau)) = (g_1(z_1(t - \tau_1)), g_2(z_2(t - \tau_2)), \dots, g_n(z_n(t - \tau_n)))^T$ dir.

Teorem 4.3.5 :

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın ve $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$, $r = \min(\frac{p_i c_i}{\mu_i})$, $\tau_{ij} = \tau_j$ olsun. Eğer,

$$\Phi = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat :

$\Phi > 0$ 'ın aynı zamanda sistem (4.34)'ün global asimtotik kararlılığını sağladığını göstermek için aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu oluşturulabilir :

$$V(z(t)) = z^T(t)z(t) + 2\alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} p_i g_i(s) ds + (\alpha\gamma + \beta) \sum_{i=1}^n \int_{t-\tau_i}^t g_i^2(z_i(\zeta)) d\zeta$$

Burada p_i , α , β ve γ daha sonra belirtilecek pozitif sabitlerdir. Fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) = & -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \\
& + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - 2\alpha g^T(z(t))PCz(t) \\
& + 2\alpha g^T(z(t))PAg(z(t)) + 2\alpha g^T(z(t))PBg(z(t-\tau)) \\
& + \alpha\gamma\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha\gamma\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& + \beta\|g(z(t))\|_2^2 - \beta\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazmak mümkündür :

$$\begin{aligned}
& -z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Ag(z(t)) \\
& \leq g^T(z(t))A^TC^{-1}Ag(z(t)) \leq \|A\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
& -z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) \leq g^T(z(t-\tau))B^TC^{-1}Bg(z(t-\tau)) \\
& \leq \|B\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha g^T(z(t))PBg(z(t-\tau)) \leq 2\alpha\|PB\|_2\|g(z(t))\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2 \\
& \leq \alpha\|PB\|_2\|g(z(t))\|_2^2 + \alpha\|PB\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$-2\alpha g^T(z(t))PCz(t) \leq -2\alpha r\|g(z(t))\|_2^2 \tag{4.39}$$

(4.36)-(4.39) eşitsizliklerini (4.35)'te kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) \leq & \|A\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t))\|_2^2 + \|B\|_2^2\|C^{-1}\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& - 2\alpha r\|g(z(t))\|_2^2 + \alpha g^T(z(t))(PA + A^TP)g(z(t)) \\
& + \alpha\|PB\|_2\|g(z(t))\|_2^2 + \alpha\|PB\|_2\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& + \alpha\gamma\|g(z(t))\|_2^2 - \alpha\gamma\|g(z(t-\tau))\|_2^2 \\
& + \beta\|g(z(t))\|_2^2 - \beta\|g(z(t-\tau))\|_2^2
\end{aligned}$$

$PA + A^T P \leq PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I$, $\|A\|_2 \leq \|A^*\|_2 + \|A_*\|_2$, $\|B\|_2 \leq \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2$, $\|PB\|_2 \leq \|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)$ ve $\|C^{-1}\|_2 \leq \|\underline{C}^{-1}\|_2$ olduğu için, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & (\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 \|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 \\ & + (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \\ & - 2\alpha r \|g(z(t))\|_2^2 \\ & + \alpha g^T(z(t)) (PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I) g(z(t)) \\ & + \alpha \|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) \|g(z(t))\|_2^2 \\ & + \alpha \|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \\ & + \alpha \gamma \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \gamma \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \\ & + \beta \|g(z(t))\|_2^2 - \beta \|g(z(t - \tau))\|_2^2 \end{aligned}$$

$\beta = (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \|\underline{C}^{-1}\|_2$ ve $\gamma = \|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)$ olarak kabul edilirse, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) \leq & \left((\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) \|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 \\ & - 2\alpha r \|g(z(t))\|_2^2 + \alpha g^T(z(t)) (PA^* + A^{*T} P + \|PA_* + A_*^T P\|_2 I) g(z(t)) \\ & + 2\alpha \|P\|_2 (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2) \|g(z(t))\|_2^2 \\ = & \left((\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) \|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 \\ & - \alpha g^T(z(t)) \Phi g(z(t)) \\ \leq & \left((\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2 \right) \|\underline{C}^{-1}\|_2 \|g(z(t))\|_2^2 \\ & - \alpha \lambda_m(\Phi) \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned}$$

$$\alpha > \frac{\|\underline{C}^{-1}\|_2 ((\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2)^2 + (\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)^2)}{\lambda_m(\Phi)}$$

seçimi, $\dot{V}(z(t))$ 'nin tüm $g(z(t)) \neq 0$ için negatif tanımlı olmasını sağlar. (Burada $g(z(t)) \neq 0$ olmasının $z(t) \neq 0$ olmasını sağladığı da belirtilmelidir). İncelenmesi gereken bir sonraki durum $g(z(t)) = 0$ ve $z(t) \neq 0$ olması durumudur. Bu durumda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi olur :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(z(t)) &= -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - \beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \\
&\quad - \alpha \gamma g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \\
&\leq -2z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - \beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau))
\end{aligned}$$

$-z^T(t)Cz(t) + 2z^T(t)Bg(z(t-\tau)) - \beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) \leq 0$ olduğu için, $\dot{V}(z(t)) \leq -z^T(t)Cz(t)$ olur. Buradan $g(z(t)) = 0$ ile, tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ negatif tanımlıdır denilebilir. Son olarak, $g(z(t)) = 0$ ve $z(t) = 0$ olması durumu aşağıdaki eşitliği oluşturur :

$$\dot{V}(z(t)) = -\beta g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau)) - \alpha \gamma g^T(z(t-\tau))g(z(t-\tau))$$

Tüm $g(z(t-\tau)) \neq 0$ için, $\dot{V}(z(t))$ 'nin negatif tanımlı olduğu açıktır. Böylece, sadece ve sadece $z(t) = g(z(t)) = g(z(t-\tau)) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur, aksi halde $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Böylece, sistem (4.34)'ün orijini ya da eşit şekilde sistem (4.5)'in denge noktası global asimtotik kararlıdır denilebilir. Diğer bir deyişle (4.5) sistemi global asimtotik robust kararlıdır.

Sistem (4.5)'in kararlılık analiziyle ilgili diğer temel sonuç aşağıda verilmektedir :

Teorem 4.3.6 :

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın ve $A^* = \frac{1}{2}(\bar{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$, $\hat{B} = (b_{ij}^*)_{n \times n}$, $b_{ij}^* = \max\{|\underline{b}_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$, $r = \min(\frac{p_i \underline{\mathcal{L}}_i}{\mu_i})$ olsun. Eğer,

$$\Theta = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - \|P\|_2 (\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty) I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

İspat:

Aşağıdaki pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu oluşturulabilir :

$$\begin{aligned}
 V(z(t)) &= \sum_{i=1}^n n z_i^2(t) + 2\alpha \sum_{i=1}^n \int_0^{z_i(t)} p_i g_i(s) ds \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\varepsilon + \alpha p_i b_{ij}^*) \int_{t-\tau_{ij}}^t g_j^2(z_j(\xi)) d\xi \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 \int_{t-\tau_{ij}}^t g_j^2(z_j(\xi)) d\xi
 \end{aligned}$$

Burada p_i , α ve ε daha sonra belirtilecek pozitif sabitlerdir. Fonksiyonun zamana göre türevi aşağıdaki gibi elde edilir :

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{i=1}^n n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\
 &- 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i c_i z_i(t) g_i(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) \\
 &+ \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2p_i b_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\
 &+ \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t)) - \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\
 &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t)) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij}))
 \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri yazılabilir :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n a_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 a_{ij}^2 g_j^2(z_j(t)) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 (a_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t))
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mathcal{C}_i} n^2 b_{ij}^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij}))$$

$$\leq \sum_{i=1}^n n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij}))$$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2 p_i b_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) &\leq \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i |b_{ij}| g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\leq \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikler doğrultusunda, $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 (a_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t)) \\ &\quad - 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i c_i z_i(t) g_i(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2 p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 [(a_{ji}^*)^2 + (b_{ji}^*)^2] g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad - 2\alpha \sum_{i=1}^n p_i c_i z_i(t) g_i(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2 p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) \\ &\quad + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j b_{ji}^* g_i^2(z_i(t)) + \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_i^2(z_i(t)) \end{aligned}$$

Aşağıdaki eşitsizlikleri de belirtmekte fayda vardır :

$$-2\alpha \sum_{i=1}^n p_i c_i z_i(t) g_i(z_i(t)) \leq -2\alpha r g^T(z(t)) g(z(t))$$

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2 p_i a_{ij} g_i(z_i(t)) g_j(z_j(t)) &= \alpha g^T(z(t)) (PA + A^T P) g(z(t)) \\ &\leq \alpha g^T(z(t)) (PA^* + A^{*T} P) g(z(t)) \\ &\quad + \alpha g^T(z(t)) \|PA_* + A_*^T P\|_2 g(z(t)) \end{aligned}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_j b_{ji}^* g_i^2(z_i(t)) \leq \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_1 \sum_{i=1}^n g_i^2(z_i(t)) = \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_1 g^T(z(t)) g(z(t))$$

$$\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_i^2(z_i(t)) \leq \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_\infty \sum_{i=1}^n g_i^2(z_i(t)) = \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_\infty g^T(z(t))g(z(t))$$

δ aşağıdaki gibi olsun :

$$\delta = \max_{\underline{C}_i} \left(\frac{1}{n^2} [(a_{ji}^*)^2 + (b_{ji}^*)^2] \right)$$

Bu eşitsizliklere göre aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta g_i^2(z_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_i^2(z_i(t)) \\ &\quad - 2\alpha g^T(z(t))g(z(t)) + \alpha g^T(z(t))(PA^* + A^{*T}P)g(z(t)) \\ &\quad + \alpha g^T(z(t))\|PA_* + A_*^T P\|_2 g(z(t)) \\ &\quad + \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_1 g^T(z(t))g(z(t)) + \alpha \|P\|_2 \|\hat{B}\|_\infty g^T(z(t))g(z(t)) \\ &= n(\delta + \varepsilon) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha g^T(z(t))\Theta g(z(t)) \\ &\leq n(\delta + \varepsilon) \|g(z(t))\|_2^2 - \alpha \lambda_m(\Theta) \|g(z(t))\|_2^2 \\ &= -(\alpha \lambda_m(\Theta) - n(\delta + \varepsilon)) \|g(z(t))\|_2^2 \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $\alpha > \frac{n(\delta + \varepsilon)}{\lambda_m(\Theta)}$ olması, tüm $g(z(t)) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t))$ 'nin negatif tanımlı olması demektir. ($g(z(t)) \neq 0$ olmasının $z(t) \neq 0$ anlamına geldiği biliniyordu). $g(z(t)) = 0$ olsun.

Bu durumda $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki gibi olur :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -2 \sum_{i=1}^n n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\quad - \alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{C}_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\leq -2 \sum_{i=1}^n n c_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2n b_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\underline{C}_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \end{aligned}$$

$-\sum_{i=1}^n nc_i z_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2nb_{ij} z_i(t) g_j(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \leq 0$
olduğu için, aşağıdaki sonuç elde edilebilir :

$$\dot{V}(z(t)) \leq -\sum_{i=1}^n nc_i z_i^2(t)$$

Bu eşitsizlik, tüm $z(t) \neq 0$ için $\dot{V}(z(t)) < 0$ olmasını sağlar. $g(z(t)) = z(t) = 0$ durumu incelendiğinde $\dot{V}(z(t))$ aşağıdaki şekilde olur :

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i b_{ij}^* g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{c_i} n^2 (b_{ij}^*)^2 g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varepsilon g_j^2(z_j(t - \tau_{ij})) \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte en az bir tane sıfır olmayan $g_j(z_j(t - \tau_{ij}))$ varsa $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Böylece, sadece ve sadece $g(z(t)) = z(t) = 0$ ve tüm i, j 'ler için $g_j(z_j(t - \tau_{ij})) = 0$ olması durumunda $\dot{V}(z(t)) = 0$ olur, aksi halde $\dot{V}(z(t)) < 0$ olur. Ayrıca, $\|z(t)\| \rightarrow \infty$ iken $V(z(t)) \rightarrow \infty$ olduğu için $V(z(t))$ radyal sınırsızdır. Böylece, sistem (4.34)'ün orijini veya eşit bir biçimde sistem (4.5)'in denge noktası global asimtotik karardır. Bu da (4.5) sisteminin global asimtotik robust kararlı olduğu anlamına gelir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar [92], [93] ve [94] numaralı referanslarda belirtilen dergi ve konferanslarda yayınlanmıştır.

5. BULGULAR

Bu bölümde, (4.1) ve (4.2) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelleri için elde edilen robust kararlılık sonuçlarının detaylı analizi yapılacak ve bu sonuçlar literatürde daha önce elde edilmiş olan diğer kararlılık sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Buna ilave olarak, bazı sayısal örnekler verilerek, bu örneklerin Matlab simülasyonları gerçekleştirilecektir.

Öncelikle yapay sinir ağı modeli (4.1) için [55]-[57]'de elde edilen sonuçları yeniden özetlemekte fayda vardır :

Teorem 5.1 [55]:

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu sağlasın ve $\mu = 0$ olsun. Eğer,

$$\alpha_i \frac{\underline{c}_i}{\ell_i} - \sum_{j=1}^n \alpha_j (a_{ji}^* + b_{ji}^*) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri var ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global üstel robust kararlıdır.

Sadece ve sadece $(\underline{C}L^{-1} - |\hat{A}| - |\hat{B}|)$ tekil olmayan M-matris olduğunda yani $L = \text{diag}(\ell_i > 0)$ iken $(\underline{C}L^{-1} - |\hat{A}| - |\hat{B}|)$ 'nin her özdeğerinin reel kısmı pozitif olduğunda yukarıdaki eşitsizliği sağlayan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri olduğu bilinmektedir.

Teorem 5.2 [56][57]:

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \tau_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Ayrıca $p_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij}^* \sum_{m=1}^n a_{mj}^*)$, $q_i = \sum_{j=1}^n (b_{ij}^* \sum_{m=1}^n b_{mj}^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $a_{ij}^* = \max\{|\underline{a}_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}$ ve $b_{ij}^* =$

$\max\{|b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}$ olsun. Eğer,

$$2d_i c_i - \frac{1}{\alpha} p_i - \frac{1}{\beta(1-\mu)} q_i - (\alpha + \beta) d_i^2 \ell_i^2 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α , β ve d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ gibi pozitif sabitler var ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global üstel robust kararlıdır.

[56] ve [57]'nin yazarları $\alpha = \beta = 1$ için Teorem 5.2'yi aşağıdaki gibi özelleştirmiştir :

Sonuç 5.1 [56][57] :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$d_i c_i - \frac{1}{2} p_i - \frac{1}{2(1-\mu)} q_i - d_i^2 \ell_i^2 > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan d_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri var ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global üstel robust kararlıdır.

d_i pozitif sabitlerinin uygun seçenekleri ile Sonuç 4.3.2 ve Teorem 4.3.2'nin sonuçlarının geliştirilebileceği kolaylıkla gösterilebilir. Bu amaçla, $2d_i c_i - (\alpha + \beta) d_i^2 \ell_i^2$ ifadesini maksimize eden d_i ile c_i , ℓ_i , α ve β parametreleri arasındaki ilişkiyi bulmak gerekir. $d_i = \frac{c_i}{(\alpha + \beta) \ell_i^2}$ olduğunda $2d_i c_i - (\alpha + \beta) d_i^2 \ell_i^2$ ifadesi maksimum değere sahip olur. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$2d_i c_i - (\alpha + \beta) d_i^2 \ell_i^2 = \frac{c_i^2}{(\alpha + \beta) \ell_i^2}$$

Buna göre aşağıdaki sonuç yazılabilir :

Sonuç 5.2 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\frac{c_i^2}{(\alpha + \beta)\ell_i^2} - \frac{1}{\alpha}p_i - \frac{1}{\beta(1 - \mu)}q_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α ve β pozitif sabitleri var ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

$\alpha = \beta$ için, aşağıdaki sonuç elde edilir :

Sonuç 5.3 :

(4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{L}$ koşulunu ve $\tau(t)$ zaman gecikmesi $0 \leq \dot{\tau}_i(t) \leq \mu < 1, i = 1, 2, \dots, n$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\frac{c_i^2}{2\ell_i^2} - p_i - \frac{1}{(1 - \mu)}q_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulu sağlanıyor ise bu durumda (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

Yapay sinir ağı modeli (4.4) için örneklere geçmeden önce yapay sinir ağı modeli (4.5) için de literatürde elde edilen daha önceki sonuçlara göz atmakta fayda vardır :

Teorem 5.3 [58]:

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın, $\tau_{ij} = \tau_j$ olsun ve $i \neq j$ için $s_{ii} = -2p_i \bar{a}_{ii}$, $s_{ij} = -\max(|p_i \bar{a}_{ij} + p_j \bar{a}_{ji}|, |p_i \underline{a}_{ij} + p_j \underline{a}_{ji}|)$ olmak üzere $S = (s_{ij})_{n \times n}$, $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$, $r = \min(\frac{p_i \underline{c}_i}{\mu_i})$ olsun. Eğer,

$$(i) S = (s_{ij})_{n \times n} \text{ simetrik matrisi pozitif tanımlı}$$

$$(ii) (||B^*||_2 + ||B_*||_2)^2 \leq \frac{2r - ||D||_2}{||D^{-1}||_2 ||P||_2^2}$$

koşullarını sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ ve $D > 0$ matrisleri var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

Teorem 5.4 [89]:

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın, $\tau_{ij} = \tau_j$ olsun ve $i \neq j$ için $s_{ii} = -2p_i \bar{a}_{ii}$, $s_{ij} = -\max(|p_i \bar{a}_{ij} + p_j \bar{a}_{ji}|, |p_i \underline{a}_{ij} + p_j \underline{a}_{ji}|)$ olmak üzere $S = (s_{ij})_{n \times n}$, $B^* = \frac{1}{2}(\bar{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\bar{B} - \underline{B})$, $r = \min(\frac{p_i \underline{c}_i}{\mu_i})$ olsun. Eğer,

$$\Omega = 2rI + S - 2||P||_2(||B^*||_2 + ||B_*||_2)I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

Teorem 5.5 [72]:

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın. Eğer,

$$\alpha_i \left(\frac{\underline{c}_i}{\mu_i} - \bar{a}_{ii} \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j a_{ji}^* - \sum_{j=1}^n \alpha_j b_{ji}^* > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

koşulunu sağlayan α_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sabitleri var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan

yapay sinir ağı modeli global üstel robust kararlıdır.

Teorem 5.6 [79] :

(4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modelinde, aktivasyon fonksiyonları $f \in \mathcal{K}$ koşulunu sağlasın, $\tau_{ij} = \tau_j$ olsun ve $A^* = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A})$, $A_* = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A})$, $B^* = \frac{1}{2}(\overline{B} + \underline{B})$, $B_* = \frac{1}{2}(\overline{B} - \underline{B})$, $r = \min(\frac{p_i \xi_i}{\mu_i})$ olsun. Eğer,

$$\Psi = 2rI - PA^* - A^{*T}P - 2\|P\|_2\|A_*\|_2 - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I > 0$$

koşulunu sağlayan $P = \text{diag}(p_i > 0)$ pozitif diyagonal matris var ise bu durumda (4.5) ile tanımlanan yapay sinir ağı modeli global asimtotik robust kararlıdır.

Literatürdeki bu karalık sonuçlarının analizinden sonra kararlılık koşullarının geçerliliğini incelemek için aşağıdaki sayısal örnekler sunulmaktadır :

Öncelikle (4.4) ile tanımlanan yapay sinir ağı sisteminin robust kararlılığı için, Teorem 4.3.3 ve 4.3.4'ün farklı yeterlilik koşulları oluşturduğunu sayısal örneklerle göstermekte fayda vardır.

Örnek 5.1: Yapay sinir ağı sistemi (4.4)'ün ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım :

$$\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} -6\rho & -4\rho \\ 2\rho & -6\rho \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \overline{B} = \begin{bmatrix} -2\rho & -2\rho \\ 4\rho & -2\rho \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = C = \overline{C} = L = I \text{ and } \mu = 0$$

ρ pozitif değerler alan reel bir sayıdır. A^* , A_* , B^* ve B_* matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir :

$$A^* = B^* = \begin{bmatrix} -4\rho & -3\rho \\ 3\rho & -4\rho \end{bmatrix}, \quad A_* = B_* = \begin{bmatrix} 2\rho & \rho \\ \rho & 2\rho \end{bmatrix}$$

Burada $\|A^*\|_2 = \|B^*\|_2 = 5\rho$ ve $\|A_*\|_2 = \|B_*\|_2 = 3\rho$ 'dir. Sonuç 4.3.1 ağ parametreleri arasında aşağıdaki eşitsizliği oluşturur :

$$||A^*||_2 + ||A_*||_2 + ||B^*||_2 + ||B_*||_2 = 16\rho < 1$$

Burada robust asimtotik kararlılık koşulu $\rho < \frac{1}{16}$ olarak belirlenmiştir. Aynı ağ parametreleri için Sonuç 4.3.2'nin koşulu kontrol edilsin. $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrisleri aşağıdaki şekildedir :

$$\hat{A} = \hat{B} = \begin{bmatrix} 6\rho & 4\rho \\ 4\rho & 6\rho \end{bmatrix}$$

$||\hat{A}|| = ||\hat{B}|| = 10\rho$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Sonuç 4.3.2'nin sağlanması için aşağıdaki koşul gerekmektedir:

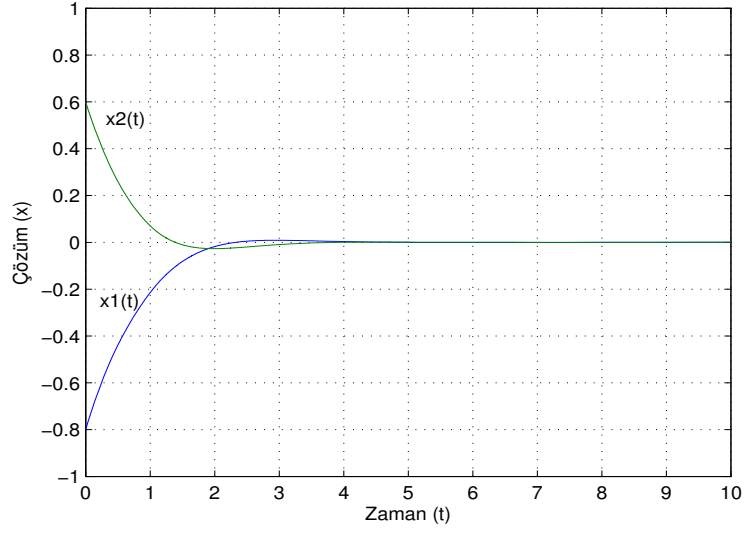
$$||\hat{A}||_2 + ||\hat{B}||_2 = 20\rho < 1$$

Açıkça görülmektedir ki, $\rho < \frac{1}{20}$ global robust kararlılık için yeterli koşuldur. Bu nedenle, bu örnekte verilen ağ parametreleri için, Sonuç 4.3.1, ağ parametreleri üzerinde, Sonuç 4.3.2'de elde edilen kısıtlama koşullarından daha az kısıtlayıcı koşullar elde etmiştir.

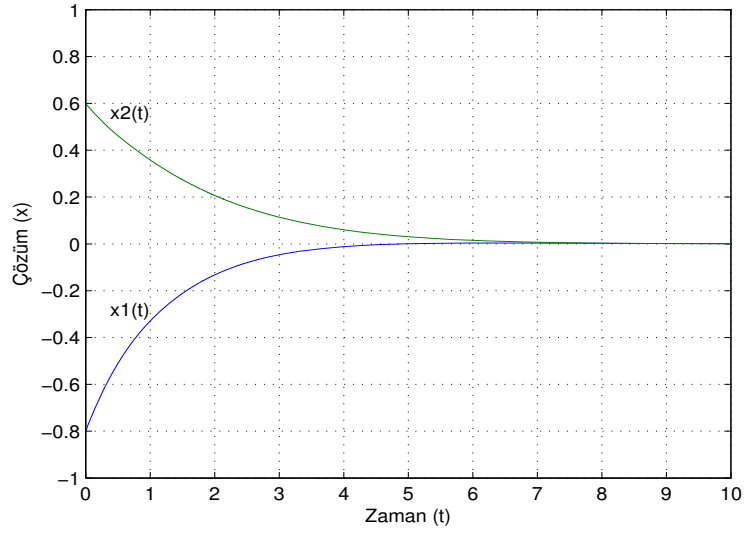
Şimdi bu örnek için $\rho < \frac{1}{16}$ koşulunu sağlayan aşağıdaki sayısal örnek göz önüne alınsın:

$$A = B = \begin{bmatrix} -4/17 & -3/17 \\ 3/17 & -4/17 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$

Bu örneğin farklı aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı durumlar için ve kararsız olma durumu için Matlab ile yapılan simülasyon sonuçları sırasıyla Şekil 5.1, Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 ile verilmiştir.



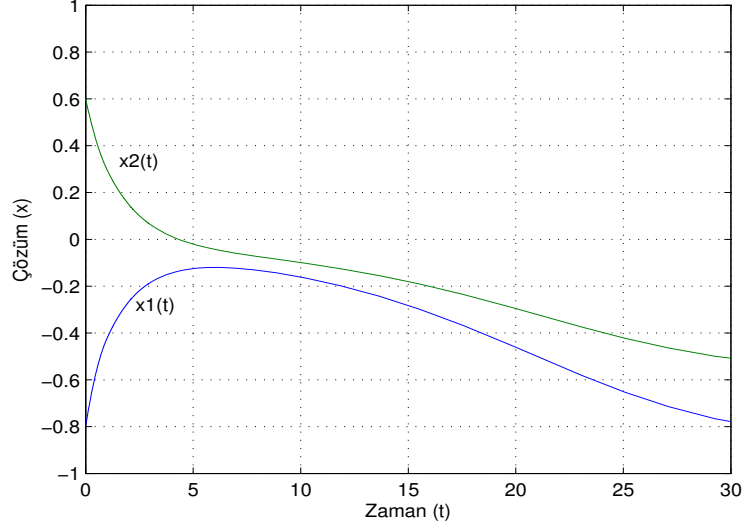
Şekil 5.1: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü



Şekil 5.2: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü

$\rho > \frac{1}{16}$ olması durumunda aşağıdaki parametre değerleri ile nöron durumlarının zamana göre değişim grafiği Şekil 5.3'te verilmiştir.

$$A = B = \begin{bmatrix} -4/17 & -3/17 \\ 3/17 & -4/17 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$



Şekil 5.3: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ 0.6]$ için sistemin çözümü

Örnek 5.2: Yapay sinir ağı sistemi (4.4)'ün ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım :

$$\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} 2\rho & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \overline{B} = \begin{bmatrix} 6\rho & 6\rho \\ 4\rho & 4\rho \end{bmatrix}$$

$$\underline{C} = C = \overline{C} = L = I \text{ ve } \mu = 0$$

ρ pozitif değerler alan reel bir sayıdır. A^* , A_* , B^* ve B_* matrisleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$A^* = B^* = \begin{bmatrix} 4\rho & 4\rho \\ 3\rho & 3\rho \end{bmatrix}, \quad A_* = B_* = \begin{bmatrix} 2\rho & 2\rho \\ \rho & \rho \end{bmatrix}$$

$\|A^*\|_2 = \|B^*\|_2 = \sqrt{50}\rho$ ve $\|A_*\|_2 = \|B_*\|_2 = \sqrt{10}\rho$ olarak hesaplanır. Sonuç 4.3.1'e göre,

$$\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2 + \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2 = 2(\sqrt{50} + \sqrt{10})\rho < 1$$

olur, buradan robust kararlılık koşulu $\rho < \frac{1}{2(\sqrt{50} + \sqrt{10})}$ olarak elde edilir. Sonuç 4.3.2'nin koşulunu kontrol etmek için öncelikle $\hat{A}$ ve $\hat{B}$ matrisleri belirlenir :

$$\hat{A} = \hat{B} = \begin{bmatrix} 6\rho & 6\rho \\ 4\rho & 4\rho \end{bmatrix}$$

$\|\hat{A}\| = \|\hat{B}\| = \sqrt{104}\rho$ olarak hesaplanabilir. Sonuç 4.3.2

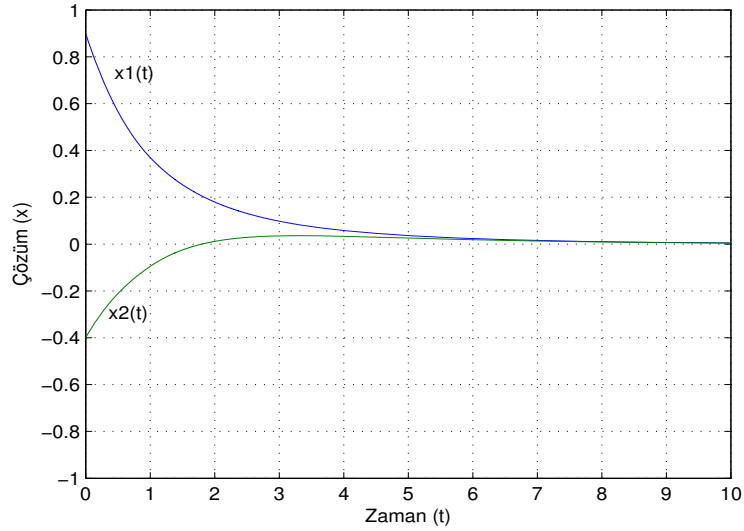
$$\|\hat{A}\|_2 + \|\hat{B}\|_2 = 2\sqrt{104}\rho < 1$$

sonucunu verir ve $\rho < \frac{1}{2\sqrt{104}}$ olur. $\sqrt{104} < (\sqrt{50} + \sqrt{10})$ olduğu için, Sonuç 4.3.2’de ağ parametreleri üzerinde Sonuç 4.3.1’de elde edilen kısıtlama koşullarına göre daha az kısıtlayıcı koşullar elde edilir.

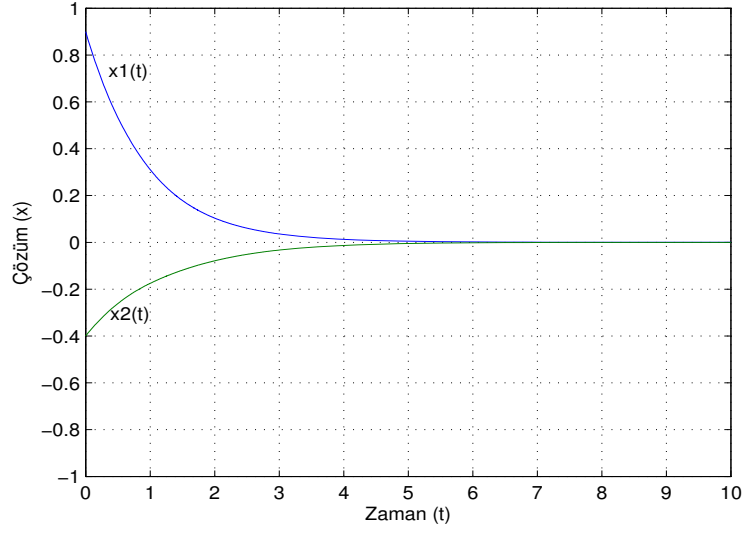
Şimdi bu örnek için $\rho < \frac{1}{2\sqrt{104}}$ koşulunu sağlayan aşağıdaki sayısal örneği göz önüne alalım:

$$A = B = \begin{bmatrix} 3/25 & 4/25 \\ 3/25 & 3/25 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$

Bu örneğin farklı aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı durumlar için ayrıca kararsız olma durumu için Matlab ile yapılan simülasyon sonuçları sırasıyla Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 ile verilmiştir.



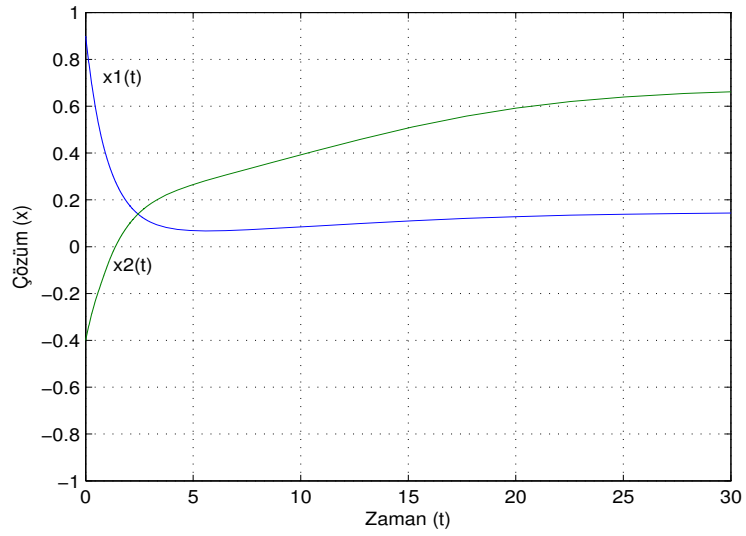
Şekil 5.4: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \quad -0.4]$ için sistemin çözümü



Şekil 5.5: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \ -0.4]$ için sistemin çözümü

$\rho > \frac{1}{2\sqrt{104}}$ olması durumunda aşağıdaki parametre değerleri ile nöron durumlarının zamana göre değişim grafiği Şekil 5.6'da verilmiştir.

$$A = B = \begin{bmatrix} 1/10 & 1/10 \\ 3/10 & 5/10 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$



Şekil 5.6: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.9 \ -0.4]$ için sistemin çözümü

Örnek 5.3 : Yapay sinir ağı sistemi (4.4)'ün ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım :

$$\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} -3\rho & -2\rho \\ -\rho & -3\rho \end{bmatrix}, \bar{A} = \bar{B} = \begin{bmatrix} -2\rho & \rho \\ 2\rho & -2\rho \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = C = \bar{C} = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ρ pozitif değerler alan reel bir sayıdır. A^* , A_* , B^* ve B_* matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir :

$$A^* = B^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5\rho & -\rho \\ \rho & -5\rho \end{bmatrix}, A_* = B_* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \rho & 3\rho \\ 3\rho & \rho \end{bmatrix}$$

Burada $\|A^*\|_2 = \|B^*\|_2 = \frac{\sqrt{26}\rho}{2}$ ve $\|A_*\|_2 = \|B_*\|_2 = 2\rho$ olur. Sonuç 4.3.1 gösteriyor ki

$$\|A^*\|_2 + \|A_*\|_2 + \|B^*\|_2 + \|B_*\|_2 = (4 + \sqrt{26})\rho < 1$$

burada $\rho < \frac{1}{4+\sqrt{26}}$ olduğu görülmektedir. Sonuç 5.3'ün koşullarını denetlemek için Teorem 5.2'deki p_1 , p_2 , q_1 , q_2 parametreleri $p_1 = p_2 = 25\rho^2$ ve $q_1 = q_2 = 25\rho^2$ olarak hesaplanır. Sonuç 5.3'ün sonucu bu örneğe uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = 50\rho^2 < \frac{1}{2}$$

Buradan robust kararlılık koşulu $\rho < \frac{1}{10}$ olarak belirlenir. Teorem 5.1'in ağ parametreleri üzerine uyguladığı kısıtlamayı bulmak için $(\underline{C}L^{-1} - |\hat{A}| - |\hat{B}|)$ matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir :

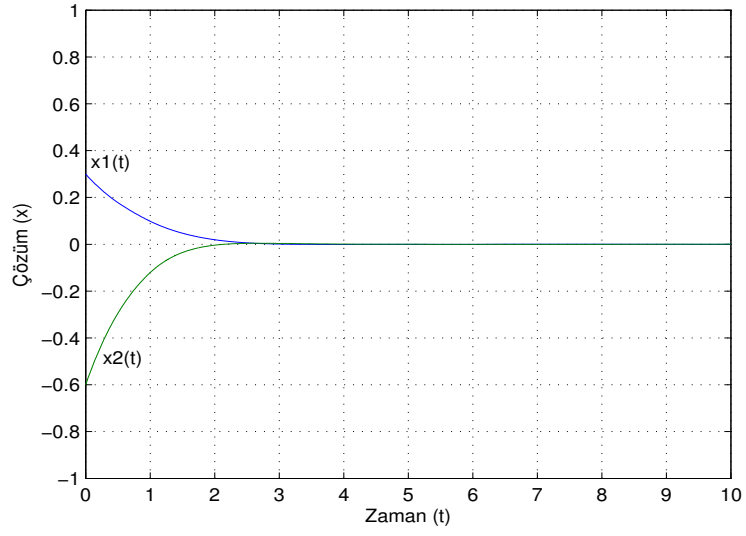
$$(\underline{C}L^{-1} - |\hat{A}| - |\hat{B}|) = \begin{bmatrix} 1 - 6a & -4a \\ -4a & 1 - 6a \end{bmatrix}$$

Burada sadece ve sadece $a < \frac{1}{10}$ olması durumunda matris tekil olmayan M-matris olur. Bu nedenle, $\frac{1}{10} \leq \rho < \frac{1}{4+\sqrt{26}}$ ise, Teorem 4.2.1'de elde edilen sonuç bu örneğe uygulanabilirken, Sonuç 5.3 ve Teorem 5.1'in sonuçları sağlanmaz.

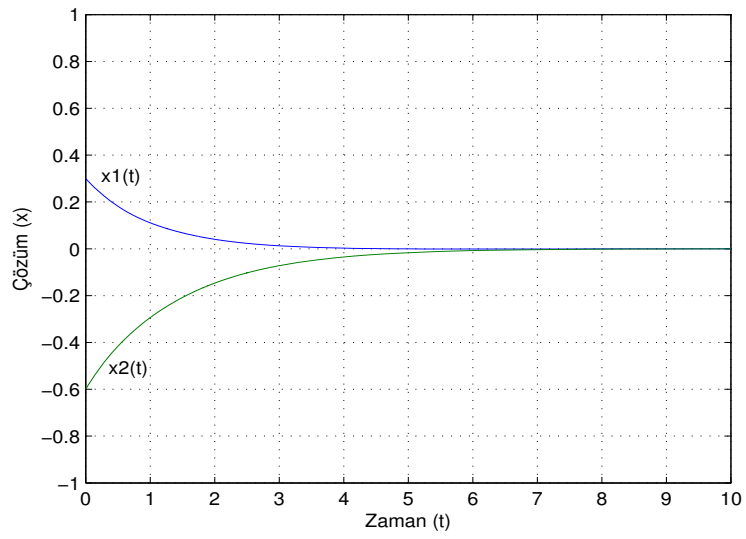
Bu örnek için $\rho < \frac{1}{4+\sqrt{26}}$ koşulunu sağlayan aşağıdaki sayısal örneği göz önüne alalım:

$$A = B = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/10 \\ 1/10 & -1/5 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$

Bu örneğin farklı aktivasyon fonksiyonlarının kullanıldığı durumlar için, ayrıca kararsız olma durumu için Matlab ile yapılan simülasyon sonuçları sırasıyla Şekil 5.7, Şekil 5.8 ve Şekil 5.9 ile verilmiştir.



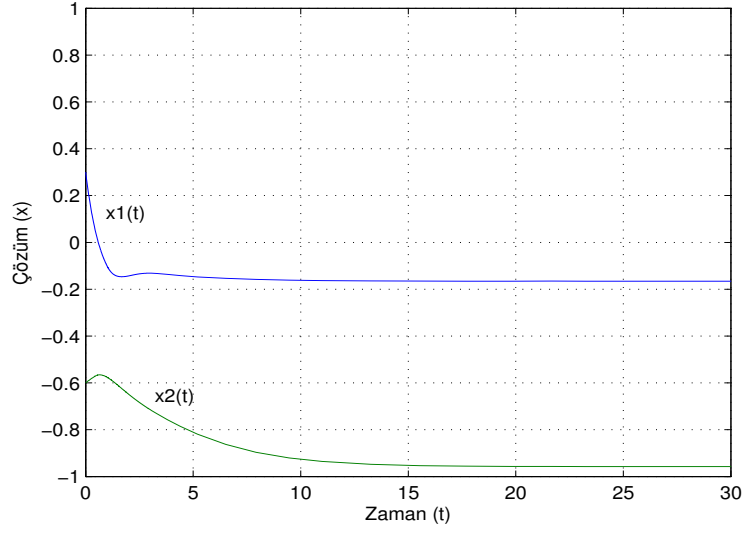
Şekil 5.7: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \quad -0.6]$ için sistemin çözümü



Şekil 5.8: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \quad -0.6]$ için sistemin çözümü

$\rho > \frac{1}{4+\sqrt{26}}$ olması durumunda aşağıdaki parametre değerleri ile nöron durumlarının zamana göre değişim grafiği Şekil 5.9'da verilmiştir.

$$A = B = \begin{bmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 2/5 \end{bmatrix}, \tau(t) = \cos(t)$$



Şekil 5.9: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.3 \quad -0.6]$ için sistemin çözümü

İlk 3 örnekte nöron sayısı $n=2$ olarak alınmıştır. İncelenecek diğer örneklerde ise $n=3$ alınarak elde edilen koşulların literatürde elde edilmiş olan diğer koşullar ile karşılaştırması yapılmıştır.

Örnek 5.4 : [58]'de verilen Teorem 5.3, S' 'in pozitif tanımlı bir matris olmasını gerektirdiği için, öncelikle S' 'in pozitif tanımlı bir matris olmaması durumunda Teorem 4.2.3'ün sonuçlarının sağlandığı bir örnek vermekte fayda vardır. Yapay sinir ağı sistemi (4.5)'in ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım :

$$\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \end{bmatrix}, \bar{A} = \bar{B} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = C = \overline{C} = I, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

a pozitif değerler alan reel bir sayıdır. Yukarıdaki parametreler için aşağıdaki matrisler yazılabilir :

$$A^* = B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_* = B_* = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.3'te $P = I$, $\Phi = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I$ için aşağıdaki sonuç elde edilir :

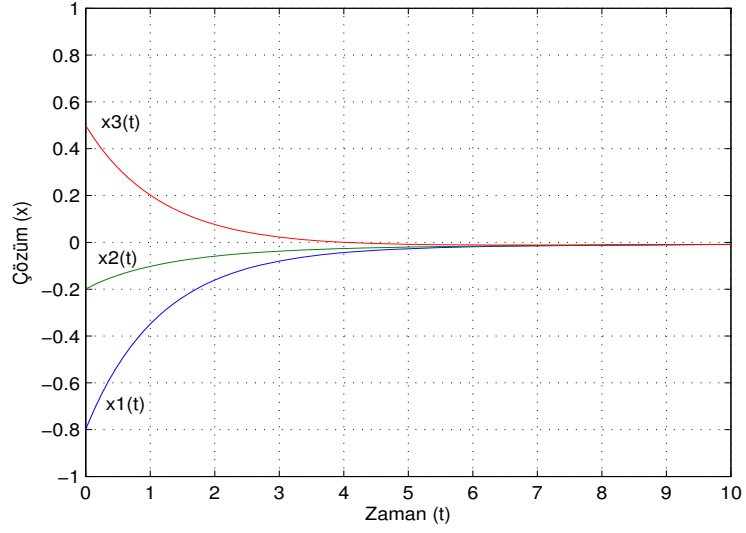
$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 - 12a & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 12a & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 12a \end{bmatrix}$$

Burada $a < \frac{1}{6}$ olması Φ 'nin pozitif tanımlı olmasını sağlar. Böylece, bu örnekte S 'in pozitif tanımlı olmadığı durumlarda sonuçların [58]'de elde edilen sonuçlara göre daha avantajlı olduğu ispatlanmıştır.

Bu örnek için $\rho < \frac{1}{6}$ koşulunu sağlayan aşağıdaki sayısal örneği göz önüne alalım:

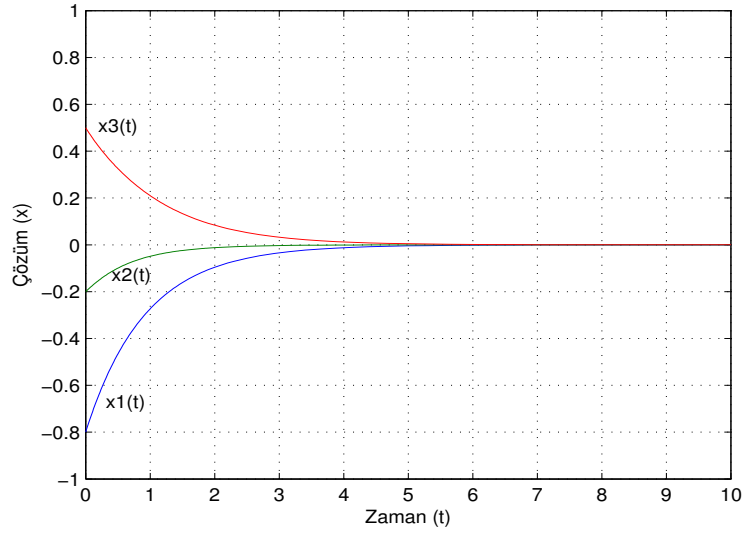
$$A = B = \begin{bmatrix} 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \\ 1/7 & 1/7 & 1/7 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \tau_{11} = 0.05, & \tau_{12} = 0.3, & \tau_{13} = 0.4 \\ \tau_{21} = 0.1, & \tau_{22} = 0.5, & \tau_{23} = 0.2, \\ \tau_{31} = 0.07, & \tau_{32} = 0.04, & \tau_{33} = 0.9 \end{matrix}$$

Bu örneğe ait nöron durumlarının zamana göre değişim grafikleri Şekil 5.10 ve Şekil 5.11 ile verilmiştir.



Şekil 5.10: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası

$x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü

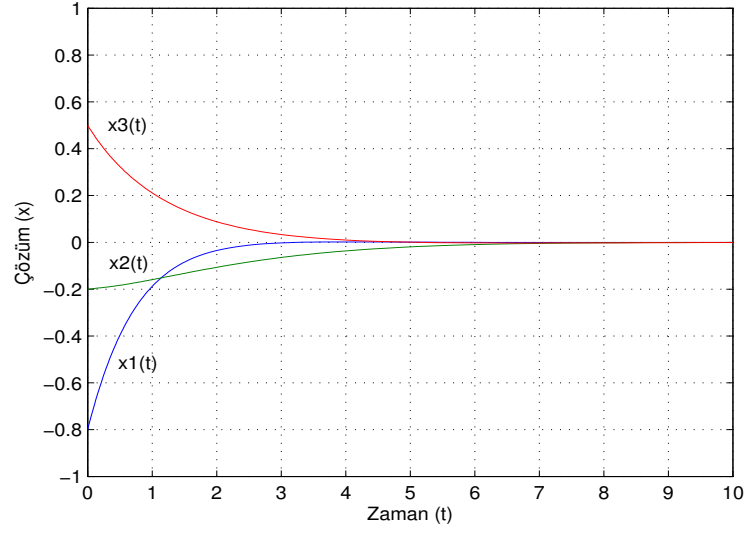


Şekil 5.11: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$

için sistemin çözümü

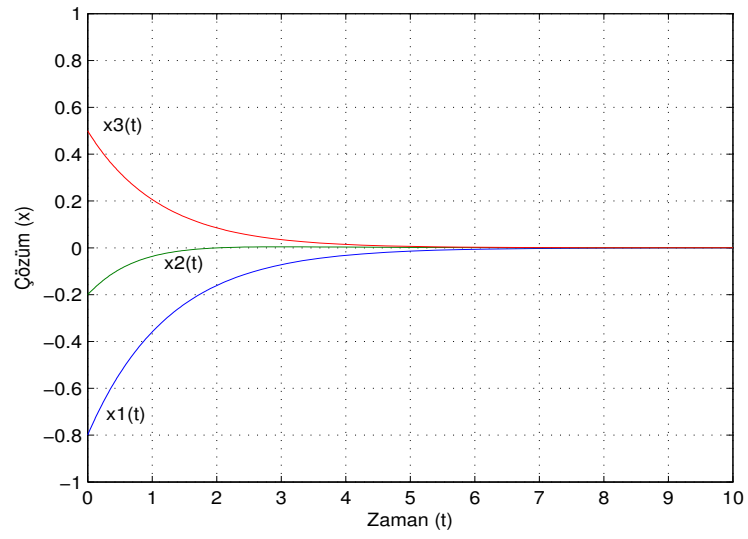
Sistem parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = B = \begin{bmatrix} -1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/7 & -1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 1/7 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tau_{11} = 0.05, & \tau_{12} = 0.3, & \tau_{13} = 0.4 \\ \tau_{21} = 0.1, & \tau_{22} = 0.5, & \tau_{23} = 0.2, \\ \tau_{31} = 0.07, & \tau_{32} = 0.04, & \tau_{33} = 0.9 \end{matrix}$$



Şekil 5.12: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası

$x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$ için sistemin çözümü



Şekil 5.13: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [-0.8 \ -0.2 \ 0.5]$

için sistemin çözümü

Örnek 5.5 : Yapay sinir ağı sistemi (4.5)'in ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -a & -a & -a \\ 0 & -a & 0 \\ -2a & 0 & -a \end{bmatrix}, \overline{A} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 2a & a & 2a \\ 0 & 2a & a \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \\ -a & -a & -a \end{bmatrix}, \overline{B} = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}, \underline{C} = C = \overline{C} = I, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

a pozitif değerler alan reel bir sayıdır. Yukarıdaki parametreleri kullanarak aşağıdaki matrisleri elde edilir :

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \\ -a & a & 0 \end{bmatrix}, A_* = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}, B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_* = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.3'te $P = I$, $\Phi = 2rI - PA^* - A_*^T P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I$ için aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 - 12a & -a & a \\ -a & 2 - 12a & -2a \\ a & -2a & 2 - 12a \end{bmatrix}$$

$a = \frac{5}{36}$ olsun. Bu durumda, Φ aşağıdaki şekli alır :

$$\Phi = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 12 & -5 & 5 \\ -5 & 12 & -10 \\ 5 & -10 & 12 \end{bmatrix}$$

Φ simetrik ve tüm özdeğerleri pozitif olduğu için, Φ pozitif tanımlıdır denilebilir, böylece Teorem 4.2.3'ün koşullarının sağlandığı gösterilmiştir.

Şimdi $a = \frac{5}{36}$ olduğunda aynı ağ parametreleri için Teorem 5.4'ün koşullarını kontrol edelim.

Örnekte verilen ağ parametreleri için aşağıdaki sonuç elde edilir :

$$S = \begin{bmatrix} -2a & -3a & -3a \\ -3a & -2a & -4a \\ -3a & -4a & -2a \end{bmatrix}$$

Teorem 5.4'te $P = I$, $\Omega = 2rI + S - 2\|P\|_2(\|B^*\|_2 + \|B_*\|_2)I > 0$ için

$$\Omega = \begin{bmatrix} 2 - 8a & -3a & -3a \\ -3a & 2 - 8a & -4a \\ -3a & -4a & 2 - 8a \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. $a = \frac{5}{36}$ için, Ω şu şekilde olur :

$$\Omega = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 32 & -15 & -15 \\ -15 & 32 & -20 \\ -15 & -20 & 32 \end{bmatrix}$$

Ω 'nın determinantının negatif olduğu kolaylıkla görülmektedir. Bu da Ω 'nın pozitif tanımlı olmadığı anlamına gelir. Bu yüzden Teorem 5.4'ün koşulları bu örneğe uygulanamaz.

Örnek 5.6 : Yapay sinir ağı sistemi (4.5)'in ağ parametrelerinin aşağıdaki gibi verildiğini varsayalım:

$$\underline{A} = \underline{B} = \begin{bmatrix} -a & -a & -a \\ -3a & -a & -a \\ -3a & -3a & -a \end{bmatrix}, \overline{A} = \overline{B} = \begin{bmatrix} 3a & 3a & 3a \\ a & 3a & 3a \\ a & a & 3a \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = C = \overline{C} = I, \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$$

a pozitif değerler alan reel bir sayıdır. Yukarıdaki parametreler için aşağıdaki matrisleri yazılabilir:

$$A^* = B^* = \begin{bmatrix} a & a & a \\ -a & a & a \\ -a & -a & a \end{bmatrix}, A_* = B_* = \begin{bmatrix} 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a \\ 2a & 2a & 2a \end{bmatrix}, \hat{A} = \hat{B} = \begin{bmatrix} 3a & 3a & 3a \\ 3a & 3a & 3a \\ 3a & 3a & 3a \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.4'te $P = I$, $\Theta = 2rI - PA^* - A^{*T}P - \|PA_* + A_*^T P\|_2 I - \|P\|_2(\|\hat{B}\|_1 + \|\hat{B}\|_\infty)I$ için

$$\Theta = \begin{bmatrix} 2 - 32a & 0 & 0 \\ 0 & 2 - 32a & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 32a \end{bmatrix}$$

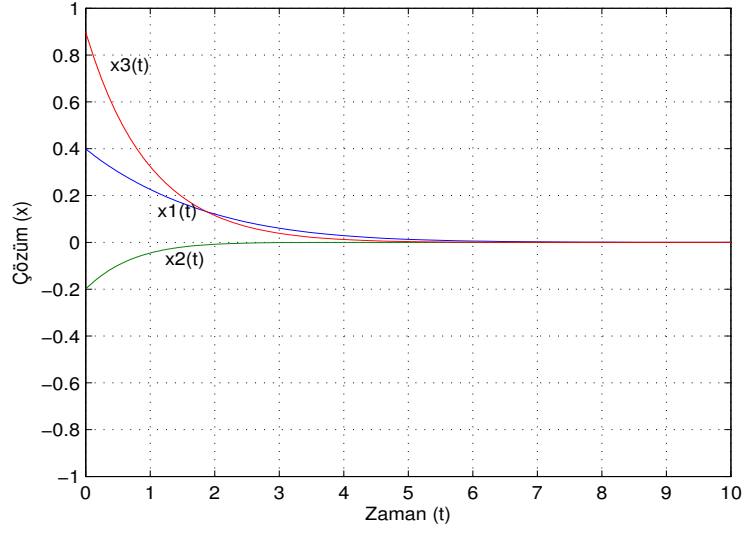
matrisi elde edilir. Burada $a < \frac{1}{16}$ ise $\Theta > 0$ 'dır. Teorem 5.5'in koşulları bu örnekte verilen ağ parametreleri için kontrol edildiğinde, aşağıdaki matrisin tekil olmayan M-matris olmasını gerektirdiği kolaylıkla görülmektedir :

$$I - \hat{A} - \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 - 6a & -6a & -6a \\ -6a & 1 - 6a & -6a \\ -6a & -6a & 1 - 6a \end{bmatrix}$$

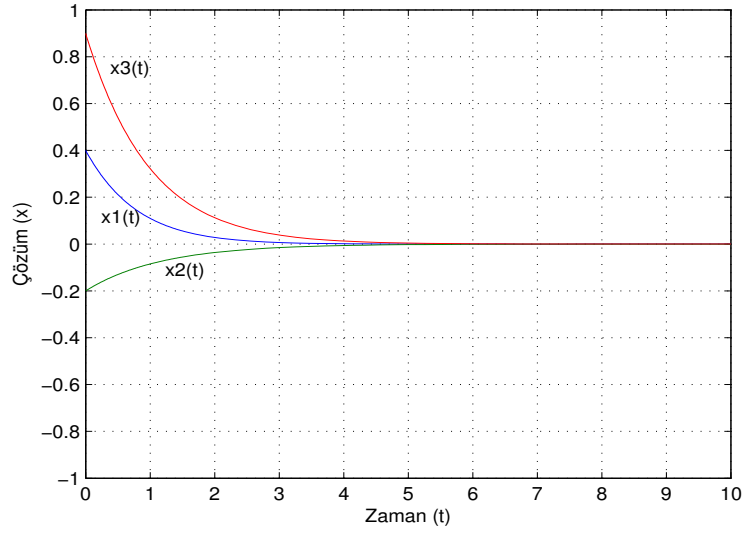
Sadece ve sadece $a < \frac{1}{18}$ olması durumunda $I - \hat{A} - \hat{B}$ 'nin tekil olmayan M-matris olduğu açıktır. Teorem 4.2.4'te elde ettiğimiz koşulların $\frac{1}{18} \leq a < \frac{1}{16}$ için sağlandığı fakat Teorem 5.5'in sonuçlarının sağlanmadığı görülmektedir.

Bu örnek için $a < \frac{1}{16}$ koşulunu sağlayan aşağıdaki sayısal örneği göz önüne alalım:

$$A = B = \begin{bmatrix} 1/17 & 2/17 & 2/17 \\ -1/17 & 0 & 1/17 \\ -2/17 & -1/17 & 1/17 \end{bmatrix}, \begin{matrix} \tau_{11} = 0.1, & \tau_{12} = 0.03, & \tau_{13} = 0.7 \\ \tau_{21} = 0.4, & \tau_{22} = 0.08, & \tau_{23} = 0.2, \\ \tau_{31} = 0.05, & \tau_{32} = 0.09, & \tau_{33} = 0.6 \end{matrix}$$



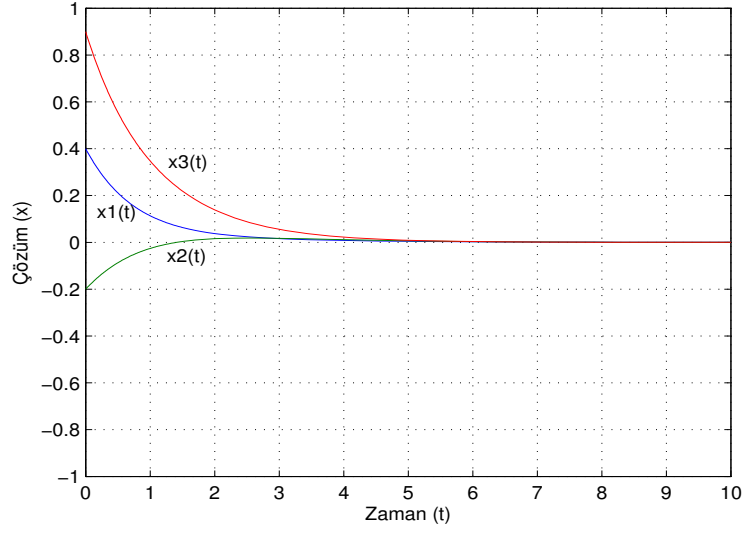
Şekil 5.14: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4 \ -0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü



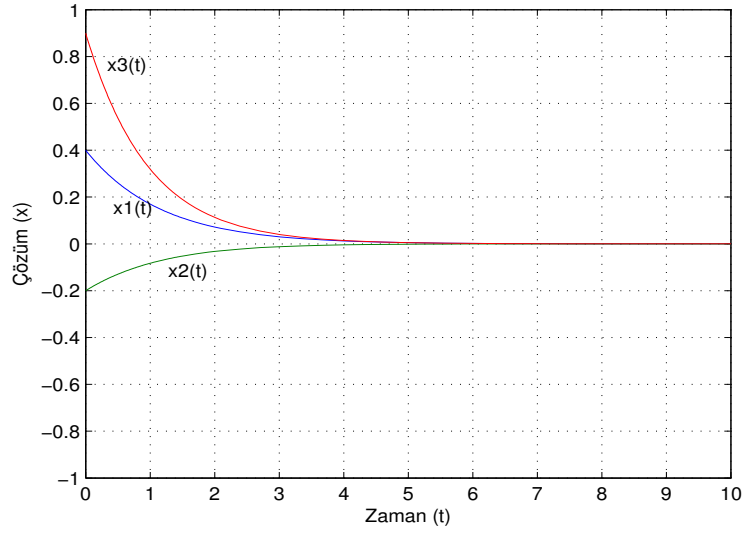
Şekil 5.15: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4 \ -0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü

Şimdi sistem parametreleri aşağıdaki şekilde verilmiş olsun :

$$A = B = \begin{bmatrix} -1/18 & 1/6 & 0 \\ -1/9 & 1/9 & 1/9 \\ -1/18 & 0 & 1/18 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \tau_{11} = 0.1, & \tau_{12} = 0.03, & \tau_{13} = 0.7 \\ \tau_{21} = 0.4, & \tau_{22} = 0.08, & \tau_{23} = 0.2, \\ \tau_{31} = 0.05, & \tau_{32} = 0.09, & \tau_{33} = 0.6 \end{matrix}$$



Şekil 5.16: $g(x(t)) = \tanh(x(t))$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4 \ -0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü



Şekil 5.17: $g(x(t)) = \frac{e^{-x(t)}-1}{e^{-x(t)}+1}$ aktivasyon fonksiyonu ve başlangıç noktası $x(0) = [0.4 \ -0.2 \ 0.9]$ için sistemin çözümü

Son olarak Teorem 5.6'nın, Teorem 4.2.3'ün özel bir durumu olduğunu göstereceğiz.

$\|PA_* + A_*^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|A\|_2$ olduğu için $\Phi \geq \Psi$ olur, böylece Teorem 5.6'nın, Teorem 4.2.3'ün özel bir durumu olduğu gösterilmiştir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında Hopfield tipi ayrık zaman gecikmeli sürekli-zamanlı ve çoklu zaman gecikmeli yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının varlığını, tekliğini ve global asimtotik kararlılığını sağlayan yeni yeterli koşullar sunulmuştur. İncelenen yapay sinir ağı modelinin sistem parametreleri ile bazı sabit değerli parametreler arasında bir ilişki kurulmuştur. Diğer bir deyişle sistem parametrelerindeki değişimlerin denge noktasının dinamik davranışı üzerindeki etkileri göz önünde bulundurularak koşullar elde edilmiştir. Böylece sistemin robust kararlı olması sağlanmıştır.

Kararlılık koşullarının elde edilmesi aşamasında öncelikle denge noktasının varlığı ve tekliği ispatlanmış, daha sonra kararlılık analizi gerçekleştirilmiştir. Denge noktasının varlığı ve tekliğinin ispatı sırasında elde edilen koşulların, sistemin kararlılığını garantileyeceği söylene-
mez. Aynı şekilde sistemin kararlılığı için elde edilen koşullarla, tek bir denge noktasının varlığı garanti edilemez. Fakat bu tezde elde edilen koşullar aynı anda hem denge noktasının varlığı ve tekliğini hem de global asimtotik kararlılığını sağlamaktadır.

Literatürde gecikmeli Hopfield tipi yapay sinir ağı modellerinin denge noktasının varlığı, tekliği ve global asimtotik kararlılığı ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda farklı yapılarda aktivasyon fonksiyonları kullanılarak kararlılık koşulları elde edilmiştir. Bu tez kapsamındaki çalışmalarda da 2 farklı aktivasyon fonksiyonu kullanılmıştır.

İncelenen yapay sinir ağı modeli gecikme parametresi de içerdiğinden, yapılan analizlerde gecikme parametresinin kararlılık koşulları üzerindeki etkileri de incelenmiştir. Gecikmenin sabit olduğu ya da zamanla değiştiği durumlarda elde edilen kararlılık koşulları gecikme parametrelerinden bağımsız olarak ifade edilebilmişlerdir.

Literatürde daha önce elde edilmiş olan sonuçlarla karşılaştırıldığında elde edilen kararlılık sonuçlarının test edilmesi daha kolaydır. Elde edilen sonuçların kolayca test edilebildiğini ve geniş bir yapay sinir ağı modeline uyarlanabileceğini göstermek açısından, 5. bölümde hem farklı aktivasyon fonksiyonlarının hem de farklı gecikme parametrelerinin kullanıldığı sayısal

örnekler bu tezde verilmiştir. Bu örnekler literatürde elde edilmiş olan sonuçlarla karşılaştırıldığında elde edilen sonuçların bazı durumlarda daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Ayrıca elde edilen sonuçların yorumlanmasına yardımcı olacak simülasyonlar da yapılmıştır.

Gecikmeli Hopfield yapay sinir ağı modellerinin optimizasyon problemlerinin çözümünde, çağrışımli bellek tasarımında, bazı işaret ve bilgi işleme problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanıldığı bilinmektedir. Bu alanda yapılabilecek olan çalışmalarda iki temel kavram önemli rol oynayacaktır. Bunlardan birincisi, yapay sinir ağı modellerinde kullanılan aktivasyon fonksiyonlarının karakteristiğidir. Literatürde yapılmış olan hemen bütün çalışmalarda aktivasyon fonksiyonlarının sürekli olduğu varsayılmıştır. Ancak, aktivasyon fonksiyonlarının süreksiz olması durumunda analizlerin bundan nasıl etkileneceği yanıt bekleyen bir sorudur. Diğer bir nokta ise kararlılık analizi için uygun Lyapunov fonksiyonlarının araştırılmasıdır. Bu iki konuda oluşabilecek teorik gelişmeler yapay sinir ağlarının kararlılık analizinde önemli rol oynayacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] FORTI, M. ve TESI, A., 1995, New conditions for global stability of neural networks with applications to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 42 (7), 354-365.
- [2] WANG, K. ve MICHEL, A.N., 1996, On the stability of family of nonlinear time varying systems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 43, 517-531.
- [3] HU, S. ve WANG, J., 2002, Global exponential stability of continuous-time interval neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 49, 1334-1347.
- [4] ARIK, S., 2000, Global asymptotic stability of a class of dynamical neural networks *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 47, 568-571.
- [5] KENNEDY, M.P., CHUA, L.O., 1988, Neural networks for nonlinear programming, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 35, 554-562.
- [6] MICHEL, A.N., FARREL, J.A., POROD, W., 1989, Qualitative analysis of neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 2, 229-243.
- [7] FORTI, M., MANETTI, S. and MARINI, M., 1994, Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 41 (4), 491-494.
- [8] KASZKUREWICZ, E. and BHAYA, A., 1995, Comments on Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 42, 497-499.
- [9] FORTI, M., LIBERATORE, A., MANETTI, S. and MARINI, M., 1994, On absolute stability of neural networks, in *Proc., IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, 6, 241-244.

- [10] ARIK, S., TAVSANOGLU, V., 1996, Equilibrium analysis of nonsymmetric CNNs, *Int.J. Circuit Theory Appl.*, 24, 296-274.
- [11] ARIK, S., TAVSANOGLU, V., 1997, Absolute stability of a larger class of dynamical neural networks, in *Proc. European Conf. Circuit Theory Design (ECCTD97)*, 1104-1107.
- [12] ARIK, S., TAVSANOGLU, V., Absolute stability of nonsymmetric neural networks, in *Proc. 1996, IEEE Int. Symp. Circuits Systems*, 3, 441-444.
- [13] ARIK, S., TAVSANOGLU, V., 1998, A Comment on Comments on Necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 45, 595-596.
- [14] CHUA, L.O. and ROSKA, T., 1990, Stability of a class of nonreciprocal cellular neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 37, 1520-1527.
- [15] TAKAHASHI, N., CHUA, L.O., 1997, A new sufficient condition for nonsymmetric CNNs to have a stable equilibrium point, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 44, 1092-1095.
- [16] TAKAHASHI, N., CHUA, L.O., 1998, On the complete stability of nonsymmetric cellular neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, 45, 754-758.
- [17] LIANG, X.B. and WU L.D., 1998, New sufficient condition for absolute stability of neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 45, 584-586.
- [18] CIVALLERI, P.P. and GILLI, M., 1997, Practical stability criteria for cellular neural networks, *Electronics Letters*, 33, 970-971.
- [19] LIANG, X.B. and WU L.D., 1997, A Comment on New Conditions for global stability neural networks with application to linear and quadratic programming problems, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 44, 1099-1101.

- [20] LIAO, X., CHEN, G. ve SANCHEZ, E.N., 2002, LMI-based approach for asymptotic stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 49, 1033-1039.
- [21] ARIK, S. ve TAVSANOGLU, V., 1998, Equilibrium analysis of delayed CNNs, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 45, 168-171.
- [22] CAO, J.D., 1999, Periodic-Solutions and Exponential Stability in Delayed Cellular Neural Networks, *Physical Review E*, 60, 3244-3248.
- [23] ARIK, S. ve TAVSANOGLU, V., 2000, On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 47, 571-574.
- [24] LIAO, T.L. ve WANG, F.C., 2000, Global stability for cellular neural networks with time delay, *IEEE Transaction Neural Networks*, 11, 1481-1485.
- [25] TAKAHASHI, N., 2000, A new sufficient condition for complete stability of cellular neural networks with delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 47, 793-799.
- [26] YI, Z., HENG, P.A. ve LEUNG, K.S., 2001, Convergence Analysis of Delayed Cellular Neural Networks with Unbounded Delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 48, 680-687.
- [27] MOHAMAD, S., 2001, Global exponential stability in continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks, *Physica D*, 159, 233-251.
- [28] CAO, J. ve WANG, J., 2003, Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 50, 34-44.
- [29] LI, X.M., HUAND, L.H. ve ZHU, H., 2003, Global stability of cellular neural networks with constant and variable delays, *Nonlinear Analysis*, 53, 319-333.

- [30] MARCUS, C.M., WESTERNVELT, R.M., 1989, Stability of analog neural networks with delay, *Physical Review A*, 39 (1), 347-359.
- [31] GOPALSAMY, K., HE, X., 1994, Stability in asymmetric Hopfield nets with transmission delays, *Physica D*, 76, 344-358.
- [32] ARIK, S., 2000, Stability analysis of delayed neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 47, 1089-1092.
- [33] FANG, Y., KINCAID, T.K., 1995, Stability analysis of dynamical neural networks, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 7, 996-1006.
- [34] ARIK, S., 2004, Analysis of exponential stability of delayed neural networks with time varying delays, *Neural Networks*, 17, 1027-1031.
- [35] YE, H., MICHEL, A.N., 1996, Robust stability of nonlinear time-delay systems with applications to neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 43, 532-543.
- [36] LIAO, X., CHEN, G. And SANCHEZ, E. N, 2002b, Delay dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach, *Neural Networks*, 15, 855-866.
- [37] LU, H., 2001, Stability criteria for delayed neural networks, *Physical Review E*, 64.
- [38] TAKAHASHI, N., NISHI, T., 2006, Necessary and sufficient condition for a class of planar dynamical systems related to CNNs to be completely stable, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 53 (8), 727-733.
- [39] HE, Y., WU, M., SHE J.H., 2006, Delay-dependent exponential stability of delayed neural networks with time-varying delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 53 (7), 553-557.
- [40] CHEN, W.H., ZHENG, W.X., 2006, Global asymptotic stability of a class of neural Networks with distributed delays, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 53 (3), 644-652.

- [41] XU, J., PI, D., CAO, Y.Y., ZHONG, S., 2007, On stability of neural networks by a Lyapunov functional-based approach, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 54 (4), 912-924.
- [42] HE, Y., WU, M., SHE, J.H., 2006, An improved global asymptotic stability criterion for delayed cellular neural networks, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 17 (1), 250-252.
- [43] ZENG, Z., WANG, J., 2006, Improved conditions for global exponential stability of recurrent neural networks with time-varying delays, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 17 (3), 623-635.
- [44] HE, Y., WANG, Q.G., WU, M., LIN, C., 2006, Delay-dependent state estimation for delayed neural networks, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 17 (4), 1077-1081.
- [45] HE, Y., LIU, G., REES, D., 2007, New delay-dependent stability criteria for neural networks with time-varying delay, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 18 (1), 310- 314.
- [46] QI, H., QI, L., YANG, X., 2005, Deriving sufficient conditions for global asymptotic stability of delayed neural networks via nonsmooth analysis-II, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 16 (6), 1701-1706.
- [47] JIANG, H., ZHANG, L., TENG, Z., 2005, Existence and global exponential stability of almost periodic solution for cellular neural networks with variable coefficients and time-varying delays, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 16 (6), 1340-1351.
- [48] CHEN, W.H., LU, X., GUAN, Z.H., ZHENG, W.X., 2006, Delay-dependent exponential stability of neural networks with variable delay: An LMI Approach, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 53 (9), 837-842.
- [49] CHEN, B., WANG, J., 2005, Global exponential periodicity of a class of recurrent neural networks with oscillating parameters and time-varying delays, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 16 (6), 1440-1448.

- [50] YI, Z. ve TAN, K.K., 2002, Dynamic stability conditions for Lotka-Volterra recurrent neural networks with delays, *Physical Review E*, 66, 011910.
- [51] CIVALLERI, P., GILLI, L. ve PABDOLFI, L., 1993, On stability of cellular neural networks with delay, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 40, 157-165.
- [52] ROSKA, T. ve CHUA, L.O., 1992, Cellular neural networks with delay type template elements and nonuniform grids, *Int. J. Circ. Theory Appl.*, 20, 469- 481.
- [53] LIAO, X.F. ve YU, J., 1998, Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay, *IEEE Trans Neural Networks*, 9, 1042-1045.
- [54] LIAO, X.F., WONG, K.W., WU, Z. ve CHEN, G., 2001, Novel robust stability for interval-delayed hopfield neural, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 48, 1355-1359.
- [55] SUN, C. ve FENG, C.B., 2003, Global robust exponential stability of interval neural networks with delays, *Neural Processing Letters*, 17, 107-115.
- [56] LI, C., LIAO, X. ve ZHANG, R., 2006, A global exponential robust stability criterion for interval delayed neural networks with variable delays, *Neurocomputing*, 69, 803-809.
- [57] LI, C., LIAO, X., ZHANG, R. ve PRASAD, A., 2005, Global robust exponential stability analysis for interval neural networks with time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, 751-757.
- [58] CAO, J. ve WANG, J., 2005, Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays, *IEEE Transaction on Circuits and Systems I*, 52, 417-426.
- [59] SINGH, V., 2007, Novel LMI condition for global robust stability of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 34, 503-508.
- [60] ZHANG, J.H., SHI, P. ve QIU, J.Q., 2007, Novel robust stability criteria for uncertain stochastic Hopfield neural networks with time-varying delays, *Nonlinear Analysis: Real World*

Applications, 8, 1349-1357.

- [61] SOUZA, F.O., PALHARES, R.M. ve EKEL, P.Y., 2007, Asymptotic stability analysis in uncertain multi-delayed state neural networks via LyapunovKrasovskii theory, *Mathematical and Computer Modelling*, 45, 1350-1362.
- [62] GAU, R.S., LIEN, C.H. ve HSIEH, J.G., 2007, Global exponential stability for uncertain cellular neural networks with multiple time-varying delays via LMI approach, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 1258-1267.
- [63] CHO, H.J. ve PARK, J.H., 2007, Novel delay-dependent robust stability criterion of delayed cellular neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 1194-1200.
- [64] YANG, F.J., ZHANG, C.L. ve WU, D.Q., 2007, Global stability analysis of impulsive BAM type CohenGrossberg neural networks with delays, *Applied Mathematics and Computation*, 186, 932-940.
- [65] LI, C.D., CHEN, J.Y. ve HUANG, T.W., 2007, A new criterion for global robust stability of interval neural networks with discrete time delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 31, 561-570.
- [66] WANG, Z.D., SHU, H.S., LIU, Y.R., HO, D.W.C. ve LIU, X.H., 2006, Robust stability analysis of generalized neural networks with discrete and distributed time delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 886-896.
- [67] HUANG, H., QU, Y.Z. ve LI, H.X., 2005, Robust stability analysis of switched Hopfield neural networks with time-varying delay under uncertainty, *Physics Letters A*, 345, 345-354.
- [68] LI, C.D., LIAO, X.F., ZHANG, R. ve PRASAD, A., 2005, Global robust exponential stability analysis for interval neural networks with time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, 751-757.
- [69] XU, S.Y., LAM, J. ve HO, D.W.C., 2005, Novel global robust stability criteria for interval neural networks with multiple time-varying delays, *Physics Letters A*, 342, 322-330.

- [70] RONG, L., 2005, LMI-based criteria for robust stability of CohenGrossberg neural networks with delay, *Physics Letters A*, 339, 63-73.
- [71] LI, C.D., LIAO, X.F. ve ZHANG R., 2004, Global robust asymptotical stability of multi-delayed interval neural networks: an LMI approach, *Physics Letters A*, 328, 452-462.
- [72] CAO, J. and CHEN, T., 2004, Global exponentially robust stability and periodicity of delayed neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 22, 957-963.
- [73] ZHANG, H., WANG, Z., LIU, D., 2007, Robust exponential stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 54 (8), 730-734.
- [74] LI, C., LIAO, X., 2006, Global robust stability criterion, for interval delayed neural networks via an LMI approach, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 53 (9), 901-905.
- [75] LI, C., LIAO, X., 2006, Robust stability and robust periodicity of delayed recurrent neural networks with noise disturbance, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 53 (10), 2265-2273.
- [76] ZHANG Z., LI, C., LIAO, X., 2007, Delay-dependent robust stability analysis for interval linear time-variant systems with delays and application to delayed neural networks, *Neurocomputing*, 70, 2980-2995.
- [77] HUANG, H., HO, D.W.C., QU, Y., 2007, Robust stability of stochastic delayed additive neural networks with Markovian switching, *Neural Networks*, 20, 799-809.
- [78] SHEN, T., ZHANG, Y., 2007, Improved global robust stability criteria for delayed neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II*, 54 (8), 715-719.
- [79] QI, H., 2007, New sufficient conditions for global robust stability of delayed neural networks, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 54 (5), 1131-1141.

- [80] YANG, X., LIAO, X., BAI, S., EVANS, D., 2005, Robust exponential stability and domains of attraction in a class of interval neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 445-451.
- [81] YU, W., YAO, L., 2007, Global robust stability of neural networks with time varying delays, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206, 679-687.
- [82] LI, X., CAO, J., 2004, Global exponential robust stability of delayed neural networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14 (8), 2925-2931.
- [83] WANG, Z., ZHANG, H., YU, W., 2007, Robust exponential stability analysis of neural networks with multiple time delays, *Neurocomputing*, 70, 2534-2543.
- [84] ZHANG, H., LIAO, X., 2005, LMI-based robust stability analysis of neural networks with time-varying delay, *Neurocomputing*, 67, 306-312.
- [85] LIAO, X.F. and YU, J., 1998, Robust stability for interval Hopfield neural networks with time delay, *IEEE Transaction on Neural Networks*, 9, 1042-1045.
- [86] CHEN, A., CAO, J. and HUANG, L., 2005, Global robust stability of interval cellular neural networks with time-varying delays, *Chaos, Solitons and Fractals*, 23, 787-799.
- [87] LI, X. and CAO, J., 2004, Global exponential robust stability of delayed neural networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14, 2925-2931.
- [88] CAO, J., HUANG, D.S. and QU, Y., 2005, Global robust stability of recurrent neural networks, *Chaos, Solitons and Fractals*, 23, 221-229.
- [89] OZCAN, N. and ARIK, S., 2006, Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 53 (1), 166-176.
- [90] OZCAN, N. and ARIK, S., 2006, An analysis of global robust stability of neural networks

with discrete time delays, *Physics Letters A*, 359 (5), 445-450.

[91] HOPFIELD, J.J., 1984, Neuron with response have collective computational properties like those of two state neurons, *Proc. Nat. Acad. Sci. I*, 81 (5), 3088-3092.

[92] YUCEL, E. and ARIK, S., 2009, Novel results for global robust stability of delayed neural networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, 39 (4), 1604-1614.

[93] YUCEL, E. and ARIK S., 2007, New Results for Global Robust Stability of Neural Networks with Time Delays, *2007 IEEE Multi-conference on Systems and Control*, Suntec City Convention Centre, Singapore.

[94] YUCEL, E. and ARIK S., 2009, New Sufficient Criteria for Global Robust Stability of Neural Networks with Multiple Time Delays, *ECTI-CON 2009 International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications, and Information Technology*, Pattaya, Thailand.

ÖZGEÇMİŞ

Eylem YÜCEL DEMİREL 25.03.1979 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini T.E.D. Kayseri Kolejinde, lise öğrenimini Ataköy Cumhuriyet Lisesi’nde tamamladı. 1997 yılında Ataköy Cumhuriyet Lisesi’nden mezun olduktan sonra, aynı sene İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini bitirdi. 2002 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl İstanbul Üniversitesi’nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2005 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak, aynı yıl içerisinde İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Programında doktora öğrenimine başlayan Eylem YÜCEL DEMİREL yapay sinir ağları üzerinde çalışmalarına devam etmektedir.