

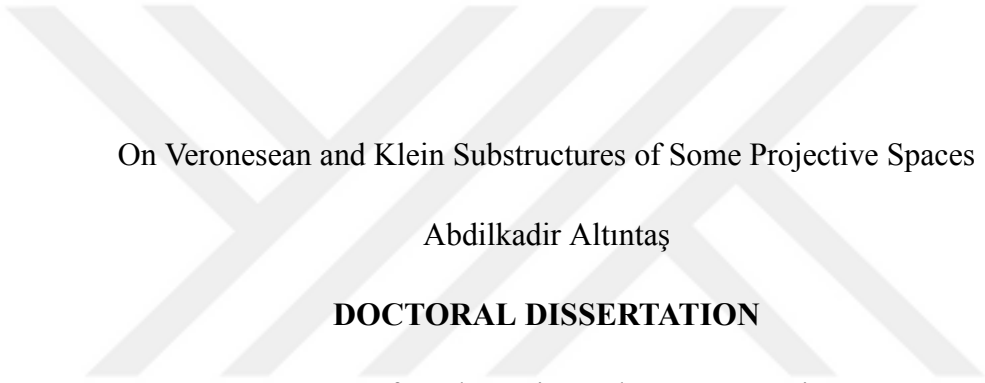
Bazı Projektif Uzaylarda Veronesean ve Klein Altyapıları Üzerine

Abdilkadir Altıntaş

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Eylül 2020



On Veronesean and Klein Substructures of Some Projective Spaces

Abdilkadir Altıntaş

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Sciences

September 2020

Bazı Projektif Uzaylarda Veronesean ve Klein Altyapıları Üzerine

Abdilkadir Altıntaş

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ziya AKÇA

Bu tez, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından 2019-2542 (201919A221) nolu proje olarak desteklenmiştir.

Eylül 2020

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ziya AKÇA danışmanlığında hazırlamış olduğum “**Bazı Projektif Uzaylarda Veronesean ve Klein Altyapıları Üzerine**” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 04/09/2020

Abdilkadir Altıntaş

ÖZET

Bu tezde projektif uzaylarda Klein dönüşümü ve Veronesean dönüşümü olmak üzere iki temel dönüşüm ve bu dönüşümlerle elde edilen geometrik yapılar incelenmiştir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayının Klein kuadrik ile $PG(5, 2)$ projektif uzayına gömülmesi ile elde edilen $SCID(2, 0)$ yapıları elde edilmiştir. Klein kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemleri incelenmiş, bu düzlemlerin Grassmann koordinatları kullanılarak elde edilen yapılar ayrıntılı olarak irdelenerek bu düzlemlerin Grassmann koordinatları ile yeni yapılar elde edilmiştir. Genel Klein küme kavramı kullanılarak yeni Klein kümeler bulunmuştur. Klein küme tanımı kullanılarak bazı projektif uzaylarda Klein küme yapıları incelenmiştir.

Projektif uzayların ve bu uzayların bazı alt uzaylarının kuadrik ve kübik Veronesean dönüşümlerle daha üst boyutlu projektif uzaylara gömülmesi ile elde edilen geometrik yapıların özellikleri incelenmiştir. Kuadrik Veronesean ve Kübik Veronesean dönüşüm kullanılarak, Projektif uzaylar, projektif düzlemler, doğrular ve düzlemlerin 4-arkları üst boyutlu projektif uzaylara gömülmüş ve burada elde edilen $SCID(n, k)$ yapıları incelenmiştir. Kuadrik Veronesean dönüşümü ve kuadrik Veroneseanların izdüşümleri kullanılarak $PG(3, 2)$ projektif uzayı, $PG(8, 2)$ projektif uzayına gömülmüş ve buradaki yeni doğru, nokta yapıları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Projektif Geometri, Veronesean Dönüşüm, Kübik Veronesean, Klein Kuadrik, Grassmann Koordinatları, $SCID$

SUMMARY

In this thesis, two basic transformations in projective spaces, the Klein transform and the Veronesean transform, and the geometric structures obtained by these transformations are examined.

The $SCID(2, 0)$ structures obtained by embedding the projective space $PG(3, 2)$ to projective space $PG(5, 2)$ with Klein quadric were obtained. The α and β planes on the Klein quadric were examined, the structures obtained by using the Grassmann coordinates of these planes were examined in detail and new structures were obtained with the Grassmann coordinates of these planes. Using the general Klein set concept, new Klein sets are found. Klein set structures are examined in some projective spaces by using the definition of Klein Set.

The properties of the geometric structures obtained by embedding the projective spaces and some sub projective spaces of these spaces into higher dimensional projective spaces with quadric and cubic veroneseans are examined. By using quadric Veronesean and Cubic Veronesean, projective spaces, projective planes, lines and planes 4-arcs of projective planes are embedded in higher dimensional projective spaces and the $SCID(n, k)$ structures obtained here are investigated. The projective space $PG(3, 2)$ is embedded in the projective space $PG(8, 2)$ using quadric Veroneseans and projections of the quadric Veroneseans and new line, point structures are determined.

Keywords: Projective Geometry, Veronesean mapping, Quadric Veronesean, Cubic Veronesean, Klein Quadric, Grassmann Coordinates, $SCID - (n, k)$.

TEŞEKKÜR

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan babam Derviş Altıntaş'a, annem Gönül Altıntaş'a, eşim Sibel Altıntaş'a çok teşekkür ederim.

Başta danışman hocam Prof. Dr. Ziya AKÇA' olmak üzere, Prof. Dr. Ayşe BAYAR'a, Prof. Dr. Süheyla EKMEKÇİ'ye çok teşekkür ederim.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde maddi imkan (11.580 TL) sağlayan Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) birimine katkılarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	3
3. TEMEL KAVRAMLAR	6
3.1. Cebirsel Ve Geometrik Yapılar	6
3.2. Projektif Düzlem	7
3.3. Cisim Genişlemesi	11
3.4. Projektif Uzaylar	13
3.5. Projektif Uzayda Bazı Alt Geometriler	15
4. KLEIN KUADRIK	17
4.1. Projektif Uzayda Kuadrikler	17
4.2. Plücker Koordinatları	19
4.3. Grassmann Koordinatları	20
4.4. Klein Kuadrik	20
4.5. Klein Kuadrik Üzerindeki Düzlemler	27
4.6. Klein Kümeler	33
5. VERONESEAN DÖNÜŞÜM	37
5.1. Kuadrik Veronesean	37
5.2. Dik Kümeler	38
5.3. Düzlemsel Arkların Kuadrik ve Kübik Veronesean Dönüşümlerle Gömülmesi	52
5.4. $PG(8,2)$ Uzayındaki Projektif Uzaylar	73
6. MATERYAL VE YÖNTEM	97
6.1. Materyal	97

6.2. Yöntem	97
7. BULGULAR VE TARTIŞMA	98
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	99
KAYNAKLAR DİZİNİ	100
EK AÇIKLAMALAR	104
ÖZGEÇMİŞ	107



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 Klein Dönüşümü	21
4.2 Klein Kuadrik Üzerinde α ve β Düzlemleri	22
4.3 $PG(5, 2)$ Projektif uzayında Bir Doğru Boyunca Kesişen α ve β Düzlemleri	23
4.4 $PG(3, 2)$ Projektif Uzayının Klein Dönüşümü	24
4.5 $PG(3, 2)$ Projektif Uzayındaki $[0, 0, 0, 1]$ Düzlemi	24
4.6 $[0, 0, 0, 1]$ Düzleminin Klein Kuadrik Üzerindeki β Düzlemi	25
4.7 $(0, 0, 0, 1)$ Noktasının Klein Kuadrik Üzerindeki α Düzlemi	26

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Homojen koordinatlar ya da projektif koordinatlar ilk kez August Möbius (1827) ün “Der barycentrische Calcul” isimli çalışmasında kullanılmıştır. $V, \mathcal{F}$ cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı olsun. V nin 1, 2 ve 3 boyutlu alt uzayları (nokta, doğru ve düzlemleri) $P(V)$ projektif uzayını oluşturur. $P(V)$ projektif uzayının bir noktası homojen koordinatlarda, dördü aynı anda 0 olmayan (x, y, z, w) dörtlüsü ile gösterilir. Projektif 3-uzayda düzlemler homojen koordinatlarla, dördü aynı anda 0 olmayan $[A, B, C, D]$ dörtlüsü ile gösterilir. Projektif 3-uzayda doğrular ise üzerindeki iki noktanın lineer birleşimi ya da üzerinde bulunduğu iki farklı düzlemin arakesiti olarak gösterilir. Julius Plücker (1865) “A New Geometry of Space” isimli çalışmasında Projektif 3-uzayda doğruları 6 bileşenli homojen koordinatlarla gösterdi ve Plücker koordinatlarını tanımladı.

Klein (1868), $PG(3, q)$ projektif uzayındaki bir doğrunun $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$ Plücker koordinatının

$$p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

kuadrik denklemi sağladığını gösterdi. Klein dönüşümü ve Klein kuadriği tanımladı. Klein kuadriğin $PG(5, q)$ projektif uzayında bir hiperbolik kuadrik olduğunu gösterdi.

Thas ve Hirschfeld (1991) Galois cisimleri ile koordinatlanan projektif uzaylarda kuadrikleri sınıfladılar.

Beutelspacher vd. (1999) bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının herhangi ikisi tek bir noktada kesişen düzlemlerin kümesini Klein küme olarak tanımlamışlardır. Klein kümenin taban boyutunun 0, 1, 3, 4 olma durumlarına göre sınıflamışlardır.

Eisfield (2002), $\mathcal{P}$ bir projektif uzay ve $-1 \leq k < n$ olsun. $\mathcal{P}$ nin herhangi ikisi k boyutlu alt uzayda kesişen n boyutlu alt uzaylarının ξ kümesine bir (n, k) -SCID (Set of Subspaces with Constant Intersection Dimension) olarak tanımlamıştır. $E_1, E_2 \in \xi$ olmak üzere her bir k boyutlu $E_1 \cap E_2$ alt uzayına ξ nin k -kesişim uzayı denir. $k = 0, 1$ durumunda bu kesişim uzayları sırası ile nokta ve doğrulardır.

Govaerts (2003), Plücker koordinatlarının daha genel hali olan yani bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının herhangi bir boyuttaki alt uzaylarını homojen koordinatlarla göstererek Grassmann koordinatlarını tanımladı.

Veronesean çeşitleri uzun ve zengin bir tarihe sahiptir ve reel ve kompleks tipleri çalışılmıştır. Fakat bunlar keyfi cisimler üzerinde tanımlanmaktadır. Sonlu cisimler üzerinde tanımlananlar sonlu geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. En basit Veronesean çeşitleri n . mertebeden Kuadrik Veroneseanlardır ve $\mathcal{V}_n$ ile gösterilir. İspatlarda onların özelliklerini araç olarak kullanmak için çeşitlerini tanımak ve karakterizasyon teoremlerini bilmek çok önemlidir. Literatürde sonlu kuadrik Veroneseanların dört farklı tipi bulunmaktadır.

Thas ve Maldeghem (2003) kuadrik ve Hermityen Veroneseanları karakterize ettiler.

Tallini (1976) nin karakterizasyonu 2. mertebeden $\mathcal{V}_2$ kuadrik Veroneseanların konik düzlemlerinin arakesit özelliklerini kullanır. Yani bu konik düzlemleri bir konikte $\mathcal{V}_2$ ile kesişen $PG(5, q)$ projektif uzayının düzlemleridir. Tallini'nin elde ettiği sonuç q nun tek olması durumunda geçerlidir. Thas ve Maldeghem (2004) bu sonucu keyfi n ve $q > 2$ için genelleştirdiler.

Thas ve Maldeghem (2005) de Tip 4 deki karakterizasyonu bütün n . mertebeden Hermitian Veroneseanlar H_n için ispatladılar ve bunu H_2 de Tip 2 yi elde etmek için kullandılar.

Akça vd. (2010), Bazı Geometrilerin Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine (Tübitak Proje No: 108T340) adlı çalışmada, noktaları, bir projektif uzayın noktaları fakat doğruları projektif uzayın ovaleri (yada konikleri) olan sonlu projektif uzaylarda nokta-doğru geometrilerinin gömülmeleri sınıflandırılmıştır.

Akça vd. (2012) Generalized Veronesean Embeddings of Projective spaces, Part II. The Lax case, isimli çalışmada farklı sonlu cisim üzerindeki farklı boyutlu iki projektif uzaydan birinin diğerine gömülebilmesi için gereken şartları belirlediler.

Ekmekçi vd. (2016) Kuadrik Veroneseanın izdüşümlerini kullanarak $PG(4, 4)$ projektif uzayındaki $PG(2, 4)$ projektif düzlemini belirlediler.

Bu çalışmanın amacı bir $\mathcal{F}$ cismi ile koordinatlanan uzayların ve bu uzayların bazı alt uzaylarının kuadrik ve kübiklerle daha üst boyutlu uzaylara gömülmesi ile elde edilen geometrik yapıların özellikleri incelemektir. Kuadrik Veronesean ve Kübik Veronesean, Klein Kuadrik ve Grassmann koordinatları kullanılarak, projektif uzaylar, projektif düzlemler, doğrular ve düzlemlerin 4-arkları üst boyutlu uzaylara gömülmesi ve burada elde edilen $SCID(n, k)$ yapıları incelenecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Homojen koordinatlar ya da projektif koordinatlar ilk kez August Möbius (1827) ün “Der barycentrische Calcul” isimli çalışmasında kullanılmıştır. $V, \mathcal{F}$ cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayı olsun. V nin 1, 2 ve 3 boyutlu alt uzayları (nokta, doğru ve düzlemleri) PV projektif uzayını oluşturur. PV nin bir noktası homojen koordinatlarda, dördü aynı anda 0 olmayan (x, y, z, w) dördlüsü ile gösterilir. Projektif 3-uzayda düzlemler homojen koordinatlarla, dördü aynı anda 0 olmayan $[A, B, C, D]$ dördlüsü ile gösterilir. Projektif 3-uzayda doğrular ise üzerindeki iki noktanın lineer birleşimi ya da üzerinde bulunduğu iki farklı düzlemin arakesiti olarak gösterilir. Julius Plücker (1865) “A New Geometry of Space” isimli çalışmasında Projektif 3-uzayda doğruları 6 bileşenli homojen koordinatlarla gösterdi ve Plücker koordinatlarını tanımladı.

Klein (1868), $PG(3, q)$ projektif uzayındaki bir doğrunun $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$ Plücker koordinatının

$$p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

kuadrik denklemi sağladığını gösterdi. Klein dönüşümü ve Klein kuadriği tanımladı. Klein kuadriğin $PG(5, q)$ projektif uzayında bir hiperbolik kuadrik olduğunu gösterdi.

Thas ve Hirschfeld (1991) Galois cisimleri ile koordinatlanan projektif uzaylarda kuadrikleri sınıfladılar.

Beutelspacher vd. (1999) bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının herhangi ikisi tek bir noktada kesişen düzlemlerin kümesini Klein küme olarak tanımlamışlardır. Klein kümenin taban boyutunun 0, 1, 3, 4 olma durumlarına göre sınıflamışlardır.

Eisfield (2002), $\mathcal{P}$ bir projektif uzay ve $-1 \leq k < n$ olsun. $\mathcal{P}$ nin herhangi ikisi k boyutlu alt uzayda kesişen n boyutlu alt uzaylarının ξ kümesine bir (n, k) -SCID (Set of Subspaces with Constant Intersection Dimension) olarak tanımlamıştır. $E_1, E_2 \in \xi$ olmak üzere her bir k boyutlu $E_1 \cap E_2$ alt uzayına ξ nin k -kesişim uzayı denir. $k = 0, 1$ durumunda bu kesişim uzayları sırası ile nokta ve doğrulardır.

Govaerts (2003), Plücker koordinatlarının daha genel hali olan yani bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının herhangi bir boyuttaki alt uzaylarını homojen koordinatlarla göstererek Grassmann koordinatlarını tanımladı.

Veronesean çeşitleri uzun ve zengin bir tarihe sahiptir ve reel ve kompleks tipleri çalışılmıştır. Fakat bunlar keyfi cisimler üzerinde tanımlanmaktadır. Sonlu cisimler üzerinde tanımlananlar sonlu geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. En basit Veronesean çeşitleri n . mertebeden Kuadrik Veroneseanlardır ve $\mathcal{V}_n$ ile gösterilir. İspatlarda onların özelliklerini araç olarak kullanmak için çeşitlerini tanımak ve karakterizasyon teoremlerini bilmek çok önemlidir. Literatürde sonlu kuadrik Veroneseanların dört farklı tipi bulunmaktadır:

Tip 1- Tallini (1976) nin karakterizasyonu 2. mertebeden $\mathcal{V}_2$ kuadrik Veroneseanların konik düzlemlerinin arakesit özelliklerini kullanır. Yani bu konik düzlemleri bir konikte $\mathcal{V}_2$ ile kesişen $PG(5, q)$ projektif uzayının düzlemleridir. Tallini'nin elde ettiği sonuç q nun tek olması durumunda geçerlidir. Thas ve Maldeghem (2004) bu sonucu keyfi n ve $q > 2$ için genelleştirdiler.

Tip 2- Ferri (1976) nin karakterizasyonu $PG(5, q)$ projektif uzayının hiperdüzlem ve düzlemleriyle $\mathcal{V}_2$ nin arakesitlerinin büyüklüklerini kullanır. Ferri'nin sonucu ise $q \geq 5$ ve q nun tek olması halinde geçerlidir. Hirschfeld ve Thas (1991) $q = 3$ durumunu ispatladılar. Ayrıca Thas ve Maldeghem (2004) keyfi $q \neq 2$ için genelleştirdiler.

Tip 3- Mazzocca ve Melone (1984) q nun tek olması durumunda $PG(\frac{n(n+3)}{2}, q)$ deki V_n i aksiyomatik hale getirmek için $\mathcal{V}_n$ deki bütün koniklerin kümesinin ve bunlara teğet olan doğruların geometrik özelliklerini kullandılar. Hirschfeld ve Thas (1991) de onların bir aksiyomu unuttuklarını karşıt örnek vererek gösterdiler ve keyfi q için onların sonucunu genelleştirdiler. Thas ve Maldeghem (2004), Mazzocca ve Melone (1984) nin aksiyom kümesini sağlayan yapıları sınıflandırdılar.

Tip 4- Thas ve Maldeghem (2004) te $PG(n, q)$ projektif uzayının nokta kümesine karşılık gelen $PG(d, q)$ projektif uzayını üreten $PG(d, q)$ projektif uzayının noktalarının kümesi ile $q \neq 2$ için $PG(d, q)$ projektif uzayının noktalarına ve düzlem ovalerine karşılık gelen nun nokta ve doğrularını kullanarak $d \geq \frac{n(n+3)}{2}$ şartı altında $PG(d, q)$ projektif uzayındaki $PG(n, q)$ projektif uzayının tek temsili olarak onların genelleştirilmiş Tallini sonucunu $\mathcal{V}_n$ i karakterize etmek için kullandılar.

Ayrıca Thas ve Maldeghem (2005) de Tip 4 deki karakterizasyonu bütün n . mertebeden Hermitian Veroneseanlar H_n için ispatladılar ve bunu H_2 de Tip 2 yi elde etmek için kullandılar.

Akça vd. (2010), Bazı Geometrilerin Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine (Tübitak Proje No: 108T340) adlı çalışmada, noktaları, bir projektif uzayın noktaları fakat

doğruları projektif uzayın ovaleri (yada konikleri) olan sonlu projektif uzaylarda nokta-doğru geometrilerinin gömülmeleri sınıflandırılmıştır.

Akça vd. (2012) Generalized Veronesean Embeddings of Projective spaces, Part II. The Lax case, isimli çalışmada farklı sonlu cisim üzerindeki farklı boyutlu iki projektif uzaydan birinin diğerine gömülebilmesi için gereken şartları belirlediler.

Ekmekçi vd. (2016) kuadrik Veroneseanın izdüşümlerini kullanarak $PG(4, 4)$ projektif uzayındaki $PG(2, 4)$ projektif düzlemini belirlediler.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çeşitli cebirsel ve geometrik yapılara ilgili temel kavram, tanım ve teoremlere verilmiştir.

3.1 Cebirsel Ve Geometrik Yapılar

Tanım 3.1 *A boş olmayan bir küme olsun. $A \times A$ dan A ya tanımlı*

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow (x * y) \end{aligned}$$

fonksiyonuna A içinde ikili işlem denir. Bu tanıma göre ikili işlem iki değişkenli bir fonksiyondur. birfonksiyondur. $A \times A$ herhangi bir (a, b) elemanının ikili işlem denilen böyle bir fonksiyon altındaki görüntüsü genel olarak $a + b, ab, a.b, a \circ b, a \oplus b, a \otimes b$ ve benzeri biçimde gösterilir (Kaya,2005).

Tanım 3.2 *G boş olmayan bir küme ve $*$ G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa $(G, *)$ cebirsel yapısına bir grup denir;*

G1. *$*$, G de bir ikili işlemdir. Yani G kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.*

G2. *$*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall x, y, z \in G$ için $x*(y*z) = (x*y)*z$ dir.*

G3. *G kümesinin $*$ işlemine göre etkisiz(birim) elemanı vardır. Yani $\forall x \in G$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde $\exists_1 e \in G$ vardır.*

G4. *G nin her elemanının $*$ işlemine göre tersi vardır. Yani $x \in G$ için $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$ olacak şekilde $\exists_1 x^{-1} \in G$ vardır (Kaya,2005).*

Tanım 3.3 *$(G, *)$ bir grup olsun. $\forall x, y \in G$ için $x*y = y*x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba değişmeli grup veya Abelyan grup denir (Kaya,2005).*

Tanım 3.4 *$(G, *)$ bir grup olsun. G sonlu bir küme ise $(G, *)$ grubuna bir sonlu grup denir ve grubun eleman sayısına grubun mertebesi denir (Kaya,2005).*

Tanım 3.5 $\mathcal{F}$, boş olmayan bir küme ve bu kümenin elemanları arasında $+$: $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ve $\cdot$: $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ile göstereceğimiz iki tane ikili işlem tanımlanmış olsun. $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, bu cebirsel yapıya cisim adı verilir:

- C1.** $\forall a, b \in \mathcal{F}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ dir.
- C2.** $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir.
- C3.** $\forall a, b, c \in \mathcal{F}$ için $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dir.
- C4.** $\mathcal{F}$ kümesinde öyle bir 0 elemanı vardır ki, $\forall a \in \mathcal{F}$ için $a + 0 = a$ eşitliğini sağlar.
- C5.** $\mathcal{F}$ kümesinde öyle bir 1 elemanı vardır ki, 0 dan farklı $\forall a \in \mathcal{F}$ için $a \cdot 1 = a$ eşitliğini sağlar.
- C6.** $\forall a \in \mathcal{F}$ için, $\mathcal{F}$ kümesinde öyle bir $-a$ elemanı vardır ki, $a + (-a) = 0$ eşitliğini sağlar.
- C7.** $\forall a \neq 0 \in \mathcal{F}$ için, $\mathcal{F}$ kümesinde öyle bir a^{-1} elemanı vardır ki, $a \cdot a^{-1} = 1$ eşitliğini sağlar.

Tanım 3.6 V , boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olsun. $+$: $V \times V \rightarrow V$ ve $\cdot$: $\mathcal{F} \times V \rightarrow V$ iki fonksiyon olmak üzere $(V, \mathcal{F}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa, V kümesine $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

- V1.** $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ tir.
- V2.** $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir.
- V3.** $\forall x \in V$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde V de bir tek θ elemanı vardır.
- V4.** $\forall x \in V$ için $x + y = \theta$ eşitliğini sağlayan V de bir tek y elemanı vardır.
- V5.** $\forall a, b \in \mathcal{F}$ ve $\forall x \in V$ için $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ tir.
- V6.** $\forall a, b \in \mathcal{F}$ ve $\forall x \in V$ için $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ tir.
- V7.** $\forall a \in \mathcal{F}$ ve $\forall x, y \in V$ için $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ dir.
- V8.** $\forall x \in V$ için $1 \cdot x = x$ dir. (1 cismin birim elemanı)

3.2 Projektif Düzlem

Tanım 3.7 Biri noktalardan diğeri doğrulardan oluşan ayırık $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ kümeleri ile $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde bir $\circ$ bulunma bağıntısından meydana gelen $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ üçlüsüne geometrik yapı denir. $\mathcal{N}$ nin elemanları $A, B, C, \dots X, Y, Z$ gibi büyük harflerle, $\mathcal{D}$ nin elemanları $a, b, c, \dots x, y, z$ gibi küçük harflerle gösterilir.

$\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \dots \in \mathcal{N}$ noktaları için $\mathcal{N}_i \circ d, i = 1, 2, 3, \dots$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ varsa, yani bu noktaların hepsi aynı doğru üzerinde ise bu noktalara doğrudaş noktalar denir.

$d_1, d_2, d_3, \dots \in \mathcal{D}$ doğruları için $\mathcal{N} \circ d_i, i = 1, 2, 3, \dots$ olacak şekilde bir $N \in \mathcal{N}$ varsa yani bu doğrular aynı noktadan geçerlerse bu doğrulara noktadaş doğrular denir.

$d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $\mathcal{N} \circ d_1$ ve $\mathcal{N} \circ d_2$ olacak şekilde hiç bir $N \in \mathcal{N}$ yoksa d_1 ve d_2 ye paralel doğrular denir ve $d_1 \parallel d_2$ biçiminde gösterilir (Kaya, 2005).

Tanım 3.8 (Afin Düzlem) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ sırası ile noktalar ve doğrular olan ve $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ özelliğine sahip iki küme, $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ üzerinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$ olmak üzere aşağıda verilen A1, A2 ve A3 aksiyomlarını gerçekleyen $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir afin düzlem denir (Kaya, 2005).

- A1. Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer.
- A2. Bir doğrura dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.
- A3. Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Teorem 3.1 Verilen her $\mathcal{F}$ cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanları ile cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır. Bu afin düzlem $A_2\mathcal{F}$ ile gösterilir (Kaya, 2005).

Teorem 3.2 Her sonlu A düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan $n \geq 2$ tamsayısı vardır. Bu tamsayıya A nın mertebesi denir (Kaya, 2005).

- 1. A nın her doğrusu üzerinde tam olarak n tane nokta vardır.
- 2. A nın her noktası tam olarak $n + 1$ doğru üzerindedir.
- 3. A daki noktaların toplam sayısı n^2 dir.
- 4. A daki doğruların toplam sayısı $n^2 + n$ dir.

Tanım 3.9 (Projektif Düzlem) $\mathcal{N}$ ve $\mathcal{D}$ elemanları sırası ile noktalar ve doğrular kümesi olan ayrık iki küme (yani $\mathcal{N} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ özelliğine sahip iki küme) ve $\circ$ da $\mathcal{N} \times \mathcal{D}$ kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı (yani $\circ \subset \mathcal{N} \times \mathcal{D}$) olmak üzere, $P1, P2, P3$ aksiyomlarını gerçekleyen $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sistemine bir projektif düzlem denir (Kaya, 2005).

P1. Her $M, N \in \mathcal{N}$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde bir $d \in \mathcal{D}$ doğrusu vardır. Yani farklı iki nokta tek bir doğru belirtir.

P2. Her $c, d \in \mathcal{D}$ için $M \circ d$ ve $N \circ d$ olacak şekilde en az bir $N \in \mathcal{N}$ noktası vardır. Yani iki doğrunun en az bir ortak noktası vardır.

P3. Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 3.3 $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğru tek bir noktada kesişir (Kaya, 2005).

Tanım 3.10 Her sonlu projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan n pozitif tamsayısı vardır (Kaya, 2005). Bu tamsayıya projektif düzlemin mertebesi denir.

1. $\mathcal{P}$ nin her doğrusu üzerinde tam olarak $n + 1$ tane nokta vardır.
2. $\mathcal{P}$ nin her noktası tam olarak $n + 1$ doğru üzerindedir.
3. $\mathcal{P}$ deki noktaların toplam sayısı $n^2 + n + 1$ dir.
4. $\mathcal{P}$ deki doğruların toplam sayısı $n + 1$ dir.

Tanım 3.11 S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de "nokta" yerine doğru ve "doğru" yerine "nokta" koyarak bulunan yeni ifadeye S nin dual ifadesi denir ve S^* ile gösterilir.

Bu tanımdan hemen şu çıkar; birbirlerinin duali olan nokta ve doğru kavramlarından başka aşağıda yanyana yazılan kavramlar birbirlerinin duali olup, dual ifade bulunurken aralarında yer değiştirmeleri gerekir (Kaya, 2005).

noktadaş	—	doğrudaş
$\vee$, birleşme	—	$\wedge$, kesişme
... üzerinde bulunur	—	... dan geçer

Teorem 3.4 (Projektif Düzlemlerde Duallik İlkesi) Bir projektif düzleme ilişkin her teoremin ifadesinin duali de bir başka teoremin ifadesidir. Eğer $\mathcal{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir projektif düzlemse $\mathcal{P}^* = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ^{-1})$ de bir projektif düzlemdir. $\mathcal{P}^*$ a $\mathcal{P}$ nin dual projektif düzlemi denir (Kaya, 2005).

Teorem 3.5 Herhangi bir $\mathcal{F}$ cisminin elemanlarıyla cebirsel olarak aşağıdaki gibi belirlenen $\mathcal{N}$ noktalar kümesi, $\mathcal{D}$ doğrular kümesi ve $\circ$ üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ geometrik yapısı bir projektif düzlemdir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathcal{F}, (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3) = \lambda(x_1, x_2, x_3), \lambda \in \mathcal{F} - \{0\}\} \\ \mathcal{D} &= \{[a_1, a_2, a_3] : a_i \in \mathcal{F}, [a_1, a_2, a_3] \neq (0, 0, 0), [a_1, a_2, a_3] = \mu[a_1, a_2, a_3], \mu \in \mathcal{F} - \{0\}\} \\ \circ &: (x_1, x_2, x_3) \circ [a_1, a_2, a_3] \Leftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\end{aligned}$$

$\mathcal{F}$ yardımıyla tanımlanan bu projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir ve genel olarak $P_2\mathcal{F}$ ile gösterilir. r pozitif tamsayı, p bir asal sayı olmak üzere p^r elemanlı $\mathcal{F} = PG(p^r)$ Galois

cismi, mertebesi $n = p^r$ olan sonlu bir projektif düzlem belirtir ve bu projektif düzlem $P_2\mathcal{F} = PG(2, p)$ biçiminde gösterilir.

Teorem 3.6 (Bruck-Ryser) *Eğer $n \equiv 1 \pmod{4}$ yada $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise ve n negatif olmayan iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi olan bir projektif düzlem yoktur.*

Bu teoreme göre 6,14,21,22,30,33,38,42,46,54,57,... gibi sonsuz çokluktaki sayılardan hiç biri bir projektif düzlemin mertebesi değildir.

$\mathcal{F} = GF(2)$ olmak üzere, $PG(2, 2)$ projektif düzleminin noktalar kümesi $\mathcal{N}$, doğrular kümesi $\mathcal{D}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$ aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{N} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$\mathcal{D} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]\}$$

$$(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) \circ [0, 0, 1]$$

$$(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1) \circ [0, 1, 0]$$

$$(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1) \circ [1, 0, 0]$$

$$(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1) \circ [0, 1, 1]$$

$$(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1) \circ [1, 0, 1]$$

$$(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1) \circ [1, 1, 0]$$

$$(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) \circ [1, 1, 1]$$

Tanım 3.12 *A, B, C, D hepsi aynı projektif düzlemde bulunan ve herhangi üçü doğrudan olmayan dört nokta olsun. Bu noktaları ikişer ikişer birleştiren doğruların çizilmesi ve bulunan doğruların ikişer ikişer kesiştirilmesiyle elde edilen altı doğru ve yedi noktadan oluşan bir konfigürasyona tamdörtgen denir. Ayrıca A, B, C, D noktalarına tamdörtgenin köşeleri, AB ve CD, AC ve BD, BC ve AD doğru ikililerine tamdörtgenin karşılıklı kenarları, karşılıklı kenarların kesişme noktalarına, yani $U = AB \cap CD, V = AC \cap BD, W = AD \cap BC$ noktalarına tamdörtgenin köşegen noktaları denir (Kaya, 2005).*

Tanım 3.13 *İçindeki bütün tamdörtgenlerin köşegen noktaları doğrudan olan projektif düzleme Fano Düzlemi denir.*

Teorem 3.7 (P4 Dezarg Teoremi) İki üçgenin karşılıklı köşelerini birleştiren doğrular noktadaşsa, bunların karşılıklı kenarlarının arakesit noktaları doğrudadır.

Tanım 3.14 Bir Afın düzleme bir takım yeni noktalar ve bütün bu noktaları üzerinde bulunduran tek bir doğru katarak bir projektif düzlemin nasıl elde edildiği şöyle gösterilir: Afın düzleme katılacak doğruya ideal doğru ya da sonsuzdaki doğru, yeni noktaların her birine de ideal nokta ya da sonsuzdaki nokta denir. Buradaki sonsuz deyiimi birazdan anlaşılacağı gibi (gerçek düzlem ve bir kaç hal hariç) uzaklıkla ilgili değildir. $A = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ bir afın düzlem olsun. Bu düzlemde birbirine paralel olan bütün doğrular kümesine paralel doğru demeti denir. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularının üzerinde bulunan ama $\mathcal{N}$ de bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alınsın. Böylece düzleme her doğrultuda yeni bir (ideal) nokta katılmış olur. Afın düzleme ideal noktalar katılırken A nın her d doğrusu bir nokta ile genişletildi. d doğrusu ve d ye paralel olan tüm doğrular üzerine konulan bu ideal nokta D_∞ ile gösterilir. Tüm ideal noktaların üzerinde bulunduğu ideal doğruyu da d_∞ ile göstererek A ya katalım. Böylece A daki $\circ$ bağıntısında biraz genişletilerek bir $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \circ)$ sistemi elde edilir. Bu sisteme A nın tamamlanışı denir (Kaya, 20005).

Teorem 3.8 Her Afın düzleminin tamamlanışı bir projektif düzlemdir (Kaya, 2005).

Teorem 3.9 Bir projektif düzlemden bir doğru ve doğru üzerindeki tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir Afın düzlemdir (Kaya, 2005).

Teorem 3.10 $A_2\mathcal{F}$ afın düzlemimin tamamlanmış $P_2\mathcal{F}$ projektif düzlemine izomorftur (Kaya, 2005).

3.3 Cisim Genişlemesi

Bu bölümde cisim genişlemesi yardımıyla $GF(2^2)$ cismine izomorf olan bir cisim elde edilerek, bu cisimden elde edilen projektif düzlemin nokta, doğru yapıları ve üzerinde bulunma bağıntıları verilmektedir (Ekmekçi vd., 2017, Bap Proje No: 201619D37).

$\mathcal{F}$ herhangi bir cisim olsun. $p(x)$, bu cisim üzerinde derecesi $n > 1$ olan indirgenemez polinom olsun.

$$S = \{k(x) : \text{der}(k(x)) < n, k(x) \in \mathcal{F}\}$$

polinomlar kümesini göz önüne alalım. S üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri şöyle tanımlanıyor: “ $k(x) \oplus k'(x)=t(x)$ ” demek, $k(x)$ ve $k'(x)$ polinomlarının aynı dereceli terimlerinin katsayıları $\mathcal{F}$ nin toplama işlemine göre toplanarak elde edilen sayı $t(x)$ in aynı dereceli terimine katsayı olarak verilmesidir. “ $k(x) \otimes k'(x)=c(x)$ ” demek, katsayıları $\mathcal{F}$ cisminin elemanları olduğu göz önünde bulundurularak $k(x)$ ve $k'(x)$ polinomlarının çarpılması sonrada $p(x)$ modülüne göre indirgenmesiyle elde edilen kalanın $c(x)$ olması demektir. $x \notin \mathcal{F}$ olduğundan ve S nin her elemanı, $a_i \in \mathcal{F}$ olmak üzere $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ biçiminde ifade edilebileceğinden, sonlu ve karakteristiği p olan $\mathcal{F}$ asal cisminde elde edilecek S nin p elemanı vardır. $(S, \oplus, \otimes)$ sistemi $GF(p^n)$ cismine izomorftur. $GF(2^2)$ cismine izomorf olan $(S, \oplus, \otimes)$ yapısı şöyle inşa edilir:

$\mathcal{F} = GF(2)$ cismi üzerinde $p(x) = x^2 + x + 1$ indirgenemez bir polinom olsun. $t, t \notin GF(2)$ ve $p(t) = t^2 + t + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olmak üzere:

$$S = \{at + b : a, b \in \mathcal{F}, t^2 + t + 1 = 0\} = \{0, 1, t, t^2\}$$

dir. S üzerinde $\oplus$ ve $\otimes$ işlemleri:

$\oplus$	0	1	t	t^2
0	0	1	t	t^2
1	1	0	t^2	t
t	t	t^2	0	1
t^2	t^2	t	1	0

$\otimes$	0	1	t	t^2
0	0	0	0	0
1	0	1	t	t^2
t	0	t	t^2	1
t^2	0	t^2	1	t

tabloları ile verilir. Böylece $(S, \oplus, \otimes)$ yapısı $GF(2^2)$ cismine izomorf olan bir cisimdir. Bu $(S, \oplus, \otimes)$ cisminin elemanlarıyla cebirsel olarak oluşturulan projektif düzlem $PG(2, 2^2) = PG(2, 4)$ ün noktalar kümesi $\mathcal{N}$, doğrular kümesi $\mathcal{D}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı $\circ$ aşağıdaki gibidir: $\mathcal{N} = \{N_0, N_1, \dots, N_{20}\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
N_0 &= (0, 1, 0), & N_1 &= (0, 0, 1) & N_2 &= (0, 1, 1) & N_3 &= (0, 1, t^2) & N_4 &= (0, 1, t) \\
N_5 &= (1, 1, 1), & N_6 &= (1, 0, 1) & N_7 &= (1, t, 1) & N_8 &= (1, t^2, 1) & N_9 &= (1, 1, 0) \\
N_{10} &= (1, 1, t^2), & N_{11} &= (1, 1, t) & N_{12} &= (1, t, t^2) & N_{13} &= (t, t^2, t) & N_{14} &= (1, 0, 0) \\
N_{15} &= (1, t, 0), & N_{16} &= (1, t^2, 0) & N_{17} &= (1, 0, t^2) & N_{18} &= (1, 0, t) & N_{19} &= (1, t^2, t^2) \\
N_{20} &= (1, t, t)
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{D} = \{D_0, D_1, \dots, D_{20}\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} D_0 &= [1, 0, 0], & D_1 &= [1, 0, 1] & D_2 &= [0, 0, 1] & D_3 &= [1, 0, t] & D_4 &= [1, 0, t^2] \\ D_5 &= [1, 1, 0], & D_6 &= (1, 0, 1) & D_7 &= [1, t, 0] & D_8 &= [1, t^2, 0] & D_9 &= [0, 1, 1] \\ D_{10} &= [1, t^2, t], & D_{11} &= [1, t, t^2] & D_{12} &= [1, 1, 1] & D_{13} &= [1, t, t] & D_{14} &= [1, t^2, t^2] \\ D_{15} &= [1, t^2, 1], & D_{16} &= [1, t, 1] & D_{17} &= [1, 1, t^2] & D_{18} &= [1, 1, t] & D_{19} &= [0, 1, t^2] \\ D_{20} &= [0, 1, t] \end{aligned}$$

dir. Üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} D_0 \circ N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 & \quad D_1 \circ N_0, N_5, N_6, N_7, N_8 & \quad D_2 \circ N_0, N_9, N_{14}, N_{15}, N_{16} \\ D_3 \circ N_0, N_{10}, N_{12}, N_{17}, N_{19} & \quad D_4 \circ N_0, N_{11}, N_{13}, N_{18}, N_{20} & \quad D_5 \circ N_1, N_5, N_9, N_{10}, N_{11} \\ D_6 \circ N_1, N_6, N_{14}, N_{17}, N_{18} & \quad D_7 \circ N_1, N_8, N_{13}, N_{16}, N_{19} & \quad D_8 \circ N_1, N_7, N_{12}, N_{15}, N_{20} \\ D_9 \circ N_2, N_5, N_{14}, N_{19}, N_{20} & \quad D_{10} \circ N_4, N_5, N_{13}, N_{15}, N_{17} & \quad D_{11} \circ N_3, N_5, N_{12}, N_{16}, N_{18} \\ D_{12} \circ N_2, N_6, N_9, N_{12}, N_{13} & \quad D_{13} \circ N_2, N_7, N_{11}, N_{16}, N_{17} & \quad D_{14} \circ N_2, N_8, N_{10}, N_{15}, N_{18} \\ D_{15} \circ N_3, N_6, N_{11}, N_{15}, N_{19} & \quad D_{16} \circ N_4, N_6, N_{10}, N_{16}, N_{20} & \quad D_{17} \circ N_4, N_7, N_9, N_{18}, N_{19} \\ D_{18} \circ N_3, N_8, N_9, N_{17}, N_{20} & \quad D_{19} \circ N_4, N_8, N_{11}, N_{12}, N_{14} & \quad D_{20} \circ N_3, N_7, N_{10}, N_{13}, N_{14} \end{aligned}$$

3.4 Projektif Uzaylar

$V = V(n+1, \mathcal{F})$ bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde $n+1$ boyutlu bir vektör uzayı olsun. $V - \{0\}$ daki vektörler üzerinde bir $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in V - \{0\}$ ve $\forall t \in \mathcal{F} - \{0\}$ için $X \sim Y \Leftrightarrow y_i = tx_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $V - \{0\}$ daki denklik sınıfları, V nin orijini çıkarılmış 1-boyutlu alt uzaylarıdır. Bu denklik sınıflarının kümesine $\mathcal{F}$ cismi üzerinde n -boyutlu projektif uzay denir ve $PG(n, \mathcal{F})$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{F} = GF(q)$ alınırsa oluşan n -boyutlu projektif uzay $PG(n, q)$ ile gösterilir ve projektif uzayın mertebesi q olur. $PG(n, \mathcal{F})$ nin elemanlarına projektif uzayın noktaları denir ve $P(X)$ ile gösterilir. $P(X)$, X vektörünün denklik sınıfı olmak üzere X 'e $P(X)$ i temsil eden vektör denir. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_r$ vektörlerinin kümesi lineer bağımsız ise $P(X_1), P(X_2), P(X_3), \dots, P(X_r)$ noktaları da lineer bağımsızdır.

Tanım 3.15 $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının m -boyutlu bir alt uzayı, $V = V(n+1, \mathcal{F})$ vektör uzayının $(m+1)$ -boyutlu bir alt uzayını oluşturan vektörlerin temsil ettiği noktalar kümesidir. Yani, 0-boyutlu alt uzay bir nokta, 1- boyutlu alt uzay bir doğru, 2- boyutlu alt uzay bir düzlem, ..., $(n-1)$ - boyutlu alt uzay bir hiper düzlemdir.

Tanım 3.16 Bir hiper düzlem, $\sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$ denklemini sağlayan $X = (X_0, X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektörlerinin temsil ettiği noktalar kümesidir.

Tanım 3.17 Bir m -uzay $\Pi_m, (t_0, t_1, t_2, \dots, t_m) \in K^{m+1} - \{(0, 0, 0)\}$ olmak üzere, $(m+1)$ -lineer bağımsız $X_0, X_1, X_2, \dots, X_m$ vektörlerinin oluşturduğu, yani $t_0 X_0 + t_1 X_1 + \dots + t_m X_m$ vektörleri tarafından temsil edilen noktalar kümesidir.

$PG(n, \mathcal{F})$ nin alt uzayları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

- a. π_r, π_s $PG(n, \mathcal{F})$ nin alt uzayları ise π_r ile π_s nin arakesiti $\pi_r \cap \pi_s$ te bir alt uzaydır.
- b. π_r ve π_s nin birleşimi $\pi_r \cdot \pi_s$ olup, bu alt uzay π_r ve π_s yi içeren en küçük alt uzaydır.
- c. $\pi_r \cap \pi_s = \pi_t$ ve $\pi_r \cdot \pi_s = \pi_m$ ise $r + s = t + m$ dir.
- d. π_r ve $\pi_{r'}$, $PG(n, \mathcal{F})$ de iki r - uzay ve $\pi_r \subset \pi_{r'}$ ise $\pi_r = \pi_{r'}$ dür.
- e. π_m alt uzayı $m + 1$ tane lineer bağımsız noktanın birleşimidir veya π_m alt uzayı, n -boyutlu projektif uzayda $n - m$ tane lineer bağımsız hiper düzlemin arakesitidir.

Tanım 3.18 (Projektif 3-Uzay) Nokta, doğru ve düzlem denilen tanımsız geometrik nesnelerden oluşan, boş olmayan üç ayrık küme, bu kümelerin elemanları arasında tanımlı üzerinde bulunma bağıntılarıyla birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekliyorsa bunların hepsine birden bir projektif 3-uzay denir (Kaya, 2005).

- U1. Farklı iki noktadan geçen tek bir doğru vardır.
- U2. Her doğru üzerinde en az üç nokta vardır.
- U3. Doğrudaş olmayan üç nokta tek bir düzlem üzerindedir.
- U4. Herhangi üçü doğrudaş olmayan ve hepsi aynı düzlem üzerinde bulunmayan dört nokta vardır.
- U5. Bir doğru ve bir düzlemin en az bir ortak noktası vardır.
- U6. İki düzlemin en az bir ortak doğrusu vardır.

$\mathcal{F} = GF(q)$ olmak üzere, $PG(n, q)$ projektif uzayının r -uzaylarının kümesi $PG^{(r)}(n, q)$ ile gösterilir ve bu r -boyutlu alt uzayların sayısı $\Theta(r; n, q) = |PG^{(r)}(n, q)|$ dir. Bununla ilgili bazı kombinatoriyel sonuçlar aşağıda verilmektedir:

$PG^{(0)}(n, q) = PG(n, q)$ dur. Yani 0-uzaylarının kümesi projektif uzayı oluşturur. Ayrıca $PG(n, q)$ projektif uzayının toplam nokta sayısı $\theta(n) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \Theta(0; n, q)$ dur.

$$[r, s] = \begin{cases} \prod_{i=r}^s (q^i - 1) & , s \geq r \\ 1 & , s < r \end{cases}$$

olmak üzere;

1. $PG(n, q)$ projektif uzayında r -boyutlu alt uzayların sayısı;

$$\Theta(r; n, q) = \frac{[n - r + 1, n + 1]}{[1, r + 1]}$$

dir.

2. $PG(n, q)$ projektif uzayında s -boyutlu alt uzayı kapsayan r boyutlu alt uzayların sayısı;

$$\chi(s, r; n, q) = \frac{[r - s + 1, n - s]}{[1, n - r]}$$

dir.

Özel olarak,

- a. Bir doğru üzerindeki nokta sayısı $\Theta(0; 1, q) = q + 1$,
- b. Bir düzlemdeki nokta ve doğru sayısı $\Theta(0; 2, q) = q^2 + q + 1$,
- c. $PG(3, q)$ projektif uzayında toplam nokta ve düzlem sayısı $\Theta(0; 3, q) = \Theta(2; 3, q) = (q + 1)(q^2 + 1)$ dir
- d. $PG(3, q)$ projektif uzayında toplam doğru sayısı $\Theta(1; 3, q) = (q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$,
- e. $PG(3, q)$ projektif uzayında bir noktadan geçen doğru sayısı $\chi(0, 1; 3, q) = q^2 + q + 1$,
- f. $PG(3, q)$ projektif uzayında bir doğrudan geçen düzlem sayısı $\chi(1, 2; 3, q) = q + 1$,

dir.

3.5 Projektif Uzayda Bazı Alt Geometriler

$PG(n, q)$ projektif uzayında sonlu alt geometrik yapılar belli kombinatöryel özelliklere sahip sonlu nokta kümeleri olarak verilir. Bunlardan bazıları şöyledir:

Tanım 3.19 $PG(n, q)$ projektif uzayında k tane π_l uzayının kümesine (k, l) -küme denir. $PG(n, q)$ projektif uzayında k tane nokta kümesi $(k, 0)$ -kümedir (Ekmekçi vd.,2017).

Tanım 3.20 $PG(n, q)$ projektif uzayında en çok r -tanesi π_s uzayında olan k -tane l -boyutlu uzayların kümesine $(k, l; r, s; n, q)$ küme denir (Ekmekçi vd.,2017).

Tanım 3.21 $PG(n, q)$ projektif uzayında en çok r -tane olacak şekildeki k nokta kümesine $(k; r, s, n, q) = (k, 0; r, s; n, q)$ küme denir. Yani $(r + 1)$ tanesi aynı π_s de olmayan k nokta kümesidir (Ekmekçi vd.,2017).

Tanım 3.22 $PG(n, q)$ projektif uzayında $(r + 1)$ tanesi aynı $(r - 1)$ -boyutlu uzayda olmayan k nokta kümesine $(k, r, n, q) = (k; r, r - 1; n, q)$ küme denir (Ekmekçi vd.,2017).

Tanım 3.23 $PG(n, q)$ projektif uzayında $(r + 1)$ tanesi doğrudan olmayan k nokta kümesine (k, r) -cap denir ve (k, r) -cap, $(k; r, 1; n, q)$ kümedir (Ekmekçi vd., 2017).

Tanım 3.24 $PG(n, q)$ projektif uzayında $(r + 1)$ tanesi aynı hiper düzlemde olmayan nokta kümesine (k, r) -arc denir ve (k, r) -arc, $(k; n, n - 1; n, q)$ kümedir (Ekmekçi vd., 2017).

Tanım 3.25 $PG(2, q)$ projektif düzleminde üçü doğrudan olmayan k nokta kümesine düzlemsel (k, r) -arc denir ve (k, r) -arc, $(k; 2, 1; 2, q)$ kümedir (Ekmekçi vd., 2017).



4. KLEIN KUADRIK

Bu bölümde projektif uzaylarda kuadriklerle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Klein kuadriğin özellikleri incelendikten sonra $PG(3, 2)$ projektif uzayının $PG(5, 2)$ projektif uzayına gömülmesi ile elde edilen ve Klein kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemleri belirlenmiştir. $PG(5, 4)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemlerinin birer örneği verilmiştir. $PG(5, 4)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemlerinin Grassmann koordinatları hesaplanmıştır. Son kısımda ise genel Klein küme kavramı ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilerek bölümün sonunda $PG(13, 2)$ projektif uzayında gömülü olarak $PG(2, 2)$ projektif düzlemi elde edilmiştir.

4.1 Projektif Uzayda Kuadrikler

Tanım 4.1 $PG(n, q)$ projektif uzayının 2. dereceden homojen:

$$\phi = \sum_{j \geq i} a_{ij} x_i x_j, (0 \leq i \leq j \leq n)$$

polinomunu sağlayan $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ noktalar kümesine kuadrik denir ve Q_{n-1}^2 biçiminde gösterilir (Casse, 2006).

Tanım 4.2 $t - 1$, L kuadriğinin L -alt uzayının maksimum boyutu olsun. Bu durumda t tamsayısına L nin indeksi denir. $t - 1$ boyutlu L -alt uzaylara maksimal L -alt uzaylar denir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Örneğin 3-boyutlu reel uzayda bir koni ve bir hiperboloid 2 indeksine sahiptir. Çünkü üzerlerinde doğru (1-boyutlu alt uzay) bulundurulur ama düzlem bulundurmazlar. ($t - 1 = 1, t = 2$) Üzerinde doğru bulundurmayan bir kuadratik küme (örneğin küre) 1 indeksine sahiptir.

Teorem 4.1 L , d boyutlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının t indeksine sahip, dejenere olmayan bir kuadriği olsun. d çift ise $t \leq \frac{d}{2}$, d tek ise $t \leq \frac{d+1}{2}$ dir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Teorem 4.2 $\mathcal{P} = PG(2t, q)$ projektif uzayındaki bir kuadriğin indeksi t dir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Teorem 4.3 L , d boyutlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının t indeksine sahip, dejenere olmayan bir kuadriği olsun. L nin indeksi için üç durum vardır:

1. d çift ise $t = \frac{d}{2}$
2. d tek ise $t = \frac{d-1}{2}$ veya $t = \frac{d+1}{2}$

dir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Tanım 4.3 L , d boyutlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının t indeksine sahip, dejenere olmayan bir kuadriği olsun.

1. d çift ve $t = \frac{d}{2}$ ise L parabolik kuadriktir.
2. d tek ve $t = \frac{d-1}{2}$ ise L eliptik kuadriktir.
3. d tek ve $t = \frac{d+1}{2}$ ise L hiperbolik kuadriktir.

dir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Tanım 4.4 $PG(n, q)$, bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde projektif uzay olsun. n nin çift ve tek olma durumlarına göre $PG(n, q)$ projektif uzayının kuadrikleri aşağıdaki biçimdedir:

1. n çift ise parabolik kuadrik;

$$Q_n = P_n = V(x_0^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

2. n tek ise hiperbolik veya eliptik kuadrik;

$$Q_n = H_n = V(x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

veya

$$Q_n = E_n = V(f(x_0, x_1) + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

biçimindedir. Burada f fonksiyonu, $\mathcal{F}$ cismi üzerinde indirgenemezdir (Thas ve Hirschfeld, 2016).

Tanım 4.5 $PG(5, q)$, bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde projektif uzay olsun. $PG(5, q)$ projektif uzayının kuadrikleri aşağıdaki biçimdedir:

$$Q_5 = H_5 = V(x_0x_1 + x_2x_3 + x_4x_5)$$

H_n hiperbolik kuadrikleri üzerinde $(q^2 + 1)(q^2 + q + 1)$ tane nokta vardır. Bu noktalar $2(q + 1)(q^2 + 1)$ tane düzlem üzerinde bulunurlar. Her noktasından $2(q + 1)$ tane düzlem geçer.

$$Q_5 = E_5 = V(f(x_0, x_1) + x_2x_3 + x_4x_5)$$

E_n eliptik kuadrikleri üzerinde $(q+1)(q^3+1)$ tane nokta vardır. Bu noktalar $(q^2+1)(q^3+1)$ tane doğru üzerinde bulunurlar. Her noktasından (q^2+1) tane doğru geçer (Thas ve Hirschfeld, 2016).

Tanım 4.6 L , 5-boyutlu sonlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının hiperbolik kuadriği olsun. L nin π_1, π_2 düzlemleri eşit veya tek bir noktada kesişiyorsa π_1, π_2 düzlemlerine denktir denir ve $\pi_1 \sim \pi_2$ biçiminde gösterilir. $\sim$ bağıntısı simetri, yansıma ve geçişme özelliklerine sahip olduğundan bir denklik bağıntısıdır (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Teorem 4.4 L , 5-boyutlu sonlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının hiperbolik kuadriği olsun. L nin düzlemleri $\sim$ bağıntısı ile iki denklik sınıfına ayrılırlar (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

4.2 Plücker Koordinatları

Projektif 3-uzayda doğrular üzerindeki iki noktanın lineer birleşimi ya da üzerinde bulunduğu iki farklı düzlemin arakesiti olarak gösterilir. Julius Plücker, 1865 yılında “A New Geometry of Space” isimli çalışmasında Projektif 3-uzayda doğruları 6 bileşenli homojen koordinatlarla gösterdi.

Tanım 4.7 (Plücker Koordinatları) g , $P(V)$ projektif uzayının (x_0, x_1, x_2, x_3) ve (y_0, y_1, y_2, y_3) noktalarından geçen bir doğrusu olsun. Aşağıdaki elemanlar tanımlansın:

$$p_{01} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}, p_{02} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}, p_{03} = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, p_{31} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, p_{12} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6) = (p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12})$ altılısına g doğrusunun Plücker koordinatları denir (Klein, 1884).

Teorem 4.5 $PG(3, q)$ projektif 3-uzayında;

- i. g doğrusunun Plücker koordinatları iki noktanın seçiminden bağımsızdır.
- ii. Plücker koordinatları homojen koordinatlardır.
- iii. Bir doğrunun $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$ Plücker koordinatı aşağıdaki kuadrik denklemi sağlar:

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0$$

iv. En az bir $q_i \neq 0$ olmak üzere, $\mathcal{F}$ nin $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$ elemanları $p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$ denklemini sağlıyorsa $PG(3, q)$ projektif uzayının Plücker koordinatları $(p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$ olan bir doğrusu vardır (Klein, 1884).

Teorem 4.6 $PG(3, q)$ projektif 3-uzayının iki doğrusu $g = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$ ve $h = (q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : q_5 : q_6)$ olsun. g ve h doğrularının aykırı doğrular olması için gerek ve yeter koşul

$$p_1q_4 + p_2q_5 + p_3q_6 + p_4q_1 + p_5q_2 + p_6q_3$$

ifadesinin sıfırdan farklı olmasıdır (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

4.3 Grassmann Koordinatları

Tanım 4.8 l , $P(n, q)$ projektif uzayının bir doğrusu olsun. $n \geq 2$ olmak üzere, $P(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Q(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$, l doğrusunun iki farklı noktası olsun. $0 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, p_{ij} , $GF(q)$ nun $x_iy_j - x_jy_i$ elemanını gösterebilir.

$$(p_{ij})_{0 \leq i < j \leq n} = (p_{01}, \dots, p_{0n}, p_{12}, \dots, p_{1n}, \dots, p_{n-1n})$$

$PG\left(\binom{n+1}{2} - 1, q\right)$ projektif uzayında bir P_l noktası tanımlar. P_l noktasına PQ doğrusunun Grassmann koordinatı denir. Plücker koordinatları, Grassmann koordinatlarının $n = 3$ için özel halidir (Govaerts, 2003).

4.4 Klein Kuadrik

Tanım 4.9 $\mathcal{P}$, homojen koordinatlarla gösterilen bir projektif 5-uzay olsun.

$$P = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$$

olmak üzere:

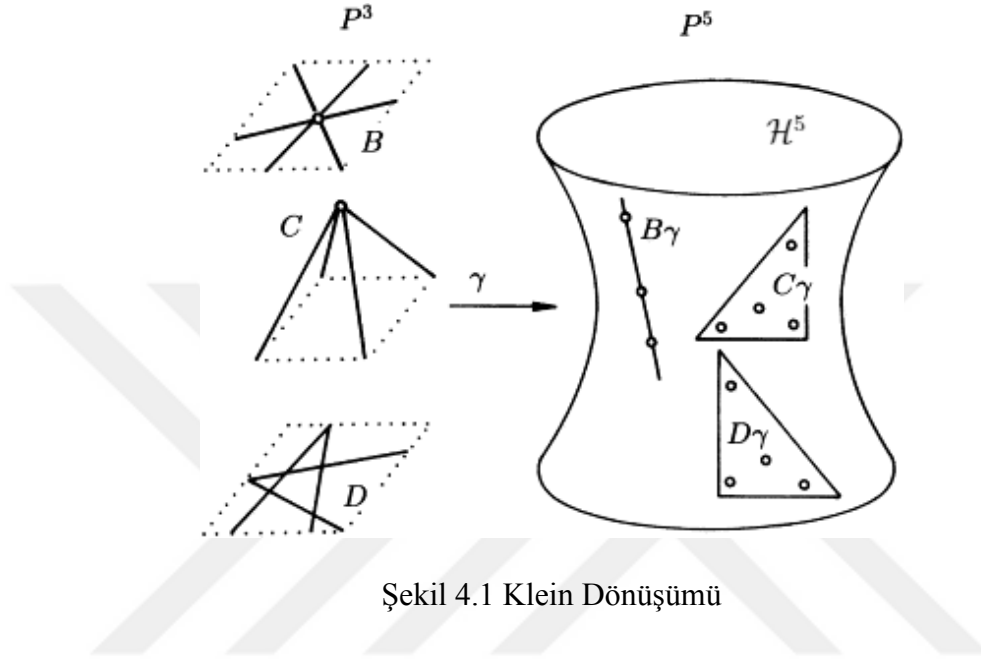
$$p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$$

denklemini sağlayan noktaların K kümesine Klein Kuadrik denir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Teorem 4.7 Klein Kuadrik bir hiperbolik kuadriktir (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).

Teorem 4.8 *Klein Kuadriğin indeksi 3 tür (Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998).*

Yani Klein Kuadrik, üzerinde 0, 1 ve 2 boyutlu alt uzayları (nokta, doğru ve düzlemleri) üzerinde bulundurur. (Şekil 4.1).



Şekil 4.1 Klein Dönüşümü

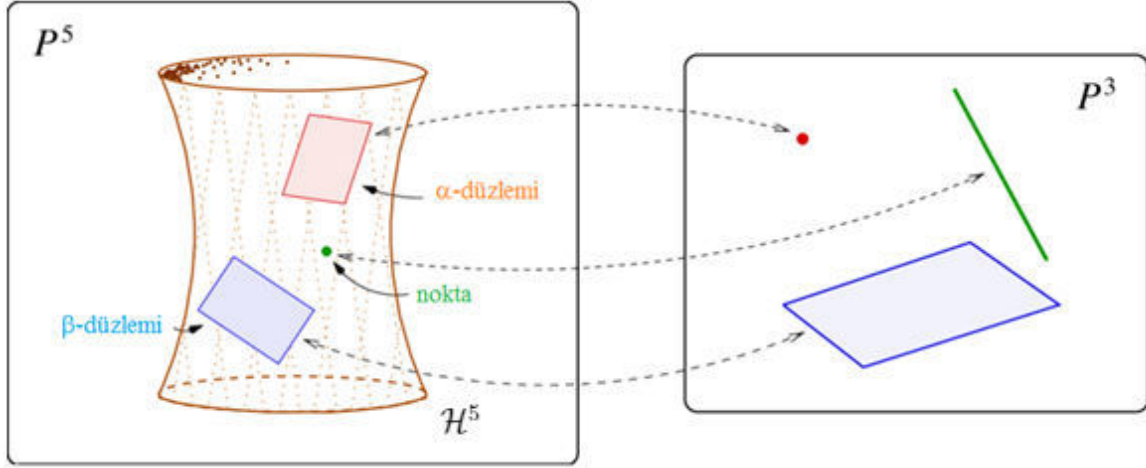
Teorem 4.9 *Klein kuadriğin matrisi, $M = \begin{bmatrix} O_3 & \frac{1}{2}I_3 \\ \frac{1}{2}I_3 & O_3 \end{bmatrix}$ biçimindedir. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \in P^5$ olmak üzere:*

$$X^T M X = x_1 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_6 = 0$$

Klein kuadriğin denklemidir (Pottman ve Wallner, 2001). Klein Kuadriğin matrisi non-singülerdir.

Klein dönüşümü $\gamma : L \rightarrow PG(5, q)$, Plücker koordinatları: $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ olan $PG(3, q)$ projektif uzayının bir L doğrusunu, homojen koordinatları $(l_{01} : l_{02} : l_{03} : l_{23} : l_{31} : l_{12})$ olan $PG(5, q)$ projektif uzayının bir noktasına

eşler (Klein, 1868). Klein Kuadrik $\mathcal{H}^5$ sembolü ile gösterilir. Klein Kuadrik üzerinde iki tür düzlem vardır. $PG(3, q)$ projektif uzayının noktaları Klein dönüşümü ile Klein Kuadrik üzerinde α -düzlemlerine dönüşür. $PG(3, q)$ projektif uzayının düzlemleri Klein dönüşümü ile Klein Kuadrik üzerinde β -düzlemlerine dönüşür (Şekil 4.2).

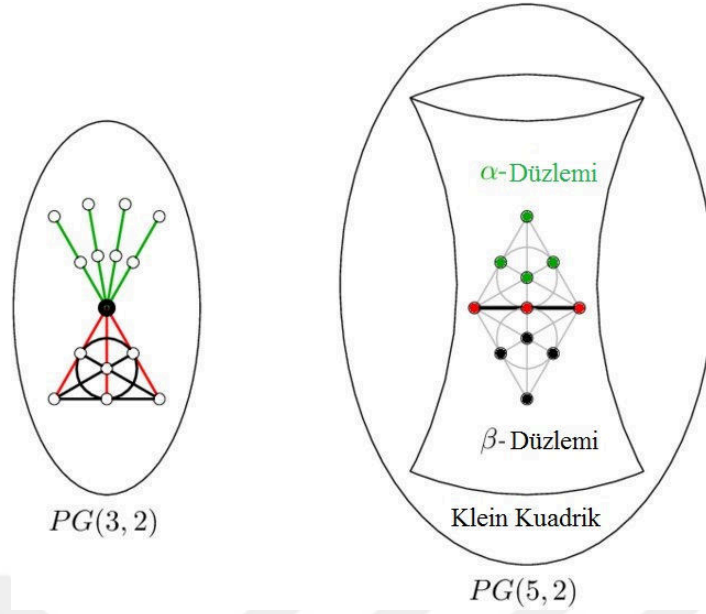


Şekil 4.2 Klein Kuadrik Üzerinde α ve β Düzlemleri

$PG(3, q)$ projektif uzayında bir P noktasından geçen doğrular Klein dönüşümü altında α (Latin Düzlemi) belirler. $PG(3, q)$ projektif uzayında bir $\mathcal{P}$ düzleminin doğruları Klein dönüşümü altında β (Grek Düzlemi) belirtir. İki farklı α düzlemi tek bir noktada kesişir. Bu nokta $PG(5, q)$ projektif uzayında iki noktayı birleştiren doğrunun Klein dönüşümü altındaki görüntüsüdür. İki farklı β düzlemi tek bir noktada kesişir. Bu nokta $PG(3, q)$ projektif uzayında iki düzlemin arakesit doğrusunun Klein dönüşümü altındaki görüntüsüdür (Selig, 2005). Genel olarak α ve β düzlemleri kesişmez. Eğer kesişirlerse kesişimleri bir doğrudur (Şekil 4.3).

$PG(3, 2)$ projektif uzayının 15 noktası, 15 düzlemi ve 35 noktası vardır. Klein dönüşümü altında 15 nokta 15 α -düzlemine, 15 düzlem 15 β -düzlemine ve 35 doğru Klein Kuadrik üzerinde bulunan 35 noktaya dönüşür (Şekil 4.4).

Örnek 4.1 de $PG(3, 2)$ projektif uzayında $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin Klein dönüşümü altındaki β -düzlemi verilmiştir.



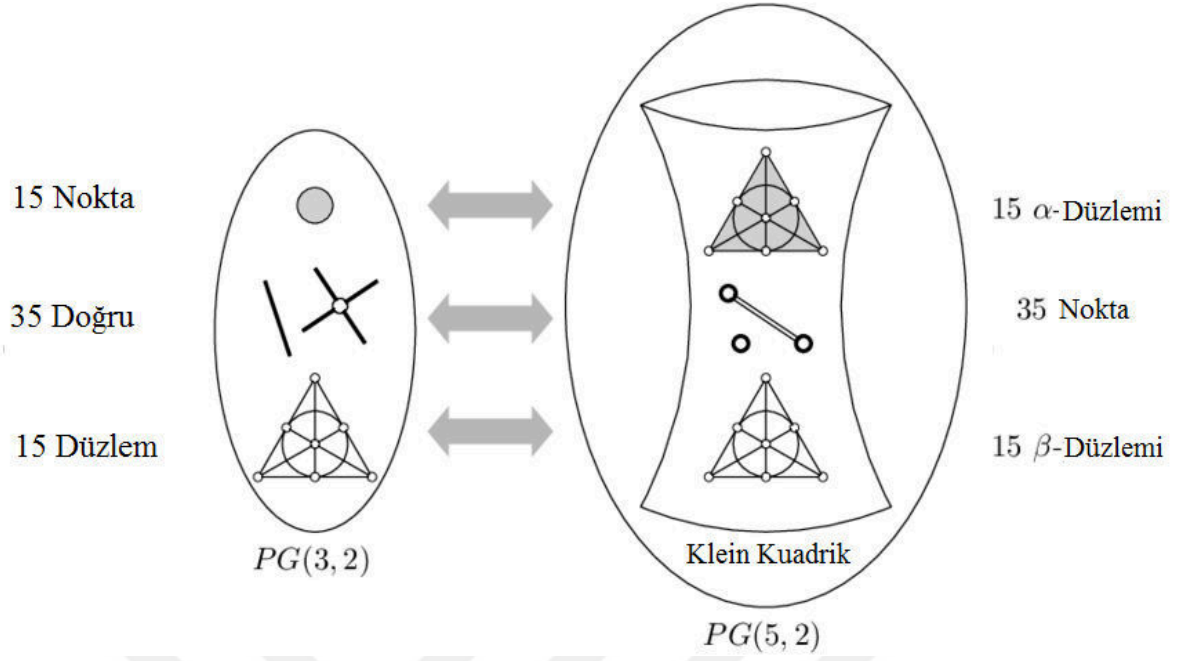
Şekil 4.3 $PG(5, 2)$ Projektif uzayında Bir Doğru Boyunca Kesişen α ve β Düzlemleri

Örnek 4.1 $PG(3, 2)$ projektif uzayında $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin noktaları $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$ ve $(1, 1, 0, 0)$ dir. Bu noktaların üzerinde bulunma bağıntısı ve noktaların üzerinde bulunduğu doğrular ve bu doğruların Plücker koordinatları aşağıdaki gibidir (Şekil 4.5):

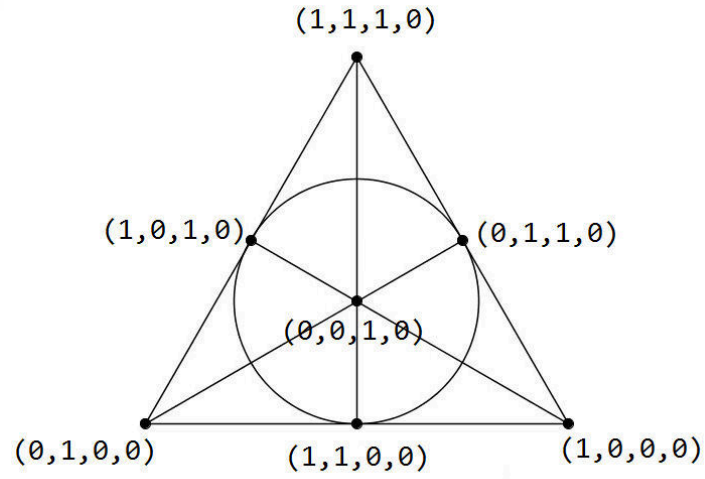
1. $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$
2. $(0, 1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$
3. $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$
4. $(1, 1, 0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$
5. $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$
6. $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$
7. $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$

$PG(5, 2)$ projektif uzayında $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin β -düzlemi aşağıdaki gibidir (Şekil 4.6). $(0, 0, 0, 1)$ noktasının Klein Kuadrik üzerinde bulunan β -düzleminin doğruları $L_1, L_2, \dots, L_7$ olmak üzere, üzerinde bulunma bağıntısı: ($PG(3, 2)$ projektif uzayının 1, 2, 3, ..., 7 numaralı doğruları, $PG(5, 2)$ projektif uzayının noktalarıdır.) $\{1, 2, 3\} \circ L_1, \{1, 4, 5\} \circ L_2, \{1, 6, 7\} \circ L_3, \{2, 4, 5\} \circ L_4, \{3, 4, 7\} \circ L_5, \{2, 5, 7\} \circ L_6, \{3, 5, 6\} \circ L_7$ dir.

Örnek 4.2 de $PG(3, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 0, 1)$ noktasının Klein dönüşümü altındaki α -düzlemi verilmiştir.

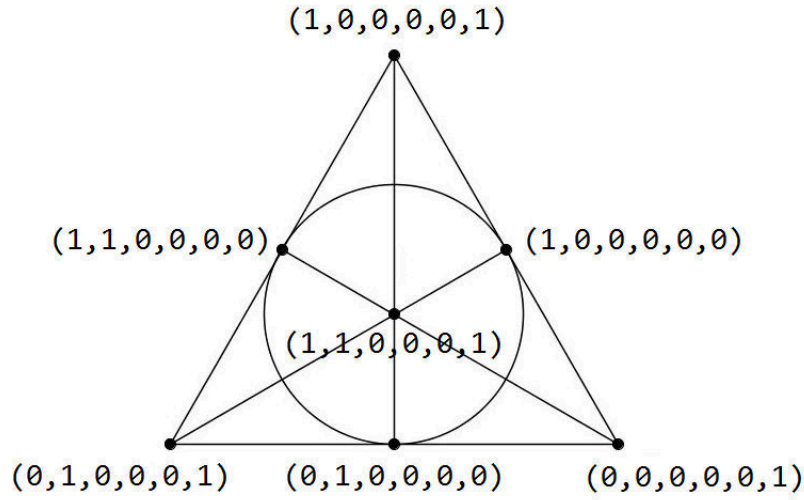


Şekil 4.4 $PG(3, 2)$ Projektif Uzayının Klein Dönüşümü



Şekil 4.5 $PG(3, 2)$ Projektif Uzayındaki $[0, 0, 0, 1]$ Düzlemi

Örnek 4.2 $PG(3, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 0, 1)$ noktasından geçen doğrular; bu doğrular üzerindeki noktalar ve bu noktanın Klein Kuadrik üzerindeki α -düzlemi aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.6 $[0, 0, 0, 1]$ Düzleminin Klein Kuadrik Üzerindeki β Düzlemi

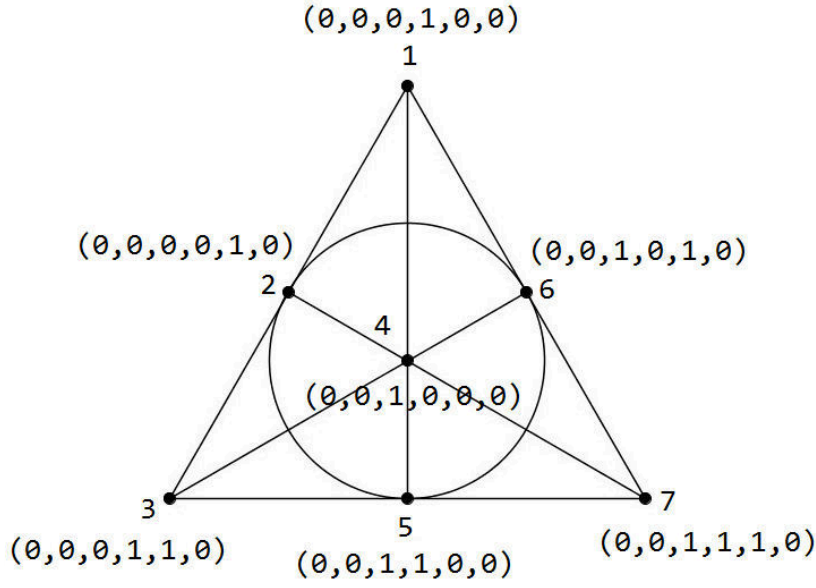
1. $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$
2. $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$
3. $(0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$
4. $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$
5. $(0, 0, 1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 1, 1)$
6. $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$
7. $(0, 0, 1, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$

$(0, 0, 0, 1)$ noktasının Klein Kuadrik üzerindeki α -düzleminin doğruları $L_1, L_2, \dots, L_7$ olmak üzere, üzerinde bulunma bağıntısı: $\{1, 2, 3\} \circ L_1, \{1, 4, 5\} \circ L_2, \{1, 6, 7\} \circ L_3, \{2, 4, 6\} \circ L_4, \{2, 5, 7\} \circ L_5, \{3, 4, 7\} \circ L_6, \{3, 5, 6\} \circ L_7$ dir.

$PG(3, 4)$ projektif uzayı, $GF(2^2)$ üzerinde, nokta ve doğruları $GF(2)$ üzerinde $t^2 + t + 1$ indirgenemez polinomu kullanılarak elde edilen cismin elemanlarıyla homojen olarak koordinatlanan bir projektif 3-uzay olsun. $PG(3, 4)$ projektif uzayının 85 noktası, 357 doğrusu ve 85 düzlemi vardır.

Örnek 4.3 te $PG(3, 4)$ projektif uzayında $(0, 0, 0, 1)$ noktasının Klein dönüşümü altındaki α -düzlemi verilmiştir.

Örnek 4.3 $PG(3, 4)$ projektif uzayının $P(0, 0, 0, 1)$ noktası Klein dönüşümü altında $PG(5, 4)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bir α düzlemine dönüşür. Bu düzlemin



Şekil 4.7 $(0, 0, 0, 1)$ Noktasının Klein Kuadrik Üzerindeki α Düzlemi

noktaları, $PG(3, 4)$ projektif uzayında $P(0, 0, 0, 1)$ noktasından geçen 21 doğrudur. Bu 21 doğru aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0) & l_2 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0) & l_3 &= (0, 0, 0, 1, 1, 0) \\
 l_4 &= (0, 0, 0, t^2, 1, 0) & l_5 &= (0, 0, 0, t, 1, 0) & l_6 &= (0, 0, 1, 1, 1, 0) \\
 l_7 &= (0, 0, 1, 1, 0, 0) & l_8 &= (0, 0, 1, 1, t, 0) & l_9 &= (0, 0, 1, 0, t^2, 0) \\
 l_{10} &= (0, 0, 1, 0, 1, 0) & l_{11} &= (0, 0, 1, t^2, 1, 0) & l_{12} &= (0, 0, 1, t, 1, 0) \\
 l_{13} &= (0, 0, 1, t^2, t, 0) & l_{14} &= (0, 0, 1, t, t^2, 0) & l_{15} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
 l_{16} &= (0, 0, 1, 0, t, 0) & l_{17} &= (0, 0, 1, 1, t^2, 0) & l_{18} &= (0, 0, 1, t^2, 0, 0) \\
 l_{19} &= (0, 0, 1, t, 0, 0) & l_{20} &= (0, 0, 1, t^2, t^2, 0) & l_{21} &= (0, 0, 1, t, t, 0)
 \end{aligned}$$

$PG(3, 4)$ projektif uzayında $P(0, 0, 0, 1)$ noktasının dönüştüğü α düzleminin doğruları $L_1, L_2, \dots, L_{20}$ olmak üzere, üzerinde bulunma bağıntısı:

$$\begin{aligned}
 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 &\circ L_1 & l_1, l_6, l_7, l_8, l_{17} &\circ L_2 & l_1, l_9, l_{10}, l_{15}, l_{16} &\circ L_3 \\
 l_1, l_{11}, l_{13}, l_{18}, l_{20} &\circ L_4 & l_1, l_{12}, l_{14}, l_{19}, l_{21} &\circ L_5 & l_2, l_6, l_{10}, l_{11}, l_{12} &\circ L_6 \\
 l_2, l_7, l_{15}, l_{18}, l_{19} &\circ L_7 & l_2, l_8, l_{13}, l_{16}, l_{21} &\circ L_8 & l_2, l_9, l_{14}, l_{17}, l_{20} &\circ L_9 \\
 l_3, l_6, l_{15}, l_{20}, l_{21} &\circ L_{10} & l_3, l_7, l_{10}, l_{13}, l_{14} &\circ L_{11} & l_3, l_8, l_9, l_{12}, l_{18} &\circ L_{12} \\
 l_3, l_{11}, l_{16}, l_{17}, l_{19} &\circ L_{13} & l_4, l_6, l_9, l_{13}, l_{19} &\circ L_{14} & l_4, l_7, l_{12}, l_{16}, l_{20} &\circ L_{15} \\
 l_4, l_8, l_{11}, l_{14}, l_{15} &\circ L_{16} & l_4, l_{10}, l_{17}, l_{18}, l_{21} &\circ L_{17} & l_5, l_6, l_{14}, l_{16}, l_{18} &\circ L_{18} \\
 l_5, l_7, l_9, l_{11}, l_{21} &\circ L_{19} & l_5, l_8, l_{10}, l_{19}, l_{20} &\circ L_{20} & l_5, l_{12}, l_{13}, l_{15}, l_{17} &\circ L_{21}
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Örnek 4.4 te $PG(3, 4)$ projektif uzayının $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin dönüştüğü β düzlemi verilmektedir.

Örnek 4.4 $PG(3, 4)$ projektif uzayının $[0, 0, 0, 1]$ düzlemi Klein dönüşümü altında $PG(5, 4)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bir β düzlemine dönüşür. Bu düzlemin noktaları, $PG(3, 4)$ projektif uzayında $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin 21 doğrusudur. Bu 21 doğru aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lll}
 l_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) & l_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 1) & l_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
 l_4 = (1, 0, 0, 0, 0, t^2) & l_5 = (1, 0, 0, 0, 0, t) & l_6 = (0, 1, 0, 0, 0, 1) \\
 l_7 = (0, 1, 0, 0, 0, 1) & l_8 = (0, 1, 0, 0, 0, t) & l_9 = (0, 1, 0, 0, 0, t^2) \\
 l_{10} = (1, 1, 0, 0, 0, 0) & l_{11} = (1, 1, 0, 0, 0, 1) & l_{12} = (1, 1, 0, 0, 0, t^2) \\
 l_{13} = (1, 1, 0, 0, 0, t) & l_{14} = (1, t^2, 0, 0, 0, t) & l_{15} = (1, t^2, 0, 0, 0, 1) \\
 l_{16} = (1, t^2, 0, 0, 0, 0) & l_{17} = (1, t^2, 0, 0, 0, t^2) & l_{18} = (1, t, 0, 0, 0, t^2) \\
 l_{19} = (1, t, 0, 0, 0, 1) & l_{20} = (1, t, 0, 0, 0, t) & l_{21} = (1, t, 0, 0, 0, 0)
 \end{array}$$

$PG(3, 4)$ projektif uzayında $[0, 0, 0, 1]$ düzleminin dönüştüğü β düzleminin doğruları $L_1, L_2, \dots, L_{20}$ olmak üzere, üzerinde bulunma bağıntısı:

$$\begin{array}{lll}
 l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \circ L_1 & l_1, l_6, l_7, l_8, l_9 \circ L_2 & l_1, l_{10}, l_{11}, l_{12}, l_{13} \circ L_3 \\
 l_1, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17} \circ L_4 & l_1, l_{18}, l_{19}, l_{20}, l_{21} \circ L_5 & l_2, l_6, l_{10}, l_{14}, l_{18} \circ L_6 \\
 l_2, l_6, l_{11}, l_{15}, l_{19} \circ L_7 & l_2, l_8, l_{12}, l_{16}, l_{20} \circ L_8 & l_3, l_9, l_{12}, l_{14}, l_{19} \circ L_9 \\
 l_3, l_6, l_{11}, l_{17}, l_{20} \circ L_{10} & l_4, l_6, l_{13}, l_{16}, l_{19} \circ L_{11} & l_5, l_6, l_{12}, l_{15}, l_{21} \circ L_{12} \\
 l_4, l_8, l_{12}, l_{14}, l_{21} \circ L_{13} & l_5, l_9, l_{11}, l_{16}, l_{21} \circ L_{14} & l_3, l_7, l_{10}, l_{16}, l_{21} \circ L_{15} \\
 l_3, l_8, l_{13}, l_{15}, l_{18} \circ L_{16} & l_2, l_9, l_{13}, l_{17}, l_{21} \circ L_{17} & l_4, l_7, l_{12}, l_{17}, l_{18} \circ L_{18} \\
 l_5, l_7, l_{13}, l_{14}, l_{20} \circ L_{19} & l_4, l_9, l_{10}, l_{15}, l_{20} \circ L_{20} & l_5, l_8, l_{10}, l_{17}, l_{19} \circ L_{21}
 \end{array}$$

şeklindedir.

4.5 Klein Kuadrik Üzerindeki Düzlemler

Bu bölümde $PG(5, 2)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemleri Grassmann koordinatları yardımıyla $PG(19, 2)$ projektif uzayının bir noktası ile eşlenmektedir.

$GF(2)$ cismiyle koordinatlanan $PG(3, 2)$ projektif uzayının noktaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (0, 0, 0, 1) & N_6 &= (0, 1, 1, 0) & N_{11} &= (1, 0, 1, 1) \\
 N_2 &= (0, 1, 0, 0) & N_7 &= (0, 1, 1, 1) & N_{12} &= (1, 1, 0, 0) \\
 N_3 &= (0, 1, 0, 1) & N_8 &= (1, 1, 1, 0) & N_{13} &= (1, 1, 0, 1) \\
 N_4 &= (0, 0, 1, 0) & N_9 &= (1, 1, 1, 1) & N_{14} &= (1, 0, 0, 0) \\
 N_5 &= (0, 0, 1, 1) & N_{10} &= (1, 0, 1, 0) & N_{15} &= (1, 0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

$PG(3, 2)$ projektif uzayının 35 doğrusu vardır. Bu doğrular, Plücker koordinatları ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{N_1, N_4, N_5\} & L_2 &= \{N_1, N_2, N_3\} & L_3 &= \{N_1, N_6, N_7\} \\
 L_4 &= \{N_1, N_{14}, N_{15}\} & L_5 &= \{N_1, N_{10}, N_{11}\} & L_6 &= \{N_1, N_{12}, N_{13}\} \\
 L_7 &= \{N_1, N_8, N_9\} & L_8 &= \{N_4, N_2, N_6\} & L_9 &= \{N_4, N_3, N_7\} \\
 L_{10} &= \{N_4, N_{14}, N_{10}\} & L_{11} &= \{N_4, N_{15}, N_{11}\} & L_{12} &= \{N_4, N_9, N_{13}\} \\
 L_{13} &= \{N_4, N_8, N_{12}\} & L_{14} &= \{N_5, N_2, N_7\} & L_{15} &= \{N_5, N_3, N_6\} \\
 L_{16} &= \{N_5, N_{14}, N_{11}\} & L_{17} &= \{N_5, N_{15}, N_{10}\} & L_{18} &= \{N_5, N_{12}, N_9\} \\
 L_{19} &= \{N_5, N_8, N_{13}\} & L_{20} &= \{N_2, N_{14}, N_{12}\} & L_{21} &= \{N_2, N_{15}, N_{13}\} \\
 L_{22} &= \{N_2, N_{10}, N_8\} & L_{23} &= \{N_2, N_{11}, N_9\} & L_{24} &= \{N_3, N_8, N_{11}\} \\
 L_{25} &= \{N_3, N_{14}, N_{13}\} & L_{26} &= \{N_3, N_{15}, N_{12}\} & L_{27} &= \{N_3, N_{10}, N_9\} \\
 L_{28} &= \{N_6, N_{14}, N_8\} & L_{29} &= \{N_6, N_{12}, N_{10}\} & L_{30} &= \{N_6, N_{15}, N_9\} \\
 L_{31} &= \{N_6, N_{13}, N_{11}\} & L_{32} &= \{N_7, N_{14}, N_9\} & L_{33} &= \{N_7, N_{12}, N_{11}\} \\
 L_{34} &= \{N_7, N_{10}, N_{13}\} & L_{35} &= \{N_7, N_{15}, N_8\}
 \end{aligned}$$

$PG(5, 2)$ projektif uzayının Klein Kuadrik üzerinde 15 tane α düzlemi vardır. Bu düzlemler ve üzerindeki noktalar ($PG(3, 2)$ projektif uzayının doğruları) aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha(N_1 = (0, 0, 0, 1)) &= \{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7\} \\
\alpha_2 = \alpha(N_2 = (0, 0, 1, 0)) &= \{l_1, l_8, l_9, l_{10}, l_{11}, l_{12}, l_{13}\} \\
\alpha_3 = \alpha(N_3 = (0, 0, 1, 1)) &= \{l_1, l_{14}, l_{15}, l_{16}, l_{17}, l_{18}, l_{19}\} \\
\alpha_4 = \alpha(N_4 = (0, 1, 0, 0)) &= \{l_2, l_8, l_{20}, l_{14}, l_{21}, l_{22}, l_{23}\} \\
\alpha_5 = \alpha(N_5 = (0, 1, 0, 1)) &= \{l_2, l_9, l_{24}, l_{25}, l_{26}, l_{27}, l_{15}\} \\
\alpha_6 = \alpha(N_6 = (0, 1, 1, 0)) &= \{l_3, l_8, l_{28}, l_{15}, l_{29}, l_{30}, l_{31}\} \\
\alpha_7 = \alpha(N_7 = (0, 1, 1, 1)) &= \{l_3, l_9, l_{14}, l_{32}, l_{33}, l_{34}, l_{35}\} \\
\alpha_8 = \alpha(N_8 = (1, 0, 0, 0)) &= \{l_4, l_{10}, l_{20}, l_{16}, l_{25}, l_{28}, l_{32}\} \\
\alpha_9 = \alpha(N_9 = (1, 0, 0, 1)) &= \{l_4, l_{17}, l_{11}, l_{21}, l_{35}, l_{26}, l_{30}\} \\
\alpha_{10} = \alpha(N_{10} = (1, 0, 1, 0)) &= \{l_5, l_{10}, l_{22}, l_{34}, l_{17}, l_{27}, l_{29}\} \\
\alpha_{11} = \alpha(N_{11} = (1, 0, 1, 1)) &= \{l_5, l_{11}, l_{23}, l_{16}, l_{24}, l_{31}, l_{33}\} \\
\alpha_{12} = \alpha(N_{12} = (1, 1, 0, 0)) &= \{l_6, l_{13}, l_{20}, l_{18}, l_{26}, l_{29}, l_{33}\} \\
\alpha_{13} = \alpha(N_{13} = (1, 1, 0, 1)) &= \{l_6, l_{12}, l_{21}, l_{25}, l_{19}, l_{31}, l_{34}\} \\
\alpha_{14} = \alpha(N_{14} = (1, 1, 1, 0)) &= \{l_7, l_{13}, l_{22}, l_{28}, l_{19}, l_{24}, l_{35}\} \\
\alpha_{15} = \alpha(N_{15} = (1, 1, 1, 1)) &= \{l_7, l_{12}, l_{23}, l_{32}, l_{18}, l_{30}, l_{27}\}
\end{aligned}$$

$PG(5, 2)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde 15 tane β düzlemi vardır. Bu düzlemler ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\beta_1 = \beta(D_1 = [0, 0, 0, 1]) &= \{l_{28}, l_8, l_{10}, l_{13}, l_{20}, l_{22}, l_{29}\} \\
\beta_2 = \beta(D_2 = [0, 0, 1, 0]) &= \{l_2, l_4, l_6, l_{20}, l_{26}, l_{25}, l_{21}\} \\
\beta_3 = \beta(D_3 = [0, 0, 1, 1]) &= \{l_{18}, l_{23}, l_{32}, l_{14}, l_{16}, l_{20}, l_{33}\} \\
\beta_4 = \beta(D_4 = [0, 1, 0, 0]) &= \{l_4, l_5, l_{16}, l_{17}, l_{11}, l_1, l_{10}\} \\
\beta_5 = \beta(D_5 = [0, 1, 0, 1]) &= \{l_9, l_{10}, l_{12}, l_{25}, l_{27}, l_{32}, l_{34}\} \\
\beta_6 = \beta(D_6 = [0, 1, 1, 0]) &= \{l_3, l_4, l_7, l_{28}, l_{30}, l_{32}, l_{35}\} \\
\beta_7 = \beta(D_7 = [0, 1, 1, 1]) &= \{l_{15}, l_{16}, l_{19}, l_{24}, l_{25}, l_{28}, l_{31}\} \\
\beta_8 = \beta(D_8 = [1, 0, 0, 0]) &= \{l_1, l_2, l_3, l_8, l_9, l_{14}, l_{15}\} \\
\beta_9 = \beta(D_9 = [1, 0, 0, 1]) &= \{l_8, l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{23}, l_{30}, l_{31}\} \\
\beta_{10} = \beta(D_{10} = [1, 0, 1, 0]) &= \{l_2, l_5, l_7, l_{22}, l_{23}, l_{24}, l_{27}\} \\
\beta_{11} = \beta(D_{11} = [1, 0, 1, 1]) &= \{l_{21}, l_{22}, l_{19}, l_{14}, l_{17}, l_{34}, l_{35}\} \\
\beta_{12} = \beta(D_{12} = [1, 1, 0, 0]) &= \{l_1, l_6, l_7, l_{12}, l_{13}, l_{18}, l_{19}\} \\
\beta_{13} = \beta(D_{13} = [1, 1, 0, 1]) &= \{l_9, l_{11}, l_{13}, l_{24}, l_{26}, l_{33}, l_{35}\} \\
\beta_{14} = \beta(D_{14} = [1, 1, 1, 0]) &= \{l_3, l_5, l_6, l_{29}, l_{31}, l_{33}, l_{34}\} \\
\beta_{15} = \beta(D_{15} = [1, 1, 1, 1]) &= \{l_{29}, l_{30}, l_{27}, l_{18}, l_{17}, l_{15}, l_{26}\}
\end{aligned}$$

$PG(5, 2)$ projektif uzayında Klein Kuadrik üzerindeki düzlemleri geren üç nokta: $P = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $Q = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$, $R = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ olsun. P, Q, R noktaları için M matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}$$

M matrisi kullanılarak aşağıdaki 20 determinant tanımlansın:

$$P_0 = p_{012} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} \quad P_1 = p_{013} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_3 \end{vmatrix} \quad P_2 = p_{014} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_4 \\ y_0 & y_1 & y_4 \\ z_0 & z_1 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$P_3 = p_{015} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_5 \\ y_0 & y_1 & y_5 \\ z_0 & z_1 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_4 = p_{023} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad P_5 = p_{024} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_4 \\ y_0 & y_2 & y_4 \\ z_0 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$P_6 = p_{025} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & x_5 \\ y_0 & y_2 & y_5 \\ z_0 & z_2 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_7 = p_{034} = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_4 \\ y_0 & y_3 & y_4 \\ z_0 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad P_8 = p_{035} = \begin{vmatrix} x_0 & x_3 & x_5 \\ y_0 & y_3 & y_5 \\ z_0 & z_3 & z_5 \end{vmatrix}$$

$$P_9 = p_{045} = \begin{vmatrix} x_0 & x_4 & x_5 \\ y_0 & y_4 & y_5 \\ z_0 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_{10} = p_{123} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad P_{11} = p_{124} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$P_{12} = p_{125} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_{13} = p_{134} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad P_{14} = p_{135} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_5 \\ y_1 & y_3 & y_5 \\ z_1 & z_3 & z_5 \end{vmatrix}$$

$$P_{15} = p_{145} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_{16} = p_{234} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \quad P_{17} = p_{235} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_5 \\ y_2 & y_3 & y_5 \\ z_2 & z_3 & z_5 \end{vmatrix}$$

$$P_{18} = p_{245} = \begin{vmatrix} x_2 & x_4 & x_5 \\ y_2 & y_4 & y_5 \\ z_2 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} \quad P_{19} = p_{345} = \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \\ y_3 & y_4 & y_5 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{vmatrix}$$

$P = (P_0, P_1, P_2, \dots, P_{19})$ ifadesine $PG(5, 2)$ projektif uzayındaki bir düzlemin Grassmann koordinatı denir. Böylelikle $PG(5, 2)$ projektif uzayındaki bir düzlem $PG(19, 2)$ projektif uzayının bir noktasına eşlenir.

Teorem 4.10 $PG(5, 2)$ projektif uzayında, Klein Kuadrik üzerinde bulunan α düzlemlerinin Grassmann koordinatları $PG(19, 2)$ projektif uzayında bir 15-cap oluşturur, yani herhangi üçü doğrusal olmayan 15 nokta kümesidir.

İspat 1 $PG(5, 2)$ projektif uzayında, Klein Kuadrik üzerinde bulunan α düzlemlerinin Grassmann koordinatları $P(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ olsun. α_1 düzleminin Grassmann koordinatını hesaplamak için bu düzlemi geren $l_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $l_2 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ve $l_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları kullanılsın. Bu durumda α_1 düzleminin Grassmann koordinatı:

$$P(\alpha_1) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

biçimindedir. Benzer şekilde $P(\alpha_i)$, $i = 2, 3, \dots, 15$ düzlemlerinin Grassmann koordinatları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} P(\alpha_2) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_3) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \\ P(\alpha_4) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_5) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ P(\alpha_6) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) \\ P(\alpha_7) &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \\ P(\alpha_8) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_9) &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_{10}) &= (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ P(\alpha_{11}) &= (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \\ P(\alpha_{12}) &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_{13}) &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ P(\alpha_{14}) &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \\ P(\alpha_{15}) &= (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Bu 15 noktanın her hangi üçü doğrusal olmayıp, $PG(19, 2)$ projektif uzayında bir 15-cap oluşturur.

Teorem 4.11 $PG(5, 2)$ projektif uzayında, Klein Kuadrik üzerinde bulunan β düzlemlerinin Grassmann koordinatları $PG(19, 2)$ projektif uzayında bir 15-cap oluşturur, yani herhangi üçü doğrusal olmayan 15 nokta kümesidir.

İspat 2 $PG(5, 2)$ projektif uzayında, Klein Kuadrik üzerinde bulunan β düzlemlerinin Grassmann koordinatları $P(\beta_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ olsun. β_1 düzleminin Grassmann koordinatını hesaplamak için bu düzlemi geren $l_{28} = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $l_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ ve

$l_{10} = (0, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktaları kullanılsın. Bu durumda β_1 düzleminin Grassmann koordinatı:

$$P(\beta_1) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

biçimindedir. Benzer şekilde $P(\beta_i)$, $i = 2, 3, \dots, 15$ düzlemlerinin Grassman koordinatları aşağıdaki gibidir:

$$P(\beta_2) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_3) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_4) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_5) = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_6) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_7) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_8) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$P(\beta_9) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_{10}) = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

$$P(\beta_{11}) = (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$P(\beta_{12}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$$

$$P(\beta_{13}) = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$$

$$P(\beta_{14}) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$P(\beta_{15}) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$$

Bu 15 noktanın her hangi üçü doğrusal olmayıp, $PG(19, 2)$ projektif uzayında bir 15-cap oluşturur.

4.6 Klein Kümeler

Tanım 4.10 Bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının herhangi ikisi tek bir noktada kesişen düzlemlerinin kümesine Klein küme denir (Beutelspacher vd., 1998).

Örnek 4.5 te $PG(5, q)$ projektif uzayında bir Klein küme verilmektedir.

Örnek 4.5 Q , 5-boyutlu sonlu bir $\mathcal{P}$ projektif uzayının hiperbolik kuadriği olsun. Q nun π_1, π_2 düzlemleri eşit veya tek bir noktada kesişiyorsa π_1, π_2 düzlemlerine denktir denir ve $\pi_1 \sim \pi_2$ biçiminde gösterilir. $\sim$ bağıntısı simetri, yansıma ve geçişme özelliklerine sahip

olduğundan bir denklik bağıntısıdır. Q nun düzlemleri $\sim$ ile iki denklik sınıfına ayrılırlar. $\mathcal{P} = PG(5, q)$ ise aynı denklik sınıfına ait düzlemlerin kümesi, $q^3 + q^2 + q + 1$ boyutunda bir Klein kümedir. (Aynı denklik sınıfından iki düzlem tek bir noktada kesişir.) Bu Klein küme, hiperbolik Klein küme olarak isimlendirilir (Beutelspacher vd., 1998).

Tanım 4.11 $\xi, \mathcal{P}$ projektif uzayında bir Klein küme olsun.

a. $E, E' \in \xi$ düzlemleri için, $E \cap E' = P$ olacak şekilde bir $P \in \mathcal{P}$ noktasına kesişim noktası denir (Beutelspacher vd., 1998).

b. Kesişim noktaları tarafından üretilen, $\mathcal{B}_\xi = \langle E \cap E' \mid E, E' \in \xi \rangle$ alt uzayına Klein kümenin tabanı denir (Beutelspacher vd., 1998).

c. $\mathcal{B}_\xi$ sayısına Klein kümenin taban boyutu denir.

Tanım 4.12 $\mathcal{P}$ bir projektif uzay ve $-1 \leq k < n$ olsun. $\mathcal{P}$ nin herhangi ikisi k boyutlu alt uzayda kesişen n boyutlu alt uzaylarının ξ kümesine bir (n, k) -SCID (Set of Subspaces with Constant Intersection Dimension) denir. $E_1, E_2 \in \xi$ olmak üzere her bir k boyutlu $E_1 \cap E_2$ alt uzayına ξ nin k -kesişim uzayı denir. $k = 0, 1$ durumunda bu kesişim uzayları sırası ile nokta ve doğrulardır. Örneğin $(2, 0)$ -SCID, herhangi ikisi bir noktada kesişen düzlemleri, $(1, -1)$ -SCID, herhangi ikisinin ortak noktası olmayan doğruları, $(3, 1)$ -SCID, herhangi ikisi bir doğru boyunca kesişen projektif 3-uzayları ifade eder (Eisfeld, 1999).

Örnek 4.6 Klein Kuadrik üzerinde aynı denklik sınıfına ait düzlemler kümesi $(2, 0)$ -SCID tir. Yani herhangi iki α düzlemi tek bir noktada ve herhangi iki β düzlemi tek bir noktada kesişir.

Örnek 4.7 de $PG(7, 2)$ projektif uzayında $(3, 1)$ -SCID yapısı verilmiştir.

Örnek 4.7 $\mathcal{P}$, 7 boyutlu bir projektif uzay olsun. $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$, $\mathcal{P}$ nin sekiz lineer bağımsız noktası olsun ve

$$E_1 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$$

$$E_{12} = \langle Q_1, Q_2, P_1, P_2 \rangle$$

$$E_{13} = \langle Q_1, Q_3, P_1, P_3 \rangle$$

$$E_{14} = \langle Q_1, Q_4, P_1, P_4 \rangle$$

$$E_{34} = \langle Q_1, Q_2, P_3, P_4 \rangle$$

$$E_{24} = \langle Q_1, Q_3, P_2, P_4 \rangle$$

$$E_{23} = \langle Q_1, Q_4, P_2, P_3 \rangle$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\xi_7 = \{E_1, E_{12}, E_{13}, E_{14}, E_{34}, E_{24}, E_{23}\}$ bir $(3, 1)$ -SCID tir (Eisfeld, J., 1999).

Örnek 4.8 de $PG(6, 2)$ projektif uzayında $(2, 0)$ -SCID yapısı kullanılarak $PG(2, 2)$ projektif düzlemi $PG(6, 2)$ projektif uzayında gömülü olarak elde edilmiştir.

Örnek 4.8 $P_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P_{12} = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P_{13} = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $P_{14} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $P_{23} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $P_{24} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $P_{34} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. $PG(6, 2)$ projektif uzayının yedi bağımsız noktası olsun. $E_1, E_2, \dots, E_7$ düzlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$E_1 = \langle P_{12}, P_{13}, P_{14} \rangle$$

$$E_2 = \langle P_{12}, P_{23}, P_{24} \rangle$$

$$E_3 = \langle P_{13}, P_{23}, P_{34} \rangle$$

$$E_4 = \langle P_{14}, P_{24}, P_{34} \rangle$$

$$E_5 = \langle P_0, P_{12}, P_{34} \rangle$$

$$E_6 = \langle P_0, P_{13}, P_{24} \rangle$$

$$E_7 = \langle P_0, P_{14}, P_{23} \rangle$$

Bu düzlemlerden herhangi ikisi $P_0, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ noktalarından bir tanesinde kesişir. $P_0, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ noktaları üç düzlem üzerinde bulunur. $E_1, E_2, \dots, E_7$ düzlemlerini doğru kümesi ve $P_0, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}$ noktalar kümesi olarak düşünülürse, bu yapı $PG(6, 2)$ projektif uzayında bir $PG(2, 2)$ yani Fano düzlemi yapısıdır (Beutelspacher vd., 1998).

Örnek 4.9 da $PG(13, 2)$ projektif uzayında $(5, 1)$ -SCID yapısı kullanılarak $PG(2, 2)$ projektif düzlemi $PG(13, 2)$ projektif uzayında gömülü olarak belirlenmiştir.

Örnek 4.9 $P_0, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{23}, P_{24}, P_{34}, Q_0, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}, Q_{23}, Q_{24}, Q_{34}, PG(13, 2)$ uzayının 14 bağımsız noktası olsun. $S_1, S_2, \dots, S_7$ Projektif 5-uzayları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle P_{12}, Q_{12}, P_{13}, Q_{13}, P_{14}, Q_{14} \rangle \\ S_2 &= \langle P_{12}, Q_{12}, P_{23}, Q_{23}, P_{24}, Q_{24} \rangle \\ S_3 &= \langle P_{13}, Q_{13}, P_{23}, Q_{23}, P_{34}, Q_{34} \rangle \\ S_4 &= \langle P_{14}, Q_{14}, P_{24}, Q_{24}, P_{34}, Q_{34} \rangle \\ S_5 &= \langle P_0, Q_0, P_{12}, Q_{12}, P_{34}, Q_{34} \rangle \\ S_6 &= \langle P_0, Q_0, P_{13}, Q_{13}, P_{24}, Q_{24} \rangle \\ S_7 &= \langle P_0, Q_0, P_{14}, Q_{14}, P_{23}, Q_{23} \rangle \end{aligned}$$

Bu 5-uzaylardan herhangi üç tanesi bir nokta doğru boyunca kesişir. Bu doğrular kümesi: $P_0Q_0, P_{12}Q_{12}, P_{13}Q_{13}, P_{14}Q_{14}, P_{23}Q_{23}, P_{24}Q_{24}, P_{34}Q_{34}$ tür. Herhangi bir $P_0Q_0, P_{12}Q_{12}, P_{13}Q_{13}, P_{14}Q_{14}, P_{23}Q_{23}, P_{24}Q_{24}, P_{34}Q_{34}$ doğrusu tam olarak 3 tane 5-uzay üzerinde bulunur. $S_1, S_2, \dots, S_7$ 5-uzayları doğrular kümesi ve $L = \{P_0Q_0, P_{12}Q_{12}, P_{13}Q_{13}, P_{14}Q_{14}, P_{23}Q_{23}, P_{24}Q_{24}, P_{34}Q_{34}\}$ doğrular kümesi noktalar kümesi olarak düşünülürse elde edilen yapı $PG(13, 2)$ projektif uzayında bir $PG(2, 2)$ yapısı yani Fano düzlemidir.

5. VERONESEAN DÖNÜŞÜM

Veronesean dönüşümlerin oldukça uzun ve zengin bir tarihi vardır. Bu dönüşümler herhangi bir cisim üzerinde tanımlanabilirler. Sonlu cisimlerde bazı teoremlerin ispatlanmasında oldukça önemli bir yer tutar. En basit Veronesean dönüşüm kuadrik Veronesean dönüşümdür, n . indexten Veronesean dönüşüm $\mathcal{V}_n$ biçiminde gösterilir. Kuadrik Veronesenler (Thas ve Maldeghem, 2003) ve (Thas ve Maldeghem, 2004) te karakterize edilmiştir. $PG(2, q)$ projektif düzleminden $PG(5, q)$ projektif uzayına tanımlanan kuadrik Veronesean dönüşüm bir $PG(2, q)$ projektif düzlemi üzerinde bir doğru üzerindeki noktaları $PG(5, q)$ projektif uzayının düzlemsel noktalarına dönüştürür. Kuadrik Veronesean $\mathcal{V}_2$ ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve değişik biçimlerde karakterize edilmiştir. $PG(n, q)$ projektif uzayının Veronesean dönüşümü $\mathcal{V}_n^{2^n}$ veya kısaca $\mathcal{V}_n$ biçiminde gösterilir. $n = 1$ için Veronesean dönüşüm $\mathcal{V}_1^2$ biçimindedir ve $PG(2, q)$ projektif düzleminin bir koniğidir. $n = 2$ için Veronesean dönüşüm $\mathcal{V}_2^4$ biçiminde gösterilir ve $PG(5, q)$ projektif uzayında 4. mertebeden bir yüzeydir. $n = 3$ için Veronesean dönüşüm $\mathcal{V}_3^8$, $PG(9, q)$ projektif uzayının 3 boyutlu ve mertebesi 8 olan bir yapısıdır. Projektif uzayların Lax Veronesean gömmeleri (Akça vd., 2012) de incelenmiştir.

5.1 Kuadrik Veronesean

Bu bölümde kuadrik Veronesean ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

$\mathcal{F}$ bir cisim, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $PG(n, \mathcal{F})$ nin bir elemanı olmak üzere: $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının Veronesean tipi kuadrikleri:

$$\mathcal{V} = \{P = (x_0^2, x_1^2, \dots, x_n^2, x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_0x_n, x_1x_2, \dots, x_1x_n, \dots, x_{n-1}x_n)\}$$

kümesidir ve kısaca projektif uzayının Kuadrik Veroneseanı denir.

$$\begin{aligned} \vartheta = PG(n, \mathcal{F}) &\rightarrow PG(N, \mathcal{F}), N = \frac{n(n+3)}{2}, n \geq 1 \\ P(x_0, x_1, \dots, x_n) &\rightarrow P(y_0y_0, y_1y_1, \dots, y_{n-1}y_n), y_{ij} = x_ix_j \end{aligned}$$

dönüşümüne Kuadrik Veronesean dönüşüm denir. Bu dönüşüm projektif uzayının noktalarını, kuadrik Veronesenlere birebir-örten olarak eşler (Thas ve Maldeghem, 2004). Yani $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarını $PG(N, \mathcal{F})$ projektif uzayının $P(y_0y_0, y_1y_1, \dots, y_{n-1}y_n)$ noktalarına eşler. Kuadrik Veronesean dönüşüm ile herhangi bir q . mertebeden bir projektif düzlem 5-boyutlu projektif uzaya

gömülebilmektedir. Bu dönüşüm:

$$\vartheta = PG(2, q) \rightarrow PG(5, q)$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$$

biçiminde tanımlıdır (Ekmekçi vd., 2017).

Teorem 5.1 $|V_n| = \vartheta(n)$ dir. Yani $\mathcal{V}_n$ kuadrik veroneseanların eleman sayısı $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının toplam nokta sayısı olan $\vartheta(n)$ dir. Özel olarak, $\mathcal{F} = GF(q)$ olmak üzere:
 $n = 1$ iken $|V_1| = q + 1$
 $n = 2$ iken $|V_2| = q^2 + q + 1$
 dir (Thas ve Maldeghem, 2003).

Teorem 5.2 Bir kuadrik Veronesean $\mathcal{V}_n$, $N = \frac{n(n+3)}{2}$ olmak üzere, $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının bir $\vartheta(n)$ -capidir. Yani bir kuadrik Veronesean $\mathcal{V}_n$ herhangi üçü doğrudaş olmayan $\vartheta(n)$ tane nokta kümesidir (Thas ve Maldeghem, 2003).

Teorem 5.3 $(u, v, w) \in GF(q)$ olmak üzere, $\mathcal{V}_2^4 = (X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$
 $= (u^2, uv, uw, w^2, vw, v^2)$ kuadrik Veroneseanı, $\mathcal{H}^5(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$
 $= X_0X_3 + X_1X_4 + X_2X_5 = 0$ denkleminde sahip olan Klein Kuadrik üzerine,
 $\Theta = (X_0, X_1, X_2, X_3, -X_4, X_5 - X_2)$ lineer dönüşümü ile gömülebilir (Cossidente vd., 1999).

Tanım 5.1

$$\theta : \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathcal{P}^9$$

$$\theta : (x_0, x_1, x_2) \rightarrow (x_0^3, x_1^3, x_2^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_2^2x_0, x_2x_0^2, x_0x_1x_2)$$

dönüşümüne düzlemin Kübik Veronesean dönüşümü denir (Klein vd., 2007).

5.2 Dik Kümeler

Bu bölümde $PG(3, 2)$ projektif uzayında dik kümeler tanımlanmış ve bu dik kümelerin kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntülerinin oluşturduğu projektif alt uzaylar kullanılarak SCID-(3, 0) geometrik yapısı elde edilmiştir.

$PG(V)$, d -boyutlu bir projektif uzay ve $e_i (0 \leq i \leq d)$, V nin bir tabanı olsun.

$PG(W), \binom{d+l+1}{l+1} - 1$ – boyutlu bir projektif uzay ve $e_{i_0 i_1 \dots i_l}$ ($0 \leq i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq d$), W nin bir tabanı olsun. $PG(V) \rightarrow PG(W)$ ye aşağıdaki dönüşüm tanımlansın:

$$\zeta : \left[\sum_{i=0}^d x_i e_i \right] \rightarrow \left[\sum_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_l \leq d} x_{i_0 i_1 \dots i_l} \right]$$

b ve B , V ve W nin skaler çarpma işlemini gösterebilir. Yani

$$b \left(\sum_{i=0}^d x_i e_i, \sum_{i=0}^d y_i e_i \right) = \sum_{i=0}^d x_i y_i$$

$$B \left(\sum_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_l \leq d} x_{i_0 i_1 \dots i_l} e_{i_0 i_1 \dots i_l}, \sum_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_l \leq d} y_{i_0 i_1 \dots i_l} e_{i_0 i_1 \dots i_l} \right) = \sum_{0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_l \leq d} x_{i_0 i_1 \dots i_l} y_{i_0 i_1 \dots i_l}$$

olsun. Her $x \in V$, için $x^\perp$, b ye göre x e dik olan V nin bir alt uzayını gösterebilir.

$$x^\perp = \{y \in V \mid b(x, y) = 0\}$$

$P(V)$ nin her $P = [x]$ noktası için $P(W)$ nin $D(P)$ alt uzayı:

$$D(P) = \{[z] \in W \mid B(z, \zeta(y)) = 0\}$$

$y \in x^\perp$ biçiminde tanımlıdır (Klein vd., 2009).

Şimdi dik kümeler yardımıyla $PG(3, 2)$ projektif uzayının kuadrik Veronesean dönüşümü kullanılarak $PG(9, 2)$ projektif uzayında SCID-(5, 3) yapısı elde edilecektir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayının kuadrik Veronesean dönüşümü:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(3, 2) &\rightarrow \mathcal{P}(9, 2) \\ [x_0, x_1, x_2, x_3] &\rightarrow [x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_0 x_1, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlıdır. Her $x \in \mathcal{P}(3, 2)$, $X^\perp$ kümesi 7 elemanlıdır. Bu Kuadrik Veronesean dönüşümü altında $PG(3, 2)$ projektif uzayının her noktası $X^\perp$ kümesini ve her $X^\perp$ kümeleri $PG(9, 2)$ projektif uzayında bir projektif 3-uzay tanımlar. $PG(3, 2)$ projektif uzayının dik kümeleri ve bu kümelerin oluşturduğu projektif 3-uzaylar aşağıdaki gibidir:

$$X_1 = (1, 0, 0, 0) \rightarrow$$

$$X_1^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$$

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0, 1) &\rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1, 0) &\rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 0, 0) &\rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 1, 0) &\rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
(0, 1, 0, 1) &\rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
(0, 0, 1, 1) &\rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
(0, 1, 1, 1) &\rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Bu noktaların $PG(9, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $x_1 = x_2 = x_3 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$ elde edilir. O halde π_1 uzayı aşağıdaki gibi bulunur:

$$\pi_1 = D([1, 0, 0, 0]) = \{(x_0, 0, 0, 0, x_4, x_5, x_6, 0, 0, 0) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}.$$

Diğer uzaylar için benzer işlemler yapılırsa:

$$X_2 = (0, 1, 0, 0) \rightarrow$$

$$X_2^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1)\}$$

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0, 1) &\rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1, 0) &\rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1, 1) &\rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
(1, 0, 0, 0) &\rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(1, 0, 0, 1) &\rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
(1, 0, 1, 0) &\rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
(1, 0, 1, 1) &\rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)
\end{aligned}$$

$$\pi_2 = D([0, 1, 0, 0]) = \{(0, x_1, 0, 0, x_4, 0, 0, x_7, x_8, 0) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_3 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow$$

$$X_3^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1)\}$$

$$\begin{aligned}
(0, 0, 0, 1) &\rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 0, 0) &\rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(1, 0, 0, 0) &\rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(1, 1, 0, 0) &\rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(1, 0, 0, 1) &\rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 0, 1) &\rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
(1, 1, 0, 1) &\rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)
\end{aligned}$$

$$\pi_3 = D([0, 0, 1, 0]) = \{(0, 0, x_2, 0, 0, x_5, 0, x_7, 0, x_9) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_4 = (0, 0, 0, 1) \rightarrow$$

$$X_4^\perp = \{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\}$$

$$(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$\pi_4 = D([0, 0, 0, 1]) = \{(0, 0, 0, x_3, 0, 0, x_6, 0, x_8, x_9) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_5 = (0, 0, 1, 1) \rightarrow$$

$$X_5^\perp = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_5 = D([0, 0, 1, 1]) = \{x_0 = x_1 = x_4 = 0, x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_6 = (0, 1, 0, 1) \rightarrow$$

$$X_6^\perp = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_6 = D([0, 1, 0, 1]) = \{x_0 = x_2 = x_5 = 0, x_4 + x_6 = 0, x_7 + x_9 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_7 = (1, 0, 0, 1) \rightarrow$$

$$X_7^\perp = \{(0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_7 = D([1, 0, 0, 1]) = \{x_0 = x_2 = x_7 = 0, x_4 + x_8 = 0, x_5 + x_9 = 0, x_0 + x_3 + x_6 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_8 = (1, 0, 1, 0) \rightarrow$$

$$X_8^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_8 = D([1, 0, 1, 0]) = \{x_1 = x_3 = x_8 = 0, x_4 + x_7 = 0, x_6 + x_9 = 0, x_0 + x_2 + x_5 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_9 = (1, 1, 0, 0) \rightarrow$$

$$X_9^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_9 = D([1, 1, 0, 0]) = \{x_2 = x_3 = x_9 = 0, x_5 + x_7 = 0, x_6 + x_8 = 0, x_0 + x_1 + x_4 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_{10} = (0, 1, 1, 0) \rightarrow$$

$$X_{10}^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$\pi_{10} = D([0, 1, 1, 0]) = \{x_0 = x_3 = x_6 = 0, x_4 + x_5 = 0, x_8 + x_9 = 0, x_1 + x_2 + x_7 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$x_{11} = (1, 1, 1, 0) \rightarrow$$

$$X_{11}^\perp = \{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\pi_{11} = D([1, 1, 1, 0]) = \{x_3 = 0, x_6 = x_8 = x_9, x_0 + x_1 + x_4$$

$$= x_0 + x_2 + x_5 = x_1 + x_2 + x_7 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_{12} = (1, 1, 0, 1) \rightarrow$$

$$X_{12}^\perp = \{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$$

$$(0, 0, 1, 0) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$\pi_{12} = D([1, 1, 0, 1]) = \{x_2 = 0, x_5 = x_7 = x_9, x_0 + x_3 + x_6 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, \\ x_0 + x_1 + x_4 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_{13} = (1, 0, 1, 1) \rightarrow$$

$$X_{13}^\perp = \{(0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)\}$$

$$(0, 1, 0, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$(1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$\pi_{13} = D([1, 0, 1, 1]) = \{x_1 = 0, x_4 = x_7 = x_8, x_0 + x_3 + x_6 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0, \\ x_0 + x_2 + x_5 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_{14} = (0, 1, 1, 1) \rightarrow$$

$$X_{14}^\perp = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}$$

$$(1, 0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 1, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$(1, 1, 0, 1) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(0, 0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$(1, 0, 1, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$\pi_{14} = D([0, 1, 1, 1]) = \{x_0 = 0, x_4 = x_5 = x_6, x_1 + x_2 + x_7 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_9 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$$

$$X_{15} = (1, 1, 1, 1) \rightarrow$$

$$X_{15}^\perp = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$$

$$\begin{aligned}
(1, 1, 1, 1) &\rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
(1, 1, 0, 0) &\rightarrow (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 0, 1, 1) &\rightarrow (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
(1, 0, 1, 0) &\rightarrow (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 0, 1) &\rightarrow (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
(1, 0, 0, 1) &\rightarrow (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
(0, 1, 1, 0) &\rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{15} &= D([1, 1, 1, 1]) = \{x_0 + x_1 + x_4 = 0, x_0 + x_2 + x_5 = 0, x_0 + x_3 + x_6 = 0, \\
x_1 + x_2 + x_7 &= 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.2 $\pi_1 = D([1, 0, 0, 0]) = \{(x_0, 0, 0, 0, x_4, x_5, x_6, 0, 0, 0) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ formundaki uzayların kümesini Π_1 ile gösterilsin. Π_1 kümesinin 15 elemanı vardır. Π_1 in herbir elemanı bir nokta olarak düşünülürse, Π_1 bir 3-uzaydır. Π_1 'e π_1 tarafından üretilen 3-uzay denir. Benzer biçimde $\pi_2, \dots, \pi_{15}$ tarafından üretilen 3-uzaylar $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{15}$ ile gösterilir.

Teorem 5.4 $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{15}$ 3-uzaylarından herhangi iki tanesi bir noktada kesişir yani, SCID-(3, 0) geometrik yapısını oluşturur ve bu 3-uzayların herhangi üçünün ortak bir noktası yoktur.

İspat 3 Π_1 projektif uzayı aşağıdaki gibi elde edilmiştir: $\pi_1 = D([1, 0, 0, 0]) = \{(x_0, 0, 0, 0, x_4, x_5, x_6, 0, 0, 0) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_1 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_1 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & 9. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 10. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 4. (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 12. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), & 13. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \\ 7. (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & 15. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 8. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

Benzer biçimde $\Pi_2, \dots, \Pi_{15}$ uzayları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\pi_2 = D([0, 1, 0, 0]) = \{(0, x_1, 0, 0, x_4, 0, 0, x_7, x_8, 0) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\} \text{ tarafından üretilen } \Pi_2$$

3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_2 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & 9. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\ 4. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), & 13. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0), & 14. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\ 7. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & 15. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_3 = D([0, 0, 1, 0]) = \{(0, 0, x_2, 0, 0, x_5, 0, x_7, 0, x_9) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_3 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_3 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 9. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 11. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 13. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 14. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\ 7. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 15. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_4 = D([0, 0, 0, 1]) = \{(0, 0, 0, x_3, 0, 0, x_6, 0, x_8, x_9) \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_4 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_4 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & 10. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & 11. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 14. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 15. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_5 = D([0, 0, 1, 1]) = \{x_0 = x_1 = x_4 = 0, x_5 + x_6 = x_7 + x_8 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0\} \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_5 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_5 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 9. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 2. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), & 12. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 5. (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0), & 13. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 6. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 14. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 15. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_6 = D([0, 1, 0, 1]) = \{x_0 = x_2 = x_5 = 0, x_4 + x_6 = 0, x_7 + x_9 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_6 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 2. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 3. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 12. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 14. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 7. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 15. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_7 = D([1, 0, 0, 1]) = \{x_0 = x_2 = x_7 = 0, x_4 + x_8 = 0, x_5 + x_9 = 0, x_0 + x_3 + x_6 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_7 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 2. (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & 10. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \\ 3. (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 12. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 6. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 7. (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 15. (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_8 = D([1, 0, 1, 0]) = \{x_1 = x_3 = x_8 = 0, x_4 + x_7 = 0, x_6 + x_9 = 0, x_0 + x_2 + x_5 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_8 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_8 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 9. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 2. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 10. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 12. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 5. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & 13. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 6. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 7. (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 15. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_9 = D([1, 1, 0, 0]) = \{x_2 = x_3 = x_9 = 0, x_5 + x_7 = 0, x_6 + x_8 = 0, x_0 + x_1 + x_4 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_9 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_9 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & 9. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 2. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & 10. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 12. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 5. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), & 13. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 6. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 7. (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 15. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{10} = D([0, 1, 1, 0]) = \{x_0 = x_3 = x_6 = 0, x_4 + x_5 = 0, x_8 + x_9 = 0, x_1 + x_2 + x_7 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{10} 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_{10} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & 9. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 2. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 11. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 12. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 13. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & 14. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 7. (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 15. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{11} = D([1, 1, 1, 0]) = \{x_3 = 0, x_6 = x_8 = x_9, x_0 + x_1 + x_4 = x_0 + x_2 + x_5 = x_1 + x_2 + x_7 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{11} 3-uzayı aşağıdaki

noktalara sahiptir:

$$\Pi_{11} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0), & 9. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 2. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 3. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), & 11. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 4. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 5. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 13. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0), & 14. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 7. (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 15. (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{12} = D([1, 1, 0, 1]) = \{x_2 = 0, x_5 = x_7 = x_9, x_0 + x_3 + x_6 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, x_0 + x_1 + x_4 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{12} 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_{12} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 2. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 3. (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), & 11. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 5. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0), & 13. (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 6. (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 14. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 7. (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 15. (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{13} = D([1, 0, 1, 1]) = \{x_1 = 0, x_4 = x_7 = x_8, x_0 + x_3 + x_6 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0, x_0 + x_2 + x_5 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{13} 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_{13} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 3. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), & 11. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0), & 12. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 5. (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 13. (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 6. (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 14. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 7. (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 15. (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{14} = D([0, 1, 1, 1]) = \{x_0 = 0, x_4 = x_5 = x_6, x_1 + x_2 + x_7 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{14} 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_{14} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 10. (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 3. (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), & 11. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0), & 12. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 5. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 13. (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 6. (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 14. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & 15. (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

$\pi_{15} = D([1, 1, 1, 1]) = \{x_0 + x_1 + x_4 = 0, x_0 + x_2 + x_5 = 0, x_0 + x_3 + x_6 = 0, x_1 + x_2 + x_7 = 0, x_1 + x_3 + x_8 = 0, x_2 + x_3 + x_9 = 0 \mid x_i \in \mathcal{F}_2\}$ tarafından üretilen Π_{15} 3-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

$$\Pi_{15} = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1), & 9. (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 2. (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1), & 10. (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 3. (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), & 11. (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\ 4. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0), & 12. (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0), & 13. (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\ 6. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), & 14. (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 7. (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1), & 15. (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ 8. (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

Elde edilen bu 15 uzayın arakesitleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
\Pi_1 \cap \Pi_2 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_6 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_7 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_8 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_9 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_{11} &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_{12} &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_1 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) & \Pi_1 \cap \Pi_{15} &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_5 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_6 &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_7 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_8 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_9 &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_{10} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_{11} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_{12} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0) & \Pi_2 \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) \\
\Pi_2 \cap \Pi_{15} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0) & \Pi_3 \cap \Pi_4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
\Pi_3 \cap \Pi_5 &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & \Pi_3 \cap \Pi_6 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
\Pi_3 \cap \Pi_7 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) & \Pi_3 \cap \Pi_8 &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\Pi_3 \cap \Pi_9 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) & \Pi_3 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_3 \cap \Pi_{11} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) & \Pi_3 \cap \Pi_{12} &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\
\Pi_3 \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) & \Pi_3 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
\Pi_3 \cap \Pi_{15} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) & \Pi_4 \cap \Pi_5 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
\Pi_4 \cap \Pi_6 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) & \Pi_4 \cap \Pi_7 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_4 \cap \Pi_8 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) & \Pi_4 \cap \Pi_9 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) \\
\Pi_4 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) & \Pi_4 \cap \Pi_{11} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\
\Pi_4 \cap \Pi_{12} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0) & \Pi_4 \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\
\Pi_4 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) & \Pi_4 \cap \Pi_{15} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\
\Pi_5 \cap \Pi_6 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) & \Pi_5 \cap \Pi_7 &= (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\
\Pi_5 \cap \Pi_8 &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) & \Pi_5 \cap \Pi_9 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\
\Pi_5 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) & \Pi_5 \cap \Pi_{11} &= (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\
\Pi_5 \cap \Pi_{12} &= (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) & \Pi_5 \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_5 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0) & \Pi_5 \cap \Pi_{15} &= (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\
\Pi_6 \cap \Pi_7 &= (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) & \Pi_6 \cap \Pi_8 &= (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\
\Pi_6 \cap \Pi_9 &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) & \Pi_6 \cap \Pi_{10} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \\
\Pi_6 \cap \Pi_{11} &= (0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) & \Pi_6 \cap \Pi_{12} &= (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \\
\Pi_6 \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) & \Pi_6 \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\
\Pi_6 \cap \Pi_{15} &= (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) & \Pi_7 \cap \Pi_8 &= (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\
\Pi_7 \cap \Pi_9 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) & \Pi_7 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_7 \cap \Pi_{11} &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) & \Pi_7 \cap \Pi_{12} &= (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\Pi_7 \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) & \Pi_7 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\
\Pi_7 \cap \Pi_{15} &= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) & \Pi_8 \cap \Pi_9 &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_8 \cap \Pi_{10} &= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) & \Pi_8 \cap \Pi_{11} &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_8 \cap \Pi_{12} &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) & \Pi_8 \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\
\Pi_8 \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) & \Pi_8 \cap \Pi_{15} &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\
\Pi_9 \cap \Pi_{10} &= (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) & \Pi_9 \cap \Pi_{11} &= (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) \\
\Pi_9 \cap \Pi_{12} &= (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) & \Pi_9 \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\
\Pi_9 \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) & \Pi_9 \cap \Pi_{15} &= (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) \\
\Pi_{10} \cap \Pi_{11} &= (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) & \Pi_{10} \cap \Pi_{12} &= (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\
\Pi_{10} \cap \Pi_{13} &= (0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) & \Pi_{10} \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\
\Pi_{10} \cap \Pi_{15} &= (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) & \Pi_{11} \cap \Pi_{12} &= (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\
\Pi_{11} \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) & \Pi_{11} \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\
\Pi_{11} \cap \Pi_{15} &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) & \Pi_{12} \cap \Pi_{13} &= (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\
\Pi_{12} \cap \Pi_{14} &= (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1) & \Pi_{12} \cap \Pi_{15} &= (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\
\Pi_{13} \cap \Pi_{14} &= (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) & \Pi_{13} \cap \Pi_{15} &= (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) \\
\Pi_{14} \cap \Pi_{15} &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Arakesit kümeleri incelendiğinde bu 15 uzayın herhangi üçünün ortak noktası olmadığı görülür.

$\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{15}$ uzaylarının herbirinin 14 noktası kesişim kümesinde yer alır. (x_0, x_1, x_2, x_3) , $PG(3, 2)$ projektif uzayının bir noktası olmak üzere, $(x_0, x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktası $D([x_0, x_1, x_2, x_3])$ tarafından üretilen Π_n 3-uzayının elemanıdır fakat bu nokta $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{15}$ 3-uzaylarının herhangi ikisinin kesişimi değildir.

5.3 Düzlemsel Arkların Kuadrik ve Kübik Veronesean Dönüşümlerle Gömülmesi

$PG(n, q)$, $GF(q)$ Galois cismi üzerinde n boyutlu bir projektif uzay olsun. $PG(n, q)$ projektif uzayında bir k -cap herhangi üçü doğrusal olmayan k tane nokta kümesidir. $PG(n, q)$ projektif uzayındaki k -cap, $PG(n, q)$ projektif uzayının bir $(k + 1)$ -cap i tarafından içerilmiyorsa $(k + 1)$ -cap a tamdır denir. Eğer $n = 2$ ise, k -cap, k -ark olarak isimlendirilir (Thas ve Maldeghem, 2004).

Tanım 5.3 *Bir $\mathcal{P}$ projektif düzleminin k -arkı, herhangi üçü doğrusal olmayan k tane nokta kümesidir (Thas ve Maldeghem, 2004).*

Teorem 5.5 $PG(2, q)$ projektif düzleminin 4-arklarının sayısı:

$$\frac{1}{4!}(q^2 + q + 1)(q^2 + q)q^2(q - 1)^2$$

dir. Fano düzleminin 7 tane 4-arkı vardır (Thas ve Maldeghem, 2004).

Fano düzleminin noktaları $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ ve $(1, 1, 1)$ dir. Fano düzleminin 7 tane 4-arkı vardır (Thas ve Maldeghem, 2004). Fano düzleminin 4-arkları aşağıdaki gibidir:

$$A1. \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$$

$$A2. \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$$

$$A3. \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$$

$$A4. \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$$

$$A5. \{(0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$$

$$A6. \{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$$

$$A7. \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

Teorem 5.6 $PG(2, q)$ projektif düzleminin 4-arklarının Kuadrik Veronesean altındaki görüntüleri bir doğru belirler. Bu doğrular $SCID - (1, -1)$ geometrik yapısını oluşturur.

İspat 4 Fano düzleminin 4-arkların, Kuadrik Veronesean altındaki görüntülerinin kümesi bulunursa:

$A1. \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $a = 0, b = d, c = e, f = 0$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[0, b, c, b, c, 0]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar:

$[0, 0, 1, 0, 1, 0]$, $[0, 1, 0, 1, 0, 0]$, $[0, 1, 1, 1, 1, 0]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülüğünde $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1, 1, 0)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_1 ile gösterilsin.

$$L_1 = \{(0, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 1, 0)\}$$

olarak hesaplanır.

A2. $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(0, 1, 1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $a = 0, c = 0, b = d = f$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[0, b, 0, b, e, b]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar: $[0, 0, 0, 0, 1, 0]$, $[0, 1, 0, 1, 1, 1]$, $[0, 1, 0, 1, 0, 1]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_2 ile gösterilsin.

$$L_2 = \{(0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 1)\}$$

olarak hesaplanır.

A3. $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(0, 1, 1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter

hesaplamalarla $c = 0, d = 0, a = e, b = f$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[a, b, 0, 0, a, b]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar: $[0, 1, 0, 0, 0, 1], [1, 1, 0, 0, 1, 1], [1, 0, 0, 0, 1, 0]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(0, 1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 0)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_3 ile gösterilsin.

$$L_3 = \{(0, 1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 0)\}$$

olarak hesaplanır.

A4. $\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

biçiminde elde edilir $(0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $b = 0, e = 0, a = d, c = f$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[a, 0, c, a, 0, c]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar: $[0, 0, 1, 0, 0, 1], [1, 0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 1, 1, 0, 1]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(0, 0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 1)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_4 ile gösterilsin.

$$L_4 = \{(0, 0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0, 1)\}$$

olarak hesaplanır.

A5. $\{(0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter

hesaplamalarla $a = 0, b = 0, c = e = f$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[0, 0, c, d, c, c]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar: $[0, 0, 1, 0, 1, 1], [0, 0, 1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 1, 0, 0]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_5 ile gösterilsin.

$$L_5 = \{(0, 0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 0, 0)\}.$$

olarak hesaplanır.

A6. $\{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ uzolsun. Elemanter hesaplamalarla $b = 0, c = 0, a = d = e$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ projektif uzayında $[a, 0, 0, a, a, f]$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki projektif 3-uzaylar: $[1, 0, 0, 1, 1, 0], [1, 0, 0, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 1]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(1, 0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_6 ile gösterilsin.

$$L_6 = \{(1, 0, 0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}.$$

olarak hesaplanır.

A7. $\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

biçiminde elde edilir. $(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarının $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f]$ olsun. Elemanter

hesaplamalarla $a = 0, b = 0, c = 0$ elde edilir. O halde bu 4 nokta $PG(5, 2)$ de $[0, 0, 0, d, e, f], d + e + f = 0$ 3-uzayını gererler. Bu formdaki üç projektif 3-uzaylar: $[0, 0, 0, 1, 1, 0], [0, 0, 0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 0, 1, 1]$ dir. Bu projektif 3-uzaylar nokta olarak düşünülürse $(0, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ noktaları lineer bağımlı olur. Bu noktaları üzerinde bulunduran doğru L_7 ile gösterilsin.

$$L_7 = \{(0, 0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1, 1)\}.$$

olarak hesaplanır.

Sonuç olarak $L_1, L_2, \dots, L_7$ doğrularının $SCID(1, -1)$ geometrik yapısını oluşturduğu, yani herhangi ikisinin ortak bir noktasının olmadığı elde edilmiştir.

Fano düzleminin 4-arklarının kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüleri $PG(9, 2)$ projektif uzayının noktalarına dönüşür ve her bir 4-ark $PG(9, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay üretir. Teorem 5.7 de bu projektif 5-uzayların $SCID-(5, 3)$ geometrik yapısı oluşturduğu ispatlanmıştır.

Teorem 5.7 Fano düzleminin 4-arklarının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntülerinin $PG(9, 2)$ projektif uzayında ürettiği projektif 5-uzaylar $SCID(5, 3)$ geometrik yapısı oluşturur.

İspat 5 Fano düzleminin 4-arklarının kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüleri hesaplanırsa:

$\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

şeklinde dir. $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktalarının $PG(9, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f, g, h, j, k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $a = 0, b = 0, c = 0, d + e + f + g + h + j + k = 0$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane

alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_1 ile gösterilsin. S_1 , projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) | 22.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1) | 43.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) |
| 2.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) | 23.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0) | 44.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) |
| 3.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) | 24.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0) | 45.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) |
| 4.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1) | 25.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) | 46.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0) |
| 5.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) | 26.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) | 47.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) |
| 6.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) | 27.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) | 48.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) |
| 7.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) | 28.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) | 49.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1) |
| 8.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) | 29.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0) | 50.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) |
| 9.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) | 30.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0) | 51.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) |
| 10.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0) | 31.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) | 52.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) |
| 11.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) | 32.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) | 53.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) |
| 12.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) | 33.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) | 54.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0) |
| 13.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1) | 34.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) | 55.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) |
| 14.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1) | 35.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) | 56.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1) |
| 15.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0) | 36.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) | 57.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0) |
| 16.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) | 37.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) | 58.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) |
| 17.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) | 38.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) | 59.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) |
| 18.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) | 39.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0) | 60.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) |
| 19.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1) | 40.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) | 61.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) |
| 20.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) | 41.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) | 62.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1) |
| 21.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1) | 42.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) | 63.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) |

$\{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

olarak elde edilir. $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktalarının $PG(9, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f, g, h, j, k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $a = 0, b = 0, h = c + e, j = c + g$ elde edilir. $PG(9, 2)$ projektif uzayının bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9, 2)$ projektif uzayının bir projektif 5-uzayı elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_2 ile gösterilsin. S_2 , projektif

5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) | 22.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0) | 43.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) |
| 2.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) | 23.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) | 44.(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) |
| 3.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) | 24.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0) | 45.(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) |
| 4.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) | 25.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) | 46.(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) |
| 5.(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) | 26.(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0) | 47.(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) |
| 6.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0) | 27.(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) | 48.(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1) |
| 7.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0) | 28.(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0) | 49.(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1) |
| 8.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) | 29.(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) | 50.(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) |
| 9.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0) | 30.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) | 51.(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) |
| 10.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0) | 31.(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0) | 52.(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1) |
| 11.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) | 32.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) | 53.(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1) |
| 12.(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0) | 33.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) | 54.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) |
| 13.(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0) | 34.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1) | 55.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1) |
| 14.(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) | 35.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) | 56.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) |
| 15.(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) | 36.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) | 57.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) |
| 16.(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) | 37.(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) | 58.(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) |
| 17.(0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) | 38.(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1) | 59.(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) |
| 18.(0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0) | 39.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) | 60.(0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1) |
| 19.(0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0) | 40.(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1) | 61.(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) |
| 20.(0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0) | 41.(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) | 62.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) |
| 21.(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0) | 42.(0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) | 63.(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1) |

$\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0, 1, 0) \rightarrow (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

olarak elde edilir. $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktalarının $PG(9, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f, g, h, j, k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $b = 0, c = 0, f = a + d, h = a + e$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzayı bir nokta olarak düşünülürse $PG(9, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_3 ile gösterilsin. S_3 projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1.(0,0,0,0,0,0,0,0,0,1) | 22.(0,0,0,0,0,0,1,0,1,1) | 43.(1,0,0,0,1,1,0,0,1,0) |
| 2.(0,0,0,0,0,0,0,0,1,0) | 23.(0,0,0,0,1,0,0,1,1,1) | 44.(1,0,0,1,1,0,0,0,0,0) |
| 3.(0,0,0,0,0,0,1,0,0,0) | 24.(0,0,0,0,1,0,1,1,0,1) | 45.(1,0,0,1,0,0,1,1,0,0) |
| 4.(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0) | 25.(0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) | 46.(1,0,0,1,0,0,0,1,1,0) |
| 5.(0,0,0,1,0,1,0,0,0,0) | 26.(0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) | 47.(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1) |
| 6.(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1) | 27.(0,0,0,1,1,1,1,1,0,1) | 48.(1,0,0,1,1,0,1,0,0,0) |
| 7.(0,0,0,0,0,0,1,0,0,1) | 28.(0,0,0,1,1,1,0,1,1,1) | 49.(1,0,0,1,1,0,0,0,1,0) |
| 8.(0,0,0,0,0,0,1,0,1,0) | 29.(0,0,0,1,0,1,1,0,1,1) | 50.(1,0,0,1,1,0,0,0,0,1) |
| 9.(0,0,0,0,1,0,0,1,0,1) | 30.(0,0,0,0,1,0,1,1,1,1) | 51.(1,0,0,1,0,0,1,1,1,0) |
| 10.(0,0,0,0,1,0,1,1,0,0) | 31.(0,0,0,1,1,1,1,1,1,1) | 52.(1,0,0,1,0,0,0,1,1,1) |
| 11.(0,0,0,0,1,0,0,1,1,0) | 32.(1,0,0,0,0,1,0,1,0,0) | 53.(1,0,0,1,0,0,1,1,0,1) |
| 12.(0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) | 33.(1,0,0,0,0,1,0,1,0,1) | 54.(1,0,0,0,0,1,1,1,1,1) |
| 13.(0,0,0,1,0,1,1,0,0,0) | 34.(1,0,0,0,0,1,0,1,1,0) | 55.(1,0,0,0,1,1,0,0,1,1) |
| 14.(0,0,0,1,0,1,0,0,1,0) | 35.(1,0,0,0,0,1,1,1,0,0) | 56.(1,0,0,0,1,1,1,0,0,1) |
| 15.(0,0,0,1,0,1,0,0,0,1) | 36.(1,0,0,0,1,1,0,0,0,0) | 57.(1,0,0,0,1,1,1,0,1,0) |
| 16.(0,0,0,1,1,1,1,1,0,0) | 37.(1,0,0,1,0,0,0,1,0,0) | 58.(1,0,0,1,1,0,1,0,1,0) |
| 17.(0,0,0,1,1,1,0,1,1,0) | 38.(1,0,0,0,0,1,0,1,1,1) | 59.(1,0,0,1,1,0,1,0,0,1) |
| 18.(0,0,0,1,1,1,0,1,0,1) | 39.(1,0,0,0,0,1,1,1,0,1) | 60.(1,0,0,1,1,0,0,0,1,1) |
| 19.(0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) | 40.(1,0,0,0,0,1,1,1,1,0) | 61.(1,0,0,1,0,0,1,1,1,1) |
| 20.(0,0,0,1,0,1,0,0,1,1) | 41.(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1) | 62.(1,0,0,0,1,1,1,0,1,1) |
| 21.(0,0,0,1,0,1,1,0,0,1) | 42.(1,0,0,0,1,1,1,0,0,0) | 63.(1,0,0,1,1,0,1,0,1,1) |

$\{(0,1,0), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0,1,0) \rightarrow (0,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$(0,1,1) \rightarrow (0,1,1,0,0,0,1,0,1,0)$$

$$(1,1,0) \rightarrow (1,1,0,1,0,1,0,0,0,0)$$

$$(1,1,1) \rightarrow (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$$

olarak elde edilir. $(0,1,0,0,0,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0,1,0,1,0), (1,1,0,1,0,1,0,0,0,0), (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ noktaların $PG(9,2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a,b,c,d,e,f,g,h,j,k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $b=0, c+g+j=0, a+d+f=0, e+h+k=0$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9,2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_4 ile gösterilsin. S_4 projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1.(0,0,0,0,0,0,0,1,0,1) | 22.(0,0,1,0,1,0,1,0,0,1) | 43.(1,0,0,1,0,0,1,1,1,1) |
| 2.(0,0,0,0,0,0,1,0,1,0) | 23.(0,0,1,0,1,0,1,1,0,0) | 44.(1,0,0,1,1,0,0,0,0,1) |
| 3.(0,0,0,0,0,0,1,1,1,1) | 24.(0,0,1,1,0,1,0,0,1,0) | 45.(1,0,0,1,1,0,0,1,0,0) |
| 4.(0,0,0,0,1,0,0,0,0,1) | 25.(0,0,1,1,0,1,0,1,1,1) | 46.(1,0,0,1,1,0,1,0,1,1) |
| 5.(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0) | 26.(0,0,1,1,0,1,1,0,0,0) | 47.(1,0,0,1,1,0,1,1,1,0) |
| 6.(0,0,0,0,1,0,1,0,1,1) | 27.(0,0,1,1,0,1,1,1,0,1) | 48.(1,0,1,0,0,1,0,0,1,0) |
| 7.(0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) | 28.(0,0,1,1,1,1,0,0,1,1) | 49.(1,0,1,0,0,1,0,1,1,1) |
| 8.(0,0,0,1,0,1,0,0,0,0) | 29.(0,0,1,1,1,1,0,1,1,0) | 50.(1,0,1,0,0,1,1,0,0,0) |
| 9.(0,0,0,1,0,1,0,1,0,1) | 30.(0,0,1,1,1,1,1,0,0,1) | 51.(1,0,1,0,0,1,1,1,0,1) |
| 10.(0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) | 31.(0,0,1,1,1,1,1,1,0,0) | 52.(1,0,1,0,1,1,0,0,1,1) |
| 11.(0,0,0,1,0,1,1,1,1,1) | 32.(1,0,0,0,0,1,0,0,0,0) | 53.(1,0,1,0,1,1,0,1,1,0) |
| 12.(0,0,0,1,1,1,0,0,0,1) | 33.(1,0,0,0,0,1,0,1,0,1) | 54.(1,0,1,0,1,1,1,0,0,1) |
| 13.(0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) | 34.(1,0,0,0,0,1,1,0,1,0) | 55.(1,0,1,0,1,1,1,1,0,0) |
| 14.(0,0,0,1,1,1,1,0,1,1) | 35.(1,0,0,0,0,1,1,1,1,1) | 56.(1,0,1,1,0,0,0,0,1,0) |
| 15.(0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) | 36.(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1) | 57.(1,0,1,1,0,0,0,1,1,1) |
| 16.(0,0,1,0,0,0,0,0,1,0) | 37.(1,0,0,0,1,1,0,1,0,0) | 58.(1,0,1,1,0,0,1,0,0,0) |
| 17.(0,0,1,0,0,0,0,1,1,1) | 38.(1,0,0,0,1,1,1,0,1,1) | 59.(1,0,1,1,0,0,1,1,0,1) |
| 18.(0,0,1,0,0,0,1,0,0,0) | 39.(1,0,0,0,1,1,1,1,1,0) | 60.(1,0,1,1,1,0,0,0,1,1) |
| 19.(0,0,1,0,0,0,1,1,0,1) | 40.(1,0,0,1,0,0,0,0,0,0) | 61.(1,0,1,1,1,0,0,1,1,0) |
| 20.(0,0,1,0,1,0,0,0,1,1) | 41.(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1) | 62.(1,0,1,1,1,0,1,0,0,1) |
| 21.(0,0,1,0,1,0,0,1,1,0) | 42.(1,0,0,1,0,0,1,0,1,0) | 63.(1,0,1,1,1,0,1,1,0,0) |

$\{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0,0,1) \rightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$(0,1,1) \rightarrow (0,1,1,0,0,0,1,0,1,0)$$

$$(1,0,1) \rightarrow (1,0,1,0,1,0,0,1,0,0)$$

$$(1,1,1) \rightarrow (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$$

olarak elde edilir: $(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0), (0,1,1,0,0,0,1,0,1,0), (1,0,1,0,1,0,0,1,0,0), (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ noktalarının $PG(9,2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a,b,c,d,e,f,g,h,j,k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $c=0, b+g+j=0, a+e+h=0, d+f+k=0$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9,2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_5 ile gösterilsin. S_5 projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1.(0,0,0,0,0,0,1,0,1,0) | 22.(0,1,0,0,1,1,0,1,1,1) | 43.(1,0,0,1,0,1,1,1,1,0) |
| 2.(0,0,0,0,0,1,0,0,0,1) | 23.(0,1,0,0,1,1,1,1,0,1) | 44.(1,0,0,1,1,0,0,0,0,1) |
| 3.(0,0,0,0,0,1,1,0,1,1) | 24.(0,1,0,1,0,0,0,0,1,1) | 45.(1,0,0,1,1,0,1,0,1,1) |
| 4.(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0) | 25.(0,1,0,1,0,0,1,0,0,1) | 46.(1,0,0,1,1,1,0,0,0,0) |
| 5.(0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) | 26.(0,1,0,1,0,1,0,0,1,0) | 47.(1,0,0,1,1,1,1,0,1,0) |
| 6.(0,0,0,0,1,1,0,1,0,1) | 27.(0,1,0,1,0,1,1,0,0,0) | 48.(1,1,0,0,0,0,0,1,1,0) |
| 7.(0,0,0,0,1,1,1,1,1,1) | 28.(0,1,0,1,1,0,0,1,1,1) | 49.(1,1,0,0,0,0,1,1,0,0) |
| 8.(0,0,0,1,0,0,0,0,0,1) | 29.(0,1,0,1,1,0,1,1,0,1) | 50.(1,1,0,0,0,1,0,1,1,1) |
| 9.(0,0,0,1,0,0,1,0,1,1) | 30.(0,1,0,1,1,1,0,1,1,0) | 51.(1,1,0,0,0,1,1,1,0,1) |
| 10.(0,0,0,1,0,1,0,0,0,0) | 31.(0,1,0,1,1,1,1,1,0,0) | 52.(1,1,0,0,1,0,0,0,1,0) |
| 11.(0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) | 32.(1,0,0,0,0,0,0,1,0,0) | 53.(1,1,0,0,1,0,1,0,0,0) |
| 12.(0,0,0,1,1,0,0,1,0,1) | 33.(1,0,0,0,0,0,1,1,1,0) | 54.(1,1,0,0,1,1,0,0,1,1) |
| 13.(0,0,0,1,1,0,1,1,1,1) | 34.(1,0,0,0,0,1,0,1,0,1) | 55.(1,1,0,0,1,1,1,0,0,1) |
| 14.(0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) | 35.(1,0,0,0,0,1,1,1,1,1) | 56.(1,1,0,1,0,0,0,1,1,1) |
| 15.(0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) | 36.(1,0,0,0,1,0,0,0,0,0) | 57.(1,1,0,1,0,0,1,1,0,1) |
| 16.(0,1,0,0,0,0,0,0,1,0) | 37.(1,0,0,0,1,0,1,0,1,0) | 58.(1,1,0,1,0,1,0,1,1,0) |
| 17.(0,1,0,0,0,0,1,0,0,0) | 38.(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1) | 59.(1,1,0,1,0,1,1,1,0,0) |
| 18.(0,1,0,0,0,1,0,0,1,1) | 39.(1,0,0,0,1,1,1,0,1,1) | 60.(1,1,0,1,1,0,0,0,1,1) |
| 19.(0,1,0,0,0,1,1,0,0,1) | 40.(1,0,0,1,0,0,0,1,0,1) | 61.(1,1,0,1,1,0,1,0,0,1) |
| 20.(0,1,0,0,1,0,0,1,1,0) | 41.(1,0,0,1,0,0,1,1,1,1) | 62.(1,1,0,1,1,1,0,0,1,0) |
| 21.(0,1,0,0,1,0,1,1,0,0) | 42.(1,0,0,1,0,1,0,1,0,0) | 63.(1,1,0,1,1,1,1,0,0,0) |

$\{(0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(0,0,1) \rightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$$

$$(0,1,1) \rightarrow (0,1,1,0,0,0,1,0,1,0)$$

$$(1,1,0) \rightarrow (1,1,0,1,0,1,0,0,0,0)$$

$$(1,0,0) \rightarrow (1,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$$

olarak elde edilir.. $(0,0,1,0,0,0,0,0,0,0)$, $(0,1,1,0,0,0,1,0,1,0)$, $(1,0,1,0,1,0,0,1,0,0)$, $(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$ noktalarının $PG(9,2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a,b,c,d,e,f,g,h,j,k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $c=0, b+g+j=0, a+e+h=0, d+f+k=0$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9,2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzay elde edilir Bu projektif 5-uzay S_6 ile gösterilsin. S_6 projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1) | 22.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) | 43.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0) |
| 2.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) | 23.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) | 44.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1) |
| 3.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) | 24.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) | 45.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) |
| 4.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1) | 25.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1) | 46.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0) |
| 5.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1) | 26.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0) | 47.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) |
| 6.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0) | 27.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0) | 48.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) |
| 7.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) | 28.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) | 49.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) |
| 8.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0) | 29.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) | 50.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0) |
| 9.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) | 30.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) | 51.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0) |
| 10.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) | 31.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) | 52.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) |
| 11.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) | 32.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0) | 53.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1) |
| 12.(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) | 33.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1) | 54.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0) |
| 13.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1) | 34.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) | 55.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) |
| 14.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0) | 35.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0) | 56.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) |
| 15.(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1) | 36.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) | 57.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) |
| 16.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) | 37.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) | 58.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0) |
| 17.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) | 38.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0) | 59.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) |
| 18.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0) | 39.(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) | 60.(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) |
| 19.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) | 40.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0) | 61.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) |
| 20.(0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) | 41.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) | 62.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0) |
| 21.(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1) | 42.(0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0) | 63.(0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) |

$\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ 4-arkının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsü:

$$(1, 0, 1) \rightarrow (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$(1, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$(1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

olarak elde edilir: $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktalarının $PG(9, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, c, d, e, f, g, h, j, k]$ olsun. Elemanter hesaplamalarla $c = 0, b + g + j = 0, a + e + h = 0, d + f + k = 0$ eşitlikleri elde edilir. Bu formda 63 tane alt uzay vardır. Bu 63 altuzay bir nokta olarak düşünülürse $PG(9, 2)$ projektif uzayında bir

projektif 5-uzay elde edilir. Bu projektif 5-uzay S_7 ile gösterilsin. S_7 projektif 5-uzayı aşağıdaki noktalara sahiptir:

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1.(0,0,0,0,0,0,0,0,1,1) | 22.(0,0,1,0,1,0,1,0,0,1) | 43.(0,1,0,1,0,0,1,0,1,0) |
| 2.(0,0,0,0,0,0,1,0,0,1) | 23.(0,0,1,0,1,0,1,0,1,0) | 44.(0,1,0,1,1,0,0,1,0,0) |
| 3.(0,0,0,0,0,0,1,0,1,0) | 24.(0,0,1,1,0,1,0,1,0,0) | 45.(0,1,0,1,1,0,0,1,1,1) |
| 4.(0,0,0,0,1,0,0,1,0,0) | 25.(0,0,1,1,0,1,0,1,1,1) | 46.(0,1,0,1,1,0,1,1,0,1) |
| 5.(0,0,0,0,1,0,0,1,1,1) | 26.(0,0,1,1,0,1,1,1,0,1) | 47.(0,1,0,1,1,0,1,1,1,0) |
| 6.(0,0,0,0,1,0,1,1,0,1) | 27.(0,0,1,1,0,1,1,1,1,0) | 48.(0,1,1,0,0,1,0,1,0,0) |
| 7.(0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) | 28.(0,0,1,1,1,1,0,0,0,0) | 49.(0,1,1,0,0,1,0,1,1,1) |
| 8.(0,0,0,1,0,1,0,0,0,0) | 29.(0,0,1,1,1,1,0,0,1,1) | 50.(0,1,1,0,0,1,1,1,0,1) |
| 9.(0,0,0,1,0,1,0,0,1,1) | 30.(0,0,1,1,1,1,1,0,0,1) | 51.(0,1,1,0,0,1,1,1,1,0) |
| 10.(0,0,0,1,0,1,1,0,0,1) | 31.(0,0,1,1,1,1,1,0,1,0) | 52.(0,1,1,0,1,1,0,0,0,0) |
| 11.(0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) | 32.(0,1,0,0,0,1,0,0,0,0) | 53.(0,1,1,0,1,1,0,0,1,1) |
| 12.(0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) | 33.(0,1,0,0,0,1,0,0,1,1) | 54.(0,1,1,0,1,1,1,0,0,1) |
| 13.(0,0,0,1,1,1,0,1,1,1) | 34.(0,1,0,0,0,1,1,0,0,1) | 55.(0,1,1,0,1,1,1,0,1,0) |
| 14.(0,0,0,1,1,1,1,1,0,1) | 35.(0,1,0,0,0,1,1,0,1,0) | 56.(0,1,1,1,0,0,0,1,0,0) |
| 15.(0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) | 36.(0,1,0,0,1,1,0,1,0,0) | 57.(0,1,1,1,0,0,0,1,1,1) |
| 16.(0,0,1,0,0,0,0,1,0,0) | 37.(0,1,0,0,1,1,0,1,1,1) | 58.(0,1,1,1,0,0,1,1,0,1) |
| 17.(0,0,1,0,0,0,0,1,1,1) | 38.(0,1,0,0,1,1,1,1,0,1) | 59.(0,1,1,1,0,0,1,1,1,0) |
| 18.(0,0,1,0,0,0,1,1,0,1) | 39.(0,1,0,0,1,1,1,1,1,0) | 60.(0,1,1,1,1,0,0,0,0,0) |
| 19.(0,0,1,0,0,0,1,1,1,0) | 40.(0,1,0,1,0,0,0,0,0,0) | 61.(0,1,1,1,1,0,0,0,1,1) |
| 20.(0,0,1,0,1,0,0,0,0,0) | 41.(0,1,0,1,0,0,0,0,1,1) | 62.(0,1,1,1,1,0,1,0,0,1) |
| 21.(0,0,1,0,1,0,0,0,1,1) | 42.(0,1,0,1,0,0,1,0,0,1) | 63.(0,1,1,1,1,0,1,0,1,0) |

Elde edilen bu uzayların ara kesitleri hesaplanırsa; S_1 ve S_2 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzaylarda kesişirler:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1), & 14. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 7. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & 15. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) & \end{array} \right\}$$

S_1 ve S_3 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_1 \cap S_3 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 11. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1), & 14. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

S_1 ve S_4 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_1 \cap S_4 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), & 10. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 14. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 15. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

S_1 ve S_5 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_1 \cap S_5 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 13. (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1), & 14. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 7. (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), & 15. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

S_1 ve S_6 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_1 \cap S_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1), & 10. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1), & 14. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

S_1 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_1 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1), & 9. (0,0,0,1,0,1,0,0,1,1) \\ 2. (0,0,0,0,0,0,1,0,0,1), & 10. (0,0,0,1,0,1,1,0,0,1) \\ 3. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 11. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) \\ 4. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 12. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) \\ 5. (0,0,0,0,1,0,0,1,1,1), & 13. (0,0,0,1,1,1,0,1,1,1) \\ 6. (0,0,0,0,1,0,1,1,0,1), & 14. (0,0,0,1,1,1,1,1,0,1) \\ 7. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0), & 15. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 8. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & \end{array} \right\}$$

S_2 ve S_3 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_2 \cap S_3 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1), & 9. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) \\ 2. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 10. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,1) \\ 3. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & 11. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) \\ 4. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 12. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 5. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,1), & 13. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,1) \\ 6. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0), & 14. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,1) \\ 7. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,1), & 15. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,1) \\ 8. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,1), & \end{array} \right\}$$

S_2 ve S_4 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_2 \cap S_4 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 9. (0,0,1,0,0,0,1,1,0,1) \\ 2. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 10. (0,0,1,0,1,0,0,0,1,1) \\ 3. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0), & 11. (0,0,1,0,1,0,1,0,0,1) \\ 4. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & 12. (0,0,1,1,0,1,0,1,1,1) \\ 5. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0), & 13. (0,0,1,1,0,1,1,1,0,1) \\ 6. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0), & 14. (0,0,1,1,1,1,0,0,1,1) \\ 7. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0), & 15. (0,0,1,1,1,1,1,0,0,1) \\ 8. (0,0,1,0,0,0,0,1,1,1), & \end{array} \right\}$$

S_2 ve S_5 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_2 \cap S_5 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 9. (0,0,0,1,0,0,1,0,1,1) \\ 2. (0,0,0,0,0,1,0,0,0,1), & 10. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0) \\ 3. (0,0,0,0,0,1,1,0,1,1), & 11. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) \\ 4. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 12. (0,0,0,1,1,0,0,1,0,1) \\ 5. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0), & 13. (0,0,0,1,1,0,1,1,1,1) \\ 6. (0,0,0,0,1,1,0,1,0,1), & 14. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) \\ 7. (0,0,0,0,1,1,1,1,1,1), & 15. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 8. (0,0,0,1,0,0,0,0,0,1), & \end{array} \right\}$$

S_2 ve S_6 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_2 \cap S_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), & 9. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1), & 11. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 12. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) \\ 5. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1), & 13. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 14. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \\ 7. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1), & 15. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 8. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & \end{array} \right\}$$

S_2 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_2 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 11. (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 14. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

S_3 ve S_4 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_3 \cap S_4 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 9. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 10. (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 11. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 12. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 8. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

S_3 ve S_5 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_3 \cap S_5 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 9. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 10. (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 11. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 12. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 14. (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1) \\ 8. (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1), & \end{array} \right\}$$

S_3 ve S_6 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_3 \cap S_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,0,0,0,1), & 9. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) \\ 2. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 10. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,1) \\ 3. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & 11. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) \\ 4. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 12. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 5. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,1), & 13. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,1) \\ 6. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0), & 14. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,1) \\ 7. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,1), & 15. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,1) \\ 8. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,1), & \end{array} \right\}$$

S_3 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_3 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 9. (0,0,0,1,0,1,0,0,1,1) \\ 2. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & 10. (0,0,0,0,1,0,0,1,1,1) \\ 3. (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1), & 11. (0,0,0,0,1,0,1,1,0,1) \\ 4. (0,0,0,0,0,0,1,0,0,1), & 12. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0) \\ 5. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 13. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 6. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0), & 14. (0,0,0,1,1,1,1,1,0,1) \\ 7. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,1), & 15. (0,0,0,1,1,1,0,1,1,1) \\ 8. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0), & \end{array} \right\}$$

S_4 ve S_5 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_4 \cap S_5 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 9. (1,0,0,0,0,1,1,1,1,1) \\ 2. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 10. (1,0,0,0,1,1,0,0,0,1) \\ 3. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0), & 11. (1,0,0,0,1,1,1,0,1,1) \\ 4. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & 12. (1,0,0,1,0,0,0,1,0,1) \\ 5. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0), & 13. (1,0,0,1,0,0,1,1,1,1) \\ 6. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0), & 14. (1,0,0,1,1,0,0,0,0,1) \\ 7. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0), & 15. (1,0,0,1,1,0,1,0,1,1) \\ 8. (1,0,0,0,0,1,0,1,0,1), & \end{array} \right\}$$

S_4 ve S_6 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_4 \cap S_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0,0,0,0,0,0,0,1,0,1), & 9. (0,0,0,1,0,1,0,1,0,1) \\ 2. (0,0,0,0,0,0,1,0,1,0), & 10. (0,0,0,1,0,1,1,0,1,0) \\ 3. (0,0,0,0,0,0,1,1,1,1), & 11. (0,0,0,1,0,1,1,1,1,1) \\ 4. (0,0,0,0,1,0,0,0,0,1), & 12. (0,0,0,1,1,1,0,0,0,1) \\ 5. (0,0,0,0,1,0,0,1,0,0), & 13. (0,0,0,1,1,1,0,1,0,0) \\ 6. (0,0,0,0,1,0,1,0,1,1), & 14. (0,0,0,1,1,1,1,0,1,1) \\ 7. (0,0,0,0,1,0,1,1,1,0), & 15. (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0) \\ 8. (0,0,0,1,0,1,0,0,0,0), & \end{array} \right\}$$

S_4 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki 3-uzayda kesişir:

$$S_4 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 11. (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 14. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 8. (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

S_5 ve S_6 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_5 \cap S_6 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 11. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 14. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

S_5 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_5 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 9. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 11. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 13. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 14. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

S_6 ve S_7 projektif 5-uzayları $PG(9, 2)$ projektif uzayında aşağıdaki projektif 3-uzayda kesişir:

$$S_6 \cap S_7 = \left\{ \begin{array}{ll} 1. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), & 9. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) \\ 2. (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0), & 10. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\ 3. (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0), & 11. (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1) \\ 4. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & 12. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \\ 5. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), & 13. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1) \\ 6. (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0), & 14. (0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1) \\ 7. (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0), & 15. (0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) \\ 8. (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1), & \end{array} \right\}$$

projektif 3- uzayları elde edilmiş olur.

Sonuç olarak Fano düzleminin 4-arklarının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntülerinin $PG(9, 2)$ projektif uzayında ürettiği projektif 5-uzaylar $SCID(5, 3)$ geometrik yapısını oluşturur.

Teorem 5.8 $PG(9, 2)$ projektif uzayında Fano düzleminin 4-arklarının Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntülerinin ürettiği projektif 5-uzaylar bir düzlem boyunca kesişir.

İspat 6 $S_1, S_2, \dots, S_7$ projektif 5-uzaylarının kesişim noktaları aşağıdaki gibidir:

$$N_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$N_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$N_4 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$N_5 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$$

$$N_6 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$$

$$N_7 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$d_1, d_2, \dots, d_7$ doğruları ve üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$d_1 : \{N_1, N_2, N_4\} \quad d_2 : \{N_1, N_3, N_6\} \quad d_3 : \{N_1, N_5, N_7\}$$

$$d_4 : \{N_2, N_3, N_5\} \quad d_5 : \{N_2, N_6, N_7\} \quad d_6 : \{N_3, N_4, N_7\}$$

$$d_7 : \{N_4, N_5, N_6\}$$

Teorem 5.9 da $PG(2, 2)$ projektif düzleminin 4-arklarının Kuadrik Veronesean altındaki görüntülerinin $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzaylar ve SCID yapısı verilmektedir.

Teorem 5.9 $PG(2, 2)$ projektif düzleminin 4-arklarının Kuadrik Veronesean altındaki görüntüleri $PG(5, 2)$ projektif uzayında bir projektif 3-uzay gerer. Bu projektif 3-uzaylar $SCID - (3, 1)$ geometrik yapısı oluşturur.

İspat 7 $PG(2, 2)$ projektif düzleminin 4 arklarının Kuadrik Veronesean altındaki görüntüleri hesaplanırsa;

$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[0, b, c, b, c, 0]$, $(b, c \in \mathcal{F}_2)$ olsun. Bu

projektif uzay S_1 ile gösterilsin. S_1 in noktaları aşağıdaki gibidir:

1.(0, 0, 1, 0, 1, 0)	6.(0, 1, 0, 1, 0, 1)	11.(1, 0, 0, 0, 0, 0)
2.(0, 1, 0, 1, 0, 0)	7.(0, 1, 1, 1, 1, 1)	12.(1, 0, 0, 0, 0, 1)
3.(0, 1, 1, 1, 1, 0)	8.(1, 0, 1, 0, 1, 0)	13.(1, 0, 1, 0, 1, 1)
4.(0, 0, 0, 0, 0, 1)	9.(1, 1, 0, 1, 0, 0)	14.(1, 1, 0, 1, 0, 1)
5.(0, 0, 1, 0, 1, 1)	10.(1, 1, 1, 1, 1, 0)	15.(1, 1, 1, 1, 1, 1)

$\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[0, b, 0, b, e, b]$, $(b, e \in \mathcal{F}_2)$ olsun. Bu projektif uzay S_2 ile gösterilsin. S_2 nin noktaları aşağıdaki gibidir:

1.(0, 1, 0, 1, 0, 0)	6.(0, 1, 1, 0, 0, 1)	11.(1, 0, 0, 1, 0, 1)
2.(0, 1, 0, 0, 0, 1)	7.(0, 0, 1, 1, 0, 1)	12.(1, 0, 1, 0, 0, 0)
3.(0, 0, 0, 1, 0, 1)	8.(1, 0, 0, 0, 0, 0)	13.(1, 1, 1, 1, 0, 0)
4.(0, 0, 1, 0, 0, 0)	9.(1, 1, 0, 1, 0, 0)	14.(1, 1, 1, 0, 0, 1)
5.(0, 1, 1, 1, 0, 0)	10.(1, 1, 0, 0, 0, 1)	15.(1, 0, 1, 1, 0, 1)

$\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, b, 0, 0, a, b]$, $(a, b \in \mathcal{F}_2)$ olsun. Bu projektif uzay S_3 ile gösterilsin. S_3 ün noktaları aşağıdaki gibidir:

1.(0, 1, 0, 0, 0, 1)	6.(1, 0, 0, 1, 1, 0)	11.(1, 1, 1, 0, 1, 1)
2.(1, 0, 0, 0, 1, 0)	7.(1, 1, 0, 1, 1, 1)	12.(0, 0, 1, 1, 0, 0)
3.(1, 1, 0, 0, 1, 1)	8.(0, 0, 1, 0, 0, 0)	13.(0, 1, 1, 1, 0, 1)
4.(0, 0, 0, 1, 0, 0)	9.(0, 1, 1, 0, 0, 1)	14.(1, 0, 1, 1, 1, 0)
5.(0, 1, 0, 1, 0, 1)	10.(1, 0, 1, 0, 1, 0)	15.(1, 1, 1, 1, 1, 1)

$\{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, 0, c, a, 0, c]$, $(a, c \in \mathcal{F}_2)$ olsun. Bu projektif uzay S_4 ile gösterilsin. S_4 ün noktaları aşağıdaki gibidir:

1.(0, 0, 0, 0, 1, 0)	6.(0, 1, 1, 0, 0, 1)	11.(1, 1, 0, 1, 1, 0)
2.(0, 1, 0, 0, 0, 0)	7.(0, 1, 1, 0, 1, 1)	12.(1, 0, 1, 1, 0, 1)
3.(0, 1, 0, 0, 1, 0)	8.(1, 0, 0, 1, 0, 0)	13.(1, 0, 1, 1, 1, 1)
4.(0, 0, 1, 0, 0, 1)	9.(1, 0, 0, 1, 1, 0)	14.(1, 1, 1, 1, 0, 1)
5.(0, 0, 1, 0, 1, 1)	10.(1, 1, 0, 1, 0, 0)	15.(1, 1, 1, 1, 1, 1)

$\{(0, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[0, 0, c, d, c, c]$, $(c, d \in \mathcal{F}_2)$ olsun.

Bu projektif uzay S_5 ile gösterilsin. S_5 in noktaları aşağıdaki gibidir:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1.(0, 0, 0, 0, 1, 1) | 6.(0, 1, 1, 0, 0, 1) | 11.(1, 0, 0, 0, 0, 0) |
| 2.(0, 0, 1, 0, 0, 1) | 7.(0, 1, 1, 0, 1, 0) | 12.(1, 1, 0, 0, 1, 1) |
| 3.(0, 0, 1, 0, 1, 0) | 8.(1, 0, 0, 0, 1, 1) | 13.(1, 1, 1, 0, 0, 1) |
| 4.(0, 1, 0, 0, 0, 0) | 9.(1, 0, 1, 0, 0, 1) | 14.(1, 1, 1, 0, 1, 0) |
| 5.(0, 1, 0, 0, 1, 1) | 10.(1, 0, 1, 0, 1, 0) | 15.(1, 1, 0, 0, 0, 0) |

$\{(0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[a, 0, 0, a, a, f]$, $(a, f \in \mathcal{F}_2)$ olsun.

Bu projektif uzay S_6 ile gösterilsin. S_6 nin noktaları aşağıdaki gibidir:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1.(1, 0, 0, 1, 0, 0) | 6.(1, 0, 1, 0, 1, 0) | 11.(0, 1, 0, 0, 0, 0) |
| 2.(1, 0, 0, 0, 1, 0) | 7.(1, 0, 1, 1, 0, 0) | 12.(0, 1, 1, 1, 1, 0) |
| 3.(0, 0, 0, 1, 1, 0) | 8.(0, 1, 0, 1, 1, 0) | 13.(1, 1, 1, 0, 1, 0) |
| 4.(0, 0, 1, 0, 0, 0) | 9.(1, 1, 0, 0, 1, 0) | 14.(1, 1, 1, 1, 0, 0) |
| 5.(0, 0, 1, 1, 1, 0) | 10.(1, 1, 0, 1, 0, 0) | 15.(0, 1, 1, 0, 0, 0) |

$\{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ 4-arkının kuadrik Veronesean dönüşümü altındaki görüntüsünün $PG(5, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $[0, 0, 0, d, e, f]$, $(d + e + f = 0, d, e, f \in \mathcal{F}_2)$ 3-olsun. Bu projektif uzay S_7 ile gösterilsin. S_7 nin noktaları aşağıdaki gibidir:

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1.(0, 0, 0, 1, 1, 1) | 6.(1, 0, 0, 0, 0, 0) | 11.(1, 0, 1, 1, 1, 1) |
| 2.(0, 0, 1, 0, 0, 0) | 7.(1, 0, 0, 1, 1, 1) | 12.(1, 1, 0, 0, 0, 0) |
| 3.(0, 0, 1, 1, 1, 1) | 8.(0, 1, 1, 0, 0, 0) | 13.(1, 1, 0, 1, 1, 1) |
| 4.(0, 1, 0, 0, 0, 0) | 9.(0, 1, 1, 1, 1, 1) | 14.(1, 1, 1, 0, 0, 0) |
| 5.(0, 1, 0, 1, 1, 1) | 10.(1, 0, 1, 0, 0, 0) | 15.(1, 1, 1, 1, 1, 1) |

Elde edilen projektif 3-uzayların kesişim doğruları aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
S_1 \cap S_2 &= \{(0, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\
S_1 \cap S_3 &= \{(0, 1, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\} \\
S_1 \cap S_4 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\} \\
S_2 \cap S_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0)\} \\
S_1 \cap S_6 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0)\} \\
S_1 \cap S_7 &= \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\
S_2 \cap S_3 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0)\} \\
S_2 \cap S_4 &= \{(1, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 1)\} \\
S_2 \cap S_5 &= \{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 1)\} \\
S_2 \cap S_6 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0, 0)\} \\
S_2 \cap S_7 &= \{(1, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0)\} \\
S_3 \cap S_4 &= \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 1, 0)\} \\
S_3 \cap S_5 &= \{(1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \\
S_3 \cap S_6 &= \{(1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0)\} \\
S_3 \cap S_7 &= \{(1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1, 1)\} \\
S_4 \cap S_5 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 1)\} \\
S_4 \cap S_6 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 0, 0)\} \\
S_4 \cap S_7 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1, 1)\} \\
S_5 \cap S_6 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 1, 0)\} \\
S_5 \cap S_7 &= \{(0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 0)\} \\
S_6 \cap S_7 &= \{(0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0)\}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $PG(2, 2)$ projektif düzleminin 4-arklarının Kuadrik Veronesean altındaki görüntülülere $PG(5, 2)$ projektif uzayında bir projektif 3-uzay gerer. Bu projektif 3-uzaylar $SCID - (3, 1)$ geometrik yapısı oluşturur.

5.4 PG(8,2) Uzayındaki Projektif Uzaylar

Bu bölümde $GF(2)$ Galois cismi üzerinde, $PG(3, 2)$ projektif uzayının her bir doğrusu üzerindeki noktalar kümesini $PG(9, 2)$ projektif uzayının düzlemsel noktalar kümesine eşleyen, düzlemsel noktaları 5-uzaylara eşleyen, $PG(3, 2)$ projektif uzayından $PG(9, 2)$ projektif uzayına tanımlı Veronesean dönüşümün görüntüsü $PG(9, 2)$ projektif uzayını üretir. Bu bölümde, $PG(9, 2)$ projektif uzayındaki $PG(3, 2)$ projektif uzayının Kuadrik

Veroneseanları ile $PG(9, 2)$ projektif uzayının Veroneseanlarla üretilen altuzaylarının izdüşümleri arasında ilişki kullanılarak $PG(8, 2)$ projektif uzaydaki $PG(3, 2)$ projektif uzayının varlığı incelenmiştir.

Teorem 5.10 $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının herhangi bir s -boyutlu altuzayı π_s olsun. Veronesean dönüşüm altında π_s nin görüntüsü $\mathcal{V}_s$ kuadrik Veroneseanıdır. $\mathcal{V}_s, \mathcal{V}_s$ yi içeren $PG = \left(\frac{n(n+3)}{2}, \mathcal{F}\right)$ projektif uzayı ile $\mathcal{V}_n$ kuadrik veroneseanın arakesitidir. Özel olarak, $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının doğruları Veronesean dönüşüm altında $\mathcal{V}_n$ nin koniklerine dönüşür (Thas ve Maldeghem, 2003).

Teorem 5.11 $\mathcal{V}_n$ kuadrik Veroneseanının herhangi iki noktası $\mathcal{V}_n$ nin bir tek koniğinde içerilir (Thas ve Maldeghem, 2003).

Teorem 5.12 $\mathcal{F} = GF(q)$ olmak üzere $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayında $\mathcal{V}_n$ kuadrik Veroneseanı $\Theta(s, n, q)$ tane $\mathcal{V}_s$ kuadrik Veronesean içerir. $\mathcal{V}_n$ Veroneseanındaki $\mathcal{V}_s$ kuadrik Veroneseanlarının sayısı, $PG(n, q)$ projektif uzayındaki s -boyutlu altuzayların sayısı kadardır.

Özel olarak, $n = 2$ iken $PG(5, q)$ projektif uzayındaki $\mathcal{V}_2^4$ kuadrik Veroneseanında $s = 1$ iken $q^2 + q + 1$ tane $\mathcal{V}_1^2$ Veronesean (konik) vardır. $\mathcal{V}_2^4$ nin herhangi iki noktası bu $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseandan sadece birinin üzerindedir. $\mathcal{V}_2^4$ nin $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseanları $PG(2, q)$ projektif düzleminin doğrularıyla eşleştigiinden, bu koniklerin herhangi ikisi bir tek ortak noktaya sahiptir. $\mathcal{V}_2^4$ kuadrik Veroneseanının hiper düzlemsel kesitleri $PG(2, q)$ projektif düzleminin kuadriklerine karşılık gelir. $PG(2, q)$ projektif düzleminin bir q kuadriği bir doğru olarak ele alınacaksa, bu $PG(5, q)$ projektif uzayının hiperdüzleminin $\mathcal{V}_2^4$ ile bir $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseanda kesişmesine karşılık gelmesidir. Eğer q iki farklı doğru ise hiper düzlem $\mathcal{V}_2^4$ 'ü bir tek ortak noktaya sahip olan iki $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseanda kesişir. $PG(5, q)$ projektif uzayının düzlemleri $\mathcal{V}_2^4$ ü bir $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseanda (konikte) keser, bu düzlemlere konik düzlemleri denir (Thas ve Maldeghem, 2003).

Teorem 5.13 $PG(4, 4)$ projektif uzayında $PG(2, 4)$ projektif düzlemine izomorf olan P 4.mertebeden projekif düzlemi vardır, öyleki: $N' \subset PG(4, 4), \langle N' \rangle = PG(4, 4)$ ve D' nin her bir elemanı $PG(4, 4)$ projektif uzayının konik düzleminin bir altkümesidir (Ekmekçi vd., 2016).

Teorem 5.14 Kuadrik Veroneseanların mertebesi 2^n dir (Thas ve Maldeghem, 2003).

Özel olarak $n = 3$ iken Kuadrik Veronesean $PG(9, 2)$ projektif uzayında mertebesi 8 ve boyutu 3 olan $\mathcal{V}_3^8$ yapısıdır.

Teorem 5.15 $PG(n, \mathcal{F})$ projektif uzayının herhangi bir s -boyutlu alt uzayı Π_s olsun. Veronesean dönüşüm altında Π_s in görüntüsü $\mathcal{V}_s$ kuadrik Veroneseandır. $\mathcal{V}_s$, $\mathcal{V}_s$ yi içeren $PG\left(\frac{s(s+3)}{2}, \mathcal{F}\right)$ projektif uzayı ile $\mathcal{V}_n$ kuadrik Veroneseanın arakesitidir.

Özel olarak $n = 3$ ve $s = 1$ iken $PG(3, 2)$ projektif uzayının doğruları Veronesean dönüşüm altında $\mathcal{V}_3$ ün koniklerine (konik düzlemlerine) dönüşür. $n = 3$ ve $s = 2$ iken $PG(3, 2)$ projektif uzayının düzlemleri Veronesean dönüşüm altında $\mathcal{V}_3$ ün 5- boyutlu konik uzaylarına dönüşür.

Bu kısımda $PG(9, 2)$ projektif uzayındaki $PG(3, 2)$ projektif uzayının Kuadrik Veroneseanları ile $PG(9, 2)$ projektif uzayının Veroneseanlarla üretilen altuzaylarının izdüşümleri arasında ilişki kullanılarak $PG(8, 2)$ projektif uzayındaki $PG(3, 2)$ projektif uzayının varlığı incelenecektir.

$GF(2)$ cismiyle koordinatlanan $PG(3, 2)$ projektif uzayının noktaları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{lll} N_1 = (0, 0, 0, 1) & N_6 = (0, 1, 1, 0) & N_{11} = (1, 0, 1, 1) \\ N_2 = (0, 1, 0, 0) & N_7 = (0, 1, 1, 1) & N_{12} = (1, 1, 0, 0) \\ N_3 = (0, 1, 0, 1) & N_8 = (1, 1, 1, 0) & N_{13} = (1, 1, 0, 1) \\ N_4 = (0, 0, 1, 0) & N_9 = (1, 1, 1, 1) & N_{14} = (1, 0, 0, 0) \\ N_5 = (0, 0, 1, 1) & N_{10} = (1, 0, 1, 0) & N_{15} = (1, 0, 0, 1) \end{array}$$

$PG(3, 2)$ projektif uzayının 35 doğrusu vardır ve bu doğrular ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{N_1, N_4, N_5\} & L_2 &= \{N_1, N_2, N_3\} & L_3 &= \{N_1, N_6, N_7\} \\
L_4 &= \{N_1, N_{14}, N_{15}\} & L_5 &= \{N_1, N_{10}, N_{11}\} & L_6 &= \{N_1, N_{12}, N_{13}\} \\
L_7 &= \{N_1, N_8, N_9\} & L_8 &= \{N_4, N_2, N_6\} & L_9 &= \{N_4, N_3, N_7\} \\
L_{10} &= \{N_4, N_{14}, N_{10}\} & L_{11} &= \{N_4, N_{15}, N_{11}\} & L_{12} &= \{N_4, N_9, N_{13}\} \\
L_{13} &= \{N_4, N_8, N_{12}\} & L_{14} &= \{N_5, N_2, N_7\} & L_{15} &= \{N_5, N_3, N_6\} \\
L_{16} &= \{N_5, N_{14}, N_{11}\} & L_{17} &= \{N_5, N_{15}, N_{10}\} & L_{18} &= \{N_5, N_{12}, N_9\} \\
L_{19} &= \{N_5, N_8, N_{13}\} & L_{20} &= \{N_2, N_{14}, N_{12}\} & L_{21} &= \{N_2, N_{15}, N_{13}\} \\
L_{22} &= \{N_2, N_{10}, N_8\} & L_{23} &= \{N_2, N_{11}, N_9\} & L_{24} &= \{N_3, N_8, N_{11}\} \\
L_{25} &= \{N_3, N_{14}, N_{13}\} & L_{26} &= \{N_3, N_{15}, N_{12}\} & L_{27} &= \{N_3, N_{10}, N_9\} \\
L_{28} &= \{N_6, N_{14}, N_8\} & L_{29} &= \{N_6, N_{12}, N_{10}\} & L_{30} &= \{N_6, N_{15}, N_9\} \\
L_{31} &= \{N_6, N_{13}, N_{11}\} & L_{32} &= \{N_7, N_{14}, N_9\} & L_{33} &= \{N_7, N_{12}, N_{11}\} \\
L_{34} &= \{N_7, N_{10}, N_{13}\} & L_{35} &= \{N_7, N_{15}, N_8\}
\end{aligned}$$

$PG(3, 2)$ projektif uzayının 15 düzlemi vardır. Bu düzlemler ve üzerindeki noktalar aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
D_1 &= [0, 0, 0, 1] = \{N_2, N_4, N_6, N_8, N_{10}, N_{12}, N_{14}\} \\
D_2 &= [0, 0, 1, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{15}\} \\
D_3 &= [0, 0, 1, 1] = \{N_5, N_{12}, N_9, N_2, N_{11}, N_7, N_{14}\} \\
D_4 &= [0, 1, 0, 0] = \{N_1, N_{14}, N_{15}, N_{10}, N_{11}, N_5, N_4\} \\
D_5 &= [0, 1, 0, 1] = \{N_4, N_3, N_7, N_{14}, N_{10}, N_9, N_{13}\} \\
D_6 &= [0, 1, 1, 0] = \{N_1, N_6, N_7, N_{14}, N_{15}, N_8, N_9\} \\
D_7 &= [0, 1, 1, 1] = \{N_5, N_3, N_6, N_{14}, N_{11}, N_8, N_{13}\} \\
D_8 &= [1, 0, 0, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\} \\
D_9 &= [1, 0, 0, 1] = \{N_4, N_2, N_6, N_{15}, N_{11}, N_{13}, N_9\} \\
D_{10} &= [1, 0, 1, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}\} \\
D_{11} &= [1, 0, 1, 1] = \{N_2, N_{15}, N_{13}, N_{10}, N_8, N_5, N_7\} \\
D_{12} &= [1, 1, 0, 0] = \{N_1, N_4, N_5, N_{12}, N_{13}, N_8, N_9\} \\
D_{13} &= [1, 1, 0, 1] = \{N_4, N_3, N_7, N_{15}, N_{11}, N_8, N_{12}\} \\
D_{14} &= [1, 1, 1, 0] = \{N_1, N_6, N_7, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\} \\
D_{15} &= [1, 1, 1, 1] = \{N_6, N_{12}, N_{10}, N_{15}, N_9, N_3, N_5\}
\end{aligned}$$

$PG(3, 2)$ projektif uzayından $PG(9, 2)$ projektif uzayına tanımlı kuadrik Veronesean ile $PG(3, 2)$ projektif uzayının noktaları $PG(9, 2)$ projektif uzayının noktaları ile eşlenir. Bu

kuadrik Veronesean:

$$\vartheta = PG(3, 2) \rightarrow PG(9, 2)$$

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

biçimindedir. ϑ Kuadrik Veroneseanı altında $PG(3, 2)$ projektif uzayının N_i noktaları $PG(9, 2)$ projektif uzayının aşağıdaki P_i noktalarına dönüşür:

$$N_1 = (0, 0, 0, 1) \rightarrow \vartheta(N_1) = P_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_2 = (0, 1, 0, 0) \rightarrow \vartheta(N_2) = P_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_3 = (0, 1, 0, 1) \rightarrow \vartheta(N_3) = P_3 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$$

$$N_4 = (0, 0, 1, 0) \rightarrow \vartheta(N_4) = P_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_5 = (0, 0, 1, 1) \rightarrow \vartheta(N_5) = P_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$$

$$N_6 = (0, 1, 1, 0) \rightarrow \vartheta(N_6) = P_6 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

$$N_7 = (0, 1, 1, 1) \rightarrow \vartheta(N_7) = P_7 = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$N_8 = (1, 1, 1, 0) \rightarrow \vartheta(N_8) = P_8 = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$$

$$N_9 = (1, 1, 1, 1) \rightarrow \vartheta(N_9) = P_9 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$N_{10} = (1, 0, 1, 0) \rightarrow \vartheta(N_{10}) = P_{10} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_{11} = (1, 0, 1, 1) \rightarrow \vartheta(N_{11}) = P_{11} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$N_{12} = (1, 1, 0, 0) \rightarrow \vartheta(N_{12}) = P_{12} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_{13} = (1, 1, 0, 1) \rightarrow \vartheta(N_{13}) = P_{13} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$N_{14} = (1, 0, 0, 0) \rightarrow \vartheta(N_{14}) = P_{14} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$N_{15} = (1, 0, 0, 1) \rightarrow \vartheta(N_{15}) = P_{15} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$PG(9, 2)$ projektif uzayında $\vartheta(N_i)$ noktaları $\mathcal{V}_3^8$ ü oluşturur. $\mathcal{V}_3^8$ te toplam 15 nokta bulunmaktadır. $PG(9, 2)$ projektif uzayında $\mathcal{V}_3^8$ de bulunmayan $P = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktası göz önüne alınsın. $PG(9, 2)$ projektif uzayının noktalarının P noktasından $x_0 = 0$ hiper düzlemi üzerine izdüşümü $PG(9, 2)$ projektif uzayının her X noktası için XP doğrusu ile $x_0 = 0$ hiper düzleminin arakesitidir. Bu izdüşüm $PG(9, 2)$ projektif uzayının her $P_i = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ noktaları için,

$$\beta : PG(9, 2) \rightarrow PG(8, 2)$$

$$\beta(P_i) \rightarrow (x_0 + x_1, x_0 + x_2, x_0 + x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

biçimindedir. $PG(9, 2)$ projektif uzayının $x_0 = 0$ hiper düzlemi 8-boyutlu projektif uzaydır. Yukarıda elde edilen $PG(9, 2)$ projektif uzayının $\mathcal{V}_3^8$ kuadrik Veroneseanın $x_0 = 0$ hiper

düzlemine izdüşümünü bulunursa:

$$\begin{aligned}
\beta(P_1) &= \beta(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_2) &= \beta(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_3) &= \beta(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \rightarrow P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\
\beta(P_4) &= \beta(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_5) &= \beta(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \rightarrow P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1) \\
\beta(P_6) &= \beta(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \rightarrow P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\
\beta(P_7) &= \beta(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \rightarrow P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \\
\beta(P_8) &= \beta(1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \rightarrow P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0) \\
\beta(P_9) &= \beta(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \rightarrow P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \\
\beta(P_{10}) &= \beta(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_{11}) &= \beta(1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \rightarrow P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \\
\beta(P_{12}) &= \beta(1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_{13}) &= \beta(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \rightarrow P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0) \\
\beta(P_{14}) &= \beta(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \rightarrow P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\
\beta(P_{15}) &= \beta(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \rightarrow P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Böylece $PG(3, 2)$ projektif uzayının tüm N_i noktaları ϑ Veronesean dönüşüm ile $\mathcal{V}_3^8$ kuadrik Veroneseanın noktalarına ve β izdüşümü ile $\mathcal{V}_3^8$ deki noktalar $x_0 = 0$ hiper düzlemindeki noktalara dönüşür ki bu noktalar $PG(8, 2)$ projektif uzayının noktalarıdır. Aynı şekilde $PG(3, 2)$ projektif uzayının tüm D_i doğruları ϑ Veronesean dönüşüm ile kuadrik Veroneseanın $\mathcal{V}_1^2$ Veroneseanlarına (koniklere) ve β izdüşümü ile $\mathcal{V}_2^4$ deki $\mathcal{V}_1^2$ projektif Veroneseanlarına (konikler) $x_0 = 0$ hiper düzlemindeki koniklere dönüşür ki bunlar $PG(8, 2)$ projektif uzayındadır, öyleki $\beta \circ \vartheta$ dönüşümü $PG(3, 2)$ projektif uzayının üzerinde bulunma yapısını korur.

$$\beta : PG(9, 2) \rightarrow PG(8, 2)$$

$$P_i(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9) \rightarrow \beta(P_i) = (x_0 + x_1, x_0 + x_2, x_0 + x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$$

dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki her $(x, y, z, w), (x', y', z', w') \in PG(3, 2)$ için $\beta \circ \vartheta(x, y, z, w) = \beta \circ \vartheta(x', y', z', w')$ olsun. Bu durumda,

$$(x^2 + y^2, x^2 + z^2, xy, yz, zx) = ((x')^2 + (y')^2, (x')^2 + (z')^2, x'y', y'z', z'x')$$

dır.

$$(x^2 + y^2) = ((x')^2 + (y')^2)$$

eşitliğini,

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x')^2 + 2x'y' + (y')^2$$

olarak yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x' + y')^2 \\ x + y &= x' + y' \\ y' &= x' + x + y\end{aligned}\tag{5.1}$$

dir. Aynı şekilde

$$z^2 + x^2 = (z')^2 + (x')^2$$

eşitliğinden,

$$z' = x' + x + z\tag{5.2}$$

elde edilir.

$$xy = x'y'$$

eşitliğinde (5.1) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= (x' + y')^2 \\ xy &= x'(x + x' + y) \\ xy &= xx' + (x')^2 + x'y\end{aligned}\tag{5.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$zx = z'x'$$

eşitliğinde (5.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}zx &= (z + x + x')x' \\ zx &= zx' + xx' + (x')^2\end{aligned}\tag{5.4}$$

elde edilir.

$$yz = y'z'$$

eşitliğinde (5.1) ve (5.2) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}yz &= (x' + x + y)(z + x + x') \\ yz &= x'z + x'x + (x')^2 + xz + x^2 + xx' + yz + yx + yx' \\ 0 &= x'z + (x')^2 + xz + x^2 + yx + yx'\end{aligned}\tag{5.5}$$

elde edilir.

$$xy + zx = x'y' + z'x'$$

olup,

$$x(y + z) = x'(y + z)$$

dir. Burada $y + z \neq 0$ iken $x = x'$ olup, $y = y'$ ve $z = z'$ dir. Eğer $y + z = 0$ (yani $y = z$) iken (5.1) ve (5.2) den $y' = z'$ dir. (5.5) ten

$$y^2 = (x' + x + y)^2$$

olup

$$\begin{aligned} y &= x' + x + y \\ x &= x' \end{aligned} \quad (5.6)$$

Dolayısıyla $y = y'$ ve $z = z'$ dür. Benzer şekilde;

$$(x^2 + y^2) = ((x')^2 + (y')^2)$$

eşitliğini,

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x')^2 + 2x'y' + (y')^2$$

olarak yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x' + y')^2 \\ x + y &= x' + y' \\ y' &= x' + x + y \end{aligned} \quad (5.7)$$

dir. Aynı şekilde

$$w^2 + x^2 = (w')^2 + (x')^2$$

eşitliğinden,

$$w' = x' + x + w \quad (5.8)$$

elde edilir.

$$xy = x'y'$$

eşitliğinde (5.1) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= (x' + y')^2 \\ xy &= x'(x + x' + y) \\ xy &= xx' + (x')^2 + x'y \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$wx = w'x'$$

eşitliğinde (5.2) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} wx &= (w + x + x')x' \\ wx &= wx' + xx' + (x')^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir.

$$yw = y'w'$$

eşitliğinde (5.1) ve (5.2) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} yw &= (x' + x + y)(w + x + x') \\ yw &= x'w + x'x + (x')^2 + xw + x^2 + xx' + yw + yx + yx' \\ 0 &= x'w + (x')^2 + xw + x^2 + yx + yx' \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir.

$$xy + wx = x'y' + w'x'$$

olup,

$$x(y + w) = x'(y + w)$$

dir. Burada $y + z \neq 0$ iken $x = x'$ olup, $y = y'$ ve $w = w'$ dir. Eğer $y + w = 0$ (yani $y = w$) iken (5.1) ve (5.2) den $y' = w'$ dir. (5.5) ten

$$y^2 = (x' + x + y)^2$$

olup

$$\begin{aligned} y &= x' + x + y \\ x &= x' \end{aligned} \quad (5.12)$$

elde edilir. Dolayısıyla $y = y'$ ve $w = w'$ dür. Böylece $\beta \circ \vartheta$ dönüşümü birebirdir.

Teorem 5.16 $PG(3, 2)$ projektif uzayının düzlemleri ϑ Veronesean dönüşümü ve β izdüşümü ile $PG(8, 2)$ projektif uzayının bir tek projektif 5-uzayı tarafından içerilir.

İspat 8 $D_1 = [0, 0, 0, 1] = \{N_2, N_4, N_6, N_8, N_{10}, N_{12}, N_{14}\}$ noktalarından oluşur. $P'_2, P'_4, P'_6, P'_8, P'_{10}, P'_{12}, P'_{14}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_1 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_2, P'_4, P'_6, P'_8, P'_{10}, P'_{12}, P'_{14}$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} a + b + g &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ c + d + e + g &= 0 \\ b &= 0 \\ a &= 0 \\ a + c + e &= 0 \\ b + c + d &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, e = 0, g = 0$ elde edilir. O halde S_1 uzayı:

$$S_1 = [0, 0, 0, 0, 0, f, 0, h, k]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_2 = [0, 0, 1, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_{12}, N_{13}, N_{14}, N_{15}\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_{12}, P'_{13}, P'_{14}, P'_{15}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_2 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_{12}, P'_{13}, P'_{14}, P'_{15}$ noktaları uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ a &= 0 \\ a + c + h &= 0 \\ a + b &= 0 \\ a + b + c + d + f &= 0 \\ b + d &= 0 \\ b + c + d + f + h &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, f = 0, h = 0$ elde edilir. O halde S_2 uzayı:

$$S_2 = [0, 0, 0, 0, e, 0, g, 0, k]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_3 = [0, 0, 1, 1] = \{N_5, N_{12}, N_9, N_2, N_{11}, N_7, N_{14}\}$ noktalarından oluşur. $P'_5, P'_{12}, P'_9, P'_2, P'_{11}, P'_7, P'_{14}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_3 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_5, P'_{12}, P'_9, P'_2, P'_{11}, P'_7, P'_{14}$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ a &= 0 \\ b + c + d &= 0 \\ b + c + k &= 0 \\ d + e + f + g + h + k &= 0 \\ a + b + c + g + h + k &= 0 \\ a + e + f + k &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, d = 0, k = 0, b = c, e = f, g = h$ elde edilir. O halde S_3 uzayı:

$$S_3 = [0, b, b, 0, e, e, g, g, 0]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_4 = [0, 1, 0, 0] = \{N_1, N_{14}, N_{15}, N_{10}, N_{11}, N_5, N_4\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_{14}, P'_{15}, P'_{10}, P'_{11}, P'_5, P'_4$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_4 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_{14}, P'_{15}, P'_{10}, P'_{11}, P'_5, P'_4$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$b = 0$$

$$a + b + c = 0$$

$$a + c + e = 0$$

$$c = 0$$

$$a + b + f = 0$$

$$a + e + f + k = 0$$

$$b + c + k = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, c = 0, e = 0, f = 0, k = 0$ elde edilir. O halde S_4 uzayı:

$$S_4 = [0, 0, 0, d, 0, 0, g, h, 0]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_5 = [0, 1, 0, 1] = \{N_4, N_3, N_7, N_{14}, N_{10}, N_9, N_{13}\}$ noktalarından oluşur. $P'_4, P'_3, P'_7, P'_{14}, P'_{10}, P'_9, P'_{13}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_5 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_4, P'_3, P'_7, P'_{14}, P'_{10}, P'_9, P'_{13}$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$b = 0$$

$$a + c + h = 0$$

$$a + b + c + g + h + k = 0$$

$$a + c + e = 0$$

$$b + d + f + h = 0$$

$$d + e + f + g + h + k = 0$$

$$a + b + c = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = c, b = 0, e = 0, h = 0, d = f, g = k$ elde edilir. O halde S_5 uzayı:

$$S_5 = [a, 0, a, d, 0, d, g, 0, g]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_6 = [0, 1, 1, 0] = \{N_1, N_6, N_7, N_{14}, N_{15}, N_8, N_9\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_6, P'_7, P'_{14}, P'_{15}, P'_8, P'_9$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_6 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_6, P'_7, P'_{14}, P'_{15}, P'_8, P'_9$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ a + b + g &= 0 \\ a + b + c + g + h + k &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ a + b + f &= 0 \\ c + d + e + g &= 0 \\ d + e + f + g + h + k &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $c = 0, a = b, f = 0, g = 0, d = e, h = k$ elde edilir. O halde S_6 uzayı:

$$S_6 = [a, a, 0, d, d, 0, 0, h, h]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_7 = [0, 1, 1, 1] = \{N_5, N_3, N_6, N_{14}, N_{11}, N_8, N_{13}\}$ noktalarından oluşur. $P'_5, P'_3, P'_6, P'_{14}, P'_{11}, P'_8, P'_{13}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_7 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_5, P'_3, P'_6, P'_{14}, P'_{11}, P'_8, P'_{13}$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} b + c + k &= 0 \\ a + c + h &= 0 \\ a + b + g &= 0 \\ a + b + c &= 0 \\ a + e + f + k &= 0 \\ c + d + e + g &= 0 \\ b + d + f + h &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = b + c, a = k, b = h, c = g, d = f = g$ elde edilir. O halde S_7 uzayı:

$$S_7 = [b + c, b, c, d, d, d, c, b, b + c]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_8 = [1, 0, 0, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6, P'_7$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_8 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6, P'_7$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$c = 0$$

$$b = 0$$

$$b + c + k = 0$$

$$a = 0$$

$$a + c + h = 0$$

$$a + b + g = 0$$

$$a + b + c + g + h + k = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, c = 0, g = 0, h = 0, k = 0$ elde edilir. O halde S_8 uzayı:

$$S_8 = [0, 0, 0, d, e, f, 0, 0, 0]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_9 = [1, 0, 0, 1] = \{N_4, N_2, N_6, N_{15}, N_{11}, N_{13}, N_9\}$ noktalarından oluşur. $P'_4, P'_2, P'_6, P'_{15}, P'_{11}, P'_{13}, P'_9$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_9 = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_4, P'_2, P'_6, P'_{15}, P'_{11}, P'_{13}, P'_9$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$b = 0$$

$$a = 0$$

$$a + b + g = 0$$

$$a + b + f = 0$$

$$a + e + f + k = 0$$

$$d + e^f + g + h + k = 0$$

$$b + d + f + h = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, f = 0, g = 0, e = k, d = h$ elde edilir. O halde S_9 uzayı:

$$S_9 = [0, 0, c, d, e, 0, 0, d, e]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{10} = [1, 0, 1, 0] = \{N_1, N_2, N_3, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_8, P'_9, P'_{10}, P'_1$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay

$S_{10} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_2, P'_3, P'_8, P'_9, P'_{10}, P'_1$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ c &= 0 \\ a + c + h &= 0 \\ a + c + e &= 0 \\ a + e + f + k &= 0 \\ c + d + e + g &= 0 \\ d + e + f + g + h + k &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = 0, h = 0, e = 0, f = k, d = g$ elde edilir. O halde S_{10} uzayı:

$$S_{10} = [0, b, 0, d, 0, f, d, 0, f]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{11} = [1, 0, 1, 1] = \{N_2, N_{15}, N_{13}, N_{10}, N_8, N_5, N_7\}$ noktalarından oluşur. $P'_2, P'_{15}, P'_{13}, P'_{10}, P'_8, P'_5, P'_7$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_{11} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_2, P'_{15}, P'_{13}, P'_{10}, P'_8, P'_5, P'_7$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ a + b + f &= 0 \\ b + d + f + g &= 0 \\ a + c + e &= 0 \\ c + d + e + g &= 0 \\ b + c + k &= 0 \\ a + b + c + g + h + k &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = 0, b = f, c = e, d = g = h, k = b + c$ elde edilir. O halde S_{11} uzayı:

$$S_{11} = [0, b, c, d, c, b, d, d, b + c]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{12} = [1, 1, 0, 0] = \{N_1, N_4, N_5, N_{12}, N_{13}, N_8, N_9\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_4, P'_5, P'_{12}, P'_{13}, P'_8, P'_9$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_{12} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_4, P'_5, P'_{12}, P'_{13}, P'_8, P'_9$ noktaları bu uzayda yazılıp

elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 c &= 0 \\
 b &= 0 \\
 b + c + k &= 0 \\
 b + c + d &= 0 \\
 b + d + f + h &= 0 \\
 c + d + e + g &= 0 \\
 d + e + f + g + h + k &= 0
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $b = 0, c = 0, d = 0, k = 0, f = h, e = g$ elde edilir. O halde S_{12} uzayı:

$$S_{12} = [a, 0, 0, 0, e, f, e, f, 0]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{13} = [1, 1, 0, 1] = \{N_4, N_3, N_7, N_{15}, N_{11}, N_8, N_{12}\}$ noktalarından oluşur. $P'_4, P'_3, P'_7, P'_{15}, P'_{11}, P'_8, P'_{12}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_{13} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_4, P'_3, P'_7, P'_{15}, P'_{11}, P'_8, P'_{12}$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 b &= 0 \\
 a + c + h &= 0 \\
 a + b + c + g + h + k &= 0 \\
 a + b + f &= 0 \\
 a + e + f + k &= 0 \\
 c + d + e + g &= 0 \\
 b + c + d &= 0
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $b = 0, c = d, a = f, e = k = g, f, h = a + c$ elde edilir. O halde S_{13} uzayı:

$$S_{13} = [a, 0, c, c, e, a, e, a + c, e]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{14} = [1, 1, 1, 0] = \{N_1, N_6, N_7, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$ noktalarından oluşur. $P'_1, P'_6, P'_7, P'_{10}, P'_{11}, P'_{12}, P'_{13}$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_{14} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_1, P'_6, P'_7, P'_{10}, P'_{11}, P'_{12}, P'_{13}$ noktaları bu uzayda yazılıp

elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 c &= 0 \\
 a + b + g &= 0 \\
 a + b + c + g + h + k &= 0 \\
 a + c + e &= 0 \\
 a + e + f + k &= 0 \\
 b + c + d &= 0 \\
 b + d + f + h &= 0
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $c = 0, a = e, b = d, f = h = k, f, g = a + b$ elde edilir. O halde S_{14} uzayı:

$$S_{14} = [a, b, 0, b, a, f, a + b, f, f]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

$D_{15} = [1, 1, 1, 1] = \{N_6, N_{12}, N_{10}, N_{15}, N_9, N_3, N_5\}$ noktalarından oluşur. $P'_6, P'_{12}, P'_{10}, P'_{15}, P'_9, P'_3, P'_5$ noktalarının $PG(8, 2)$ projektif uzayında gerdiği uzay $S_{15} = [a, b, c, d, e, f, g, h, k]$ olsun. $P'_6, P'_{12}, P'_{10}, P'_{15}, P'_9, P'_3, P'_5$ noktaları bu uzayda yazılıp elemanter işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 a + b + g &= 0 \\
 b + c + d &= 0 \\
 a + c + e &= 0 \\
 a + b + f &= 0 \\
 d + e + f + g + h + k &= 0 \\
 a + c + h &= 0 \\
 b + c + k &= 0
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden $a = b + g, b = c + d, c = a + e, f = g, d = k, e = h$ elde edilir. O halde S_{15} uzayı:

$$S_{15} = [b + g, c + d, a + e, d, e, f, f, e, d]$$

biçiminde olup, $PG(8, 2)$ projektif uzayında bir projektif 5-uzaydır.

Teorem 5.17 $PG(3, 2)$ projektif uzayında bir doğru boyunca kesişen üç düzlemin Kuadrik Veroneseanın izdüşümü olarak elde edilen $PG(8, 2)$ projektif uzayındaki 5-uzaylar kuadrik

Veroneseanın doğrusal olmayan üç noktasında (Koniğinde) kesişirler. Kesişim noktaları düzlemlerin $PG(3, 2)$ projektif uzayında kesiştikleri doğru üzerindeki noktaların kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

İspat 9 $PG(3, 2)$ projektif uzayında D_4, D_8, D_{12} düzlemleri $L_1 = \{N_1, N_4, N_5\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_4, D_8, D_{12} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_4, S_8, S_{12} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_1 doğrusu üzerindeki N_1, N_4, N_5 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_2, D_8, D_{10} düzlemleri $L_2 = \{N_1, N_2, N_3\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_2, D_8, D_{10} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_2, S_8, S_{10} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_2 doğrusu üzerindeki N_1, N_2, N_3 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_6, D_8, D_{14} düzlemleri $L_3 = \{N_1, N_6, N_7\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_6, D_8, D_{14} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_6, S_8, S_{14} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_3 doğrusu üzerindeki N_1, N_6, N_7 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_2, D_4, D_6 düzlemleri $L_4 = \{N_1, N_{14}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_2, D_4, D_6 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_2, S_4, S_6 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_4 doğrusu üzerindeki N_1, N_{14}, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_4, D_{10}, D_{14} düzlemleri $L_5 = \{N_1, N_{10}, N_{11}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_4, D_{10}, D_{14} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki

görüntüleri olan S_4, S_{10}, S_{14} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_5 doğrusu üzerindeki N_1, N_{10}, N_{11} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_2, D_{12}, D_{14} düzlemleri $L_6 = \{N_1, N_{12}, N_{13}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_2, D_{12}, D_{14} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_2, S_{12}, S_{14} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_6 doğrusu üzerindeki N_1, N_{12}, N_{13} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_6, D_{10}, D_{12} düzlemleri $L_7 = \{N_1, N_8, N_9\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_6, D_{10}, D_{12} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_6, S_{10}, S_{12} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$, $P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_7 doğrusu üzerindeki N_1, N_8, N_9 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_8, D_9 düzlemleri $L_8 = \{N_2, N_4, N_6\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_8, D_9 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_8, S_9 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_8 doğrusu üzerindeki N_2, N_4, N_6 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_5, D_8, D_{13} düzlemleri $L_9 = \{N_3, N_4, N_7\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_5, D_8, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_5, S_8, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_9 doğrusu üzerindeki N_3, N_4, N_7 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_4, D_5 düzlemleri $L_{10} = \{N_4, N_{10}, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_4, D_5 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_4, S_5 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{10} doğrusu üzerindeki N_4, N_{10}, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_4, D_9, D_{13} düzlemleri $L_{11} = \{N_4, N_{11}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_4, D_9, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_4, S_9, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{11} doğrusu üzerindeki N_4, N_{11}, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_5, D_9, D_{12} düzlemleri $L_{12} = \{N_4, N_9, N_{13}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_5, D_9, D_{12} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_5, S_9, S_{12} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{12} doğrusu üzerindeki N_4, N_9, N_{13} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_{12}, D_{13} düzlemleri $L_{13} = \{N_4, N_8, N_{12}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_{12}, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_{12}, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{13} doğrusu üzerindeki N_4, N_8, N_{12} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_8, D_{11} düzlemleri $L_{14} = \{N_4, N_5, N_7\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_8, D_{11} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_8, S_{11} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), ((1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_{14} doğrusu üzerindeki N_2, N_5, N_7 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_7, D_8, D_{15} düzlemleri $L_{15} = \{N_3, N_5, N_6\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_7, D_8, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_7, S_8, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{15} doğrusu üzerindeki N_3, N_5, N_6 noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_4, D_7 düzlemleri $L_{16} = \{N_5, N_{11}, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_4, D_7 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_4, S_7 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{16} doğrusu üzerindeki N_5, N_{11}, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_4, D_{11}, D_{15} düzlemleri $L_{17} = \{N_5, N_{10}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_4, D_{11}, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_4, S_{11}, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{17} doğrusu üzerindeki N_5, N_{10}, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_{12}, D_{15} düzlemleri $L_{18} = \{N_5, N_9, N_{12}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_{12}, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_{12}, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{18} doğrusu üzerindeki N_5, N_9, N_{12} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_7, D_{11}, D_{12} düzlemleri $L_{19} = \{N_5, N_8, N_{13}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_7, D_{11}, D_{12} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_7, S_{17}, S_{12} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_5 = (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{19} doğrusu üzerindeki N_5, N_8, N_{13} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_2, D_3 düzlemleri $L_{20} = \{N_2, N_{12}, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_2, D_3 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_2, S_3 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{20} doğrusu üzerindeki N_2, N_{12}, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_2, D_9, D_{11} düzlemleri $L_{21} = \{N_2, N_{13}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_2, D_{11} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_2, S_9, S_{11} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{21} doğrusu üzerindeki N_2, N_{13}, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_{10}, D_{11} düzlemleri $L_{22} = \{N_2, N_{13}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_{10}, D_{11} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_{10}, S_{11} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{22} doğrusu üzerindeki N_2, N_8, N_{10} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_9, D_{10} düzlemleri $L_{23} = \{N_2, N_9, N_{11}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_9, D_{10} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_9, S_{10} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_2 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_{23} doğrusu üzerindeki N_2, N_9, N_{11} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_7, D_{10}, D_{13} düzlemleri $L_{24} = \{N_3, N_8, N_{11}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_7, D_{10}, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_7, S_{10}, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ noktaları olup, bu noktalar L_{24} doğrusu üzerindeki N_3, N_8, N_{11} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_7, D_{10}, D_{13} düzlemleri $L_{25} = \{N_3, N_{13}, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_7, D_{10}, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_7, S_{10}, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{25} doğrusu üzerindeki N_3, N_{13}, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_2, D_{13}, D_{15} düzlemleri $L_{26} = \{N_3, N_{12}, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_2, D_{13}, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_2, S_{13}, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{26} doğrusu üzerindeki N_3, N_{12}, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_5, D_{10}, D_{15} düzlemleri $L_{27} = \{N_3, N_9, N_{10}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_5, D_{10}, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_5, S_{10}, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_3 = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0), P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{27} doğrusu üzerindeki N_3, N_9, N_{10} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_6, D_7 düzlemleri $L_{28} = \{N_6, N_8, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_6, D_7 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_6, S_7 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{28} doğrusu üzerindeki N_6, N_8, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_1, D_{14}, D_{15} düzlemleri $L_{29} = \{N_6, N_{10}, N_{12}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_1, D_{14}, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_1, S_{14}, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{29} doğrusu üzerindeki N_6, N_{10}, N_{12} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_6, D_9, D_{15} düzlemleri $L_{30} = \{N_6, N_9, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_6, D_9, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_6, S_9, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), P'_{15} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{30} doğrusu üzerindeki N_6, N_9, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_6, D_9, D_{15} düzlemleri $L_{31} = \{N_6, N_{11}, N_{13}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_6, D_9, D_{15} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_6, S_9, S_{15} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_6 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{31} doğrusu üzerindeki N_6, N_{11}, N_{13} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_5, D_6 düzlemleri $L_{32} = \{N_7, N_9, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_5, D_6 düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_5, S_6 projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), P'_9 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1), P'_{14} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{32} doğrusu üzerindeki N_7, N_9, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_3, D_{13}, D_{14} düzlemleri $L_{33} = \{N_7, N_9, N_{14}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_3, D_{13}, D_{14} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_3, S_{13}, S_{14} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), P'_{11} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), P'_{12} = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{33} doğrusu üzerindeki N_7, N_9, N_{14} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_5, D_{11}, D_{14} düzlemleri $L_{34} = \{N_7, N_{10}, N_{13}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_5, D_{11}, D_{14} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_5, S_{11}, S_{14} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), P'_{10} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), P'_{13} = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{34} doğrusu üzerindeki N_7, N_{10}, N_{13} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayında D_6, D_{11}, D_{13} düzlemleri $L_{35} = \{N_7, N_8, N_{15}\}$ doğrusu boyunca kesişir. D_6, D_{11}, D_{13} düzlemlerinin kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleri olan S_6, S_{11}, S_{13} projektif 5-uzayları, $PG(8, 2)$ projektif uzayında $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), (11, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktalarında kesişir. Bu noktalar; $P'_7 = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), P'_8 = (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), P'_{15} = (11, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ noktaları olup, bu noktalar L_{35} doğrusu üzerindeki N_7, N_8, N_{15} noktalarının Kuadrik Veroneseanın β izdüşümü altındaki görüntüleridir.

Sonuç olarak $GF(2)$ Galois cismi üzerinde, $PG(3, 2)$ projektif uzayının her bir doğrusu üzerindeki noktalar kümesini $PG(9, 2)$ projektif uzayının düzlemsel noktalar kümesine eşleyen, düzlemsel noktaları projektif 5-uzaylara eşleyen, $PG(3, 2)$ projektif uzayından $PG(9, 2)$ projektif uzayına tanımlı Veronesean dönüşümün görüntüsü $PG(9, 2)$ projektif uzayını üretir. $PG(9, 2)$ projektif uzayındaki $PG(3, 2)$ projektif uzayının Kuadrik Veroneseanları ile $PG(9, 2)$ projektif uzayının Veroneseanlarla üretilen altuzaylarının izdüşümleri arasında ilişki kullanılarak $PG(8, 2)$ projektif uzayındaki $PG(3, 2)$ projektif uzayı gömülü olarak elde edilmiştir.

6. MATERYAL VE YÖNTEM

6.1 Materyal

Bir $\mathcal{F}$ cismi koordinatlanan projektif uzayların ve bu uzayların alt uzaylarının daha yüksek boyutlu uzaylara gömülmesinde ve $SCID(n, k)$ geometrik yapılarının elde edilmesinde Kuadrik Veronesean dönüşüm, Kübik Veronesean dönüşüm, Plücker koordinatları, Grassmann koordinatları ve Klein dönüşümü kullanılmıştır.

6.2 Yöntem

Veronesean Kuadrik dönüşüm, Veronesean Kübik dönüşüm, Plücker koordinatları, Grassmann koordinatları ve Klein Kuadrik ve Klein dönüşümü altında elde edilen geometrik yapılar incelenirken Wolfram Mathematica yazılımı kullanılmıştır. Yine elde edilen bu yapılarda kesişim, birleşim, üzerinde bulunma bağıntıları araştırılırken Wolfram Mathematica yazılımından faydalanılmıştır.

7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüme kadar bir $\mathcal{F}$ cismi ile koordinatlanan Projektif uzaylar ve bu uzayların alt uzaylarının ve arklarının Kuadrik Veronesen, Kübik Veronesean dönüşümü altındaki görüntü uzayları ve bu görüntü uzaylarının geometrik yapılarından bahsedilmiştir. Böylece bu yapılar hakkında detaylı bir inceleme yapılmıştır.

Daha önce yapılan çalışmalar incelendiğinde Kuadrik Veronesean kullanılarak bir P projektif düzlemimin bir projektif 5-uzaya gömülmesi, $PG(3, q)$ projektif uzayının $PG(5, q)$ projektif uzayına gömülmesinin ilginç geometrik yapılar oluşturduğu görülmüştür.

Bu çalışmada da bir $\mathcal{F}$ cismi ile koordinatlanan projektif uzaylar ve bu uzayların alt uzaylarının ve arklarının Kuadrik Veronesen, Kübik Veronesean dönüşümler altındaki görüntü uzayları ve bu görüntü uzaylarının geometrik yapıları $SCID(n, k)$ ve Klein küme kavramları ile ilişkilendirilmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu tezde projektif uzayların ve bu uzayların bazı alt uzaylarının kuadrik ve kübik Klein ve Veronesean dönüşümlerle daha üst boyutlu uzaylara gömülmesi ile elde edilen geometrik yapıların özellikleri incelenmiştir.

$PG(3, 2)$ projektif uzayının Klein kuadrik ile $PG(5, 2)$ projektif uzayına gömülmesi ile elde edilen $SCID(2, 0)$ yapıları geometrik yapıları elde edilmiştir.

Klein kuadrik üzerinde bulunan α ve β düzlemleri incelenmiş, bu düzlemlerin Grassmann koordinatları kullanılarak elde edilen yapılar incelenmiştir. Yine Klein küme tanımı kullanılarak bazı projektif uzaylarda Klein küme yapıları bulunmuştur.

Kuadrik Veronesean ve Kübik Veronesean dönüşümleri kullanılarak, projektif uzaylar, projektif düzlemler, doğrular ve düzlemlerin 4-arkları üst boyutlu uzaylara gömülmüş ve burada elde edilen $SCID(n, k)$ yapıları incelenmiştir. Kuadrik Veronesean dönüşüm kullanılarak ve kuadrik Veroneseanların izdüşümleri kullanılarak $P(3, 2)$ projektif uzayı, $PG(8, 2)$ projektif uzayına gömülmüş ve buradaki yeni doğru, nokta yapıları belirlenmiştir.

Özetlemek gerekirse, bu tezde bir cisimle koordinatlanan projektif uzayların alt uzaylarının ve 4-arklarının kuadrik Veronesean, Kübik Veronesean, Klein Kuadrik ve Grassmann koordinatları altında gömülmeleri elde edilmiş ve $SCID(n, k)$ yapıları incelenmiştir. Klein kümeler ve $SCID(n, k)$ yapıları kullanılarak bir projektif uzay içerisinde geometrik yapılar (Örneğin Fano düzlemi) elde edilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akça, Z., Kaya, R., Maldeghem, H., Bayar, A., Ekmekçi, S., 2010, Bazı Geometrilere Sonlu Projektif Uzaylara Gömülmeleri Üzerine, Tübitak Proje No: 108T340.
- Akça, Z., Bayar, A., Ekmekçi, S., Kaya, R., Thas, J. A., Van Maldeghem, H., 2012, Generalized Veronesean embeddings of projective spaces, Part II. The lax case, *Ars Combinatoria*, Volume CIII, p. 65-80.
- Akça Z., Bayar, A., Ekmekçi S., Van Maldeghem H., 2006, Fuzzy projective spreads of fuzzy projective spaces, *Fuzzy Sets and Systems*, 157, 24, p. 3237-3247.
- Akça, Z., Bayar, A., Ekmekçi, S., 2006, On the Classification of Fuzzy projective lines of fuzzy 3-dimensional projective spaces, *Communications Mathematics and Statistics*, 55, 2, p. 17-23.
- Bader, L., Cossidente, A., Lunardon, G., 2001. Generalizing flocks of $Q^+(3, q)$, *Adv. Geom.* 1, p. 323–331.
- Bayar, A., Akça, Z., Ekmekçi, S., 2017. 4. Mertebeden Projektif Düzlemin 4-boyutlu Projektif Uzaya Gömülmesi Üzerine, Ogü Bap Proje No: 201619D38.
- Beutelspacher, A., Ueberberg, J., 1991, Characteristic Property of Geometric t -Spreads in Finite Projective Spaces, *Europ. J. Combinatorics*, 12, p. 277-281.
- Beutelspacher, A., Eugeni, F., 1985, On the type of partial t -spreads in finite projective spaces, *Discr. Math.*, 54, p. 241-257.
- Beutelspacher, A., Eisfeld, J., Müller, J., 1999, On Sets of Planes in Projective Spaces Intersecting Mutually in One Point, *Geometriae Dedicata* 78, p. 143-159.
- Bierbrauer, J., Edel, Y., 2010, Large Caps In Projective Galois Spaces, *Nova Science Publishers*, p. 81-98.
- Conwell, G.M., 1910, The 3-space $PG(3,2)$ and its group, *Ann. of Math.* 11, p. 60-76.
- Cooperstein, B., Thas, J. A., Van Maldeghem, H., 2004, Hermitian Veroneseans over finite fields, *Forum Math.* 16, p. 365-381.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Cossidente, A., 2000, Caps embedded in the Klein quadric, *Bull. Belg. Math. Soc.* 7, p. 13-19.
- Cullinane, H., 2007, The Klein Correspondence, Penrose Space-Time, and a Finite Model.
- De Clerk, F., De Feyter, N., Durante, N, Two-intersection sets with respect to lines on the Klein quadric.
- Dentice, E.F., Marino, G., 2008, Classification of Veronesean caps. *Discrete Math.* 308, p. 299–302.
- Dorje, C., Brody, L.P., 2005, Twistor cosmology and quantum space-time.
- Eisfield, J., 1999, On sets of n -dimensional subspaces of projective spaces intersecting mutually in an $(n-2)$ -dimensional subspace, *Geometriae Dedicata*, Vol.78, p. 143–159.
- Ekmekçi, S., Bayar, A., Akça, Z., 2017, PG(4,4) Projektif Uzayındaki Projektif Düzlemler Üzerine, Ogü Bap Proje No: 201619D37.
- Ferri, O., 1976, Su di una caratterizzazione grafica della superficie di Veronese di un Atti Accad. Naz. Lincei Rend, 61, p. 603-610.
- Glynn, D.G., 1988, On a set of lines of PG(3; q) corresponding to a maximal cap contained in the Klein quadric of PG(5, q), *Geom. Dedicata* 26, p. 273-280.
- Govaerts, P., 2003, Classification of blocking set related structures in Galois geometries.
- Harris, J., 1992, Algebraic Geometry, A First Course, Springer-Verlag.
- Hirschfeld, J., Thas, J. A., 2016, General Galois Geometries, Springer Monographs in Mathematics.
- Hirschfeld, J.W.P., 1998, Projective Geometries over Finite Fields, second edition, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press/Oxford Univ. Press, New York.
- Hirschfeld, J.W.P., Storme, L., 1997, Applications of line geometry, III: The quadric Veronesean and the chords of a twisted cubic, *Australasian Journal of Combinatorics* 16. p. 99-111.
- Hirschfeld, J.W.P., 1985, Finite Projective Spaces of Three Dimensions, Clarendon Press, Oxford.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kaya R., 2005, Projektif Geometri, Osmangazi Üniversitesi Yayınları No:111, (üçüncü baskı).
- Klawitter, D., 2014, A Clifford algebraic Approach to Line Geometry.
- Klein, F., 1868, Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form, Math. Ann 23 (1884), p. 539-578.
- Klein, A., Schillewaert, J., Storme, L., 2007, Generalised dual arcs and Veronesean surfaces with applications to cryptography, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Elsevier.
- Levay, P., Holweck, F., 2019, Finite geometric toy model of spacetime as an error correcting code, PHYSICAL REVIEW D 99, 086015.
- Plücker, J., 1865, On a New Geometry of Space, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 155, p. 725-791.
- Pottman, H., Peternell, M., Ravani, B., 1999, An introduction to line geometry with applications, Elsevier, Volume 31, Issue 1, p. 3-16
- Pottman, H., Wallner, J., 2001, Computational Line Geometry.
- Selig, J.M., 2005, Geometric Fundamentals of Robotics.
- Stokes, K., Spread codes and the Klein correspondence.
- Storme, L., Hirschfeld, J.W.P., 1997, Applications of line geometry, III, The quadric Veronesean and the chords of a twisted cubic, Australasian Journal of Combinatorics 16. p. 99-111.
- Tallini, G., 1976, Una proprietà grafica caratteristica delle superficie di Veronese negli spazi finiti (Note I; II), Atti Accad. Naz. Lincei Rend, 24, p. 135-138.
- Thas, J. A., Van Maldeghem, H., 2003, Characterizations of quadric and Hermitian Veroneseans over finite fields, J. of Geometry, 76, p. 282-293.
- Thas, J. A., Van Maldeghem, H., 2004, Classification of finite Veronesean caps, European J. of Combin. 25, p. 275-285.
- Thas, J. A., Van Maldeghem, H., 2004, Characterizations of the finite quadric Veroneseans , Quart. J. Math, 55, p. 99-113.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Thas, J.A., Van Maldeghem, H., 2005, Some characterizations of finite Hermitian Veroneseans, Des. Codes Cryptogr, 34, p. 283-293.

Thas, J.A., Van Maldeghem, H., 2011, Characterizations of Veronese and Segre Varieties, Journal of Geometry 101(1), p. 211-222.



EK AÇIKLAMALAR

Ek Açıklamalar A

$t^2 + t + 1 = 0$ olmak üzere, $PG(5, 4)$ Projektif uzayında Klein Kuadrik üzerinde bulunan noktalar;

1.(0, 0, 0, 0, 1, 0)	2.(0, 0, 0, 1, 0, 0)	3.(0, 0, 0, 1, 1, 0)	4.(0, 0, 0, t^2 , 1, 0)
5.(0, 0, 0, t , 1, 0)	6.(0, 0, 1, 1, 1, 0)	7.(0, 0, 1, 1, 0, 0)	8.(0, 0, 1, 1, t , 0)
9.(0, 0, 1, 0, t^2 , 0)	10.(0, 0, 1, 0, 1, 0)	11.(0, 0, 1, t^2 , 1, 0)	12.(0, 0, 1, t , 1, 0)
13.(0, 0, 1, t^2 , t , 0)	14.(0, 0, 1, t , t^2 , 0)	15.(0, 0, 1, 0, 0, 0)	16.(0, 0, 1, 0, t , 0)
17.(0, 0, 1, 1, t^2 , 0)	18.(0, 0, 1, t^2 , 0, 0)	19.(0, 0, 1, t , 0, 0)	20.(0, 0, 1, t^2 , t^2 , 0)
21.(0, 0, 1, t , t , 0)	22.(0, 0, 0, 0, 0, 1)	23.(0, 0, 0, 0, 1, 1)	24.(0, 0, 0, 0, t , 1)
25.(0, 0, 0, 0, t^2 , 1)	26.(1, 0, 0, 0, 0, 1)	27.(1, 0, 0, 0, 1, 1)	28.(1, 0, 0, 0, t , 1)
29.(1, 0, 0, 0, t^2 , 1)	30.(1, 0, 0, 0, 0, 0)	31.(1, 0, 0, 0, 1, 0)	32.(1, 0, 0, 0, t , 0)
33.(1, 0, 0, 0, t^2 , 0)	34.(1, 0, 0, 0, 0, t^2)	35.(1, 0, 0, 0, 1, t^2)	36.(1, 0, 0, 0, t , t^2)
37.(1, 0, 0, 0, t^2 , t^2)	38.(1, 0, 0, 0, 0, t)	39.(1, 0, 0, 0, 1, t)	40.(1, 0, 0, 0, t , t)
41.(1, 0, 0, 0, t^2 , t)	42.(0, 0, 0, 1, 0, 1)	43.(0, 0, 0, 1, 1, 1)	44.(0, 0, 0, 1, t , 1)
45.(0, 0, 0, 1, t^2 , 1)	46.(1, 0, 1, 1, 1, 1)	47.(1, 0, 1, 1, t^2 , 1)	48.(1, 0, 1, 1, t , 1)
49.(1, 0, 1, 1, 0, 1)	50.(1, 0, 1, 0, t^2 , 0)	51.(1, 0, 1, 0, t , 0)	52.(1, 0, 1, 0, 1, 0)
53.(1, 0, 1, 0, 0, 0)	54.(1, 0, 1, t^2 , 1, t^2)	55.(1, 0, 1, t^2 , 0, t^2)	56.(1, 0, 1, t^2 , t^2 , t^2)
57.(1, 0, 1, t^2 , t , t^2)	58.(1, 0, 1, t , 1, t)	59.(1, 0, 1, t , 0, t)	60.(1, 0, 1, t , t^2 , t)
61.(1, 0, 1, t , t , t)	62.(0, 0, 0, t , 0, 1)	63.(0, 0, 0, t , 1, 1)	64.(0, 0, 0, t , t , 1)
65.(0, 0, 0, t , t^2 , 1)	66.(1, 0, t , t , t , 1)	67.(1, 0, t , t , t^2 , 1)	68.(1, 0, t , t , 0, 1)
69.(1, 0, t , t , 1, 1)	70.(1, 0, t , 0, 1, 0)	71.(1, 0, t , 0, 0, 0)	72.(1, 0, t , 0, t^2 , 0)
73.(1, 0, t , 0, t , 0)	74.(1, 0, t , 1, t , t^2)	75.(1, 0, t , 1, t^2 , t^2)	76.(1, 0, t , 1, 0, t^2)
77.(1, 0, t , 1, 1, t^2)	78.(1, 0, t , t^2 , t , t)	79.(1, 0, t , t^2 , t^2 , t)	80.(1, 0, t , t^2 , 0, t)
81.(1, 0, t , t^2 , 1, t)	82.(0, 0, 0, 1, 0, t)	83.(0, 0, 0, 1, t , t)	84.(0, 0, 0, 1, t^2 , t)
85.(0, 0, 0, 1, 1, t)	86.(1, 0, t^2 , t^2 , t^2 , 1)	87.(1, 0, t^2 , t^2 , t , 1)	88.(1, 0, t^2 , t^2 , 1, 1)
89.(1, 0, t^2 , t^2 , 0, 1)	90.(1, 0, t^2 , 0, t , 0)	91.(1, 0, t^2 , 0, t^2 , 0)	92.(1, 0, t^2 , 0, 0, 0)
93.(1, 0, t^2 , 0, 1, 0)	94.(1, 0, t^2 , t , t^2 , t^2)	95.(1, 0, t^2 , t , t , t^2)	96.(1, 0, t^2 , t , 1, t^2)
97.(1, 0, t^2 , t , 0, t^2)	98.(1, 0, t^2 , 1, t^2 , t)	99.(1, 0, t^2 , 1, t , t)	100.(1, 0, t^2 , 1, 1, t)
101.(1, 0, t^2 , 1, 0, t)	102.(0, 1, 0, 0, 0, 1)	103.(0, 1, 0, 1, 0, 1)	104.(0, 1, 0, t , 0, 1)
105.(0, 1, 0, t^2 , 0, 1)	106.(0, 1, 0, 0, 0, 0)	107.(0, 1, 0, 1, 0, 0)	108.(0, 1, 0, t , 0, 0)
109.(0, 1, 0, t^2 , 0, 0)	110.(0, 1, 0, 0, 0, t)	111.(0, 1, 0, 1, 0, t)	112.(0, 1, 0, t , 0, t)

113.(0, 1, 0, t^2 , 0, t)	114.(0, 1, 0, 0, 0, t^2)	115.(0, 1, 0, 1, 0, t^2)	116.(0, 1, 0, t , 0, t^2)
117.(0, 1, 0, t^2 , 0, t^2)	118.(0, 1, 1, 1, 1, 1)	119.(0, 1, 1, 0, 1, 1)	120.(0, 1, 1, t^2 , 1, 1)
121.(0, 1, 1, t , 1, 1)	122.(0, 1, 1, 1, 0, 0)	123.(0, 1, 1, 0, 0, 0)	124.(0, 1, 1, t^2 , 0, 0)
125.(0, 1, 1, t , 0, 0)	126.(0, 1, 1, 1, t , t)	127.(0, 1, 1, 0, t , t)	128.(0, 1, 1, t^2 , t , t)
129.(0, 1, 1, t , t , t)	130.(0, 1, 1, 0, t^2 , t^2)	131.(0, 1, 1, 1, t^2 , t^2)	132.(0, 1, 1, t , t^2 , t^2)
133.(0, 1, 1, t^2 , t^2 , t^2)	134.(0, 1, t , t , t , 1)	135.(0, 1, t , t^2 , t , 1)	136.(0, 1, t , 0, t , 1)
137.(0, 1, t , 1, t , 1)	138.(0, 1, t , t , 0, 0)	139.(0, 1, t , t^2 , 0, 0)	140.(0, 1, t , 0, 0, 0)
141.(0, 1, t , 1, 0, 0)	142.(0, 1, t , t , t^2 , t)	143.(0, 1, t , t^2 , t^2 , t)	144.(0, 1, t , 0, t^2 , t)
145.(0, 1, t , 1, t^2 , t)	146.(0, 1, t , 0, 1, t^2)	147.(0, 1, t , 1, 1, t^2)	148.(0, 1, t , t , 1, t^2)
149.(0, 1, t , t^2 , 1, t^2)	150.(0, 1, t^2 , t^2 , t^2 , 1)	151.(0, 1, t^2 , t , t^2 , 1)	152.(0, 1, t^2 , 1, t^2 , 1)
153.(0, 1, t^2 , 0, t^2 , 1)	154.(0, 1, t^2 , t^2 , 0, 0)	155.(0, 1, t^2 , t , 0, 0)	156.(0, 1, t^2 , 1, 0, 0)
157.(0, 1, t^2 , 0, 0, 0)	158.(0, 1, t^2 , t^2 , 1, t)	159.(0, 1, t^2 , t , 1, t)	160.(0, 1, t^2 , 1, 1, t)
161.(0, 1, t^2 , 0, 1, t)	162.(0, 1, t^2 , 0, t , t^2)	163.(0, 1, t^2 , 1, t , t^2)	164.(0, 1, t^2 , t , t , t^2)
165.(0, 1, t^2 , t^2 , t , t^2)	166.(1, 1, 0, 0, 0, 0)	167.(1, 1, 0, 1, 1, 0)	168.(1, 1, 0, t , t , 0)
169.(1, 1, 0, t^2 , t^2 , 0)	170.(1, 1, 0, 0, 0, 1)	171.(1, 1, 0, 1, 1, 1)	172.(1, 1, 0, t , t , 1)
173.(1, 1, 0, t^2 , t^2 , 1)	174.(1, 1, 0, 0, 0, t^2)	175.(1, 1, 0, 1, 1, t^2)	176.(1, 1, 0, t , t , t^2)
177.(1, 1, 0, t^2 , t^2 , t^2)	178.(1, 1, 0, 0, 0, t)	179.(1, 1, 0, 1, 1, t)	180.(1, 1, 0, t , t , t)
181.(1, 1, 0, t^2 , t^2 , t)	182.(1, 1, 1, 1, 1, 0)	183.(1, 1, 1, 0, 0, 0)	184.(1, 1, 1, t^2 , t^2 , 0)
185.(1, 1, 1, t , t , 0)	186.(1, 1, 1, 1, 0, 1)	187.(1, 1, 1, 0, 1, 1)	188.(1, 1, 1, t^2 , t , 1)
189.(1, 1, 1, t , t^2 , 1)	190.(1, 1, 1, 1, t , t^2)	191.(1, 1, 1, 0, t^2 , t^2)	192.(1, 1, 1, t^2 , 0, t^2)
193.(1, 1, 1, t , 1, t^2)	194.(1, 1, 1, t^2 , 1, t)	195.(1, 1, 1, t , 0, t)	196.(1, 1, 1, 1, t^2 , t)
197.(1, 1, 1, 0, t , t)	198.(1, 1, t , t , t , 0)	199.(1, 1, t , t^2 , t^2 , 0)	200.(1, 1, t , 0, 0, 0)
201.(1, 1, t , 1, 1, 0)	202.(1, 1, t , t , 0, 1)	203.(1, 1, t , t^2 , 1, 1)	204.(1, 1, t , 0, t , 1)
205.(1, 1, t , 1, t^2 , 1)	206.(1, 1, t , t , t^2 , t^2)	207.(1, 1, t , t^2 , t , t^2)	208.(1, 1, t , 0, 1, t^2)
209.(1, 1, t , 1, 0, t^2)	210.(1, 1, t , 1, t , t)	211.(1, 1, t , 0, t^2 , t)	212.(1, 1, t , t^2 , 0, t)
213.(1, 1, t , t , 1, t)	214.(1, 1, t^2 , t^2 , t^2 , 0)	215.(1, 1, t^2 , t , t , 0)	216.(1, 1, t^2 , 1, 1, 0)
217.(1, 1, t^2 , 0, 0, 0)	218.(1, 1, t^2 , t^2 , 0, 1)	219.(1, 1, t^2 , t , 1, 1)	220.(1, 1, t^2 , 1, t , 1)
221.(1, 1, t^2 , 0, t^2 , 1)	222.(1, 1, t^2 , t^2 , 1, t^2)	223.(1, 1, t^2 , t , 0, t^2)	224.(1, 1, t^2 , 1, t^2 , t^2)
225.(1, 1, t^2 , 0, t , t^2)	226.(1, 1, t^2 , t , t^2 , t)	227.(1, 1, t^2 , t^2 , t , t)	228.(1, 1, t^2 , 0, 1, t)
229.(1, 1, t^2 , 1, 0, t)	230.(1, t^2 , 0, 0, 0, t)	231.(1, t^2 , 0, t^2 , 1, t)	232.(1, t^2 , 0, 1, t , t)
233.(1, t^2 , 0, t , t^2 , t)	234.(1, t^2 , 0, 0, 0, 1)	235.(1, t^2 , 0, t^2 , 1, 1)	236.(1, t^2 , 0, 1, t , 1)
237.(1, t^2 , 0, t , t^2 , 1)	238.(1, t^2 , 0, 0, 0, 0)	239.(1, t^2 , 0, t^2 , 1, 0)	240.(1, t^2 , 0, 1, t , 0)
241.(1, t^2 , 0, t , t^2 , 0)	242.(1, t^2 , 0, 0, 0, t^2)	243.(1, t^2 , 0, t^2 , 1, t^2)	244.(1, t^2 , 0, 1, t , t^2)
245.(1, t^2 , 0, t , t^2 , t^2)	246.(1, t^2 , 1, 1, 1, t)	247.(1, t^2 , 1, t , 0, t)	248.(1, t^2 , 1, 0, t^2 , t)
249.(1, t^2 , 1, t^2 , t , t)	250.(1, t^2 , 1, 1, 0, 1)	251.(1, t^2 , 1, t , 1, 1)	252.(1, t^2 , 1, 0, t , 1)

253. $(1, t^2, 1, t^2, t^2, 1)$	254. $(1, t^2, 1, 1, t, 0)$	255. $(1, t^2, 1, t, t^2, 0)$	256. $(1, t^2, 1, 0, 0, 0)$
257. $(1, t^2, 1, t^2, 1, 0)$	258. $(1, t^2, 1, 0, 1, t^2)$	259. $(1, t^2, 1, t^2, 0, t^2)$	260. $(1, t^2, 1, 1, t^2, t^2)$
261. $(1, t^2, 1, t, t, t^2)$	262. $(1, t^2, t, t, t, t)$	263. $(1, t^2, t, 1, t^2, t)$	264. $(1, t^2, t, t^2, 0, t)$
265. $(1, t^2, t, 0, 1, t)$	266. $(1, t^2, t, t, 0, 1)$	267. $(1, t^2, t, 1, 1, 1)$	268. $(1, t^2, t, t^2, t, 1)$
269. $(1, t^2, t, 0, t^2, 1)$	270. $(1, t^2, t, t, t^2, 0)$	271. $(1, t^2, t, 1, t, 0)$	272. $(1, t^2, t, t^2, 1, 0)$
273. $(1, t^2, t, 0, 0, 0)$	274. $(1, t^2, t, 0, t, t^2)$	275. $(1, t^2, t, t^2, t^2, t^2)$	276. $(1, t^2, t, 1, 0, t^2)$
277. $(1, t^2, t, t, 1, t^2)$	278. $(1, t^2, t^2, t^2, t^2, t)$	279. $(1, t^2, t^2, 0, t, t)$	280. $(1, t^2, t^2, t, 1, t)$
281. $(1, t^2, t^2, 1, 0, t)$	282. $(1, t^2, t^2, t^2, 0, 1)$	283. $(1, t^2, t^2, 0, 1, 1)$	284. $(1, t^2, t^2, t, t, 1)$
285. $(1, t^2, t^2, 1, t^2, 1)$	286. $(1, t^2, t^2, t^2, 1, 0)$	287. $(1, t^2, t^2, 0, 0, 0)$	288. $(1, t^2, t^2, t, t^2, 0)$
289. $(1, t^2, t^2, 1, t, 0)$	290. $(1, t^2, t^2, 0, t^2, t^2)$	291. $(1, t^2, t^2, t^2, t, t^2)$	292. $(1, t^2, t^2, 1, 1, t^2)$
293. $(1, t^2, t^2, t, 0, t^2)$	294. $(1, t, 0, 0, 0, t^2)$	295. $(1, t, 0, t, 1, t^2)$	296. $(1, t, 0, t^2, t, t^2)$
297. $(1, t, 0, 1, t^2, t^2)$	298. $(1, t, 0, 0, 0, 1)$	299. $(1, t, 0, t, 1, 1)$	300. $(1, t, 0, t^2, t, 1)$
301. $(1, t, 0, 1, t^2, 1)$	302. $(1, t, 0, 0, 0, t)$	303. $(1, t, 0, t, 1, t)$	304. $(1, t, 0, t^2, t, t)$
305. $(1, t, 0, 1, t^2, t)$	306. $(1, t, 0, 0, 0, 0)$	307. $(1, t, 0, t, 1, 0)$	308. $(1, t, 0, t^2, t, 0)$
309. $(1, t, 0, 1, t^2, 0)$	310. $(1, t, 1, 1, 1, t^2)$	311. $(1, t, 1, t^2, 0, t^2)$	312. $(1, t, 1, t, t^2, t^2)$
313. $(1, t, 1, 0, t, t^2)$	314. $(1, t, 1, 1, 0, 1)$	315. $(1, t, 1, t^2, 1, 1)$	316. $(1, t, 1, t, t, 1)$
317. $(1, t, 1, 0, t^2, 1)$	318. $(1, t, 1, 1, t, t)$	319. $(1, t, 1, t^2, t^2, t)$	320. $(1, t, 1, t, 0, t)$
321. $(1, t, 1, 0, 1, t)$	322. $(1, t, 1, t, 1, 0)$	323. $(1, t, 1, 0, 0, 0)$	324. $(1, t, 1, 1, t^2, 0)$
325. $(1, t, 1, t^2, t, 0)$	326. $(1, t, t, t, t, t^2)$	327. $(1, t, t, 0, t^2, t^2)$	328. $(1, t, t, 1, 0, t^2)$
329. $(1, t, t, t^2, 1, t^2)$	330. $(1, t, t, t, 0, 1)$	331. $(1, t, t, 0, 1, 1)$	332. $(1, t, t, 1, t, 1)$
333. $(1, t, t, t^2, t^2, 1)$	334. $(1, t, t, t, t^2, t)$	335. $(1, t, t, 0, t, t)$	336. $(1, t, t, 1, 1, t)$
337. $(1, t, t, t^2, 0, t)$	338. $(1, t, t, t^2, t, 0)$	339. $(1, t, t, 1, t^2, 0)$	340. $(1, t, t, 0, 0, 0)$
341. $(1, t, t, t, 1, 0)$	342. $(1, t, t^2, t^2, t^2, t^2)$	343. $(1, t, t^2, 1, t, t^2)$	344. $(1, t, t^2, 0, 1, t^2)$
345. $(1, t, t^2, t, 0, t^2)$	346. $(1, t, t^2, t^2, 0, 1)$	347. $(1, t, t^2, 1, 1, 1)$	348. $(1, t, t^2, 0, t, 1)$
349. $(1, t, t^2, t, t^2, 1)$	350. $(1, t, t^2, t^2, 1, t)$	351. $(1, t, t^2, 1, 0, t)$	352. $(1, t, t^2, 0, t^2, t)$
353. $(1, t, t^2, t, t, t)$	354. $(1, t, t^2, 1, t^2, 0)$	355. $(1, t, t^2, t^2, t, 0)$	356. $(1, t, t^2, t, 1, 0)$
357. $(1, t, t^2, 0, 0, 0)$			

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Afyonkarahisar-Emirdağ İlçesi Ekizce köyünde doğdum. İlk öğrenimimi Ekizce köyü ilkokulunda tamamladım. Ortaokulu 1988-1992 yılları arasında Emirdağ Anadolu Lisesi'nde, Liseyi 1992-1995 yılları arasında Eskişehir Yunusemre Anadolu Öğretmen Lisesi'nde okudum. 1999 yılında Balıkesir Üniversitesi, Necatibey Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldum. 1999-2006 yılları arasında Emirdağ Fatih İlköğretim Okulu'nda, 2006-2008 yılları arasında Emirdağ Lisesi'nde, 2008-2015 yılları arasında Emirdağ Metin Zülbiye Sarı Anadolu Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak çalıştım. 2009 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Anabilim dalında yüksek lisansımı tamamladım. 2015 yılından itibaren Emirdağ Anadolu Lisesi Matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladım. Halen aynı okulda Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.