

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA VE LORENTZ DÜZLEMİNDE
TEMEL KAVRAMLAR

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Kasım, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LORENTZ UZAYINDA VE LORENTZ DÜZLEMİNDE TEMEL
KAVRAMLAR

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK tarafından hazırlanan tez çalışması 08.11.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Lorentz Uzayında ve Lorentz Düzleminde Temel Kavramlar başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK

İmza



Bu yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon birimince desteklenmiştir. Proje Numarası:3323

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında bilgisini, tecrübesini sabırla ve istekle benimle paylaşan, titizlikle ve büyük özveriyle değerli vaktini harcayan, akademik dünyada yolumu bulmama olanak sağlayan çok kıymetli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE' ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vii
KISALTMA LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	2
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Bulgular	3
2 SKALER ÇARPIM UZAYI	4
2.1 Simetrik Bilineer Form	4
2.1.1 Simetrik Bilineer Forma Karşılık Gelen Matris	5
2.1.2 Skaler Çarpım Fonksiyonu	7
2.1.3 Skaler Çarpım Alt Uzayı	9
2.1.4 Skaler Çarpım Uzayında Ortonormal Baz	13
2.1.5 Özel dönüşümler	19
3 MINKOWSKI UZAYINDA VEKTÖRLER	22
3.1 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Vektörlerin Özellikleri	22
3.1.1 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Vektörlerin Sınıflandırılması	22
3.1.2 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Diklik	27
3.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı için Vektörlerin Özellikleri	33
3.2.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı için Vektörlerin Sınıflandırması	33
3.2.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Diklik	34
3.2.3 $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski Uzayında Diklik	42
3.3 Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu	46
3.3.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu	46
3.3.2 $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu	49

4	MINKOWSKI DÜZLEMİNDE EĞRİLER TEORİSİ	54
4.1	Minkowski Düzleminde Eğri Tanımı	54
4.2	Minkowski Düzleminde Eğri için Parametre Değişimi	58
4.3	Minkowski Düzleminde Eğrilik	60
4.4	Minkowski Düzleminde Açık Fonksiyonları	67
4.5	Düzlemsel Eğriler için Frenet Formülleri	75
5	SONUÇ VE ÖNERİLER	82
	KAYNAKÇA	83
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	84



SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{R}_1$	Minkowski Düzlemi
$\langle, \rangle$	Minkowski İç Çarpım
$ $	Minkowski Uzayında Norm
$\mathbb{R}_1$	3-Boyutlu Minkowski Uzayı

KISALTMA LİSTESİ

SBF	Simetrik Bilineer Form
SÇU	Skaler Çarpım Uzayı
SÇ	Skaler Çarpım



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	Lorentz Düzlemi	23
Şekil 4.1	Spacelike Eğri	78
Şekil 4.2	Timelike Eğri	79



Lorentz Uzayında ve Lorentz Düzleminde Temel Kavramlar

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu çalışma 4 bölümü içermektedir.

Birinci bölümde yer alan bilgiler tezin giriş kısmını oluşturmakta ve bu bölüm literatür özeti ile beraber tezin amaç kısmını ve bulguları içermektedir.

İkinci bölümde; Lorentz uzayının temelini oluşturacak skaler çarpım uzayı ve özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise Minkowski uzayı için vektör sınıflandırması ve Minkowski uzayındaki vektör çeşitliliğine bağlı olarak oluşan diklik koşulları incelenmiştir. $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayındaki diklik ve yine bu uzaydaki Gram-Schmidt Metodu, tezin bu bölümdeki orijinal kısımları içermektedir.

Dördüncü bölümde, Minkowski düzleminde $f^2 - g^2 = 1$ olacak şekilde $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna bağlı f ve g fonksiyonları tanımlanmış ve θ açısı fonksiyonu yardımıyla düzlemsel eğrilerin temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca Minkowski düzlemindeki eğriler için Frenet formülleri de verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Skaler çarpım uzayı, Minkowski uzayı, Gram-Schmidt metodu, parametre değişimi, özel eğriler

ABSTRACT

Basic Concepts on Lorentz Space and Lorentz Plane

Sevilay ÇORUH ŞENOCAK

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This study includes 4 chapters.

The information in the first part constitutes the introduction part of the thesis, and this section includes the literature summary along with the purpose part and the findings.

In the second chapter; The scalar product space that will form the basis of the Lorentz space and its properties are investigated.

In the third chapter, the vector classification for Minkowski space and the orthogonality conditions that occur depending on the vector diversity in Minkowski space are examined. The orthogonality in $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski space and the Gram-Schmidt Method in this space contain the original parts of this thesis.

In the fourth chapter, $f^2 - g^2 = 1$ on the Minkowski plane, f and g functions are defined to be connected to the $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ function, and the basic properties of the planes are investigated with the help of the angle function θ . In addition, Frenet formulas are given for curves in the Minkowski plane.

Keywords: Scalar product space, Minkowski Space, Gram-Schmidt Methodu, parameter change, special curves

1 GİRİŞ

Lorentz uzayında iç çarpım tanımlandıktan sonra metrik kavramlar da iç çarpıma göre tanımlanmıştır. Lorentz metriği Öklid metriği gibi pozitif tanımlı olmadığından bu durum vektör çeşitliliğini oluşturmuştur. Lorentz uzayında vektörler timelike, spacelike ve null vektör olarak sınıflandırılmıştır [1], [2], [3], [4]. Vektörler arasındaki bu çeşitlilik açılar, üçgenler ve metrik anlamdaki tüm kavramlarda çeşitliliğe sebep olmuştur. Bu bağlamda Lorentz uzayı ile ilgili konu bütünlüğünü sağlamak oldukça zordur.

Bu zorluğun yanı sıra Lorentz alanında yapılmış çalışmalar, tezler, makaleler ve kitaplara bakıldığında ciddi bir notasyon karmaşası mevcuttur. Dolayısıyla herhangi bir konu başlığında çalışma yapmak istenildiğinde, konu bütünlüğünü yakalamaktan önce notasyon karmaşasını anlamak gerekmektedir. Bu da çalışma sürelerini oldukça uzatmaktadır.

Bu tez çalışmamıza başlarken bu karmaşanın farkına vararak bu sorunu ortadan kaldırmayı amaçladık. Yani Lorentz uzayı ile ilgili son güncel çalışmalara varıncaya kadar lineer cebir, diferansiyel geometri, analitik geometri, eğriler teorisi, yüzeyler teorisi, kinematik ve manifoldlar başlığı da dahil olmak üzere tüm konuların içinde bulunduğu ortak bir notasyon diliyle oluşturulmuş çalışma yapmayı amaçladık. Bu çalışma esnasında literatürde var olan hataların farkına vararak, onları düzelterek ve aynı zamanda literatürde olmayan orijinal kısımlarla birlikte çalışmamızı zenginleştirdik. Fakat bu kadar kapsamlı bir çalışmanın tez formatı için büyük yapı oluşturacağını düşündüğümüzden konuların tamamını tez formatında vermek yerine kitap formatı oluşturmayı hedefledik. Dolayısıyla kitabın belli bölümlerini tez içerisinde kaynak göstererek, bütün kesimlere hitap etmesi için diğer bütün kısımları da kitapta toplayarak Lorentz Geometrisi adıyla oluşturduğumuz kitabı, daha geniş alana hitap etmesi için ingilizce formatıyla literatüre kazandırmayı hedefledik.

Bu tez çalışmasında da orijinal kısımlarla birlikte farklı vektörler arasındaki diklik durumu ve Gram-Schmidt metodu indekse bağlı olarak incelendi. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında hangi vektörün hangi vektöre dik olabileceği verilip buna bağlı olarak Gram-Schmidt metodu, vektör sisteminde sadece bir tane timelike vektör olması durumu için incelenmiştir, [3]. Buna ek, çalışmamızın orijinal kısmı olarak $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayında vektörlerin diklik durumu tek tek ifade edilip, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayındaki farklılıklar belirtildi. Bu vektör dikliklerine bağlı olarak iki timelike vektör bulunduran vektör sistemi için Gram-Schmidt metodu örnek verilerek incelendi. Ayrıca Lorentz uzayında eğriler başlığı özel olarak incelenip Frenet denklemleri ile birlikte önemli bağıntılar da tanımlanmıştır.

Çalışmamızın konu bütünlüğünü bozmamak adına orijinal kısımlar ayrı bir bölüm içerisinde verilmeyip konu içerisinde aktarılmıştır. "*" sembolü ile belirtilen tüm tanım, teorem ifadeleri orijinal kısımları içermektedir.

1.1 Literatür Özeti

Lorentz uzayında iç çarpım ve iç çarpıma ait metrik özellikler, vektör sınıflandırması [1], [4] kitaplarında verilmiştir. Vektörler arasındaki metrik bağıntılar ve vektörlerin timelike vektör olması durumunda timelike pure üçgen tanımı ve bu üçgene bağlı metrik özellikler [2] çalışmasında G.S. Birman tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca E. Nešović [5] [6], [7] çalışmalarında Lorentz anlamında açı ve üçgen bağıntılarını ve bunun yanında hiperbolik sinus ve hiperbolik cosinus kurallarını ele almıştır. Açı kavramı ile eğrileri G.S. Birman [8] kaynağında incelemiştir.

Ayrıca $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında diklik bağıntısı J.G Ratcliffe [3] ve R. Lopez [9] tarafından verilmiştir. J.G Ratcliffe [3] diklik bağıntısıyla birlikte vektörel çarpımı da vektörlerin türüne göre incelemiştir. Ayrıca çalışmasında hiperbolik üçgen ve hiperbolik üçgene bağlı olarak metrik kavramları tanımlamıştır.

Lorentz uzayında tüm bu konuların yanında kinematik ve manifold alanında da literatüre kazandırılmış çalışmalar vardır. Lorentz uzayında manifoldlar kavramı ise Palais [10], K.L. Duggal, and A. Bejancu, [11] ve Besse, L. Artur [12] tarafından tanımlanmıştır. Lorentz uzayında kinematik konusuna ilk olarak H.R Müller [13] çalışmasında giriş yapmıştır.

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}_2^3$ uzayında hangi vektörlerin dik olabileceği ve diklik durumuna göre Gram-Schmidt metodunun sağlandığı incelenmiştir. Ayrıca Minkowski uzayında eğriler için Frenet formülleri R. Lopez [9] tarafından verilmiştir. Bu çalışma da eğriler için açı fonksiyonları ve parametre değişimi kavramları incelenmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Literatür özeti incelendiğinde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında diklik kavramı J.G Ratcliffe [3] tarafından ifade edilmiştir. Yine benzer şekilde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında J.G Ratcliffe [3] tarafından Gram-Schmidt metodu ve buna bağlı teoremler verilmiştir.

Ayrıca Minkowski düzleminde eğriler konusu R.Lopez [9] tarafından tanımlanmış ve Minkowski düzleminde eğrilere karşılık gelen Frenet formülleri R. Lopez'in [9] çalışmasında verilmiştir.

Fakat bu tez çalışmasında diklik kavramı indeksin farklı alınması durumunda incelenmiş ve $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayında diklik kavramı ele alınmıştır.

Bu tezin amacı J.G. Ratcliffe [3] tarafından içeriği verilen Gram-Schmidt Metodunu $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayında sağlanan diklik şartlarının yardımıyla birlikte incelemektir. Tezin diğer bir amacı, literatürde var olan Minkowski düzlemindeki eğrilerin açılı fonksiyonlarını, parametre değişimlerini ve sağladığı özellikleri vermektir.

1.3 Bulgular

$\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayındaki diklik kavramının, vektörler arasındaki çeşitlilik baz alınarak indeks kavramıyla birlikte incelenmesi tezin literatüre kazandırdığı orijinal katkıdır. Ayrıca orijinal kısım olarak $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayındaki Gram Schmidt Metodu, vektör sisteminde iki timelike vektör olma durumuna göre incelenmiş, detaylıca aktarılmıştır.

Minkowski düzleminde eğriler konusu hakkında J.G. Ratcliffe [3] tarafından literatüre kazandırılan bilgiler revize edilip notasyon birliğiyle çalışmaya aktarılmıştır. Ayrıca Minkowski düzleminde açılı fonksiyonları ve parametre değişimi literatüre kazandırılan orijinal katılardır.

2 SKALER ÇARPIM UZAYI

2.1 Simetrik Bilineer Form

Bu bölümde Lorentz-Minkowski geometrisinin temelini oluşturacak simetrik bilinear form ve skaler çarpım uzayı ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1. V reel vektör uzayı için, $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ olmak üzere

- 1) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- 2) $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- 3) $\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

sağlanıyorsa $\langle, \rangle$ dönüşümü V vektör uzayında simetrik bilinear form (SBF) olarak adlandırılır, [1].

Tanım 2.2. V reel vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle$ dönüşümü SBF olsun.

- 1) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ SBF ' u pozitif tanımlı,
- 2) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ SBF ' u negatif tanımlı,
- 3) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ SBF ' u pozitif yarı tanımlı,
- 4) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ oluyorsa $\langle, \rangle$ SBF' una negatif yarı tanımlı,

olarak adlandırılır, [1].

Tanım 2.3. $\langle, \rangle$ SBF ' nu non-dejenere sayılabilmesi için hem gerek hem yeter koşulu $\forall \vec{v} \in V$ olmak üzere $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{u} = 0$ olmasıdır. Aksi durumda $\langle, \rangle$ SBF' una V reel vektör uzayı üzerinde *dejenere* denir. Dolayısıyla $\langle, \rangle$ SBF ' unun dejenere sayılabilmesi için hem gerek hem yeter koşulu $\forall \vec{v} \in V$ iken $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{u} \neq 0$ olmasıdır, [1].

Not 2.1. Tanım 2.2 deki (1) ve (2) özelliklerine sahip $\langle, \rangle$ SBF ' una *tanımlı* , (3) ve (4) özelliklerine sahip $\langle, \rangle$ SBF ' una *yarı-tanımlı* denir.

Eğer $\langle, \rangle$ SBF ' u tanımlı ise hem yarı-tanımlı hem de non-dejenere. $\langle, \rangle$ SBF ' u tanımlı değilse, V reel vektör uzayı üzerinde *tanımsız* denir. V reel vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle$ SBF ' u tanımsız ise $\vec{v} \in V$ olmak üzere $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ veya $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ yazılabilir.

V reel vektör uzayı üzerinde $\langle, \rangle$ SBF ' u ise V reel vektör uzayının herhangi bir W alt uzayı için $\langle, \rangle|_W$ kısıtlaması da simetrik ve bilineerdir. Eğer $\langle, \rangle$ SBF ' u yarı-tanımlı ise $\langle, \rangle|_W$ kısıtlaması da yarı- tanımlıdır, [1].

Tanım 2.4. V reel vektör uzayı olmak üzere

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

SBF olsun.

$$\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olmak üzere en büyük boyutlu W alt uzayının boyutu $\langle, \rangle$ SBF ' unun *indeksi* olarak tanımlanır ve ν ile ifade edilir, [1] .

$\langle, \rangle$ SBF ' unun indeksi ν ise $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ şeklinde yazılır. $\nu = 0$ olması için hem gerek hem yeter şart $\langle, \rangle$ SBF ' unun pozitif yarı-tanımlı olmasıdır. Ayrıca V reel vektör uzayının indeksi, $\langle, \rangle$ SBF ' unun indeksi olarak tanımlıdır, [1].

2.1.1 Simetrik Bilineer Forma Karşılık Gelen Matris

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazı V reel vektör uzayının bazı olmak üzere $b_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$ şeklinde tanımlı $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi $\langle, \rangle$ SBF ' unun *matrisi* olarak adlandırılır.

$\langle, \rangle$ SBF ' u simetrik olduğu için $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi de aynı şekilde simetrik matristir..

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_i v_j \quad (2.1)$$

olduğundan $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi $\langle, \rangle$ SBF ' unu belirler, [1].

Teorem 2.1. Bir $\langle, \rangle$ SBF 'unun non-dejenere sayılabilmesi için hem gerek hem yeter şart V reel vektör uzayının herhangi bir bazına göre SBF 'unun matrisinin terslenebilir (regüler) olmasıdır, [1].

İspat. V reel vektör uzayı için

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

SBF'u non-dejenere ve herhangi bir bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun. $\langle, \rangle$ SBF 'u non-dejenere olduğundan, $\forall \vec{v} \in V$ olmak üzere $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{u} = 0$ olup,

$\forall e_i \in V$ için $\langle \vec{v}, e_i \rangle = 0$ iken $\vec{v} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) yazılabilir. SBF 'una karşılık gelen simetrik matris $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi olmak üzere V vektör uzayının $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazı için

$$\langle e_i, e_j \rangle = b_{ij} = b_{ji} \quad (2.2)$$

yazılır. Ayrıca vektör uzayının her elemanı baz cinsinden yazılabildiğinden

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j e_j \quad (2.3)$$

olup

$$\langle \vec{v}, e_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n v_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n \langle e_j, e_i \rangle v_j = \sum_{j=1}^n b_{ij} v_j \quad (2.4)$$

yazılabilir. $\forall e_i \in V$ için $\langle \vec{v}, e_i \rangle = 0$ iken $\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j e_j = 0$ olduğundan,

$$v_j = 0 \quad (2.5)$$

ve

$$\sum_{j=1}^n b_{ij} v_j = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Ayrıca, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olmak üzere,

$$b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + b_{i3}v_3 + \dots + b_{in}v_n = 0 \quad (2.7)$$

yazılır. Burada her bir i için

$$b_{11}v_1 + b_{12}v_2 + b_{13}v_3 + \dots + b_{1n}v_n = 0 \quad (2.8)$$

$$b_{21}v_1 + b_{22}v_2 + b_{23}v_3 + \dots + b_{2n}v_n = 0 \quad (2.9)$$

...

$$b_{n1}v_1 + b_{n2}v_2 + b_{n3}v_3 + \dots + b_{nn}v_n = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu ifade matris formda,

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada elde edilen $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin her bir satırını

$\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ olarak düzenlersek,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n = 0, (1 \leq i \leq n) \quad (2.12)$$

ve

$$v_i = 0 \quad (2.13)$$

yazılabilir. O halde, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin satırları lineer bağımsızdır. Dolayısıyla

$\text{rank} B = n$ ve $\det B \neq 0$ yazılır. Yani $B \in GL(n, R)$ matrisi regülerdir ■

Sonuç 2.1. Bir SBF ' un dejenere olması için hem gerek hem yeter şart $\langle, \rangle$ SBF ' unun matrisinin singüler olmasıdır, [1].

2.1.2 Skaler Çarpım Fonksiyonu

V reel vektör uzayı ve $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere oluyorsa $\langle, \rangle$ SBF' u, V reel vektör uzayı üzerinde *skaler çarpım fonksiyonu* (S_{CF}) ve V reel vektör uzayı da *skaler çarpım uzayı* ($S_{ÇU}$) olarak adlandırılır, [1].

Not 2.2. Pozitif tanımlı skaler çarpım (SÇ) iç çarpma olarak adlandırılır. Örneğin, R^n uzayında

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i \quad (2.14)$$

olarak tanımlı nokta çarpması verilebilir. İç çarpmanın çoğu özelliği skaler çarpmada vardır. Bununla birlikte $\langle, \rangle$ SÇF 'nün tanımsız olmasında bazı farklılıklar ortaya çıkar, [1].

Örnek 2.1. $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ için

$$(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 - v_2 w_2 \quad (2.15)$$

olarak tanımlanan simetrik bilineer fonksiyonun non-dejenere olduğunu gösterelim, [1].

$\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ için $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 - v_2 w_2 \quad (2.16)$$

fonksiyonun simetrik ve bilineer olduğu açıktır. $\vec{w}$ yerine $\mathbb{R}^2$ düzleminin bazıları $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ ve alınarak $\langle, \rangle$ fonksiyonunun non-dejenere olduğu aşağıdaki gibi görülür. $\langle (v_1, v_2), (1, 0) \rangle = 0$ için $v_1 = 0$ $\langle (v_1, v_2), (0, 1) \rangle = 0$ için $-v_2 = 0$ bulunur. O halde

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (0, 0) \quad (2.17)$$

vektörü elde edilir. Böylece $\langle, \rangle$ SBF' u non-dejenere olduğundan bir SÇF olarak adlandırılır.

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_1^2 - v_2^2 \quad (2.18)$$

olduğundan $\langle, \rangle$ SÇF tanımsızdır. Çünkü,

$$v_1 = v_2 \text{ için } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

$$|v_1| > |v_2| \text{ için } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$$

ve

$$|v_1| < |v_2| \text{ için } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$$

elde edilir.

2.1.3 Skaler Çarpım Alt Uzayı

V reel vektör uzayının alt uzayı W olsun.

$$W^\perp = \{ \vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W \} \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır. Burada $W^\perp$ ifadesi W alt uzayının ortogonal komplemanı olarak adlandırılmaz.

Çünkü $\langle, \rangle$ SÇF tanımsız olduğunda $W + W^\perp$ genel olarak V reel vektör uzayının tümünü vermeyebilir. 2.1 örneği incelendiğinde $W = sp\{(1,1)\}$ olarak alınırsa $W = W^\perp$ ve $W + W^\perp = W \neq V$ şeklinde yazılır, [1].

Tanım 2.5. $\vec{v}, \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ oluyorsa $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ birbirlerine dik olan iki vektör şeklinde tanımlanır ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ olarak ifade edilir, [1].

Teorem 2.2. V bir SÇU ve $W \subset V$ alt uzayı için

$$1) \text{ boy}V = \text{boy}W + \text{boy}W^\perp$$

$$2) (W^\perp)^\perp = W$$

sağlanır, [1].

İspat. 1) $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ W alt uzayının bir bazı olsun.

Baza tamamlama teoremi gereğince bu bazı V SÇU'nun bir $\{e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ bazına tamamlayabiliriz. O halde $\text{boy}W = k$ ve $\text{boy}V = n$ yazılır. V SÇU olduğundan $\langle, \rangle$ SÇF non-dejeneredir. Öyleyse,

$$W^\perp = \{ \vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W \} \quad (2.20)$$

gereğince, $\vec{v} \in W^\perp$ için $\langle \vec{v}, e_i \rangle = 0$, $(1 \leq i \leq k)$ yazılabilir. Ayrıca,

$\vec{v} \in W^\perp$ için $\vec{v} \in V$ olup

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j e_j \quad (2.21)$$

yazılabilir. O halde $\langle \vec{v}, e_i \rangle = 0$ olduğundan,

$$\sum_{j=1}^n \langle v_j e_j, e_i \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \langle e_j, e_i \rangle = 0 \quad (2.22)$$

$(1 \leq i \leq k)$ olup $b_{ij} = b_{ji} = \langle e_j, e_i \rangle$ eşitliğinden,

$$\sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = 0 \quad (1 \leq i \leq k) \quad (2.23)$$

yazılır. Bu ifade n bilinmeyenli k tane homojen lineer denklem sistemidir.

$\langle, \rangle$ SÇF non- dejenere olduğunda Teorem 2.1 gereğince $\langle, \rangle$ SÇF ' nun $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ matrisi regülerdir. Yani $\text{rank} B = n$ yazılır. Buradaki homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı k bulunur. Böylece $\sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = 0$ denkleminin çözüm uzayının boyutu $n - k$ şeklinde ifade edilir. $AX = 0$ homojen lineer denklem sisteminde X çözümleri için $X \in \ker A$ yazılır.

$X \in \ker A \subset V$ alt uzayı olduğundan X çözümleri bir alt uzay oluştururlar. Bu uzayın boyutu, çekirdeğin boyutudur. Yani A katsayılar matrisinin sıfırlık derecesine eşittir.

$$\text{boy} V = \text{rank} B + \text{sıfırlık} B \quad (2.24)$$

$$n = k + \text{sıfırlık} B \quad (2.25)$$

$$\text{sıfırlık} B = n - k \quad (2.26)$$

Böylece çözüm uzayının boyutu $n - k$ yazılır. $\sum_{j=1}^n v_j b_{ij} = 0$ sisteminden bulunacak v_j elemanları için $\vec{v} = (v_j) \in W^\perp$ olacağından, çözüm uzayının boyutu $W^\perp$ uzayının boyutuna eşit olup,

$$\text{boy} W^\perp = n - k \quad (2.27)$$

bulunur. Buradan,

$$\text{boy} V = \text{boy} W + \text{boy} W^\perp \quad (2.28)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

2) $(W^\perp)^\perp = W$ olduğunu gösterelim.

$\forall \vec{v} \in W$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$, $\forall \vec{w} \in W^\perp$ yazılabilir. Ayrıca $\vec{v}$, $W^\perp$ uzayındaki her vektöre dik olduğundan, $\vec{v} \in (W^\perp)^\perp$ olup,

$$W \subset (W^\perp)^\perp \quad (2.29)$$

yazılabilir. Tersine, $\forall \vec{w} \in (W^\perp)^\perp$ için $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$, $\forall \vec{v} \in W^\perp$ yazılır. Ayrıca $\vec{w}$, $W^\perp$ uzayındaki her vektöre dik olduğundan $\vec{w} \in W$ olup,

$$(W^\perp)^\perp \subset W \quad (2.30)$$

yazılabilir. O halde (2.29) ve (2.30) gereğince,

$$(W^\perp)^\perp = W \quad (2.31)$$

elde edilir. ■

Teorem 2.3. V bir SÇU uzayı $W \subset V$ alt uzayı olsun. W alt uzayının non-dejenere olması için gerek ve yeter koşul

$$V = W \oplus W^\perp \quad (2.32)$$

olmasıdır; [1].

İspat. $(\Rightarrow)$: $W \subset V$ alt uzayının non-dejenere olduğunu kabul edelim. $V = W \oplus W^\perp$ olması için direkt toplam özelliğinden $W \cap W^\perp = \{0\}$ ve $V = W + W^\perp$ sağlanmalıdır. O halde ilk önce $W \cap W^\perp = \{0\}$ olma durumunu inceleyelim:

$\forall \vec{v} \in W \cap W^\perp$ için $\vec{v} \in W$ ve $\vec{v} \in W^\perp$ olup, $\vec{v} \in W^\perp$ ise $\vec{v} \in W$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ yazılır. W non-dejenere olduğundan $\forall \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ olup $\vec{v} = 0$ yazılır. Buradan,

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad (2.33)$$

elde edilir. V SÇU ve $W \subset V$ alt uzayı olmak üzere Teorem 2.2 gereğince,

$$\text{boy} V = \text{boy} W + \text{boy} W^\perp \quad (2.34)$$

yazılır. Ayrıca,

$$\text{boy}(W + W^\perp) = \text{boy} W + \text{boy} W^\perp - \text{boy}(W \cap W^\perp) \quad (2.35)$$

ve

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad (2.36)$$

olduğundan,

$$\text{boy}(W + W^\perp) = \text{boy} W + \text{boy} W^\perp \quad (2.37)$$

yazılır. Buradan,

$$\text{boy}(W + W^\perp) = \text{boy}V \quad (2.38)$$

elde edilir. $W \subset V$ ve $W^\perp \subset V$ olmak üzere $W + W^\perp \subset V$ olup, alt uzay ile üst uzayın boyutları birbirine eşit olduğundan,

$$V = W + W^\perp \quad (2.39)$$

bulunur. Böylece (2.33) ve (2.39) eşitliklerinden $V = W \oplus W^\perp$ elde edilir.

($\Leftarrow$) : $V = W \oplus W^\perp$ olduğunu kabul edilirse,

$$V = W + W^\perp \quad (2.40)$$

ve

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad (2.41)$$

koşulları sağlanır. Burada W alt uzayının non-dejenere alt uzay olduğunu göstereceğiz. O halde,

$\forall \vec{v} \in W$ için $\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{w} = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Buradan,

$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\forall \vec{v} \in W$ için $\vec{w} \in W^\perp$ olup

$$W^\perp = \{\vec{v} \in V : \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0, \forall \vec{w} \in W\} \quad (2.42)$$

gereğince $\vec{w} \in W$ olduğundan $\vec{w} \in W \cap W^\perp$ elde edilir. Böylece $\vec{w} = 0$ bulunur. Dolayısıyla $W \subset V$ non-dejenere alt uzaydır. ■

Tanım 2.6. V bir SÇU ve $W \subset V$ alt uzayı olsun.

- 1) $\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow R$ kısıtlaması non-dejenere oluyorsa W alt uzayına *non-dejenere alt uzay*,
- 2) $\langle, \rangle|_W : W \times W \rightarrow R$ kısıtlaması dejenere oluyorsa W alt uzayına *dejenere alt uzay*

denir, [1].

Sonuç 2.2. V bir SÇU ve $W \subset V$ non-dejenere alt uzay olsun. Bu takdirde $W^\perp$ non-dejenere bir alt uzaydır, [1].

İspat. V bir SÇU, $W \subset V$ alt uzayı da non-dejenere olduğundan Teorem 2.3 gereğince

$$V = W \oplus W^\perp \quad (2.43)$$

olup, buradan

$$V = W + W^\perp \quad (2.44)$$

ve

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad (2.45)$$

yazılabilir. $\forall \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ iken $\vec{w} \in W^\perp$ ve $\vec{w} \in (W^\perp)^\perp$ iken $\vec{w} \in W$ olup, $\vec{w} \in W^\perp$ ile birlikte $\vec{w} \in W \cap W^\perp$ bulunur. Böylece $\vec{w} = 0$ olup $W^\perp$ non-dejenere alt uzayıdır. ■

Tanım 2.7. Bir V bir SÇU olsun. Bir $\vec{v} \in V$ için norm tanımı,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{|\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle|} \quad (2.46)$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ negatif tanımlı olabilir. Bu yüzden norm mutlak değer ile tarif edilir. Normu 1 birim olan vektör birim vektördür. Yani $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \pm 1$ şeklinde ifade edilir. Ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal sistem* denir, [1].

2.1.4 Skaler Çarpım Uzayında Ortonormal Baz

Teorem 2.4. Bir V boyutlu SÇU bir ortonormal baza sahiptir, [1].

İspat. V SÇU'nun bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal baza sahip olduğunu gösterelim: Tümevarım yöntemi kullanılırsa, V SÇU non-dejenere olduğundan, $\forall \vec{v} \in V$ ve $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{u} = \vec{0}$ olup $\vec{u} = \vec{v}$ için de sağlanır. O halde $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olup, bu durum V SÇU'nun $V = \{\vec{0}\}$ olması anlamına gelir. $V \neq \{\vec{0}\}$ kabulümüzden dolayı $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir $\vec{v} \in V$ vektörü olmak zorundadır.

Böylece $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ olduğundan

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad (2.47)$$

olmak üzere $\{e_1\}$ sistemi V SÇU'nda bir ortonormal sistemdir. $i = k$ ortonormal sistem olduğunu kabul edelim. Bu sistem vektörünün gerdiği k boyutlu alt uzay W olsun. W alt uzayı $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ vektörleri tarafından gerilen k boyutlu non-dejenere alt uzayıdır.

Teorem 2.2 ve Teorem 2.3 gereğince W alt uzayı non-dejenere olduğundan dolayı

$$\text{boy}V = \text{boy}W + \text{boy}W^\perp \quad (2.48)$$

ve

$$V = W \oplus W^\perp \quad (2.49)$$

olacak şekilde V SÇU'nun bir $W^\perp \neq \{0\}$ alt uzayı vardır. $W^\perp \neq \{0\}$ ve non-dejenere olduğundan $W^\perp$ alt uzayında bir birim vektör vardır. O halde

$$W^\perp = \text{sp} \{(e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n)\} \quad (2.50)$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\} \quad (2.51)$$

sistemi ortonormaldir. Böylece

$$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\} \quad (2.52)$$

sistemi V SÇU'nun bir ortonormal bazıdır. ■

Not 2.3. $\langle, \rangle$ SÇF'na karşılık gelen matris, V SÇU'nun $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazına göre köşegen matristir. Gerçekten,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \quad \varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \langle e_j, e_j \rangle > 0 \\ -1 & \langle e_j, e_j \rangle < 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j \quad (2.54)$$

yazılabilir. Burada $\varepsilon_j = \langle e_j, e_j \rangle = \pm 1$ şeklinde de yazılabilir, [1].

Teorem 2.5. V reel vektör uzayı için $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bir ortonormal baz olsun. $\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ ve her $\vec{v} \in V$ için

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i \quad (2.55)$$

şeklinde olup tek türlü yazılabilir, [1].

İspat. Bu teoremin ispatında $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$ işaretlemesinde, eğer varsa, negatif işaretli terimler ilk sırada yer alacaktır. $\forall \vec{v} \in V$ vektörü $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal baz vektörlerinin bir lineer birleşimi şeklinde tek türlü yazılır. Yani

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.56)$$

olacak şekilde $a_i \in \mathbb{R}$ tek türüdür. Bu eşitlikten $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$ olmak üzere,

$$\langle \vec{v}, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ik} \varepsilon_k \quad (2.57)$$

yazılabilir. Burada $i = k$ alınırsa, $\langle \vec{v}, e_k \rangle = a_k \varepsilon_k (1 \leq k \leq n)$ yazılır.

$$\varepsilon_k = \langle e_k, e_k \rangle = \pm 1 \quad (2.58)$$

olduğundan, eşitliğin her iki tarafı ε_k ile çarpılırsa,

$$\varepsilon_k \langle \vec{v}, e_k \rangle = a_k \varepsilon_k^2 \quad (2.59)$$

elde edilir. $\varepsilon_k^2 = 1$ olduğundan,

$$a_k = \varepsilon_k \langle \vec{v}, e_k \rangle, \quad (1 \leq k \leq n) \quad (2.60)$$

yazılır. O halde,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i \quad (2.61)$$

bulunur. $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ tek türlü yazıldığından a_i ifadeleri de tek türlü olarak belirlenir. O halde,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i \quad (2.62)$$

tek türüdür. ■

Tanım 2.8. V bir SÇU ve $W \subset V$ non-dejenere alt uzay olmak üzere,

$$\bar{\pi} : V \rightarrow W \quad (2.63)$$

$$\bar{\pi} = \begin{cases} \vec{v}, & \vec{v} \in W \\ \vec{0}, & \vec{v} \in W^\perp \end{cases} \quad (2.64)$$

şeklinde tanımlanan $\bar{\pi}$ lineer dönüşümüne $\vec{v}$ vektörünün W alt uzay üzerine *ortogonalite /dik izdüşümü* denir, [1].

Not 2.4. W alt uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ise bu baz daima V reel vektör uzayının bir bazına tamamlanabilir. Böylece,

$$\bar{\pi}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \langle \vec{v}, e_i \rangle e_i \quad (2.65)$$

yazılabilir, [1].

Not 2.5. V reel vektör uzayının $\langle, \rangle$ SÇF'nun indeksi için $\nu = \text{ind}V$ gösterimini tercih edilir.

Teorem 2.6. V reel vektör uzayı için $\text{ind}V = \nu$ ise $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal bazında ν tane negatif işaretli terim vardır, [1].

İspat. Bu teoremin ispatında $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\nu)$ işaretlemesinde, eğer varsa, negatif işaretli terimler ilk sırada yer alacaktır. V reel vektör uzayının en büyük boyutlu negatif alt uzay olsun. Teorem 2.4 gereğince W alt uzayının $\{e_1, e_2, \dots, e_\nu\}$ ortonormal bazı vardır. $\forall \vec{w} \in W$ için olmak üzere alt uzayı negatif tanımlı olduğundan,

yazılır. O halde,

$$\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\nu} a_i e_i, \sum_{j=1}^{\nu} a_j e_j \right\rangle < 0 \quad (2.66)$$

olup

$$\sum_{i,j=1}^{\nu} a_i a_j \langle e_i, e_j \rangle < 0 \quad (2.67)$$

elde edilir.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j \quad (2.68)$$

eşitliğinden,

$$\sum_{i,j=1}^v a_i a_j \delta_{ij} \varepsilon_j < 0 \quad (2.69)$$

yazılır. Burada $i = j$ alınırsa,

$$\sum_{i=1}^v a_i^2 \varepsilon_i < 0 \quad (2.70)$$

elde edilir. Kareler toplamı negatif olamayacağından,

$$\sum_{i=1}^v \varepsilon_i < 0 \quad (2.71)$$

bulunur. ■

Sonuç 2.3. Burada $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_v)$ işaretlemesinde, eğer varsa, negatif işaretli terimler ilk sırada yer alacaktır.

V bir SÇU olsun. V SÇU'nun bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_v, e_{v+1}, \dots, e_n\}$ ve $\text{ind} V = v$ olsun.

$\forall v_1, v_2 \in V$ için

$$\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.72)$$

ve

$$\vec{v}_2 = \sum_{j=1}^n b_j e_j \quad (2.73)$$

yazılır:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle e_i, e_j \rangle \quad (2.74)$$

elde edilir.

Buradan,

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \sum_{i,j=1}^{\nu} a_i b_j \langle e_i, e_j \rangle + \sum_{i,j=\nu+1}^n a_i b_j \langle e_i, e_j \rangle \quad (2.75)$$

olup

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j \quad (2.76)$$

ve

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & 1 \leq j \leq \nu \\ 1 & \nu + 1 \leq j \leq n \end{cases} \quad (2.77)$$

olduğundan

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = - \sum_{i,j=1}^{\nu} a_i b_j \delta_{ij} + \sum_{i,j=\nu+1}^n a_i b_j \delta_{ij} \quad (2.78)$$

elde edilir. Burada $i = j$ alınrsa,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} a_i b_i + \sum_{i=\nu+1}^n a_i b_i \quad (2.79)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç 2.4. V SÇU'nun W alt uzayı non-dejenere alt uzay olmak üzere,

$$\text{ind} V = \text{ind} W + \text{ind} W^{\perp} \quad (2.80)$$

yazılır, [1].

İspat. Bu teoremin ispatında $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{\nu})$ işaretlemesinde, eğer varsa, negatif işaretli terimler ilk sırada yer alacaktır. V n -boyutlu SÇU ve non-dejenere alt uzay olduğundan Teorem 2.3 gereğince, $V = W \oplus W^{\perp}$ olup,

$$V = W + W^{\perp} \quad (2.81)$$

yazılır. O halde, V vektör uzayındaki negatif işaretli ε_i terimlerinin sayısı ν tane ise bunlardan bir kısmı W alt uzayında bir kısmı da $W^{\perp}$ uzayındadır.

O halde $\text{boy}W = k$ ve $\text{ind}W = m$ olmak üzere $\{e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_k\}$ sistemi W alt uzayının bir bazı olsun. $\text{boy}V = \text{boy}W + \text{boy}W^\perp$ olduğundan $\{e_{k+1}, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ sistemi $W^\perp$ uzayının bir bazıdır. Bu durumda,

$$\text{ind}W^\perp = n - (p - (k + 1)) \quad (2.82)$$

ve

$$\text{boy}W^\perp = n - (k + 1) \quad (2.83)$$

yazılır. O halde $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ sistemi V SÇU'nun bir bazı olup,

$$\text{boy}V = n \quad (2.84)$$

ve

$$\text{ind}V = m + n - (p - (k + 1)) \quad (2.85)$$

yazılır. Böylece,

$$\text{ind}V = \text{ind}W + \text{ind}W^\perp \quad (2.86)$$

eşitliği elde edilir.

■

2.1.5 Özel dönüşümler

Tanım 2.9. V ve W , sırasıyla $\langle, \rangle_V$ ve $\langle, \rangle_W$ SÇF'larına sahip iki lineer SÇU olsun.

$$T : \langle, \rangle_V \rightarrow \langle, \rangle_W \quad (2.87)$$

lineer dönüşümü verilsin. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

$$\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle_W = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V \quad (2.88)$$

ise T dönüşümüne *skaler çarpmayı koruyor* denir. T lineer dönüşümü için $T(\vec{v}) = 0$ ise $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V = 0$ ve $\langle, \rangle_V$ SÇF non-dejenere olduğundan $\forall \vec{w} \in V$ için $\vec{v} = 0$ yazılır. Bu ifade de T lineer dönüşümünün birebir olduğunu gösterir, [1].

Tanım 2.10. Skaler çarpmayı koruyan bir $T : V \rightarrow W$ lineer izomorfizmine *lineer izometri* denir. Bir $T : V \rightarrow W$ lineer dönüşümü bir lineer izometri ise

$$\text{boy}V = \text{boy}W \quad (2.89)$$

yazılır. Bunun tersi de doğrudur, [1].

Teorem 2.7. V SÇU ve W SÇU'nun aynı boyut ve indekse sahip olmaları için hem gerek hem yeter şart V uzayından W uzayına bir lineer izometrinin var olmasıdır, [1].

İspat. $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki V ve W aynı boyutlu ve aynı indeksli SÇU olsun. O halde $\text{boy}V = \text{boy}W = n$ ve $\text{ind}V = \text{ind}W = n$ olup V SÇU'nun bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve W SÇU'nun ortonormal bazı da $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ kabul edildiğinde

$$\begin{aligned} T : \langle, \rangle_V &\rightarrow \langle, \rangle_W \\ e_i &\rightarrow e'_i \end{aligned} \quad (2.90)$$

dönüşümü lineer ve birebirdir. Her i, j için

$$\langle T(e_i), T(e_j) \rangle_W = \langle e'_i, e'_j \rangle_W = \langle e_i, e_j \rangle_V \quad (2.91)$$

olduğunu gösterelim. O halde $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ için

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.92)$$

ve

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^n b_j e_j \quad (2.93)$$

yazılır. Burada,

$$T(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n a_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n a_i e'_i \quad (2.94)$$

ve

$$T(\vec{w}) = \sum_{j=1}^n b_j T(e_j) = \sum_{j=1}^n b_j e'_j \quad (2.95)$$

şeklinde ifade edilir. $\langle, \rangle_V$ SÇU non dejenere olduğundan $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V = 0$ iken $\vec{v} = 0$ yazılır.

$$\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle_W = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V \quad (2.96)$$

eşitliğinden $T(\vec{v}) = 0$ ve $\vec{v} = 0$ olduğundan T lineer dönüşümü birebirdir.

O halde,

$$\langle T(\vec{v}), T(\vec{w}) \rangle_W = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e'_i, \sum_{j=1}^n b_j e'_j \right\rangle_V = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle e'_i, e'_j \rangle_V \quad (2.97)$$

elde edilir. Burada,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle = \begin{cases} -1 & 1 \leq i, j \leq \nu \\ 1 & \nu + 1 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (2.98)$$

olduğundan

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \langle e'_i, e'_j \rangle_V = - \sum_{i,j=1}^{\nu} a_i b_j + \sum_{i,j=\nu+1}^n a_i b_j \quad (2.99)$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) : Eğer T bir lineer izometri ise V SÇU 'nın ortonormal bazı W SÇU 'nın ortonormal bazına dönüşür. Böylece $\text{boy}V = \text{boy}W$ ve (2.80) denklemi gereğince

$$\text{ind}V = \text{ind}W \quad (2.100)$$

yazılır. ■

3.1 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Vektörlerin Özellikleri

Tanım 3.1. $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan Lorentz iç çarpımı ile oluşan uzaya *2-boyutlu Minkowski uzayı* denir ve $\mathbb{R}_1^2$ ya da $\mathbb{L}^2$ ile gösterilir, [2].

3.1.1 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Vektörlerin Sınıflandırılması

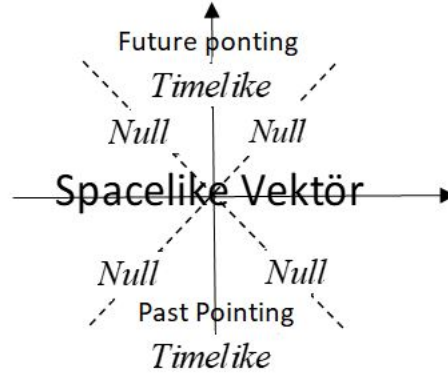
Tanım 3.2. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ olmak üzere,

- 1) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *timelike vektör*,
- 2) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *spacelike vektör*,
- 3) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *null vektör*

denir, [2].

Tanım 3.3. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde herhangi bir $\vec{x}$ vektörü için,

- 1) $|x_1| = |x_2|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *null vektör*,
- 2) $|x_1| < |x_2|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *timelike vektör*,
- 3) $|x_1| > |x_2|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *spacelike vektör*,



Şekil 3.1 Lorentz Düzlemi

denir.

Tanım 3.4. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ için,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan eşitlik $\vec{x}$ vektörünün *normu* olarak adlandırılır, [1].

Teorem 3.1. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ olsun.

- 1) $\|\vec{x}\| \geq 0$ yazılır.
- 2) $\|\vec{x}\| = 0$ olması için hem gerek hem yeter şart $\vec{x}$ vektörünün null vektör olmasıdır.
- 3) $\vec{x}$ vektörü bir timelike vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$
- 4) $\vec{x}$ vektörü bir spacelike vektör ise $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$

şeklinde yazılır.

İspat. 1) $\forall \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ veya $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ olacağından,

$$|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle| \geq 0 \quad (3.3)$$

olup

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} \geq 0 \quad (3.4)$$

elde edilir.

2) $(\Rightarrow)$: $\|\vec{x}\| = 0$ olduğunu kabul edilirse,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = 0 \quad (3.5)$$

olup $|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle| = 0$ veya $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ olup $\vec{x}$ sıfır vektörü ya da bir null vektördür.

$(\Leftarrow)$: $\vec{x}$ sıfır vektörü ya da bir null vektör olsun. Bu durumda $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ olup norm tanımı gereğince,

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = 0 \quad (3.6)$$

ile ifade edilir.

3) $\vec{x}$ timelike vektör olsun. O halde timelike vektör tanımı gereğince, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ yazılır. Norm tanımı gereğince, $\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$ olup $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ olduğundan,

$$\|\vec{x}\|^2 = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle| = -\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \quad (3.7)$$

elde edilir.

4) $\vec{x}$ bir spacelike vektör olsun. Spacelike vektör tanımı gereğince, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ yazılır. Norm tanımı gereğince, $\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|}$ olup $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ olduğundan,

$$\|\vec{x}\|^2 = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle| = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \quad (3.8)$$

elde edilir.

■

Tanım 3.5. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ timelike vektörü ve $\vec{e} = (0, 1)$ için,

1) $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle < 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne future pointing (pozitif) timelike vektör,

2) $\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle > 0$ ise $\vec{x}$ vektörüne past pointing (negatif) timelike vektör

denir, [2].

Not 3.1. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün bir future pointing timelike vektör olması için hem gerek hem yeter şart

$$|x_1| < x_2 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlı olmasıdır, [2].

İspat. $(\Rightarrow) : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün future pointing timelike vektör olduğunu kabul edelim. Timelike vektör tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.10)$$

olup $x_1^2 < x_2^2$ için

$$|x_1| < |x_2| \quad (3.11)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\vec{x} = (x_1, x_2)$ vektörü future pointing timelike vektör tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = \langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle = -x_2 < 0 \quad (3.12)$$

olup

$$x_2 > 0 \quad (3.13)$$

bulunur. Bunu $|x_1| < |x_2|$ ifadesinde yerine yazarsak,

$$|x_1| < x_2 \quad (3.14)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow) : |x_1| < x_2$ olduğunu kabul edelim. O halde $|x_1| > 0$ olduğundan $0 < |x_1| < x_2$ elde edilir. Buradan,

$$x_1^2 < x_2^2 \quad (3.15)$$

olup

$$x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.16)$$

bulunur. Dolayısıyla $\vec{x}$ vektörü timelike vektördür. Ayrıca $x_2 > 0$ olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = \langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle = -x_2 < 0 \quad (3.17)$$

olup $\vec{x}$ vektörü future pointing timelike vektördür. ■

Örnek 3.1. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde $\vec{x} = (2, 3)$ vektörü için

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (2, 3), (2, 3) \rangle = 2^2 - 3^2 < 0 \quad (3.18)$$

ve ayrıca Lemma 3.1 gereğince $|2| < 3$ olduğundan $\vec{x}$ vektörü future pointing timelike vektördür.

Not 3.2. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünü *past pointing timelike* vektör olması için hem gerek hem yeter şart

$$|x_1| < -x_2 \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlı olmasıdır, [2].

İspat.

$(\Rightarrow) : \vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörünün *past pointing timelike* vektör olduğunu kabul edelim. Timelike vektör tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.20)$$

olup

$$x_1^2 < x_2^2 \quad (3.21)$$

için

$$|x_1| < |x_2| \quad (3.22)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\vec{x} = (x_1, x_2)$ vektörü *past pointing timelike* vektör tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = \langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle = -x_2 > 0 \quad (3.23)$$

olup

$$x_2 < 0 \quad (3.24)$$

bulunur. Bunu $|x_1| < |x_2|$ ifadesinde yerine yazarsak,

$$|x_1| < -x_2 \quad (3.25)$$

elde edilir.

$(\Leftarrow) : -|x_1| > x_2$ olduğunu kabul edelim. $|x_1| < -x_2$ olduğundan $|x_1|^2 < x_2^2$ olup

$$x_1^2 < x_2^2 \quad (3.26)$$

ve

$$x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.27)$$

elde edilir.

Dolayısıyla $\vec{x}$ vektörü timelike vektördür. Ayrıca $|x_1| < -x_2$ olduğunda

$$|x_1| > 0 \quad (3.28)$$

olup

$$-|x_1| < 0 \quad (3.29)$$

yazılır. Bu durumda

$$x_2 < 0 \quad (3.30)$$

elde edilir. Böylece,

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = \langle (x_1, x_2), (0, 1) \rangle = -x_2 > 0 \quad (3.31)$$

olup $\vec{x}$ vektörü future pointing timelike vektördür. ■

Tanım 3.6. $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ spacelike vektör ve $\vec{E} = (1, 0)$ için,

- 1) $\langle \vec{x}, \vec{E} \rangle > 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne $\vec{E}$ ile aynı yönde yönlendirilmiş vektör,
- 2) $\langle \vec{x}, \vec{E} \rangle < 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne $\vec{E}$ ile zıt yönde yönlendirilmiş vektör

denir.

Not 3.1. Tanım 3.6 gereğince $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörü spacelike ve $\vec{E} = (1, 0)$ ile aynı yönde yönlendirilmiş vektör ise $x_1^2 - x_2^2 > 0$ ve $x_1 > 0$ olup, buradan $x_1 > |x_2|$ olduğu açıktır. Eğer $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörü spacelike ve $\vec{E} = (1, 0)$ ile zıt yönde yönlendirilmiş vektör ise $x_1^2 - x_2^2 > 0$ ve $x_1 < 0$ olup, buradan $|x_2| < -x_1$ olduğu açıktır.

3.1.2 $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski Düzleminde Diklik

Teorem 3.2. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski uzayında her ikiside timelike (veya spacelike) olan iki vektör birbirine dik olamaz.

İspat. 1) $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörleri timelike vektör olsun. O halde timelike vektör tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.32)$$

olup

$$x_1^2 < x_2^2 \quad (3.33)$$

veya

$$|x_1| < |x_2| \quad (3.34)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle (y_1, y_2), (y_1, y_2) \rangle = y_1^2 - y_2^2 < 0$ olup

$$y_1^2 < y_2^2 \quad (3.35)$$

veya

$$|y_1| < |y_2| \quad (3.36)$$

elde edilir. Buradan,

$$x_1^2 y_1^2 < x_2^2 y_2^2 \quad (3.37)$$

olup

$$|x_1 y_1| < |x_2 y_2| \quad (3.38)$$

yazılabilir. Buradan oluşacak,

$x_1 y_1 < x_2 y_2$, $-x_1 y_1 < -x_2 y_2$, $-x_1 y_1 < x_2 y_2$ veya $x_1 y_1 < -x_2 y_2$ durumlar incelendiğinde,

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 < 0 \quad (3.39)$$

ve

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 > 0 \quad (3.40)$$

olup $x_1 y_1 \neq x_2 y_2$ olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 \neq 0 \quad (3.41)$$

olup $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri Lorentz anlamında dik değildir.

2) Benzer ispat bu iki vektörün spacelike olması durumu için de yapılabilir.

$\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ spacelike vektörler olmak üzere spacelike vektör tanımını gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 > 0 \quad (3.42)$$

olup

$$x_1^2 > x_2^2 \quad (3.43)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle (y_1, y_2), (y_1, y_2) \rangle = y_1^2 - y_2^2 > 0 \quad (3.44)$$

olup

$$y_1^2 > y_2^2 \quad (3.45)$$

elde edilir. Buradan,

$$x_1^2 y_1^2 > x_2^2 y_2^2 \quad (3.46)$$

olup

$$|x_1 y_1| > |x_2 y_2| \quad (3.47)$$

yazılabilir. Buradan oluşacak,

$x_1 y_1 < x_2 y_2$, $-x_1 y_1 < -x_2 y_2$, $-x_1 y_1 < x_2 y_2$ veya $x_1 y_1 < -x_2 y_2$ durumlar incelendiğinde,

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 < 0 \quad (3.48)$$

ve

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 > 0 \quad (3.49)$$

olup $x_1 y_1 \neq x_2 y_2$ olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 \neq 0 \quad (3.50)$$

elde edilir. O halde $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri Lorentz anlamında dik değildir. ■

Sonuç 3.1. $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ non-null vektörleri için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olmak üzere $\vec{x}$ vektörü spacelike ise $\vec{y}$ timelike vektör olup, $\vec{x}$ timelike vektör ise $\vec{y}$ spacelike vektördür ve tektir.

İspat. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olmak üzere $\vec{x}$ vektörünün spacelike vektör olduğunu kabul edip $\vec{y}$ vektörünü inceleyelim. $\vec{x}$ spacelike vektör olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 > 0 \quad (3.51)$$

ve

$$|x_1| > |x_2| \quad (3.52)$$

yazılır. Ayrıca

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0 \quad (3.53)$$

veya

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 \quad (3.54)$$

olup

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \quad (3.55)$$

yazılabilir. Bu eşitlik mutlak değer için de sağlanacağından,

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|y_2|}{|y_1|} \quad (3.56)$$

olup

$$|x_1| > |x_2| \quad (3.57)$$

olduğundan

$$|y_2| > |y_1| \quad (3.58)$$

yazılabilir. Böylece $\vec{y}$ vektörü timelike vektördür. Tersine $\vec{x}$ timelike vektör olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad (3.59)$$

ve

$$|x_1| < |x_2| \quad (3.60)$$

yazılır. Ayrıca

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0 \quad (3.61)$$

veya

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 \quad (3.62)$$

olup

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1} \quad (3.63)$$

yazılabilir. Bu eşitlik mutlak değer için de sağlanacağından,

$$\frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|y_2|}{|y_1|} \quad (3.64)$$

olup

$$|x_1| < |x_2| \quad (3.65)$$

olduğundan

$$|y_2| < |y_1| \quad (3.66)$$

yazılabilir. Böylece $\vec{y}$ vektörü spacelike vektördür. Şimdi $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski uzayında $\vec{x}$ birim timelike (spacelike) vektörüne dik olan $\vec{y}$ spacelike (timelike) vektörünün tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\vec{y}$ tek olmasın. Yani,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \quad (3.67)$$

ve

$$\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = 0 \quad (3.68)$$

olmak üzere $\vec{y} = (y_1, y_2)$ ve $\vec{z} = (z_1, z_2)$ iki vektör olsun. $\vec{x} = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2, \quad x_1 y_1 = x_2 y_2 \quad (3.69)$$

$$0 = \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = x_1 z_1 - x_2 z_2, \quad x_1 z_1 = x_2 z_2 \quad (3.70)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad (3.71)$$

ve

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (3.72)$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (3.73)$$

yazılır. ■

Sonuç 3.2. $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ için,

1) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olup $\vec{x}$ spacelike vektör ise $\vec{y}$ null vektör olamaz.

2) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olup $\vec{x}$ timelike vektör ise $\vec{y}$ null vektör olamaz.

Sonuç 3.3. $\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ için $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olup $\vec{x}$ null vektör ($\vec{x} \neq \vec{0}$) ise $\vec{y}$ vektörü de null vektördür.

İspat. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olduğundan $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$ yazılır. Ayrıca $\vec{x}$ null vektör olduğundan,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad (3.74)$$

olup

$$x_1^2 = x_2^2 \quad (3.75)$$

ve böylece

$$|x_1| = |x_2| \quad (3.76)$$

elde edilir. O halde $x_1 = x_2$ veya $x_1 = -x_2$ olup, $x_1 = x_2$ için

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1 y_1 - x_1 y_2 = x_1 (y_1 - y_2) = 0 \quad (3.77)$$

yazılabilir. $\vec{x} \neq \vec{0}$ olduğundan

$$\vec{x}_1 \neq \vec{0} \quad (3.78)$$

olup

$$(y_1 - y_2) = 0 \quad (3.79)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$y_1 = y_2 \quad (3.80)$$

olup $\vec{y} = (y_1, y_1)$ vektörü null vektördür. $x_1 = -x_2$ için

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 = x_1 y_1 + x_1 y_2 = x_1 (y_1 + y_2) = 0 \quad (3.81)$$

yazılabilir. ($\vec{x} \neq \vec{0}$) olduğundan $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$ olup $(y_1 + y_2) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $y_1 = -y_2$ olup $\vec{y} = (y_1, y_1)$ vektörü null vektördür. Dolayısıyla $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olup $\vec{x}$ null vektör ($\vec{x} \neq \vec{0}$) olduğunda $\vec{y}$ vektörü de null vektördür. ■

Örnek 3.2. Minkowski uzayında $\vec{x} = (1, 3)$ ve $\vec{y} = (3, 1)$ vektörleri Lorentz anlamında birbirine diktir. Çünkü,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (1, 3), (3, 1) \rangle = 3 - 3 = 0 \quad (3.82)$$

olup Lorentz anlamında dikliği sağlar.

3.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı için Vektörlerin Özellikleri

3.2.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayı için Vektörlerin Sınıflandırması

Tanım 3.7. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \quad (3.83)$$

şeklinde tanımlanan Lorentz iç çarpımı ile oluşan uzaya *3-boyutlu Minkowski uzayı* denir ve $\mathbb{R}_1^3$ ya da $\mathbb{L}^3$ ile gösterilir, [2].

Tanım 3.8. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere,

- 1) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *timelike vektör*,
- 2) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ veya $\vec{x} = 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *spacelike vektör*,
- 3) $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ve $\vec{x} \neq 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *null vektör*

denir, [3].

Tanım 3.9. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ olmak üzere

$\bar{x} = (x_1, x_2)$ ve $\bar{y} = (y_1, y_2)$ için iç çarpım fonksiyonu,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle - x_3 y_3$$

olup

$$\|\vec{x}\|^2 = |\bar{x}|^2 - x_3^2$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ Öklid anlamında iç çarpımı ifade etmektedir, [3].

Tanım 3.10. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ ve $\bar{x} = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

- 1) $|\bar{x}| < |x_3|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *timelike vektör*,
- 2) $|\bar{x}| > |x_3|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *spacelike vektör*,
- 3) $|\bar{x}| = |x_3|$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne *null vektör* denir, [3].

Tanım 3.11. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ timelike vektörü için,

- 1) $x_3 > 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne pozitif timelike vektör,
- 2) $x_3 < 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne negatif timelike vektör

denir, [3].

Tanım 3.12. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_1^3$ null vektörü için,

- 1) $x_3 > 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne pozitif null vektör,
- 2) $x_3 < 0$ oluyorsa $\vec{x}$ vektörüne negatif null vektör

denir, [3].

3.2.2 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Diklik

Teorem 3.3. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ sıfırdan farklı aynı tür pozitif(negatif) spacelike olmayan vektörler için

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq 0 \quad (3.84)$$

olup eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart vektörlerinin lineer bağımlı null vektör olmasıdır, [3].

İspat. $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında vektörlerin birbirine göre durumlarını inceleyelim:

- **İki timelike vektörün birbirine göre durumu:**

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ iki pozitif(negatif) timelike vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0 \quad (3.85)$$

olup

$$x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 \quad (3.86)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 < 0 \quad (3.87)$$

olup

$$y_1^2 + y_2^2 < y_3^2 \quad (3.88)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımı gereğince $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

olup

$$x_3y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (3.89)$$

yazılabilir. Burada (3.86) ve (3.88) denklemleri çarpılırsa,

$$x^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 < x_3^2y_3^2 \quad (3.90)$$

yazılabilir. (3.89) denkleminin karesi alınıp yerine yazılırsa,

$$x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 < x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 \quad (3.91)$$

olup

$$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 < x_1y_1x_2y_2 + x_1y_1x_2y_2 \quad (3.92)$$

veya

$$x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - x_1y_1x_2y_2 - x_1y_1x_2y_2 < 0 \quad (3.93)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_1y_2(x_1y_2 - x_2y_1) + x_2y_1(x_2y_1 - x_1y_2) < 0 \quad (3.94)$$

veya

$$(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 < 0 \quad (3.95)$$

olup çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki timelike vektörün birbirine dik olamayacağı gösterilmiş olur.

- Bir timelike ve bir null vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ sırasıyla pozitif (negatif) timelike ve pozitif (negatif) null vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0 \quad (3.96)$$

olup

$$x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 \quad (3.97)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \quad (3.98)$$

olup

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 \quad (3.99)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımından $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

olup

$$x_3y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 \quad (3.100)$$

yazılabilir. Burada (3.97) eşitsizliği y_1^2 ile çarpılırsa,

$$y_3^2(x_1^2 + x_2^2) < x_3^2y_3^2 \quad (3.101)$$

yazılabilir. Burada (3.100) denklemi yerine yazılırsa,

$$(y_1^2 + y_2^2)(x_1^2 + x_2^2) < (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \quad (3.102)$$

$$x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2 < x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 \quad (3.103)$$

olup

$$x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 - x_1y_1x_2y_2 - x_1y_1x_2y_2 < 0 \quad (3.104)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_2y_1(x_2y_1 - x_1y_2) + x_1y_2(x_1y_2 - x_2y_1) < 0 \quad (3.105)$$

veya

$$(x_2y_1 - x_1y_2)(x_2y_1 - x_1y_2) = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 < 0 \quad (3.106)$$

olup çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki bir timelike vektör ve bir null vektör birbirine dik olamayacağı gösterilmiş olur.

- İki null vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ iki pozitif (negatif) null vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (3.107)$$

olup

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \quad (3.108)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \quad (3.109)$$

olup

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 \quad (3.110)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımı gereğince,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0 \quad (3.111)$$

olup

$$x_3 y_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (3.112)$$

yazılabilir. Burada (3.108) ve (3.110) denklemleri çarpılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 = x_3^2 y_3^2 \quad (3.113)$$

yazılabilir. (3.112) denkleminin karesi alınıp yerine yazılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 \quad (3.114)$$

olup

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 = x_1 y_1 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2 y_2 \quad (3.115)$$

veya

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - x_1 y_1 x_2 y_2 - x_1 y_1 x_2 y_2 = 0 \quad (3.116)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_1 y_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + x_2 y_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) = 0 \quad (3.117)$$

veya

$$(x_1y_2 - x_2y_1)(x_1y_2 - x_2y_1) = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 0 \quad (3.118)$$

olup $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki null vektör x o y düzlemine izdüşüm ile lineer bağımlı iseler diklik sağlanır. ■

Örnek 3.3. Teorem 3.3 ifadesine örnek vermek gerekirse,

- İki pozitif (negatif) timelike vektör için

$$\langle (1, 2, 3), (1, -1, 2) \rangle = -7 < 0 \quad (3.119)$$

$$\langle (1, 2, -3), (1, -1, -2) \rangle = -7 < 0 \quad (3.120)$$

- İki pozitif (negatif) null vektör için

$$\langle (4, 3, 5), (3, 0, 3) \rangle = -3 < 0 \quad (3.121)$$

$$\langle (4, 3, -5), (3, 0, -3) \rangle = -3 < 0 \quad (3.122)$$

- Bir pozitif (negatif) timelike ve bir pozitif (negatif) null vektör için

$$\langle (1, 2, 3), (3, 0, 3) \rangle = -6 < 0 \quad (3.123)$$

$$\langle (1, 2, -3), (3, 0, -3) \rangle = -6 < 0 \quad (3.124)$$

örnekleri verilebilir. Burada vektörlerin ikisinin birlikte pozitif (negatif) olma durumu önemlidir. Aksi takdirde teorem koşulu sağlanmamaktadır. Bu duruma pozitif timelike vektör ve negatif null vektör örneği verilirse,

$$\langle (1, 2, 3), (4, 3, -5) \rangle = 25 > 0 \quad (3.125)$$

veya pozitif null ve negatif null vektörleri örnek verilirse

$$\langle (3, 0, 3), (4, 3, -5) \rangle = 27 > 0 \quad (3.126)$$

olup teorem ifadesi ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla vektörlerin ikisinin birlikte pozitif (negatif) olma durumu önemlidir.

Teorem 3.4. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}_1^3$ sıfırdan farklı Lorentz ortogonal vektörler olsun. O halde eğer $\vec{x}$ vektörü timelike ise $\vec{y}$ vektörü spacelike vektördür [3].

İspat. Teorem 3.3 gereğince timelike vektöre null vektör ve timelike vektör dik olamadığından dolayı eğer timelike vektöre dik bir vektör varsa bu kesinlikle spacelike vektördür. ■

Not 3.2. Benzer şekilde iki spacelike vektör ve bir spacelike vektör ile null vektör dikliği incelenirse,

- Bir spacelike ve bir null vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ sırasıyla spacelike ve null vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0 \quad (3.127)$$

olup

$$x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 \quad (3.128)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0 \quad (3.129)$$

olup

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 \quad (3.130)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımından

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0 \quad (3.131)$$

olup

$$x_3 y_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (3.132)$$

yazılabilir. Burada (3.128) eşitsizliği y_3^2 ile çarpılırsa,

$$y_3^2 (x_1^2 + x_2^2) > x_3^2 y_3^2 \quad (3.133)$$

yazılabilir. Burada (3.132) denklem yerine yazılırsa,

$$(y_1^2 + y_2^2)(x_1^2 + x_2^2) > (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \quad (3.134)$$

$$x_1^2y_1^2 + x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_2^2 > x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + 2x_1y_1x_2y_2 \quad (3.135)$$

olup

$$x_2^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 - x_1y_1x_2y_2 - x_1y_1x_2y_2 > 0 \quad (3.136)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_2y_1(x_2y_1 - x_1y_2) + x_1y_2(x_1y_2 - x_2y_1) > 0 \quad (3.137)$$

veya

$$(x_2y_1 - x_1y_2)(x_2y_1 - x_1y_2) = (x_2y_1 - x_1y_2)^2 > 0 \quad (3.138)$$

olup çelişki olmadığı görülür. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_1^3$ uzayında iki bir spacelike vektör ve bir null vektör birbirine dik olabileceği gösterilmiş olur.

- **İki spacelike vektörün birbirine göre durumu:**

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ iki spacelike vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0 \quad (3.139)$$

olup

$$x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 \quad (3.140)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 > 0 \quad (3.141)$$

olup

$$y_1^2 + y_2^2 > y_3^2 \quad (3.142)$$

yazılabilir.

Ayrıca diklik tanımından

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0 \quad (3.143)$$

olup

$$x_3 y_3 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad (3.144)$$

yazılabilir. Burada (3.140) ve (3.142) denklemleri çarpılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 > x_3^2 y_3^2 \quad (3.145)$$

yazılabilir. (3.144) denkleminin karesi alınıp yerine yazılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 > x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 \quad (3.146)$$

olup

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 > x_1 y_1 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2 y_2 \quad (3.147)$$

veya

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - x_1 y_1 x_2 y_2 - x_1 y_1 x_2 y_2 > 0 \quad (3.148)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_1 y_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1) + x_2 y_1 (x_2 y_1 - x_1 y_2) > 0 \quad (3.149)$$

veya

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1)(x_1 y_2 - x_2 y_1) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 > 0 \quad (3.150)$$

çelişki elde edilmedi. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında iki spacelike vektörün birbirine dik olabileceği gösterilmiş oldu. O halde,

- $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında,
 - Timelike vektöre sadece spacelike vektör,
 - Null vektöre sadece spacelike vektör,
 - Spacelike vektöre null vektör, spacelike vektör ve timelike vektör

dik olabilir.

3.2.3 $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski Uzayında Diklik

$\mathbb{R}_2^3$ Minkowski Uzayında vektörlerin birbirine göre durumlarını inceleyelim:

1) İki timelike vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_2^3$ iki timelike vektör olmak üzere,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0 \quad (3.151)$$

olup

$$x_1^2 < x_2^2 + x_3^2 \quad (3.152)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 < 0 \quad (3.153)$$

olup

$$y_1^2 < y_2^2 + y_3^2 \quad (3.154)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımı gereğince $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$

olup

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (3.155)$$

yazılabilir. Burada (3.152) ve (3.154) denklemleri çarpılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 < x_2^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2$$

yazılabilir. (3.155) denkleminin karesi alınıp yerine yazılırsa,

$$x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + 2x_2 y_2 x_3 y_3 < x_2^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 \quad (3.156)$$

olup

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 < x_1 y_1 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2 y_2 \quad (3.157)$$

veya

$$x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - x_1 y_1 x_2 y_2 - x_1 y_1 x_2 y_2 < 0 \quad (3.158)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_2y_3(x_3y_2 - x_2y_3) + x_3y_2(x_2y_3 - x_3y_2) < 0 \quad (3.159)$$

veya

$$(x_3y_2 - x_2y_3)(x_2y_3 - x_2y_1) = -(x_3y_2 - x_2y_3)^2 < 0 \quad (3.160)$$

olup çelişki elde edildi. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_2^3$ uzayında iki timelike vektörün birbirine dik olabileceği gösterilmiş olur.

2) Bir timelike ve bir null vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ sırasıyla timelike ve null vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 < 0 \quad (3.161)$$

olup

$$x_1^2 < x_2^2 + x_3^2 \quad (3.162)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0 \quad (3.163)$$

olup

$$y_1^2 = y_2^2 + y_3^2 \quad (3.164)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımından $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = 0$

olup

$$x_1y_1 = x_2y_2 + x_3y_3 \quad (3.165)$$

yazılabilir. Burada (3.162) eşitsizliği y_1^2 ile çarpılırsa,

$$x_1^2y_1^2 < y_1^2(x_2^2 + x_3^2) \quad (3.166)$$

yazılabilir. Burada (3.164) denklemi yerine yazılırsa,

$$(x_2y_2 + x_3y_3)^2 < (y_2^2 + y_3^2)(x_2^2 + x_3^2) \quad (3.167)$$

$$x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + 2x_2 y_2 x_3 y_3 < x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_3^2 \quad (3.168)$$

olup

$$-x_3^2 y_2^2 - x_2^2 y_3^2 + x_2 y_2 x_3 y_3 + x_2 y_2 x_3 y_3 < 0 \quad (3.169)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_3 y_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + x_2 y_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) < 0 \quad (3.170)$$

veya

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2)(x_3 y_2 - x_2 y_3) = -(x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 < 0 \quad (3.171)$$

olup çelişki edilmedi. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_2^3$ uzayında bir timelike vektör ve bir null vektör birbirine dik olabileceği gösterilmiş olur.

3) Bir spacelike ve bir null vektörün birbirine göre durumu:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}_1^3$ sırasıyla spacelike ve null vektör olsun. O halde,

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0 \quad (3.172)$$

olup

$$x_1^2 > x_2^2 + x_3^2 \quad (3.173)$$

ve

$$\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0 \quad (3.174)$$

olup

$$y_1^2 = y_2^2 + y_3^2 \quad (3.175)$$

yazılabilir. Ayrıca diklik tanımından

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0 \quad (3.176)$$

olup

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad (3.177)$$

yazılabilir. Burada (3.173) eşitsizliği y_1^2 ile çarpılırsa,

$$x_1^2 y_1^2 > y_1^2 (x_2^2 + x_3^2) \quad (3.178)$$

yazılabilir. Burada (3.177) denklem yerine yazılırsa,

$$(x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 > (y_2^2 + y_3^2)(x_2^2 + x_3^2) \quad (3.179)$$

$$x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 + 2x_2 y_2 x_3 y_3 > x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_3^2 \quad (3.180)$$

olup

$$-x_2^2 y_3^2 - x_3^2 y_2^2 + x_2 y_2 x_3 y_3 + x_2 y_2 x_3 y_3 > 0 \quad (3.181)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$x_2 y_3 (x_3 y_2 - x_2 y_3) + x_3 y_2 (x_2 y_3 - x_3 y_2) > 0 \quad (3.182)$$

veya

$$(x_3 y_2 - x_2 y_3)(x_2 y_3 - x_3 y_2) = -(x_3 y_2 - x_2 y_3)^2 > 0 \quad (3.183)$$

olup çelişki olduğu görülür. Dolayısıyla, $\mathbb{R}_2^3$ uzayında iki bir spacelike vektör ve bir null vektör birbirine dik olamayacağı gösterilmiş olur. Benzer şekilde diğer durumlar da incelenebilir.

Not 3.3. O halde $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayında timelike vektöre timelike vektör, null vektör dik olabilirken, null vektöre sadece timelike vektör dik olabilir.

Örnek 3.4. • $\vec{x} = (2, 1, 0)$, $\vec{y} = (3, 0, 3)$ sırasıyla spacelike ve null vektör olmak üzere, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 6 \neq 0$ olup bir spacelike ile bir null vektörün birbirine dik olmadığını elde edilir.

• $\vec{x} = (2, 1, 0)$, $\vec{y} = (3, 2, 1)$ iki spacelike vektör olmak üzere, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 4 \neq 0$ iki spacelike vektörün birbirine dik olmadığını görülür.

• $\vec{x} = (3, 2, 1)$, $\vec{y} = (1, 0, 3)$ sırasıyla spacelike ve timelike vektör olmak üzere, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ olup bir spacelike ile bir timelike vektörün birbirine dik olduğu elde edilir.

3.3 Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu

Bu bölümde $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski uzayında açı kavramları gereken yerlerde kullanıldı. Burada Minkowski uzayında açılar ile ilgili tüm özellikler notasyon birliği ve orjinal kısımlarla birlikte Lorentz Geometrisi kitabında yer almaktadır.

3.3.1 $\mathbb{R}_1^3$ Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu

Teorem 3.5. $x_1 \in \mathbb{R}_1^3$ timelike vektörü ve $x_2, x_3 \in \mathbb{R}_1^3$ spacelike vektörü için ve $v = 1$ olmak üzere $\{x_1, x_2, x_3\}$ lineer bağımsız vektör sistemini alalım.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \end{aligned} \quad (3.184)$$

olmak üzere $\{y_1, y_2, y_3\}$ vektör sistemi ortogonaldır. Ayrıca y_1 vektörü timelike vektör ve y_2, y_3 vektörleri spacelike vektördür, [3].

İspat. $x_1 \in \mathbb{R}_1^3$ vektörü timelike, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}_1^3$ vektörleri spacelike vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= \lambda'_2 y_1 + x_2 \\ y_3 &= \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3 \end{aligned} \quad (3.185)$$

vektörlerini tanımlayalım. Bu durumda y_1 vektörünün timelike vektör olduğu açıktır. O halde $\mathbb{R}_1^3$ uzayında $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ için

$$\langle \lambda'_2 y_1 + x_2, y_1 \rangle = \lambda'_2 \langle y_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle = 0 \quad (3.186)$$

yazılabilir. Burada y_1 timelike vektör olduğundan $\langle y_1, y_1 \rangle < 0$ olup,

$$\lambda'_2 = -\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.187)$$

bulunur. λ'_2 yerine yazılırsa,

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \quad (3.188)$$

elde edilir. Şimdi y_2 vektörünün spacelike vektör olduğunu gösterelim:

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \left\langle x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1, x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \right\rangle \quad (3.189)$$

$$= \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, x_2 \rangle - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle x_2, y_1 \rangle + \left(\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \right)^2 \langle y_1, y_1 \rangle \quad (3.190)$$

olup gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{(\langle x_2, y_1 \rangle)^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.191)$$

elde edilir. Burada x_2 vektörü spacelike ve y_1 vektörü timelike olduğundan

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{(\langle x_2, y_1 \rangle)^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} > 0 \quad (3.192)$$

elde edilir. Böylece y_2 vektörü spacelike vektör olarak elde edilir. Ayrıca $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ ve $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ olmalıdır. $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ için

$$\langle y_3, y_1 \rangle = \langle \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3, y_1 \rangle = 0 \quad (3.193)$$

veya

$$\lambda'_3 \langle y_1, y_1 \rangle + \lambda''_3 \langle y_2, y_1 \rangle + \langle x_3, y_1 \rangle = 0 \quad (3.194)$$

bulunur. Burada y_1 timelike vektör olduğundan $\langle y_1, y_1 \rangle < 0$ ve $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olduğundan,

$$\lambda'_3 = -\frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.195)$$

elde edilir. Ayrıca, $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ için

$$\langle y_3, y_2 \rangle = \langle \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3, y_2 \rangle = 0 \quad (3.196)$$

veya

$$\langle y_3, y_2 \rangle = \lambda'_3 \langle y_1, y_2 \rangle + \lambda''_3 \langle y_2, y_2 \rangle + \lambda''_3 \langle x_3, y_2 \rangle = 0 \quad (3.197)$$

elde edilir. Burada y_2 spacelike vektör olduğundan

$$\langle y_2, y_2 \rangle > 0 \quad (3.198)$$

ve

$$\langle y_2, y_1 \rangle = 0 \quad (3.199)$$

olduğundan,

$$\lambda_3'' = -\frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} \quad (3.200)$$

bulunur. O halde,

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \quad (3.201)$$

elde edilir. Şimdi y_3 vektörünün spacelike olduğunu gösterelim:

$$\langle y_3, y_3 \rangle = \left\langle x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2, x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \right\rangle \quad (3.202)$$

olup gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\langle y_3, y_3 \rangle = \langle x_3, x_3 \rangle - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle^2}{\langle y_2, y_2 \rangle} - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.203)$$

yazılıp x_3 ve y_2 vektörleri spacelike vektör, y_1 vektörü timelike vektör olduğundan,

$\langle y_3, y_3 \rangle > 0$ olup y_3 vektörü spacelike vektör elde edilir. Şimdi gerçekten,

$\langle y_2, y_1 \rangle = 0$, ve $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ olduğunu gösterelim:

1) y_2 spacelike vektörü ve y_1 timelike vektörü için

$$\langle y_2, y_1 \rangle = \left\langle x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1, y_1 \right\rangle = \langle x_2, y_1 \rangle - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, y_1 \rangle = 0 \quad (3.204)$$

elde edilir.

2) y_3 spacelike vektörü ve y_1 timelike vektörü için

$$\begin{aligned}\langle y_3, y_1 \rangle &= \left\langle x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2, y_1 \right\rangle \\ &= \langle x_3, y_1 \rangle - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, y_1 \rangle - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} \langle y_2, y_1 \rangle\end{aligned}\quad (3.205)$$

olup $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,
 $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ elde edilir.

3) y_3 ve y_2 spacelike vektörleri için

$$\begin{aligned}\langle y_3, y_2 \rangle &= \left\langle x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2, y_2 \right\rangle \\ &= \langle x_3, y_2 \rangle - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, y_2 \rangle - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} \langle y_2, y_2 \rangle\end{aligned}$$

olup $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olduğundan gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ elde edilir. Burada $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortogonal vektör sistemindeki her vektör kendi normuna bölünerek,

$$E_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{y_1}{\sqrt{|\langle y_1, y_1 \rangle|}}, \quad E_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{y_2}{\sqrt{|\langle y_2, y_2 \rangle|}}, \quad E_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{y_3}{\sqrt{|\langle y_3, y_3 \rangle|}} \quad (3.206)$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal vektör sistemi elde edilir.

■

3.3.2 $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu

Teorem* 3.1. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_2^3$ timelike vektörleri ve $x_3 \in \mathbb{R}_2^3$ spacelike vektörü için ve $v = 2$ olmak üzere $\{x_1, x_2, x_3\}$ lineer bağımsız vektör sistemi verilsin.

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2\end{aligned}\quad (3.207)$$

olmak üzere $\{y_1, y_2, y_3\}$ vektör sistemi ortogonaldır. Ayrıca y_1, y_2 vektörleri timelike vektör, y_3 vektörü spacelike vektördür.

İspat. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_2^3$ timelike vektörler ve $x_3 \in \mathbb{R}_2^3$ spacelike vektör olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \lambda'_2 y_1 + x_2, \\ y_3 &= \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3 \end{aligned} \quad (3.208)$$

vektörlerini tanımlayalım. Bu durumda y_1 vektörünün timelike vektör olduğu açıktır. O halde $\mathbb{R}_2^3$ uzayında $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ için

$$\langle \lambda'_2 y_1 + x_2, y_1 \rangle = \lambda'_2 \langle y_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_1 \rangle = 0 \quad (3.209)$$

yazılabilir.

Burada y_1 timelike vektör olduğundan $\langle y_1, y_1 \rangle < 0$ olup

$$\lambda'_2 = -\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.210)$$

bulunur. λ'_2 ifadesi (3.208) denkleminde yerine yazılırsa,

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \quad (3.211)$$

elde edilir.

Şimdi y_2 vektörünün timelike vektör olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \langle y_2, y_2 \rangle &= \left\langle x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1, x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 \right\rangle \\ &= \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, x_2 \rangle - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle x_2, y_1 \rangle + \left(\frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \right)^2 \langle y_1, y_1 \rangle \end{aligned} \quad (3.212)$$

olup gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{(\langle x_2, y_1 \rangle)^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.213)$$

elde edilir.

Minkowski uzayındaki açı tanımları gereğince [3],

$$\langle x_2, y_1 \rangle^2 = \|x_2\|^2 \|y_1\|^2 \cosh^2 \theta \quad \text{olup} \quad \cosh^2 \theta \geq 1 \quad \text{için}$$

$$\|x_2\|^2 \|y_1\|^2 \cosh^2 \theta \geq \|x_2\|^2 \|y_1\|^2$$

veya

$$\langle x_2, y_1 \rangle^2 \geq \|x_2\|^2 \|y_1\|^2 = \langle x_2, x_2 \rangle \langle y_1, y_1 \rangle \quad (3.214)$$

ve

$$\frac{\langle x_2, y_1 \rangle^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \geq \langle x_2, x_2 \rangle \quad (3.215)$$

yazılıp

$$\langle y_2, y_2 \rangle = \langle x_2, x_2 \rangle - \frac{(\langle x_2, y_1 \rangle)^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < 0 \quad (3.216)$$

elde edilir. Böylece y_2 vektörü timelike vektör olarak elde edilir.

Ayrıca $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ ve $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ olmalıdır:

$\langle y_3, y_1 \rangle = 0$ için

$$\langle y_3, y_1 \rangle = \langle \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3, y_1 \rangle = 0 \quad (3.217)$$

veya

$$\lambda'_3 \langle y_1, y_1 \rangle + \lambda''_3 \langle y_2, y_1 \rangle + \langle x_3, y_1 \rangle = 0 \quad (3.218)$$

bulunur.

Burada y_1 timelike vektör olduğundan $\langle y_1, y_1 \rangle < 0$ ve $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olup

$$\lambda'_3 = -\frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.219)$$

elde edilir. Ayrıca, $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ için

$$\langle y_3, y_2 \rangle = \langle \lambda'_3 y_1 + \lambda''_3 y_2 + x_3, y_2 \rangle = 0 \quad (3.220)$$

veya

$$\langle y_3, y_2 \rangle = \lambda'_3 \langle y_1, y_2 \rangle + \lambda''_3 \langle y_2, y_2 \rangle + \lambda''_3 \langle x_3, y_2 \rangle = 0 \quad (3.221)$$

elde edilir.

Burada y_2 timelike vektör olduğundan $\langle y_2, y_2 \rangle < 0$ ve $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olup

$$\lambda_3'' = -\frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} \quad (3.222)$$

bulunur. O halde,

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \quad (3.223)$$

elde edilir.

Şimdi y_3 vektörünün spacelike vektör olduğunu gösterelim:

$$\langle y_3, y_3 \rangle = \left\langle x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2, x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 \right\rangle \quad (3.224)$$

olup gerekli cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\langle y_3, y_3 \rangle = \langle x_3, x_3 \rangle - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle^2}{\langle y_2, y_2 \rangle} - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} \quad (3.225)$$

yazılıp x_3 spacelike vektör y_1 ve y_2 vektörleri timelike vektör olduğundan,

$$\langle y_3, y_3 \rangle > 0 \quad (3.226)$$

olup y_3 vektörü spacelike vektör elde edilir.

Şimdi, $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$, $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ ve $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$ olduğunu kontrol edelim:

$$\begin{aligned} \bullet \langle y_3, y_2 \rangle &= \left\langle x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2, y_2 \right\rangle \\ &= \langle x_3, y_2 \rangle - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} \langle y_1, y_2 \rangle - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} \langle y_2, y_2 \rangle \end{aligned} \quad (3.227)$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\langle y_3, y_2 \rangle = 0 \quad (3.228)$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitlikler bulunabilir.

Burada $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortogonal vektör sistemindeki her vektör kendi normuna bölünerek,

$$E_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{y_1}{\sqrt{|\langle y_1, y_1 \rangle|}}, E_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{y_2}{\sqrt{|\langle y_2, y_2 \rangle|}}, E_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{y_3}{\sqrt{|\langle y_3, y_3 \rangle|}} \quad (3.229)$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal vektör sistemi elde edilir. ■

Örnek 3.5. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_2^3$ timelike vektörler ve $x_3 \in \mathbb{R}_2^3$ spacelike vektör olmak üzere, $\{(0, 1, 2), (1, 0, 3), (2, 1, 0)\}$ sistemine Gram-Schmidt metodu uygulayalım:

$x_1 = (0, 1, 2), x_2 = (1, 0, 3), x_3 = (2, 1, 0)$ olup

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \vec{0} \quad (3.230)$$

ve dolayısıyla

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (3.231)$$

olup $\{x_1, x_2, x_3\}$ vektör sistemi lineer bağımsızdır. O halde Gram-Schmidt metodu uygulanabilir. Böylece,

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 = (0, 1, 2) \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 = \left(0, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{5}\right) \\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_2, y_2 \rangle} y_2 = \left(2, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \end{aligned} \quad (3.232)$$

olup $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortogonal vektör sistemi elde edilir. Burada y_1 ve y_3 vektörü timelike vektör iken y_2 spacelike vektör olup timelike vektör sayısının korunduğu ifade edilir. Böylece $\{y_1, y_2, y_3\}$ ortogonal vektör sistemindeki her vektör kendi normuna bölünerek,

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} (0, 1, 2) \\ E_2 &= \sqrt{5} \left(0, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{5}\right) \\ E_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right) \end{aligned} \quad (3.233)$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal vektör sistemi elde edilir.

4.1 Minkowski Düzleminde Eğri Tanımı

Tanım 4.1. Minkowski düzleminde, $I \subseteq \mathbb{R}$ ve $I = (a, b)$ açık alt aralığı için,

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\alpha(I) \subset \mathbb{R}_1^2$ alt kümesi $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde *diferansiyellenebilir eğri* (*parametrik eğri*) olarak adlandırılır, [1].

(I, α) ikilisine *eğrinin koordinat komşuluğu*, I alt kümesine *eğrinin parametre aralığı* ve $t \in I$ reel sayısına *eğrinin parametresi* denir. Eğri $M = \alpha(I) \subset \mathbb{R}_1^2$ veya kısaca (α) ile gösterilir.

Tanım 4.2. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde bir eğri olsun. O halde,

- 1) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle > 0$ oluyorsa, α eğrisi *spacelike eğri*,
- 2) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle < 0$ oluyorsa, α eğrisi *timelike eğri*,
- 3) $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ oluyorsa, α eğrisi *lightlike (null) eğri*

olarak adlandırılır, [1].

Örnek 4.1.

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (r \cosh \theta(t), r \sinh \theta(t))$$

şeklinde tanımlı eğri Minkowski düzleminde bir çember belirtir.

Burada Minkowski çemberi bir timelike eğridir. Burada

$$\alpha'(t) = (r \sinh \theta(t), r \cosh \theta(t)) \quad (4.1)$$

ve

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = r^2 (\sinh^2 \theta(t) - \cosh^2 \theta(t)) = -r^2 < 0 \quad (4.2)$$

olup eğrinin her noktasında $\alpha'(t)$ timelike vektör olup α eğrisi timelike eğridir. Benzer şekilde,

$$\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \rightarrow \beta(t) = (r \sinh \theta(t), r \cosh \theta(t))$$

şeklinde tanımlı eğri Minkowski düzleminde bir çember belirtir. Burada Minkowski çemberi bir spacelike eğridir. Burada

$$\beta'(t) = (r \cosh \theta(t), r \sinh \theta(t)) \quad (4.3)$$

ve

$$\langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle = r^2 (\cosh^2 \theta(t) - \sinh^2 \theta(t)) = r^2 > 0 \quad (4.4)$$

olup eğrinin her noktasında $\beta'(t)$ spacelike vektör olup β eğrisi spacelike eğridir.

Örnek 4.2. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile tanımlanan α eğrisi, I açık aralığında

$$\alpha(s) = (\cosh(s), s^2, \sinh(s)) \quad (4.5)$$

olmak üzere α eğrisi için

$$\alpha'(s) = (\sinh(s), 2s, \cosh(s)) \quad (4.6)$$

olup

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 4s^2 - 1 \quad (4.7)$$

elde edilir.

Böylece bu eğri,

- $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ aralığında spacelike,
- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aralığında timelike
- $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ noktalarında da null

olur.

Not 4.1. Bu son örnek, bulduğumuz eğrinin karakterinin I parametre aralığının alt aralıklarında da değişkenlik gösterdiğini açıklar.

Tanım 4.3. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ bir eğri olsun. Eğer α fonksiyonu 1 – 1 ise eğriye *birebirdir* denir. Birebir eğri kendi kendini kesmeyen eğridir. Birebirlik,

$$\forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2 \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2) \quad (4.8)$$

veya buna denk olarak

$$\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \quad (4.9)$$

olarak tanımlıdır.

Not 4.2. α eğrisi 1 – 1 değilse $t_1 \neq t_2$ iken $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ elde edilir. 1 – 1 olmadığı noktalarda eğri kendini keser.

Tanım 4.4. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde bir eğri ve eğri fonksiyonunun koordinat fonksiyonları α_1, α_2 olmak üzere $(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \subset \mathbb{R}_1^2$ yazılabilir. Buradan elde edilen

$$\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_t = \left(\left. \frac{d\alpha_1}{dt} \right|_t, \left. \frac{d\alpha_2}{dt} \right|_t \right) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \Big|_t \quad (4.10)$$

vektörü α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *hız vektörü* olarak adlandırılır, [1].

Not 4.3. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ bir eğri ve $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ için,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.11) denkleminde α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki *teğet vektörü* denir, [6].

Örnek 4.3.

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (r \cosh \theta(t), r \sinh \theta(t))$$

şeklinde tanımlı eğrinin hız vektörünü bulunuz. α eğrisinin hız vektörü,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt} \right) \Big|_t = (r \sinh \theta(t), r \cosh \theta(t)) \quad (4.12)$$

şeklindedir.

Tanım 4.5. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş M eğrisi olmak üzere,

$$\|\alpha'\| : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \in \|\alpha'(t)\|$$

olarak tanımlı fonksiyona M eğrisi için (I, α) koordinat komşuluğunda *skalar hız fonksiyonu*, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğunda $\alpha(t)$ noktası için *skalar hızı* denir.

Not 4.4. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde eğri ve

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ için,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} = \sqrt{\left| \sum_{i=1}^2 \left(\frac{d\alpha_i}{dt} \right)^2 \right|} \quad (4.13)$$

yazılabilir.

Örnek 4.4.

$$\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (t, t^2)$$

şeklinde tanımlı eğrinin $t = 0, 1, 2$ noktalarındaki skalar hızlarını bulunuz.

$\alpha(t) = (t, t^2)$ olmak üzere,

$$\alpha'(t) = (1, 2t) \quad (4.14)$$

olup

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{|\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle|} = \sqrt{|1 - 4t^2|} \quad (4.15)$$

elde edilir. O halde,

$$t = 0 \text{ için } \|\alpha'(t)\| = \sqrt{|1 - 4t^2|} = 1$$

$$t = 1 \text{ için } \|\alpha'(t)\| = \sqrt{|1 - 4t^2|} = \sqrt{3}$$

$$t = 2 \text{ için } \|\alpha'(t)\| = \sqrt{|1 - 4t^2|} = \sqrt{15}$$

bulunur.

Tanım 4.6. $\alpha(t) : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ bir düzlem eğrisi olsun. Bir M eğrisinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani $\forall s \in I$ için

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \quad (4.16)$$

ise α eğrisi *birim hızlı eğri* ve $s \in I$ parametresi de eğrinin *yay parametresi* olarak adlandırılır, [1].

Tanım 4.7. Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğri *regüler eğri* olarak adlandırılır. Her t için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ ($\|\alpha'(t)\| \neq 0$) oluyorsa α eğrisi *regüler eğridir*.

4.2 Minkowski Düzleminde Eğri için Parametre Değişimi

Tanım* 4.1. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ ve $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ diferansiyellenebilir eğrileri verilsin. $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) > 0$ olacak şekilde,

$$h : (c, d) \rightarrow (a, b) \quad (4.17)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α eğrisinin yön koruyan bir yeniden parametrizasyonu denir. Benzer şekilde, $\beta = \alpha \circ h$ ve $\forall c < u < d$ için $h'(u) < 0$ olacak şekilde,

$$h : (c, d) \rightarrow (a, b) \quad (4.18)$$

diferansiyellenebilir fonksiyonu varsa β eğrisine α eğrisinin yönünü değiştiren bir yeniden parametrizasyonu denir. Bu durumda h fonksiyonu da sırasıyla pozitif ya da negatif parametre değişimi (parametre değişim fonksiyonu) denir.

Teorem 4.1. $M \subset \mathbb{R}_1^2$ null olmayan eğri sırasıyla (I, α) , (J, β) koordinat komşulukları ile verilsin.

$$h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I \quad (4.19)$$

$$s \rightarrow h(s) = t \quad (4.20)$$

olmak üzere parametre değişimi yani M eğrisinin yay parametresi cinsinden ifadesi,

$$\beta'(s) = \alpha'(h(s)) \cdot \frac{d(h(s))}{ds} \quad (4.21)$$

şeklindedir, [6].

İspat. $h = \alpha^{-1} \circ \beta : J \rightarrow I$ parametre değişim fonksiyonu için

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)) \quad (4.22)$$

ve

$$h(s) = t \quad (4.23)$$

yazılarak

$$\beta(s) = \alpha(t) \quad (4.24)$$

elde edilir.

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) \quad (4.25)$$

olmak üzere zincir kuralından,

$$\frac{d\beta}{ds} = \beta'(s) = \frac{d\alpha}{dh} \frac{dh}{ds} = \frac{dh}{ds} \alpha'((h(s))) \quad (4.26)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde M eğrisinin bir $m \in M$ noktasında birden fazla teğet vektörü vardır ve bu vektörler birbirinin katıdırlar.

Tanım 4.8. $\mathbb{R}_1^2$ Minkowski düzleminde (I, α) koordinat komşuluğu M eğrisi verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt, \quad t \in I \quad (4.27)$$

reel sayısına M eğrisinin a noktasından b noktasına *yay uzunluğu* adı verilir. $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki eğri boyunca uzaklığa karşılık gelir.

4.3 Minkowski Düzleminde Eğrilik

Tanım 4.9.

$$D : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$$

$$D(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümün Lorentz anlamında diklik oluşturduğu açıktır. D dönüşümü,

$\vec{x} = (x_1, x_2), \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_1^2$ için

- $\langle D\vec{x}, D\vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle D\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$
- $Dx' = (Dx)'$
- $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_1^2$ vektörü birim vektör olmak üzere,

$$\|\vec{x}\| = \|D\vec{x}\| \quad (4.28)$$

özelliklerini sağlar. Gerçekten,

- $\langle D\vec{x}, D\vec{y} \rangle = \langle (x_2, x_1), (y_2, y_1) \rangle = -\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
- $\langle D\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle (x_2, x_1), (x_1, x_2) \rangle = 0$
- $D(x'_1, x'_2) = (x'_2, x'_1) = (D(x_1, x_2))'$

- $\|\vec{x}\| = \sqrt{|x_1^2 - x_2^2|} = \sqrt{|x_2^2 - x_1^2|} = \|D\vec{x}\|$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 4.10. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ eğrisi verilsin. α non-null eğrisinin $\alpha(t)$ deki eğriliği,

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (4.29)$$

ile tanımlanır.

$$\frac{1}{|\kappa|} \quad (4.30)$$

pozitif fonksiyonuna α eğrisinin **eğrilik yarıçapı** adı verilir.

Ayrıca eğrisinin birim hızlı parametrelendirmesi $\beta(s)$ olacak şekilde β eğrisinin eğriliği,

$$\|\beta''(s)\| = \frac{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|}{\|\alpha'(s)\|^3} = \kappa(s) \quad (4.31)$$

şeklindedir, [14].

Teorem* 4.1. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad (4.32)$$

regüler non-null eğrisi verilsin.

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.33)$$

olup α eğrisinin eğriliği,

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{|(x'(t))^2 - (y'(t))^2|}\right)^3} \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisi için

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.35)$$

olmak üzere,

$$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t)) \quad (4.36)$$

ve

$$D\alpha'(t) = (y'(t), x'(t)) \quad (4.37)$$

olup eğrilik yarıçapı tanımı gereğince,

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{(x'(t))^2 - (y'(t))^2}\right)^3} \quad (4.38)$$

elde edilir. ■

Teorem* 4.2.

$$\begin{aligned} \alpha &: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

non-null bir regüler eğri ve

$$\begin{aligned} \beta &: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}_1^2 \\ s &\rightarrow \beta(s) = \alpha(h(s)) \end{aligned}$$

eğrisi de α eğrisinin bir parametrizasyonu olsun. O halde α eğrisinin bir

$$\begin{aligned} h &: (c, d) \rightarrow (a, b) \\ s &\rightarrow h(s) = t \end{aligned}$$

parametrelendirilişi için $h'(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$\kappa_\beta(s) = (\text{sign} h'(s)) \kappa_\alpha(h(s)) \quad (4.39)$$

şeklinde ifade edilir.

İspat. α non-null eğrisi için

$$\langle \alpha', \alpha' \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.40)$$

olup

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha(h(s)) \quad (4.41)$$

için

$$\beta'(s) = (\alpha' \circ h)(s)h'(s) \quad (4.42)$$

olup

$$D\beta'(s) = D(\alpha' \circ h)(s)h'(s) \quad (4.43)$$

ve

$$\beta''(s) = (\alpha'' \circ h)(s)h'(s)^2 + (\alpha' \circ h)(s)h''(s) \quad (4.44)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\langle (\alpha'' \circ h)(s)h'(s)^2 + (\alpha' \circ h)(s)h''(s), D(\alpha' \circ h)h'(s) \rangle}{\|(\alpha' \circ h)(s)h'(s)\|^3} \quad (4.45)$$

veya

$$\kappa_\beta(s) = \frac{h'(s)^3 \langle (\alpha'' \circ h)(s), D(\alpha' \circ h) \rangle + h''(s)h'(s) \langle (\alpha' \circ h)(s), D(\alpha' \circ h) \rangle}{\|(\alpha' \circ h)(s)h'(s)\|^3} \quad (4.46)$$

olup D dönüşümünün özelliğinden

$$\langle (\alpha' \circ h)(s), D(\alpha' \circ h) \rangle = 0 \quad (4.47)$$

yazılırsa,

$$\kappa_\beta(s) = \left(\frac{h'(s)^3}{|h'(s)|^3} \right) \frac{\langle (\alpha'' \circ h)(s), D(\alpha' \circ h)(s) \rangle}{\|(\alpha' \circ h)(s)\|^3} = \left(\frac{h'(s)^3}{|h'(s)|^3} \right) \frac{\langle \alpha''(h(s)), D\alpha'(h(s)) \rangle}{\|\alpha'(h(s))\|^3} \quad (4.48)$$

veya

$$\kappa_\beta(s) = \left(\frac{h'(s)^3}{|h'(s)|^3} \right) \frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|(\alpha'(t))\|^3} \quad (4.49)$$

olup

$$\kappa_\beta(s) = (\text{sign} h'(s)) \kappa_\alpha(t) \quad (4.50)$$

elde edilir.

■

Teorem* 4.3. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ birim hızlı non-null bir eğri olsun. O halde,

$$\alpha''(s) = \kappa(s) D\alpha'(s) \quad (4.51)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. α non-null eğrisi için

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.52)$$

olup eğri birim hızlı olduğundan,

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \varepsilon \quad (4.53)$$

olup

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad (4.54)$$

bulunur. Ayrıca $\langle D\alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ olduğundan $\alpha''(s)$ ile $D\alpha'(s)$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla,

$$\alpha''(s) = \lambda D\alpha'(s) \quad (4.55)$$

yazılabilir. O halde

$$\|\alpha'(s)\| = 1 \quad (4.56)$$

olmak üzere,

$$\kappa(s) = \frac{\langle \alpha''(s), D\alpha'(s) \rangle}{\|\alpha'(s)\|^3} = \lambda \quad (4.57)$$

olduğundan

$$\alpha''(s) = \kappa(s) D\alpha'(s) \quad (4.58)$$

elde edilir.



Teorem* 4.4. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ regüler non-null bir eğri olsun.

i. α non-null eğrisinin bir doğru parçası olması için gerek ve yeter şart $|\kappa(t)| = 0$ olmasıdır.

ii. α non-null eğrisinin $r > 0$ yarıçaplı bir çemberin parçası olması için gerek ve yeter şart

$$|\kappa(t)| = \frac{1}{r} \quad (4.59)$$

olmasıdır.

İspat. α non-null eğrisi için

$$\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.60)$$

yazılır.

i. $(\Rightarrow)$: α doğru olmak üzere $\alpha(t) = \vec{p}t + q$ yazılabilir.

$\alpha'(t) = \vec{p}$ ve $\alpha''(t) = 0$ olup eğrinin eğrilik denkleminde yerine yazılırsa,

$$|\kappa(t)| = 0$$

elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $|\kappa(t)| = 0$ olsun. Genelliği bozmaksızın α eğrisinin birim hızlı olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\alpha''(t) = \kappa(t) D\alpha'(t) \quad (4.61)$$

olduğundan $a < t < b$ için $\alpha''(t) = 0$ bulunur. Bu diferansiyel denklem çözülürse, $p, q \in \mathbb{R}$ için $\alpha(t) = \vec{p}t + q$ olup α bir doğru parçasıdır.

• $(\Rightarrow)$: α , spacelike eğri olup, r yarıçaplı bir çember olsun. O halde,

$$\alpha(t) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta) \quad (4.62)$$

parametrik ifadesi yazılabilir.

Buradan,

$$\alpha'(t) = (r \sinh \theta, r \cosh \theta) \quad (4.63)$$

olup

$$D\alpha'(t) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta) \quad (4.64)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\alpha''(t) = (r \cosh \theta, r \sinh \theta) \quad (4.65)$$

olup bu ifadeler eğrinin eğrilik denkleminde yerine yazılırsa,

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{r^2}{(\sqrt{-r^2})^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \quad (4.66)$$

elde edilir. Benzer şekilde α timelike eğrisi için eşitlik,

$$\kappa = \frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = -\frac{r^2}{(\sqrt{|r^2|})^3} = -\frac{r^2}{r^3} = -\frac{1}{r} \quad (4.67)$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$|\kappa(t)| = \frac{1}{r} \quad (4.68)$$

elde edilir.

($\Leftarrow$) : Genelliği bozmaksızın α spacelike eğrisinin birim hızlı ve

$$\kappa(t) = \frac{1}{r} \quad (4.69)$$

olduğunu kabul edelim. O halde,

$\gamma : (b, c) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$, $\gamma(t) = \alpha(t) - rD\alpha'(t)$ eğrisini tanımlayalım. Burada,

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \alpha'(t) - rD''(t), \alpha'(t) - rD''(t) \rangle \quad (4.70)$$

$$= \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle - \langle \alpha'(t), rD''(t) \rangle - \langle rD''(t), \alpha'(t) \rangle + \langle rD''(t), rD''(t) \rangle \quad (4.71)$$

olup

$$\alpha''(t) = \kappa(t) D\alpha'(t) \quad (4.72)$$

eşitliği gereğince,

$$\alpha''(t) = \kappa(t) D\alpha'(t) = \frac{1}{r} D\alpha'(t) \quad (4.73)$$

için

$$\langle \alpha'(t), rD''(t) \rangle = \left\langle \alpha'(t), r \frac{1}{r} D'(t) \right\rangle = 0 \quad (4.74)$$

elde edilir. O halde α spacelike eğri olduğundan bu (4.74) denklemi (4.71) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle > 0 \quad (4.75)$$

olup $\gamma(t)$ eğrisi spacelike olarak bulunur. Ayrıca $D^2 = 1$ olduğundan,

$$\gamma'(t) = \alpha'(t) - rD\alpha''(t) = \alpha'(t) - rD\left(\frac{1}{r}D\alpha'(t)\right) = \alpha'(t) + (-\alpha'(t)) = 0 \quad (4.76)$$

elde edilir. Bundan dolayı, $a < t < b$ için $\gamma(t) = q$ olacak şekilde q vektörü vardır. Buradan,

$$\|\alpha(t) - q\| = \|rD(\alpha'(t))\| = r \quad (4.77)$$

elde edilir. O zaman α spacelike eğrisi q merkezli r yarıçaplı bir çember üzerinde bulunur. Benzer ispat α timelike eğri olmak üzere

$$\kappa(s) = -\frac{1}{r} \quad (4.78)$$

içinde yapılabilir.

■

4.4 Minkowski Düzleminde Açık Fonksiyonları

Teorem* 4.5. $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f^2 - g^2 = 1 \quad (4.79)$$

olacak şekilde iki fonksiyon olsun. $a < t_0 < b$ olacak şekilde t_0 belirleyelim.

$$f(t_0) = \cosh \theta_0, g(t_0) = \sinh \theta_0 \quad (4.80)$$

olacak şekilde θ_0 verilsin.

O halde $a < t < b$ için

$$\theta(t_0) = \theta_0, f(t) = \cosh \theta(t), g(t) = \sinh \theta(t) \quad (4.81)$$

olmak üzere bir tek $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat. $h = f + jg$ olsun. Böylece $h\bar{h} = 1$ için

$$\theta(t) = \theta_0 + j \int h'(t) \bar{h}(t) dt \quad (4.82)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\frac{d}{dt} (he^{-j\theta}) = h'e^{-j\theta} + h(-j)e^{-j\theta} \theta' = (h' - jh\theta')e^{-j\theta} \quad (4.83)$$

veya

$$(h' - jh(jh\bar{h}'))e^{-j\theta} = (h' - j^2h'h\bar{h})e^{-j\theta} = 0 \quad (4.84)$$

olduğundan

$$he^{-j\theta} = c = sbt \quad (4.85)$$

elde edilir. Ayrıca

$$h(t_0) = e^{j\theta_0} \quad (4.86)$$

için

$$c = h(t_0)e^{-j\theta(t_0)} = 1 \quad (4.87)$$

bulunur. Bundan dolayı,

$$h(t) = e^{j\theta(t)} = \cosh \theta + j \sinh \theta \quad (4.88)$$

olup $\theta(t_0) = \theta_0$ ve

$$f(t) = \cosh \theta(t) \quad (4.89)$$

$$g(t) = \sinh \theta(t) \quad (4.90)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim.

$a < t < b$ için

$$\hat{\theta}(t_0) = \theta_0 \quad (4.91)$$

$$f(t) = \cosh \hat{\theta}(t) \quad (4.92)$$

$$g(t) = \sinh \hat{\theta}(t) \quad (4.93)$$

olacak şekilde bir diğer $\hat{\theta}$ sürekli fonksiyonunun olduğunu kabul edelim. O halde,

$$e^{j\theta(t)} = \cosh \theta + j \sinh \theta \quad (4.94)$$

ve

$$e^{j\hat{\theta}(t)} = \cosh \hat{\theta} + j \sinh \hat{\theta} \quad (4.95)$$

olduğundan,

$$e^{j\theta(t)} = e^{j\hat{\theta}(t)} \quad (4.96)$$

için

$$\cosh \theta + j \sinh \theta = \cosh \hat{\theta} + j \sinh \hat{\theta} \quad (4.97)$$

olup

$$\cosh \theta = \cosh \hat{\theta} \quad (4.98)$$

ve

$$\sinh \theta = \sinh \hat{\theta} \quad (4.99)$$

bulunur. Burada

$$\cosh \theta = \frac{e^{\theta(t)} + e^{-\theta(t)}}{2} \quad (4.100)$$

ve

$$\sinh \theta = \frac{e^{\theta(t)} - e^{-\theta(t)}}{2} \quad (4.101)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) \quad (4.102)$$

olup bir tek θ sürekli fonksiyonu olduğu elde edilir.

■

Teorem* 4.6. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ ve $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ iki regüler eğri ve $a < t_0 < b$ olsun.

$$\frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|} = \cosh \theta_0 \quad (4.103)$$

ve

$$\frac{\langle \alpha'(t_0), D\beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|} = \sinh \theta_0 \quad (4.104)$$

olacak şekilde θ_0 seçelim. O halde $a < t < b$ için

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad (4.105)$$

olduğundan,

$$\frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} = \cosh \theta(t) \quad (4.106)$$

ve

$$\frac{\langle \alpha'(t), D\beta'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} = \sinh \theta(t) \quad (4.107)$$

olmak üzere bir tek $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu var olup burada θ fonksiyonuna θ_0 yardımıyla tanımlanan β eğrisinden α eğrisine tanımlanan aç fonksiyonu denir.

İspat.

$$f(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \beta'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \quad (4.108)$$

$$g(t) = \frac{\langle \alpha'(t), D\beta'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\| \|\beta'(t)\|} \quad (4.109)$$

alalım. O halde Teorem 4.5 gereğince bir tek θ fonksiyonu vardır.

■

Teorem* 4.7. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ regüler spacelike bir eğri olsun. $a < t_0 < b$ olacak şekilde t_0 değerini ve

$$\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} = (\cosh \theta_0, \sinh \theta_0) \quad (4.110)$$

olacak şekilde bir θ_0 sayısını belirleyelim.

O halde,

$$\theta_0(t_0) = \theta_0 \quad (4.111)$$

ve

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (\cosh \theta(t), \sinh \theta(t)) \quad (4.112)$$

olacak şekilde $\theta : \theta[\alpha] : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bir tek diferansiyellenebilir fonksiyon vardır. Burada $\theta : \theta[\alpha]$ açısına θ_0 ile tanımlanmış dönme açısı denir.

İspat. Burada $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ spacelike eğrisi

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \quad (4.113)$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \quad (4.114)$$

olup Teorem 4.6 gereğince

$$\theta_0(t_0) = \theta_0 \quad (4.115)$$

ise

$$f(t) = \frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} = \cosh \theta(t) \quad (4.116)$$

ve

$$g(t) = \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} = \sinh \theta(t) \quad (4.117)$$

olacak şekilde bir tek $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Böylece,

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'_1(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} \right) = (\cosh \theta(t), \sinh \theta(t)) \quad (4.118)$$

eşitliği elde edilir. Geometrik olarak $\theta : \theta[\alpha]$ açısı yatay eksen ile $\alpha'(t)$ arasındaki açıdır. ■

Teorem* 4.8. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ regüler timelike bir eğri olsun. $a < t_0 < b$ olacak şekilde t_0 belirleyelim. θ_0 ise

$$\frac{\alpha'(t_0)}{\|\alpha'(t_0)\|} = (\sinh \theta_0, \cosh \theta_0) \quad (4.119)$$

olacak şekilde bir sayı olsun. O halde

$$\theta_0(t_0) = \theta_0 \quad (4.120)$$

ve

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (\sinh \theta(t), \cosh \theta(t)) \quad (4.121)$$

olacak şekilde $\theta : \theta[\alpha] : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde bir tek diferansiyellenebilir fonksiyon vardır. Burada $\theta : \theta[\alpha]$ açısına θ_0 ile tanımlanmış dönme açısı denir.

İspat. Ayrıca $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ timelike eğrisi

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \quad (4.122)$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \quad (4.123)$$

olup Teorem 4.6 gereğince $\theta_0(t_0) = \theta_0$ ise

$$f(t) = \frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} = \sinh \theta(t) \quad (4.124)$$

ve

$$g(t) = \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} = \cosh \theta(t) \quad (4.125)$$

olacak şekilde bir tek $\theta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Böylece,

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\alpha'_1(t)}{\|\alpha'_1(t)\|}, \frac{\alpha'_2(t)}{\|\alpha'_2(t)\|} \right) = (\sinh \theta(t), \cosh \theta(t)) \quad (4.126)$$

eşitliği elde edilir. Geometrik olarak $\theta : \theta[\alpha]$ açısı yatay eksen ile $\alpha'(t)$ arasındaki açıdır.

■

Teorem* 4.9. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ regüler non-null eğrinin eğriliği ile dönme açısı arasında,

$$\theta'(t) = \|\alpha'(t)\| \kappa_\alpha(t) \quad (4.127)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat. α non-null eğrisi için

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.128)$$

olsun. Teorem 4.8 gereğince,

$$\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (\cosh \theta(t), \sinh \theta(t)) \quad (4.129)$$

eşitliğinin her iki tarafının türevi alınır,

$$\frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} + \alpha'(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right) = \theta'(t) (\sinh \theta(t), \cosh \theta(t)) = \theta'(t) \frac{D\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (4.130)$$

olup eşitliğin her iki tarafı $D\alpha'(t)$ ile iç çarpılırsa,

$$\frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} + \left\langle \alpha'(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right), D\alpha'(t) \right\rangle = \theta'(t) \frac{\langle D\alpha'(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} \quad (4.131)$$

olup

$$\langle \alpha'(t), D\alpha'(t) \rangle = 0 \quad (4.132)$$

ve

$$\langle D\alpha'(t), D\alpha'(t) \rangle = -\varepsilon \quad (4.133)$$

olduğundan,

$$\frac{\langle \alpha''(t), D\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|} = -\varepsilon \frac{\theta'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \quad (4.134)$$

yazılabilir. Buradan α non-null eğrisi için,

$$\theta'(t) = -\varepsilon \|\alpha'(t)\| \kappa_\alpha(t) \quad (4.135)$$

elde edilir.

Non-null eğri birim eğri olduğunda,

$$\theta'(t) = -\varepsilon \kappa_\alpha(t) \quad (4.136)$$

şeklinde yazılır.

■

Teorem 4.2. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ timelike eğri olsun. $\vec{v} \in \mathbb{R}_1^2$ birim timelike vektörü $T(s)$ timelike vektörü ile aynı time konide olsun. α eğrisi ile $\vec{v}$ vektörünün tanjant vektörü arasındaki açı φ olmak üzere,

$$\kappa(s) = \pm \varphi'(s) \quad (4.137)$$

eşitliği yazılabilir, [9].

İspat. İki timelike vektör arasındaki açı tanımı gereğince,

$$-\cosh \varphi(s) = \langle T(s), \vec{v} \rangle \quad (4.138)$$

olup ifadenin s parametresine göre türevi alınır,

$$-\varphi'(s) \sinh \varphi(s) = \langle T'(s), \vec{v} \rangle + \langle T(s), \vec{v} \rangle \quad (4.139)$$

olup

$$-\varphi'(s) \sinh \varphi(s) = \kappa(s) \langle N(s), \vec{v} \rangle \quad (4.140)$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\vec{v} = aT(s) + bN(s) \quad (4.141)$$

olmak üzere,

$$\langle \vec{v}, T(s) \rangle = a \langle T(s), T(s) \rangle + b \langle N(s), T(s) \rangle = -a \quad (4.142)$$

ve

$$\langle \vec{v}, N(s) \rangle = a \langle T(s), N(s) \rangle + b \langle N(s), N(s) \rangle = b \quad (4.143)$$

olup

$$\vec{v} = -\langle \vec{v}, T(s) \rangle T(s) + \langle \vec{v}, N(s) \rangle N(s) \quad (4.144)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$-1 = -\langle \vec{v}, T(s) \rangle^2 + \langle \vec{v}, N(s) \rangle^2 \quad (4.145)$$

olup

$$-\cosh \varphi(s) = \langle T(s), \vec{v} \rangle \quad (4.146)$$

eşitliği kullanılırsa,

$$-1 = -\cosh^2 \varphi(s) + \langle \vec{v}, N(s) \rangle^2 \quad (4.147)$$

yazılabilir. O halde,

$$\langle \vec{v}, N(s) \rangle = \pm \sinh \varphi(s) \quad (4.148)$$

olup bu eşitlik (4.140) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\varphi'(s) = \pm \kappa(s) \quad (4.149)$$

eşitliği elde edilir. ■

4.5 Düzlemsel Eğriler için Frenet Formülleri

Tanım 4.11. $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ birim hızlı non- null bir eğri olsun.

$$T(s) = \alpha'(s) \quad (4.150)$$

α non- null eğrisinin birim teğet vektörü olmak üzere,

$$D\alpha'(s) = N(s) \quad (4.151)$$

birim normal vektör alanını tanımlayalım. Burada spacelike ve timelike vektör olma durumlarını

$$\langle T(s), T(s) \rangle = \varepsilon \in \{1, -1\} \quad (4.152)$$

şeklinde ifade edelim.

Böylece

$$\langle N(s), N(s) \rangle = -\varepsilon \quad (4.153)$$

olup

$$\alpha''(s) = \pm \kappa(s) D\alpha'(s) \quad (4.154)$$

olduğundan,

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \quad (4.155)$$

elde edilir ve $\{T(s), N(s)\}$ sistemi ortonormal bir sistemdir. $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$N'(s) = aT(s) + bN(s) \quad (4.156)$$

olmak üzere,

$$\langle T(s), N(s) \rangle = 0 \quad (4.157)$$

ise

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0 \quad (4.158)$$

olup

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \quad (4.159)$$

ve

$$N'(s) = aT(s) + bN(s) \quad (4.160)$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\langle \kappa(s) N(s), N(s) \rangle + \langle T(s), aT(s) + bN(s) \rangle = \kappa(s) \langle N(s), N(s) \rangle \quad (4.161)$$

$$+ a \langle T(s), T(s) \rangle + b \langle T(s), N(s) \rangle = 0 \quad (4.162)$$

yazılır. Burada $T(s)$ spacelike vektör ve $N(s)$ timelike vektör olduğundan,

$$\langle N(s), N(s) \rangle = -\varepsilon, \quad \langle T(s), T(s) \rangle = \varepsilon \quad (4.163)$$

ve

$$\langle T, N \rangle = 0 \quad (4.164)$$

olup

$$\kappa(s) = a \quad (4.165)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\langle N(s), N(s) \rangle = -\varepsilon \quad (4.166)$$

eşitliğinden,

$$\langle N(s), N'(s) \rangle = 0 \quad (4.167)$$

olup

$$N'(s) = aT(s) + bN(s) \quad (4.168)$$

denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle N(s), aT(s) + bN(s) \rangle = a \langle N(s), T(s) \rangle - b \langle N(s), N(s) \rangle \quad (4.169)$$

yazılır. Böylece $b = 0$ elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s) N(s) \\ N'(s) &= \kappa(s) T(s) \end{aligned} \quad (4.170)$$

Frenet denklemleri elde edilir. Buradan bu denklemler,

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

matris formunda da yazılabilir, [9] .

Örnek 4.5.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = -r^2\} \quad (4.172)$$

kümesini iki ayrı durum için inceleyelim. O halde

$$A^+ = \{(x, y) \in A : y > 0\} \quad (4.173)$$

ve

$$A^- = \{(x, y) \in A : y < 0\} \quad (4.174)$$

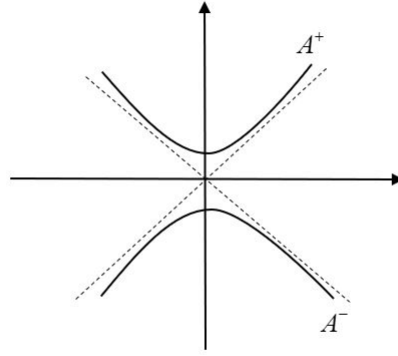
olacak şekilde spacelike eğri olarak parametrelendirilsin.

A^+ için

$$\alpha(s) = \left(r \sinh\left(\frac{s}{r}\right), r \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.175)$$

olup,

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{1}{r} r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.176)$$



Şekil 4.1 Spacelike Eğri

elde edilir.

$$\langle T, N \rangle = 0 \quad (4.177)$$

olduğundan,

$$N(s) = \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.178)$$

yazılabilir. Buradan,

$$T'(s) = \left(\frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \frac{1}{r} \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.179)$$

olup

$$T'(s) = \frac{1}{r} N(s) \quad (4.180)$$

elde edilir. $T' = \kappa N$ Frenet denklemi gereğince,

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \quad (4.181)$$

şeklinde ifade edilir. A^- için

$$\beta(s) = \left(r \sinh\left(\frac{s}{r}\right), -r \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.182)$$

olup,

$$T(s) = \beta'(s) = \left(\frac{1}{r} r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.183)$$

elde edilir.

$$\langle T, N \rangle = 0 \quad (4.184)$$

olduğundan,

$$N(s) = \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.185)$$

yazılabilir. Buradan,

$$T'(s) = \left(\frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = -\frac{1}{r} \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.186)$$

olup

$$T'(s) = -\frac{1}{r} N(s) \quad (4.187)$$

elde edilir. $T' = \kappa N$ Frenet denklemi gereğince,

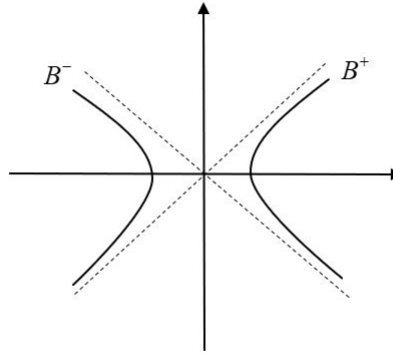
$$\kappa(s) = -\frac{1}{r} \quad (4.188)$$

şeklinde ifade edilir, [9] .

Örnek 4.6.

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = r^2\} \quad (4.189)$$

kümesini iki ayrı durum için inceleyelim. O halde,



Şekil 4.2 Timelike Eğri

$$B^+ = \{(x, y) \in B : x > 0\} \quad (4.190)$$

ve

$$B^- = \{(x, y) \in B : x < 0\} \quad (4.191)$$

olacak şekilde parametrelendirilsin. B^+ için

$$\alpha(s) = \left(r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.192)$$

olup

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(\frac{1}{r} r \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} r \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.193)$$

elde edilir.

$$\langle T, N \rangle = 0 \quad (4.194)$$

olduğundan,

$$N(s) = \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.195)$$

yazılabilir. Buradan,

$$T'(s) = \left(\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \frac{1}{r} \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.196)$$

olup

$$T'(s) = \frac{1}{r} N(s) \quad (4.197)$$

elde edilir. $T' = \kappa N$ Frenet denklemi gereğince,

$$\kappa(s) = \frac{1}{r} \quad (4.198)$$

şeklinde ifade edilir. B^- için

$$\beta(s) = \left(-r \cosh\left(\frac{s}{r}\right), r \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.199)$$

olup

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\frac{1}{r} r \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} r \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = \left(-\sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.200)$$

elde edilir.

$$\langle T, N \rangle = 0 \quad (4.201)$$

olduğundan,

$$N(s) = \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.202)$$

yazılabilir. Buradan,

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r} \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \frac{1}{r} \sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) = -\frac{1}{r} \left(\cosh\left(\frac{s}{r}\right), -\sinh\left(\frac{s}{r}\right) \right) \quad (4.203)$$

olup

$$T'(s) = -\frac{1}{r} N(s) \quad (4.204)$$

elde edilir. $T' = \kappa N$ Frenet denklemi gereğince,

$$\kappa(s) = -\frac{1}{r} \quad (4.205)$$

şeklinde ifade edilir, [9] .

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezin orijinal kısmının başlangıcı olan 3. bölümde $\mathbb{R}_2^3$ Minkowski uzayında birbirine dik olabilecek vektör durumları ve bu kapsamda Gram-Schmidt metodu incelenerek literatüre kazandırılmıştır.

Tezin 4. bölümünde Minkowski düzleminde eğriler ile ilgili özel durumlar verilmiştir. Bu bölümde eğriler için aç fonksiyonları tanımlanmış ve parametre değişimine bağlı olarak oluşan sonuçlar literatüre kazandırılmıştır.

Bunlara ek, tez dışı bir çalışma olarak, Lorentz uzayında lineer cebir, diferansiyel geometri, trigonometri, vektörel çarpım, eğriler teorisi, yüzeyler teorisi, manifoldlar ve kinematik gibi tüm konular ile ilgili bütün tez ve makaleler incelenerek, tek bir dilde ve notasyon birliğiyle her alandaki orijinal kısımlarıyla birlikte kapsamlı geometrik çalışmalar bir kitap formatında oluşturulup literatüre kazandırılacaktır.

- [1] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- [2] G. S. Birman K. Nomizu, "Trigonometry in lorentzian geometry," *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, no. 9, pp. 543–549, 1984.
- [3] J. G. Ratcliffe, S. Axler, K. Ribet, *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer, 2006, vol. 149.
- [4] T. Weinstein, "An introduction to lorentz surfaces walter de gruyter," *Berlin-New York*, 1996.
- [5] E. Nešović, "Hyperbolic angle function in the lorentzian plane," *Kragujevac Journal of Mathematics*, vol. 28, no. 28, pp. 139–144, 2005.
- [6] E. Nešović M. Petrović-Torgašev, "Some trigonometric relations in the lorentzian plane," *Kragujevac Journal of Mathematics*, vol. 33, no. 25, pp. 219–225, 2003.
- [7] E. Nešović, M. Petrović-Torgašev, L. Verstraelen, "Curves in lorentzian spaces," *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, vol. 8, no. 3, pp. 685–696, 2005.
- [8] G. S. Birman, K. Nomizu, *et al.*, "The gauss-bonnet theorem for 2-dimensional spacetimes," *The Michigan mathematical journal*, vol. 31, no. 1, pp. 77–81, 1984.
- [9] R. Lopez, "Differential geometry of curves and surfaces in lorentz-minkowski space," *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 7, no. 1, pp. 44–107, 2014.
- [10] R. Palais C. Terng, "Critical-point theory and submanifold geometry," *LECTURE NOTES IN MATHEMATICS*, vol. 1353, pp. 1–+, 1988.
- [11] K. L. Duggal A. Bejancu, *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 364.
- [12] A. L. Besse, *Einstein manifolds*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] H. Müller, E. Egesoy, M. Oruç, *Kinematik dersleri*. Ankara Üniversitesi, 1963.
- [14] G. S. Birman, "On l_2 and l_3 ," *Elemente der Mathematik*, vol. 43, no. 2, pp. 46–49, 1988.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri: sevilay.coruh9@gmail.com

Konferans Bildirisi

1. "Minkowski Uzayında Gram-Schmidt Metodu." 32.Ulusal Matematik Sempozyumu, Samsun, Turkey, pp.89, 2019

Proje

1. YTÜ-BAP (Yıldız Teknik Üniversitesi, Bilimsel Araştırma Projeleri),3323, Lorentz Uzayında ve Lorentz Düzleminde Temel Kavramlar,Yüksek Lisans, Öğrenci.