

T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FARKLI TÜRDE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE
EŞİTSİZLİKLER

Ebru YÜKSEL
DOKTORA TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Erhan DENİZ
II. DANIŞMAN
Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

KASIM-2020
KARS



**T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BAZI FARKLI TÜRDE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE
EŞİTSİZLİKLER**

**Ebru YÜKSEL
DOKTORA TEZİ**

DANIŞMAN

Prof. Dr. Erhan DENİZ

II. DANIŞMAN

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

KASIM-2020

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora öğrencisi Ebru YÜKSEL'in Prof. Dr. Erhan DENİZ danışmanlığında Doktora tezi olarak hazırladığı “Bazı Farklı Türden Kesirli İntegral Operatörler Üzerine Eşitsizlikler” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ile kabul edilmiştir.

.. / .. / 2020

	Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	:	
Üye	:	
Üye	:	
Üye	:	
Üye	:	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun .. / .. / 20.. gün ve ...
.../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fikret AKDENİZ
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ebru YÜKSEL

05/11/2020

ÖZET

(Doktora Tezi)

BAZI FARKLI TÜRDE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER ÜZERİNE EŞİTSİZLİKLER

Ebru YÜKSEL

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

II. Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Kesirli analiz son yıllarda yeni integral ve türev operatörlerinin tanımlanması ile hızlı bir gelişim gösteren bir alan olmakla birlikte, gerçek hayat problemlerini daha iyi tanımlama ve modelleme anlamında da büyük bir açığı kapatmıştır. Tanımlanan yeni kesirli türev ve integral operatörleri tekillik, lokal olup olmama ve konvolüsyona sahip olma gibi bazı özellikleri yönünden sürekli irdelenmeye devam ederken, bu alanda çalışan araştırmacıların bir diğer odaklandıkları konu bu operatörler modelleme, uygulamalı matematik ve matematiksel biyoloji gibi alanlarda uygulamaya sahip daha genel operatörler tanımlamaktır. Son yıllarda bu konu, eşitsizlikler teorisiyle birlikte ele alınmaya başlanmış, klasik tamsayı mertebeden integral eşitsizlikler kesirli integral operatörler yardımıyla genelleştirilmiştir. Hazırladığımız bu tezde bazı konveks fonksiyon türleri için uyumlu kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard ve Pòlya-Szegö-Chebyshev tipli, ω -Riemann-Liouville ve Caputo-Fabrizio kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard tipli, genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integraller, yeni uyumlu kesirli integraller ve ψ -Caputo kesirli türev yardımıyla da Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli integral, ω -Riemann-Liouville kesirli integral, Caputo-Fabrizio kesirli integral, genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Pòlya-Szegö-Chebyshev eşitsizliği, Ostrowski eşitsizliği

2020, 159 Sayfa

ABSTRAT

(Ph. D. Thesis)

INEQUALITIES ON SOME DIFFERENT TYPES OF FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

Ebru YÜKSEL

Kafkas University

Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

II. Supervisor: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Fractional analysis has been a field of rapid development with the definition of new integral and derivative operators in recent years, but has also closed a huge gap in terms of better identification and modeling of real life problems. While the new fractional derivative and integral operators continue to be examined in terms of singularity, local availability and convolution, another focus of researchers working in this field is to define more general operators that have applications in areas such as modeling, applied mathematics and mathematical biology. In recent years, this issue has begun to be handled with the theory of inequalities, and classical integer order integral inequalities have been generalized with fractional integral operators. In this thesis, Hermite-Hadamard and Pòlya-Szegö-Chebyshev type inequalities were obtained with the help of conformable fractional integrals, Hermite-Hadamard type inequalities were obtained with the help of Riemann-Liouville and Caputo-Fabrizio fractional integrals, Ostrowski type inequalities were obtained with the help of generalized proportional fractional (GPF), new conformable fractional integrals and ψ -Caputo fractional derivatives for some convex function types.

Keywords: Conformable fractional integral, ω -Riemann-Liouville fractional integral, Caputo-Fabrizio fractional integral, generalized proportional fractional (GPF) integral, Hermite-Hadamard inequality, Pòlya-Szegö-Chebyshev inequality, Ostrowski inequality

2020, 159 page

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca rehberliğini esirgemeyen, bilgi birikiminden ve tecrübelerinden faydalandığım, yetişmemde büyük emeği geçen değerli hocam, aynı zamanda tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ’e,

Tezin hazırlanması sürecinde her anında beni destekleyen, çalışmamıza yön ve biçim veren, karşılaştığım her güçlükte derin bilgisiyle, samimiyetiyle bana yardımcı olan kıymetli hocam, ikinci tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR’e,

Ayrıca varlıklarıyla, ilgileriyle huzur ve güç bulduğum aileme, bana her zaman destek veren, hep yanımda olduğunu hissettiğim sevgili eşim Dr. Öğr. Üyesi İnan YÜKSEL’e, sabrından dolayı kızım Semina Ada’ya,

Teşekkürlerimi, sevgilerimi ve saygılarımı sunarım.

İmza

Ebru YÜKSEL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	IV
ABSTRAT.....	V
ÖNSÖZ.....	VI
İÇİNDEKİLER	VII
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	8
2.1. Genel Kavramlar	8
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar	14
2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	18
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	25
3.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler.....	25
3.2. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	34
3.3. ω -Riemann Liouville Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	42
3.4. Genelleştirilmiş Oransal Kesirli (GPF) İntegral Operatörler	46
3.5. Caputo Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	49
3.6. ψ -Caputo Kesirli Türev Operatörler.....	52
3.7. Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	53
4. BULGULAR.....	55
4.1. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	55
4.1.1. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	55
4.1.2. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Pòlya-Szegö-Chebyshev Tipli Eşitsizlikler	80
4.2. ω -Riemann Liouville Kesirli İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	90

4.3. Genelleştirilmiş Oransal Kesirli (GPF) İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler.....	111
4.4. Caputo-Fabrizio İntegral Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler.....	126
4.5. ψ - Caputo Kesirli Türev Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler	133
4.6. Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler	142
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	151
6. KAYNAKLAR.....	152
ÖZGEÇMİŞ.....	157



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinin alt aralığı
$\overset{o}{I}$	: I 'nın içi
$B(\alpha, \beta)$	: Beta fonksiyon
$B_t(\alpha, \beta)$	: Tamamlanmamış Beta fonksiyon
$\Gamma(\alpha)$	: Gama fonksiyon
$\gamma(\alpha, \beta)$	: Tamamlanmamış Gama fonksiyon
$\mathcal{L}(a, b)$	: Logaritmik Ortalama
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$f^{(n)}$	: f fonksiyonunun n. mertebeden türevi
$D_\alpha(f)$	: f fonksiyonunun α . mertebeden kesirli türevi
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$L_\alpha[a, b]$	: α . mertebeden $[a, b]$ aralığında kesirli integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$J_{a+}^\alpha f(x)$	: α . mertebeden sol Riemann-Liouville kesirli integral
$J_{b-}^\alpha f(x)$	: α . mertebeden sağ Riemann-Liouville kesirli integral
$I_a^\alpha f(x)$	: α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral
${}^bI_\alpha f(x)$	: α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral
$I_{a+}^{\alpha; \omega} f(x)$	: α . mertebeden sol ω -Riemann Liouville kesirli integral
$I_{b-}^{\alpha; \omega} f(x)$	: α . mertebeden sağ ω -Riemann Liouville kesirli integral
${}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f$	: α . mertebeden sol genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral
${}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f$	: α . mertebeden sağ genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral

${}^{CF}_a I^\alpha f$: α . mertebeden sol Caputo Fabrizio kesirli integral

${}^{CF}_b I^\alpha f$: α . mertebeden sağ Caputo Fabrizio kesirli integral

${}^C D^{\alpha,\psi}_{a^+}$: α . mertebeden sol ψ -Caputo kesirli türev

${}^C D^{\alpha,\psi}_{b^-}$: α . mertebeden sağ ψ -Caputo kesirli türev

${}^\beta_a I^\alpha f(x)$: β . mertebeden sol yeni uyumlu kesirli integral

${}^\beta_b I^\alpha f(x)$: β . mertebeden sağ yeni uyumlu kesirli integral



1. GİRİŞ

İki değer arasındaki farkı veya eşit olmama durumunu ifade eden eşitsizlik kavramı Antik Yunan Dönemi'ne kadar dayanır. Herhangi bir notasyona sahip olmayan kavram, Archimedes'in π sayısının yaklaşık hesabında " $223/71 < \pi < 22/7$ " şekilde ilk kez kullanılmış, o döneme kadar 'yetersiz kalmak' veya 'aşmak' kelimeleriyle ifade edilmiştir. Eşitsizlik kavramı 18. yüzyıla kadar çok az gelişme göstermiş, üçgen eşitsizliği, aritmetik-geometrik eşitsizlik ve izometrik eşitsizlik gibi sadece birkaç eşitsizlik elde edilmiştir. Fakat bu yüzyıldan itibaren çalışmalar hız kazanmış Chebyshev, Grüss, Hölder, Minkowski, Hadamard, Cauchy-Schwarz, Stolz, Hilbert, Gronwall, Young, Opial, Jensen, Simpson, Ostrowski gibi birçok eşitsizlik literatürde yerini almıştır. Hölder, Minkowski, aritmetik ortalama ve geometrik ortalama eşitsizliği baskın roller oynamış ve kendilerine yaygın kullanım alanları bulmuştur.

Eşitsizlikler teorisi matematiğin çeşitli dallarının yanı sıra iktisat, fizik, mühendislik ve diğer alanlarda giderek artan uygulamalarıyla hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiş, bu büyüme teorisinin bağımsız bir matematiksel analiz alanı olarak ortaya çıkmasına vesile olmuştur. Eşitsizliklerle ilgili ilk kitap 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pòlya'nın "Inequalities" adlı ortak çalışmalarıdır [31]. Eser, 1961'de yazılan Beckenbach ve Bellman'ın "Inequalities" ve Mitrinović'in 1970 yılında yayınlanan "Inequalities" adlı çalışmalarıyla desteklenmiştir [13, 40]. Bu tarihten itibaren eşitsizliklerin genelleştirilmeleri, geliştirmeleri ve yeni uygulamaları matematiğin çeşitli dallarındaki araştırmacılar tarafından verilmiştir.

Eşitsizlikler teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramının kökleri de M.Ö. 2000 yıllarına kadar uzanmakta ve Eski Yunan, Mısır ve Babil dönemlerinde kavramın izlerine rastlanmaktadır. Konveksliğin ilk titiz çalışmaları küre ve silindir üzerinde yaptığı incelemelerle Archimedes tarafından verilmiş, ayrıca konveks küme tanımının temelleri de onunla atılmıştır. Fakat bunun gibi çoğu varsayımlar Cauchy'ye kadar (1789-1857) ispatsız kalmıştır. Tek başına çalışılmayı hak eden bir konu olarak tanınması 1905 ve

1906’da yaptığı iki makaleyle Jensen’e atfedilmiştir. Stolz 1893 yılında (a,b) aralığında sürekli bir f fonksiyonunun

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(a) + f(b)]$$

eşitsizliğini sağladığını ispatlamış ve Jensen bu eşitsizliği kullanarak konveks fonksiyonları tanımlamıştır [47]. Daha sonra konveks fonksiyonlar daha kapsamlı ve detaylı şekilde çalışılmış, matematiğin hemen hemen her alanında yerini almıştır. Konveks fonksiyonların bu kadar yaygın kullanım alanı bulmasının nedeni, maksimum değere bir sınır noktasında ulaşması, her yerel minimum noktanın mutlak minimum nokta ve birçok önemli eşitsizliğin konveks fonksiyon uygulamalarının sonuçları olmasıdır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu ele alan Pečarić’in 1987 yılında yayınladığı “Convex Functions: Inequalities” adlı kitabı ilk kaynak niteliği taşımaktadır [48]. Konveks fonksiyon ve çeşitli sınıflarının eşitsizlikler üzerindeki rolünün büyüklüğünden günümüzde de hala konu üzerinde çalışmalar yapılmaktadır.

Dinamik sistemlerin çalışma prensiplerini anlamada araç olarak kullanılan türev ve integral operatörleri matematiksel modellemenin temelini oluşturmaktadır. Öneminin bu denli büyük olması konu üzerinde derin çalışmalara itmiş, tamsayı mertebeli operatörlerin genel hali olan kesirli operatörlerin bulunmasını sağlamıştır. Kesirli türev ve integralin klasik türev ve integralden en önemli farkı, problemin türüne göre en iyi çözümün elde edilmesi adına birden çok tanımının olmasıdır. Fakat neredeyse hiç pratik uygulamasının olmaması sadece matematiksel işlemler içeren soyut bir alan olarak kabul edilmesine sebep olmuştur. Yaklaşık yarım asır önce paradigma pür matematiksel formülasyonlardan çeşitli alanlardaki uygulamalara geçmeye başlamış ve son 20 yılda kesirli operatörler bilim, mühendislik ve matematiğin hemen hemen her alanına girmiştir. Literatürde tarihsel aşamalarla birlikte konu üzerinde yapılan ilk çalışma Oldham ve Spainer’in 1974 yılında yayınladığı kitap olmuştur [46].

Tohumları 300 yıl önce ekilen kesirli türev kavramı ilk olarak L’Hopital’in Leibnitz’e gönderdiği mektupla ortaya atılmıştır. Leibnitz bir çalışmada $y(x)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi için $d^n y / dx^n$ gösterimini kullanmış, bu gösterimle ilgili olarak

L'Hopital'in Leibnitz'e n 'nin bir tamsayı olmaması, ayrıca $n=1/2$ olması durumuyla ilgili bir soru yöneltmiştir. Leibnitz 30.09.1695 tarihli bir mektupla “...Bir gün bu paradokstan çok faydalı sonuçlar çıkarılacak gibi görünüyor...” cevabını vermiştir. 1819'da Lacroix, L'Hopital'ın sorusuna karşılık

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

iddiasında bulunmuş ve $y = x^m$ kuvvet fonksiyonunun n . mertebeden türevi için

$$D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n} (x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

formülünü vermiştir.

Daha sonra faktöriyel sembolü yerine Gama fonksiyonunu kullanarak,

$$D_x^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

olduğunu ve dolayısıyla

$$D_x^{1/2} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

olarak hesaplamıştır. Bu ilk teorik gelişmelerle eş zamanlı olarak Kesirli Analizin uygulamaları da yapılmaya başlanmıştır. Abel 1832 yılında fiziksel bir problemin integral denklem çözümü için ilk kez çözümün yarı türev olarak yazılabilen bir integral dönüşümü ile gerçekleştirilebileceğini, yani

$$K(x) = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt$$

eşitliğinin sağ tarafının

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dx^{-\frac{1}{2}}} f(x) \right)$$

kesirli türev yoluyla yazılabileceğini bulmuştur. Bu çözüm Liouville'nin ilgisini çekmiş ve 1832-1837 yılları arasında bu konuda kapsamlı makaleler yazmıştır. Ardından Liouville'nin çalışmalarıyla birlikte, Kesirli Analizin geliştirilmesinde muhtemelen en yararlı ilerleme 1847 yılında Riemann tarafından olmuştur. Günümüzde de yaygın kullanılan ve genelleştirilmiş birçok hali bulunan kesirli integral,

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (x > a, \alpha > 0)$$

şekliyle tanımlanmış ve literatürde Riemann-Liouville kesirli integral olarak adlandırılır. Sonrasında Grünwald Letnikov (1868), Weyl (1917), Marchaud (1927), Hadamard (1927), Erdélyi Kober (1940), Riezs (1952), Chen (1961) farklı türden kesirli türev ve integral tanımları vermişlerdir [37, 64]. 1967 yılında Caputo, Riemann-Liouville yaklaşımının problemlerin fiziksel yorumlanmasında yetersiz kaldığını belirterek

$${}^c D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt \quad (n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N})$$

kesirli türev tanımını vermiştir [50]. Osler, artan ve pozitif fonksiyonları kullanarak, Riemann-Liouville kesirli integralinin genel bir hali olan ω -Riemann Liouville kesirli integral tanımını 1970 yılında

$$I_{a+}^{\alpha;\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \omega'(t) (\omega(x) - \omega(t))^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \geq a$$

şeklinde vermiştir [36]. 2014 yılında Khalil ve arkadaşları, bir kesirli diferansiyel denklemin çözümü için mertebesi $0 < \alpha < 1$ aralığında uyumlu kesirli türev tanımını yazmış, çarpım ve bölüm kuralını ispatlamıştır [35]. Limit formuyla klasik türeve benzerliği dikkat çekmiş ve bir sonraki yıl Abdeljawad mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ aralığında sağ ve sol uyumlu kesirli integral tanımlarını vermiş ve integralin mertebesini genişleterek $n < \alpha \leq n+1$ aralığında uyumlu kesirli integral tanımını

$$(I_{\alpha}^a f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx, \quad t > a$$

şeklinde vermiştir [2]. $\alpha = n + 1$ durumunda da bu integrallerin Riemann Liouville kesirli integrallerine indirgenebildiğini göstermiştir. Aynı çalışmada kesirsel zincir kuralını, kısmi integrasyon, Gronwall eşitsizliği ve kuvvet seri açılımını da vermiştir.

Caputo ve Fabrizio 2015 yılında, Caputo'nun 1967 yılında tanımladığı kesirli türevin çekirdek fonksiyonunun $x = t$ durumundaki tekilliğini kaldırmak için exponential fonksiyonunu kullanmış ve yeni bir kesirli türev tanımı ortaya koymuştur. 2017 yılında Abdeljawad ve Baleanu ise bu kesirli türeve karşılık gelen Caputo Fabrizio kesirli integralini

$${}^{CF}_a I^\alpha f(x) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(x) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^x f(t) dt \quad (x > a)$$

şeklinde elde etmiştir [1, 14].

Khalil ve arkadaşlarının tanıttığı uyumlu kesirli türev operatöründe türevin mertebesi sıfıra yaklaşırken limiti fonksiyonun kendisini vermemektedir. Bu eksiklikten hareketle 2015'te Anderson ve Ulness oransal türevsel kontrol denetim yönteminden (PD) faydalanarak yeni bir uyumlu kesirli türev geliştirmiştir. 2017 yılında Jarad ve arkadaşları bu çalışmaları kullanarak genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integralini

$$\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(t) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (t > a)$$

olarak vermiştir [32].

Son yıllarda çoğu araştırmacının ilgi alanına giren kesirli operatörler, eşitsizlikler teorisiyle birlikte ele alınmış, üzerine makaleler, bildiriler, lisansüstü tez çalışmaları yapılmıştır. Günümüzde de Akdemir, Sarıkaya, Set, Özdemir, Jarad, Farid, Abdeljawad, Butt, Chen, Rashid, Noor gibi bazı matematikçiler yeni sonuçlar sunarak konuya önemli katkılarda bulunmaktadır.

Klasik integraller ve Riemann Liouville kesirli integralleri yardımıyla literatürde mevcut eşitsizliklerle ilgili sayısız makale ve tez çalışmasına rastlanmaktadır. Yapılan ispatlarla elde edilen eşitsizliklerin, son yıllarda tanımlanan yeni kesirli integraller yardımıyla daha genel halleri bulunabileceği bizi bu konuyu çalışmaya sevk etmiştir.

Sunulan bu tezin giriş bölümünde, tarihsel aşamalarla birlikte konvekslik, eşitsizlik ve kesirli integrallerle ilgili genel bilgiler verilmiştir. Kuramsal temeller başlığı altındaki ikinci bölümde, ilk olarak hem pür matematik, hem de konvekslik kavramıyla ilgili temel tanım, teorem ve kavramlara yer verilmiştir. Daha sonra bazı konveks fonksiyon türleri ve Hermite Hadamard, Ostrowski, Pòlya-Szegö-Chebyshev eşitsizlikleri hakkında bilgi sunulmuş ve hesaplamalarda bize yardımcı olan eşitsizlikler verilmiştir.

Metaryal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde Riemann Liouville, uyumlu, ω -Riemann, Caputo-Fabrizio kesirli integralleri hakkında genel bilgilere değinilmiş, daha önceki çalışmalarda ispat edilmiş olan ilgili eşitsizliklere yer verilmiştir. Sonrasında genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF), yeni uyumlu kesirli integral ve ψ -Caputo kesirli türevlerin tanım ve özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölüm olan bulgular kısmı altı alt bölümde incelenmiştir. İlk alt bölümde sırasıyla uyumlu kesirli integraller içeren bazı konveks fonksiyon türleri için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Sonrasında, integrallenebilen pozitif fonksiyonlar için Pòlya-Szegö tipli integral eşitsizlikler ispatlanmış, oluşturulan bu eşitsizliklerden faydalanarak Chebyshev tipli yeni kesirli integral eşitsizlikler elde edilmiştir. İkinci alt bölümde m -konveks fonksiyon için ω -Riemann Liouville kesirli integraller içeren Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra, farklı türden konveks fonksiyonların çarpımı için ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörlerinden yararlanarak Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler oluşturulmuştur. Üçüncü alt bölümde Genelleştirilmiş Oransal Kesirli (GPF) integraller içeren yeni özdeşlikler ispatlanmış, bu özdeşlikler yardımıyla bazı konveks fonksiyon çeşitleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Dördüncü alt bölümde ise Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörler yardımıyla özdeşlikler elde edilip bazı konveks fonksiyon çeşitleri için Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir. Beşinci alt bölümde ψ -Caputo kesirli türev operatörler yardımıyla m -konveks fonksiyon için Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir. Altıncı alt bölümde ise uyumlu kesirli integral operatörler yardımıyla m -konveks fonksiyon için Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir. Tüm alt bölümlerde elde edilen eşitsizlikler parametrelerin özel seçimiyle literatürde daha önce bilinen sonuçlara indirgendiği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde tezin kısa bir sonucu ve konu hakkında araştırmacılara öneriler sunulmuştur.



2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamız kapsamında gerekli olan tanım, teorem ve önemli bazı temel özelliklere yer verilecektir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Konveks Küme) L bir lineer uzay $A \subseteq L$ olsun. Eğer $x, y \in A$ olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1-\alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.1.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir [11].

Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan doğru parçasıdır. Öyleki, konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b) \quad (2.1.2)$$

şartı sağlanırsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer $a \neq b$ ve $t \in (0,1)$ için fonksiyon

$$f((1-t)a + tb) < (1-t)f(a) + tf(b) \quad (2.1.3)$$

şartı sağlanıyorsa bu fonksiyona da kesin konveks fonksiyon denir [20, 41, 44].

Yukarıda verilen (2.1.2) eşitsizliği geometrik olarak şunu ifade eder. a ve b noktaları arasındaki x noktası $x = (1-t)a + tb$ olarak yazılırsa, $1-t = \frac{b-x}{b-a}$ ve $t = \frac{x-a}{b-a}$ olur. Bu durumda (2.1.2) eşitsizliği

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) + f(a) \end{aligned}$$

halini alır. Bilindiği üzere $y = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (x-a) + f(a)$ denklemi, $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğru denklemdir. O halde (2.1.2) eşitsizliği, f fonksiyonunun $x=a$ ve $x=b$ noktaları arasındaki grafiğinin, $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında veya ona değiyor olduğunun ifadesidir. Bu durum I aralığındaki her a, b nokta çifti için sağlanmalıdır.

Tanım 2.1.3. $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x_1, x_2 \in A$ için

- i. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f 'ye artan fonksiyon,
- ii. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f 'ye azalmayan fonksiyon,
- iii. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f 'ye azalan fonksiyon,
- iv. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f 'ye artmayan fonksiyon

denir [20, 41].

Önerme 2.1.1. Konveks fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler doğrudur.

- i. Konveks iki fonksiyonun toplamı konvektir ve eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplamı kesin konvektir.
- ii. Konveks bir fonksiyonun skalerle çarpımı konvektir.
- iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise aralığın kısıtlanmış bir alt aralığında da konvektir.

- iv. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) fonksiyon, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan (artan) konveks bir fonksiyon ise $(g \circ f)$ bileşke fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyondur [44].

Tanım 2.1.4. f fonksiyonu $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna A kümesinde sınırlı fonksiyon denir [12, 41].

Tanım 2.1.5 Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $a \in X$ noktası verilmiş olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in X$ için $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε ve a sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X kümesine göre $a \in X$ noktasında süreklidir denir [41].

Tanım 2.1.6. (Lipschitz Koşulu) $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in X$ çifti için $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa, f fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon denir. K sayısına f 'nin bir Lipschitz sabiti denir [12].

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks olsun. O halde f fonksiyonu,

- i. $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz koşulunu sağlar,
- ii. (a, b) aralığında süreklidir [61].

Tanım 2.1.7. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $t, x \in (a, b)$ olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (2.1.4)$$

sonlu limiti varsa, f 'ye x noktasında türevlenebilirdir denir. Bu limit değerine f fonksiyonunun x noktasındaki türevi adı verilir ve $f'(x)$ (veya $Df(x)$ ya da $\frac{df(x)}{dx}$) ile gösterilir.

Bu durumda, f fonksiyonu x noktasında türevlenebilir (veya türevli) ise

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

yazılır. Ayrıca $t = x + h$ denilirse, $t \rightarrow x \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ olacağından

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ve} \quad f'_-(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sonlu limitlerine f 'nin sırası ile sağdan ve soldan türevleri denir [41].

Teorem 2.1.2. I açık bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart f' 'nin I aralığında artan olmasıdır [41, 61].

Teorem 2.1.3. $I, \mathbb{R}$ 'de açık bir aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır [41, 61].

Tanım 2.1.8. $(L_p[a, b], \|\cdot\|_p)$ $p \geq 1$ için $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (2.1.5)$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı veya p . dereceden integrallenebilir fonksiyonların uzayı denir ve $L_p[a, b]$ ile gösterilir [59].

$p=1$ durumunda $L_1[a, b]$ uzayı

$$\|f\|_1 = \left[\int_a^b |f(t)| dt \right] < \infty$$

normunu sağlayan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.1.9. (Gama Fonksiyonu) $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1.6)$$

ile tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu denir [34].

Bu integral $x > 0$ için yakınsaktır. Pozitif x değerleri için tanımlanan Gama fonksiyonu 0 ve negatif tamsayı dışındaki değerler için de tanımlanabilir. Her $x > 0$ için $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ özelliği yardımıyla, $n \in \mathbb{Z}^+$ değerleri için $\Gamma(x+1)$ yerine $\Gamma(x+n)$ kullanılırsa

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}$$

eşitliği yazılabilir. $-n < x < -n+1$ ise $0 < x+n < 1$ olur ve $\Gamma(x+n)$ tanımlıdır. Böylece gama fonksiyonu bu eşitlikten $-n < x < -n+1$ aralığında tanımlıdır.

Gama fonksiyonunun bazı önemli özelliklerini aşığıdaki şekilde sıralayabiliriz;

- i. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n! \quad (n \in \mathbb{Z}^+)$
- ii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
- iii. $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x} dx = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \quad (0 < p < 1)$
- iv. $2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2n) \quad [34].$

Tanım 2.1.10. (Tamamlanmamış Gama Fonksiyon) Tamamlanmamış Gama fonksiyonları,

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha, x) &= \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt & (\operatorname{Re}(\alpha) > 0; x \geq 0) \\ \Gamma(\alpha, x) &= \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt & (x \geq 0; x = 0 \text{ için } \operatorname{Re}(\alpha) > 0)\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

integralleri ile tanımlanır ve ayrıca

$$\gamma(\alpha, x) + \Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) \quad (\operatorname{Re}(\alpha) > 0)$$

bağıntısını sağlar [25].

Tanım 2.1.11. (Beta Fonksiyonu) $x > 0, y > 0$ için

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu denir [34].

Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır. İki değişkenli fonksiyon olan Beta fonksiyonu

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2x-1} (\cos \theta)^{2y-1} d\theta$$

ve

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$$

biçimlerinde de ifade edilebilir. Beta fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığı kolayca görülebilir;

- i. $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y) \quad (x, y > 0)$
- ii. $B(1, y) = \frac{1}{y}$
- iii. $B(x, y) = B(y, x)$
- iv. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x, y > 0) [34].$

Tanım 2.1.12 (Tamamlanmamış Beta Fonksiyon) $0 \leq x < 1$ olmak üzere tamamlanmamış beta fonksiyonu

$$B_x(v, \mu) = \int_0^x t^{v-1} (1-t)^{\mu-1} dt \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $B_x(\mu, v)$ ve $B_{1-x}(v, \mu)$ fonksiyonları birlikte ele alındığında

$$\begin{aligned} B_x(\mu, v) + B_{1-x}(v, \mu) &= \int_0^x t^{\mu-1} (1-t)^{v-1} dt + \int_0^{1-x} t^{v-1} (1-t)^{\mu-1} dt \\ &= \int_0^x t^{\mu-1} (1-t)^{v-1} dt + \int_x^1 u^{\mu-1} (1-u)^{v-1} du \\ &= \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{v-1} dt \\ &= B(v, \mu) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitlik, tamamlanmamış beta fonksiyonu ile beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir [15, 16].

Tanım 2.1.13. (Hipergeometrik Fonksiyon) $|z| < 1$, $a, b \in \mathbb{C}$ ve $c \in \mathbb{C} / \mathbb{Z}_0^-$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

serisi ile tanımlanır. Burada $k \in \mathbb{N}$ için $(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$ olmak üzere Pochhammer sembolüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Euler integral gösterimi

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0)$$

şeklinde tanımlanır [36].

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde, çalışmamızda yararlanacağımız bazı konveks fonksiyon çeşitleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1. (AG-Konveks Fonksiyon) $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f : I \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu

i. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f^\alpha(x) f^{1-\alpha}(y) \quad (2.2.1)$$

ii. $\log f$ konveks

şartlarından birini sağlıyorsa f fonksiyonuna AG-konveks fonksiyon veya log-konveks fonksiyon denir [43].

log-konveks ve konvekslik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 2.2.1. $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık olsun. Eğer $f : I \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu log-konveks ise konvektir [43].

Tanım 2.2.2. (GA-Konveks Fonksiyon) $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \quad (2.2.2)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir [43].

Konvekslik ve GA-konvekslik arasında şu şekilde bir ilişki vardır. Eğer f fonksiyonu I aralığında azalan ve GA-konveks ise

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y) \quad (2.2.3)$$

olur. Dolayısıyla f fonksiyonu I 'da konvektir. Eğer f fonksiyonu I aralığında artan ve konveks ise

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (2.2.4)$$

dir. Böylece f fonksiyonu I 'da GA –konvektir.

Tanım 2.2.3. (GG-Konveks Fonksiyon) $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha} \quad (2.2.5)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna GG –konveks fonksiyon denir [43].

Her GG –konveks fonksiyon aynı zamanda GA –konveks fonksiyondur. Bu gerektirmeyi literatürde iyi bilinen AM-GM eşitsizliği kullanılarak

$$f(x^\alpha y^{1-\alpha}) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha} \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (2.2.6)$$

kolayca görülebilir. Fakat bu gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

Örnek: $(0, \infty)$ aralığında $f(x) = \log(1+x)$ fonksiyonu GA –konvektir fakat GG –konveks değildir [8].

Tanım 2.2.4. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.2.7)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir [24].

Eğer f , AG-konveks ise (2.2.6)'dan

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &\leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{1-\alpha} \\ &\leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \\ &\leq \max\{f(x), f(y)\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece her

AG-konveks fonksiyon $\Rightarrow$ Konveks fonksiyon $\Rightarrow$ Quasi-konveks fonksiyon olur.

Tanım 2.2.5. (m-Konveks Fonksiyon) $f:[0,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b>0$ olsun. Her $x,y \in [0,b]$, $m \in [0,1]$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + m(1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1-\alpha)f(y) \quad (2.2.8)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna m -konveks fonksiyon denir [23].

$m=1$ durumunda m -konveks fonksiyon, konveks fonksiyona indirgenir.

Tanım 2.2.6. (Birinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f:I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. Her $u,v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ iken

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \quad (2.2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir [23].

Tanım 2.2.7. (İkinci Anlamda s-Konveks Fonksiyon) $f:I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. Her $u,v \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde $\alpha, \beta \geq 0$ iken

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \quad (2.2.10)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s – konveks fonksiyon denir [23].

Birinci ve ikinci anlamda s – konveks fonksiyon $s = 1$ durumunda konveks fonksiyona indirgenir.

Tanım 2.2.8. (m -Geometrik Konveks Fonksiyon) f , $[0, b]$ aralığında pozitif bir fonksiyon, $m \in (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. $x, y \in [0, b]$ olmak üzere

$$f\left(x^t y^{m(1-t)}\right) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{m(1-t)} \quad (2.2.11)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna m – geometrik konveks fonksiyon denir [62].

$m = 1$ durumunda m – geometrik konveks fonksiyon, GG -konveks fonksiyona indirgenir.

Tanım 2.2.9. (s -Geometrik Konveks Fonksiyon) $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon, $s \in (0, 1]$ ve $t \in [0, 1]$ olsun. $x, y \in I$ olmak üzere

$$f\left(x^t y^{(1-t)^s}\right) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{(1-t)^s} \quad (2.2.12)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna s – geometrik konveks fonksiyon denir [65].

$s = 1$ durumunda s – geometrik konveks fonksiyon, GG -konveks fonksiyona indirgenir.

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde çalışmamızda yararlanacağımız, literatürde yer alan bazı önemli eşitsizliklere ve işlemlerde kullanılan yardımcı eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.3.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği) $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.3.1)$$

eşitsizliği sağlanır [23].

Konveks fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynayan ve tarihsel süreçler sonucunda günümüzde daha çok Hermite Hadamard eşitsizliği olarak belirtilen eşitsizlik, Hadamard eşitsizliği olarak literatüre girmiştir. Öncelikle bu eşitsizlik 1881 yılında C. Hermite tarafından ileri sürülmüş ve bir mektup olarak “Mathesis” dergisine gönderilmiştir. 1883 yılında, C. Hermite’nin gönderdiği mektuptan bir alıntı bu dergide yayınlanmış ancak C. Hermite’e ait olduğu uzun süre hiçbir yerde değinilmemiştir. Kompleks fonksiyonlar teorisi ve tarihçesi konusunda önde gelen araştırmacılardan E. F. Beckenbach 1948 yılında, J. Hadamard’ın bu eşitsizliği 1893 yılında C. Hermite’in mektubundan habersiz olarak ispatladığını yazmış ve daha sonra literatürde sıklıkla Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılmıştır.

Teorem 2.3.2. (Ostrowski Eşitsizliği) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) açık aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $t \in (a, b)$ için $|f'(t)| \leq M$ ise

$$\left| f(x) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \quad (2.3.2)$$

eşitsizliği her $x \in [a, b]$ için sağlanır. $\frac{1}{4}$ sabiti elde edilebilecek en küçük sabittir [21].

A. M. Ostrowski’nin 1938 yılında ele aldığı bu eşitsizlik, kapalı aralıkta sürekli bir f fonksiyonun integral ortalamasıyla fonksiyonun kendisi arasındaki sapmayı

göstermektedir. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlanmış bir f fonksiyonu sürekli ise, f 'nin $x \in [a, b]$ noktasındaki değeri ile $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ integral ortalamasından sapma, f fonksiyonunun maksimum ve minimum değerleri arasındaki fark ile tahmin edilebilir. Ayrıca, f fonksiyonu (a, b) aralığında diferansiyellenebilir ve fonksiyonun türevi bu aralıkta sınırlı ise ($|f'(x)| \leq M$), fonksiyonun aldığı maksimum ve minimum değer arasındaki fark $M(b-a)$ 'yı aşmaz, ancak bu değere ulaşabilir. Bununla birlikte $f(x)$ 'in integral ortalamasından mutlak sapması $\frac{M(b-a)}{2}$ 'yi geçmez. Eğer x aralığın orta noktası ise yani $x = \frac{a+b}{2}$ ise mutlak sapma $\frac{M(b-a)}{4}$ ile sınırlıdır.

Teorem 2.3.3. (Chebyshev Eşitsizliği) $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ birlikte artan (veya azalan) integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Ayrıca $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrallenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \quad (2.3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f ve g fonksiyonlarından biri artmayan ve diğeri azalmayan birer fonksiyon ise eşitsizlik yön değiştirir [39].

Chebyshev 1882 yılında (2.3.3) eşitsizliğini ispatlamış ve ayrıca eşitsizliğin özel durumlarını

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \quad (p(x)=1)$$

ve

$$\int_0^1 f(x) g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \quad (p(x)=1, a=1, b=0)$$

şeklinde vermiştir [39].

Yukarıda verilen eşitsizlikten hareketle, iki fonksiyonun çarpımının integral ortalaması ile bu fonksiyonların integral ortalamalarının çarpımının farkı $T(f, g)$ ile gösterilirse

$$T(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx \right)$$

eşitliği ile tanımlanır. Belirtilen bu eşitlik Chebyshev fonksiyoneli veya Chebyshev farkı olarak adlandırılır.

G. Pòlya ve G. Szegö'nün, 1925 yılında ispatlamış oldukları eşitsizlik aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.4. (Pòlya-Szegö Eşitsizliği) $f, g, [a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon, her $x \in [a, b]$

$$0 < m \leq f(x) \leq M < \infty, \quad 0 < n \leq g(x) \leq N < \infty$$

koşullarını sağlayan $m, M, n, N \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}{\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{MN}{mn}} + \sqrt{\frac{mn}{MN}} \right)^2 \quad (2.3.4)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

S.S. Dragomir ve Diamond 2003 yılında Chebyshev ve Pòlya-Szegö eşitsizliklerini kullanarak Chebyshev-Pòlya-Szegö eşitsizliğini aşağıdaki teoremden vermişlerdir.

Teorem 2.3.5. (Chebyshev-Pòlya-Szegö Eşitsizliği) $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrallenebilen iki fonksiyon ve her $x \in [a, b]$, $m, M, n, N \in \mathbb{R}$ için

$$0 < m \leq f(x) \leq M < \infty \quad \text{ve} \quad 0 < n \leq g(x) \leq N < \infty$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$|T(f, g)| \leq \frac{(M-m)(N-n)}{4\sqrt{mnMN}} \times \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx \quad (2.3.5)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Teorem 2.3.6. (Cauchy-Schwarz İntegral Eşitsizliği) f ve g , $[a, b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(\int_a^b f(t) g(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t) dt \right) \left(\int_a^b g^2(t) dt \right) \quad (2.3.6)$$

eşitsizliği sağlanır [39].

$S \subset \mathbb{R}^2$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli iki fonksiyon olmak üzere

$$A = \iint_S f^2(x, y) dx dy, \quad B = \iint_S f(x, y) g(x, y) dx dy, \quad C = \iint_S g^2(x, y) dx dy$$

integralleri için $|B| \leq \sqrt{A} \sqrt{C}$ sağlanıyorsa bu durumda çift katlı integraller için Cauchy-Schwarz eşitsizliği geçerlidir [60].

Teorem 2.3.7. (Genel Cauchy Eşitsizliği) α, β pozitif reel sayılar ve $\alpha + \beta = 1$ olsun.

Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$\alpha x + \beta y \geq x^\alpha y^\beta \quad (2.3.7)$$

eşitsizliği sağlanır [42].

Teorem 2.3.8. (AM-GM Eşitsizliği) Eğer $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ ise bu durumda

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (2.3.8)$$

eşitsizliği sağlanır [52].

Teorem 2.3.8. (Üçgen Eşitsizliği) Herhangi x, y reel sayıları için

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y|, \\ ||x| - |y|| &\leq |x - y|, \\ ||x| - |y|| &\leq |x + y|, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

ve genel olarak

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n| \quad (2.3.10)$$

eşitsizlikleri sağlanır [39].

Teorem 2.3.9. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu) f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.3.11)$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Teorem 2.3.10. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği) $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer f ,

$|f|^p$, g ve $|g|^q$ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.3.12)$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.1. (Power Mean Eşitsizliği) $q \geq 1$ olmak üzere $f, g, |f|$ ve $|g|^q$ $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.3.13)$$

eşitsizliği geçerlidir [39].

Lemma 2.3.1. Eğer $0 < \varphi \leq 1 \leq \mu$ ve $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ise

$$\varphi^{\alpha\beta} \leq \varphi^{\alpha\beta} \quad \text{ve} \quad \mu^{\alpha\beta} \leq \mu^{\beta a + 1 - \beta} \quad (2.3.14)$$

eşitsizlikleri geçerlidir [9].

Lemma 2.3.2. $f: [\mu, \zeta] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu $\frac{\mu + \zeta}{2}$ noktasına göre simetrik olsun.

O halde,

$$f\left(\frac{\mu + \zeta}{2}\right) \leq f(\kappa), \quad \kappa \in [\mu, \zeta] \quad (2.3.15)$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Çalışmanın bu bölümünde ana sonuçlarımızı yakından ilgilendiren Riemann-Liouville, ω -Riemann Liouville, genelleştirilmiş oransal, Caputo-Fabrizio, uyumlu, yeni uyumlu kesirli integral ve ψ -Caputo kesirli türev operatörleri tanıtılmıştır. Daha sonra Riemann-Liouville, uyumlu, ω -Riemann Liouville, Caputo-Fabrizio integral operatörleri yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler verilmiştir.

3.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Tanım 3.1.1. $a < x < b$ ve $f \in L[a, b]$ olsun. $\alpha \geq 0$ ve $[\alpha]$, α 'nın tam değeri olmak üzere sırasıyla α . mertebeden sol ve sağ Riemann Liouville kesirli türev operatörleri

$${}^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (n=[\alpha]+1, x > a) \quad (3.1.1)$$

ve

$${}^{RL}D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (n=[\alpha]+1, b > x) \quad (3.1.2)$$

şeklinde tanımlanır [53].

Riemann Liouville kesirli türev operatörlerine karşılık gelen α . mertebeden sol ve sağ kesirli integral operatörler

$$(J_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > a \quad (3.1.3)$$

ve

$$(J_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x < b \quad (3.1.4)$$

şeklindedir [53].

Riemann Liouville kesirli integraller $\alpha=1$ durumunda klasik integrale indirgenir ve ayrıca $\alpha=0$ durumunda $J_{a+}^0 = J_{b-}^0 = f(x)$ 'dir.

Teorem 3.1.1. Her $x \in [a, b]$ ve $f \in L_p(a, b), (1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere, eğer $\alpha, \beta > 0$ $\alpha + \beta \geq 1$ için Riemann-Liouville kesirli integraller

$$(J_{a+}^\alpha J_{a+}^\beta f)(x) = (J_{a+}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad \text{ve} \quad (J_{b-}^\alpha J_{b-}^\beta f)(x) = (J_{b-}^{\alpha+\beta} f)(x) \quad (3.1.5)$$

eşitliklerini sağlar [53].

2012 yılında s -konveks fonksiyon için Riemann Liouville kesirli integral operatörlerini içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler Set [55], tarafından elde edilmiştir.

Lemma 3.1.1. $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f' \in L[a, b]$, $x \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} [J_{x-}^\alpha f(a) + J_{x+}^\alpha f(b)] \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)a) dt - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \int_0^1 t^\alpha f'(tx + (1-t)b) dt \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

eşitliği sağlanır [55].

Teorem 3.1.2. $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen, $s \in (0, 1]$ için $|f'|$ $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ve $\alpha > 0$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b) \right] \right| \\
& \leq \frac{M}{b-a} \left(1 + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \right) \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+s+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği sağlanır [55].

Teorem 3.1.3. $a < b$ ve $f : [a, b] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen, $s \in (0, 1]$ için $|f|^{(q)}$, $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ve $\alpha > 0$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b) \right] \right| \\
& \leq \frac{M}{(1+p\alpha)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{2}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 'dir [55].

Teorem 3.1.4. $a < b$ ve $f : [a, b] \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen, $s \in (0, 1]$ için $q \geq 1$ olmak üzere $|f|^{(q)}$, $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ ve $\alpha > 0$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha}{b-a} \right) f(x) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)} \left[J_{x^-}^\alpha f(a) + J_{x^+}^\alpha f(b) \right] \right| \\
& \leq M \left(\frac{1}{1+\alpha} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\alpha+s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left(1 + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(\alpha+s+1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\frac{(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1}}{b-a} \right]
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği sağlanır [55].

2013 yılında Sarıkaya ve arkadaşları [54], Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite Hadamard tipli eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.1.5. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a < b$ ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (3.1.10)$$

eşitsizliği sağlanır [54].

Teorem 3.1.6. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks, $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)] \right| \leq \frac{b-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) (|f'(a)| + |f'(b)|) \quad (3.1.11)$$

eşitsizliği sağlanır [54].

2014 yılında Chen [17], iki konveks fonksiyonun çarpımı için Riemann Liouville kesirli integral operatörleri içeren Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Teorem 3.1.7. f ve g reel değerli, negatif olmayan $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)] \\
& \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{2} \right) M(a,b) + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} N(a,b)
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b) \quad \text{ve} \quad N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a) \tag{3.1.13}$$

şeklindedir [17].

Teorem 3.1.8. f ve g reel değerli, negatif olmayan $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ise

$$\begin{aligned}
& 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)] \\
& \quad + M(a,b) \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + N(a,b) \left(\frac{\alpha}{\alpha+2} - \frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{1}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ (3.1.13)'de verildiği gibidir [17].

2016 yılında Farid ve arkadaşları [29], m -konveks fonksiyonlar için Riemann Liouville kesirli integral operatörler içeren Hermite Hadamard tipli eşitsizlik elde etmiştir.

Teorem 3.1.9. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif, integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $m \in (0,1]$, $0 \leq a \leq mb$ ve f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında m -konveks, $\alpha > 0$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+mb}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[J_{a^+}^\alpha f(mb) + m^{\alpha+1} J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a}{m}\right) \right] \\
&\leq \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \left[f(a) - m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right) \right] + \frac{m}{2} \left[f(b) + mf\left(\frac{a}{m^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

2016 yılında Chen ve Wu [18], farklı türden konveks fonksiyonların çarpımı için Riemann Liouville kesirli integral operatörler içeren Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Teorem 3.1.10. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu negatif olmayan ve konveks, g fonksiyonu da $s \in (0, 1]$ için s -konveks fonksiyon olmak üzere $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a) \right] \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha+s+1} + B(\alpha, s+2) \right) M(a, b) \\
&\quad + \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) N(a, b)
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $M(a, b)$ ve $N(a, b)$ (3.1.13)'de verildiği gibidir [18].

Teorem 3.1.11. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında f fonksiyonu negatif olmayan ve konveks, g fonksiyonu da $s \in (0, 1]$ için s -konveks olmak üzere $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned}
2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)] \\
&\quad + \frac{1}{2} M(a,b) \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} N(a,b) \left(B(\alpha, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s+1)} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ (3.1.13)'de verildiği gibidir [18].

Teorem 3.1.12. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında, $s_1, s_2 \in (0, 1]$ için f fonksiyonu s_1 -konveks, g fonksiyonu s_2 -konveks olmak üzere $\alpha > 0$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} [J_{a^+}^\alpha f(b)g(b) + J_{b^-}^\alpha f(a)g(a)] \\
&\leq \left(\frac{1}{\alpha + s_1 + s_2} + B(\alpha, s_1 + s_2 + 1) \right) M(a, b) \\
&\quad + (B(\alpha + s_1, s_2 + 1) + B(\alpha + s_2, s_1 + 1)) N(a, b)
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $M(a,b)$ ve $N(a,b)$ (3.1.13) eşitliklerinde verildiği gibidir [18].

2016 yılında Ntouyas ve arkadaşları [45], Riemann-Liouville kesirli integral operatörler içeren, integrallenebilen pozitif fonksiyonlar için Pòlya-Szegö tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. Daha sonra elde edilen bu eşitsizlikler yardımıyla Chebyshev tipli integral eşitsizlikler vermişlerdir.

Lemma 3.1.2. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon ve $\alpha > 0$ olsun. $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ integrallenebilen pozitif fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} 0 < \varphi_1(\tau) \leq f(\tau) \leq \varphi_2(\tau) \\ 0 < \psi_1(\tau) \leq g(\tau) \leq \psi_2(\tau) \end{aligned} \quad (\tau \in [0, t], t > 0) \quad (3.1.19)$$

şeklinde ise, bu durumda

$$\frac{J_{0^+}^\alpha (\psi_1 \psi_2 f^2)(t) J_{0^+}^\alpha (\varphi_1 \varphi_2 g^2)(t)}{(J_{0^+}^\alpha ((\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2) fg)(t))^2} \leq \frac{1}{4} \quad (3.1.20)$$

eşitsizliği sağlanır [45].

Lemma 3.1.3. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon $\alpha, \beta > 0$ ve $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ (3.1.19) koşullarını sağlayan, integrallenebilen pozitif fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\frac{J_{0^+}^\alpha (\varphi_1 \varphi_2)(t) J_{0^+}^\beta (\psi_1 \psi_2)(t) J_{0^+}^\alpha (f^2)(t) J_{0^+}^\beta (g^2)(t)}{(J_{0^+}^\alpha (\varphi_1 f)(t) J_{0^+}^\beta (\psi_1 g)(t) + J_{0^+}^\alpha (\varphi_2 f)(t) J_{0^+}^\beta (\psi_2 g)(t))^2} \leq \frac{1}{4} \quad (3.1.21)$$

eşitsizliği sağlanır [45].

Lemma 3.1.4. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Eğer $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ (3.1.19) koşullarını sağlayan integrallenebilen pozitif fonksiyonlar ise, bu durumda

$$J_{0^+}^\alpha (f^2)(t) J_{0^+}^\beta (g^2)(t) \leq J_{0^+}^\alpha \left(\frac{\varphi_2 fg}{\psi_1} \right)(t) J_{0^+}^\beta \left(\frac{\psi_2 fg}{\varphi_1} \right)(t) \quad (3.1.22)$$

eşitsizliği sağlanır [45].

Teorem 3.1.13. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Eğer $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ (3.1.19) koşullarını sağlayan integrallenebilen pozitif fonksiyonlar ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{0^+}^\beta (fg)(t) + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} J_{0^+}^\alpha (fg)(t) \right. \\
& \left. - J_{0^+}^\alpha (f)(t) J_{0^+}^\beta (g)(t) - J_{0^+}^\alpha (g)(t) J_{0^+}^\beta (f)(t) \right| \\
& \leq \left| G_1(f, \varphi_1, \varphi_2)(t) + G_2(f, \varphi_1, \varphi_2)(t) \right|^{1/2} \\
& \quad \times \left| G_1(g, \psi_1, \psi_2)(t) + G_2(g, \psi_1, \psi_2)(t) \right|^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$G_1(u, v, w)(t) = \frac{t^\beta}{4\Gamma(\beta+1)} \times \frac{\left(J_{0^+}^\alpha ((v+w)u)(t) \right)^2}{J_{0^+}^\alpha (vw)(t)} - J_{0^+}^\alpha (u)(t) J_{0^+}^\beta (u)(t)$$

ve

$$G_2(u, v, w)(t) = \frac{t^\alpha}{4\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{\left(J_{0^+}^\beta ((v+w)u)(t) \right)^2}{J_{0^+}^\beta (vw)(t)} - J_{0^+}^\alpha (u)(t) J_{0^+}^\beta (u)(t)$$

şeklindedir [45].

Teorem 3.1.14. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $\alpha, \beta > 0$ olsun. Eğer $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$ (3.1.19) koşullarını sağlayan integrallenebilen pozitif fonksiyonlar ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_{0^+}^\alpha (fg)(t) - J_{0^+}^\alpha (f)(t) J_{0^+}^\alpha (g)(t) \right| \\
& \leq \left| G(f, \varphi_1, \varphi_2)(t) G(g, \psi_1, \psi_2)(t) \right|^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$G(u, v, w)(t) = \frac{t^\alpha}{4\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{\left(J_{0^+}^\alpha ((v+w)u)(t) \right)^2}{J_{0^+}^\alpha (vw)(t)} - \left(J_{0^+}^\alpha (u)(t) \right)^2$$

şeklindedir [45].

2019 yılında Farid [26], farklı mertebeden Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı için yeni sonuçlar elde etmiştir.

Teorem 3.1.15. $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif konveks bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $\alpha, \beta \geq 1$ olsun. Bu şartlar altında Riemann Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha) J_{a^+}^\alpha f(x) + \Gamma(\beta) J_{b^-}^\beta f(x) \\ & \leq \frac{(x-a)^\alpha f(a) + (b-x)^\beta f(b)}{2} + f(x) \left[\frac{(x-a)^\alpha + (b-x)^\beta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

eşitsizlikleri sağlanır [26].

Teorem 3.1.16. $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilen ve $|f'|$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer $a, b \in I$, $a < b$ ve $\alpha, \beta > 0$ ise bu durumda Riemann Liouville kesirli integralleri için

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(\alpha+1) J_{a^+}^{\alpha+1} f(x) + \Gamma(\beta+1) J_{b^-}^{\beta+1} f(x) - \left((x-a)^\alpha f(a) + (b-x)^\beta f(b) \right) \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1} (|f'(a)| + |f'(x)|) + (b-x)^{\beta+1} (|f'(b)| + |f'(x)|)}{2} \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

eşitsizlikleri sağlanır [26].

3.2. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Klasik türeve uyumuyla dikkat çeken ve klasik türevin doğal genişletilmesi olarak görülen uyumlu kesirli türev operatörü 2014 yılında Khalil ve arkadaşları [35] tarafından tanıtılmıştır. Bu başlık altında uyumlu kesirli integral operatörünün tanım, özellikleri ve eşitsizliklere uygulamasıyla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $t > 0$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olsun. f fonksiyonunun α . mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (3.2.1)$$

olarak tanımlanır [35].

$a > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $(0, a)$ aralığında α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilir ve $\lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\alpha}(f)(t)$ limiti varsa

$$T_{\alpha}(f)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} T_{\alpha}(f)(t)$$

eşitliği yazılabilir .

Teorem 3.2.1. f ve g fonksiyonları, $\alpha \in (0, 1]$ için $t > 0$ noktasında α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilir olsun. O halde

- i. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g)$
- ii. $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_{\alpha}(t^p) = pt^{p-\alpha}$
- iii. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_{\alpha}(\lambda) = 0$
- iv. $T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
- v. $T_{\alpha}(f/g) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$
- vi. f , α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilirse $T_{\alpha}(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$

şeklindedir [35].

Tanım 3.2.2. $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $0 < \alpha \leq 1$ için α . mertebeden sol taraflı kesirli türevi

$$(T_{\alpha}^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (3.2.2)$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_a^\alpha f)(t)$ mevcutsa $(T_a^\alpha f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_a^\alpha f)(t)$ olur [2].

Tanım 3.2.3. $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $0 < \alpha \leq 1$ için α . mertebeden sağ taraflı uyumlu kesirli türevi

$$({}^b T_a^\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (3.2.3)$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^b T_a^\alpha f)(t)$ mevcutsa $({}^b T_a^\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^b T_a^\alpha f)(t)$ olur. Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise $T_a^\alpha(f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve ${}^b T_a^\alpha(f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t)$ 'dir [2].

Tanım 3.2.4. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere sırasıyla α . mertebeden sol ve sağ uyumlu kesirli integrali

$$(I_a^\alpha f)(t) = \int_a^t f(x) d_\alpha(x, a) = \int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (3.2.4)$$

ve

$$({}^b I_a^\alpha f)(t) = \int_t^b f(x) d_\alpha(b, x) = \int_t^b (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx \quad (3.2.5)$$

olarak tanımlanır [2].

Tanım 3.2.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f \in L(a, b)$ olsun. $n = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$, $\beta = \alpha - n$ olmak üzere, $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol uyumlu kesirli integral

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{n!} \int_a^t (t-x)^n (x-a)^{\beta-1} f(x) dx, \quad t > a \quad (3.2.6)$$

ve α . mertebeden sağ uyumlu kesirli integral ise

$$\left({}^b I_\alpha f\right)(t) = \frac{1}{n!} \int_t^b (x-t)^n (b-x)^{\beta-1} f(x) dx, \quad t < b \quad (3.2.7)$$

biçiminde tanımlanır [2].

Eğer $\alpha = n+1$ alınırsa bu takdirde $\beta = \alpha - n = n+1 - n = 1$ olur. Böylece $\left(I_\alpha^a f\right)(t) = \left(J_{a^+}^\alpha f\right)(t)$ ve $\left({}^b I_\alpha f\right)(t) = \left(J_{b^-}^\alpha f\right)(t)$ olduğu görülür. Sonuç olarak sağ ve sol uyumlu kesirli integraller, sırasıyla sağ ve sol Riemann-Liouville kesirli integrallere indirgenir.

2016 yılında Yalçın [63], yüksek lisans tezinde uyumlu kesirli integraller için aşağıdaki sonuçları vermiştir.

Lemma 3.2.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Her $x \in [a, b]$ ve $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a\right) dt \right. \\ & \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a\right) dt \right] \\ & - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f\left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f\left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b\right) dt \right] \\ & = \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x) + f(a))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^x I_a f\left(\frac{x+a}{2}\right) + I_a^a f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x) + f(b))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^x I_a f\left(\frac{x+b}{2}\right) + I_a^b f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $B_t(a, b)$, tamamlanmamış beta fonksiyonudur [63].

Teorem 3.2.2. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere (a,b) aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ve $|f'| \leq K$ ise bu takdirde $\alpha \in (n, n+1]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x)+f(a))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^xI_\alpha f\left(\frac{x+a}{2}\right) + I_\alpha^a f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x)+f(b))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^xI_\alpha f\left(\frac{x+b}{2}\right) + I_\alpha^b f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \right| \quad (3.2.9) \\ & \leq K \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{(b-a)\Gamma(\alpha+1)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [63].

2018 yılında Set ve arkadaşları [57], uyumlu kesirli integral operatörler yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Teorem 3.2.3. $0 \leq a < b$ olmak üzere $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in L[a,b]$ olsun. Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında konveks ve $\alpha \in (n, n+1]$ ise uyumlu kesirli integraller için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha \Gamma(\alpha-n)} \left[(I_\alpha^a f)(b) + (I_\alpha^b f)(a) \right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad (3.2.10)$$

eşitsizliği sağlanır [57].

Rashid ve arkadaşları [51], geometrik konveks fonksiyonlar için uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Lemma 3.2.2. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I} \subset I$ üzerinde α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$ ve $D_\alpha(f) \in L_\alpha[a, b]$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} & b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \\ &= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right] \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

eşitliği geçerlidir [51].

Teorem 3.2.4. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I} \subset I$ üzerinde α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$ ve $|f'|$ geometrik konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{J} \left(\left(a^{\alpha+1} |f'(a)| \right)^{\frac{1}{2}}, \left(b^{\alpha+1} |f'(b)| \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \\ & \quad \times \left[\left(a^{\alpha+1} |f'(a)| \right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\alpha+1} |f'(b)| \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

eşitsizliği sağlanır [51].

Teorem 3.2.5. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I} \subset I$ üzerinde α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$, $q > p > 0$ ve $|f'|^q$ geometrik konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{p(\alpha+1)}{2}}, b^{\frac{p(\alpha+1)}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\mathcal{L} \left(|f'(a)|^{\frac{1}{2}}, |f'(b)|^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \left[\left(a^{\frac{\alpha+1}{2}} |f'(a)|^{\frac{1}{2q}} \right) + \left(b^{\frac{\alpha+1}{2}} |f'(b)|^{\frac{1}{2q}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

eşitsizliği sağlanır [51].

Teorem 3.2.6. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{o}{I} \subset I$ üzerinde α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$, $q > p > 0$ ve $|f'|^q$ geometrik konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{q(\alpha+1)}{2}}, b^{\frac{q(\alpha+1)}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \times \left[\left(a^{\alpha+1} |f'(a)| \right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\alpha+1} |f'(b)| \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği sağlanır [51].

Teorem 3.2.7. $f : I \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{o}{I} \subset I$ üzerinde α . mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. Eğer $\alpha \in (0, 1]$, $q > 1$, $q > p > 0$ ve $|f'|^q$ geometrik konveks ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{(\alpha+1)}{2}}, b^{\frac{(\alpha+1)}{2}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \times \left[\mathcal{L} \left(\left(a^{\alpha+1} |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{2}}, \left(b^{\alpha+1} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(a^{\alpha+1} |f'(a)| \right)^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\alpha+1} |f'(b)| \right)^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

eşitsizliği sağlanır [51].

Set ve arkadaşları [58], uyumlu kesirli integral operatörler yardımıyla konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmiştir.

Lemma 3.2.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Her $x \in [a, b]$ ve $n = 0, 1, 2, \dots$, $\alpha \in (n, n+1]$ için

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) f'(tx + (1-t)a) dt \\ & - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n) f'(tx + (1-t)b) dt \\ & = \frac{\Gamma(\alpha-n) \left[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha \right]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} \left[{}^x I_a f(a) + I_a^x f(b) \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

eşitliği sağlanır [58].

Teorem 3.2.8. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks, $x \in [a, b]$ ve $|f'(x)| \leq M$, $\alpha \in (n, n+1]$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma(\alpha-n) \left[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha \right]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} \left[{}^x I_a f(a) + I_a^x f(b) \right] \right| \\ & \leq \frac{M \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right] \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

eşitsizliği sağlanır [58].

Teorem 3.2.9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks, $x \in [a, b]$ ve $|f'(x)| \leq M$, $\alpha \in (n, n+1]$ ise

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha-n) \left[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha \right]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} \left[{}^x I_\alpha f(a) + I_\alpha^x f(b) \right] \right| \quad (3.2.18)$$

$$\leq \frac{M\Gamma(\alpha-n+1)}{n!(b-a)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right] \left(\int_0^1 B_t(n+1, \alpha-n)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir [58].

Teorem 3.2.10. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$ konveks, $q \geq 1$, $x \in [a, b]$ ve $|f'(x)| \leq M$, $\alpha \in (n, n+1]$ ise

$$\left| \frac{\Gamma(\alpha-n) \left[(x-a)^\alpha + (b-x)^\alpha \right]}{\Gamma(\alpha+1)(b-a)} f(x) - \frac{1}{b-a} \left[{}^x I_\alpha f(a) + I_\alpha^x f(b) \right] \right| \quad (3.2.19)$$

$$\leq M \frac{\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)(b-a)} \left[(x-a)^{\alpha+1} + (b-x)^{\alpha+1} \right]$$

eşitsizliği sağlanır [58].

3.3. ω -Riemann Liouville Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Bu bölümde Riemann Liouville kesirli integral operatörünün genel bir hali olan ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörler verilir, bu integral operatör üzerine yapılan çalışmalar verilmiştir.

Tanım 3.3.1. $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, $\mathbb{R}$ 'de sınırlı veya sınırsız bir aralık. $\omega(x)$, $(a, b]$ aralığında artan, pozitif, monoton ve $\omega'(x)$, (a, b) aralığında sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $\alpha > 0$ için, $[a, b]$ aralığında sırasıyla α . mertebeden sol ve sağ ω -Riemann Liouville kesirli integrali

$$I_{a+}^{\alpha;\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \omega'(t) (\omega(x) - \omega(t))^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \geq a \quad (3.3.1)$$

ve

$$I_{b-}^{\alpha;\omega} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \omega'(t) (\omega(t) - \omega(x))^{\alpha-1} f(t) dt, \quad b \geq x \quad (3.3.2)$$

şeklinde tanımlanır [36].

Ayrıca sol ve sağ ω -Riemann Liouville kesirli integralleri $\alpha, \beta > 0$ için

$$i) I_{a+}^{\alpha;\omega} (\omega(x) - \omega(a))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (\omega(x) - \omega(a))^{\beta+\alpha-1}$$

$$ii) I_{b-}^{\alpha;\omega} (\omega(b) - \omega(x))^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (\omega(b) - \omega(x))^{\beta+\alpha-1}$$

özelliklerine sahiptir [36].

Teorem 3.3.1. $\alpha, \beta > 0$ ve f sürekli bir fonksiyon olmak üzere ω -Riemann Liouville kesirli integralleri için

$$I_{a+}^{\alpha;\omega} I_{a+}^{\beta;\omega} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta;\omega} f(x) \quad \text{ve} \quad I_{b-}^{\alpha;\omega} I_{b-}^{\beta;\omega} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta;\omega} f(x) \quad (3.3.3)$$

özellikleri geçerlidir [36].

Sonuç 3.3.1. ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörleri $\omega(x) = x$ durumunda, Riemann Liouville kesirli integral operatörlerine indirgenir [36].

2018 yılında Farid ve arkadaşları [28], ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler için yeni sonuçlar vermiştir.

Teorem 3.3.2. $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. f pozitif ve konveks, h diferansiyellenebilir ve kesin artan fonksiyonlar, $h' \in L[a, b]$, $\mu, \nu \geq 1$ ve $\xi \in [a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \Gamma(\mu) I_{a^+}^{\mu,h} f(\xi) + \Gamma(\nu) I_{b^-}^{\nu,h} f(\xi) \\
& \leq \frac{(h(\xi) - h(a))^{\mu-1}}{\xi - a} \left[(\xi - a) (f(\xi) h(\xi) - f(a) h(a)) \right. \\
& \quad \left. - (f(\xi) - f(a)) \int_a^\xi h(t) dt \right] \\
& \quad + \frac{(h(b) - h(\xi))^{\nu-1}}{b - \xi} \left[(b - \xi) (f(b) h(b) - f(\xi) h(\xi)) \right. \\
& \quad \left. - (f(b) - f(\xi)) \int_\xi^b h(t) dt \right]
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

eşitsizliği sağlanır [28].

Teorem 3.3.3. $f, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $|f'|$ pozitif ve konveks, h diferansiyellenebilir ve kesin artan fonksiyonlar, $h' \in L[a, b]$, $\mu, \nu > 0$, $\xi \in [a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(\mu+1) I_{a^+}^{\mu,h} f(\xi) + \Gamma(\nu+1) I_{b^-}^{\nu,h} f(\xi) - \left[f(a) (h(\xi) - h(a))^\mu \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + f(b) (h(b) - h(\xi))^\nu \right] \right| \\
& \leq \frac{(h(\xi) - h(a))^\mu (\xi - a) |f'(a)| + (h(b) - h(\xi))^\nu (b - \xi) |f'(b)|}{2} \\
& \quad + \frac{|f'(\xi)|}{2} \left((h(\xi) - h(a))^\mu (\xi - a) + (h(b) - h(\xi))^\nu (b - \xi) \right)
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

eşitsizliği sağlanır [28].

2019 yılında Liu ve arkadaşları [38], pozitif fonksiyonları kullanarak konveks fonksiyonlar için ω - Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.4. $0 \leq c < d$, $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon ve $g \in L[c, d]$ olsun. Eğer g fonksiyonu $[c, d]$ aralığında konveks, ψ ise $(c, d]$ aralığında pozitif ve monoton artan, $\psi'(x)$ (a, b) aralığında sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $\alpha \in (0, 1)$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{c+d}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(d-c)^\alpha} \left[I_{\psi^{-1}(c)^+}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(d)) + I_{\psi^{-1}(d)^-}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(c)) \right] \\
&\leq \frac{g(c) + g(d)}{2}
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği sağlanır [38].

Lemma 3.3.1. $c < d$ ve $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, (c, d) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g' \in L[c, d]$ olsun. Eğer $\psi(x)$ $(c, d]$ aralığında pozitif artan, $\psi'(x)$ de (c, d) aralığında sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\alpha \in (0, 1)$ ise

$$\begin{aligned}
&\frac{g(c) + g(d)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(d-c)^\alpha} \left[I_{\psi^{-1}(c)^+}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(d)) + I_{\psi^{-1}(d)^-}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(c)) \right] \\
&= \frac{1}{2(d-c)^\alpha} \int_{\psi^{-1}(c)}^{\psi^{-1}(d)} \left[(\psi(v) - c)^\alpha - (d - \psi(v))^\alpha \right] (g' \circ \psi)(v) \psi'(v) dv
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

eşitliği geçerlidir [38].

Teorem 3.3.5. $c < d$ ve $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, (c, d) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g' \in L[c, d]$ olsun. Eğer $\psi(x)$, $(c, d]$ aralığında pozitif artan, $\psi'(x)$, (c, d) aralığında sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $|g'|$ konveks ve $\alpha \in (0, 1)$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(c) + g(d)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(d-c)^\alpha} \left[I_{\psi^{-1}(c)^+}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(d)) + I_{\psi^{-1}(d)^-}^{\alpha;\psi} (g \circ \psi)(\psi^{-1}(c)) \right] \right| \\
&\leq \frac{d-c}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) (|g'(d)| + |g'(c)|)
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği geçerlidir [38].

2019 yılında Başcı ve Baleanu [10], ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Ostrowski tipli eşitsizlik elde etmişlerdir.

Teorem 3.3.6. $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a_1, b_1 \in \overset{\circ}{I}$, $a_1 < b_1$ ve her $\xi \in [a_1, b_1]$ için $|g'(\xi)| \leq M$ olsun. Eğer ψ sürekli ve pozitif artan bir fonksiyon, $x \in [a_1, b_1]$, $\psi'(x) \geq 1$ ve $\alpha_1, \beta_1 > 0$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \left((\psi(b_1) - \psi(x))^{\beta_1} + (\psi(x) - \psi(a_1))^{\alpha_1} \right) g(x) \right. \\ & \left. - \left(\Gamma(\beta_1 + 1) I_{b_1^-}^{\beta_1; \psi} g(x) + \Gamma(\alpha_1 + 1) I_{a_1^+}^{\alpha_1; \psi} g(x) \right) \right| \\ & \leq M \left(\frac{\beta_1}{\beta_1 + 1} (\psi(b_1) - \psi(x))^{\beta_1 + 1} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1} (\psi(x) - \psi(a_1))^{\alpha_1 + 1} \right) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

eşitsizliği sağlanır [10].

3.4. Genelleştirilmiş Oransal Kesirli (GPF) İntegral Operatörler

2014 yılında Khalil ve arkadaşları tarafından tanıtilan uyumlu kesirli türev operatöründe türevin mertebesi sıfıra yaklaşırken limiti fonksiyonun kendisini vermemektedir. Anderson ve Ulness 2015 yılında bu eksikliği gidermek adına oransal türevsel kontrol denetim yönteminden faydalanarak yeni bir uyumlu kesirli türev geliştirmişlerdir. Bu çalışmaların akabinde bazı yazarlar tekilliği ortadan kaldırmak adına kesirli türevin çekirdeğinde exponential fonksiyon kullanmışlardır. Fakat, elde edilen kesirli türev operatörlerine karşılık gelen integrallerin yarı grup özelliği taşımadığı görülmüştür. Bahsedilen bu çalışmalardan hareketle 2015 yılında Anderson ve Ulness genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) türevini, 2017 yılında ise Jarad ve arkadaşları verilen türeve karşılık gelen genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integralini tanımlamışlardır. Bu kesirli integral operatörün çekirdeğinin exponential fonksiyon içermesi, yarı grup özelliği taşıması, ayrıca operatörün ρ değerinin 1 olduğu durumunda mevcut Riemann Liouville integralinin elde edilmesi şeklindeki özellikleri bu operatörü diğer operatörlerden farklı kılmaktadır.

Bu bölümde genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) türev ve integral operatörünün tanım ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.4.1. $\kappa_0, \kappa_1 : [0,1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0,\infty)$ sürekli iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonlar $t \in \mathbb{R}, \alpha \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_1(\alpha, t) &= 1 & \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \kappa_0(\alpha, t) &= 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_1(\alpha, t) &= 0 & \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \kappa_0(\alpha, t) &= 1 \\ \kappa_1(\alpha, t) &\neq 0, \alpha \in [0,1] & \kappa_0(\alpha, t) &\neq 0, \alpha \in (0,1] \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

eşitliklerini sağlasın. Bu durumda α . mertebeden genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) türev

$${}^{GPF}D^\alpha f(t) = \kappa_1(\alpha, t) f(t) + \kappa_0(\alpha, t) f'(t) \quad (3.4.2)$$

şeklinde tanımlanır [7].

Yukarıda verilen tanımdan hareketle 2017 yılında Jarad ve arkadaşları genelleştirilmiş oransal kesirli türev operatörünün $\kappa_1(\alpha, t) = 1 - \alpha$ ve $\kappa_0(\alpha, t) = \alpha$ durumunda

$${}^{GPF}D^\alpha f(t) = (1 - \alpha) f(t) + \alpha f'(t) \quad (3.4.3)$$

α . mertebeden kesirli türevini verip, karşılık gelen kesirli integralleri elde etmişlerdir [32].

Tanım 3.4.2. $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ve $f \in L(a, b)$ olsun. $\rho \in (0,1]$ ve $\alpha > 0$ için α . mertebeden sol genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral

$$\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(t) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.4.4)$$

ve α . mertebeden sağ genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral

$$\left({}^{GPF}I_b^{\alpha,\rho} f\right)(t) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_t^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\tau-t)} (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.4.5)$$

şeklindedir [32].

Ayrıca sol ve sağ genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integralleri, $\alpha, \beta > 0$ ve $\rho \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} i) \quad & \left({}^{GPF}I_a^{\alpha,\rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\rho^\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}x} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \\ ii) \quad & \left({}^{GPF}I_b^{\alpha,\rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)} (b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)\rho^\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-x)} (b-x)^{\alpha+\beta-1} \end{aligned}$$

özellikleri sağlanır [32].

Teorem 3.4.1. $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $t \geq a$, $\alpha, \beta > 0$ ve $\rho \in (0,1]$ koşulları altında

$${}^{GPF}I_a^{\alpha,\rho} \left({}^{GPF}I_a^{\beta,\rho} f\right)(t) = {}^{GPF}I_a^{\beta,\rho} \left({}^{GPF}I_a^{\alpha,\rho} f\right)(t) = \left({}^{GPF}I_a^{\alpha+\beta,\rho} f\right)(t) \quad (3.4.6)$$

eşitlikleri sağlanır [32].

Sonuç 3.4.1. Genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral operatörü $\rho = 1$ durumunda Riemann Liouville kesirli integral operatörüne indirgenir [32].

3.5. Caputo Fabrizio Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Bu bölümde Caputo Fabrizio kesirli integral operatörlerinin tanım ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.5.1. $f \in L(a, b)$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\alpha > 0$, $[\alpha]$ α 'nın tam değeri olmak üzere $n = [\alpha] + 1$ için sırasıyla α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevleri

$${}^C D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt \quad x > a, \quad (3.5.1)$$

ve

$${}^C D_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dt \quad x < b. \quad (3.5.2)$$

şeklindedir [50].

Riemann-Liouville kesirli türevinin tanımına göre sabitin türevi sıfır olmamaktadır. 1967 yılında M. Caputo bu eksikliği gidermek, ayrıca kesirli mertebeden türevin başlangıç koşullarını, tam sayılı mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları cinsinden ifade edilebilir hale getirmek adına Caputo kesirli türev operatörünü sunmuştur.

Daha sonra yakın geçmişte, Caputo'nun tanımında kullanılan $(x-t)^{\alpha+1-n}$ çekirdeği, $x = t$ noktasında tekil olduğu için, tekilliği kaldırmak adına Caputo ve Fabrizio 2015 yılında exponential fonksiyon kullanarak yeni α . mertebeden sol kesirli türev tanımını, Abdeljawad ve Baleanu, 2017 yılında α . mertebeden sağ Caputo-Fabrizio kesirli türev tanımını ve ilgili α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integrallerini vermişlerdir [1, 14].

Tanım 3.5.2. $f \in L(a, b)$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli türevleri

$${}^{CF} D_a^{\alpha} f(x) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^x \exp\left(\frac{-\alpha(x-t)}{1-\alpha}\right) f'(t) dt \quad (x > a), \quad (3.5.3)$$

ve

$${}^{CF}D_b^\alpha f(x) = -\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_x^b \exp\left(\frac{-\alpha(t-x)}{1-\alpha}\right) f'(t) dt \quad (x < b). \quad (3.5.4)$$

olarak tanımlanır. Burada $M(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu olup $M(0) = M(1) = 1$ şeklindedir [1, 14].

Tanım 3.5.3. $f \in L(a, b)$ ve $a < x < b$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere α . mertebeden sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integralleri

$$\left({}^{CF}I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(x) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^x f(t) dt \quad (x > a), \quad (3.5.5)$$

ve

$$\left({}^{CF}I_b^\alpha f\right)(x) = \frac{1-\alpha}{B(\alpha)} f(x) + \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_x^b f(t) dt \quad (b > x). \quad (3.5.6)$$

olarak tanımlanır. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonu olup $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir [1].

Gürbüz ve arkadaşları [30], Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörlerini kullanarak Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Teorem 3.5.1. $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. $\alpha \in [0, 1]$ ve $k \in [a, b]$ olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)} \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f\right)(k) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f\right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(k) \right] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.5.7)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonudur [30].

Teorem 3.5.2. $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar ve $fg \in L_1[a, b]$ olsun. $\alpha \in [0, 1]$ ve $k \in [a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{2B(\alpha)}{\alpha(b-a)} \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha fg \right)(k) + \left({}^{CF}I_b^\alpha fg \right)(k) - \frac{2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(k)g(k) \right] \\ & \leq \frac{2}{3}M(a, b) + \frac{1}{3}N(a, b) \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu ve

$$M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$$

$$N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

şeklindedir [30].

Teorem 3.5.3. $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar ve $fg \in L_1[a, b]$ olsun. $\alpha \in [0, 1]$ ve $k \in [a, b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha fg \right)(k) + \left({}^{CF}I_b^\alpha fg \right)(k) \right] + \frac{1-\alpha}{\alpha(b-a)} f(k)g(k) \\ & \leq \frac{2}{3}M(a, b) + \frac{4}{3}N(a, b) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonu olup, $M(a, b)$, $N(a, b)$ Teorem 3.5.2'deki gibidir [30].

Lemma 3.5.1. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L_1[a, b]$ olsun. $a, b \in I$, $a < b$, $k \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)} f(k) \\ & = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)} \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(k) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(k) \right] \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

eşitliği sağlanır. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonudur [30].

Teorem 3.5.4. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferansiyellenebilen ve $a, b \in I$ için $[a, b]$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. $f' \in L_1[a, b]$, $k \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{2(1-\alpha)}{\alpha(b-a)} f(k) - \frac{B(\alpha)}{\alpha(b-a)} \left[({}^{CF}I_a^\alpha f)(k) + ({}^{CF}I_b^\alpha f)(k) \right] \right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8} \quad (3.5.11)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $B(\alpha)$ normalleştirme fonksiyonudur [30].

3.6. ψ -Caputo Kesirli Türev Operatörler

2017 yılında Almeida [6], artan fonksiyonları kullanarak Caputo kesirli türev operatörünün genel bir hali olan ψ -Caputo kesirli türev operatörleri tanımlamıştır.

Tanım 3.6.1. $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$, I 'da sınırlı veya sınırsız bir aralık olmak üzere $\omega(x)$, $[a, b]$ aralığında artan bir fonksiyon, $\omega'(x) \neq 0$ ve $f, \psi \in C^n(I)$ olsun. $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $[\alpha]$, α 'nın tam değeri olmak üzere $n = [\alpha] + 1$ için sırasıyla α . mertebeden sol ve sağ ψ -Caputo kesirli türevleri

$${}^C D_{a^+}^{\alpha, \psi} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\psi'(t) f^n(t)}{(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-n-1}} dt \quad (x > a) \quad (3.6.1)$$

ve

$${}^C D_{b^-}^{\alpha, \psi} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{\psi'(t) f^n(t)}{(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-n-1}} dt \quad (b > x) \quad (3.6.2)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Sonuç 3.6.1. ψ -Caputo kesirli türev operatörü $\psi(t) = t$ durumunda Caputo kesirli türev operatörüne indirgenir [6].

3.7. Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

2017 yılında Jarad ve arkadaşları [33], uyumlu kesirli integral operatörünün daha genel hali olan yeni uyumlu kesirli integral operatörlerini tanıtmışlardır.

Tanım 3.7.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha, \beta > 0$ ve $f \in L[a, b]$ olmak üzere sırasıyla β . mertebeden sol ve sağ yeni uyumlu kesirli integral operatörler

$${}^{\beta}I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \left(\frac{(x-a)^{\alpha} - (t-a)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(t-a)^{1-\alpha}} dt \quad (3.7.1)$$

ve

$${}^{\beta}I_b^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_x^b \left(\frac{(b-x)^{\alpha} - (b-t)^{\alpha}}{\alpha} \right)^{\beta-1} \frac{f(t)}{(b-t)^{1-\alpha}} dt \quad (3.7.2)$$

şeklinde tanımlanır [33].

Sonuç 3.7.1. Sol yeni uyumlu kesirli integralde $a = 0$ ve $\alpha = 1$ alındığında sol Riemann-Liouville kesirli integrale, sağ yeni uyumlu kesirli integralde $b = 0$ ve $\alpha = 1$ alındığında sağ Riemann-Liouville kesirli integrale indirgenir [33].

2019 yılında Set ve arkadaşları [56], yeni uyumlu kesirli integral operatörleri içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Lemma 3.7.1. $a > b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta f'(tx + (1-t)a) dt \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta f'(tx + (1-t)b) dt
\end{aligned} \tag{3.7.3}$$

eşitliği geçerlidir [56].

Teorem 3.7.1. $a > b$ ve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks, $x \in [a, b]$ ve $|f'(x)| \leq M$ olmak üzere, $\alpha, \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{M}{\alpha^{\beta+1}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right) \left[\frac{(x-a)^{\alpha\beta+1} + (b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [56].

4. BULGULAR

Bu bölüm, altı alt bölümden oluşmaktadır. Belirtilen alt bölümlerde, uyumlu kesirli integral operatörleri, ω -Riemann kesirli integral operatörler, genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral operatörler, Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörler, ψ -Caputo kesirli türev operatörler ve yeni uyumlu kesirli integral operatörler ile ilgili yeni sonuçlar verilmiştir.

4.1. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

Bu bölümde uyumlu kesirli integral operatörleri yardımıyla önce Hermite Hadamard daha sonra Pòlya-Szegö-Chebyshev tipli yeni eşitsizlikler sunulmuştur.

4.1.1. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde Lemma 3.2.1'deki eşitlikten faydalanarak uyumlu kesirli integraller yardımıyla quasi konveks, s -konveks ve m -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 3.2.1'den hareketle tez boyunca kısaltma için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha-n)(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x)+f(a))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^x I_a^\alpha f\left(\frac{x+a}{2}\right) + I_a^\alpha f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \\ & + \frac{\Gamma(\alpha-n)(b-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \times \frac{(f(x)+f(b))}{(b-a)} - \frac{2^\alpha}{b-a} \left[{}^x I_a^\alpha f\left(\frac{x+b}{2}\right) + I_a^\alpha f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] = F_f(\alpha, n; x) \end{aligned}$$

olarak ifade edilecektir.

Teorem 4.1.1.1. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ quasi konveks fonksiyon ise, $\alpha \in (n, n+1]$, $n=0,1,2,\dots$ olmak üzere, her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}
& |F_f(\alpha, n; x)| \\
& \leq \frac{\Gamma(\alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha + 2)(b - a)} \\
& \quad \times \left((x - a)^{\alpha + 1} \sup \{ |f'(x)|, |f'(a)| \} + (b - x)^{\alpha + 1} \sup \{ |f'(x)|, |f'(b)| \} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.1.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

İspat. Lemma 3.2.1'den ve $|f'|$ fonksiyonunun quasi konveksliğinden

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(x - a)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} a \right) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} a \right) dt \right] \\
&\leq \frac{(x - a)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \left| \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} a \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} a \right) \right| dt \right] \\
&\leq \frac{(x - a)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \sup \{ |f'(x)|, |f'(a)| \} \int_0^1 |B_t(n + 1, \alpha - n)| dt
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{(b - x)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} b \right) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} b \right) dt \right] \\
&\leq \frac{(b - x)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \left[\int_0^1 \left| \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1 + t}{2} x + \frac{1 - t}{2} b \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{B_t(n + 1, \alpha - n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1 - t}{2} x + \frac{1 + t}{2} b \right) \right| dt \right] \\
&\leq \frac{(b - x)^{\alpha + 1}}{n!(b - a)} \sup \{ |f'(x)|, |f'(b)| \} \int_0^1 |B_t(n + 1, \alpha - n)| dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan tamamlanmamış beta fonksiyonu kısmi integrasyon yardımıyla hesaplanarak

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| dt &= B(n+1, \alpha-n) - B(n+2, \alpha-n) \\
&= \frac{n! \Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(n+1)! \Gamma(\alpha-n)}{(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)} \\
&= \frac{n! \Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha+2)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Son eşitlik I_1 ve I_2 için elde edilen eşitsizliklerde yerine yazılırsa istenen sonuç bulunur.

Sonuç 4.1.1.1. Eğer Teorem 4.1.1.1’de $\alpha = n+1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(x-a)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(a)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^-}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) + J_{a^+}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \right. \\
&+ \frac{(b-x)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(b)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^-}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) + J_{b^+}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \Bigg| \quad (4.1.1.2) \\
&\leq \frac{(x-a)^{n+2} \sup \{|f'(x)|, |f'(a)|\} + (b-x)^{n+2} \sup \{|f'(x)|, |f'(b)|\}}{\Gamma(n+3)(b-a)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Teorem 4.1.1.2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $|f'|$ s -konveks fonksiyon ise bu durumda $s \in (0, 1]$ ve $\alpha \in (n, n+1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&|F_f(\alpha, n; x)| \\
&\leq \frac{(\Upsilon_1 + \Upsilon_2)}{n! 2^{s+1} (b-a)} \times \left[(x-a)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right] \quad (4.1.1.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada Υ_1 ve Υ_2 sırasıyla

$$\Upsilon_1 = \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1+t)^s dt = \Gamma(n+1) \Gamma(\alpha-n) \times \left[\frac{2^s - \Gamma(\alpha+1) {}_2F_1(n+1, -1-s; \alpha+1; -1)}{\Gamma(\alpha+1)(s+1)} \right]$$

ve

$$\Upsilon_2 = \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1-t)^s dt = \frac{B(n+1, \alpha-n+s+1)}{(s+1)}$$

şeklindedir [4].

İspat. Lemma 3.2.1'den

$$Q_1 = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right]$$

ve

$$Q_2 = \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right]$$

olmak üzere $F_f(\alpha, n; x) = Q_1 + Q_2$ olsun. Burada integraller için üçgen eşitsizliği ve mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \left| \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} \right| \left| f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) \right| dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece $|f'|$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında s -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{2n!(b-a)} \left[\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| \left\{ \left(\frac{1+t}{2} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s |f'(a)| \right\} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| \left\{ \left(\frac{1-t}{2} \right)^s |f'(x)| + \left(\frac{1+t}{2} \right)^s |f'(a)| \right\} dt \right] \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{2^{s+1}n!(b-a)} \left[(|f'(x)| + |f'(a)|) \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1+t)^s dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1-t)^s dt \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde Q_2 için

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \left| \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{2^{s+1}n!(b-a)} \left[(|f'(x)| + |f'(b)|) \left(\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1+t)^s dt \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1-t)^s dt \right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Q_1 ve Q_2 nin son ifadelerindeki integraller hesaplandığında ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.2. Teorem 4.1.1.2’de

i) $s=1$ durumunda,

$$\begin{aligned}
&|F_f(\alpha, n; x)| \\
&\leq \frac{1}{4n!(b-a)} \\
&\quad \times \left[B(n+1, \alpha-n) \times \left(\frac{\alpha-2(n-1)}{\alpha-n-1} - \frac{(n+1)(2\alpha+n+6)}{2\alpha^2+6\alpha+4} \right) \right] \\
&\quad \times \left[(x-a)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.4}$$

ii) $\alpha = n+1$ durumunda,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(a)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x-}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) + J_{a+}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(b)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x-}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) + J_{b+}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{1}{2^{s+1}(s+1)(b-a)} \\
& \times \left[\left(\frac{2^s - \Gamma(n+2) {}_2F_1(n+1, -s; n; -1)}{\Gamma(n+2)} + \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(n+s+3)} \right) \right] \\
& \times \left[(x-a)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.5}$$

iii) $s=1$ ve $\alpha=n+1$ durumunda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(a)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x-}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) + J_{a+}^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f'(x) + f'(b)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x-}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) + J_{b+}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{1}{4n!(b-a)} \times \left(\frac{n+5}{2n^2+8n+6} \right) \\
& \times \left[(x-a)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.6}$$

eşitsizlikleri elde edilir [4].

Teorem 4.1.1.3. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|$ m -konveks fonksiyon ise bu durumda $m \in (0,1]$ ve $n=0,1,2,\dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& |F_f(\alpha, n; x)| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{4n!(b-a)} \left[M_1(|f'(x)| + |f'(a)|) + mM_2 \left(\left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right) \right] \\
& + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{4n!(b-a)} \left[M_1(|f'(x)| + |f'(b)|) + mM_2 \left(\left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada M_1 ve M_2 sırasıyla

$$M_1 = \frac{(\alpha+2)(3(\alpha+1)-2(n+1))-(n+1)(n+2)}{2(\alpha+2)(\alpha+1)} B(n+1, \alpha-n)$$

ve

$$M_2 = \frac{2n-\alpha-1}{2(\alpha+1)} B(n+1, \alpha-n)$$

şeklindedir [4].

İspat. Teorem 4.1.1.2 nin ispatında olduğu gibi $F_f(\alpha, n; x) = Q_1 + Q_2$ olsun. Bu durumda

$|f'|$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \left| \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{2n!(b-a)} \left[\int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| \left\{ \left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(x)| + m \left(\frac{1-t}{2} \right) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right\} dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| \left\{ m \left(\frac{1-t}{2} \right) \left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| + \left(\frac{1+t}{2} \right) |f'(a)| \right\} dt \right] \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{4n!(b-a)} \left[(|f'(x)| + |f'(a)|) \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1+t) dt \right. \\
& \quad \left. + m \left(\left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right) \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)| (1-t) dt \right]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \left| \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{n!(b-a)} \left[\int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^1 \frac{B_t(n+1, \alpha-n)}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \right] \right| \\
&\leq \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{4n!(b-a)} \left[(|f'(x)| + |f'(b)|) \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|(1+t) dt \right. \\
&\quad \left. + m \left(\left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right) \int_0^1 |B_t(n+1, \alpha-n)|(1-t) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral işlemleri yapılarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.3. Teorem 4.1.1.3 de

i) $m=1$ için

$$\begin{aligned}
&|F_f(\alpha, n; x)| \\
&\leq \frac{(Q_1 + Q_2)}{4n!(b-a)} \times \left[(x-a)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{\alpha+1} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.8}$$

ii) $\alpha = n+1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(x-a)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f(x) + f(a)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^-}^{n+1} f \left(\frac{a+x}{2} \right) + J_{a^+}^{n+1} f \left(\frac{a+x}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f(x) + f(b)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^+}^{n+1} f \left(\frac{x+b}{2} \right) + J_{b^-}^{n+1} f \left(\frac{x+b}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq \frac{(x-a)^{n+2}}{4n!(b-a)} (|f'(x)| + |f'(a)|) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{n+5}{2n^2+8n+6} \right) + m \left(\left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| \right) \left(\frac{n}{2(n+1)(n+2)} \right) \right] \\
&\quad + \frac{(b-x)^{n+2}}{4n!(b-a)} (|f'(x)| + |f'(b)|) \\
&\quad \times \left[\left(\frac{n+5}{2n^2+8n+6} \right) + m \left(\left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| + \left| f' \left(\frac{x}{m} \right) \right| \right) \left(\frac{n}{2(n+1)(n+2)} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.9}$$

iii) $m=1$ ve $\alpha = n+1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f(x) + f(a)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^-}^{n+1} f\left(\frac{a+x}{2}\right) + J_{a^+}^{n+1} f\left(\frac{a+x}{2}\right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{\Gamma(n+2)(b-a)} [f(x) + f(b)] - \frac{2^{n+1}}{(b-a)} \left[J_{x^+}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) + J_{b^-}^{n+1} f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right] \right| \quad (4.1.1.10) \\
& \leq \frac{1}{4n!(b-a)} \times \left(\frac{n+5}{2n^2+8n+6} \right) \\
& \times \left[(x-a)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(a)|) + (b-x)^{n+2} (|f'(x)| + |f'(b)|) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir [4].

Aşağıda Lemma 3.2.2 yardımıyla uyumlu kesirli integraller içeren s -geometrik konveks ve m -geometrik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1.4. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $s \in (0,1]$ için $|f'|$ s -geometrik konveks olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \begin{cases} |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} W, & |f'(a)|, |f'(b)| \leq 1 \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} W, & |f'(a)|, |f'(b)| \geq 1 \\ |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} W, & |f'(a)| \leq 1 \leq |f'(b)| \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} W, & |f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)| \end{cases} \quad (4.1.1.11)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $u, v > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi(u, v) &= |f'(a)|^u |f'(b)|^{-v} \\ \chi(u, v) &= |f'(b)|^u |f'(a)|^{-v}\end{aligned}$$

ve

$$W = \left(\frac{2a^{1+\alpha} \psi\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right) - 2b^{1+\alpha} \chi\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)}{(1+\alpha)(\ln a - \ln b) - s \ln(\psi(s, s))} \right)$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'den, $|f'|$ fonksiyonunun s -geometrik konveksliğinden

$$\begin{aligned}\left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| &= \left| \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right] \right| \\ &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right| dt \right] \\ &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right]\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca Lemma 2.3.1 den, eğer

i) $1 \geq |f'(a)|, |f'(b)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right] \\
& \leq \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{s\left(\frac{1+t}{2}\right)} |f'(a)|^{s\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{s\left(\frac{1-t}{2}\right)} |f'(a)|^{s\left(\frac{1+t}{2}\right)} dt \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} W
\end{aligned}$$

ii) $|f'(a)|, |f'(b)| \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right] \\
& \leq \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{st-s+2}{2}} |f'(a)|^{\frac{-st-s+2}{2}} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{-st-s+2}{2}} |f'(a)|^{\frac{st-s+2}{2}} dt \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} W
\end{aligned}$$

iii) $|f'(b)| \geq 1 \geq |f'(a)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right] \\
& \leq \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{st-s+2}{2}} |f'(a)|^{\frac{s-st}{2}} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{-st-s+2}{2}} |f'(a)|^{\frac{st+s}{2}} dt \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} W
\end{aligned}$$

iv) $|f'(a)| \geq 1 \geq |f'(b)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right] \\
& \leq \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{st+s}{2}} |f'(a)|^{\frac{-s-st+2}{2}} dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} |f'(b)|^{\frac{s-st}{2}} |f'(a)|^{\frac{st-s+2}{2}} dt \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} W
\end{aligned}$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.4. Teorem 4.1.1.4’de $s=1$ olarak alınırsa (4.1.1.11) eşitsizliği (3.2.12) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.5. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $s \in (0,1]$ için $|f'|^q$ s -geometrik konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \times \begin{cases} |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} T, & (|f'(a)|, |f'(b)| \leq 1) \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} T, & (|f'(a)|, |f'(b)| \geq 1) \\ |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} T, & (|f'(a)| \leq 1 \leq |f'(b)|) \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} T, & (|f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)|) \end{cases} \quad (4.1.1.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $u, v > 0$ için $\chi(u, v) = |f'(b)|^u |f'(a)|^{-v}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
T = & \left[\left(\frac{2}{((1+\alpha)p(\ln b - \ln a))^{\frac{1}{p}}} \times \left(\frac{|f'(b)|^{\frac{qs}{2}} - |f'(a)|^{\frac{qs}{2}}}{\ln(\chi(qs, qs))} \right)^{\frac{1}{q}} \right) \right. \\
& \times \left. \left(\frac{\left(b^{p(1+\alpha)} - (ab)^{\frac{p(1+\alpha)}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}}{|f'(a)|^{\frac{s}{2}}} + \frac{\left((ab)^{\frac{p(1+\alpha)}{2}} - a^{p(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{p}}}{|f'(b)|^{\frac{s}{2}}} \right) \right]
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.2.2 den ve integraller için Hölder eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|f'|^q$ fonksiyonunun s -geometrik konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| b^{\alpha} f(b) - a^{\alpha} f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_{\alpha} x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca Lemma 2.3.1 den, eğer;

i) $1 \geq |f'(a)|, |f'(b)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)} |f'(a)|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} |f'(a)|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} T
\end{aligned}$$

ii) $1 \leq |f'(a)|, |f'(b)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} T
\end{aligned}$$

iii) $|f'(a)| \leq 1 \leq |f'(b)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{s-st}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{s+st}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} T
\end{aligned}$$

iv) $|f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)|$ ise

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{st+s}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{-s-st+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(b)|^{q\left(\frac{s-st}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} T
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.5. Teorem 4.1.1.5'te $s=1$ olarak alınırsa (4.1.1.12) eşitsizliği (3.2.13) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.6. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $s \in (0,1]$, $q \geq 1$ ve $|f'|^q$ s -geometrik konveks olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \times \begin{cases} |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} K, & (|f'(a)|, |f'(b)| \leq 1) \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} K, & (|f'(a)|, |f'(b)| \geq 1) \\ |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} K, & (|f'(a)| \leq 1 \leq |f'(b)|) \\ |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} K, & (|f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)|) \end{cases} \quad (4.1.1.13)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\begin{aligned}
\psi(u, v) &= |f'(a)|^u |f'(b)|^{-v} \\
\chi(u, v) &= |f'(b)|^u |f'(a)|^{-v}, \quad u, v > 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K &= \left[\left(\frac{2b^{\alpha+1} - 2(ab)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(1+\alpha)(\ln b - \ln a)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2b^{\alpha+1} \chi\left(\frac{qs}{2}, \frac{qs}{2}\right) - 2(ab)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{(1+\alpha)(\ln b - \ln a) + \ln(\chi(qs, qs))} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{2(ab)^{\frac{\alpha+1}{2}} - 2a^{\alpha+1}}{(1+\alpha)(\ln b - \ln a)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2(ab)^{\frac{\alpha+1}{2}} - 2a^{\alpha+1} \psi\left(\frac{qs}{2}, \frac{qs}{2}\right)}{(1+\alpha)(\ln b - \ln a) - \ln(\psi(qs, qs))} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'den ve Power Mean eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|f'|^q$ fonksiyonu s -geometrik konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{1-t}{2}\right)^s} |f'(a)|^{q\left(\frac{1+t}{2}\right)^s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 2.3.1 den, eğer;

i) $1 \geq |f'(a)|, |f'(b)|$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)} |f'(a)|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{sq\left(\frac{1-t}{2}\right)} |f'(a)|^{sq\left(\frac{1+t}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} K
\end{aligned}$$

ii) $1 \leq |f'(a)|, |f'(b)|$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} K
\end{aligned}$$

iii) $|f'(a)| \leq 1 \leq |f'(b)|$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{s-st}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{s+st}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{s}{2}} |f'(b)|^{\frac{2-s}{2}} K
\end{aligned}$$

iv) $|f'(b)| \leq 1 \leq |f'(a)|$ ise,

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{st+s}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{-st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} |f'(b)|^{q\left(\frac{s-st}{2}\right)} |f'(a)|^{q\left(\frac{st-s+2}{2}\right)} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = |f'(a)|^{\frac{2-s}{2}} |f'(b)|^{\frac{s}{2}} K
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.6. Teorem 4.1.1.6’da $s=1$ olarak alınırsa (4.1.1.13) eşitsizliği (3.2.15) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.7. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $m \in (0,1]$ için $|f'|$ m -geometrik konveks olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left[a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.1.1.14)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\mathcal{L}(u, v) = \begin{cases} \frac{v-u}{\ln v - \ln u}, & u \neq v, \\ u, & u = v \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. Lemma 3.2.2'den ve $|f'|$ fonksiyonunun m -geometrik konveksliğinden

$$\begin{aligned}
\left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| &= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{2\alpha} D_\alpha(f) \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) dt \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right| dt \right] \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{m \frac{1+t}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1-t}{2}} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{\alpha+1} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{m \frac{1-t}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1+t}{2}} dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Son eşitsizlikte Logaritmik ortalamadan faydalanarak

$$\begin{aligned}
\left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(b) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| &\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right] \\
&\quad \times \left[a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1.7. Teorem 4.1.1.7’de $m=1$ olarak alınırsa (4.1.1.14) eşitsizliği (3.2.12) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.8. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $m \in (0,1]$ için $|f'|^q$ m -geometrik konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(b) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{p(1+\alpha)}{2}}, b^{\frac{p(1+\alpha)}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\mathcal{L} \left(\left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}}, \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.2.2'den ve integraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|f'|^q$ fonksiyonu m -geometrik konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1+t}{2}} \left| f'(a) \right|^{q \frac{1-t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{p(\alpha+1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^1 \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1-t}{2}} \left| f'(a) \right|^{q \frac{1+t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\frac{b^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} \left(a^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} - b^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} \right)}{\ln a^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} - \ln b^{\frac{(1+\alpha)p}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{\left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{qm}{2}} \left(\left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{qm}{2}} - \left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}} \right)}{\ln \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{qm}{2}} - \ln \left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} \left(a^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} - b^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} \right)}{\ln a^{\frac{(1+\alpha)p}{2}} - \ln b^{\frac{(1+\alpha)p}{2}}} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{\left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}} \left(\left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{qm}{2}} - \left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}} \right)}{\ln \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{qm}{2}} - \ln \left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.8. Teorem 4.1.1.8’de $m=1$ olarak alınırsa (4.1.1.15) eşitsizliği (3.2.13) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.9. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $m \in (0,1]$ için $|f'|^q$ m -geometrik konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(b) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
&\leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{q(1+\alpha)}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{q}{2}}, b^{\frac{q(1+\alpha)}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{mq}{2}} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. \times \left[\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f'(a) \right|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right] \right]
\end{aligned} \tag{4.1.1.16}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 3.2.2 den ve integraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(b) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 1 dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{q(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 1 dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{q(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|f'|^q$ fonksiyonu m -geometrik konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(b) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{q(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1+t}{2}} |f'(a)|^{q \frac{1-t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{q(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1-t}{2}} |f'(a)|^{q \frac{1+t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & = \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{q(1+\alpha)}{2}} |f'(a)|^{\frac{q}{2}}, b^{\frac{q(1+\alpha)}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{mq}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} |f'(a)|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.9. Teorem 4.1.1.9’da $m=1$ olarak alınırsa (4.1.1.16) eşitsizliği (3.2.14) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.1.10. $f : I \subset \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon $\alpha \in (0,1]$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L_\alpha[a, b]$ olsun. $m \in (0,1]$, $q \geq 1$ için $|f'|^q$ m -geometrik konveks olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{\alpha+1}{2}}, b^{\frac{\alpha+1}{2}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{(1+\alpha)}{2}} |f'(a)|^{\frac{q}{2}}, b^{\frac{(1+\alpha)}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{mq}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left[\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} |f'(a)|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.1.1.17)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 3.2.2'den ve Power mean eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\ & \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezden $|f'|^q$ fonksiyonunun m -geometrik konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| b^\alpha f(b) - a^\alpha f(a) - \alpha \int_a^b f(x) d_\alpha x \right| \\
& \leq \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1+t}{2}} a^{\frac{1-t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1+t}{2}} |f'(a)|^{q \frac{1-t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left(b^{\frac{1-t}{2}} a^{\frac{1+t}{2}} \right)^{(\alpha+1)} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{qm \frac{1-t}{2}} |f'(a)|^{q \frac{1+t}{2}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
& = \frac{\ln b - \ln a}{2} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{\alpha+1}{2}}, b^{\frac{\alpha+1}{2}} \right) \right]^{1-\frac{1}{q}} \left[\mathcal{L} \left(a^{\frac{(1+\alpha)}{2}} |f'(a)|^{\frac{q}{2}}, b^{\frac{(1+\alpha)}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{mq}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left[\left(a^{\frac{1+\alpha}{2}} |f'(a)|^{\frac{1}{2}} \right) + \left(b^{\frac{1+\alpha}{2}} \left| f' \left(b^{\frac{1}{m}} \right) \right|^{\frac{m}{2}} \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.1.10. Teorem 4.1.1.10’da $m=1$ olarak alınırsa (4.1.1.17) eşitsizliği (3.2.15) eşitsizliğine indirgenir.

4.1.2. Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Pòlya-Szegö-Chebyshev Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde uyumlu kesirli integral operatörler içeren ve integrallenebilen pozitif fonksiyonlar için Pòlya-Szegö tipli integral eşitsizlikler verilmiştir. Daha sonra verilen bu eşitsizliklerden faydalanarak Chebyshev tipli yeni kesirli integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.1.2.1. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon $n=0,1,2,\dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. v_1, v_2, ω_1 ve ω_2 integrallenebilen pozitif fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} 0 < v_1(\tau) \leq f(\tau) \leq v_2(\tau) \\ 0 < \omega_1(\tau) \leq g(\tau) \leq \omega_2(\tau) \end{aligned} \quad (\tau \in [0, x], x > 0) \quad (4.1.2.1)$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$\frac{I_\alpha^0(\omega_1\omega_2 f^2)(x) I_\alpha^0(v_1v_2 g^2)(x)}{(I_\alpha^0((v_1\omega_1 + v_2\omega_2) fg)(x))^2} \leq \frac{1}{4} \quad (4.1.2.2)$$

eşitsizliği sağlanır [19].

İspat. $x > 0, \tau \in [0, x]$ için (4.1.2.1)'den hareketle yazılan

$$\left(\frac{v_2(\tau)}{\omega_1(\tau)} - \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \right) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{f(\tau)}{g(\tau)} - \frac{v_1(\tau)}{\omega_2(\tau)} \right) \geq 0 \quad (4.1.2.3)$$

eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} (v_1(\tau)\omega_1(\tau) + v_2(\tau)\omega_2(\tau)) f(\tau)g(\tau) \\ \geq \omega_1(\tau)\omega_2(\tau) f^2(\tau) + v_1(\tau)v_2(\tau) g^2(\tau) \end{aligned} \quad (4.1.2.4)$$

elde edilir. (4.1.2.4) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{1}{n!}(x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1}$ ile çarpılıp, $(0, x)$ aralığı üzerinde τ için integrali alındığında, uyumlu kesirli integral tanımından

$$I_\alpha^0((v_1\omega_1 + v_2\omega_2) fg)(x) \geq I_\alpha^0(\omega_1\omega_2 f^2)(x) + I_\alpha^0(v_1v_2 g^2)(x) \quad (4.1.2.5)$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece AM-GM eşitsizliğinden

$$I_\alpha^0((v_1\omega_1 + v_2\omega_2) fg)(x) \geq 2\sqrt{I_\alpha^0(\omega_1\omega_2 f^2)(x) \times I_\alpha^0(v_1v_2 g^2)(x)} \quad (4.1.2.6)$$

$$I_\alpha^0(\omega_1\omega_2 f^2)(x) + I_\alpha^0(v_1v_2 g^2)(x) \leq \frac{1}{4} \left(I_\alpha^0((v_1\omega_1 + v_2\omega_2) fg)(x) \right)^2$$

olur. Buradan (4.1.2.2) eşitsizliği sağlanır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2.1. Lemma 4.1.2.1’de $m, N, n, M \in \mathbb{R}$ için $v_1 = m$, $v_2 = M$, $\omega_1 = n$ ve $\omega_2 = N$ değerleri alındığında,

$$\frac{(I_\alpha^0 f^2)(x)(I_\alpha^0 g^2)(x)}{((I_\alpha^0 fg)(x))^2} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{mn}{MN}} + \sqrt{\frac{MN}{mn}} \right)^2 \quad (4.1.2.7)$$

eşitsizliği elde edilir [19].

Sonuç 4.1.2.2. Lemma 4.1.2.1 de $\alpha = n+1$ olarak alınırsa (4.1.2.2) eşitsizliği (3.1.20) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 4.1.2.2. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $n, k = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$, $\theta \in (k, k+1]$ olsun. Ayrıca $v_1, v_2, \omega_1, \omega_2$, (4.1.2.1) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\begin{aligned} & I_\alpha^0(v_1 v_2)(x) I_\theta^0(\omega_1 \omega_2)(x) \times I_\alpha^0(f^2)(x) I_\theta^0(g^2)(x) \\ & \leq \frac{1}{4} \left(I_\alpha^0(v_1 f)(x) I_\theta^0(\omega_1 g)(x) + I_\alpha^0(v_2 f)(x) I_\theta^0(\omega_2 g)(x) \right)^2 \end{aligned} \quad (4.1.2.8)$$

eşitsizliği geçerlidir [19].

İspat. $x > 0$, $\tau, \xi \in [0, x]$ için (4.1.2.1) eşitsizliğinden yola çıkılarak yazılan

$$\left(\frac{v_2(\tau)}{\omega_1(\xi)} - \frac{f(\tau)}{g(\xi)} \right) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \left(\frac{f(\tau)}{g(\xi)} - \frac{v_1(\tau)}{\omega_2(\xi)} \right) \geq 0 \quad (4.1.2.9)$$

eşitsizliklerinden

$$\left(\frac{v_1(\tau)}{\omega_2(\xi)} + \frac{v_2(\tau)}{\omega_1(\xi)} \right) \frac{f(\tau)}{g(\xi)} \geq \frac{f^2(\tau)}{g^2(\xi)} + \frac{v_1(\tau)v_2(\tau)}{\omega_1(\xi)\omega_2(\xi)} \quad (4.1.2.10)$$

elde edilir. (4.1.2.10) eşitsizliğinin her iki tarafı $\omega_1(\xi)\omega_2(\xi)g^2(\xi)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & v_1(\tau)f(\tau)\omega_1(\xi)g(\xi) + v_2(\tau)f(\tau)\omega_2(\xi)g(\xi) \\ & \geq \omega_1(\xi)\omega_2(\xi)f^2(\tau) + v_1(\tau)v_2(\tau)g^2(\xi) \end{aligned} \quad (4.1.2.11)$$

yazılır. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{1}{k!}\right)(x-\tau)^n(x-\xi)^k \tau^{\alpha-n-1}\xi^{\theta-k-1}$ ile çarpılıp, $(0, x)$ aralığı üzerinde τ ve ξ için çift katlı integral alındığında, uyumlu kesirli integral tanımından

$$\begin{aligned} & I_\alpha^0(v_1 f)(x)I_\theta^0(\omega_1 g)(x) + I_\alpha^0(v_2 f)(x)I_\theta^0(\omega_2 g)(x) \\ & \geq I_\alpha^0(f^2)(x)I_\theta^0(\omega_1 \omega_2)(x) + I_\alpha^0(v_1 v_2)(x)I_\theta^0(g^2)(x) \end{aligned} \quad (4.1.2.12)$$

sonucuna ulaşılır. (4.1.2.12) eşitsizliğine AM-GM eşitsizliği uygulanıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & I_\alpha^0(v_1 f)(x)I_\theta^0(\omega_1 g)(x) + I_\alpha^0(v_2 f)(x)I_\theta^0(\omega_2 g)(x) \\ & \geq 2\sqrt{I_\alpha^0(f^2)(x)I_\theta^0(\omega_1 \omega_2)(x) \times I_\alpha^0(v_1 v_2)(x)I_\theta^0(g^2)(x)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2.3. Lemma 4.1.2.2’de $m, N, n, M \in \mathbb{R}$ için $v_1 = m$, $v_2 = M$, $\omega_1 = n$ ve $\omega_2 = N$ değerleri alındığında

$$x^{\alpha+\theta} \frac{\Gamma(\alpha-n)\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\theta+1)} \times \frac{(I_\alpha^0 f^2)(x)(I_\theta^0 g^2)(x)}{\left((I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 g)(x)\right)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{mn}{MN}} + \sqrt{\frac{MN}{mn}} \right)^2 \quad (4.1.2.13)$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Sonuç 4.1.2.4. Lemma 4.1.2.2 de $\alpha = n+1$ olarak alınırsa (4.1.2.8) eşitsizliği (3.1.21) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 4.1.2.3. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $n, k = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$, $\theta \in (k, k+1]$ olsun. Ayrıca v_1, v_2, ω_1 ve ω_2 (4.1.2.1) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$I_{\alpha}^0(f^2)(x) I_{\theta}^0(g^2)(x) \leq I_{\alpha}^0\left(\frac{v_2 fg}{\omega_1}\right)(x) I_{\theta}^0\left(\frac{\omega_2 fg}{v_1}\right)(x) \quad (4.1.2.14)$$

eşitsizliği sağlanır [19].

İspat. (4.1.2.1) eşitsizliğindeki koşullar göz önüne alınırsa

$$f^2(\tau) \leq \frac{v_2(\tau)}{\omega_1(\tau)} f(\tau) g(\tau) \quad (4.1.2.15)$$

yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n!}(x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1}$ ile çarpılır ve $(0, x)$ aralığı üzerinde τ için integral alınır

$$\frac{1}{n!} \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} f^2(\tau) d\tau \leq \frac{1}{n!} \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} \frac{v_2(\tau)}{\omega_1(\tau)} f(\tau) g(\tau) d\tau$$

olur. Burada, uyumlu kesirli integral tanımından

$$I_{\alpha}^0(f^2)(x) \leq I_{\alpha}^0\left(\frac{v_2 fg}{\omega_1}\right)(x) \quad (4.1.2.16)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer taraftan (4.1.2.1) eşitsizliğinin koşulları altında

$$g^2(\xi) \leq \frac{\omega_2(\xi)}{v_1(\xi)} f(\xi) g(\xi) \quad (4.1.2.17)$$

yazılır ve benzer işlemler (4.1.2.17) için tekrar uygulanırsa

$$\frac{1}{k!} \int_0^x (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} g^2(\xi) d\xi \leq \frac{1}{k!} \int_0^x (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} \frac{\omega_2(\xi)}{v_1(\xi)} f(\xi) g(\xi) d\xi$$

$$I_\theta^0(g^2)(x) \leq I_\theta^0\left(\frac{\omega_2 fg}{v_1}\right)(x) \quad (4.1.2.18)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son olarak (4.1.2.16) ve (4.1.2.18) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2.5. Lemma 4.1.2.3’de $m, N, n, M \in \mathbb{R}$ için $v_1 = m$, $v_2 = M$, $\omega_1 = n$ ve $\omega_2 = N$ değerleri alındığında,

$$\frac{(I_\alpha^0 f^2)(x)(I_\theta^0 g^2)(x)}{\left((I_\alpha^0 fg)(x)(I_\theta^0 fg)(x)\right)^2} \leq \frac{MN}{mn} \quad (4.1.2.19)$$

eşitsizliği sağlanır [19].

Sonuç 4.1.2.6. Lemma 4.1.2.3’de $\alpha = n+1$ olarak alınırsa (4.1.2.14) eşitsizliği (3.1.22) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.2.1. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $n, k = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$, $\theta \in (k, k+1]$ olsun. Ayrıca v_1, v_2, ω_1 ve ω_2 (4.1.2.1) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\left| \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) (I_\theta^0 fg)(x) + x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} (I_\alpha^0 fg)(x) \right. \quad (4.1.2.20)$$

$$\left. - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 g)(x) - (I_\theta^0 f)(x)(I_\alpha^0 g)(x) \right|$$

$$\leq \left| A_1(f, v_1, v_2)(x) + A_2(f, v_1, v_2)(x) \right|^{1/2}$$

$$\times \left| A_1(g, \omega_1, \omega_2)(x) + A_2(g, \omega_1, \omega_2)(x) \right|^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_1(u, v, \omega)(x) = \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) \times \frac{(I_\alpha^0((v+\omega)u)(x))^2}{4I_\alpha^0(v\omega)(x)} - (I_\alpha^0 u)(x)(I_\theta^0 u)(x)$$

ve

$$A_2(u, v, \omega)(x) = \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \times \frac{\left(I_\theta^0((v + \omega)u)(x) \right)^2}{4I_\theta^0(v\omega)(x)} - \left(I_\alpha^0 u \right)(x) \left(I_\theta^0 u \right)(x)$$

şeklindedir [19].

İspat. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $x > 0$, $\tau, \xi \in (0, x)$ olsun. $H(\tau, \xi)$ fonksiyoneli

$$H(\tau, \xi) = (f(\tau) - f(\xi))(g(\tau) - g(\xi))$$

$$H(\tau, \xi) = f(\tau)g(\tau) + f(\xi)g(\xi) - f(\tau)g(\xi) - f(\xi)g(\tau) \quad (4.1.2.21)$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyonelin her iki tarafı $\left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) (x - \tau)^n (x - \xi)^k \tau^{\alpha-n-1} \xi^{\theta-k-1}$

değeri ile çarpılıp, $(0, x)$ aralığı üzerinde τ ve ξ için çift katlı integral alınır

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x - \tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x - \xi)^k \xi^{\theta-k-1} H(\tau, \xi) d\tau d\xi \\ &= \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta - k)}{\Gamma(\theta + 1)} \right) \left(I_\alpha^0 fg \right)(x) + \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha - n)}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \left(I_\theta^0 fg \right)(\xi) \\ & - \left(I_\alpha^0 f \right)(x) \left(I_\theta^0 g \right)(x) - \left(I_\theta^0 f \right)(x) \left(I_\alpha^0 g \right)(x) \end{aligned} \quad (4.1.2.22)$$

eşitliği bulunur. (4.1.2.22) eşitliğine çift katlı integraller için Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} H(\tau, \xi) d\tau d\xi \right| \\
& \leq \left[\left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} f^2(\tau) d\tau d\xi \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} f^2(\xi) d\tau d\xi \\
& \quad \left. - 2 \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} f(\tau) f(\xi) d\tau d\xi \right]^{1/2} \\
& \times \left[\left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} g^2(\tau) d\tau d\xi \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} g^2(\xi) d\tau d\xi \\
& \quad \left. - 2 \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} g(\tau) g(\xi) d\tau d\xi \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitsizliğin sol tarafı için gerekli integral işlemleri hesaplandıktan sonra

$$\begin{aligned}
& \left| \left(\frac{1}{n!} \right) \left(\frac{1}{k!} \right) \int_0^x \int_0^x (x-\tau)^n \tau^{\alpha-n-1} (x-\xi)^k \xi^{\theta-k-1} H(\tau, \xi) d\tau d\xi \right| \\
& \leq \left[\left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) (I_\theta^0 f^2)(x) + \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) (I_\alpha^0 f^2)(x) \right. \\
& \quad \left. - 2 (I_\alpha^0 f)(x) (I_\theta^0 f)(x) \right]^{1/2} \tag{4.1.2.23} \\
& \times \left[\left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) (I_\theta^0 g^2)(x) + \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) (I_\alpha^0 g^2)(x) \right. \\
& \quad \left. - 2 (I_\alpha^0 g)(x) (I_\theta^0 g)(x) \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer Lemma 4.1.2.1’de $\omega_1(\tau) = \omega_2(\tau) = g(\tau) = 1$ alınırsa

$$\left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) I_\alpha^0 \{ f^2 \}(x) \leq \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) \times \frac{(I_\alpha^0 ((v_1 + v_2) f)(x))^2}{4I_\alpha^0 (v_1 v_2)(x)}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
& \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) I_\alpha^0(f^2)(x) - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 f)(x) \\
& \leq \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) \times \frac{\left(I_\alpha^0((v_1+v_2)f)(x) \right)^2}{4I_\alpha^0(v_1v_2)(x)} - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 f)(x) \\
& = A_1(f, v_1, v_2)
\end{aligned} \tag{4.1.2.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) I_\theta^0(f^2)(x) - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 f)(x) \\
& \leq \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \times \frac{\left(I_\theta^0((v_1+v_2)f)(x) \right)^2}{4I_\theta^0(v_1v_2)(x)} - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\theta^0 f)(x) \\
& = A_2(f, v_1, v_2)
\end{aligned} \tag{4.1.2.25}$$

yazılır. Tekrar Lemma 4.1.2.1 için $v_1(\tau) = v_2(\tau) = f(\tau) = 1$ alınarak benzer işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left(x^\theta \frac{\Gamma(\theta-k)}{\Gamma(\theta+1)} \right) I_\alpha^0(g^2)(x) - (I_\alpha^0 g)(x)(I_\theta^0 g)(x) \\
& \leq A_1(g, \omega_1, \omega_2)
\end{aligned} \tag{4.1.2.26}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) I_\theta^0(g^2)(x) - (I_\alpha^0 g)(x)(I_\theta^0 g)(x) \\
& \leq A_2(g, \omega_1, \omega_2)
\end{aligned} \tag{4.1.2.27}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece (4.1.2.24) ile (4.1.2.25) ve (4.1.2.26) ile (4.1.2.27) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp (4.1.2.23) de yerine yazılırsa (4.1.2.22) eşitliğinden istenilen sonuç elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.2.7. Teorem 4.1.2.1’de $\alpha = n+1$ olarak alınırsa (4.1.2.20) eşitsizliği (3.1.23) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.1.2.2. f ve g , $[0, \infty)$ aralığında integrallenebilen iki pozitif fonksiyon, $n, k = 0, 1, 2, \dots$ için $\alpha \in (n, n+1]$, $\theta \in (k, k+1]$ olsun. Ayrıca v_1, v_2, ω_1 ve ω_2 (4.1.2.1) koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\left| \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) (I_\alpha^0 fg)(x) - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\alpha^0 g)(x) \right| \quad (4.1.2.28)$$

$$\leq \left| A(f, v_1, v_2)(x) A(g, \omega_1, \omega_2)(x) \right|^{1/2}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A(u, v, \omega)(x) = \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \times \frac{(I_\alpha^0 \{(v+\omega)u\}(x))^2}{4I_\alpha^0 \{v, \omega\}(x)} - \left((I_\alpha^0 u)(x) \right)^2$$

şeklindedir [19].

İspat. Teorem 4.1.2.1’de $\alpha = \theta$ alındığında istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2.8. Teorem 4.1.2.2’de $m, N, n, M \in \mathbb{R}$ için $v_1 = m$, $v_2 = M$, $\omega_1 = n$ ve $\omega_2 = N$ değerleri alındığında

$$\left| \left(x^\alpha \frac{\Gamma(\alpha-n)}{\Gamma(\alpha+1)} \right) (I_\alpha^0 fg)(x) - (I_\alpha^0 f)(x)(I_\alpha^0 g)(x) \right| \quad (4.1.2.29)$$

$$\leq \frac{(M-m)(N-n)}{4\sqrt{MmNn}} \times \left((I_\alpha^0 f)(x)(I_\alpha^0 g)(x) \right)$$

eşitsizliği sağlanır [19].

Sonuç 4.1.2.9. Teorem 4.1.2.2’de $\alpha = n+1$ olarak alınırsa (4.1.2.28) eşitsizliği (3.1.24) eşitsizliğine indirgenir.

4.2. ω -Riemann Liouville Kesirli İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde ilk önce m -konveks fonksiyon için ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörler yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Daha sonra farklı türden konveks fonksiyonların çarpımı için ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörlerinden yararlanarak Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler oluşturulmuştur.

Teorem 4.2.1. $f, \omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$ olmak üzere f pozitif ve m -konveks, ω da diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon, $\omega' \in L[a, b]$, $t \in [a, b]$ ve $\alpha, \beta \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha) I_{a^+}^{\alpha; \omega} f(mt) + \Gamma(\beta) I_{b^-}^{\beta; \omega} f(mt) \\ & \leq \frac{(\omega(mt) - \omega(a))^{\alpha-1}}{mt - a} \left[(mt - a)(\omega(mt)mf(t) - \omega(a)f(a)) \right. \\ & \quad \left. - (mf(t) - f(a)) \int_a^{mt} \omega(k) dk \right] \\ & \quad + \frac{(\omega(b) - \omega(mt))^{\alpha-1}}{b - mt} \left[(b - mt)(f(b)\omega(b) - mf(t)\omega(mt)) \right. \\ & \quad \left. - (f(b) - mf(t)) \int_{mt}^b \omega(k) dk \right] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Hipotezden $t \in [a, b]$, $k \in [a, mt]$ ve $\alpha \geq 1$ ve ω diferansiyellenebilen ve kesin artan bir fonksiyon olduğundan

$$\omega'(k)(\omega(mt) - \omega(k))^{\alpha-1} \leq \omega'(k)(\omega(mt) - \omega(a))^{\alpha-1} \quad (4.2.2)$$

yazılabilir. Ayrıca f 'nin m -konveksliğinden

$$f(k) \leq \frac{mt - k}{mt - a} f(a) + \frac{k - a}{mt - a} mf(t) \quad (4.2.3)$$

yazılır. (4.2.2) ve (4.2.3) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp $[a, mt]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_a^{mt} (\omega(mt) - \omega(k))^{\alpha-1} \omega'(k) f(k) dk \\ & \leq \frac{(\omega(mt) - \omega(a))^{\alpha-1}}{mt - a} \left[f(a) \int_a^{mt} (mt - k) \omega'(k) dk + mf(t) \int_a^{mt} (k - a) \omega'(k) dk \right] \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

elde edilir. (4.2.4) eşitsizliğinin sol tarafına sol ω - Riemann Liouville kesirli integral ve sağ tarafına kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha) I_{a^+}^{\alpha, \omega} f(mt) \\ & \leq \frac{(\omega(mt) - \omega(a))^{\alpha-1}}{mt - a} \left[(mt - a)(m\omega(mt)f(t) - \omega(a)f(a)) \right. \\ & \quad \left. - (mf(t) - f(a)) \int_a^{mt} \omega(k) dk \right] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

bulunur. Diğer yandan $t \in [a, b]$, $k \in [mt, b]$ ve $\beta \geq 1$ için

$$\omega'(k)(\omega(k) - \omega(mt))^{\alpha-1} \leq \omega'(k)(\omega(b) - \omega(mt))^{\beta-1} \quad (4.2.6)$$

olduğundan ve f 'nin m -konveksliğinden

$$f(k) \leq \frac{b-k}{b-mt} mf(t) + \frac{k-mt}{b-mt} f(b) \quad (4.2.7)$$

yazılır. (4.2.6) ve (4.2.7) eşitsizlikleri çarpılıp $[mt, b]$ üzerinde integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{mt}^b (\omega(k) - \omega(mt))^{\beta-1} \omega'(k) f(k) dk \\ & \leq \frac{(\omega(b) - \omega(mt))^{\beta-1}}{b - mt} \left[mf(t) \int_{mt}^b (b - k) \omega'(k) dk + f(b) \int_{mt}^b (k - mt) \omega'(k) dk \right] \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.2.8) eşitsizliğinin sol tarafına sağ ω -Riemann Liouville kesirli integral sağ tarafına da kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \Gamma(\beta) I_{b^-}^{\beta;\omega} f(mt) \\
& \leq \frac{(\omega(b) - \omega(mt))^{\beta-1}}{b - mt} \left[(b - mt)(\omega(b)f(b) - \omega(mt)mf(t)) \right. \\
& \quad \left. - (f(b) - mf(t)) \int_{mt}^b \omega(k) dk \right]
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

olur. Böylece (4.2.5) ve (4.2.9) eşitsizliklerinin toplamı sonucunda ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.1. Eğer Teorem 4.2.1’de $\alpha = \beta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \Gamma(\alpha) (I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) + I_{b^-}^{\alpha;\omega} f(mt)) \\
& \leq \frac{(\omega(mt) - \omega(a))^{\alpha-1}}{mt - a} \left[(mt - a)(\omega(mt)mf(t) - \omega(a)f(a)) \right. \\
& \quad \left. - (mf(t) - f(a)) \int_a^{mt} \omega(k) dk \right] \\
& \quad + \frac{(\omega(b) - \omega(mt))^{\alpha-1}}{b - mt} \left[(b - mt)(f(b)\omega(b) - mf(t)\omega(mt)) \right. \\
& \quad \left. - (f(b) - mf(t)) \int_{mt}^b \omega(k) dk \right]
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.2. Eğer Teorem 4.2.1’de $m=1$ alındığı takdirde (4.2.1) eşitsizliği (3.3.4) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.3. Eğer Teorem 4.2.1’de $m=1$ ve $\omega(t) = t$ alındığı takdirde (4.2.1) eşitsizliği (3.1.25) eşitsizliğine dönüşür.

Teorem 4.2.2. $f, \omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. $m \in (0, 1]$, f pozitif ve $|f'|$ m -konveks, ω ise diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon, $\omega' \in L[a, b]$, $t \in [a, b]$ ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(\alpha+1) I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) + \Gamma(\beta+1) I_{b^-}^{\beta;\omega} f(mt) - \left[f(a)(\omega(mt)-\omega(a))^\alpha \right. \right. \\
& \left. \left. + f(b)(\omega(b)-\omega(mt))^\beta \right] \right| \\
& \leq \frac{(\omega(mt)-\omega(a))^\alpha (mt-a) |f'(a)| + (\omega(b)-\omega(mt))^\beta (b-mt) |f'(b)|}{2} \quad (4.2.12) \\
& + \frac{m |f'(t)|}{2} \left((\omega(mt)-\omega(a))^\alpha (mt-a) + (\omega(b)-\omega(mt))^\beta (b-mt) \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $|f'|$ fonksiyonunun $mt \in [a, b]$ ve $k \in [a, mt]$ için m -konveksliğinden

$$|f'(k)| \leq \frac{mt-k}{mt-a} |f'(a)| + \frac{k-a}{mt-a} m |f'(t)| \quad (4.2.13)$$

eşitsizliği yazılır. (4.2.13) eşitsizliğinden

$$f'(k) \leq \frac{mt-k}{mt-a} |f'(a)| + \frac{k-a}{mt-a} m |f'(t)| \quad (4.2.14)$$

yazılabilir. Diğer taraftan ω fonksiyonunun kesin artanlığından, $mt \in [a, b]$, $k \in [a, mt]$ ve $\alpha > 0$ için

$$(\omega(mt)-\omega(k))^\alpha \leq (\omega(mt)-\omega(a))^\alpha \quad (4.2.15)$$

elde edilir. (4.2.14) ve (4.2.15) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp $[a, mt]$ aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned}
& \int_a^{mt} (\omega(mt)-\omega(k)) f'(k) dk \\
& \leq \frac{(\omega(mt)-\omega(a))^\alpha}{mt-a} \left[|f'(a)| \int_a^{mt} (mt-k) dk + m |f'(t)| \int_a^{mt} (k-a) dk \right] \quad (4.2.16) \\
& = (\omega(mt)-\omega(a))^\alpha (mt-a) \left(\frac{|f'(a)| + m |f'(t)|}{2} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned}
& \int_a^{mt} (\omega(mt) - \omega(k))^\alpha f'(k) dk \\
&= f(t) (\omega(mt) - \omega(k))^\alpha \Big|_a^{mt} + \alpha \int_a^{mt} (\omega(mt) - \omega(k))^{\alpha-1} f(k) \omega'(k) dk \quad (4.2.17) \\
&= \Gamma(\alpha+1) I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) - f(a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. (4.2.16) ve (4.2.17) ifadelerinden

$$\begin{aligned}
& \Gamma(\alpha+1) I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) - f(a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \\
& \leq (mt-a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \left(\frac{|f'(a)| + m|f'(t)|}{2} \right) \quad (4.2.18)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (4.2.13) eşitsizliği için mutlak değerin özelliğinden

$$f'(k) \geq - \left(\frac{mt-k}{mt-a} |f'(a)| + \frac{k-a}{mt-a} m |f'(t)| \right) \quad (4.2.19)$$

eşitsizliği yazılır. Böylece (4.2.15) ve (4.2.19) için yukarıdaki işlemler benzer şekilde yapıldığında

$$\begin{aligned}
& f(a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha - \Gamma(\alpha+1) I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) \\
& \leq (mt-a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \left(\frac{|f'(a)| + m|f'(t)|}{2} \right) \quad (4.2.20)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2.18) ve (4.2.20) birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(\alpha+1) I_{a^+}^{\alpha;\omega} f(mt) - f(a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \right| \\
& \leq (mt-a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \left(\frac{|f'(a)| + m|f'(t)|}{2} \right) \quad (4.2.21)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde $|f'|$ fonksiyonunun $mt \in [a, b]$ ve $k \in [mt, b]$ için m -konveksliğinden

$$|f'(k)| \leq \frac{b-k}{b-mt} m |f'(t)| + \frac{k-mt}{b-mt} |f'(b)| \quad (4.2.22)$$

eşitsizliği yazılır. Hipotezden ω -fonksiyonunun kesin artanlığından $mt \in [a, b]$, $k \in [mt, b]$ ve $\beta > 0$ için

$$(\omega(k) - \omega(mt))^\beta \leq (\omega(b) - \omega(mt))^\beta \quad (4.2.23)$$

dır. (4.2.14), (4.2.15) ve (4.2.19) için uygulanan işlemler benzer şekilde (4.2.22), (4.2.23) için de uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(\beta+1) I_{b^-}^{\beta, \omega} f(mt) - f(b) (\omega(b) - \omega(mt))^\beta \right| \\ & \leq (b-mt) (\omega(b) - \omega(mt))^\beta \left(\frac{|f'(b)| + m |f'(t)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak (4.2.21) ve (4.2.24)'ten üçgen eşitsizliği yardımıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.4. Eğer Teorem 4.2.2.'de $\alpha = \beta$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(\alpha+1) \left(I_{a^+}^{\alpha, \omega} f(mt) + I_{b^-}^{\alpha, \omega} f(mt) \right) - \left[f(a) (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f(b) (\omega(b) - \omega(mt))^\alpha \right] \right| \\ & \leq (\omega(mt) - \omega(a))^\alpha (mt-a) \left(\frac{|f'(a)| + m |f'(t)|}{2} \right) \\ & \quad + (\omega(b) - \omega(mt))^\alpha (b-mt) \left(\frac{|f'(b)| + m |f'(t)|}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.5. Eğer Teorem 4.2.2.'de $m=1$ alındığı takdirde (4.2.12) eşitsizliği (3.3.5) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.6. Eğer Teorem 4.2.2'de $m=1$ ve $\omega(t) = t$ alındığı takdirde (4.2.12) eşitsizliği (3.1.26) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.3. $f, \omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$, f pozitif ve m -konveks bir fonksiyon ve ω ise diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $0 \leq a < mb$ ve $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) \right. \\ &\quad \left. + m^{\alpha+1} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)\left(\omega^{-1}\left(\frac{a}{m}\right)\right) \right] \\ &\leq \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \left[f(a) - m^2 f\left(\frac{a}{m^2}\right) \right] + \frac{m}{2} \left[f(b) + mf\left(\frac{a}{m^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (2.2.8) de $u, v \in [a, mb]$, $\alpha = \frac{1}{2}$ için f fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$f\left(\frac{u+mv}{2}\right) \leq \frac{f(u) + mf(v)}{2} \quad (4.2.28)$$

olur. $u = ta + m(1-t)b$ ve $v = tb + \frac{1}{m}(1-t)a$ alınırsa

$$2f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \leq f\left(ta + m(1-t)b\right) + mf\left(tb + \frac{1}{m}(1-t)a\right) \quad (4.2.29)$$

yazılır. (4.2.29) eşitsizliğinin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılır, $[0, 1]$ üzerinde integral alınırsa

$$\frac{2}{\alpha} f\left(\frac{a+mb}{2}\right) \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(ta + m(1-t)b\right) dt + m \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(tb + \frac{1}{m}(1-t)a\right) dt \quad (4.2.30)$$

olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) + m^{\alpha+1} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega) \left(\omega^{-1} \left(\frac{a}{m} \right) \right) \right] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} \left(\frac{mb-\omega(x)}{mb-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(mb-a)} dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(\frac{a}{m})}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{\omega(x)-\frac{a}{m}}{b-\frac{a}{m}} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(mb-a)} dx \right] \quad (4.2.31) \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + m(1-t)b) dt + m \int_0^1 t^{\alpha-1} f \left(tb + \frac{1}{m}(1-t)a \right) dt \\
&\geq \frac{2}{\alpha} f \left(\frac{a+mb}{2} \right)
\end{aligned}$$

olduğundan (4.2.27) eşitsizliğinin sol tarafı ispat edilmiş olur.

Diğer taraftan $t \in [0,1]$ için f 'nin m -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
f(ta + m(1-t)b) &\leq tf(a) + m(1-t)f(b) \\
mf \left(tb + \frac{(1-t)}{m}a \right) &\leq mtf(b) + m^2(1-t)f \left(\frac{a}{m^2} \right)
\end{aligned}$$

yazılır. Son iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& f(ta + m(1-t)b) + mf \left(tb + \frac{(1-t)}{m}a \right) \\
&\leq tf(a) + m(1-t)f(b) + mtf(b) + m^2(1-t)f \left(\frac{a}{m^2} \right)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\alpha}{2}t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, t 'ye göre $[0,1]$ aralığında integral alınır

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + m(1-t)b) dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left(tb + \frac{(1-t)a}{m}\right) dt \\
& \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha} f(a) dt + m \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t) f(b) dt + m \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha} f(b) dt \\
& \quad + m^2 \frac{\alpha}{2} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t) f\left(\frac{a}{m^2}\right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlikte gerekli integral işlemleri yapılarak

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^{\alpha}} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) + m^{\alpha+1} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)\left(\omega^{-1}\left(\frac{a}{m}\right)\right) \right] \\
& \leq \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} f(a) - \frac{m^2}{2} \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \right) f\left(\frac{a}{m^2}\right) + \frac{m}{2} f(b)
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

elde edilir. Bu da (4.2.27) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Sonuç olarak (4.2.31) ve (4.2.32) den istenilen sonuca varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.7. Teorem 4.2.3.'te $m=1$ alındığı takdirde, (4.2.27) eşitsizliği (3.3.6) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.8. Teorem 4.2.3.'te $m=1$ ve $\omega(t)=t$ alındığı takdirde, (4.2.27) eşitsizliği (3.1.10) eşitsizliğine indirgenir.

Lemma 4.2.1. $f:[a, mb] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, mb) aralığında diferansiyellenebilen pozitif bir fonksiyon ve $f' \in L[a, mb]$ olsun. $\omega(x)$ ise $(a, mb]$ aralığında pozitif artan $\omega'(x)$ (a, mb) aralığında sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $m \in (0, 1]$, $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{f(a) + f(mb)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) \right. \\
& \quad \left. + I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\
& = \frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} \left[(\omega(u)-a)^\alpha - (mb-\omega(u))^\alpha \right] (f' \circ \omega)(u) \omega'(u) du
\end{aligned} \tag{4.2.34}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $T_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)),$

ve

$$T_2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))$$

olsun. ω -Riemann Liouville kesirli integral tanımından yararlanarak

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) \\
&= \frac{\alpha}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (mb-\omega(u))^{\alpha-1} \omega'(u) (f \circ \omega)(u) du \\
&= -\frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (f \circ \omega)(u) d(mb-\omega(u))^\alpha \\
&= \frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \left[(mb-a)^\alpha f(a) + \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (mb-\omega(u))^\alpha (f' \circ \omega)(u) \omega'(u) du \right]
\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

ve

$$\begin{aligned}
T_2 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \\
&= \frac{\alpha}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (\omega(u)-a)^{\alpha-1} \omega'(u) (f \circ \omega)(u) du \\
&= \frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (f \circ \omega)(u) d(\omega(u)-a)^\alpha \\
&= \frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \left[(mb-a)^\alpha f(mb) - \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} (\omega(u)-a)^\alpha (f' \circ \omega)(u) \omega'(u) du \right]
\end{aligned} \tag{4.2.36}$$

elde edilir T_1 ve T_2 taraf tarafa toplanırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.9. Lemma 4.2.1.'de $m=1$ alındığında, (4.2.34) eşitliği (3.3.7) eşitliğine indirgenir.

Teorem 4.2.4. $f : [a, mb] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, mb) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $\omega(x)$ ise $(a, mb]$ aralığında pozitif artan ve $\omega'(x)$, (a, mb) aralığında sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $m \in (0, 1]$ olmak üzere $|f'|$ m -konveks fonksiyon ve $\alpha > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(mb)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \right| \\ & \leq \frac{mb-a}{2(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) (|f'(a)| + m|f'(b)|) \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.2.1'den

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(mb)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) + I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(mb-a)^\alpha} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(mb)} \left| (\omega(u)-a)^\alpha - (mb-\omega(u))^\alpha \right| |(f' \circ \omega)(u)| d\omega(u) \end{aligned}$$

yazılır. $u \in (\omega^{-1}(a), \omega^{-1}(mb))$ olduğundan $a \leq \omega(u) \leq mb$ 'dir. Eğer $t = \frac{mb-\omega(u)}{mb-a}$

alınırsa buradan $\omega(u) = at + m(1-t)b$ olur. Böylece yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafında

$\omega(u) = at + m(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapıp ve $|f'|$ 'nin m -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(mb)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(mb)) + I_{\omega^{-1}(mb)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \right| \\
& \leq \frac{mb-a}{2} \int_0^1 \left| (1-t)^\alpha - t^\alpha \right| \left| f'(ta + mb(1-t)) \right| dt \\
& \leq \frac{mb-a}{2} \int_0^1 \left| (1-t)^\alpha - t^\alpha \right| \left(t \left| f'(a) \right| + m(1-t) \left| f'(b) \right| \right) dt \\
& = \frac{mb-a}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| (1-t)^\alpha - t^\alpha \right| \left(t \left| f'(a) \right| + m(1-t) \left| f'(b) \right| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| t^\alpha - (1-t)^\alpha \right| \left(t \left| f'(a) \right| + m(1-t) \left| f'(b) \right| \right) dt \right) \\
& = \frac{mb-a}{2} \left(\left| f'(a) \right| \left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] \right. \\
& \quad + m \left| f'(b) \right| \left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] + \left| f'(a) \right| \left[\frac{1}{(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] \\
& \quad \left. + m \left| f'(b) \right| \left[\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{1}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \right] \right) \\
& = \left(\frac{mb-a}{2} \right) \left(\frac{2^\alpha - 1}{2^\alpha (\alpha+1)} \right) \left(\left| f'(a) \right| + m \left| f'(b) \right| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.10. Teorem 4.2.4'te $m=1$ alındığında (4.2.37) eşitsizliği (3.3.8) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.11. Teorem 4.2.4'te $m=1$ ve $\omega(t)=t$ alındığı takdirde, (4.2.37) eşitsizliği (3.1.11) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.5. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ üzerinde f pozitif ve konveks, $s \in (0, 1]$ için g s -konveks, ω ise diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon ise bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\
& \quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\
& \leq \left(\frac{1}{\alpha+s+1} + B(\alpha, s+2) \right) \Lambda_1(a, b) \\
& \quad + \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) \Lambda_2(a, b)
\end{aligned} \tag{4.2.39}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\Lambda_1 = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ ve $\Lambda_2 = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\text{\underline{İspat.}} \quad C_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
C_2 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a))
\end{aligned}$$

olsun. C_1 ve C_2 için ω -Riemann Liouville kesirli integralini uygulayalım. Önce C_1 için uygulanacak olunursa

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} (b - \omega(x))^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \omega'(x) dx \right) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{b - \omega(x)}{b - a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $t = \frac{b - \omega(x)}{b - a}$ alınırsa, f fonksiyonunun konveksliğinden ve g fonksiyonunun s -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b)g(at + (1-t)b)dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} (tf(a) + (1-t)f(b))(t^\alpha g(a) + (1-t)^\alpha g(b))dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha+s} f(a)g(a)dt + \int_0^1 t^\alpha (1-t)^s f(a)g(b)dt \\
&\quad + \int_0^1 t^{\alpha+s-1} (1-t)f(b)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{s+1} f(b)g(b)dt \\
&= \frac{1}{(\alpha+s+1)} f(a)g(a) + \frac{1}{(\alpha+s+1)(\alpha+s)} f(b)g(a) \\
&\quad + B(\alpha+1, s+1)f(a)g(b) + B(\alpha, s+2)f(b)g(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $t = \frac{\omega(x)-a}{b-a}$ alınıp, benzer işlemler C_2 için de uygulanırsa

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{\omega(x)-a}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x))g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb)g((1-t)a + tb)dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} ((1-t)f(a) + tf(b))(t^\alpha g(a) + (1-t)^\alpha g(b))dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{s+1} f(a)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha+s-1} (1-t)f(a)g(b)dt \\
&\quad + \int_0^1 t^\alpha (1-t)^s f(b)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha+s} (1-t)^{s+1} f(b)g(b)dt \\
&= B(\alpha, s+2)f(a)g(a) + \frac{1}{(\alpha+s+1)(\alpha+s)} f(a)g(b) \\
&\quad + B(\alpha+1, s+1)f(b)g(a) + B(\alpha+s+1, s+2)f(b)g(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. C_1 ve C_2 'nin toplamından ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.12. Teorem 4.2.5'te $\omega(t)=t$ alındığında (4.2.39) eşitsizliği (3.1.16) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.13. Teorem 4.2.5'te $s=1$ ve $\omega(t)=t$ alındığı takdirde, (4.2.39) eşitsizliği (3.1.12) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.6. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ üzerinde f bir pozitif ve konveks, $s \in (0, 1]$ için g , pozitif ve s -konveks, ω ise diferansiyellenebilir ve kesin artan fonksiyon ise, bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} 2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\ &\quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda_1(a, b) \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda_2(a, b) \left(B(\alpha, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s+1)} \right) \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada Λ_1 ve Λ_2 Teorem 4.2.5'teki gibidir.

İspat. f fonksiyonunun konveksliğinden

$$f\left(\frac{\kappa+v}{2}\right) \leq \frac{f(\kappa) + f(v)}{2}$$

ve g fonksiyonunun s -konveksliğinden

$$g\left(\frac{\kappa+v}{2}\right) \leq \frac{g(\kappa) + g(v)}{2^s}$$

yazılır. f ve g 'nin çarpımından

$$f\left(\frac{\kappa+v}{2}\right)g\left(\frac{\kappa+v}{2}\right) \leq \frac{f(\kappa)g(\kappa)+f(\kappa)g(v)+f(v)g(\kappa)+f(v)g(v)}{2^{s+1}}$$

elde edilir. κ ve v 'ye $\kappa = at + (1-t)b$ ve $v = (1-t)a + tb$ değerleri verilirse

$$\begin{aligned} 2^{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq f(at+b(1-t))g(at+b(1-t)) \\ &\quad + f(at+b(1-t))g(a(1-t)+bt) \\ &\quad + f(a(1-t)+bt)g(at+(1-t)b) \\ &\quad + f(a(1-t)+bt)g(a(1-t)+bt) \end{aligned}$$

halini alır. Son eşitsizliğin her iki tarafı $t^{\alpha-1}$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{2^{s+1}}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+b(1-t))g(at+b(1-t))dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+b(1-t))g(a(1-t)+bt)dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(a(1-t)+bt)g(at+(1-t)b)dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(a(1-t)+bt)g(a(1-t)+bt)dt \\ &\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+b(1-t))g(at+b(1-t))dt \\ &\quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(a(1-t)+bt)g(a(1-t)+bt)dt \\ &\quad + \Lambda_1(a,b) \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) \\ &\quad + \Lambda_2(a,b) \left(B(\alpha, s+2) + \frac{1}{(\alpha+s+1)} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\
& \quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} (b-\omega(x))^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \omega'(x) dx \right) \\
& \quad + \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} (\omega(x)-a)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \omega'(x) dx \right) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{b-\omega(x)}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \\
& \quad + \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{\omega(x)-a}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+(1-t)b) g(at+(1-t)b) dt \\
& \quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(a(1-t)+bt) g(a(1-t)+bt) dt
\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\
& \quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at+(1-t)b) g(at+(1-t)b) dt \\
& \quad + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(a(1-t)+bt) g(a(1-t)+bt) dt \\
&\geq \frac{2^{s+1}}{\alpha} f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Lambda_1(a,b)}{2} \left(B(\alpha+1, s+1) + \frac{1}{(\alpha+s)(\alpha+s+1)} \right) \\
& \quad - \frac{\Lambda_2(a,b)}{2} \left(B(\alpha, s+2) + \frac{1}{(\alpha+s+1)} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. İlk ve son terimden ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.14. Teorem 4.2.6’da $\omega(t)=t$ alındığında (4.2.40) eşitsizliği (3.1.17) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.15. Teorem 4.2.6’da $s=1$ ve $\omega(t)=t$ alındığı takdirde, (4.2.40) eşitsizliği (3.1.14) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.7. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ üzerinde, $s_1, s_2 \in (0, 1]$ için f s_1 -konveks, g s_2 -konveks, ω diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon ise bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\ & \quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\ & \leq \left(\frac{1}{\alpha + s_1 + s_2} + B(\alpha, s_1 + s_2 + 1) \right) \Lambda_1(a, b) \\ & \quad + (B(\alpha + s_1, s_2 + 1) + B(\alpha + s_2, s_1 + 1)) \Lambda_2(a, b) \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada Λ_1 ve Λ_2 Teorem 4.2.5’teki gibidir.

$$\begin{aligned} \underline{İspat.} \quad \Theta_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\ \Theta_2 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \end{aligned}$$

olsun. ω -Riemann Liouville kesirli integral tanımından

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} (b - \omega(x))^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \omega'(x) dx \right) \\ &= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{b - \omega(x)}{b - a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \end{aligned}$$

yazılır. $t = \frac{b-\omega(x)}{b-a}$ için, f ve g fonksiyonlarının s -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b)g(at + (1-t)b)dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} \left(t^{s_1} f(a) + (1-t)^{s_1} f(b) \right) \left(t^{s_2} g(a) + (1-t)^{s_2} g(b) \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha+s_1+s_2-1} f(a)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha+s_1-1} (1-t)^{s_2} f(a)g(b)dt \\
&\quad + \int_0^1 t^{\alpha+s_2-1} (1-t)^{s_1} f(b)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{s_1+s_2} f(b)g(b)dt \\
&= \frac{1}{(\alpha+s_1+s_2)} f(a)g(a) + B(\alpha+s_1, s_2+1)f(a)g(b) \\
&\quad + B(\alpha+s_2, s_1+1)f(b)g(a) + B(\alpha, s_1+s_2+1)f(b)g(b)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = \frac{\omega(x)-a}{b-a}$ alınıp, benzer işlemler Θ_2 için de uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\Theta_2 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{\omega(x)-a}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x))g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a + tb)g((1-t)a + tb)dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} \left((1-t)^{s_1} f(a) + t^{s_1} f(b) \right) \left((1-t)^{s_2} g(a) + t^{s_2} g(b) \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{s_1+s_2} f(a)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha+s_2-1} (1-t)^{s_1} f(a)g(b)dt \\
&\quad + \int_0^1 t^{\alpha+s_1-1} (1-t)^{s_2} f(b)g(a)dt + \int_0^1 t^{\alpha+s_1+s_2-1} f(b)g(b)dt \\
&= B(\alpha, s_1+s_2+1)f(a)g(a) + B(\alpha+s_2, s_1+1)f(a)g(b) \\
&\quad + B(\alpha+s_1, s_2+1)f(b)g(a) + \frac{1}{\alpha+s_1+s_2} f(b)g(b)
\end{aligned}$$

bulunur. Θ_1 ve Θ_2 'nin toplamından ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.16. Teorem 4.2.7’de $\omega(t)=t$ alındığında (4.2.41) eşitsizliği (3.1.18) eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç 4.2.17. Teorem 4.2.7’de $s_1 = s_2 = 1$ ve $\omega(t) = t$ alındığı takdirde, (4.2.41) eşitsizliği (3.1.12) eşitsizliğine indirgenir.

Teorem 4.2.8. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f, g, fg \in L[a, b]$ olsun. Eğer $[a, b]$ üzerinde, $m_1, m_2 \in (0, 1]$ için f m_1 -konveks, g m_2 -konveks, ω da diferansiyellenebilir ve kesin artan bir fonksiyon ise, bu durumda $\alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right. \\ & \quad \left. + I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right] \\ & \leq \left(\frac{f(a)g(a) + f(b)g(b)}{\alpha + 2} \right) + \frac{m_2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \left(f(a)g\left(\frac{b}{m_2}\right) + f(b)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \right) \\ & \quad + \frac{m_1}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \left(g(a)f\left(\frac{b}{m_1}\right) + g(b)f\left(\frac{a}{m_1}\right) \right) \\ & \quad + \frac{2m_1m_2}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \left(f\left(\frac{b}{m_1}\right)g\left(\frac{b}{m_2}\right) + f\left(\frac{a}{m_1}\right)g\left(\frac{a}{m_2}\right) \right) \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$\underline{\text{İspat.}} \quad \chi_1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \right]$$

$$\chi_2 = \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha; \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \right]$$

olsun. ω -Riemann-Liouville kesirli integral tanımından

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} (b-\omega(x))^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \omega'(x) dx \right) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{b-\omega(x)}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx
\end{aligned}$$

yazılır. $t = \frac{b-\omega(x)}{b-a}$ değeri için, f fonksiyonunun m_1 -konveksliğinden ve g fonksiyonunun m_2 -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(a)^+}^{\alpha;\omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(b))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(b)) \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b) g(at + (1-t)b) dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} \left(tf(a) + m_1(1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right) \right) \left(tg(a) + m_2(1-t) g\left(\frac{b}{m_2}\right) \right) dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha+1} f(a) g(a) dt + m_2 \int_0^1 t^\alpha (1-t) f(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) dt \\
&\quad + m_1 \int_0^1 t^\alpha (1-t) f\left(\frac{b}{m_1}\right) g(a) dt + m_1 m_2 \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^2 f\left(\frac{b}{m_1}\right) g\left(\frac{b}{m_2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\alpha+2} f(a) g(a) + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(m_1 f\left(\frac{b}{m_1}\right) g(a) + m_2 f(a) g\left(\frac{b}{m_2}\right) \right) \\
&\quad + \frac{2m_1 m_2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} f\left(\frac{b}{m_1}\right) g\left(\frac{b}{m_2}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $t = \frac{\omega(x)-a}{b-a}$ alınıp, benzer işlemler χ_2 için de uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} I_{\omega^{-1}(b)^-}^{\alpha, \omega} (f \circ \omega)(\omega^{-1}(a))(g \circ \omega)(\omega^{-1}(a)) \\
&= \int_{\omega^{-1}(a)}^{\omega^{-1}(b)} \left(\frac{\omega(x)-a}{b-a} \right)^{\alpha-1} f(\omega(x)) g(\omega(x)) \frac{\omega'(x)}{(b-a)} dx \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1} f((1-t)a+tb) g((1-t)a+tb) dt \\
&\leq \int_0^1 t^{\alpha+1} f(b) g(b) dt + m_2 \int_0^1 t^\alpha (1-t) f(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right) dt \\
&\quad + m_1 \int_0^1 t^\alpha (1-t) f\left(\frac{a}{m_1}\right) g(b) dt + m_1 m_2 \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^2 f\left(\frac{a}{m_1}\right) g\left(\frac{a}{m_2}\right) dt \\
&= \frac{1}{\alpha+2} f(b) g(b) + \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(m_1 f\left(\frac{a}{m_1}\right) g(b) + m_2 f(b) g\left(\frac{a}{m_2}\right) \right) \\
&\quad + \frac{2m_1 m_2}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} f\left(\frac{a}{m_1}\right) g\left(\frac{a}{m_2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. χ_1 ve χ_2 'nin toplamından ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.18. Teorem 4.2.8'de $m_1 = m_2 = 1$ alındığında (4.2.42) eşitsizliği (3.1.12) eşitsizliğine indirgenir.

4.3. Genelleştirilmiş Oransal Kesirli (GPF) İntegral Operatörler İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Çalışmamızın bu bölümünde bazı konveks fonksiyon çeşitleri için genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integraller içeren Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.3.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$, $\alpha > 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] &= \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b) dt \\ &+ \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(bt + (1-t)a) dt \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. $I_1 = \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b) dt$ ve $I_2 = \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(bt + (1-t)a) dt$

olsun. I_1 ve I_2 de sırasıyla $\tau = at + b(1-t)$ ve $\tau = bt + a(1-t)$ değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned} &\int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(at + (1-t)b) dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} f(bt + (1-t)a) dt \\ &= \frac{1}{(b-a)^\alpha} \left[\int_a^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-\tau)} (b-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau + \int_a^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\tau-a)} (\tau-a)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu da istenilen sonuçtur.

Teorem 4.3.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. $|f|^q$ quasi-konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\ &\leq 2 \left(\Gamma(1 + (\alpha-1)p) - \Gamma[1 + (\alpha-1)p, -kp] \right)^{\frac{1}{p}} \left(\max \{ |f(a)|, |f(b)| \} \right) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine mutlak değerin özelliği ve integraller için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left(I_b^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\ & \leq \left(\int_0^1 \left(e^{kt} t^{\alpha-1} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \left(\int_0^1 \left(e^{kt} t^{\alpha-1} \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|f|^q$ quasi konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\ & \leq 2 \left(\Gamma(1 + (\alpha-1)p) - \Gamma[1 + (\alpha-1)p, -kp] \right)^{\frac{1}{p}} \left(\max \{ |f(a)|, |f(b)| \} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. $|f|^q$ quasi-konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\ & \leq 2 \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1 + q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\max \{ |f(a)|, |f(b)| \} \right) \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine mutlak değerin özelliği ve integraller için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left(I_b^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + (1-t)b)| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + (1-t)a)| dt \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|f|^q$ quasi konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF} I_a^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF} I_b^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2 \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{1+q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\max \{ |f(a)|, |f(b)| \} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer

$|f|^{\frac{1}{\mu}}$ quasi konveks ve $\omega + \mu = 1$ olacak şekilde $\omega, \mu > 0$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF} I_a^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF} I_b^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(\frac{2\mu^2}{\alpha + \mu - 1} \right) \max \left\{ |f(a)|^{\frac{1}{\mu}}, |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine genel Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[({}_a I^{\alpha, \rho} f)(b) + (I_b^{\alpha, \rho} f)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + b(1-t))| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + a(1-t))| dt \\
& \leq \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^{\frac{1}{\omega}} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} |f(at + b(1-t))|^{\frac{1}{\mu}} dt \right] \\
& \quad + \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^{\frac{1}{\omega}} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} |f(bt + a(1-t))|^{\frac{1}{\mu}} dt \right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|f|^{\frac{1}{\mu}}$ fonksiyonu quasi konveks olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[({}^{GPF}{}_a I^{\alpha, \rho} f)(b) + ({}^{GPF}I_b^{\alpha, \rho} f)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega \int_0^1 (e^{kt})^{\frac{1}{\omega}} dt + 2\mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} \max \left\{ |f(a)|^{\frac{1}{\mu}}, |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right\} dt \\
& = 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(\frac{2\mu^2}{\alpha + \mu - 1} \right) \max \left\{ |f(a)|^{\frac{1}{\mu}}, |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.4. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$

$\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. $m \in (0, 1]$ için $|f|^q$ m -konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[({}^{GPF}{}_a I^{\alpha, \rho} f)(b) + ({}^{GPF}I_b^{\alpha, \rho} f)(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{1}{2^q} \left[\Gamma(1 + (\alpha - 1)p) - \Gamma(1 + (\alpha - 1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(|f(a)|^q + m \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f(b)|^q + m \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + (1-t)b)| dt \\
& \quad + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + (1-t)a)| dt \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $|f|^q$ fonksiyonun m -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(t |f(a)|^q + m(1-t) \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(t |f(b)|^q + m(1-t) \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \frac{1}{2^q} \left[\Gamma(1 + (\alpha-1)p) - \Gamma(1 + (\alpha-1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left[\left(|f(a)|^q + m \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f(b)|^q + m \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1. Eğer Teorem 4.3.4'te $m=1$ alındığı takdirde,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2 \left[\Gamma(1 + (\alpha - 1)p) - \Gamma(1 + (\alpha - 1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f(a)|^q + |f(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.3.5. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$
 $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. $m \in (0, 1]$ için $|f|^q$ m -konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|f(a)|^q (q(\alpha - 1) + 1) + m \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{(q(\alpha - 1) + 1)(q(\alpha - 1) + 2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|f(b)|^q (q(\alpha - 1) + 1) + m \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q}{(q(\alpha - 1) + 1)(q(\alpha - 1) + 2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho - 1}{\rho}(b - a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + (1-t)b)| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + (1-t)a)| dt \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

yazılır. Hipotezden $|f|^q$ fonksiyonu m -konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q \left(t |f(a)|^q + m(1-t) \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q \left(t |f(b)|^q + m(1-t) \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|f(a)|^q (q(\alpha-1)+1) + m \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|f(b)|^q (q(\alpha-1)+1) + m \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.2. Eğer Teorem 4.3.5'te $m=1$ alındığı takdirde,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|f(a)|^q (q(\alpha-1)+1) + |f(b)|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|f(b)|^q (q(\alpha-1)+1) + |f(a)|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.6. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$

, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer $|f|^{\frac{1}{\mu}}$ m -konveks ve $\omega, \mu > 0$, $\omega + \mu = 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(\frac{\mu^2}{\alpha + 2\mu - 1} \right) \left[|f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right] \\
& \quad + m \left(\frac{\mu^3}{(\alpha + \mu - 1)(\alpha + 2\mu - 1)} \right) \left[\left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} + \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. Lemma 4.3.1 yardımıyla ve genel Cauchy eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + b(1-t))| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + a(1-t))| dt \\
& \leq \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^{\frac{1}{\omega}} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} |f(at + b(1-t))|^{\frac{1}{\mu}} dt \right] \\
& \quad + \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^{\frac{1}{\omega}} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} |f(bt + a(1-t))|^{\frac{1}{\mu}} dt \right]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden $|f|^{\frac{1}{\mu}}$ fonksiyonu m -konveks olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} \left(t |f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + m(1-t) \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} \right) dt \\
& \quad + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^{\frac{1}{\mu}} \left(t |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} + m(1-t) \left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} \right) dt \\
& = 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(\frac{\mu^2}{\alpha + 2\mu - 1} \right) \left[|f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right] \\
& \quad + m \left(\frac{\mu^3}{(\alpha + \mu - 1)(\alpha + 2\mu - 1)} \right) \left[\left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} + \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^{\frac{1}{\mu}} \right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3. Eğer Teorem 4.3.6’da $m=1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(|f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
& \quad \times \left(\left(\frac{\mu^2}{\alpha + 2\mu - 1} \right) + \left(\frac{\mu^3}{(\alpha + 2\mu - 1)(\alpha + \mu - 1)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.7. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun.

$s \in (0, 1]$ için $|f|^q$ s -konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2 \left[\Gamma(1 + (\alpha - 1)p) - \Gamma(1 + (\alpha - 1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f(a)|^q + |f(b)|^q}{s + 1} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho - 1}{\rho}(b - a)$ şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine integraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + (1-t)b)| dt \\
& \quad + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + (1-t)a)| dt \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $|f|^q$ fonksiyonun s -konveksliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^s |f(a)|^q + (1-t)^s |f(b)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^1 (e^{kt} t^{\alpha-1})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^s |f(b)|^q + (1-t)^s |f(a)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = 2 \left[\Gamma(1 + (\alpha-1)p) - \Gamma(1 + (\alpha-1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{|f(a)|^q + |f(b)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.3.4. Eğer Teorem 4.3.7’de $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2 \left[\Gamma(1 + (\alpha-1)p) - \Gamma(1 + (\alpha-1)p, -kp) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\frac{|f(a)|^q + |f(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.8. $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a,b]$, $\rho \in (0,1]$ ve $\alpha > 0$ olsun.

$s \in (0,1]$ için $|f|^q$ s -konveks ve $p, q > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\Omega \times |f(b)|^q + \frac{|f(a)|^q}{1+s+q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\Omega \times |f(a)|^q + \frac{|f(b)|^q}{1+s+q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ ve

$$\Omega = \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)q)\Gamma(1+s)}{\Gamma(2+s+(\alpha-1)q)}$$

şeklindedir.

İspat. (4.3.1) eşitliğine integraller için Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(at + (1-t)b)| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} |f(bt + (1-t)a)| dt \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(at + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q |f(bt + (1-t)a)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Hipotezden ve $|f|^q$ fonksiyonunun s -konveksliğinden dolayı yukarıdaki son eşitsizlik

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q \left(t^s |f(a)|^q + (1-t)^s |f(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^1 (e^{kt})^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha-1})^q \left(t^s |f(b)|^q + (1-t)^s |f(a)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& = \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\Omega \times |f(b)|^q + \frac{|f(a)|^q}{1+s+q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\Omega \times |f(a)|^q + \frac{|f(b)|^q}{1+s+q(\alpha-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.5. Eğer Teorem 4.3.8’de $s=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \left(\frac{e^{kp} - 1}{kp} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{|f(a)|^q (q(\alpha-1)+1) + |f(b)|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{|f(b)|^q (q(\alpha-1)+1) + |f(a)|^q}{(q(\alpha-1)+1)(q(\alpha-1)+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.9. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f \in L[a, b]$, $\rho \in (0, 1]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Eğer

$s \in (0, 1]$ için $|f|^{\frac{1}{\mu}}$ s -konveks ve $\omega, \mu > 0$, $\omega + \mu = 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(\frac{\mu^2}{\alpha + 2\mu - 1} \right) \left[\left| f(a) \right|^\frac{1}{\mu} + \left| f(b) \right|^\frac{1}{\mu} \right] \\
& \quad + m \left(\frac{\mu^3}{(\alpha + \mu - 1)(\alpha + 2\mu - 1)} \right) \left[\left| f\left(\frac{a}{m}\right) \right|^\frac{1}{\mu} + \left| f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^\frac{1}{\mu} \right]
\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k = \frac{\rho-1}{\rho}(b-a)$ şeklindedir.

İspat. Lemma 4.3.1 yardımıyla ve genel Cauchy eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} \left| f(at + b(1-t)) \right| dt + \int_0^1 e^{kt} t^{\alpha-1} \left| f(bt + a(1-t)) \right| dt \\
& \leq \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^\frac{1}{\omega} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^\frac{1}{\mu} \left| f(at + b(1-t)) \right|^\frac{1}{\mu} dt \right] \\
& \quad + \left[\omega \int_0^1 (e^{kt})^\frac{1}{\omega} dt + \mu \int_0^1 (t^{\alpha-1})^\frac{1}{\mu} \left| f(bt + a(1-t)) \right|^\frac{1}{\mu} dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|f|^\frac{1}{\mu}$ fonksiyonunun s -konveksliği yukarıdaki son eşitsizliğe uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
& \leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \beta \int_0^1 (t^{\alpha-1})^\frac{1}{\mu} \left(t^s \left| f(a) \right|^\frac{1}{\mu} + (1-t)^s \left| f(b) \right|^\frac{1}{\mu} \right) dt \\
& \quad + \beta \int_0^1 (t^{\alpha-1})^\frac{1}{\mu} \left(t^s \left| f(b) \right|^\frac{1}{\mu} + (1-t)^s \left| f(a) \right|^\frac{1}{\mu} \right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left[\mu |f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + \mu |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right] \\
&\times \left[\left(\frac{\mu}{\alpha + 2\mu - 1} \right) + \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha + \mu - 1}{\mu}\right) \Gamma(s+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha + 2\mu + s\mu - 1}{\mu}\right)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.6. Eğer Teorem 4.3.9’da $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}{(b-a)^\alpha} \left[\left({}^{GPF}_a I^{\alpha, \rho} f \right)(b) + \left({}^{GPF}_b I^{\alpha, \rho} f \right)(a) \right] \right| \\
&\leq 2\omega^2 \left(\frac{e^{\frac{k}{\omega}} - 1}{k} \right) + \left(|f(a)|^{\frac{1}{\mu}} + |f(b)|^{\frac{1}{\mu}} \right) \\
&\times \left(\left(\frac{\mu^2}{\alpha + 2\mu - 1} \right) + \left(\frac{\mu^3}{(\alpha + 2\mu - 1)(\alpha + \mu - 1)} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

eşitsizliği elde edilir

4.4. Caputo-Fabrizio İntegral Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde bazı konveks fonksiyon çeşitleri için Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörleri içeren Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Lemma 4.4.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $x \in [a, b]$ $f' \in L[a, b]$ olsun. O halde $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha(b-a)+2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \\
& = \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t f'(y) dy dx - \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x f'(y) dy dx
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $t \in [a, b]$ için I_1 ve I_2

$$I_1 = \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t f'(y) dy dx - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t)$$

$$I_2 = -\frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x f'(y) dy dx - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t)$$

olsun. Gerekli integral işlemleri yapılır ve I_1, I_2 toplamından

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= -\frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_a^t f(x) dx - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) \\
&\quad - \frac{\alpha}{B(\alpha)} \int_t^b f(x) dx + \frac{\alpha}{B(\alpha)} f(t) [(b-t) + (t-a)]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli integral tanımından yararlanarak

$$I_1 + I_2 = \frac{\alpha(b-a)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right]$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $f' \in L[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a)+2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{M(1-\alpha)}{2B(\alpha)} [(b-t)^2 + (t-a)^2]
\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.4.1) eşitliğine mutlak değer özelliği uygulanıp, sonrasında her $x \in [a, b]$ için

$|f'(x)| \leq M$ kullanılarak gerekli integral işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}_a I^\alpha f)(t) + ({}^{CF}_b I^\alpha f)(t) \right] \right| \\
&= \left| \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t f'(y) dy dx - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x f'(y) dy dx \right| \\
&\leq \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t |f'(y)| dy dx + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x |f'(y)| dy dx \\
&\leq \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t M dy dx + \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x M dy dx \\
&= \frac{M(1-\alpha)}{2B(\alpha)} \left[(b-t)^2 + (t-a)^2 \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.2. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $x \in [a, b]$, $f' \in L[a, b]$ ve $|f'|$ quasi konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}_a I^\alpha f)(t) + ({}^{CF}_b I^\alpha f)(t) \right] \right| \\
&\leq \frac{(1-\alpha)}{2B(\alpha)} \left[(t-a)^2 + (b-t)^2 \right] \max \{ |f'(a)|, |f'(b)| \}
\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.4.1) eşitliğine mutlak değer özelliği uygulanıp sonrasında Lemma 4.4.1'in ispatında belirtilen I_1 ve I_2 eşitliklerine sırasıyla $y = \lambda b + (1-\lambda)a$ ve $y = \lambda a + (1-\lambda)b$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} |f'(\lambda b + (1-\lambda)a)| d\lambda dx \\
& \quad + \frac{(1-\alpha)(a-b)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{t-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} |f'(\lambda a + (1-\lambda)b)| d\lambda dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafına $|f'|$ fonksiyonunun quasi konveksliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} \max \{ |f'(a)|, |f'(b)| \} d\lambda dx \\
& \quad - \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{t-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} \max \{ |f'(a)|, |f'(b)| \} d\lambda dx \\
& = \frac{(1-\alpha)}{2B(\alpha)} \left[(t-a)^2 + (b-t)^2 \right] \max \{ |f'(a)|, |f'(b)| \}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $s \in (0, 1]$ için $|f'|$ s -konveks fonksiyon ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a)+2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{(1-\alpha)}{(s+1)(b-a)^s B(\alpha)} \left(\left| f'(a) \right| \left[\left[\frac{(b-a)^{s+2} - (b-t)^{s+2}}{s+2} - (b-t)^{s+1}(t-a) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (-1)^{-s-1} \left[(t-b)^{s+2} - \frac{(t-b)^{s+2}}{s+2} \right] \right] + \left| f'(b) \right| \left[\left[(t-a)^{s+2} - \frac{(t-a)^{s+2}}{s+2} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (-1)^{-s-1} \left[\frac{(a-t)^{s+2} - (a-b)^{s+2}}{s+2} + (a-t)^{s+1}(b-t) \right] \right] \right) \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.4.1) eşitliğine mutlak değer uygulanıp, Lemma 4.4.1'in ispatında belirtilen I_1 ve I_2 eşitliklerine sırasıyla $y = \lambda b + (1-\lambda)a$ ve $y = \lambda a + (1-\lambda)b$ değişken değişimi yapılır ve sonrasında $|f'|$ fonksiyonunun s -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a)+2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[\left({}^{CF}I_a^\alpha f \right)(t) + \left({}^{CF}I_b^\alpha f \right)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} \left| f'(\lambda b + (1-\lambda)a) \right| d\lambda dx \\
& \quad + \frac{(1-\alpha)(a-b)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{a-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} \left| f'(\lambda a + (1-\lambda)b) \right| d\lambda dx \\
& \leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{x-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} \left(\lambda^s |f'(b)| + (1-\lambda)^s |f'(a)| \right) d\lambda dx \\
& \quad + \frac{(1-\alpha)(a-b)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{a-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} \left(\lambda^s |f'(a)| + (1-\lambda)^s |f'(b)| \right) d\lambda dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-\alpha)}{(s+1)(b-a)^s B(\alpha)} \left(|f'(a)| \left[\left[\frac{(b-a)^{s+2} - (b-t)^{s+2}}{s+2} - (b-t)^{s+1} (t-a) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (-1)^{-s-1} \left[(t-b)^{s+2} - \frac{(t-b)^{s+2}}{s+2} \right] \right] + |f'(b)| \left[\left[(t-a)^{s+2} - \frac{(t-a)^{s+2}}{s+2} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (-1)^{-s-1} \left[\frac{(a-t)^{s+2} - (a-b)^{s+2}}{s+2} + (a-t)^{s+1} (b-t) \right] \right] \right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.1. Teorem 4.4.3'te $s=1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}I_a^\alpha f)(t) + ({}^{CF}I_b^\alpha f)(t) \right] \right| \\
&\leq \frac{(1-\alpha)|f'(a)|}{B(\alpha)} \left[\frac{(t-a)^2}{2} - \frac{((t-b)^3 + (t-a)^3)}{3(b-a)} \right] \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)|f'(b)|}{B(\alpha)} \left[\frac{((t-a)^3 + (t-b)^3)}{3(b-a)} + \frac{(b-t)^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4.4. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $m \in (0, 1]$ için $|f'|$ m -konveks fonksiyon ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}I_a^\alpha f)(t) + ({}^{CF}I_b^\alpha f)(t) \right] \right| \\
&\leq -\frac{(1-\alpha)|f'(a)|(t-b)^3}{3(b-a)B(\alpha)} + \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| \frac{m(1-\alpha)}{B(\alpha)} \left[\frac{(t-a)^2}{2} - \frac{(t-a)^3}{3(b-a)} \right] \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)|f'(b)|(t-a)^3}{3(b-a)B(\alpha)} + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \frac{m(1-\alpha)}{B(\alpha)} \left[\frac{(b-t)^2}{2} + \frac{(t-b)^3}{3(b-a)} \right]
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $B(\alpha) > 0$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat. (4.4.1) eşitliğine mutlak değer uygulanıp, Lemma 4.4.1'in ispatında I_1 ve I_2 eşitliklerine sırasıyla $y = \lambda b + (1-\lambda)a$ ve $y = \lambda a + (1-\lambda)b$ değişken değişimi yapılır ve sonrasında $|f'|$ fonksiyonunun m -konveksliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}_a I^\alpha f)(t) + ({}^{CF}_b I^\alpha f)(t) \right] \right| \\
&= \left| \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_x^t f'(y) dy dx - \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_t^x f'(y) dy dx \right| \\
&\leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{b-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} |f'(\lambda b + (1-\lambda)a)| d\lambda dx \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)(a-b)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{a-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} |f'(\lambda a + (1-\lambda)b)| d\lambda dx \\
&\leq \frac{(1-\alpha)(b-a)}{B(\alpha)} \int_a^t \int_{\frac{b-a}{b-a}}^{\frac{t-a}{b-a}} \left(\lambda |f'(b)| + m(1-\lambda) \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) d\lambda dx \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)(a-b)}{B(\alpha)} \int_t^b \int_{\frac{a-b}{a-b}}^{\frac{x-b}{a-b}} \left(\lambda |f'(a)| + m(1-\lambda) \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) d\lambda dx \\
&= -\frac{(1-\alpha)|f'(a)|(t-b)^3}{3(b-a)B(\alpha)} + \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| \frac{m(1-\alpha)}{B(\alpha)} \left[\frac{(t-a)^2}{2} - \frac{(t-a)^3}{3(b-a)} \right] \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)|f'(b)|(t-a)^3}{3(b-a)B(\alpha)} + \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \frac{m(1-\alpha)}{B(\alpha)} \left[\frac{(b-t)^2}{2} + \frac{(t-b)^3}{3(b-a)} \right]
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.4.4'te $m=1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\alpha(b-a) + 2(1-\alpha)}{B(\alpha)} f(t) - \left[({}^{CF}I_a^\alpha f)(t) + ({}^{CF}I_b^\alpha f)(t) \right] \right| \\
& \leq \frac{(1-\alpha)|f'(a)|}{B(\alpha)} \left[\frac{(t-a)^2}{2} - \frac{((t-b)^3 + (t-a)^3)}{3(b-a)} \right] \\
& + \frac{(1-\alpha)|f'(b)|}{B(\alpha)} \left[\frac{((t-a)^3 + (t-b)^3)}{3(b-a)} + \frac{(b-t)^2}{2} \right]
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

4.5. ψ - Caputo Kesirli Türev Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde m -konveks fonksiyon için ψ -Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörler yardımıyla Ostrowski tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.5.1. $n \in \mathbb{Z}^+$, $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ n . mertebeden diferansiyellenebilen bir fonksiyon, ψ ise diferansiyellenebilen, kesin artan bir fonksiyon ve $\psi' \in L([\mu, \xi])$ olsun. $m \in (0,1]$ için $f^{(n)}$ pozitif m -konveks fonksiyon, $\mu, \xi \in I$, $\mu < \xi$ ve $\alpha, \beta \geq 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \Gamma(n-\alpha+1)({}^c D_{\mu^+}^{\alpha-1, \psi} f)(\kappa) + \Gamma(n-\beta+1)({}^c D_{\xi^-}^{\beta-1, \psi} f)(\kappa) \\
& \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{m\kappa - \mu} \left[f^{(n)}(\mu)(\psi(\kappa)(m\kappa - \kappa) - \psi(\mu)(m\kappa - \mu)) \right. \\
& + m f^{(n)}(\kappa) \psi(\kappa)(\kappa - \mu) - (m f^{(n)}(\kappa) - f^{(n)}(\mu)) \int_{\mu}^{\kappa} \psi(x) dx \Big] \\
& + \frac{(\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta}}{m\xi - \kappa} \left[f^{(n)}(\kappa)(\psi(\xi)(m\xi - \xi) - \psi(\kappa)(m\xi - \kappa)) \right. \\
& + m f^{(n)}(\xi) \psi(\xi)(\xi - \kappa) - (m f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(\kappa)) \int_{\kappa}^{\xi} \psi(x) dx \Big]
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

İspat. $\kappa \in [\mu, \zeta]$ ve $x \in [\mu, \kappa]$ olsun. Hipotezden ψ diferansiyellenebilen kesin artan bir fonksiyon ve $\psi'(x) > 0$ olduğundan

$$\psi'(x)(\psi(\kappa) - \psi(x))^{n-\alpha} \leq \psi'(x)(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha} \quad (4.5.2)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Diğer taraftan $f^{(n)}$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{m\kappa - x}{m\kappa - \mu} f^{(n)}(\mu) + \frac{x - \mu}{m\kappa - \mu} m f^{(n)}(\kappa) \quad (4.5.3)$$

dır. Buradan (4.5.2) ve (4.5.3) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $[\mu, \kappa]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\mu}^{\kappa} (\psi(\kappa) - \psi(x))^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \psi'(x) dx \\ & \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{m\kappa - \mu} \left(f^{(n)}(\mu) \int_{\mu}^{\kappa} (m\kappa - x) \psi'(x) dx + m f^{(n)}(\kappa) \int_{\mu}^{\kappa} (x - \mu) \psi'(x) dx \right) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

bulunur.

Ayrıca ψ - Caputo türev tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(n - \alpha + 1) \left({}^c D_{\mu^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\kappa) \\ & \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{m\kappa - \mu} \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa)(m\kappa - \kappa) - \psi(\mu)(m\kappa - \mu)) \right. \\ & \quad \left. + m f^{(n)}(\kappa) \psi(\kappa)(\kappa - \mu) - (m f^{(n)}(\kappa) + f^{(n)}(\mu)) \int_{\mu}^{\kappa} \psi(x) dx \right] \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

sonucu elde edilir.

Benzer şekilde $\kappa \in [\mu, \zeta]$ ve $x \in [\kappa, \zeta]$ için

$$\psi'(x)(\psi(x) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \leq \psi'(x)(\psi(\zeta) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \quad (4.5.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan $f^{(n)}$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$f^{(n)}(x) \leq \frac{m\zeta - x}{m\zeta - \kappa} f^{(n)}(\kappa) + \frac{x - \kappa}{m\zeta - \kappa} m f^{(n)}(\zeta) \quad (4.5.7)$$

dır. Böylece (4.5.6) , (4.5.7) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $[\kappa, \zeta]$ aralığında integrali alınır

$$\begin{aligned} & \int_{\kappa}^{\zeta} (\psi(x) - \psi(\kappa))^{n-\beta} f^{(n)}(x) \psi'(x) dx \\ & \leq \frac{(\psi(\zeta) - \psi(\kappa))^{n-\beta}}{m\zeta - \kappa} \left(f^{(n)}(\kappa) \int_{\kappa}^{\zeta} (m\zeta - x) \psi'(x) dx + m f^{(n)}(\zeta) \int_{\kappa}^{\zeta} (x - \kappa) \psi'(x) dx \right) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tekrar ψ - Caputo türev tanımından faydalanılırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(n - \beta + 1) \left({}^c D_{\zeta^-}^{\beta-1, \psi} f \right) (\kappa) \\ & \leq \frac{(\psi(\zeta) - \psi(\kappa))^{n-\beta}}{m\zeta - \kappa} \left[f^{(n)}(\kappa) (\psi(\zeta)(m\zeta - \zeta) - \psi(\kappa)(m\zeta - \kappa)) \right. \\ & \quad \left. + m f^{(n)}(\zeta) \psi(\zeta)(\zeta - \kappa) - (m f^{(n)}(\zeta) + f^{(n)}(\kappa)) \int_{\kappa}^{\zeta} \psi(x) dx \right] \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.5.5) ve (4.5.9) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.1. Eğer Teorem 4.5.1'de $\alpha = \beta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \Gamma(n-\alpha+1) \left[\left({}^c D_{\mu^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\kappa) + \left({}^c D_{\xi^-}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\kappa) \right] \\
& \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{m\kappa - \mu} \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa)(m\kappa - \kappa) - \psi(\mu)(m\kappa - \mu)) \right. \\
& \quad \left. + m f^{(n)}(\kappa) \psi(\kappa)(\kappa - \mu) - \left(m f^{(n)}(\kappa) + f^{(n)}(\mu) \right) \int_{\mu}^{\kappa} \psi(x) dx \right] \\
& \quad + \frac{(\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\alpha}}{m\xi - \kappa} \left[f^{(n)}(\kappa) (\psi(\xi)(m\xi - \xi) - \psi(\kappa)(m\xi - \kappa)) \right. \\
& \quad \left. + m f^{(n)}(\xi) \psi(\xi)(\xi - \kappa) - \left(m f^{(n)}(\xi) + f^{(n)}(\kappa) \right) \int_{\kappa}^{\xi} \psi(x) dx \right]
\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

eşitsizliği elde edilir [5].

Teorem 4.5.2. $n \in \mathbb{Z}^+$, $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ n . mertebeden diferansiyellenebilen, ψ ise diferansiyellenebilen kesin artan fonksiyon ve $\psi' \in L([\mu, \xi])$ olsun. $m \in (0, 1]$ için $|f^{(n+1)}|$ m -konveks fonksiyon, $\mu, \xi \in I$, $\mu < \xi$, $\kappa \in [\mu, \xi]$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(n-\alpha+1) \left({}^c D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right) (\kappa) + \Gamma(n-\beta+1) \left({}^c D_{\xi^-}^{\beta, \psi} f \right) (\kappa) \right. \\
& \quad \left. - \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha} + f^{(n)}(\xi) (\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \right] \right| \\
& \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu)(2m\kappa - \kappa - \mu) + \left| m f^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \\
& \quad + \frac{(\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta}}{2(m\xi - \kappa)} \left(\left| f^{(n+1)}(\kappa) \right| (\xi - \kappa)(2m\xi - \xi - \kappa) + \left| m f^{(n+1)}(\xi) \right| (\xi - \kappa)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.5.11}$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

İspat. Hipotezden $f^{(n+1)}$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq \frac{m\kappa - x}{m\kappa - \mu} \left| f^{(n+1)}(\mu) \right| + \frac{x - \mu}{m\kappa - \mu} \left| m f^{(n+1)}(\kappa) \right| \tag{4.5.12}$$

dır. Böylece mutlak değer özelliğinden (4.5.12) eşitsizliği

$$f^{(n+1)}(x) \leq \frac{m\kappa - x}{m\kappa - \mu} \left| f^{(n+1)}(\mu) \right| + \frac{x - \mu}{m\kappa - \mu} \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| \quad (4.5.13)$$

şeklinde yazılır.

Diğer taraftan $\kappa \in [\mu, \zeta]$ ve $x \in [\mu, \kappa]$ olmak üzere ψ diferansiyellenebilen kesin artan bir fonksiyon olduğundan

$$\left(\psi(\kappa) - \psi(x) \right)^{n-\alpha} \leq \left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha} \quad (4.5.14)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (4.5.13) ve (4.5.14) taraf tarafa çarpılıp, fonksiyonun $[\mu, \kappa]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\mu}^{\kappa} \left(\psi(\kappa) - \psi(x) \right)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(x) dx \\ & \leq \frac{\left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha}}{m\kappa - \mu} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| \int_{\mu}^{\kappa} (m\kappa - x) dx + \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| \int_{\mu}^{\kappa} (x - \mu) dx \right) \\ & = \frac{\left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu)(2m\kappa - \kappa - \mu) + \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

sonucu elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \int_{\mu}^{\kappa} \left(\psi(\kappa) - \psi(x) \right)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(x) dx \\ & = -f^{(n)}(\mu) \left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha} + \Gamma(n - \alpha + 1) \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right)(\kappa) \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

olduğu görülür. Böylece (4.5.15) ve (4.5.16) ifadelerinden

$$\begin{aligned} & \Gamma(n - \alpha + 1) \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right)(\kappa) - f^{(n)}(\mu) \left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha} \\ & \leq \frac{\left(\psi(\kappa) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu)(2m\kappa - \kappa - \mu) \right. \\ & \quad \left. + \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

bulunur.

Yine (4.5.12) eşitsizliğinden

$$f^{(n+1)}(x) \geq - \left(\frac{m\kappa - x}{m\kappa - \mu} \left| f^{(n+1)}(\mu) \right| + \frac{x - \mu}{m\kappa - \mu} \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| \right) \quad (4.5.18)$$

yazılır. (4.5.13) eşitsizliğine uygulanan benzer işlemler (4.5.18)'e uygulanırsa

$$\begin{aligned} & f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha} - \Gamma(n-\alpha+1) \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right)(\kappa) \\ & \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu) (2m\kappa - \kappa - \mu) \right. \\ & \quad \left. + \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece (4.5.17) ve (4.5.19)'dan

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(n-\alpha+1) \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right)(\kappa) - f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha} \right| \\ & \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu) (2m\kappa - \kappa - \mu) \right. \\ & \quad \left. + \left| mf^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

elde edilir.

Hipotezden $\left| f^{(n+1)} \right|$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq \frac{m\xi - x}{m\xi - \kappa} \left| f^{(n+1)}(\kappa) \right| + \frac{x - \kappa}{m\xi - \kappa} \left| mf^{(n+1)}(\xi) \right| \quad (4.5.21)$$

yazılır. Buradan $\kappa \in [\mu, \xi]$, $x \in [\kappa, \xi]$ ve $\beta > 0$ için

$$(\psi(x) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \leq (\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \quad (4.5.22)$$

eşitsizliği sağlanır.

(4.5.12), (4.5.14) eşitsizliklerine yapılan işlemler (4.5.21) ve (4.5.22) için de uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(n-\beta+1) \left({}^C D_{\xi^-}^{\beta, \psi} f \right) (\kappa) - f^{(n)}(\xi) (\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta} \right| \\
& \leq \frac{(\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\beta}}{2(m\xi - \kappa)} \left(\left| f^{(n+1)}(\kappa) \right| (\xi - \kappa) (2m\xi - \xi - \kappa) \right. \\
& \quad \left. + \left| m f^{(n+1)}(\xi) \right| (\xi - \kappa)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.2. Eğer Teorem 4.5.2’de $\alpha = \beta$ alınırsa, ψ - Caputo türevi için

$$\begin{aligned}
& \left| \Gamma(n-\alpha+1) \left\{ \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha, \psi} f \right) (\kappa) + \left({}^C D_{\xi^-}^{\alpha, \psi} f \right) (\kappa) \right\} \right. \\
& \quad \left. - \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha} + f^{(n)}(\xi) (\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\alpha} \right] \right| \\
& \leq \frac{(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\alpha}}{2(m\kappa - \mu)} \left(\left| f^{(n+1)}(\mu) \right| (\kappa - \mu) (2m\kappa - \kappa - \mu) + \left| m f^{(n+1)}(\kappa) \right| (\kappa - \mu)^2 \right) \\
& \quad + \frac{(\psi(\xi) - \psi(\kappa))^{n-\alpha}}{2(m\xi - \kappa)} \left(\left| f^{(n+1)}(\kappa) \right| (\xi - \kappa) (2m\xi - \xi - \kappa) + \left| m f^{(n+1)}(\xi) \right| (\xi - \kappa)^2 \right)
\end{aligned} \tag{4.5.24}$$

eşitsizliği elde edilir [5].

Teorem 4.5.3. $n \in \mathbb{Z}^+$, $f : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ n . mertebeden diferansiyellenebilen, ψ ise diferansiyellenebilen kesin artan bir fonksiyon ve $\psi' \in L[\mu, \xi]$ olsun. $m \in (0, 1]$ için $f^{(n)}$ pozitif m -konveks ve $\frac{\mu + \xi}{2}$ noktası için simetrik bir fonksiyon, $\mu, \xi \in I$, $\mu < \xi$ ve $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-\alpha+1} + \frac{1}{n-\beta+1} \right) f^{(n)} \left(\frac{\mu + \xi}{2} \right) \\
& \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1) \left({}^C D_{\xi^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\mu)}{2(\psi(\xi) - \psi(\mu))^{n-\alpha+1}} + \frac{\Gamma(n-\beta+1) \left({}^C D_{\eta^-}^{\beta-1, \psi} f \right) (\mu)}{2(\psi(\xi) - \psi(\mu))^{n-\beta+1}} \\
& \leq \frac{1}{(\psi(\xi) - \psi(\mu))(m\xi - \mu)} \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\xi) (m\xi - \xi) - \psi(\mu) (m\xi - \mu)) \right. \\
& \quad \left. + m f^{(n)}(\xi) \psi(\xi) (\xi - \mu) - (m f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(\mu)) \int_{\mu}^{\xi} \psi(\kappa) d\kappa \right]
\end{aligned} \tag{4.5.25}$$

eşitsizliği geçerlidir [5].

İspat. $\kappa \in [\mu, \zeta]$, ψ diferansiyellenebilen kesin artan bir fonksiyon ve $\psi'(\kappa) > 0$ olduğundan

$$\psi'(\kappa)(\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\beta} \leq \psi'(\kappa)(\psi(\zeta) - \psi(\mu))^{n-\beta} \quad (4.5.26)$$

eşitsizliği yazılır.

Diğer taraftan $f^{(n)}$ fonksiyonunun m -konveksliğinden

$$f^{(n)}(\kappa) \leq \frac{m\zeta - \kappa}{m\zeta - \mu} f^{(n)}(\mu) + \frac{\kappa - \mu}{m\zeta - \mu} m f^{(n)}(\zeta) \quad (4.5.27)$$

dır. (4.5.26) ve (4.5.27) eşitsizlikleri taraf tarafa çarpılıp, elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının $[\mu, \zeta]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_{\mu}^{\zeta} (\psi(\kappa) - \psi(\mu))^{n-\beta} f^{(n)}(\kappa) \psi'(\kappa) d\kappa \\ & \leq \frac{(\psi(\zeta) - \psi(\mu))^{n-\beta}}{m\zeta - \mu} \left(m f^{(n)}(\zeta) \int_{\mu}^{\zeta} (\kappa - \mu) \psi'(\kappa) d\kappa + f^{(n)}(\mu) \int_{\mu}^{\zeta} (m\zeta - \kappa) \psi'(\kappa) d\kappa \right) \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

bulunur.

Ayrıca ψ - Caputo kesirli türev tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(n - \beta + 1) \left({}^C D_{\zeta^-}^{\beta-1, \psi} f \right) (\mu) \\ & \leq \frac{(\psi(\zeta) - \psi(\mu))^{n-\beta}}{m\zeta - \mu} \left[f^{(n)}(\mu) (\psi(\zeta)(m\zeta - \zeta) - \psi(\mu)(m\zeta - \mu)) \right. \\ & \quad \left. + m f^{(n)}(\zeta) \psi(\zeta)(\zeta - \mu) - (m f^{(n)}(\zeta) - f^{(n)}(\mu)) \int_{\mu}^{\zeta} \psi(\kappa) d\kappa \right] \end{aligned} \quad (4.5.29)$$

olduğu kolayca görülür.

(4.5.26) da olduğu gibi $\kappa \in [\mu, \zeta]$ ve $\alpha > 0$ için

$$\psi'(\kappa)(\psi(\zeta)-\psi(\kappa))^{n-\alpha} \leq \psi'(\kappa)(\psi(\zeta)-\psi(\mu))^{n-\alpha} \quad (4.5.30)$$

eşitsizliği sağlanır.

Yapılan işlemlerin benzeri tekrar (4.5.27) ve (4.5.30) için uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \Gamma(n-\alpha+1) \left({}^C D_{\mu^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\zeta) \\ & \leq \frac{(\psi(\zeta)-\psi(\mu))^{n-\alpha}}{m\zeta-\mu} \left[f^{(n)}(\mu)(\psi(\zeta)(m\zeta-\zeta)-\psi(\mu)(m\zeta-\mu)) \right. \\ & \quad \left. + m f^{(n)}(\zeta)\psi(\zeta)(\zeta-\mu) - (m f^{(n)}(\zeta) - f^{(n)}(\mu)) \int_{\mu}^{\zeta} \psi(\kappa) d\kappa \right] \end{aligned} \quad (4.5.31)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Lemma 2.3.2' den yararlanarak, (4.5.24) eşitsizliğini $\psi'(\kappa)(\psi(\kappa)-\psi(\mu))^{n-\beta}$ ile çarpılıp $[\mu, \zeta]$ aralığında integrali alınır,

$$\begin{aligned} & f^{(n)}\left(\frac{\mu+\zeta}{2}\right) \int_{\mu}^{\zeta} (\psi(\kappa)-\psi(\mu))^{\eta-\beta} \psi'(\kappa) d\kappa \\ & \leq \int_{\mu}^{\zeta} (\psi(\kappa)-\psi(\mu))^{\eta-\beta} \psi'(\kappa) f^{(n)}(\kappa) d\kappa \end{aligned} \quad (4.5.32)$$

yazılır. Ayrıca ψ - Caputo türev tanımından

$$\frac{f^{(n)}\left(\frac{\mu+\zeta}{2}\right)}{2(n-\beta+1)} \leq \frac{\Gamma(n-\beta+1) \left({}^C D_{\eta^-}^{\beta-1, \psi} f \right) (\mu)}{2(\psi(\zeta)-\psi(\mu))^{n-\beta+1}} \quad (4.5.33)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.5.24) eşitsizliği $\psi'(\kappa)(\psi(\zeta)-\psi(\kappa))^{n-\alpha}$ ile çarpılıp, sonucun

$[\mu, \zeta]$ aralığında integralini alınır

$$\frac{f^{(n)}\left(\frac{\mu+\zeta}{2}\right)}{2(n-\alpha+1)} \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1) \left({}^C D_{\zeta^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\mu)}{2(\psi(\zeta)-\psi(\mu))^{n-\alpha+1}} \quad (4.5.34)$$

elde edilir. (4.5.33) ve (4.5.34) eşitsizliklerinin taraf tarafa toplamıyla, ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.5.3. Teorem 4.5.3'te $\alpha = \beta$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{n-\alpha+1} \right) f^{(n)} \left(\frac{\mu+\zeta}{2} \right) \\
& \leq \frac{\Gamma(n-\alpha+1) \left\{ \left({}^C D_{\zeta^+}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\mu) + \left({}^C D_{\eta^-}^{\alpha-1, \psi} f \right) (\zeta) \right\}}{2 \left(\psi(\zeta) - \psi(\mu) \right)^{n-\alpha+1}} \\
& \leq \frac{1}{\left(\psi(\zeta) - \psi(\mu) \right) (m\zeta - \mu)} \left[f^{(n)}(\mu) \left(\psi(\zeta) (m\zeta - \zeta) - \psi(\mu) (m\zeta - \mu) \right) \right. \\
& \quad \left. + m f^{(n)}(\zeta) \psi(\zeta) (\zeta - \mu) - \left(m f^{(n)}(\zeta) - f^{(n)}(\mu) \right) \int_{\mu}^{\zeta} \psi(\kappa) d\kappa \right]
\end{aligned} \tag{4.5.35}$$

eşitsizliği elde edilir [5].

4.6. Yeni Uyumlu Kesirli İntegral Operatörler İçeren Ostrowski Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde m -konveks fonksiyon için yeni uyumlu kesirli integral operatörler yardımıyla Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 4.6.1. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$, $|f'|$ m -konveks fonksiyon $\alpha > 0$ ve $\beta > 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)^{\alpha\beta}} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^{\beta} I_x^{\alpha} f(b) + {}^{\beta} I_x^{\alpha} f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{m\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)(b-a)^{\alpha\beta}} \left(\left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| (x-a)^{\alpha\beta+1} + \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| (b-x)^{\alpha\beta+1} \right) \\
& \quad + \frac{|f'(x)|}{\alpha^{\beta} (b-a)} \left(\frac{\alpha^2 \beta^2 + 3\alpha\beta}{2(\alpha^2 \beta^2 + 3\alpha\beta + 2)} \right) \left((x-a)^{\alpha\beta+1} + (b-x)^{\alpha\beta+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

İspat. $|f'|$ m -konveksliğinden ve Lemma 3.7.1'den

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta I^\alpha_x f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta |f'(tx + (1-t)a)| dt \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta |f'(tx + (1-t)b)| dt \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta \left(t|f'(x)| + m(1-t) \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta \left(t|f'(x)| + m(1-t) \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\alpha > 0$ ve $\beta > 1$ için $|1-(1-t)^\alpha|^\beta \leq 1-|1-t|^{\alpha\beta}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta I^\alpha_x f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) \left(t|f'(x)| + m(1-t) \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right| \right) dt \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) \left(t|f'(x)| + m(1-t) \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right| \right) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki gerekli integral işlemler yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.6.1. Teorem 4.6.1'de eğer

i) $m=1$ alınır

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)(b-a)\alpha^\beta} \left(|f'(a)|(x-a)^{\alpha\beta+1} + |f'(b)|(b-x)^{\alpha\beta+1} \right) \\
& \quad + \frac{|f'(x)|}{\alpha^\beta(b-a)} \left(\frac{\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta}{2(\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta + 2)} \right) \left((x-a)^{\alpha\beta+1} + (b-x)^{\alpha\beta+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.6.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $m=1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{1-\alpha\beta} (b-a)^{\alpha\beta-1}}{\alpha^\beta} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_{\frac{a+b}{2}}^\alpha f(b) + {}^\beta I_{\frac{a+b}{2}}^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{\alpha\beta(b-a)^{\alpha\beta}}{2^{\alpha\beta+2}(\alpha\beta+2)\alpha^\beta} \left(|f'(a)| + |f'(b)| \right) \\
& \quad + \frac{(b-a)^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta 2^{\alpha\beta+1}} \left(\frac{\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta}{(\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta + 2)} \right) \left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|
\end{aligned} \tag{4.6.3}$$

eşitsizliği elde edilir [3].

Teorem 4.6.2. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$, $|f'|^q$ m -konveks fonksiyon $\alpha, \beta > 0$, $p, q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)^{\alpha\beta}} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta_x I^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\beta p+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q + m \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\beta p+1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.4}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

İspat. Lemma 3.7.1'in özellikleri, $|f'|^q$ fonksiyonunun m -konveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)^{\alpha\beta}} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta_x I^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^{\beta p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.2. Teorem 4.6.2'de eğer

i) $m=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(x)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $m=1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{1-\alpha\beta} (b-a)^{\alpha\beta-1}}{\alpha^\beta} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_{\frac{a+b}{2}}^\alpha f(b) + {}^\beta I_{\frac{a+b}{2}}^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha\beta}}{2^{\alpha\beta+1}} \left(\frac{B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |f'(a)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-a)^{\alpha\beta}}{2^{\alpha\beta+1}} \left(\frac{B\left(\beta p + 1, \frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.6}$$

eşitsizliği elde edilir [3].

Teorem 4.6.3. $a, b \in [0, \infty)$, $a < b$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$, $|f'|^q$ m -konveks fonksiyon, $\alpha > 0$, $\beta > 1$ ve $q \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{m \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

eşitsizliği geçerlidir [3].

İspat. $|f'|^q$ fonksiyonunun m -konveksliği, Hölder eşitsizliği ve Lemma 3.7.1'in özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta I_x^\alpha f(b) + {}^\beta I_x^\alpha f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left(\frac{1-(1-t)^\alpha}{\alpha} \right)^\beta \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Buradan $\alpha > 0$ ve $\beta > 1$ için $|1-(1-t)^\alpha|^\beta \leq 1-|1-t|^{\alpha\beta}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta I^\alpha_x f(a) \right] \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) dt \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int_0^1 \left(\frac{1-|1-t|^{\alpha\beta}}{\alpha^\beta} \right) \left(t |f'(x)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Belirtilen integrallerin hesaplanmaları ardından ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.3. Teorem 4.6.3'te eğer

i) $m=1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(x-a)^{\alpha\beta} + (b-x)^{\alpha\beta}}{(b-a)\alpha^\beta} f(x) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_x I^\alpha f(b) + {}^\beta I^\alpha_x f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(x-a)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{|f'(a)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(b-x)^{\alpha\beta+1}}{b-a} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{|f'(x)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{|f'(b)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $m=1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{1-\alpha\beta} (b-a)^{\alpha\beta-1}}{\alpha^\beta} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(\beta+1)}{b-a} \left[{}^\beta_{\frac{a+b}{2}} I^\alpha f(b) + {}^\beta I^\alpha_{\frac{a+b}{2}} f(a) \right] \right| \\
& \leq \frac{(b-a)^{\alpha\beta}}{2^{\alpha\beta+1}} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\frac{\left| f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{|f'(a)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.6.9}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(b-a)^{\alpha\beta}}{2^{\alpha\beta+1}} \left(\frac{B\left(\frac{1}{\alpha}, \beta+1\right)}{\alpha^{\beta+1}} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left(\frac{\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{1}{2} - B(2, \alpha\beta+1) \right) + \frac{|f'(b)|^q}{\alpha^\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{2(\alpha\beta+2)} \right) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [3].

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hazırlanan bu tez çalışmasında, bazı konveks fonksiyon çeşitleri için uyumlu kesirli integral operatörleri içeren Hermite Hadamard ile Pòlya-Szegö-Chebyshev tipli eşitsizlikler ve ω -Riemann Liouville kesirli integral operatörleri yardımıyla Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu sonuçların daha önce yapılan eşitsizliklerin daha genel hali olduğu gösterilmiş ve literatürle uyumu ortaya konmuştur. Daha sonra hem Caputo-Fabrizio kesirli ve hem de genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integral operatörleri yardımıyla yeni özdeşlikler ispatlanmıştır. Bu özdeşlikler kullanılarak Caputo Fabrizio kesirli integralleri için Ostrowski ve genelleştirilmiş oransal kesirli (GPF) integralleri için Hermite Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Son olarak ψ -Caputo kesirli türev ve yeni uyumlu kesirli integraller yardımıyla m -konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir. Konuyla ilgili araştırmacılar çalışmamızda verilen sonuçların daha genel versiyonlarını ve yeni üst sınırlar veren genişlemelerini, integral operatörlerin genel formlarını kullanarak elde edebilirler. Ayrıca ispatladığımız yeni özdeşlikleri kullanarak AG-konveks, GG-konveks, GA-konveks gibi farklı konveks fonksiyon türleri yardımıyla literatürde bulunan mevcut eşitsizlikler için yeni sonuçlar elde edebilirler.

Hazırlanan tezin bulgular kısmında elde edilen bazı sonuçlar makale formatına getirilerek çeşitli dergilerde yayınlanmıştır. Dergilerde yayınlanan makaleler şunlardır:

“Some New Generalizations for m -Convexity via New Conformable Fractional Integral Operators” adlı çalışma “**Mathematica Moravica**” isimli dergide, “On Some Integral Inequalities via Conformable Fractional Integrals” adlı çalışma “**Applied Mathematics and Nonlinear Science**” isimli dergide, “Inequalities for m -Convex Functions via ψ -Caputo Fractional Derivatives” adlı çalışma “**Mathematical Methods and Modelling in Applied Sciences**” isimli dergide, “New Extensions of Chebyshev-Pòlya-Szegö Type Inequalities via Conformable Integrals” adlı çalışma “**AIMS Mathematics**” isimli dergide yayınlanmıştır. Belirtilen bu yayınların dışındaki elde edilen diğer sonuçlar makale haline getirilip, dergilere gönderilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- [1] Abdeljawad, T., Baleanu, D., (2017). On Fractional Derivatives with Exponential Kernel and Their Discrete Versions. *J. Rep. Math. Phys.* 80(1), 11-27.
- [2] Abdeljawad, T., (2015). On Conformable Fractional Calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- [3] Akdemir, A. O., Deniz, E., Yüksel, E., (2019). Some New Generalizations for m -Convexity via New Conformable Fractional Integral Operators. *Mathematica Moravica*, Vol. 23, No.2, 69-77.
- [4] Akdemir, A. O., Deniz, E., Yüksel, E., On Some Integral Inequalities via Conformable Fractional Integrals. *Applied Mathematics and Nonlinear Science*. Submitted.
- [5] Akdemir, A. O., Dutta, H., Yüksel, E., Deniz, E., (2020). Inequalities for m -Convex Functions via ψ -Caputo Fractional Derivatives. *Mathematical Methods and Modelling in Applied Sciences*, Vol. 123, 215-224, Springer Nature Switzerland.
- [6] Almeida, R., (2017). A Caputo Fractional Derivative of a Function with Respect to Another Function. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 44, 460–481.
- [7] Anderson, D. R., Ulness, D. J., (2015). Newly Defined Conformable Derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, Volume 10, Number 2, pp. 109–137.
- [8] Anderson, G. D., Vamanamurthy, M. K., Vuorinen, M., (2007). Generalized Convexity and Inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 335, 1294-1308.
- [9] Bai, R. F., Qi, F., Xi, B. Y., (2013). Hermite-Hadamard Type Inequalities for the m - and (α, m) -Logarithmically Convex Functions. *Filomat*, 27, 1-7.
- [10] Başçı, Y., Baleanu, D., (2019). Ostrowski Type Inequalities ψ -Hilfer Fractional Integrals. *Mathematics*, 7(9), 770.
- [11] Bayraktar, M., (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Gazi Kitabevi, Ankara.
- [12] Bayraktar, M., (2010). *Analiz*, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [13] Beckenbach, E. F., Bellman, R., (1961). *Inequalities*. Springer-Verlag.
- [14] Caputo, M., Fabrizio, M., (2015). A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1, No.2, 73-85.

- [15] Chaudhry, M. A., Qadir, A., Rafique, M., Zubair, S. M., (1997). Extension of Euler's Beta Function. *J. Comput. Appl. Math.*, 78 (1), 19-32.
- [16] Chaudhry, M.A., Zubair, S.M., (2002). On a Class Incomplete Gamma Functions with Applications, Chapman&Hall/CRC, Saudi Arabia.
- [17] Chen, F., (2014). A Note on Hermite-Hadamard Inequalities for Products of Convex Functions via Riemann-Liouville Fractional Integrals. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 33: 299–306.
- [18] Chen, F., Wu, S., (2016). Several Complementary Inequalities to Inequalities of Hermite-Hadamard Type for s -Convex Functions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9: 705–716.
- [19] Deniz, E., Akdemir, A. O., Yüksel, E., (2019). New Extensions of Chebyshev-Pölya-Szegö Type Inequalities via Conformable Integrals. *AIMS Mathematics*, 4(6), 1684-1697.
- [20] Dernek, A., (2013). Analiz I. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [21] Dragomir, S. S., (2012). Operator Inequalities of Ostrowski and Trapezoidal Type. *Springer Briefs in Mathematics*, Springer, New York.
- [22] Dragomir, S. S., Diamond N. T., (2003). Integral Inequalities of Grüss Type via Pölya- Szegö and Shisha-Mond Results. *East Asian Math. J.* 19 (1) , 27–39.
- [23] Dragomir, S. S., Pearce, C. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. Victoria University.
- [24] Dragomir, S. S., Pearce, C.E.M., (1998). Quasi-Convex Functions and Hadamard's Inequality, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 57, 377-385.
- [25] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., (1953). Higher Transcendental Functions, Vol.II, McGraw-Hill Book Company, New York.
- [26] Farid, G., (2019). Some Riemann-Liouville Fractional Integral Inequalities for Convex Functions. *J. Anal*, 27: 1095-1102.
- [27] Farid, G., (2020). On Caputo Fractional Derivatives via Convexity. *Kragujevac J. Math.*, 44(3), 393-399.
- [28] Farid, G., Nazeer, W., Saleem, M. S., Mehmood, S., Kang, S. M., (2018). Bounds of Riemann-Liouville Fractional Integrals in General Form via Convex Functions and Their Applications. *Mathematics* 6, 248.
- [29] Farid, G., Ur Rehman, A., Tariq, B., Waheed, A., (2016). On Hadamard Type Inequalities for m -Convex Functions via Fractional Integrals. *Journal Inequalities and Special Functions*, vol. 7, issue 4, 150-167.

- [30] Gürbüz, M., Akdemir, A. O., Rashid, S., Set, E., (2020). Hermite-Hadamard Inequality for Fractional Integrals of Caputo-Fabrizio Type and Related Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, no. 172, 1-10.
- [31] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pòlya, G., (1934). *Inequalities*. Cambridge University Press.
- [32] Jarad, F., Abdeljawad, T., Alzabut, J., (2017). Generalized Fractional Derivatives Generated by a Class of Local Proportional Derivatives. *Eur. Phys. J. Special Topics*, 226: 3457-3471.
- [33] Jarad, F., Uğurlu, E., Abdeljawad, T., Baleanu, D., (2017). On a New Class of Fractional Operators. *Advances in Difference Equations*, Article ID: 247, 16 pages.
- [34] Kannappan, P. I., (2009). *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer.
- [35] Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M., (2014). A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264: 65-70.
- [36] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.
- [37] Lazarević, M. P., Rapaić, M. R., Bšekara, T., (2014). *Introduction to Fractional Calculus with Brief Historical Background. Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling*, WSEAS Press.
- [38] Liu, K., Wang, J., O'Regan, D., (2019). On the Hermite-Hadamard type inequality for ψ -Riemann-Liouville Fractional Integrals via Convex Functions. *Journal of Inequalities and Applications*. 27.
- [39] Mitrinović, D. S, Pečarić, J., E., Fink, A. M. (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, UK.
- [40] Mitrinović, D. S., (1970). *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, Berlin.
- [41] Musayev, B., Alp M., Mustafayev N., Ekinçioğlu, İ., (2007). *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*. Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- [42] Ngo, Q. A., Thong, D. D., Dat, T. T., Tuan, D. A., (2006). Notes on an Integral Inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. vol. 7 (4).
- [43] Niculescu C. P., (2000). Convexity According to the Geometric Mean. *Math. Inequal. Appl.* 3 (2) , 155-167.

- [44] Niculescu, C. P., Person, L. E., (2006). *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics 23, Springer, New York.
- [45] Ntouyas, S. K., Agarwal, P., Tariboon, J., (2016). On Polya-Szegö and Chebyshev Type Inequalities Involving the Riemann-Liouville Fractional Integral Operators. *J. Math. Inequal*, 10(2), 491-504.
- [46] Oldham K. B., Spanier, J., (1974). *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press Inc., London, 1-185.
- [47] Pachpatte, B. G., (2005). *Mathematical Inequalities*, North-Holland Library, vol. 67, Elsevier Science, Amsterdam, Holland.
- [48] Pečarić, J. E., (1987). *Convex Functions: Inequalities*. Serbocroatian, Beograd.
- [49] Pečarić, J. E., Proschan F., Tong. Y. L., (1992). *Convex Functions, Partial Ordering and Statistical Applications*. Academic Press Inc.
- [50] Podlubny, I., (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations to Methods of Their Applications* vol. 198. Academic press.
- [51] Rashid, S., Akdemir, A. O., Noor, M. A., Noor, K. I., New Integral Inequalities for Geometrically Convex Functions via Conformable Fractional Integral Operators. Submitted.
- [52] Roberts, A. W., Varberg, D. E., (1973). *Convex Functions*. Academic Press, New York.
- [53] Samko, S., Kilbas, A., Marichev, O. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Gordon and Breach, Linghorne.
- [54] Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H., Basak, N., (2013). Hermite-Hadamard's Inequalities for Fractional Integrals and Related Fractional Inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, 2403–2407.
- [55] Set, E., (2012). New Inequalities of Ostrowski Type for Mappings Whose Derivatives are s -Convex in the Second Sense via Fractional Integrals. *Comput. Math. Appl.* 63(7), 1147-1154.
- [56] Set, E., Akdemir, A. O., Gözpinar, A., Jarad, F., (2019). Ostrowski Type Inequalities via New Fractional Conformable Integrals. *AIMS Mathematics*, 4 (6), 1684–1697.
- [57] Set, E., Akdemir, A. O., Mumcu, I., (2018). The Hermite Hadamard's inequality and its extentions for conformable fractional integrals of any order $\alpha > 0$. *Creative Math. Inform.* 27, 197–206.

- [58] Set, E., Akdemir, A. O., Mumcu, I., Ostrowski Type Inequalities for Functions Whoose Derivatives are Convex via Conformable Fractional Integrals. Submitted.
- [59] Soykan, Y., (2016). Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- [60] Steele, J. M., (2004). The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. Cambridge University Press, New York.
- [61] Tiel, J. V., (1984). Convex Analysis. Wiley, Chicester.
- [62] Xi, B. Y., Bai, R. F., Qi, F., (2012). Hermite Hadamard Type Inequalities for the m and (α, m) -Geometrically Convex Functions. Aequ. Math. 84 (3), 261-269.
- [63] Yalçın, A., (2016). Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Uyumlu Kesirli İntegraller İçeren İntegral Eşitsizlikler, Yüksek Lisans Tezi, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [64] Yang, X. J., (2019). General Fractional Derivatives: Theory, Methods and Applications. CRC Press, New York, USA.
- [65] Zhang, T. Y., Ji, A. P., Qi, F., (2012). On Integral Inequalities of Hermite Hadamard Type for s -Geometrically Convex Functions. Abstract and Applied Analysis, Article ID 560586, 14 pages.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ebru YÜKSEL
Doğum Yeri ve Tarihi : Malatya 16/04/1984
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (e-posta) : yuksel.ebru90@hotmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Malatya Turgut Özal Koleji 2002
Lisans : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 2010
Yüksek Lisans : Kilis 7 Aralık/ Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri
Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Ortak YL Programı 2014

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat
Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi 2014-Halen

Yayınları (SCI ve diğer) :

1. DENİZ E., AKDEMİR A. O., YÜKSEL, E., (2020). New extensions of Chebyshev-Polya-Szegö type inequalities via conformable integrals. AIMS Mathematics, 5(2), 956-965., Doi: 10.3934/math.2020066 (Yayın No: 5928851)
2. AKDEMİR A. O., DUTTA, H., YÜKSEL, E., DENİZ, E., (2020). Inequalities for m-Convex Functions via ψ -Caputo Fractional Derivatives. Mathematical Methods and Modelling in Applied Sciences, Vol. 123, 215-224, Springer Nature Switzerland.

3. AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., YÜKSEL, E., (2019). Some new generalizations for m -convexity via new conformable fractional integral operators. *Mathematica Moravica*, 23(2), 69-77. (Yayın No: 5924501)
4. AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., YÜKSEL, E., (Submitted). On Some Integral Inequalities via Conformable Fractional Integrals. *Applied Mathematics and Nonlinear Science*.
5. TUNÇ, M., YÜKSEL, E., (2015). Some Integral Inequalities For m - m Logarithmically Convex Functions. *Khayyam Journal of Mathematics*, 1(1), 115-124. (Yayın No: 2547269)
6. TUNÇ, M., YÜKSEL, E., (2015). Some Hermite Hadamard and Simpson Like Inequalities for s - Geometrically Convex Function. *Mathematical Sciences And Applications E-Notes*, 3(2), 1-19. (Yayın No: 2547189)
7. KARABAYIR, İ., TUNÇ, M., YÜKSEL, E., (2015). On some inequalities for functions whose absolute values of the second derivatives are m - m logarithmically convex. *Georgian Mathematical Journal*, 22(2), 251-257., Doi: 10.1515/gmj-2015-0002 (Yayın No: 2547138)
8. TUNÇ, M., KARABAYIR İ., YÜKSEL E., (2014). On Some Inequalities for Functions Whose Second Derivatives Absolute Values Are S Geometrically Convex. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(4), 113-118., Doi: 10.12691/tjant-2-4-2 (Yayın No: 2547040)
9. AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., YÜKSEL, E., (2019). Hermite Hadamard Type Inequalities for s -Geometrically Convex Functions via Conformable Fractional Integral Operators. 2. International Conference on Life and Engineering Sciences (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:5927521)
10. YÜKSEL, E., AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., (2019). Simpson Type Inequalities for Preinvex Functions. 4. International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:5927851)
11. DENİZ E., YÜKSEL E., (2018). Inequalities For Co-Ordinated Convex Functions via Riemann-Liouville Fractional Integrals. 1st International Conference On Life and Engineering Sciences, 162-172. (Tam Metin Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:4779871)

12. DENİZ E., YÜKSEL E., (2018). New Integral Inequalities for Different Kinds of Convex Functions via New Conformable Fractional Integrals. 3. International Conference On Advances In Natural Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:5928326)

13. AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., YÜKSEL, E., (2017). On Some Integral Inequalities Via Conformable Fractional Integrals. The Second International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3642516)

14. AKDEMİR, A. O., DENİZ, E., YÜKSEL, E., (2017). Hermite-Hadamard-like type inequalities for (α, m) - GA preinvex functions. The Second International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)(Yayın No:3642506)