MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S YARI ASAL ALT MODÜLLER

ÖZGE KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2020

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

S YARI ASAL ALT MODÜLLER

ÖZGE KILIÇ

520916013

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2020

TEŞEKKÜR

Öncelikle bütün eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, sonsuz moral ve ilham kaynağı olan sevgili aileme ve bu süreçte yanımda olan arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Üniversite öğrenimim boyunca bana matematiği sevdiren, eğitimime devam etmem için yüreklendiren, yol gösteren, yüksek lisansımda da bütün süreçlerde yanımda olan tanıdığım en sabırlı ve zeki insan olan Prof. Dr. Ünsal Tekir'e bana kattığı tüm değerler ve bu tez için teşekkürlerimi borç bilirim.

Yine öğrenciliğimden beri tanıdığım, çalışmamda katkısı inanılmaz büyük olan, her türlü problemde rahatça danışabildiğim, tez sürecimi keyifli hale getiren, zekâsı ve yardımseverliği ile herkesi kendine hayran bırakan. Dr. Suat Koç'a büyük sabrı, güler yüzü ve tüm yardımları için çok teşekkür ederim.

Kasım 2020 **Özge KILIÇ**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

S YARI ASAL ALT MODÜLLER

Bu tezde yarı asal alt modül ve S-asal alt modüllerin bir genelleştirilmesi olan S-yarı asal alt modül kavramı tanıtılmaktadır.

A sıfırdan farklı birimli ve değişmeli bir halka ve M sıfırdan farklı birimsel A-modül, L, M nin bir alt modülü ve S, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $r \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m \in L$ iken $srm \in L$ sağlayan sabit bir $s \in S$ varsa L ye M nin bir S-yarı asal alt modulü denir. Ayrıca $r \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m = 0$ iken $srm = 0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa M ye S-indirgenmiş modül denir.

S-yarı asal alt modül ve S-indirgenmiş modüllerin karekterizasyonu ve örneklerini vermenin yanında yarı asal alt modül ve indirgenmiş modül sınıflarını da bu kavramlarla karakterize ediyoruz.

ABSTRACT

S SEMIPRIME SUBMODULES

This thesis introduces the concept of S-semiprime submodule which is a generalization of semiprime submodules and S-prime submodules. Let M be a nonzero unital module, where A is a commutative ring with a nonzero identity. Suppose that S is a multiplicatively closed subset of A. A submodule L of M is said to be an S-semiprime submodule if there exists a fixed $s \in S$ and whenever $r^n m \in L$ for some $r \in A, m \in M$ and $n \in \mathbb{N}$, then $srm \in L$. Also, M is said to be an S-reduced module if there exists (fixed) $s \in S$ and whenever $r^n m = 0$ for some $r \in A, m \in M$ and $n \in \mathbb{N}$, then $srm = 0$. In addition to give many examples and characterizations of S-semiprime submodules and S-reduced modules, we characterize certain class of semiprime submodules and reduced modules in terms of these concepts.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\subseteq$: Alt küme

$\subsetneq$: Has alt küme

$\cong$: İzomorfizma

$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter şart (ancak ve ancak)

$\Leftarrow$: Yeterlilik

$\Rightarrow$:Gereklilik

${}^{K}/_{L}$: Bölüm halkası

$S^{-1}A$: Kesir halkası

$\sqrt{I}$: I nın radikali

$Max(A)$: Maksimal ideallerin kümesi

$Spec(A)$: Asal ideallerin kümesi

$Jac(A)$: Jacobson radikali

$Çek(h)$: h homomorfizmasının çekirdeği

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$: $a_0, a_1, \dots, a_n$ ile üretilmiş ideal

$u(A)$: A halkasının birim grubu

$I(A)$: A halkasının tüm ideallerinin kümesi

$V(J)$: J yi kapsayan tüm asal ideallerin kümesi

1. GİRİŞ

1.1 Halkalar Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.1.1 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $(A, +)$ abelyan bir grup ve A üzerinde "$.$" işlemi tanımlı olsun.

(i) A da "$.$" işlemi birleşme özelliğine sahip

(ii) A da "$.$" işlemi + üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğine sahip ise $(A, +, \cdot)$ üçlüsüne halka denir.

Bundan sonra $(A, +, \cdot)$ üçlüsü yerine A halkası ifadesini kullanacağız ve $a.b$ işlemini ab ile göstereceğiz. Ayrıca, A halkasının toplama işlemine göre etkisiz elemanını 0 ile göstereceğiz.

Örnek 1.1.2 $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halka yapısı oluşturur.

Tanım 1.1.3 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $(A, +, .)$ bir halka olsun.

(i) Her $a \in A$ için $ea = ae = a$ olacak şekilde $e \in A$ varsa e ye A halkasının birimi denir ve A ya bir birimli halka adı verilir.

(ii) Her $a, b \in A$ için $ab = ba$ ise A ya bir değişmeli halka denir.

Bundan sonra bir A halkasının birimini 1 ile göstereceğiz.

Örnek 1.1.4 $(\mathbb{Q}, +, .), (\mathbb{C}, +, .), (\mathbb{R}, +, .)$ bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır.

Örnek 1.1.5 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $X \neq \emptyset$ bir alt küme olmak üzere $C(X)$, X ten $\mathbb{R}$ ye tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin.

$$C(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \; sürekli\}$$

aşağıdaki toplama ve çarpma işlemine göre birimli ve değişmeli bir halkadır:

Her $f, g \in C(X)$ ve $x \in X$ için;

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Örnek 1.1.6 A bir halka ve $M_n^m(A)$ girdileri A da olan $m \times n$ lik matrislerin kümesi olsun. Matrislerdeki bilinen toplama ve çarpma işlemine göre $M_n^m(A)$ bir halkadır. Eğer A halkası birimliyse $M_n^m(A)$ halkası birimli halkadır. Ancak matrisler ikinci işleme göre değişmeli olmadığından bu halka değişmeli bir halka değildir.

Örnek 1.1.7 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi (a_n) reel sayı dizileri olsun. Bütün reel sayı dizilerinin kümesi

$$L = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (\,a_n) \text{ reel sayı dizisi}\}$$

ile gösterilsin. L aşağıdaki toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli ve birimli bir halkadır:

Her $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L$ için,

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Tüm tez boyunca aksi belirtmedikçe biz halkaları birimli ve değişmeli kabul edeceğiz.

Tanım 1.1.8 (Sharp, 2000) A bir halka olsun. Halkada tersi mevcut elemanlara birimsel elemanlar denir. Bu elemanların oluşturduğu gruba halkanın birim grubu denir ve $u(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.9 (Sharp, 2000) A bir halka olsun. $a \in A$ için $ax = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $x \in A$ bulunabiliyorsa a ya halkanın sıfır böleni denir. Özel olarak, A halkasının tüm sıfır bölenleri kümesi $zd(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.10 $\mathbb{Z}_n$ halkasının sıfır bölenleri kümesi $zd(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{k} \in \mathbb{Z}_n : (k, n) \neq 1\}$ dir.

Tanım 1.1.11 (Sharp, 2000) Bir A halkasında 0 dan başka hiçbir sıfır bölen yoksa bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.1.12 $(\mathbb{Q}, +, .), (\mathbb{C}, +, .), (\mathbb{Z}, +, .)$ halkaları birer tamlık bölgesidir.

Örnek 1.1.13 p asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1.1.14 (Atiyah, 2018) Bir A halkasında sıfırdan farklı her elemanın çarpımsal tersi varsa bu halkaya cisim adı verilir.

Örnek 1.1.15 $(\mathbb{Q},+,.)$, $(\mathbb{C},+,.)$, $(\mathbb{R},+,.)$ halkaları birer cisimdir.

Not Her halka cisim değildir. Örneğin $(\mathbb{Z},+,.)$ halkası bir cisim değildir. Çünkü sadece 1 ve -1 elemanının tersi vardır.

Tanım 1.1.16 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq A$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa I ya A nın ideali denir:

(i) $\forall\ x, y \in I$ için $x - y \in I$

(ii) $\forall\, x \in I$ ve $\forall\, a \in A$ için $ax \in I$.

Not $\{0\}$ ve A halkasının kendisi her zaman bir ideal belirtir. O halde halka sıfırdan farklı ise en az iki ideali vardır. A nın kendisinden farklı ideallerine has ideal denir.

Örnek 1.1.17 $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının idealleri $k\mathbb{Z}$ biçimindedir.

Tanım 1.1.18 (Sharp, 2000) Her ideali bir temel ideal olan halkaya temel ideal halkası denir. Aynı zamanda halka tamlık bölgesi ise temel ideal bölgesi (TİB) adını alır.

Örnek 1.1.19 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının her ideali bir temel idealdir. Aynı zamanda tamlık bölgesi olduğundan temel ideal bölgesidir.

Önerme 1.1.20 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $A_1, A_2, \dots, A_n$ halkaları verilsin.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1,2, \dots, n\}$$

kartezyen çarpım kümesi aşağıdaki işlemler altında bir halkadır.

Her $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ için,

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)\,(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

İspat $A_1, A_2, \dots, A_n$ halkaları verilsin.

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1,2, \dots, n\}$ kümesinin tanımda verilen işlemler altında bir halka olduğunu gösterelim. Gerçekten de

(i) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$+$(b_1, b_2, \dots, b_n)$= $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$=$(b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n)$=$(b_1, b_2, \dots, b_n)$+ $a_1, a_2, \dots, a_n)$.

(ii)$[(a_1, a_2, ., a_n) + (b_1, b_2, ., b_n)] + (c_1, c_2, \dots, c_n) = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots., (a_n + b_n) + c_n]$=$[a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots, a_n + (b_n + c_n)] = (a_1, a_2, \dots, a_n)$+ $[(b_1, b_2, \dots, b_n)$+ $(c_1, c_2, \dots, c_n)]$.

(iii) Her $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ için;

$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (0,0, \dots,0)$= $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olacak şekilde bir $0 = (0,0, \dots,0) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vardır.

(iv) Her $\left(a_1, a_{2,} \dots, a_n\right) \in A_1 \times A_2 \dots \times A_n$ için
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ +$(-a_1, -a_2, \dots., -a_n)$ =(0,0, ... ,0) olacak şekilde bir
$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ vardır.

(v) $[(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots., b_n)](c_1, c_2, \dots, c_n)$=$[(a_1 b_1)c_1, (a_2 b_2)c_2, \dots, (a_n b_n)c_n] = [a_1(b_1 c_1), a_2(b_2 c_2), \ldots, a_n(b_n c_n)] = (a_1, a_2, \dots, a_n)\ [(b_1, b_2, \dots, b_n)\ (c_1, c_2, \dots, c_n)]$.

(vi) $(a_1, a_2, \dots, a_n)[(b_1, b_2, \dots, b_n)$+$(c_1, c_2, \dots, c_n] = [(a_1(b_1 + c_1), a_2(b_2 + c_2), \dots, a_n(b_n + c_n)] = [(a_1 b_1$+$a_1 c_1)$,$(a_2 b_2$+$a_2 c_2)$,…,$(a_n b_n$+$a_n c_n)]$
=$(a_1, a_2, \dots, a_n).(b_1, b_2, \dots, b_n)$+$(a_1, a_2, \dots, a_n)(c_1, c_2, \dots, c_n)$

ve benzer şekilde

$[(a_1, a_2, \dots, a_n)$+$(b_1, b_2, \dots, b_n)].(c_1, c_2, \dots, c_n)$=$(a_1 + b_1)c_1, (a_2 + b_2)c_2, \dots, (a_n$+$b_n)c_n$=$[(a_1 c_1 + b c_1)$,$(a_2 c_2 + b_2 c_2)$,…,$(a_n c_n + b_n c_n)]$

=$(a_1, a_2, \dots, a_n).(c_1, c_2, \dots., c_n)$+$(b_1, b_2, \dots b_n)(c_1, c_2, \dots, c_n)$.

Teorem 1.1.21 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halkalarının kartezyen çarpımı $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ olsun. J , A halkasının ideali ise

$$J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$$

olacak şekilde her $i \in 1,2, \ldots, n$ için A_i halkasında bir J_i ideali bulunabilir.

İspat Her $k \in 1,2, \ldots, n$ için

$$\pi_k : A \rightarrow A_k$$

izdüşüm fonksiyonunu $\pi_k\left((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\right) = \alpha_k$ ile tanımlayalım. π_k bir örten homomorfizmadır. $\pi_k(J)$=J_k dersek J_k bir idealdir. J=$J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ olduğunu gösterelim. a=$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in J$ olsun. $\pi_k(a)$=$a_k \in J_k$ olduğundan $a \in J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ elde edilir. Yani $J \subseteq J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ olur. Şimdi b=$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ alalım. Şu halde $b_k \in J_k$=$\alpha_k(J)$ olur. Böylece

$$a=(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in J$$

vardır. Her $k \in 1,2, \ldots, n$ için

$(0,0,\ldots,0, b_k, 0,\ldots,0)$=$(0,0,\ldots,0,1,\ldots,0)(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in J$ olur.

Böylece

$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$= $(b_1, 0, \ldots, 0)+(0, b_2, \ldots, 0)+ \cdots +(0,0,\ldots, b_n) \in J$

olduğundan $J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n \subseteq J$ olur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir.

Örnek 1.1.22 F bir cisim ise $F \times F$ in idealleri; kendisi, sıfır ideali, ((1,0)) ve ((0,1)) idealleri olduğundan $F \times F$ halkası sfır bölenli bir temel ideal halkasıdır. Ama $(a, 0)(0, a) = (0,0)$ olduğundan Tamlık Bölgesi değildir.

1.2 Asal İdealler ve Genelleştirmeleri

Tanım 1.2.1 (Atiyah, 2018) A bir halka $I \neq A$ bir ideali olsun. Her $x, y \in A$ için $xy \in I$ olması $x \in I$ veya $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa I asal ideal denir. A halkasının tüm asal ideallerin kümesini $Spec(A)$ ile göstereceğiz.

Örnek 1.2.2 $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri $\{0\}$ veya p asal sayı olmak üzere $p\mathbb{Z}$ şeklindedir.

Önerme 1.2.3 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka olsun. $J \subseteq A$ ideali için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) J asal idealdir.

(ii) A nın K ve L idealleri için $KL \subseteq J$ ise $K \subseteq J$ veya $L \subseteq J$ dir.

(iii) $KL \subseteq J$ olacak şekilde $K \supset J$ ve $L \supset J$ idealleri bulunamaz.

Tanım 1.2.4 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka olsun. S, A nın alt kümesi olmak üzere $1 \in S$ ve her $a, b \in S$ için $ab \in S$ ise S ye A nın çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

Örnek 1.2.5 A bir halka ve $a \in A$ olmak üzere $S = \{a^n : n \geq 0\}$ kümesi bir çarpımsal kapalı kümedir. Gerçekten 1_A=a^0 olduğundan $1_A \in S$ elde edilir.$s_1, s_2 \in S$ olsun. O halde s_1=a^{n_1} ve s_2=a^{n_2} biçimindedir. s_1s_2=$a^{n_1+n_2}$=a^{n_3} olduğundan $s_1s_2 \in S$ olur.

Örnek 1.2.6 A bir halka ve J, A halkasının asal ideali olmak üzere S=$A \setminus J$ bir çarpımsal kapalı alt kümedir. Gerçekten $a, b \in S$ olsun. O halde $a \notin J$, $b \notin J$ dir. Böylece $ab \notin J$ elde edilir. Buradan $ab \in A \setminus J$ olur. J bir has ideal olduğundan $1 \notin J$ ve böylelikle $1 \in A \setminus J$ dir.

Tanım 1.2.7 (Atiyah, 2018) A halka ve J de A nın bir ideali olsun. J idealini kapsayan bütün asal ideallerinin kümesini

$$V(J) = \{I \in Spec(A) : J \subseteq I\}$$

ile gösterelim.

Önerme 1.2.8 (Çallıalp veTekir, 2009) J, A halkasının bir ideali S çarpımsal bir alt kümesi ve $J \cap S = \emptyset$ olsun.A halkasının tüm idealler kümesi $I(A)$ ile gösterilsin.

$$\Omega = \{K \in I(A) : K \cap S = \emptyset \text{ ve } J \subseteq K\}$$

kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır ve bu maksimal elemanlar A nın asal idealleridir.

Tanım 1.2.9 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve I, A nın ideali olsun.

$$\{r \in A: \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}$$

kümesine I nın radikali denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir. Halkanın nilpotent elemanlarından oluşan ideale de I nın nil radikali veya asal radikal denir.

Önerme 1.2.10 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve J ideali olsun. J nin radikali; J yi kapsayan tüm asal ideallerin kesişimidir.

$$\sqrt{J} = \bigcap_{K \in V(J)} K$$

İspat $a \in \sqrt{J}$ ise $a^n \in J$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Her $K \in V(J)$ için $a^n \in K$ ve K asal olduğundan $a \in K$ elde edilir. Buradan $\sqrt{J} \subseteq \bigcap_{K \in V(J)} K$ elde edilir. Tersini göstermek için herhangi $b \in \bigcap_{K \in V(J)} K$ alalım. $b \notin \sqrt{J}$ olsaydı $S = \{b^n : n \in \mathbb{N} \cup 0\}$ çarpımsal kümesi için $S \cap J = \emptyset$ olurdu. Önerme 1.2.8 den J yi kapsayan ve S ile ayrık olan bir K asal ideali bulunabilir. O halde bu $b \in \bigcap_{K \in V(J)} K$ ile çelişir. Buradan $\bigcap_{K \in V(J)} K \subseteq \sqrt{J}$ elde edilir. Bu kapsamalardan eşitlik sağlanır.

Sonuç 1.2.11 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka olsun. Nil radikal

$$\sqrt{0} = \bigcap_{J \in Spec(A)} J$$

olur. Halkanın kendisi için

$$\sqrt{A} = \bigcap_{J \in \emptyset} J = A$$

olarak boş küme üzerinden ara kesiti A alınabilir.

Tanım 1.2.12 (Sharp, 2000) A bir halka olsun. Nil radikali sıfır ise A halkasına indirgenmiş halka denir.

Örnek 1.2.13 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası indirgenmiş bir halkadır. Çünkü $\sqrt{0} = 0$ dır.

Örnek 1.2.14 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $X \neq \emptyset$ sabit bir küme olsun. Şu halde

$$C(X) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli}\}$$

halkası bir indirgenmiş halkadır. Gerçekten $f^n = 0$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(x)$ alalım. Buradan $\forall x \in X$ için $f(x)^n = 0$ olur.$\mathbb{R}$ indirgenmiş halka olduğundan $f(x) = 0$ ve böylece $f = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $C(X)$ indirgenmiştir.

Örnek 1.2.15 $\mathbb{R}$ reel sayılar olmak üzere bütün reel sayı dizilerinin kümesi

$L = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: (a_n) \text{ reel sayı dizisi}\}$ olarak tanımlanmıştı. Bu halka da indirgenmiş halkadır.

Teorem 1.2.16 A_1, A_2 birer halka ve $A = A_1 \times A_2$ olsun. Ayrıca J, A nın bir has ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) J asaldır.

(ii) J_1, A_1 in asal ideali olmak üzere $J = J_1 \times A_2$ veya J_2, A_2 nin asal ideali olmak üzere $J = A_1 \times J_2$ dir.

İspat Teorem 1.1.22 den $i = 1{,}2$ için J_i, A_i nin ideali olmak üzere $J = J_1 \times J_2$ biçimindedir.

$(i) \Rightarrow (ii)$: $J = J_1 \times J_2$ bir asal ideal olsun. $(1{,}0)(0{,}1) = (0{,}0) \in J_1 \times J_2$ olduğundan $(1{,}0) \in J_1 \times J_2$ ya da $(0{,}1) \in J_1 \times J_2$ olur. Eğer $(1{,}0) \in J_1 \times J_2$ ise $1 \in J_1$ yani $J_1 = A_1$ olur. Benzer şekilde $(0{,}1) \in J_1 \times J_2$ ise $J_2 = A_2$ elde edilir. Yani $J_1 \times J_2$ asal idealse ya $J_1 \times J_2 = A_1 \times J_2$ ya da $J_1 \times J_2 = J_1 \times A_2$. Genelliği bozmadan $J_1 \times J_2 = A_1 \times J_2$ olsun. Şimdi J_2 nin asal olduğunu göstereceğiz. Bunun için $xy \in J_2$ alınsın. $(0, x)(0, y) = (0, xy) \in A_1 \times J_2$. Buradan $(0, x) \in A_1 \times J_2$ veya $(0, y) \in A_1 \times J_2$ elde edilir. Böylece $x \in J_2$ veya $y \in J_2$ olur. O halde J_2 asaldır. Benzer şekilde $J_1 \times J_2 = I_1 \times A_2$ ise J_1 in asal olduğu görülür.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Şimdi J_2 asal ideal olmak üzere $J = A_1 \times J_2$ olsun. Şimdi J nin asal olduğunu gösterelim. $x, y \in A_1$, $a, b \in A_2$ olmak üzere $(x, a)(y, b) \in A_1 \times J_2$ olsun. $(x, a)(y, b) = (xy, ab) \in A_1 \times J_2$ olduğundan $ab \in J_2$ elde edilir. J_2 asal olduğu için $a \in$

J_2 veya $b \in J_2$ bulunur. Buradan $(x,a) \in A_1 \times J_2$ veya $(y,b) \in A_1 \times J_2$ elde edilir. O halde $A_1 \times J_2$ asaldır. Benzer şekilde J_1 asalken $J_1 \times A_2$ asal olur.

Tanım 1.2.17 (Çallıalp ve Tekir, 2009) K, A halkasının bir has ideali olsun.A nın K yı kapsayan K dan başka hiçbir has ideali yoksa K ya bir maksimal ideal denir.

Önerme 1.2.18 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve I ideali olsun. A/I nın tamlık bölgesi olması için gerek yeter koşul I nın A nın bir asal ideali olmasıdır.

Önerme 1.2.19 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve I ideali olsun. A/I nın cisim olması için gerek yeter koşul I nın A nın bir maksimal ideali olmasıdır.

Sonuç 1.2.20 (Çallıalp ve Tekir, 2009) Her maksimal ideal asaldır.

İspat M, A nın maksimal ideali olsun. O halde A/M bir cisim ve özel olarak tamlık bölgesidir. Böylece M, A nın asal ideali olur

Ama tersi doğru olmak zorunda değildir. Aşağıda bu duruma örnek verilmiştir.

Örnek 1.2.21 $\mathbb{Z}[X]$ polinomlar halkasında (X) asaldır fakat maksimal değildir. Çünkü $(X) \subsetneq (X,3) \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 1.2.22 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $M = (m)$ idealinin maksimal olması için m nin asal sayı olması gerekir.

Örnek 1.2.23 A tamlık bölgesi olmak üzere A halkaısnın $\{0_A\}$ ideali asaldır. Ama A cisim değilse $\{0_A\}$ maksimal değildir.

Tanım 1.2.24 (Atiyah, 2018) A halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine Jacobson radikali denir ve $J(A)$ ile gösterilir.

$$J(A) = \bigcap_{K \text{ maksimal ideal}} K$$

Örnek 1.2.25 F bir cisim olmak üzere $J\big(F[[X]]\big) = (X)$ olur.

Örnek 1.2.26

$$J(\mathbb{Z}) = \bigcap_{m \in \mathbb{Z}\ asal} (m) = 0$$

Tanım 1.2.27 Bir A halkasının tek bir maksimal ideali varsa bu halkaya yerel halka denir.

Örnek 1.2.28 F bir cisim ise yerel halkadır. Çünkü tek maksimal ideali 0'dır.

Tanım 1.2.29 (Burton, 1970) A bir halka ve I, A nın bir ideali olsun. Her $a \in A$ için $a^n \in I$ iken $a \in I$ oluyorsa I ya yarı asal ideal denir.

Sonuç 1.2.30 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $\sqrt{I}$, A nın bir yarı asal idealidir.

İspat Her $x \in \sqrt{I}$ için radikal tanımı gereğince $x^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ bulunur. I ideal olduğu için her $r \in A\ için\ x^n r^n \in I$ olur. Bu durumda $rx \in \sqrt{I}$ elde edilir. Ayrıca $x, y \in \sqrt{I}$ olsun. O halde $x^n \in I, y^m \in I$ sağlayan $m, n \in \mathbb{N}$ vardır.

$(x-y)^{m+n} = x^{m+n} - \binom{m+n}{1} x^{m+n-1} y + \binom{m+n}{2} x^{m+n-2} y^2 - \cdots y^{m+n}$
$+(-1)^{m+n}(y)^{m+n}$

açılımı yapılabilir. Bu açılımda $x^n \in I, y^m \in I$ dir. O halde yukarıdaki toplamın tüm terimleri I nın elemanı olur. Bu durumda $(x-y)^{m+n} \in I$ ise $(x-y) \in \sqrt{I}$ elde edilir. Yani $\sqrt{I}$, A nın idealidir. Şimdi $\sqrt{I}$ nın yarı asal olduğunu gösterelim. $x^n \in \sqrt{I}$ olsun. Buradan $x^{nm} \in I$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece $x \in \sqrt{I}$ elde edilir. Yani $\sqrt{I}$ yarı asaldır.

Örnek 1.2.31 $\mathbb{Z}$ nin radikal idealleri $p_1, p_2, p_3 \ldots, p_n$ asal olmak üzere

$n\mathbb{Z} = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \mathbb{Z}$ şeklindedir.

Not Her asal ideal yarı asaldır. Ama tersi doğru değildir.

Örnek 1.2.32 $6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ de yarı asal bir idealdir fakat asal değildir.

Teorem 1.2.33 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halkalar olsun.

$A=A_1 \times A_2 \times \ldots . \times A_n$ in idealleri $J=J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ şeklindedir. Bu durumda $\sqrt{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n} = \sqrt{J_1} \times \sqrt{J_2} \times \ldots \times \sqrt{J_n}$ dir.

İspat $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \sqrt{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n}$ alalım.

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^m = (a_1{}^m, a_2{}^m, \ldots, a_n{}^m) \in J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$ olur. $a_i{}^m \in J_i$ olduğundan $a_i \in \sqrt{J_i}$ ve buradan $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \sqrt{J_1} \times \sqrt{J_2} \times \ldots \times \sqrt{J_n}$ elde edilir.

Sonuç olarak $\sqrt{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n} \subseteq \sqrt{J_1} \times \sqrt{J_2} \times \ldots \times \sqrt{J_n}$ bulunur. Tersine

$a_i \in \sqrt{J_i}$ alalım. O halde $a_i{}^{m_i} \in J_i$ olur. Yani $a_1{}^{m_1} \in J_1$, $a_2{}^{m_2} \in J_2, \ldots, a_n{}^{m_n} \in J_n$dir. $\max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = m$ dersek $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^m \in J_1 \times J_2 \times \ldots . \times J_n$ olur.
Yani $\sqrt{J_1} \times \sqrt{J_2} \times \ldots \times \sqrt{J_n} \subseteq \sqrt{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n}$ bulunur.

Böylece iki kapsamadan istenen elde edilir.

1.3. Modüller Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.3.1 (Dummit ve Foote, 2004) A halka ve $(M, +)$ abelyan grup olsun. $A \times M \to M$ fonksiyonu M deki elemanların A daki elemanlarla skaler çarpımını $(a, x) \to ax$ ile göstersin. Bu fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M ye bir (sol) A-modül denir.

M1. $\forall\, a \in A\ ve\ \forall\, x, y \in M$ için $a(x + y) = ax + ay$

M2. $\forall\, a, b \in A\ ve\ \forall\, x \in M$ için $(a + b)x = ax + bx$

M3. $\forall\, a, b \in A\ ve\ \forall\, x \in M$ için $a(bx) = (ab)x$

A halkası birimli ise;

M4. $\forall\, x \in M$ için $1_A x = x$

Benzer şekilde $(x, a) \to xa$ ile tanımlanan $M \times A \to M$ fonksiyonu içinde aynı aksiyomlar sağlatılarak (sağ) A-modül tanımı yapılır.

Not Eğer A değişmeli bir halka ise her sol modül bir sağ modül yapılabilir.

Tanımı incelersek modüllerin vektör uzaylarının bir genelleştirilmesi olduğu görülür. Vektör uzayları bu aksiyomları cisim üzerinde sağlarken modüller halka üzerinde bir vektör uzayı gibi davranır.

Örnek 1.3.2 F bir cisim K da F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. O halde K bir F-modül olur. Özel olarak n-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ bir $\mathbb{R}$-modüldür.

Örnek 1.3.3 A bir halka J de ideali olsun. O halde J bir A-modüldür. Özel olarak her halka kendi üzerinde bir modüldür.

Örnek 1.3.4 J bir A halkasının ideali olsun.

$A \times A/J \to A/J, (a, b + J) \to ab + J$ ile tanımlayalım. O halde A/J bir A-modüldür.

Örnek 1.3.5 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $\emptyset \neq X \subseteq R$ olmak üzere $C(X)$, X ten $\mathbb{R}$ ye tüm sürekli fonksiyonların kümesini göstersin. ($C(X)$,+) bir abelyan gruptur.

$\mathbb{R} \times C(X) \to C(X)$, $(a, f) \to af$ ile tanımlansın. Buna göre $C(X)$ bir $\mathbb{R}$-modüldür.

Örnek 1.3.6 $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere tüm reel sayı dizilerinin kümesi

$$L = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ reel sayı dizisi}\}$$

bir $\mathbb{R}$-modüldür.

Örnek 1.3.7 A bir halka olmak üzere $M_n^m(A)$ girdileri A da olan tüm $n \times m$ lik matrislerin toplamsal grubu olsun. $a \in A$ ve $B = [b_{ij}]$ olmak üzere, $M_n^m(A)$ üzerinde skaler çarpımı $aB = [ab_{ij}]$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $M_n^m(A)$ bir A-modül olur.

Örnek 1.3.8 $\mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ bir $\mathbb{Z}$-modüldür.

Tanım 1.3.9 (Dummit ve Foote, 2004) A bir halka K bir A-modül, $L \subseteq K$ boş olmayan alt kümesi olsun. L de bir A-modül ise L ye K nın bir alt modülü denir.

Önerme 1.3.10 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A-modül K nın boş olmayan bir $L \subseteq K$ alt kümesinin alt modül olması için gerek yeter koşul her $a, a' \in A$ ve her $x, x' \in L$ için $ax + a'x' \in L$ olmasıdır.

İspat L bir alt modül olsun. O halde modül olma şartlarını sağlayacağından gereklilik açıktır. Tersine her $a, a' \in A$ ve her $x, x' \in L$ için $ax + a'x' \in L$ olsun. Buradan $a = 1$ ve $a' = -1$ seçilirse $x - x' \in L$ olur. Böylece L, K nın bir alt grubu olur. Ayrıca her $a \in A$ ve her $x \in L$ için $ax \in L$ olur. K nın tüm elemanları için Tanım 1.3.1 deki skaler çarpım özellikleri sağlanacağından L deki elemanlar için de sağlanır. Böylece L bir A-alt modüldür.

Örnek 1.3.11 A bir cisim olmak üzere V, A üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu takdirde V bir A-modül ve V nin tüm alt uzayları da bir A-alt modüldür.

Örnek 1.3.12 A halkası bir A-modüldür. Bu halkanın alt modülleri A nın idealleridir.

Örnek 1.3.13 $n > 1$ bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_n$ nin tüm alt modülleri $x|n$ ve $0 \leq x < n$ şartını sağlayan x tam sayıları için (x) şeklimdedir.

Örnek 1.3.14 A bir halka K bir A-modül ve $x \in K$ olsun. $Ax = \{ax: | \ a \in A\}$ kümesi K nın bir alt modülüdür. Gerçekten $0_A \in A$ ve $0_A.x = 0_K \in Ax \subset K$ elde edilir. Böylece $Ax \neq \emptyset$ olur. Diğer taraftan $a_1x, a_2x \in Ax$, $b \in A$ için

$a_1x - a_2x = (a_1 - a_2)x \in Ax$ ve

$b(a_2x) = (ba_2)x \in Ax$ olduğundan istenen gösterilmiş olur.

Tanım 1.3.15 (Sharp, 2000) K nın kendisi ve 0 dışındaki alt modüllerine has alt modül denir. Eğer has alt modülü yoksa K basit modül olarak adlandırılır.

Örnek 1.3.16 $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_p$ (p asal) basit modüldür.

Tanım 1.3.17 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka, K ve L de A-modüller olarak alınsın.

$\mu: K \to L$ fonksiyonu $\forall \ a \in A, \forall \ x, y \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa μ ye modül homomorfizması denir:

$$\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y), \mu(ax)=a\mu(x).$$

Ayrıca bu homomorfizma birebir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma,hem birebir hem örten ise izomorfizma olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.18 (Çallıalp ve Tekir, 2009) $\mu: K \rightarrow L$ bir modül homomorfizması olsun.

$$Çek\mu=\{k \in K: \mu(k)=0_L\}$$

kümesi μ nün çekirdeği olarak adlandırılır.

Önerme 1.3.19 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve $\mu: K \rightarrow L$ bir A-homomorfizma olsun. μ nün 1-1 olması için gerek yeter şart $Çek\ \mu=\{0_K\}$ olmasıdır.

İspat μ, 1-1 olsun. $a \in Çek$ μ alınsın. O halde $\mu(a)=0_L=\mu(0_K)$ olduğundan $Çek\ \mu = 0_K$ bulunur. Tersine $Çek$ μ=0_K olsun. $a, b \in K$ alalım. $\mu(a)= \mu(b)$ ise $\mu(a-b)=0$ olur. O halde $a-b \in Çek\mu=0_K$. Yani $a=b$ elde edilir. Böylece μ, 1-1 olur.

Tanım 1.3.20 (Sharp, 2000) A bir halka, K bir A-modül N de K nın bir alt modülü olsun.

$$(0: K)=\{a \in A: aK=0\}$$

ideali K modülünün sıfırlayıcısıdır ve $Ann(K)$ ile gösterilir. Ayrıca

$$(N: K)=\{a \in A: aK \subseteq N\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.3.21 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka, K bir A-modül ve N de K nın bir alt modülü olsun. $(N: K)=\{a \in A: aK \subseteq N\}$ kümesi A nın bir idealidir.

İspat Bunu kanıtlamak için $x, y\ \in(N: K)$ alalım.

$(x-y)K \subseteq xK-yK \subseteq N$ ve böylece $x-y \in(N: K)$ olur. Herhangi $a \in A\ ve\ x \in (N: K)$ alalım.

$(ax)K=a(xK) \subseteq N$ yani $ax \in (N: K)$ olur. Böylece $(N: K),\ A$ halkasının bir idealidir.

Tanım 1.3.22 (Sharp, 2000) M bir A-modül ve $x \in M$ olsun.

$M = Ax = (x)$ olacak şekilde $x \in M$ bulunabilirse M ye devirli modül denir.

M bir A-modül , $N \subseteq M$ sonlu alt küme olsun. $M = (N)$ ise M ye sonlu üretilmiş modül denir.

Örnek 1.3.23 A bir halka olsun. A-modül A, 1_A ile üretilebileceğinden devirli bir modüldür.

Örnek 1.3.24 $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ sonlu üretilmemiştir. Çünkü $\left\{\frac{a_1}{a_1^*}, \frac{a_2}{a_2^*}, \dots, \frac{a_n}{a_n^*}\right\}$, $\mathbb{Q}$ nun sonlu alt kümesi $b = \prod_{i=1}^{n} a_i^*$ olsun. p asal tam sayı ve $p \nmid b$ olsun.Şu halde $\frac{1}{p}$ rasyonel sayısı $\left\{\frac{a_1}{a_1^*}, \frac{a_2}{a_2^*}, \dots, \frac{a_n}{a_n^*}\right\}$ kümesi tarafından üretilmiş alt modülde değildir. Eğer olsaydı $z \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a_i}{a_i^*} = \frac{z}{b}$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ bulunabilirdi. Şu halde $b = pz$ ve böylece $p|b$ çelişkisi elde edilirdi. Yani $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ sonlu üretilmemiştir.

Tanım 1.3.25 (Çallıalp ve Tekir, 2000) A tamlık bölgesi ve K bir A-modül olsun. $k \in K$ elemanı için $ak = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $a \in A$ varsa k ya K nın burulmalı elemanı denir.

$$T(K) = \{k \in K : ak = 0 \text{ sağlayan sıfırdan farklı } a \in A \text{ var.}\}$$

alt modülüne de K nın burulmalı alt modülü denir.

$T(K) = K$ ise K ya burulmalı modül, $T(K) = 0$ ise K ya serbest burulmalı modül denir.

Tanımdan $T(K)$, A nın alt modülüdür. Gerçekten $k, k' \in T(K)$ olsun. O halde $bk = 0$ ve $b'k' = 0$ olacak şekilde $b, b' \in A$ vardır. Şimdi $a, a' \in A$ alalım. O halde $bb'(ak + a'k') = b'a(bk) + ba'(b'k') = 0$ olur. Yani $ak + a'k' \in T(K)$ elde edilir. Böylece $T(K)$, A nın alt modülüdür.

Örnek 1.3.26 $\mathbb{Z}$ -modül Z_n burulmalı modüldür. Çünkü her $\bar{x} \in Z_n$ için $n\bar{x} = \bar{0}$ olur.

Örnek 1.3.27 F bir cisim ve K bir F-vektör uzayı olsun. O halde K serbest burulmalı modüldür. Gerçekten de $k \in T(K)$ alalım. $ak = 0$ sağlayan $0 \neq a \in F$ vardır. F cisim olduğu için $a^{-1} \in F$ bulunur. $a^{-1}(ak) = 0_K$. O halde $T(K) = 0$ olur.

Örnek 1.3.28 $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ serbest burulmalıdır. $\frac{a}{b} \in T(\mathbb{Q})$ alınsın. $0 \neq x \in \mathbb{Z}$, $\frac{xa}{b} = 0$ olacak şekilde vardır. Buradan $xa = 0$ ve böylece $a = 0$ elde edilir. Böylece $\mathrm{T}(\mathbb{Q}) = 0$ bulunur.

Teorem 1.3.29 (Çallıalp ve Tekir, 2009) K bir A-modül olsun.I ve J, N modülün alt modülleri olsun ve $I \subseteq N$ alınsın. O halde:

$$I + (J \cap N) = (I + J) \cap N$$

olur.

İspat $I + (J \cap N) \subseteq (I + J)$ ve $I \subseteq N$ olduğu için $I + (J \cap N) \subseteq I + N \subseteq N$ olur. Böylece $I + (J \cap N) \subseteq (I + J) \cap N$ bulunur. Tersine $x \in (I + J) \cap N$ alalım. $x \in N$ ve $x = b + c$ sağlayan bir $b \in I$ ve $c \in J$ vardır. $I \subseteq N$ ve $b \in N$ olduğu için $c = x - b \in (J \cap N)$ dir. Çift yönlü kapsama sağlandığı için eşitlik gösterilmiş olur.

Tanım 1.3.30 (Sharp, 2000) S, A halkasının çarpımsal alt kümesi ve K bir A-modül olsun. $K \times S$ de $\sim$ bağıntısını

$$(k, s) \sim (k', s') \Leftrightarrow bir\ u \in S\ için\ u(s'k - sk') = 0$$

şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten

(i) $\forall (k, s) \in K \times S$ için $(k, s) \sim (k, s)$ olduğu açıkça görülür (Yansıma).

(ii) $\forall (k, s,), (m, t) \in K \times S$ için $(k, s) \sim (m, t) = u(tk - sm) = 0$ buradan $utk = usm$ elde edilir. O halde $u(sm - tk) = 0$ olur ki bu da (m,t) $\sim (k, s)$ demektir (Simetri).

(iii) $(k, s), (m, t), (l, r) \in K \times S$ için $(k, s) \sim (m, t)$ ve $(m, t) \sim (l, r)$ olsun. Buradan $u_1(tk - sm) = 0$ ve $u_2(rm - tl) = 0$ sağlayan $u_1, u_2 \in S$ vardır. $u_1 u_2 r(tk - sm) = 0$ ve $u_1 u_2 s(rm - tl) = 0$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak $u_1 u_2 t(rk - sl) = 0$ bulunur. O halde $(k, s) \sim (l, r)$ olur (Geçişme).

$(k,s) \in (K \times S)$ nin denklik sınıfına kesir adı verilir ve $\frac{k}{s}$ ile gösterilir. Tüm bu kesirlerin kümesini $S^{-1}K$ ile gösterilsin. $S^{-1}K$ da toplama ve skalerle çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$\forall\, a \in A$, $x, y \in S$ ve $k, n \in K$ için

$$\frac{k}{x} + \frac{n}{y} = \frac{yk+xn}{xy} \;,\; \frac{a}{x}\frac{n}{y} = \frac{an}{xy} \;.$$

Tanım 1.3.31 (Sharp, 2000) Yukarıda tanımlanan işlemlere göre $S^{-1}K$ bir $S^{-1}A$-modüldür. Modülün sıfırı $0_{S^{-1}K} = \frac{0_K}{1}$ dir.

$$\pi: K \to S^{-1}K, \pi(k) = k/1$$

ile tanımlı fonksiyon bir A-modül homomofizmasıdır. π homomorfizmasına doğal homomorfizma denir.

Önerme 1.3.32 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka, K bir A-modül ve N de K nın bir alt modülü olsun. $A \times K/N \to K/N$ skaler çarpımını $(a, k+N) \to ak+N$ ile tanımlarsak K/N bölüm grubu bir A-modül yapılabilir. K/N ye bölüm modülü denir.

İspat $(a, k+N) \to ak+N$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. Çünkü N bir alt modül olduğundan $\forall\, k - k' \in N \Leftrightarrow$ her $a \in A$, için $ak - ak' \in N$ dir.

Önerme 1.3.33 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka ve K bir A-modül, J de A nın ideali olsun. $J \subseteq Ann(K)$ ise;

$A/J \times K \to K$ skaler çarpımı $(a+J, k) \to ak$ ile tanımlayarak A- modül K bir $A/J-$ modül haline getirilebilir.

Önerme 1.3.34 (Çallıalp ve Tekir, 2009) K/N bir $A/(N{:}K)$ modüldür.

İspat $Ann(K/N) = \{\, a \in A \colon her\ k \in K\ için\ a(k+N) = N \,\}$

$=\{a \in A \colon aK \subseteq N\} = (N{:}K)$ olduğundan Önerme 1.3.33 ten istenen elde edilir.

1.4 Asal Alt Modüller ve Yarı Asal Alt Modüller

Tanım 1.4.1 (Lu, 1984) A bir halka, K bir A-modül ve $N \neq K$ bir alt modül olsun. $\forall a \in A$ ve $k \in K$ için $ak \in N$ olması $k \in N$ veya $a \in (N:K)$ olmasını gerektiriyorsa N ye A- modül K nın bir asal alt modülü denir.

Örnek 1.4.2 A halkasının her asal ideali A-modül A nın bir asal alt modülüdür.

Örnek 1.4.3 $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının asal ideali $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}$ nin bir asal alt modülüdür.

Örnek 1.4.4 $\mathbb{R}$ bir cisim ve $\mathbb{R}^3$ de bu cisim üzerinde bir vektör uzayıdır. Her vektör uzayı cisim üzerinde bir modül olduğundan $\mathbb{R}^3$ bir $\mathbb{R}$-modüldür. Bir vektör uzayının her has alt modülü asaldır. O halde $\mathbb{R}^3$ bir vektör uzayı olduğuna göre alt uzayları asal olmalıdır. Örneğin $W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \}$ olsun. W uzayının $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayı olduğunu gösterelim.

$(0,y,z) \in W$ ve $(0,t,s) \in W$ olsun.

$(0,y,z) + (0,t,s) = (0, y+t, z+s) \in W$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$c(0,x,y) = (0,cx,cy) \in W$ elde edilir.

W gerçekten de $\mathbb{R}^3$ ün alt uzayıdır. Dolayısıyla alt modüldür. Ayrıca W has alt modülü bir asal alt modüldür. Bunu göstermek için $\forall r \in \mathbb{R}$ ve her $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ alalım. $r(x,y,z) \in W$olsun. O halde $(rx,ry,rz) \in W$olur. Buradan $rx = 0$ elde edilir. Yani ya $r = 0$ ya da $x = 0$ elde edilir. $x = 0$ ise $(0,y,z) \in W$, $r = 0$ ise $r \in (W:\mathbb{R}^3)$ olur. Böylece W asal alt modül olur.

A bir halka K bir A-modül olsun. K nin bütün asal alt modüllerinin kümesini $Spec(K)$ ile göstereceğiz. Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi $K \neq (0)$ olsa bile $Spec(K) = \emptyset$ olabilir.

Örnek 1.4.5 (Çallıalp ve Tekir, 2009) p sabit bir asal tam sayı olsun.

$E(p) = \{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: bir $r \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için $\alpha = \frac{r}{p^n} + \mathbb{Z}\}$

bir $\mathbb{Z}$-modüldür. $E(p)$ nin alt modülleri $t \in \mathbb{N}_0$ için

$G_t = \{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: bir $r \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z}\}$

şeklindedir. Her $t \in \mathbb{N}_0$ için,

$(G_t :_{\mathbb{Z}} E(p))$=(0) olduğunu gösterelim. $(G_t :_{\mathbb{Z}} E(p))$≠(0) olsaydı bir 0≠$r$ ∈$(G_t :_{\mathbb{Z}} E(p))$ bulunabilirdi.

$r = p^k a(a \in \mathbb{Z}, p \nmid a$ ve $k \in \mathbb{N}_0)$ olsun. O halde $\alpha^* = \frac{1}{p^{k+t+1}}$ olmak üzere;

r$\alpha^* = \frac{p^k a}{p^{k+t+1}} + \mathbb{Z}$=$\frac{a}{p^{t+1}} + \mathbb{Z} \in G_t$ olur bu ise $p \nmid a$ ile çelişir. Böylece her $t \in \mathbb{N}_0$ için;

$(G_t :_{\mathbb{Z}} E(p))$=(0) olur. Hiçbir G_t,$E(p)$ nin asal alt modülü değildir. i herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere

$p^i \notin (G_t :_{\mathbb{Z}} E(p))$=(0) ve $\beta = \frac{1}{p^{t+i}} + \mathbb{Z} \notin G_t$ ve

$p^i \beta = \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \in G_t$ olur .$E(p)$ nin bütün alt modülleri G_t $\{t \in \mathbb{N}_0\}$ ler olduğundan $Spec(M) = \emptyset$ olduğu görülür.

Önerme 1.4.6 A bir halka, K bir A-modül ve L, K nin bir asal alt modülü olsun. O halde $(L: K)$ bir asal idealdir.

İspat L, A-modül K nın bir asal alt modülü olsun. $a, b \in A$ olmak üzere $ab \in (L: K)$ ve $b \notin (L: K)$ alalım. O halde $abK \subseteq L$ ve $bK \nsubseteq L$ olur. Böylece $abt \in L$ ve $bt \notin L$ olacak şekilde $t \in K$ vardır. L, bir asal alt modül olduğu için $a \in (L: K)$ olur. Yani $(L: K)$ asal idealdir.

Not Aşağıdaki örnek yukarıdaki önermenin tersinin her zaman doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 1.4.7 $\mathbb{Z}$-modül $E(p)$ de G_t alt modülünün bir önceki örnekten asal olmadığını biliyoruz fakat $\left(G_t : E(p)\right) = (0)$ ideali $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealidir.

1.5 Çarpımsal Modüller Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.5.1 (Barnard, 1981) A bir halka ve K bir A-modül olsun.K nın her alt modülü L için $L = IK$ olacak şekilde A halkasında bir I ideali bulunabiliyorsa K ya çarpımsal modüldür denir

Örnek 1.5.2 A bir halka olsun.A halkası kendi üzerinde bir çarpımsal modüldür. Çünkü A halkasının her idealı $I = IA$ olarak yazılabilir.

Önerme 1.5.3 (Çallıalp ve Tekir, 2009) A bir halka, K çarpımsal A- modül ve L de K nın alt modülü ise $L = (L: K)K$ dır.

İspat K çarpımsal modül olsun. O halde $L = IK$ olacak şekilde A nın bir I ideali bulunabilir. Buradan $I \subseteq (L: K)$ elde edilir. Böylece $L = IK \subseteq (L: K)K \subseteq L$ yani $L = (L: K)K$ olur.

Önerme 1.5.4 (Barnard, 1981) Devirli modüller çarpımsal modüldür.

İspat: $K = Ak$ bir devirli A-modül ve L, K nın herhangi bir alt modülü olsun. O halde $(L: K)K \subseteq L$ olur.$l \in L$ alalım.$K = Ak$ olduğu için $l = ak$ sağlayan bir $a \in A$ vardır. Buradan $Al = aAk = aK \subseteq L$ olur. Yani $a \in (L: K)$ ve $l = ak \in (L: K)K$ elde edilir. Böylece $L \subseteq (L: K)K$ olur. Sonuçta $L = (L: K)K$elde edilir.

Örnek 1.5.5 $\mathbb{Z}_n$, $\bar{1}$ ile üretilmiş devirli bir $\mathbb{Z}$-modüldür. O halde Önerme 1.5.4'ten çarpımsal modüldür.

Not Her çarpımsal modül devirli olmak zorunda değildir. Örneğin, $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-modül $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ yi göz önüne alalım. M nin devirli modül olmadığı kolayca anlaşılır. Ayrıca M nin tüm alt modülleri aşağıdaki biçimdedir:

$$N_1 = \{(\bar{0}, \bar{0})\}, N_2 = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_2, N_3 = \mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\} \text{ ve } N_4 = M.$$

Ayrıca,

$$(N_1 : M)M = (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})M = \{(\bar{0}, \bar{0})\} = N_1$$

$$(N_2 : M)M = (2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})M = \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_2 = N_2$$

$$(N_3 : M)M = (\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z})M = \mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\} = N_3$$

$$(N_4 : M)M = AM = M = N_4$$

eşitlikleri kolayca görülür. Böylece Önerme 1.5.3'ten M nin bir çarpımsal modül olduğu anlaşılır.

Tanım 1.5.6 (Ameri, 2003) I ve J bir A halkasının idealleri ve M çarpımsal bir A-modül olsun. N ve K alt modülleri sırasıyla $N = IM$ ve $K = JM$ olsun. Bu takdirde N ve K alt modüllerinin çarpımı IJM olarak tanımlanır ve $NK = IJM$ ile gösterilir. Bu çarpım iyi tanımlıdır.

Önerme 1.5.7 (ElBast ve Smith, 1988) A bir halka, K çarpımsal A-modül ve L , K nın bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) L asal alt modüldür.

(ii) $(L : K)$, A halkasının bir asal idealidir.

İspat (i)⇒(ii) Önermeden 1.4.6 dan görülür.

(ii)⇒(i) L nin asal olduğunu göstermek için $ak \in L$ olacak şekilde $a \in A$ ve $k \in K$ alınsın. Buradan $(Aa)(Ak) = A(ak) \subseteq L$ olur. K çarpımsal modül olduğundan $Ak = (Ak : K)K$ biçiminde yazabiliriz. Böylece $(Aa)(Ak : K)K \subseteq L$ ve $(Aa)(Ak : K) \subseteq (L : K)$ elde edilir. Şimdi $(L : K)$ asal ideal olduğundan Önerme 1.2.3'den $(Aa) \subseteq (L : K)$ veya $(Ak : K) \subseteq (L : K)$ bulunur. Buradan K çarpımsal modül olduğundan $a \in Aa \subseteq (L : K)$ veya $k \in Ak = (Ak : K)K \subseteq (L : K)K = L$ olur. O halde L bir asal alt modül olur.

Şimdi P.F. Smith tarafından (P. F. Smith, 1988) makalesindeki Teorem 9 aracılığıyla ispatlanan aşağıdaki sonucu ispatsız veriyoruz.

Önerme 1.5.8 (P.F Smith,1988) I, J bir A halkasının idealleri ve M sonlu üretilmiş bir çarpımsal A-modül olsun.$IM \subseteq JM$ olması için gerek yeter şart $I \subseteq J + Ann(M)$ olmasıdır.

1.6 İndirgenmiş Modüller Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.6.1 (Lee ve Zhou, 2004) A bir halka K da bir A-modül olsun. Her $a \in A$ ve $k \in K$ için $a^2k = 0$ iken $ak = 0$ oluyorsa K ya indirgenmiş modül denir.

Lemma 1.6.2 K nın bir indirgenmiş modül olması için gerek yeter şart $a \in A, k \in K, n \in \mathbb{N}$ için $a^n k = 0$ iken $ak = 0$ sağlanmasıdır.

İspat K indirgenmiş modül olsun. O halde $a^n k = 0$ alalım. $2^n > n$ olduğundan $a^{2^n}k = 0$ olur. $\left(a^{2^{n-1}}\right)^2 k = a^{2^n}k = 0$ ve K bir indirgenmiş modül olduğu için $a^{2^{n-1}}k = 0$ bulunur. Böyle devam edilirse $ak = 0$ bulunur. Tersine her $a \in A, k \in K, n \in \mathbb{N}$ için $a^n k = 0$ iken $ak = 0$ sağlansın. Bu durumda K açıkça bir indirgenmiş modüldür.

Örnek 1.6.3 Serbest burulmalı modüller indirgenmiş modüldür. Bir A-modül K serbest burulmalı olsun. O halde $T(K) = 0$ yani $k \in K$ için $ak = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $a \in A$ olmasın. $a^2k = 0$ olsun. Bu durumda ya $a = 0$ veya k=0 olur ve böylece $ak = 0$ elde edilir. O halde K bir indirgenmiş modül olur.

Fakat indirgenmiş modüllerin serbest burulmalı olması gerekmez. Aşağıda bu duruma bir örnek verilmiştir.

Örnek 1.6.4 p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_p$ bir indirgenmiş modüldür fakat serbest burulmalı değildir.

Tanım 1.6.5 (Saraç, 2009) A bir halka ve K bir A-modül olsun. N de K nın bir alt modülü olsun. $a \in A$ ve $k \in K$ olmak üzere $a^n k \in N$ iken $ak \in N$ ise N ye yarı asal alt modül denir.

Önerme 1.6.6 K bir A-modül ve N de bir has alt modül olsun. N nin yarı asal alt modül olması için gerek ve yeter şart K/N nin bir indirgenmiş modül olmasıdır.

İspat N bir yarı asal alt modül olsun. K/N nin indirgenmiş bir modül olduğunu gösterelim. Bunun için $a^2(k+N)=0+N=N$ olacak şekilde $a \in A\,, k \in K$ alalım. Buradan $a^2k \in N$ ve N yarı asal olduğundan $ak \in N$ olur. O halde $a(k+N)=ak+N=N$ elde edilir. Tersine K/N bir indirgenmiş modül olsun. K nın yarı asal olduğunu göstermek için $a^nk \in N$ olacak şekilde $a \in A, k \in K, n \in \mathbb{N}$ alalım. Buradan $a^n(k+N)=0+N$ olur. K/N bir indirgenmiş modül olduğundan Lemma 1.6.2 den $a(k+N)=ak+N=N$ yani $ak \in N$ elde edilir. O halde N yarı asaldır.

Yukarıdaki önerme ve tanımdan aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 1.6.7 A bir halka ve K bir A-modül olsun. N de K nın bir alt modülü olsun. N nin yarı asal olması için gerek ve yeter şart $a^2k \in N$ iken $ak \in N$ olmasıdır.

1.7 S-Asal Alt Modül ve Serbest Burulmalı Modüller

Tanım 1.7.1 (Sevim ve ark., 2019) S, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesi, M bir A-modül ve P de M nin $(P:_A M)\cap S=\emptyset$ nin koşulun sağlayan bir alt modülü olsun. $a \in A$ ve $m \in M$ için $am \in P$ iken $sa \in (P:_A M)$ veya $sm \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa P ye S-asal alt modül denir.

Tanım 1.7.2 (Sevim ve ark., 2019) M bir A-modül, S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve $ann(M)\cap S=\emptyset$ olsun. $a \in A$ ve $m \in M$ için $am=0$ iken $sa=0$ veya $sm=0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa M ye S-serbest burulmalı modül denir.

2. S-YARI ASAL ALT MODÜLLER

2.1 S-Yarı Asal Alt Modüller ve Genel Özellikleri

Tanım 2.1.1 A bir halka, K bir A-modül olsun. L, K nin $(L:_A K) \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir alt modülü ve $S \subseteq A$ bir çarpımsal kapalı alt küme olsun. $r \in A, k \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n k \in L$ iken $srk \in L$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa L ye bir S-yarı asal alt modül denir.

S, A halkasının bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun ve L, A nın bir ideali olsun. A yı bir A-modül ve L yi de bir alt modül olarak düşünebiliriz. L, A nın S-yarı asal alt modülü ise L ye bir S-yarı asal ideal denir. S-yarı ideal tanımını tekrar edecek olursak; L, A nin $L \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. $r \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n \in L$ iken $sr \in L$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa L ye bir S-yarı asal ideal denir (Düzgün, 2020).

Önerme 2.1.2 A bir halka $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı alt küme ve K bir A-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) L, K nın $(L:_A K) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir yarı asal alt modülü ise K nın bir S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) L, K nın bir S-yarı asal alt modülü ve $S \subseteq u(A)$ ise L, K nın bir yarı asal alt modülüdür.

(iii) Her S-asal alt modül bir S-yarı asal alt modüldür.

İspat

(i) L, K nın yarı asal alt modülü ve $(L:_A K) \cap S = \emptyset$ olsun. L nin, K nın bir S -yarı asal alt modülü olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $r^n k \in L$ sağlayacak şekilde $r \in$

$A, k \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ alalım. L yarı asal alt modül olduğundan $rk \in L$ elde edilir ve böylece her $s \in S$ için $srk \in L$ olur. Buradan L, K nın bir S-yarı asal alt modülü olur.

(ii) L, K nın S-yarı asal alt modülü olsun. O halde $r \in A, k \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r^n k \in L$ iken sabit bir $s \in S$ için $srk \in L$ elde edilir. $S \subseteq u(A)$ olduğundan $st = 1$ olacak şekilde bir $t \in A$ vardır. Böylece $rk = t(srk) \in L$ elde edilir. Yani L, K nın yarı asal alt modülü olur.

(iii) L nin K nın bir S-asal alt modülü olduğunu varsayalım. $r \in A, k \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n k \in L$ olsun. L bir S-asal alt modül olduğundan, sabit bir $s \in S$, $sr \in (L:_A K)$ veya $sr^{n-1}k \in L$ olacak şekilde vardır. Eğer $sr \in (L:_A K)$ ise $srk \in L$ elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. $sr \notin (L:_A K)$ olduğunu varsayalım. Buradan $sr^{n-1}k = r(sr^{n-2}k) \in L$ elde edilir. Buradan $s^2 r^{n-2} k \in L$ bulunur. Bu şekilde devam edersek sonunda $s^n k \in L$ elde edilir. Böylece L bir S-asal alt modül olduğundan, $s^{n+1} \in (L:_A K)$ veya $sk \in L$ elde edilir. $(L:_A K) \cap S = \emptyset$ ve $s^{n+1} \in S$ olduğundan $sk \in L$ ve buradan $srk \in L$ bulunur.

Önerme 2.1.2 (i) ve (iii) ifadelerinin tersi doğru olmak zorunda değildir. Aşağıda bunlara ilişkin ters örnekler verilmiştir.

Örnek 2.1.3 $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$ ve $K = \{0\} \times \{\overline{0}\}$ sıfır alt modülü alınsın. Öncelikle $(K:_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4) = \{0\}$ ve $2^2(0, \overline{1}) = (0, \overline{0}) \in K$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $2(0, \overline{1}) \notin K$ olduğundan K, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$ ün yarı asal alt modülü değildir. $\mathbb{Z}$ nin $S = \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ çarpımsal kapalı alt kümesi alınsın. Özel olarak $s = 4$ diyelim. Şimdi, K nın bir S-yarı asal alt modül olduğunu göstermek için $a^k(x, \overline{m}) \in K$ olacak şekilde $a, x, m \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ sayılarını alalım. O halde $a^k x = 0$ olur. Eğer $a = 0$ ise $sa(x, \overline{m}) = (0, \overline{0}) \in K$ elde edilir. Aksi halde $x = 0$ ve böylece $sa(x, \overline{m}) = (0, \overline{0})$ bulunur. Yani K, S-yarı asal alt modül olur.

Örnek 2.1.4 $A = \mathbb{Z}$ ve $K = \mathbb{Z}_{pqr}$ $(p, q, r$ farklı asallar) olsun. A nın çarpımsal kapalı alt kümesi $S = \{p^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ yi ve K nin $P = (\overline{0})$ alt modülünü göz önüne alalım. $q(\overline{pr}) = \overline{0} \in P$ ve ayrıca her $p^n \in S$ için,

$$p^n q \notin (P :_A K) = pqr\mathbb{Z} \text{ ve } p^n(\overline{pr}) \notin P$$

gerçeklendiğinden P bir S-asal alt modül değildir. Ayrıca P nin K nın S-yarı asal alt modülü olduğu açıktır.

S, A nın çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$S^{-1}A = \left\{\lambda : \lambda = \frac{a}{s}, \exists\, a \in A, s \in S\right\}$$

A nın kesir halkası olarak adlandırılır. Ayrıca her S çarpımsal kapalı alt kümesinin doyurulmuşu

$$S^* = \left\{a \in A : \frac{a}{1} \in u(\,S^{-1}A)\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Gilmer, 1972). S^* ın A nin S yi içeren çarpımsal kapalı alt küme olduğu kolayca görülür.

Önerme 2.1.5 A bir halka $S \subseteq A$ çarpımsal kapalı alt küme ve K bir A-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $S_1 \subseteq S_2$, A nın çarpımsal kapalı alt kümeleri L, K nin S_1-yarı asal alt modülü ve $(L :_A K) \cap S_2 = \emptyset$ ise L, K nın S_2-yarı asal alt modülüdür.

(ii) L nin, K nın bir S-yarı asal alt modülü olması için gerek yeter şart L nin K nın S^*-yarı asal alt modülü olmasıdır.

(iii) L, K nin S-yarı asal alt modülü ise $S^{-1}L$, $S^{-1}K$ nin yarı asal alt modülüdür.

İspat (i) İspat açıktır.

(ii) L, S-yarı asal alt modül olsun. Bu durumda $(L: K) \cap S = \emptyset$ dir. $S \subseteq S^*$ olduğu açıktır. O halde $(L:_A K) \cap S^* = \emptyset$ olduğunu gösterirsek (i) den L bir S^*-yarı asal alt modül olur. Şimdi $(L:_A K) \cap S^* \neq \emptyset$ varsayalım. $a \in (L:_A K) \cap S^*$ alalım. $a \in S^*$ olduğundan $\frac{a}{1}$, $S^{-1}A$ nin birimidir ve böylece bir $\frac{x}{y} \in S^{-1}A$ için

$$\frac{a}{1}\frac{x}{y} = 1$$

sağlanır. Buradan bir $u \in S$ için

$$axu = yu$$

elde edilir. Şimdi $s' = yu \in S$ alalım. O halde

$$s' = uax = yu \in (L:_A K) \cap S$$

çelişkisi elde edilir. Böylece $(L:_A K) \cap S^* = \emptyset$ bulunur. Tersini göstermek için L, K nın S^*-yarı asal alt modülü olsun. O halde $(L:_A K) \cap S^* = \emptyset$ ve böylece $(L:_A K) \cap S = \emptyset$ elde edilir. Bir $r \in A$, $k \in K$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n k \in L$ olsun. P bir S^*-yarı asal alt modül olduğundan $s'rk \in L$ olacak şekilde bir $s' \in S^*$ vardır. $s' \in S^*$ olduğundan

$$\frac{s'}{1}\frac{x}{y} = 1$$

sağlayan $\frac{x}{y} \in S^{-1}A$ bulunur. O halde $us'x = yu$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. Şimdi $s = yu \in S$ alalım. Şu halde

$$srk = yurk = uxs'rk \in L$$

elde edilir. Böylece L, K nın S-yarı asal alt modülü olur.

(iii) L nin K nın S-yarı asal alt modülü olduğunu varsayalım. $\frac{r}{s} \in S^{-1}A$, $\frac{m}{t} \in S^{-1}K$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{r}{s}\right)^k \frac{m}{t} = \frac{r^k m}{s^k t} \in S^{-1}L$$

olsun. O halde $u \in S$,

$$ur^k m = r^k(um) \in L$$

olacak şekilde vardır. L, K nın S-yarı asal alt modülü olduğundan bir $s' \in S$ için $us'rm \in L$ elde edilir. O halde

$$\frac{r}{s}\frac{m}{t} = \frac{us'rm}{us'st} \in S^{-1}L$$

elde edilir. Böylece $S^{-1}L, S^{-1}K$ nin yarı asal alt modülüdür.

Önerme 2.1.5 (iii) nin tersi her zaman doğru değildir. Aşağıda bu duruma örnek verilmiştir.

Örnek 2.1.6 $A = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ olsun. $K = \mathbb{Z} \times \{0\}, M$ nin bir alt modülü ve $S = \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Z}$ nin çarpımsal kapalı alt kümesidir. $S^{-1}M$ nin $S^{-1}A$ üzerinde bir vektör uzayı olduğu açıktır. Böylece $S^{-1}K, S^{-1}M$ nin asal (yarı asal) alt modülüdür. Şimdi K nın S-yarı asal olmadığı gösterilmelidir. S nin rastgele bir s elemanını alalım. $ebob(p,s) = 1$ olacak şekilde bir p asal sayısı seçelim. O halde

$$p^2\left(\frac{1}{p^2},0\right) = (1,0) \in K \text{ ve } sp\left(\frac{1}{p^2},0\right) = \left(\frac{sp}{p^2},0\right) \notin K$$

olur. Böylece K, M nin bir S-yarı asal alt modülü değildir.

Önerme 2.1.7 M bir A-modül ve $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, A nın sonlu bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve K, M nin $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir alt modülü olsun. O halde K nın M nin bir S-yarı asal alt modülü olması için gerek ve yeter şart $S^{-1}K$ nın $S^{-1}M$ nin bir yarı asal alt modülü olmasıdır.

İspat K nın M nin bir S-yarı asal alt modülü olduğunu varsayalım. Önerme 2.1.5 (iii) den $S^{-1}K$, $S^{-1}M$ nin bir yarı asal alt modülüdür. Tersi için $S^{-1}K$ nın $S^{-1}M$ nin bir yarı asal alt modülü olduğunu kabul edelim. Bir $r \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m \in K$ olsun. O halde

$$\left(\frac{r}{1}\right)^n \frac{m}{1} = \frac{r^n m}{1} \in S^{-1}K$$

elde edilir. $S^{-1}K$, $S^{-1}M$ nin yarı asal alt modülü olduğundan

$$\frac{r}{1}\frac{m}{1} = \frac{rm}{1} \in K$$

bulunur ve buradan bir $s_i \in S$ için $s_i rm \in K$ olur. Şimdi $s = s_1 s_2 \cdots s_n \in S$ alalım. Böylece $srm \in K$ elde edilir. O halde K, M nin bir S-yarı asal alt modülüdür.

Lemma 2.1.8 K, M nin $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir alt modülü ve S, A nın çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) J, A nın bir ideali ve N, M nin bir alt modülü olmak üzere $k \in \mathbb{N}$ için $J^k N \subseteq K$ iken $sJN \subseteq K$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır.

İspat (i)⇒(ii) K, M nin S- yarı asal alt modülü olsun. A nın bir J ideali, M nin bir N alt modülü ve $k \in \mathbb{N}$ için $J^k N \subseteq K$ olsun. $sJN \subseteq K$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $sJN \nsubseteq K$ olduğunu kabul edelim. O halde $sam \notin K$ olacak şekilde $a \in J, m \in N$ vardır. Ayrıca,

$$a^k m \in J^k N \subseteq K$$

elde edilir. K, M nin S- yarı asal alt modülü olduğundan $sam \in K$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır. Böylece, $sJN \subseteq K$ olduğu gösterilmiş olur.

(ii)⇒(i) Tersine bir $r \in A$, $m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m \in K$ olsun. Şimdi $J = Ar$ ve $N = Am$ alalım. O halde

$$JN = Arm \subseteq K$$

olur. Buradan varsayımımıza göre sabit bir $s \in S$ için

$$sJN = Asrm \subseteq K$$

ve böylece $srm \in K$ elde edilir. O halde K, M nin bir S-yarı asal alt modülüdür.

Lemma 2.1.8 den yararlanılarak aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.1.9 S, A nın çarpımsal kapalı alt kümesi ve K, A nın $K \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Aşağıdaki sonuçlar denktir:

(i) K, A nın S-yarı asal idealidir.

(ii) I ve J, A nın idealleri olmak üzere bir $k \in \mathbb{N}$ için $I^k J \subseteq K$ iken $sIJ \subseteq K$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır.

Önerme 2.1.10 M bir A-modül ve S, A nın çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. K, M nin $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlayan bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) K, M nin S-yarı asal alt modülü ise $(K:_A M)$, A nın S-yarı asal idealidir.

(ii) M çarpımsal modül ve $(K:_A M)$, A nın S-yarı asal idealiyse K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

İspat (i) Bir $x \in A$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $x^k \in (K:_A M)$ olsun. O halde her bir $m \in M$ için $x^k m \in K$ olur. K, S-yarı asal alt modül olduğundan $sxm \in K$ elde edilir ve böylece $sx \in (K:_A M)$ olur. Yani $(K:_A M)$, A nın S-yarı asal idealidir.

(ii): M çarpımsal modül ve $(K:_A M)$, A nın S-yarı asal ideali olsun. A nın bir J ideali, M nin bir N alt modülü ve $k \in \mathbb{N}$ için $J^k N \subseteq K$ olsun. O halde

$$J^k(N:_A M) \subseteq (J^k N:_A M) \subseteq (K:_A M)$$

elde edilir. Ayrıca Sonuç 2.1.9 dan sabit bir $s \in S$ için

$$sJ(N:_A M) \subseteq (K:_A M)$$

olur. M çarpımsal modül olduğundan

$$sJN = sJ(N:_A M)M \subseteq (K:_A M)M = K$$

elde edilir. Lemma 2.1.8 aracılığıyla K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

Sonuç 2.1.11 K bir çarpımsal A-modül M nin alt modülü ve S, A nın $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) K, M nin bir S- yarı asal alt modülüdür.

(ii) L ve N, K nın alt modülleri olmak üzere bir $k \in \mathbb{N}$ için $L^k N \subseteq K$ iken $sLN \subseteq K$ sağlayacak sabit bir $s \in S$ vardır.

İspat (i)⇒(ii) K, M nin bir S-yarı asal alt modülü olsun. M nin L ve N alt modülleri ve $k \in \mathbb{N}$ için $L^k N \subseteq K$ olsun. M çarpımsal modül olduğundan $L = IM$ ve $N = JM$ olacak şekilde A nın I ve J idealleri vardır. Ayrıca

$$L^k N = I^k JM = I^k N \subseteq K$$

olduğu görülür. P bir S-yarı asal alt modül olduğundan, Lemma 2.1.8 aracılığıyla sabit bir $s \in S$ için $sIN \subseteq K$ bulunur. Böylece $sIJM = sLN \subseteq K$ elde edilir.

(ii)⇒(i) J, A nın bir ideali ve N, M nin bir alt modülü ve $k \in \mathbb{N}$ için $J^k N \subseteq K$ olsun. O halde

$$J^k N = J^k(N:_A M)M$$

olur. Şimdi $L = JM$ alalım. O halde $L^k = J^k M$ ve buradan

$$J^k N = J^k(N:_A M)M = L^k N \subseteq K$$

bulunur. Varsayımımızdan sabit bir $s \in S$

$$sLN = sJ(N:_A M)M = sJN \subseteq K$$

olacak şekilde vardır. O halde Lemma 2.1.8 aracılığıyla K, M nin bir S-yarı asal alt modülü olur.

Teorem 2.1.12 K bir sonlu üretilmiş çarpımsal A -modül M nin alt modülü ve S, A nın $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) K, M nin bir S- yarı asal alt modülüdür.

(ii) $(K:_A M)$, A nın S-yarı asal idealidir.

(iii) $Ann(M) \subseteq I$ olacak şekilde A nın bir S-yarı asal ideali I için $K = IM$ biçimindedir.

İspat (i)⇒(ii) K, M nin bir S- yarı asal alt modülü olsun. O halde $(K:_A M)$ nin A nın S-yarı asal ideali olduğu Önerme 2.1.10 (i) aracılığıyla gözlenir.

(ii)⇒(iii) İspat açıktır.

(iii)⇒(i) $Ann(M) \subseteq I$ olacak şekilde A nın bir S-yarı asal ideali I için $K = IM$ olduğunu varsayalım. A nın bir J ideali ve M nin N alt modülü için $J^k N \subseteq K$ $(k \in \mathbb{N})$ olsun. O halde

$$J^k (N:_A M)M \subseteq IM$$

elde edilir. M sonlu üretilmiş çarpımsal modül olduğundan Sonuç 1.5.7 den

$$J^k (N:_A M) \subseteq I + ann(M) = I$$

olur. I, A nın S-yarı asal ideali olduğundan Sonuç 2.1.9 aracılığıyla sabit bir $s \in S$ için

$$sJ(N:_A M) \subseteq I$$

olur ve böylece

$$sJN = sJ(N:_A M)M \subseteq IM = K$$

elde edilir. Lemma 2.1.8 den K, M nin bir S- yarı asal alt modülüdür.

Önerme 2.1.13 A bir halka, $h : M \rightarrow M'$ bir A-homomorfizma olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) K', M' nün $(h^{-1}(K') :_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan S-yarı asal alt modülüyse $h^{-1}(K')$ de M nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) h bir epimorfizma ve K, M nin $Çek(h) \subseteq K$ şartını sağlayan S-yarı asal alt modülüyse $h(K)$, M' nün S-yarı asal alt modülüdür.

İspat (i) Bir $r \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m \in h^{-1}(K')$ olsun. O halde

$$h(r^n m) = r^n h(m) \in K'$$

elde edilir. K' bir S-yarı asal alt modül olduğundan bir $s \in S$ için

$$srh(m) = h(srm) \in K'$$

bulunur. O halde $srm \in h^{-1}(K')$ olur ve böylece $h^{-1}(K')$, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) $r \in A$, $m' \in M'$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n m' \in h(K)$ olsun. h bir epimorfizma olduğundan bir $m \in M$ için $m' = h(m)$ yazılabilir ve böylece

$$r^n m' = r^n h(m) = h(r^n m) \in h(K)$$

elde edilir. $Çek(h) \subseteq K$ olduğundan $r^n m \in K$ bulunur. K, S-yarı asal alt modül olduğundan $srm \in K$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Böylece

$$h(srm) = srh(m) = srm' \in h(K)$$

bulunur. Sonuç olarak $h(K)$, M' nün S-yarı asal alt modülü olur.

Sonuç 2.1.14 S, A nın çarpımsal kapalı alt kümesi ve L, M nin alt modülü olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) K', M nin $(K':_A L) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan S-yarı asal alt modülü ise $L \cap K'$, L nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) K, M nin $L \subseteq K$ şartını sağlayan alt modülü olsun. K nın M nin S-yarı asal alt modülü olması için gerek yeter şart K/L nin, M/L nin S-yarı asal alt modülü olmasıdır.

İspat (i) Her $m \in L$ için $i(m) = m$ ile tanımlanan $i: L \to M$ homomorfizması göz önüne alınsın. O halde

$$i^{-1}(K') = L \cap K'$$

olur. Şimdi $(i^{-1}(K'):_R L) \cap S = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $s \in (i^{-1}(K'):_R L) \cap S$ alalım. O halde

$$sL \subseteq i^{-1}(K') = L \cap K' \subseteq K'$$

olur ve böylece $s \in (K':_R L) \cap S$ çelişkisi elde edilir. Önerme 2.1.13 (i) aracılığıyla $L \cap K'$, L nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) K, M nin S-yarı asal alt modülü olsun. Her $m \in M$ için $\pi(m) = m + L$ ile tanımlanan

$$\pi: M \to M/L$$

doğal epimorfizması göz önüne alınsın. Önerme 2.1.13 (ii) aracılığıyla K/L, M/L nin S-yarı asal alt modülüdür. Tersi için K/L , M/L nin S-yarı asal alt modülü olsun. $k \in \mathbb{N}$

için $r^k m \in K$ olacak şekilde $r \in A$ ve $m \in M$ alalım. O halde

$$r^k(m+L) = r^k m + L \in K/L$$

olur. K/L, M/L nin S-yarı asal alt modülü olduğundan sabit bir $s \in S$ için

$$sr(m+L) = srm + L \quad \in K/L$$

elde edilir. Buradan $srm \in K$ bulunur. Böylece K, M nin bir S-yarı asal alt modülü olur.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $i = 1,2,\dots,n$ için M_i, bir A_i- modül ve S_i, A_i nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ve $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ diyelim. O halde M bileşen bileşen toplama ve skaler çarpma işlemine göre bir A-modül olur. Ayrıca M nin her K alt modülü, $i = 1,2,\dots,n$ için K_i, M_i nin bir alt modülü olmak üzere

$$K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$$

formundadır. Dahası S, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesidir.

Teorem 2.1.15 $i = 1,2$ için M_i bir A_i-modül ve K_i, M_i nin alt modülü ve S_i, A_i nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $M = M_1 \times M_2, A = A_1 \times A_2$ ve $S = S_1 \times S_2$ olsun. $K = K_1 \times K_2$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) K_1, M_1 in S_1- yarı asal alt modülüdür ve $(K_2 :_{A_2} M_2) \cap S_2 \neq \emptyset$ veya K_2, M_2 nin S_2-yarı asal alt modülü ve $(K_1 :_{A_1} M_1) \cap S_1 \neq \emptyset$ veya her $i = 1,2$ için K_i, M_i nin S_i-yarı asal alt modülüdür.

İspat (i)⇒(ii) K, M nin S-yarı asal alt modülü olsun. O halde $(K :_A M) \cap S = \emptyset$ olur ve bu da $(K_1 :_{A_1} M_1) \cap S_1 = \emptyset$ veya $(K_2 :_{A_2} M_2) \cap S_2 = \emptyset$ olmasını gerektirir. Genelliği bozmadan $(K_2:_{A_2} M_2) \cap S_2 = \emptyset$ ve $(K_1:_{A_1} M_1) \cap S_1 \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Şimdi K_2 nin, M_2 nin bir S_2-yarı asal alt modülü olduğunu gösterelim. Bunu kanıtlamak için $r^k m \in K_2$ olacak şekilde $r \in A_2, m \in M_2, \ k \in \mathbb{N}$ alalım. O halde

$$(1, r)^k (0, m) = (0, r^k m) \in K$$

olur. K, M nin S-yarı asal alt modülü olduğundan sabit bir $s = (s_1, s_2) \in S$ için

$$s(1, r)(0, m) = (0, s_2 rm) \in K$$

olur. Bu ise $s_2 rm \in K_2$ olmasını gerektirir. Böylece K_2, M_2 nin S_2-yarı asal alt modülüdür. Benzer şekilde $(K_2:_{A_2} M_2) \cap S_2 \neq \emptyset$ ise K_1,M_1 nin S_1-yarı asal alt modülüdür. Ayrıca $(K_1:_{A_1} M_1) \cap S_1 = (K_2:_{A_2} M_2) \cap S_2 = \emptyset$ ise $i = 1{,}2$ için yine benzer şekilde K_i nin M_i nin S_i-yarı asal alt modülü olduğu gösterilebilir.

(ii)⇒(i) $(K_1:_{A_1} M_1) \cap S_1 \neq \emptyset$ ve K_2, M_2 nin S_2-yarı asal alt modülü olsun. O halde $s_1 \in (K_1:_{A_1} M_1) \cap S_1$ alalım. $r_i \in A_i, m_i \in M_i$ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$(r_1, r_2)^n (m_1, m_2) = (r_1^n m_1, r_2^n m_2) \in K$$

olsun. Böylece $r_2^n m_2 \in K_2$ elde edilir. K_2, M_2 nin S_2-yarı asal alt modülü olduğundan sabit bir $s_2 \in S_2$ için $s_2 r_2 m_2 \in K_2$ bulunur. Şimdi $s = (s_1, s_2) \in S$ diyelim. O zaman

$$s(r_1, r_2)(m_1, m_2) = (s_1 r_1 m_1, s_2 r_2 m_2) \in K$$

olur. Yani K, M nin S-yarı asal alt modülüdür. Diğer durumlarda da K nin M nin S-yarı asal alt modülü olduğu benzer şekilde gösterilir.

Teorem 2.1.16 $n \geq 1$, M_i bir A_i -modül ve her $i = 1,2, \dots, n$ için S_i, A_i nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$, $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ ve $S =$

$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ olsun. Ayrıca her $i = 1,2,\dots,n$ için K_i , M_i nin alt modülü olmak üzere $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

(ii) Her $j \in \{1,2,\dots n\} - \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ için $\left(K_j :_{A_j} M_j\right) \cap S_j \neq \emptyset$ ve her $i \in \{t_1, t_2, \dots, t_k : k < n\}$ için K_i, M_i nin S_i-yarı asal alt modülüdür.

İspat Tümevarım yöntemiyle iddiayı kanıtlayalım.

(i)⇔(ii) $n = 1$ için sonuç açıktır. $n = 2$ için (i)⇔(ii) iddiası Teorem 2.1.15 den elde edilir. Her $k < n$ için (i) ⇔(ii) nin doğru olduğunu varsayalım. Şimdi $k = n$ için (i)⇔(ii) iddiasının doğru olduğunu gösterelim. $K' = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_{n-1}$, $M' = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_{n-1}$,$S' = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{n-1}$ ve $A' = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}$ alalım. Buradan $K = K' \times K_n$, $M = M' \times M_n$ ve ayrıca $S = S' \times S_n$, $A = A' \times A_n$ yazılabilir. Teorem 2.1.15 aracılığıyla, K nın M nin S-yarı asal alt modülüdü olması için gerek yeter şart K' nün M' nün S'-yarı asal alt modülüdür ve $\left(K_n :_{A_n} M_n\right) \cap S_n \neq \emptyset$ veya $(K' :_{A'} M') \cap S' \neq \emptyset$ ve K_n, M_n nin S_n-yarı asal alt modülüdür veya K', M' nün S'-yarı asal alt modülüdür ve K_n , M_n nin S_n-yarı asal alt modülüdür. İspatın geri kalanı da tümevarım hipotezinden elde edilir.

Teorem 2.1.17 K, M nin bir alt modülü ve S , A nın $(K :_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda K, M nin S-yarı asal alt modülüdür ancak ve ancak bir $s' \in S$ için $(K :_M s')$, M nin yarı asal alt modülüdür.

İspat K, M nin S-yarı asal alt modülü olsun. Böylece $a \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n m \in K$ iken $sam \in K$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. $s' = s^2 \in S$ diyelim. Şimdi $(K :_M s')$ nün M nin bir yarı asal alt modülü olduğunu göstereceğiz. Bir $a \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n m \in (K :_M s')$ olsun. O halde

$$s' a^n m = s^2 a^n m \in K$$

elde edilir. Eğer $n = 1$ ise $am \in (K :_M s')$ bulunur. O halde $n \geq 2$ varsayalım. Böylece $s^n a^n m = (sa)^n m \in K$ ve $s(sa)m = s^2 am \in K$ elde edilir. Buradan $am \in (K :_M s^2) =$

$(K:_M s')$ bulunur, yani $(K:_M s')$, M nin yarı asal alt modülü olur. Tersine bir $s' \in S$ için $(K:_M s')$ nün M nin yarı asal alt modülü olduğunu varsayalım. Bir $a \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n m \in K$ olsun. $(K:_M s')$ yarı asal alt modül ve $a^n m \in K \subseteq (K:_M s')$ olduğundan $am \in (K:_M s')$ ve böylece $s'am \in K$ olur. Yani K, M nin S-yarı asal alt modülüdür.

Teorem 2.1.18 K, M nin $(K:_A M) \subseteq Jac(A)$ şartını sağlayan alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) K, M nin yarı asal alt modülüdür.

(ii) A nin her m maksimal ideali için K, M nin $S_m = (A - m)$-yarı asal alt modülüdür.

İspat (i)⇒(ii) K, M nin yarı asal alt modülü olsun. Önerme 2.1.2 aracılığıyla A nin her maksimal ideali m için K, M nin $S_m = (A - m)$-yarı asal alt modülüdür.

(ii)⇒(i) $r \in A, y \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r^n y \in K$ olsun. K, M nin bir $S_m = (A - m)$-yarı asal alt modülü olduğundan $s_m r y \in K$ olacak şekilde $s_m \notin m$ vardır.

$$\Omega = \{s_m : \exists m \in Max(A), s_m \notin m \text{ , } s_m r y \in K\}$$

kümesini ele alalım. Şimdi $\langle \Omega \rangle = A$ olduğunu göstereceğiz. $\langle \Omega \rangle \neq A$ varsayalım. O halde A nin Ω yı içeren bir maksimal ideali vardır, buna m^* diyelim. Ω nın tanımından $s_{m^*} \notin m^*$ olacak şekilde $s_{m^*} \in \Omega$ vardır. $\Omega \subseteq \langle \Omega \rangle \subseteq m^*$ olduğundan $s_{m^*} \in m^*$ çelişkisi elde edilir. Böylece $\langle \Omega \rangle = A$ ve bir $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ için $1 = x_1 s_{m_1} + x_2 s_{m_2} + \cdots + x_n s_{m_n}$ olacak şekilde

$$s_{m_1}, s_{m_2}, \dots, s_{m_n} \in \Omega$$

vardır. Her $i = 1,2, \dots, n$ için $s_{m_i} r y \in K$ olduğundan

$$ry = x_1 (s_{m_1} r y) + x_2 (s_{m_2} r y) + \cdots + x_n (s_{m_n} r y) \in K$$

sonucuna varabiliriz. Böylece K, M nin bir yarı asal alt modülüdür.

Önceki teoremin bir çıkarımı olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1.19 M, yerel (A, m) halkası üzerinde bir modül olsun. K nın M nin bir has alt modülü olduğunu varsayalım. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) K, M nin yarı asal alt modülüdür.

(ii) K, M nin $S_m = (A - m)$-yarı asal alt modülüdür.

2.2 S-İndirgenmiş Modüller ve Genel Özellikleri

Tanım 2.2.1 M bir A-modül ve S, A nın çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $r \in A, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r^n m = 0$ iken $srm = 0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa M ye S-indirgenmiş modül denir.

Önerme 2.2.2 M bir A-modül ve S, A nın bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) M indirgenmiş bir modül ise S-indirgenmiş modüldür. Özel olarak $z(M) = \{x \in A: \exists\ 0 \neq m \in M,\ xm = 0\}$ olmak üzere $S \subseteq A - z(M)$ ise tersi de doğru olur.

(ii) M bir S-serbest burulmalı modül ise S-indirgenmiş modüldür.

(iii) M nin S-indirgenmiş olması için gerek yeter şart sıfır alt modülünün S-yarı asal alt modül olmasıdır.

(iv) K, M nin $(K:_A M) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir alt modülü olsun. K nın S-yarı asal alt modülü olması için gerek yeter şart A-modül M/K nin S-indirgenmiş modül olmasıdır.

(v) M bir S-indirgenmiş modülse $S^{-1}M$ bir indirgenmiş modüldür.

İspat (i) M indirgenmiş modül ise S-indirgenmiş modül olduğu açıktır. $S \subseteq A - z(M)$ olmak üzere M bir S-indirgenmiş modül olsun. $a \in A$, $m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n m = 0$ gerçeklensin. M, S-indirgenmiş olduğundan $sam = 0$ olacak şekilde $s \in A - z(M)$ vardır. $s \in A - z(M)$ olduğundan $am = 0$ bulunur. Buradan M indirgenmiş modül olur.

(ii) M, S-serbest burulmalı modül ve $a \in A, m \in M, n \in \mathbb{N}$ için $a^n m = a(a^{n-1}m) = 0$ olsun. M, S-serbest burulmalı modül olduğundan sabit bir $s \in S$ için $sa = 0$ veya $sa^{n-1}m = 0$ elde edilir. $sa = 0$ ise $sam = 0$ bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur. O halde $sa \neq 0$ olsun. Bu durumda $sa^{n-1}m = a(sa^{n-2}m) = 0$ olduğundan

$$s(sa^{n-2}m) = s^2 a^{n-2} m = 0$$

elde edilir. Böyle devam edersek, M bir S-serbest burulmalı modül olduğundan $s^n m = 0$ bulunur. Buradan $s^{n+1} = 0$ veya $sm = 0$ elde edilir. Eğer $s^{n+1} = 0$ ise $s^{n+1} = 0 \in S$ çelişkisi elde edilir. Böylece $sm = 0$ ve buradan da $sam = 0$ bulunur.

(iii) Tanım 2.1.1 ve Tanım 2.2.1 aracılığıyla görülür.

(iv) (iii) den ispatlanır.

(v) M bir S-indirgenmiş modül olsun. (iii) aracılığıyla 0, M nin S-yarı asal alt modülüdür. Önerme 2.1.5 (iii) den $S^{-1}0$, $S^{-1}M$ nin yarı asal alt modülüdür. Böylece $S^{-1}M$ indirgenmiş modüldür.

Şimdi indirgenmiş modülleri S-indirgenmiş modüller aracılığıyla karakterize edeceğiz.

Teorem 2.2.3 M bir A-modül olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) M bir indirgenmiş modüldür.

(ii) M, her $P \in Spec(A)$ için bir $S_p = (R - p)$-indirgenmiş modüldür.

(iii) M, her $m \in Max(A)$ için bir $S_m = (R - m)$ -indirgenmiş modüldür.

İspat (i)⇒(ii) Önerme 2.2.2 ile görülür.

(ii)⇒(iii) Sonuç 2.1.19 dan elde edilir.

(iii)⇒(i) M her $m \in Max(A)$ için bir $S_m = (A - m)$-indirgenmiş modül olsun. $a \in A$ ve $x \in M$ elemanları $a^2x = 0$ olacak şekilde seçilsin. M, her $m \in Max(A)$ için bir $S_m = (A - m)$ -indirgenmiş modül olduğundan bir $s_m \notin m$ için $s_m(ax) = 0$ elde edilir.

$$\Omega = \{s_m : \exists m \in Max(A), s_m \notin m \text{ ve } s_m(ax) = 0\}$$

kümesini göz önüne alalım. M, $S_m = (A - m)$-indirgenmiş modül olduğundan Ω boş küme değildir. Teorem 2.1.18 dekine benzer şekilde $\langle \Omega \rangle = A$ bulunur ve böylece $s_1, s_2, \dots, s_n \in \Omega$,

$$r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n = 1$$

olacak şekilde vardır. Her $i = 1,2, \dots, n$ için $s_i(ax) = 0$ olduğundan

$$ax = (r_1s_1 + r_2s_2 + \cdots + r_ns_n)(ax) = r_1(s_1ax) + r_2(s_2ax) + \cdots + r_n(s_nax) = 0$$

bulunur. Buradan M nin indirgenmiş modül olduğu görülür.

3. SONUÇLAR

Bu tezde (Şengelen ve ark., 2019) da tanımlanan S-asal alt modüllerin bir genellemesi S-yarı asal alt modüller ele alınmıştır. S-yarı asal alt modüller (Saraç, 2009) da tanımlanan yarı asal alt modüllerin de bir genelleştirmesidir. Tezin 2. Bölümünde tartışma ve bulgulara yer verilmiştir. Özel olarak S-yarı asal alt modüller modül homomorfizması altında, lokalizasyon altında, modüllerin kartezyen çarpımında, bölüm modüllerinde incelenmiştir. Ayrıca çarpımsal modüllerde S-yarı asal alt modüller belirlenmiştir. Dahası yerel halkalar üzerindeki modüllerin yarı asal alt modülleri S-yarı asal alt modül kavramıyla karakterize edilmiştir. Tezin daha sonraki kısmında ise S-indirgenmiş modüller tanımlanarak (Lee ve Zhou, 2004) te verilen indirgenmiş modül sınıfı karakterize edilmiştir. Bu sonuçların tümü (Pekin ve ark, 2020) makalesinde yayınlanmıştır.

KAYNAKLAR

Ameri,R.(2003). On the prime submodules of multiplication modules.International journal of Mathematics and mathematical Sciences,2003.

Anderson, D. D., Winders, M. (2009) Idealization of a module. Journal of Commutative Algebra, 1, 3-56.

Atiyah, M. F., Macdonald, I.G. (1969). Introduction to Commutative Algebra. Oxford: Addison-Wesley Publishing Company.

Barnard, A. (1981). Multiplication modules. J. ALGEBRA., 71(1), 174-178.

Burton, D. M., (1970). A First Course in Rings and Ideals. Addison-Wesley

Çallıalp, F., & Tekir, Ü. (2009). Değişmeli halkalar ve modüller. Birsen Yayınevi.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). Abstract algebra (Vol. 3). Hoboken: Wiley.

Düzgün, B. (2020) . Değişmeli Halkaların S-yarı asal idealleri (Yüksek Lisans Tez), Marmara Üniversitesi.

El-Bast, Z. A., & Smith, P. P. (1988). Multiplication modules. Communications in Algebra, 16(4), 755-779.

Gilmer, R. W. (1972). Multiplicative ideal theory (Vol. 12). M. Dekker.

Huckaba, J. A. (1988) Commutative Rings with Zero Divisors. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 117. New York, NY, USA: Marcel Dekker.

Larsen, M. D., McCarthy, P. J. Multiplicative theory of ideals, AcademicPress, New York, 1971.

Lee, T. K., & Zhou, Y. (2004). Reduced modules. Rings, modules, algebras and abelian groups, 236, 365-377.

Lu, C. P. (1984) Prime submodules of modules. Comm Math Univ Sancti Pauli, 33, 61-69.

Pekin, A., Tekir, Ü.,& Kılıç, Ö. (2020). S-semiprime Submodules and-Reduced Modules. Journal of Mathematics, 2020.

Saraç, B. (2009). On semiprime submodules. Communications in Algebra, 37(7), 2485-2495.

Sevim, E. Ş., Arabaci, T., Tekir, Ü., & Koc, S. (2019). On S-prime submodules. Turkish

Journal of Mathematics, 43(2), 1036-1046.

Sharp, R. Y. (2000) Steps in Commutative Algebra. (2nd ed.), Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Smith, P. F. (1988). Some remarks on multiplication modules,Archive der mathematics, 50,223-23.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Özge KILIÇ

Doğum Tarihi ve Yeri: 13 Aralık 1993/ İstanbul

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: ozge.kilic@marun.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Lise: Florya Tevfik Ercan Anadolu Lisesi (2008-2012)

Lisans: Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü (2012-2016)

Yüksek Lisans: Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programı (2016-2020)