



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN NİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BULANIK FARK
DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Nur ATAĞ OVALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Ocak-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

TEZ KABUL VE ONAYI

Nur ATAÖ OVALI tarafından hazırlanan “ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 27/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

.....

Danışman

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

.....

Üye

Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun/.../20.. gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. S. Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

İmza

Nur ATAK OVALI

Tarih: 27/01/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BULANIK FARK DENKLEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nur ATAĞ OVALI

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2021, 39 Sayfa

Jüri

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Zhang ve arkadaşları tarafından 2012 yılında yayımlanan “*Dynamics of a system of rational third-order difference equation*” başlıklı makale ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde; C parametresi ile başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı ve (z_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise; sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık fark denklemi, Çözümlerin varlığı, Sınırlılık, Yakınsama.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE THIRD-ORDER FUZZY DIFFERENCE EQUATIONS

Nur ATA K OVALI

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2021, 39 Pages

Jury

Prof. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Assoc. Prof. Dr. Mehmet YAVUZ

This study consists of five sections.

In the first section; basic definitions and theorems related to fuzzy sets, fuzzy numbers and difference equations are given.

In the second section; informations about some of the studies regarding the fuzzy difference equations studied before are given.

In the third section; the article entitled “*Dynamics of a system of rational third-order difference equation*” published by Zhang et al. in 2012 is discussed.

In the fourth section; we define the fuzzy difference equation

$$z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

where the parameter C and the initial conditions are positive fuzzy numbers, (z_n) is a sequence of positive fuzzy numbers. Also, the existence, the boundedness and the asymptotic behavior of the positive solutions of this equation are investigated and some numerical examples which verify our results are given.

In the fifth section, conclusions and suggestions are given.

Keywords: Fuzzy difference equation, Existence of solutions, Boundedness, Convergence.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında deneyimlerini ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, desteğini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya ve bu süre zarfında hep yanımda olan aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Nur ATAK OVALI
KONYA-2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Bulanık Kümeler.....	1
1.2. Bulanık Sayılar	6
1.3. Fark Denklemleri ile İlgili Tanım ve Teoremler	9
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	16
3. $x_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{B + y_{n-2}y_{n-1}y_n}, y_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{A + x_{n-2}x_{n-1}x_n}$ FARK DENKLEM SİSTEMİ	21
4. $z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n}$ BULANIK FARK DENKLEMİ.....	26
4.1. Nümerik Örnekler	32
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

1. GİRİŞ

Bu bölümde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1. Bulanık Kümeler

Bu kısımda; bulanık kümeler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $A \subset X$ olsun.

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanan $X_A : X \rightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik (üyelik) fonksiyonu denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.2. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olmak üzere, $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen

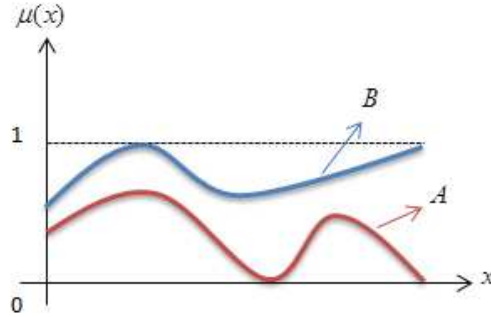
$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \quad (1.1.2)$$

kümesine X de bir bulanık (fuzzy) küme denir. Burada μ_A ya A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve her $x \in X$ için $\mu_A(x) \in I$ değerine x in A ya ait olma derecesi adı verilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.3. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $\mu_A : X \rightarrow [0,1]$, $c \in [0,1]$ olmak üzere, her $x \in X$ için $\mu_A(x) = c$ ile karakterize edilen A bulanık kümesine sabit bulanık küme denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.4. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A ile B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B ye eşit bulanık kümeler denir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.5. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A ile B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise B bulanık kümesi A bulanık kümesini kapsar denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.1. B bulanık kümesinin A bulanık kümesini kapsaması

Tanım 1.1.6. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A, B, C kümeleri X de üç bulanık küme olsun.

$$\{(x, \mu_C(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \quad (1.1.3)$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B bulanık kümelerinin kesişimi denir ve $A \cap B$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.7. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A, B, C kümeleri X de üç bulanık küme olsun.

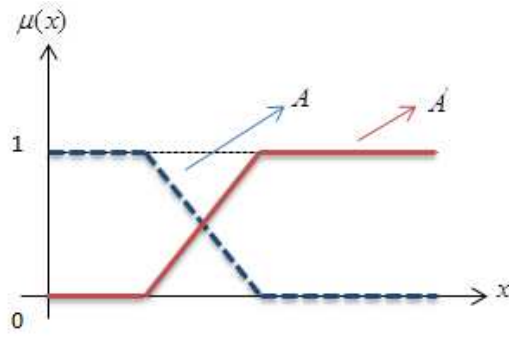
$$\{(x, \mu_C(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\} \quad (1.1.4)$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B bulanık kümelerinin birleşimi denir ve $A \cup B$ şeklinde gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.8. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A kümesi X de bir bulanık küme olsun.

$$\{(x, \mu_{A'}(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)\} \quad (1.1.5)$$

şeklinde tanımlanan kümeye A nın tümleyeni denir ve A' ile gösterilir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.2. A bulanık kümesinin tümleyeni

Tanım 1.1.9. $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve A ile B kümeleri X de iki bulanık küme olsun.

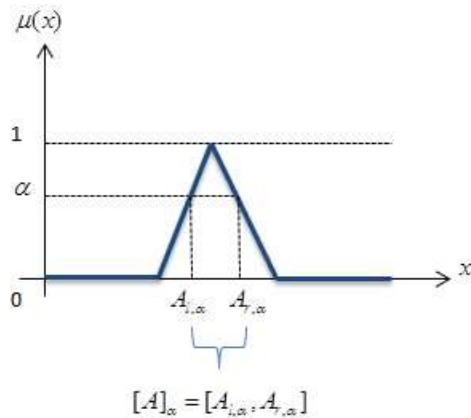
$$\{(x, \mu_{A \setminus B}(x)) : \text{Her } x \in X \text{ için } \mu_{A \setminus B}(x) = \min \{\mu_A(x), \mu_{B'}(x)\}\} \quad (1.1.6)$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B bulanık kümelerinin farkı denir ve $A \setminus B$ ile gösterilir (Zadeh, 1965).

Tanım 1.1.10. A kümesi X de bir bulanık küme ve $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, A kümesinin α -kesimi $[A]_\alpha$ ile gösterilir ve

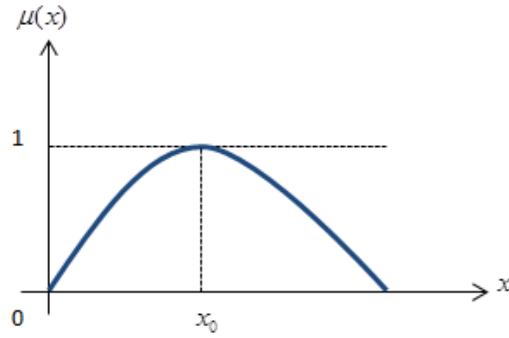
$$[A]_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1.1.7)$$

şeklinde tanımlanır (Bede, 2013).



Şekil 1.1.3. A bulanık kümesinin α -kesimi

Tanım 1.1.11. A kümesi X de bir bulanık küme olsun. Eğer en az bir $x_0 \in X$ için $\mu_A(x_0)=1$ ise A bulanık kümesi normaldir denir (Bede, 2013).



Şekil 1.1.4. A normal bulanık küme

Tanım 1.1.12. A kümesi X de bir bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin destek (dayanak) kümesi

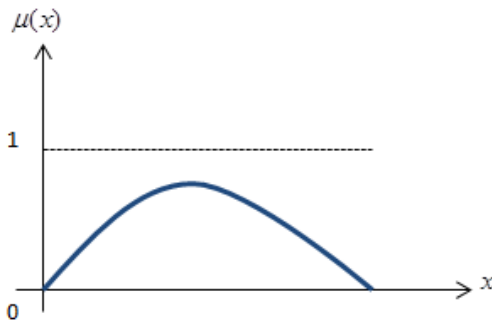
$$\text{supp}(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \quad (1.1.8)$$

şeklinde tanımlanır (Bede, 2013).

Tanım 1.1.13. A kümesi X de bir bulanık küme olsun. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

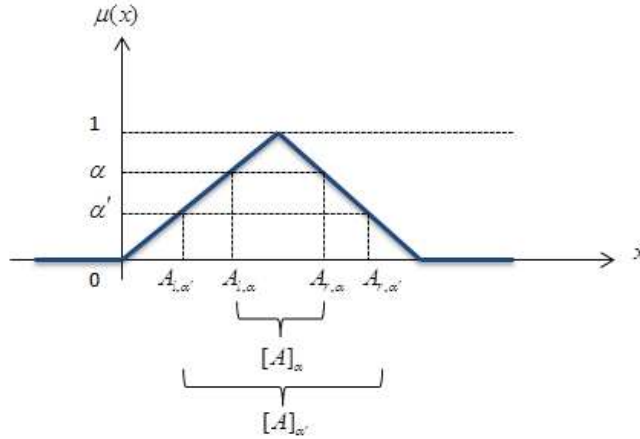
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \quad (1.1.9)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A bulanık kümesi bulanık dış bükeydir (bulanık konvektir) denir (Zadeh, 1965).



Şekil 1.1.5. A bulanık dış bükey küme

Uyarı 1.1.1. Bir bulanık kümenin α -kesimlerine karşılık gelen aralıklar ayrık aralıkların birleşimi değil, yalnız bir aralığa eşit ise bu bulanık küme bulanık dış bükeydir.



Şekil 1.1.6. A bulanık dış bükey küme

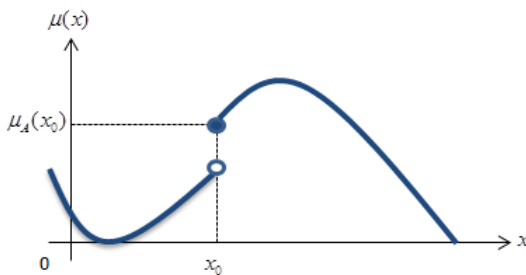
Teorem 1.1.1. (a) A bulanık kümesinin bulanık dış bükey olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in (0,1]$ için $[A]_\alpha$ kümesinin klasik anlamda dış bükey olmasıdır.

(b) A ve B bulanık kümeleri bulanık dış bükey ise $A \cap B$ bulanık kümesi de bulanık dış bükeydir (Zadeh, 1965).

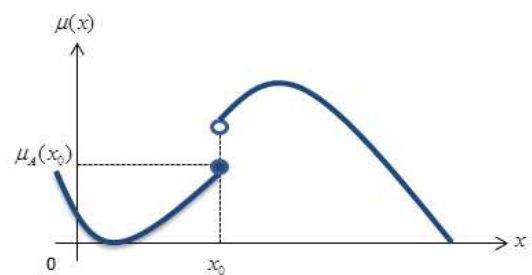
Tanım 1.1.14. A kümesi X de bir bulanık küme olsun.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu_A(x) < \mu_A(x_0) + \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa μ_A ile karakterize edilen A bulanık kümesi x_0 noktasında üst-yarı süreklidir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $|x - x_0| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $\mu_A(x_0) - \varepsilon < \mu_A(x)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa μ_A ile karakterize edilen A bulanık kümesi x_0 noktasında alt-yarı süreklidir (Bede, 2013).



Şekil 1.1.7. Üst-yarı sürekli



Şekil 1.1.8. Alt-yarı sürekli

1.2. Bulanık Sayılar

Bu kısımda; bulanık sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.2.1. $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $\mathbb{R}$ nin bir A bulanık kümesi;

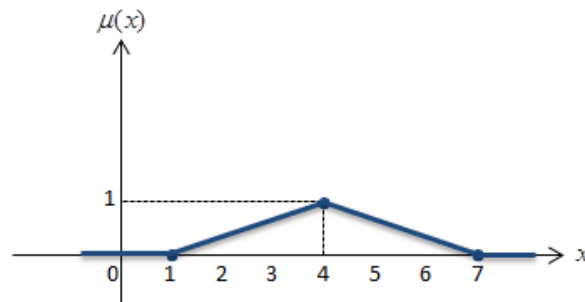
- (a) A normaldir.
- (b) A bulanık dış bükeydir.
- (c) A üst-yarı süreklidir.
- (d) $\overline{\{x \in X : \mu_A(x) > 0\}}$ kompakttır.

özelliklerini sağlıyorsa, A ya bulanık (fuzzy) sayı denir (Bede, 2013).

$\mathbb{R}$ deki tüm bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F$ ile gösterilir. Eğer $\text{supp}(A) \subset (0, \infty)$ ise A bulanık sayısı pozitifdir ve $\mathbb{R}$ deki tüm pozitif bulanık sayıların kümesi $\mathbb{R}_F^+$ ile gösterilir. Bulanık sayıların α -kesimleri, $\alpha \in (0,1]$ için $[A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ şeklindeki kapalı aralıklardır. Bulanık sayılar dış bükey bulanık kümeler olduğundan α -kesimlerine karşılık gelen aralıklar ayrık aralıkların birleşimi değil yalnız bir aralığa eşittir.

Örnek 1.2.1. $\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{7-x}{3}, & 4 \leq x \leq 7 \\ 0, & 7 < x \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $\mu_A : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu ile karakterize edilen A bulanık kümesi bir bulanık sayıdır ve grafiği



Şekil 1.2.1. A bulanık sayısı

şeklindedir. $\frac{x-1}{3} = \alpha$ ise $x = 3\alpha + 1$ ve $\frac{7-x}{3} = \alpha$ ise $x = 7 - 3\alpha$ olduğundan A bulanık kümesinin α -kesimi $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}] = [3\alpha + 1, 7 - 3\alpha]$ olarak bulunur.

Lemma 1.2.1. Eğer $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli bir fonksiyon ve $B_0, B_1, \dots, B_k$ bulanık sayılar ise

$$[f(B_0, B_1, \dots, B_k)]_\alpha = f([B_0]_\alpha, [B_1]_\alpha, \dots, [B_k]_\alpha) \quad (1.2.1)$$

dır (Papaschinopoulos ve Stefanidou, 2003).

Tanım 1.2.2. A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere, her $\alpha \in (0,1]$ için A ve B bulanık sayılarının toplamı

$$A + B = [A]_\alpha + [B]_\alpha = [A_{l,\alpha} + B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha} + B_{r,\alpha}] \quad (1.2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.3. A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla, $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere, her $\alpha \in (0,1]$ için A ve B bulanık sayıları için çıkarma işlemi

$$A - B = [A]_\alpha - [B]_\alpha = [A_{l,\alpha} - B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha} - B_{l,\alpha}] \quad (1.2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.4. A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla $[A]_\alpha = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_\alpha = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere, her $\alpha \in (0,1]$ için A ve B bulanık sayılarının çarpımı,

$$a = \min\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\} \text{ ve } b = \max\{A_{l,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{l,\alpha}B_{r,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}B_{r,\alpha}\}$$

iken

$$A \times B = [A]_{\alpha} \times [B]_{\alpha} = [a, b] \quad (1.2.4)$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak A ile B bulanık sayıları $\mathbb{R}^+$ da tanımlı ise

$$A \times B = [A]_{\alpha} \times [B]_{\alpha} = [A_{l,\alpha} B_{l,\alpha}, A_{r,\alpha} B_{r,\alpha}] \quad (1.2.5)$$

şeklindedir.

Tanım 1.2.5. A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla $[A]_{\alpha} = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_{\alpha} = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere, A ile B bulanık sayıları $\mathbb{R}^+$ da tanımlı ise A ve B bulanık sayıları için bölme işlemi

$$A / B = [A]_{\alpha} / [B]_{\alpha} = \left[\frac{A_{l,\alpha}}{B_{r,\alpha}}, \frac{A_{r,\alpha}}{B_{l,\alpha}} \right] \quad (1.2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2.6. (a) A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla $[A]_{\alpha} = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_{\alpha} = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere, her $\alpha \in (0,1]$ için A bulanık sayısının boyu

$$\|A\| = \sup \left\{ \max \left\{ |A_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha}| \right\} \right\} \quad (1.2.7)$$

şeklinde ve A ile B bulanık sayıları arasındaki uzaklık

$$D(A, B) = \sup \left\{ \max \left\{ |A_{l,\alpha} - B_{l,\alpha}|, |A_{r,\alpha} - B_{r,\alpha}| \right\} \right\} \quad (1.2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

(b) (x_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve x bir bulanık sayı olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n, x) = 0$ olmasıdır (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 1.2.7. A ile B iki bulanık sayı ve $\alpha \in (0,1]$ için A ile B nin α -kesimleri sırasıyla $[A]_{\alpha} = [A_{l,\alpha}, A_{r,\alpha}]$ ve $[B]_{\alpha} = [B_{l,\alpha}, B_{r,\alpha}]$ olmak üzere,

$$MIN(A, B) = \left[\min \{A_{l,\alpha}, B_{l,\alpha}\}, \min \{A_{r,\alpha}, B_{r,\alpha}\} \right] \quad (1.2.9)$$

ve

$$MAX(A, B) = \left[\max \{A_{l,\alpha}, B_{l,\alpha}\}, \max \{A_{r,\alpha}, B_{r,\alpha}\} \right] \quad (1.2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Klir ve Yuan, 1995).

Tanım 1.2.8. Eğer her $n \geq n_0$ için $MIN(x_n, C) = C$ ve $MAX(x_n, D) = D$ olacak şekilde C ve D bulanık sayıları varsa (x_n) bulanık sayı dizisi sınırlı ve dirençlidir (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

Tanım 1.2.9. (x_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi ve x bir pozitif bulanık sayı olsun. Eğer her $n \geq n_0$ için

$$MIN(x_m, x) = x_m \text{ ve } MIN(x_s, x) = x \quad (1.2.11)$$

veya

$$MIN(x_m, x) = x \text{ ve } MIN(x_s, x) = x_s \quad (1.2.12)$$

olacak şekilde $s, m \geq n_0$ şartını sağlayan s, m doğal sayıları varsa (x_n) dizisi x civarında salınımlıdır (Papaschinopoulos ve Papadopoulos, 2002a).

1.3. Fark Denklemleri ile İlgili Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.3.1. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0 \quad (1.3.1)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir. f bir fonksiyon olmak üzere, (1.3.1) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)) \quad (1.3.2)$$

formunda ise normal fark denklemi adını alır. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir (Soykan ve ark., 2017).

Tanım 1.3.2. $\mathbb{N}_0$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (1.3.1) denklemini sağlıyorsa, bu durumda $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}_0$ üzerinde (1.3.1) denkleminin bir çözümü denir. k ıncı mertebeden bir fark denkleminin φ ve ψ fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(n, x(n), c_1, c_2, \dots, c_k) = 0 \quad (1.3.3)$$

veya

$$x(n) = \psi(n, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (1.3.4)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözüme genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Soykan ve ark., 2017).

Teorem 1.3.1. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in I$ başlangıç koşulları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3.5)$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.3. Eğer (1.3.5) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$ ise $\bar{x}$ noktasına (1.3.5) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.4. Eğer her $n > 0$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu J aralığına (1.3.5) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.5. (1.3.5) denkleminin bir denge noktası $\bar{x}$ olmak üzere;

- (a) Eğer $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 1$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.
- (b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- (c) Eğer her $x_0, \dots, x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.
- (d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.
- (e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.6. (1.3.5) fark denkleminin bir çözümü $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına da asal periyot denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.7. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.8. I reel sayıların bir aralığı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 0, 1, \dots, k$ olmak üzere, $f : I^{k+1} \rightarrow I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}) \quad (1.3.6)$$

olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^k p_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3.7)$$

denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir. (1.3.7) denkleminde elde edilen

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k p_i \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.3.8)$$

polinom denkleminin ise (1.3.5) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Elaydi, 1995).

Teorem 1.3.2.

- (a) Eğer (1.3.8) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik karardır.
- (b) Eğer (1.3.8) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Elaydi, 1995).

Tanım 1.3.9. (1.3.5) denkleminin bir denge noktası $\bar{x}$ olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.10. Eğer her N pozitif tam sayısı için $x_n x_{n+1} \leq 0$ olacak şekilde $n \geq N$ tam sayıları mevcut ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir. (Elaydi, 1995).

Tanım 1.3.11. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.3.12. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.3.3. I ile J birer reel sayı aralığı, $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I$ ve $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow J$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her $(x_{-i}, y_{-i}) \in I \times J$ ($i=0,1,2,\dots,k$) başlangıç şartı ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}) \end{cases} \quad (1.3.9)$$

fark denklem sisteminin bir tek $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Kocic ve Ladas, 1993).

Tanım 1.3.13. Eğer (1.3.9) denklem sisteminde

$$\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}) \end{cases} \quad (1.3.10)$$

ise $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasına (1.3.9) sisteminin denge noktası denir (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.3.9) fark denklem sistemi, $X_n = (x_n, \dots, x_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k})^T \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ ve $x_n = u_n^{(0)}$, $x_{n-1} = u_n^{(1)}$, $\dots$, $x_{n-k} = u_n^{(k)}$, $y_n = v_n^{(0)}$, $y_{n-1} = v_n^{(1)}$, $\dots$, $y_{n-k} = v_n^{(k)}$ değişken değiştirmeleri ile $F : I^{k+1} \times J^{k+1} \rightarrow I^{k+1} \times J^{k+1}$ için

$$F \begin{pmatrix} u_n^{(0)} \\ u_n^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \\ v_n^{(0)} \\ v_n^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u_n^{(0)}, u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(k)}, v_n^{(0)}, v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(k)}) \\ u_n^{(0)} \\ \vdots \\ u_n^{(k-1)} \\ g(u_n^{(0)}, u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(k)}, v_n^{(0)}, v_n^{(1)}, \dots, v_n^{(k)}) \\ v_n^{(0)} \\ \vdots \\ v_n^{(k-1)} \end{pmatrix} \quad (1.3.11)$$

olmak üzere,

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3.12)$$

vektör formunda yazılabilir. Eğer (1.3.9) sistemi $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasına sahip ise (1.3.12) sisteminin denge noktasının $\bar{X} = (\bar{x}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y})^T$ şeklinde olduğu açıktır (Kocic ve Ladas, 1993).

Bu çalışmada, herhangi bir vektörün veya matrisin normu $\|\cdot\|$ ile ve (1.3.12) sisteminin bir başlangıç şartı $X_0 \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 1.3.14. (1.3.12) sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ olmak üzere;

(a) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$ iken her $n \geq 1$ için $\|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir

$\delta > 0$ varsa $\bar{X}$ denge noktası karardlıdır denir. Aksi halde, $\bar{X}$ denge noktası kararsızdır.

(b) Eğer $\bar{X}$ denge noktası karardlı ve $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \rightarrow \bar{X}$ olacak şekilde $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{X}$ denge noktası lokal asimptotik karardlıdır denir.

(c) Eğer $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \rightarrow \bar{X}$ ise $\bar{X}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{X}$ denge noktası hem lokal asimptotik karardlı hem de çekim noktası ise $\bar{X}$ denge noktası global asimptotik karardlıdır denir (Kocic ve Ladas, 1993).

(1.3.12) fark denklem sisteminin $\bar{X}$ denge noktasındaki lineerleştirilmiş sistemi; F dönüşümünün $\bar{X}$ denge noktasındaki Jakobiyeen matrisi

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_n^{(0)}} & \frac{\partial f}{\partial u_n^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial u_n^{(k)}} & \frac{\partial f}{\partial v_n^{(0)}} & \frac{\partial f}{\partial v_n^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f}{\partial v_n^{(k)}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u_n^{(0)}} & \frac{\partial g}{\partial u_n^{(1)}} & \dots & \frac{\partial g}{\partial u_n^{(k)}} & \frac{\partial g}{\partial v_n^{(0)}} & \frac{\partial g}{\partial v_n^{(1)}} & \dots & \frac{\partial g}{\partial v_n^{(k)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(2k+2) \times (2k+2)} \quad (1.3.13)$$

olmak üzere,

$$Z_{n+1} = J_F Z_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.3.14)$$

şeklindedir ve (1.3.14) sisteminin $\bar{X}$ denge noktası civarındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ olmak üzere,

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2k+2} + a_1 \lambda^{2k+1} + \cdots + a_{2k+1} \lambda + a_{2k+2} \quad (1.3.15)$$

şeklinde yazılabilir (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.3.4. (1.3.12) fark denklem sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ olsun. Eğer bu sistemin $\bar{X}$ denge noktasındaki J_F Jakobiyen matrisinin tüm öz değerleri $|\lambda| < 1$ açık birim diskinin içinde ise $\bar{X}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer öz değerlerden en az biri için $|\lambda| > 1$ ise $\bar{X}$ denge noktası kararsızdır (Kocic ve Ladas, 1993).

Teorem 1.3.5. (1.3.12) fark denklem sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ ve bu sistemin $\bar{X}$ denge noktasındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ olmak üzere,

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1.3.16)$$

şeklinde olsun. $P(\lambda)$ polinomunun tüm köklerinin $|\lambda| < 1$ açık birim diskinde olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.17)$$

matrisinin bütün Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) minörleri (Δ_n in alt matrislerinin determinantları) için $\Delta_k > 0$ olmasıdır (Kocic ve Ladas, 1993).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; bulanık fark denklemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir:

Deeba ve ark. (1996) yaptıkları çalışmada; w, q parametreleri ile x_0 başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = wx_n + q \quad (2.1)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Deeba ve Korvin (1999) yaptıkları çalışmada; a, b, m parametreleri ile C_{-1}, C_0 başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$C_{n+1} = C_n - abC_{n-1} + m \quad (2.2)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir. (2.2) denklemi kandaki karbondioksit oranını belirleyen lineer olmayan bir modelin lineerleştirilmiş halidir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos (2002a) yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile x_0 başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_n} \quad (2.3)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, salınımlılığını, sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Papadopoulos (2002b) yaptıkları çalışmada; A parametresi ile başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere, $m \in \{1, 2, \dots\}$ için

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-m}} \quad (2.4)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelenmişlerdir.

Papaschinopoulos ve Stefanidou (2003) yaptıkları çalışmada; $k \in \mathbb{N}_1$, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ için p_i ler pozitif sabitler, A_i parametreleri ile $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{A_i}{x_{n-i}^{p_i}} \quad (2.5)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerini incelemişlerdir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2005) yaptıkları çalışmada; $k \in \mathbb{N}$ için α, β parametreleri ile $z_{-k}, z_{-k+1}, \dots, z_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$z_{n+1} = \max \left\{ \frac{\alpha}{z_n}, \frac{\alpha}{z_{n-1}}, \dots, \frac{\alpha}{z_{n-k}} \right\} \quad (2.6)$$

ve

$$z_{n+1} = \max \left\{ \frac{\alpha}{z_n}, \frac{\beta}{z_{n-1}} \right\} \quad (2.7)$$

maksimumlu bulanık fark denklemlerinin çözümlerini incelemişlerdir.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006) yaptıkları çalışmada; $k, m \in \mathbb{Z}^+$ ve $d = \max\{k, m\}$ için A_0, A_1 parametreleri ile $x_i, i \in \{-d, -d+1, \dots, 0\}$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_0}{x_{n-k}} + \frac{A_1}{x_{n-m}} \right\} \quad (2.8)$$

maksimumlu bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Zhang ve ark. (2012) yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{Ax_n + x_{n-1}}{B + x_{n-1}} \quad (2.9)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Hatır ve ark. (2014) yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{B}{x_{n-1}} \quad (2.10)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını, sınırlılığını, salınımlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

He ve ark. (2014) yaptıkları çalışmada; $k, m \in \mathbb{N}$ ve $d = \max\{k, m\}$ için $x_{-d}, x_{-d+1}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı, (A_n) periyodik bir bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A_n}{x_{n-m}}, x_{n-k} \right\} \quad (2.11)$$

maksimumlu bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Zhang ve ark. (2014) yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile x_0 başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{A + x_n}{B + x_n} \quad (2.12)$$

Ricatti bulanık fark denkleminin çözümlerini incelemişlerdir.

Zhang ve ark. (2015) yaptıkları çalışmada; A parametresi ile x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + \frac{x_n}{x_{n-1}x_{n-2}} \quad (2.13)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, sürekliliğini ve global davranışını incelemişlerdir.

Khastan (2017) yaptığı çalışmada; w, q parametreleri ile x_{-1} başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_n = wx_{n-1} + q \quad (2.14)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Wang ve ark. (2017) yaptıkları çalışmada; A, B, C, D parametreleri ile $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}x_{n-2}}{D + Bx_{n-3} + Cx_{n-4}} \quad (2.15)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve asimptotik davranışını incelemiştir.

Khastan (2018) yaptığı çalışmada; β parametresi ile x_0 başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \beta x_n (1 - x_n) \quad (2.16)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Rahman ve ark. (2018) yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{A + Bx_{n-1}x_n} \quad (2.17)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Sun ve ark. (2018) yaptıkları çalışmada; $d = \max\{m, r\}$ için $z_{-d}, z_{-d+1}, \dots, z_{-1}$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı, (α_n) periyodik bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$z_n = \max \left\{ \frac{1}{z_{n-m}}, \frac{\alpha_n}{z_{n-r}} \right\} \quad (2.18)$$

maksimumlu bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir.

Wang ve Zhang (2018) yaptıkları çalışmada; A, B, C parametreleri ile x_0 başlangıç koşulu birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = A + Bx_n e^{-Cx_n} \quad (2.19)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve kararlılığını incelemişlerdir.

Khastan ve Alijani (2019) yaptıkları çalışmada; bulanık sayılar için bölmenin genelleştirilmesini kullanarak (2.3) denkleminin pozitif çözümlerinin varlığını ve global davranışını farklı bir açıdan tekrar incelemişlerdir.

Wang ve ark. (2019) yaptıkları çalışmada; $k \in \mathbb{Z}^+$ için A parametresi ile $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_0$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max \left\{ \frac{A}{x_n}, \frac{A}{x_{n-1}}, \dots, \frac{A}{x_{n-(k-1)}}, x_{n-k} \right\} \quad (2.20)$$

maksimumlu bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Han ve ark. (2020) yaptıkları çalışmada; $m, k \in \mathbb{Z}^+$ için C parametresi ve başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_n = \max \left\{ C, \frac{x_{n-m-k}}{x_{n-m}} \right\} \quad (2.21)$$

bulanık fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Sun ve ark. (2020) yaptıkları çalışmada; $k \in \mathbb{N}_1$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}$ başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı olmak üzere,

$$x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k}) \quad (2.22)$$

bulanık fark denkleminin pozitif çözümlerinin uygun koşullar için asimptotik davranışını incelemişlerdir.

$$3. \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{B + y_{n-2}y_{n-1}y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{A + x_{n-2}x_{n-1}x_n} \quad \text{FARK DENKLEM SİSTEMİ}$$

Bu bölümde; Zhang ve arkadaşlarının 2012 yılında yayımlanan “*Dynamics of a system of rational third-order difference equation*” başlıklı makalesi ele alınmıştır.

Bu çalışmada; A, B parametreleri ve x_{-i}, y_{-i} ($i = 0, 1, 2$) başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{B + y_{n-2}y_{n-1}y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{A + x_{n-2}x_{n-1}x_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışı incelenmiştir.

Teorem 3.1. Her $k \geq 0$ için (3.1) sisteminin (x_n, y_n) pozitif çözümleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar:

$$(a) \quad 0 \leq x_n \leq \begin{cases} \frac{x_{-2}}{B^{k+1}}, & n = 3k + 1, \\ \frac{x_{-1}}{B^{k+1}}, & n = 3k + 2, \\ \frac{x_0}{B^{k+1}}, & n = 3k + 3, \end{cases}$$

$$(b) \quad 0 \leq y_n \leq \begin{cases} \frac{y_{-2}}{A^{k+1}}, & n = 3k + 1, \\ \frac{y_{-1}}{A^{k+1}}, & n = 3k + 2, \\ \frac{y_0}{A^{k+1}}, & n = 3k + 3. \end{cases}$$

İspat. Teoremin iddiasının $k = 0$ için doğru olduğu açıktır. İspatı tümevarım ile tamamlamak amacıyla verilen eşitsizliklerin $k = m$ için doğru olduğunu kabul edip, $k = m + 1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$x_n = \begin{cases} x_{3(m+1)+1} \leq \frac{x_{3(m+1)-2}}{B} = \frac{x_{3m+1}}{B} \leq \frac{1}{B} \frac{x_{-2}}{B^{m+1}}, & n = 3(m+1)+1, \\ x_{3(m+1)+2} \leq \frac{x_{3(m+1)+1-2}}{B} = \frac{x_{3m+2}}{B} \leq \frac{1}{B} \frac{x_{-1}}{B^{m+1}}, & n = 3(m+1)+2, \\ x_{3(m+1)+3} \leq \frac{x_{3(m+1)+3-2}}{B} = \frac{x_{3m+4}}{B} \leq \frac{1}{B} \frac{x_0}{B^{m+1}}, & n = 3(m+1)+3 \end{cases}$$

ve

$$y_n = \begin{cases} y_{3(m+1)+1} \leq \frac{y_{3(m+1)-2}}{A} = \frac{y_{3m+1}}{A} \leq \frac{1}{A} \frac{y_{-2}}{A^{m+1}}, & n = 3(m+1)+1, \\ y_{3(m+1)+2} \leq \frac{y_{3(m+1)+1-2}}{A} = \frac{y_{3m+2}}{A} \leq \frac{1}{A} \frac{y_{-1}}{A^{m+1}}, & n = 3(m+1)+2, \\ y_{3(m+1)+3} \leq \frac{y_{3(m+1)+3-2}}{A} = \frac{y_{3m+4}}{A} \leq \frac{1}{A} \frac{y_0}{A^{m+1}}, & n = 3(m+1)+3 \end{cases}$$

tür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1. Eğer $A > 1$, $B > 1$ ise (3.1) sisteminin (x_n, y_n) çözümü $(0,0)$ denge noktasına yakınsar.

Teorem 3.2. Eğer $A > 1$, $B > 1$ ise $(0,0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.1) sisteminin $(0,0)$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistemi

$$\phi_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} \text{ ve } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{B} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\phi_{n+1} = D\phi_n \tag{3.2}$$

şeklinde olup, (3.2) sisteminin karakteristik denklemi

$$f(\lambda) = \left(\lambda^3 + \frac{1}{A} \right) \left(\lambda^3 + \frac{1}{B} \right) = 0 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Bu denklemin bütün kökleri mutlak değerce 1 den küçük olduğundan (0,0) denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 3.3. Eğer $A < 1$, $B < 1$ ise (3.1) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) (0,0) denge noktası kararsızdır.

(b) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt[3]{1-A}, \sqrt[3]{1-B})$ pozitif denge noktası kararsızdır.

İspat. (a) (3.3) ten karakteristik denklemin bütün köklerinin mutlak değerce 1 den büyük olduğu açıktır. Dolayısıyla, (0,0) denge noktası lokal kararsızdır.

(b) (3.1) sisteminin $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt[3]{1-A}, \sqrt[3]{1-B})$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistemi $\alpha = -\sqrt[3]{(1-A)(1-B)^2}$, $\beta = -\sqrt[3]{(1-A)^2(1-B)}$ için

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} \text{ ve } G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{B} & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \beta & 0 & 0 & \frac{1}{A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\varphi_{n+1} = G\varphi_n \quad (3.4)$$

şeklinde olup (3.4) sisteminin karakteristik denklemi

$$P(\lambda) = \lambda^6 - \alpha\beta\lambda^4 - \left(2\alpha\beta + \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \lambda^3 - 3\alpha\beta\lambda^2 - 2\alpha\beta\lambda - \alpha\beta + \frac{1}{AB} \quad (3.5)$$

şeklindedir. (3.5) ten

$$\Delta_6 = \begin{bmatrix} 0 & -\left(2\alpha\beta + \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) & -2\alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha\beta & -3\alpha\beta & -\alpha\beta + \frac{1}{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(2\alpha\beta + \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) & -2\alpha\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & -3\alpha\beta & -\alpha\beta + \frac{1}{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(2\alpha\beta + \frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) & -2\alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha\beta & -\alpha\beta + \frac{1}{AB} \end{bmatrix}$$

elde edilir. $k=1,2,\dots,6$ olmak üzere, her k için $\Delta_k > 0$ olmadığı açıktır. Bu nedenle, $(\bar{x}, \bar{y}) = (\sqrt[3]{1-A}, \sqrt[3]{1-B})$ pozitif denge noktası lokal kararsızdır.

Teorem 3.4. Eğer (3.1) sistemi için $A < 1$, $B < 1$ ise $i = -2, -1, 0$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (a) $(x_i, y_i) \in (0, \sqrt[3]{1-A}) \times (\sqrt[3]{1-B}, \infty)$ ise $(x_n, y_n) \in (0, \sqrt[3]{1-A}) \times (\sqrt[3]{1-B}, \infty)$,
- (b) $(x_i, y_i) \in (\sqrt[3]{1-A}, \infty) \times (0, \sqrt[3]{1-B})$ ise $(x_n, y_n) \in (\sqrt[3]{1-A}, \infty) \times (0, \sqrt[3]{1-B})$.

İspat. (a) $i = -2, -1, 0$ için $(x_i, y_i) \in (0, \sqrt[3]{1-A}) \times (\sqrt[3]{1-B}, \infty)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (3.1) sisteminden

$$x_1 = \frac{x_{-2}}{B + y_{-2}y_{-1}y_0} < \frac{\bar{x}}{B + \bar{y}^3} = \bar{x}$$

ve

$$y_1 = \frac{y_{-2}}{A + x_{-2}x_{-1}x_0} > \frac{\bar{y}}{A + \bar{x}^3} = \bar{y}$$

elde edilir. Benzer şekilde, iterasyonla

$$(x_n, y_n) \in (0, \sqrt[3]{1-A}) \times (\sqrt[3]{1-B}, \infty) \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) nın $n = k > 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. (3.1) den

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-2}}{B + y_{k-2}y_{k-1}y_k} < \frac{\bar{x}}{B + \bar{y}^3} = \bar{x}$$

ve

$$y_{k+1} = \frac{y_{k-2}}{A + x_{k-2}x_{k-1}x_k} > \frac{\bar{y}}{A + \bar{x}^3} = \bar{y}$$

elde edilir. Bu durumda, (3.6) doğru olur. Böylece (a) nın ispatı tamamlanır. Benzer şekilde, (b) de ispatlanabilir.

Sonuç 3.2. $A < 1$, $B < 1$ ve (3.1) sisteminin pozitif çözümü (x_n, y_n) olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) Eğer $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < \sqrt[3]{1-A}$ ve $y_{-2}, y_{-1}, y_0 > \sqrt[3]{1-B}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ dur.

(b) Eğer $x_{-2}, x_{-1}, x_0 > \sqrt[3]{1-A}$ ve $y_{-2}, y_{-1}, y_0 < \sqrt[3]{1-B}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ dır.

$$4. \quad z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n} \quad \text{BULANIK FARK DENKLEMİ}$$

Bu bölümde; C parametresi ile başlangıç koşulları birer pozitif bulanık sayı ve (z_n) bir pozitif bulanık sayı dizisi olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1)$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Teorem 4.1. C parametresi ve z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar ise (4.1) denkleminin bir tek pozitif (z_n) çözümü vardır.

İspat. z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları için (4.1) denklemini sağlayan bir (z_n) bulanık sayı dizisinin var olduğunu kabul edelim. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[z_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}], \quad n = -2, -1, \dots \quad (4.2)$$

ve

$$[C]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}] \quad (4.3)$$

olsun. Bu durumda, (4.1)-(4.3) ve Lemma 1.2.1 den

$$\begin{aligned} [z_{n+1}]_\alpha &= \left[\frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n} \right]_\alpha = \frac{[z_{n-2}]_\alpha}{[C]_\alpha + [z_{n-2}]_\alpha [z_{n-1}]_\alpha [z_n]_\alpha} \\ &= \frac{[L_{n-2,\alpha}, R_{n-2,\alpha}]}{[C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}] + [L_{n-2,\alpha}, R_{n-2,\alpha}][L_{n-1,\alpha}, R_{n-1,\alpha}][L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \\ &= \left[\frac{L_{n-2,\alpha}}{C_{r,\alpha} + R_{n-2,\alpha}R_{n-1,\alpha}R_{n,\alpha}}, \frac{R_{n-2,\alpha}}{C_{l,\alpha} + L_{n-2,\alpha}L_{n-1,\alpha}L_{n,\alpha}} \right] \end{aligned}$$

olup, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için

$$L_{n+1,\alpha} = \frac{L_{n-2,\alpha}}{C_{r,\alpha} + R_{n-2,\alpha} R_{n-1,\alpha} R_{n,\alpha}}, \quad R_{n+1,\alpha} = \frac{R_{n-2,\alpha}}{C_{l,\alpha} + L_{n-2,\alpha} L_{n-1,\alpha} L_{n,\alpha}} \quad (4.4)$$

elde edilir. $j = -2, -1, 0$ olmak üzere, $(L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha})$ başlangıç koşulları ve $\alpha \in (0, 1]$ için (4.4) sisteminin bir tek $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$ çözümünün var olduğu açıktır.

(4.4) sisteminin çözümü $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$ olmak üzere, $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$ nin z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları için (4.1) denkleminin (z_n) çözümünü belirlediğini, yani $n = -2, -1, \dots$ için

$$[z_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \quad (4.5)$$

olduğunu ispat edelim.

C parametresi ve z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$ iken

$$\begin{aligned} 0 < C_{l,\alpha_1} &\leq C_{l,\alpha_2} \leq C_{r,\alpha_2} \leq C_{r,\alpha_1}, \\ 0 < L_{-2,\alpha_1} &\leq L_{-2,\alpha_2} \leq R_{-2,\alpha_2} \leq R_{-2,\alpha_1}, \\ 0 < L_{-1,\alpha_1} &\leq L_{-1,\alpha_2} \leq R_{-1,\alpha_2} \leq R_{-1,\alpha_1}, \\ 0 < L_{0,\alpha_1} &\leq L_{0,\alpha_2} \leq R_{0,\alpha_2} \leq R_{0,\alpha_1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$L_{n,\alpha_1} \leq L_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_2} \leq R_{n,\alpha_1} \quad (4.7)$$

olduğunu tümevarım ile ispat edelim. (4.6) dan $n = -2, -1, 0$ için (4.7) nin doğru olduğu açıktır. Bu durumda; (4.7) nin $k \in \mathbb{N}_1$ ve $n \leq k$ için doğru olduğunu kabul edip, $n = k + 1$ için doğru olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (4.4), (4.6) ve (4.7) den

$$\begin{aligned} L_{k+1,\alpha_1} &= \frac{L_{k-2,\alpha_1}}{C_{r,\alpha_1} + R_{k-2,\alpha_1} R_{k-1,\alpha_1} R_{k,\alpha_1}} \leq \frac{L_{k-2,\alpha_2}}{C_{r,\alpha_2} + R_{k-2,\alpha_2} R_{k-1,\alpha_2} R_{k,\alpha_2}} = L_{k+1,\alpha_2}, \\ L_{k+1,\alpha_2} &= \frac{L_{k-2,\alpha_2}}{C_{r,\alpha_2} + R_{k-2,\alpha_2} R_{k-1,\alpha_2} R_{k,\alpha_2}} \leq \frac{R_{k-2,\alpha_2}}{C_{l,\alpha_2} + L_{k-2,\alpha_2} L_{k-1,\alpha_2} L_{k,\alpha_2}} = R_{k+1,\alpha_2} \end{aligned}$$

ve

$$R_{k+1,\alpha_2} = \frac{R_{k-2,\alpha_2}}{C_{l,\alpha_2} + L_{k-2,\alpha_2} L_{k-1,\alpha_2} L_{k,\alpha_2}} \leq \frac{R_{k-2,\alpha_1}}{C_{l,\alpha_1} + L_{k-2,\alpha_1} L_{k-1,\alpha_1} L_{k,\alpha_1}} = R_{k+1,\alpha_1}$$

olup, $L_{k+1,\alpha_1} \leq L_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_2} \leq R_{k+1,\alpha_1}$ elde edilir. Dolayısıyla, (4.7) sağlanır. (4.4) ten $\alpha \in (0,1]$ için

$$L_{1,\alpha} = \frac{L_{-2,\alpha}}{C_{r,\alpha} + R_{-2,\alpha} R_{-1,\alpha} R_{0,\alpha}}, \quad R_{1,\alpha} = \frac{R_{-2,\alpha}}{C_{l,\alpha} + L_{-2,\alpha} L_{-1,\alpha} L_{0,\alpha}} \quad (4.8)$$

elde edilir. C parametresi ve z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olduğundan $C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}, L_{-2,\alpha}, R_{-2,\alpha}, L_{-1,\alpha}, R_{-1,\alpha}, L_{0,\alpha}$ ve $R_{0,\alpha}$ sol süreklidir. Dolayısıyla, (4.8) den $L_{1,\alpha}$ ve $R_{1,\alpha}$ nın da sol sürekli olduğu görülür. Benzer şekilde, iterasyonla $n \in \mathbb{N}_1$ için $L_{n,\alpha}$ ve $R_{n,\alpha}$ nın sol sürekli olduğu gösterilebilir.

Şimdi, $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]}$ kümesinin kompakt olduğunu gösterelim. Bunun için $\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$ nın sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $n=1$ olduğunu kabul edelim. C parametresi ve z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olduğundan

$$\begin{aligned} [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}] &\subset [M_C, N_C], \\ [L_{-2,\alpha}, R_{-2,\alpha}] &\subset [M_{-2}, N_{-2}], \\ [L_{-1,\alpha}, R_{-1,\alpha}] &\subset [M_{-1}, N_{-1}], \\ [L_{0,\alpha}, R_{0,\alpha}] &\subset [M_0, N_0] \end{aligned} \quad (4.9)$$

olacak şekilde $M_C, M_{-2}, M_{-1}, M_0, N_C, N_{-2}, N_{-1}, N_0 > 0$ sabitleri mevcuttur. (4.8) ve (4.9) dan kolaylıkla $\alpha \in (0,1]$ için

$$[L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}] \subset \left[\frac{M_{-2}}{N_C + N_{-2} N_{-1} N_0}, \frac{N_{-2}}{M_C + M_{-2} M_{-1} M_0} \right] \quad (4.10)$$

elde edilir. Buradan, $\alpha \in (0,1]$ için

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}] \subset \left[\frac{M_{-2}}{N_C + N_{-2} N_{-1} N_0}, \frac{N_{-2}}{M_C + M_{-2} M_{-1} M_0} \right] \quad (4.11)$$

olduğu açıktır. (4.11) den $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}]}$ nın kompakt ve $\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{1,\alpha}, R_{1,\alpha}]} \subset (0, \infty)$ olduğu görülür. Benzer şekilde, tümevarımla $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \text{ kompakt ve } \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]} \subset (0, \infty) \quad (4.12)$$

olduğu ispat edilebilir. (4.7), (4.12) ve $L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}$ sol sürekli olduğundan $[L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$ (4.5) te tanımlanan (z_n) pozitif bulanık sayı dizisini belirler.

Şimdi; z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları için (z_n) dizisinin (4.1) denkleminin çözümü olduğunu gösterelim. Her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\begin{aligned} [z_{n+1}]_\alpha &= [L_{n+1,\alpha}, R_{n+1,\alpha}] \\ &= \left[\frac{L_{n-2,\alpha}}{C_{r,\alpha} + R_{n-2,\alpha} R_{n-1,\alpha} R_{n,\alpha}}, \frac{R_{n-2,\alpha}}{C_{l,\alpha} + L_{n-2,\alpha} L_{n-1,\alpha} L_{n,\alpha}} \right] \\ &= \left[\frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2} z_{n-1} z_n} \right]_\alpha \end{aligned}$$

olduğundan (z_n) dizisi (4.1) denkleminin çözümüdür. z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları için (4.1) denkleminin (z_n) den farklı bir $(\tilde{z}_n)$ çözümünün var olduğunu kabul edelim. $\alpha \in (0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$[\tilde{z}_n]_\alpha = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}] \quad (4.13)$$

olduğu gösterilebilir. (4.5) ve (4.13) ten $n = -2, -1, 0, \dots$ ve $\alpha \in (0,1]$ için $[z_n]_\alpha = [\tilde{z}_n]_\alpha$ olduğu dolayısıyla, $(z_n) = (\tilde{z}_n)$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $C_{l,\alpha} > 1$ ise (4.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlı ve dirençlidir.

İspat. $[C]_\alpha = [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}] \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [C_{l,\alpha}, C_{r,\alpha}]} \subset [A, B]$ için (3.1) sistemini ele alalım. A_j, B_j nin verildiği $x_j = A_j, y_j = B_j$ başlangıç koşulları için (3.1) sisteminin çözümü (x_n, y_n) olsun.

$$[L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha}] \subset \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha}]} \subset [A_j, B_j], \quad j = -2, -1, 0 \quad (4.14)$$

olmak üzere,

$$x_1 = \frac{x_{-2}}{B + y_{-2}y_{-1}y_0} = \frac{A_{-2}}{B + B_{-2}B_{-1}B_0} \leq \frac{L_{-2,\alpha}}{C_{r,\alpha} + R_{-2,\alpha}R_{-1,\alpha}R_{0,\alpha}} = L_{1,\alpha} \quad (4.15)$$

ve

$$y_1 = \frac{y_{-2}}{A + x_{-2}x_{-1}x_0} = \frac{B_{-2}}{A + A_{-2}A_{-1}A_0} \geq \frac{R_{-2,\alpha}}{C_{l,\alpha} + L_{-2,\alpha}L_{-1,\alpha}L_{0,\alpha}} = R_{1,\alpha} \quad (4.16)$$

gerçeklenir. Benzer şekilde, iterasyonla $n \in \mathbb{N}_1$ için $x_n \leq L_{n,\alpha}$ ve $R_{n,\alpha} \leq y_n$ olduğu gösterilebilir. Her $\alpha \in (0,1]$ için $C_{l,\alpha} > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $A > 1$ ve $B > 1$ olur. Teorem 3.1 den (3.1) sisteminin (x_n, y_n) çözümü dolayısıyla (4.1) denkleminin (z_n) çözümü sınırlı ve dirençlidir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3. Eğer $C_{r,\bar{\alpha}} < 1$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ varsa (4.1) denklemi sınırsız çözümlere sahiptir.

İspat. $C_{r,\bar{\alpha}} < 1$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha} \in (0,1]$ nin var olduğunu kabul edelim. Eğer $n = -2, -1, \dots$ için $C_{l,\bar{\alpha}} = A$, $C_{r,\bar{\alpha}} = B$, $L_{n,\bar{\alpha}} = x_n$, $R_{n,\bar{\alpha}} = y_n$ ise (4.4) sistemine Sonuç 3.2 (a) uygulanabilir.

Eğer $j = 0, 1, 2$ için (x_{-j}, y_{-j}) başlangıç koşulları $A \leq B = C_{r,\bar{\alpha}} < 1$, $x_{-2}, x_{-1}, x_0 < \sqrt[3]{1-A}$ ve $y_{-2}, y_{-1}, y_0 > \sqrt[3]{1-B}$ eşitsizliklerini sağlarsa, (4.4) sisteminin $\alpha = \bar{\alpha}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty \quad (4.17)$$

olacak şekilde (x_n, y_n) çözümü vardır. Dahası, $j = 0, 1, 2$ için x_{-j}, y_{-j} başlangıç koşulları $x_{-j} < y_{-j}$ eşitsizliğini sağlarsa, $j = -2, -1, 0$ için

$$[z_j]_\alpha = [L_{j,\alpha}, R_{j,\alpha}], \quad \alpha \in (0,1] \quad (4.18)$$

ve

$$[z_j]_{\bar{\alpha}} = [L_{j,\bar{\alpha}}, R_{j,\bar{\alpha}}] = [x_j, y_j] \quad (4.19)$$

olacak şekilde z_{-2}, z_{-1}, z_0 pozitif bulanık sayıları bulunabilir. z_{-2}, z_{-1}, z_0 başlangıç koşulları ve $\alpha \in (0,1]$ için $[z_n]_{\alpha} = [L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha}]$ olmak üzere, (z_n) in (4.1) denkleminin çözümü olduğunu kabul edelim. (4.18), (4.19) sağlanıyorsa ve $(L_{n,\alpha}, R_{n,\alpha})$ (4.4) sisteminin çözümü ise

$$[z_n]_{\bar{\alpha}} = [L_{n,\bar{\alpha}}, R_{n,\bar{\alpha}}] = [x_n, y_n] \quad (4.20)$$

elde edilir. Bu durumda; (4.17), (4.20) den ve her $\alpha \in (0,1]$ için

$$\|z_n\| = \sup_{\alpha \in (0,1]} \max \{ |L_{n,\alpha}|, |R_{n,\alpha}| \} \geq \max \{ |L_{n,\bar{\alpha}}|, |R_{n,\bar{\alpha}}| \} = R_{n,\bar{\alpha}} \quad (4.21)$$

olduğundan (z_n) in sınırsız olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için $C_{l,\alpha} > 1$ ise (4.1) denkleminin bütün (z_n) pozitif çözümleri sifıra yakınsar.

İspat. (z_n) dizisi (4.1) denkleminin (4.2) ile (4.3) ü sağlayan bir pozitif çözümü olsun. Her $\alpha \in (0,1]$ için $C_{l,\alpha} > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, (4.4) sistemine Sonuç 3.1 uygulanabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,\alpha} = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.22) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(z_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{\alpha \in (0,1]} \left\{ \max \{ |L_{n,\alpha} - 0|, |R_{n,\alpha} - 0| \} \right\} \right) = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1. Nümerik Örnekler

Bu kısımda, elde edilen teorik sonuçları desteklemek için C parametresinin farklı değerleri dikkate alınarak bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Örneklerde kullanılacak olan başlangıç şartları aşağıda verilmiştir:

$$z_{-2}(x) = \begin{cases} (5x - 0.50) / 2, & 0.10 \leq x \leq 0.50 \\ (4.50 - 5x) / 2, & 0.50 \leq x \leq 0.90 \end{cases}$$

$$z_{-1}(x) = \begin{cases} 20x - 10, & 0.50 \leq x \leq 0.55 \\ 12 - 20x, & 0.55 \leq x \leq 0.60 \end{cases} \quad (4.24)$$

$$z_0(x) = \begin{cases} 20x - 4, & 0.20 \leq x \leq 0.25 \\ 6 - 20x, & 0.25 \leq x \leq 0.30 \end{cases}$$

(4.24) ten her $\alpha \in (0,1]$ için

$$[z_{-2}]_\alpha = \left[\frac{2\alpha + 0.50}{5}, \frac{4.50 - 2\alpha}{5} \right]$$

$$[z_{-1}]_\alpha = \left[\frac{\alpha + 10}{20}, \frac{12 - \alpha}{20} \right] \quad (4.25)$$

$$[z_0]_\alpha = \left[\frac{\alpha + 4}{20}, \frac{6 - \alpha}{20} \right]$$

elde edilir.

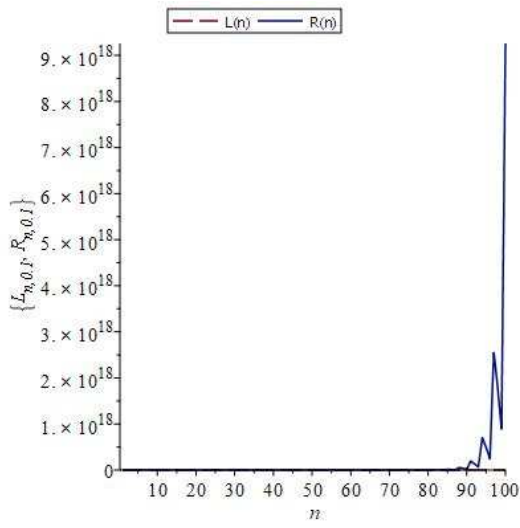
Örnek 4.1.1. (4.24) te verilen başlangıç şartları ve

$$C = \begin{cases} 4x-1, & 0.25 \leq x \leq 0.50, \\ 3-4x, & 0.50 \leq x \leq 0.75, \end{cases} \quad (4.26)$$

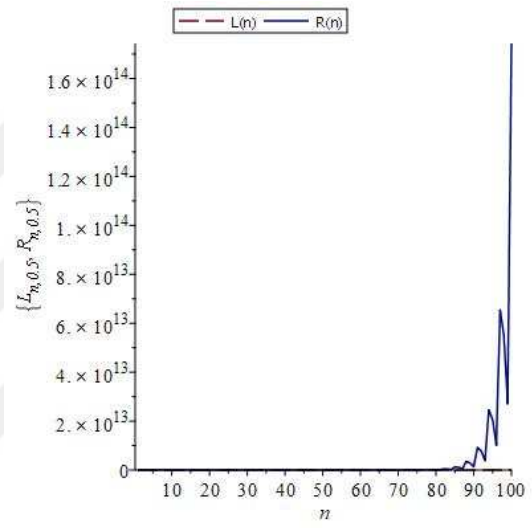
$$[C]_{\alpha} = \left[\frac{\alpha+1}{4}, \frac{3-\alpha}{4} \right], \quad (4.27)$$

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [C]_{\alpha} = [0.25, 0.75] \quad (4.28)$$

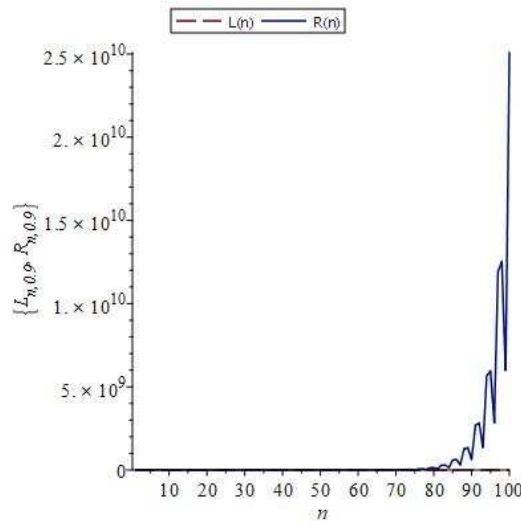
parametresi için (4.1) denklemini sınırsız çözümlere sahiptir.



Şekil 4.1.1. $\alpha = 0.1$



Şekil 4.1.2. $\alpha = 0.5$



Şekil 4.1.3. $\alpha = 0.9$

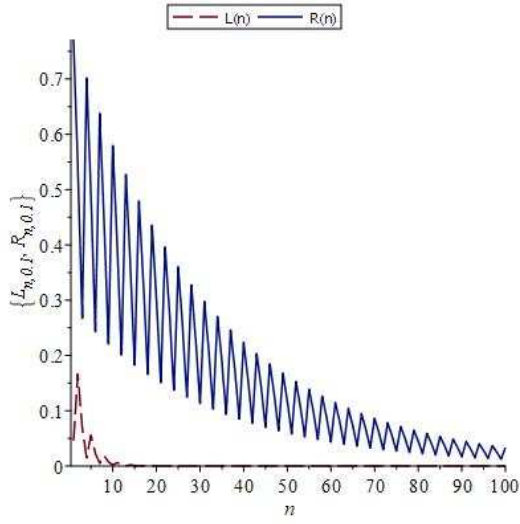
Örnek 4.1.2. (4.24) te verilen başlangıç koşulları ve

$$C = \begin{cases} x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 3-x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (4.29)$$

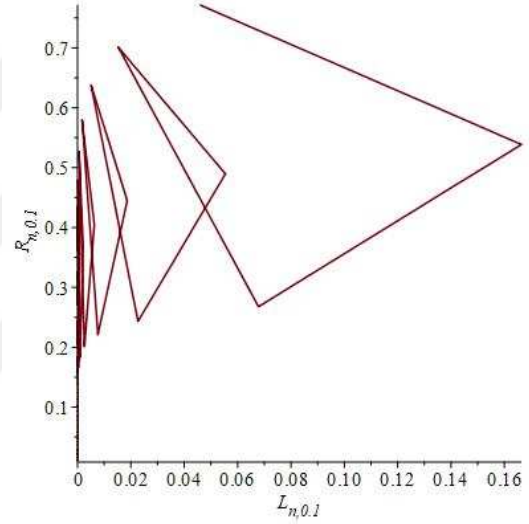
$$[C]_{\alpha} = [\alpha+1, 3-\alpha] \quad (4.30)$$

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [C]_{\alpha}} = [1, 3] \quad (4.31)$$

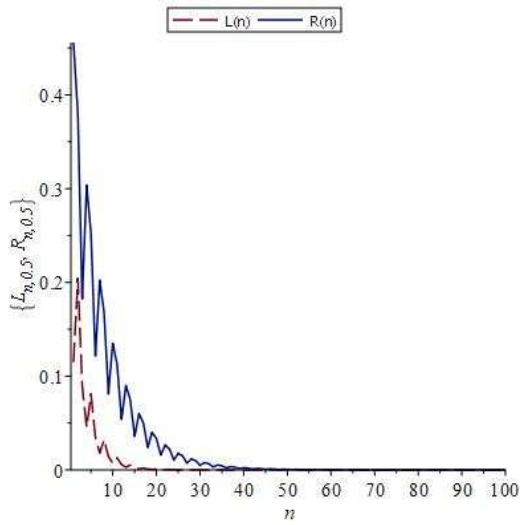
parametresi için (4.1) denkleminin çözümleri sıfıra yakınsar.



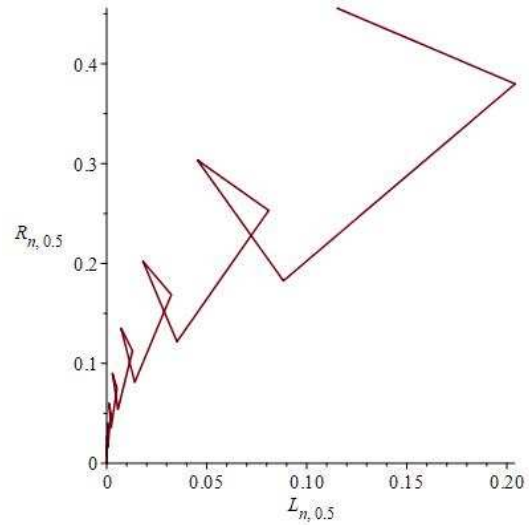
Şekil 4.1.4. $\alpha = 0.1$



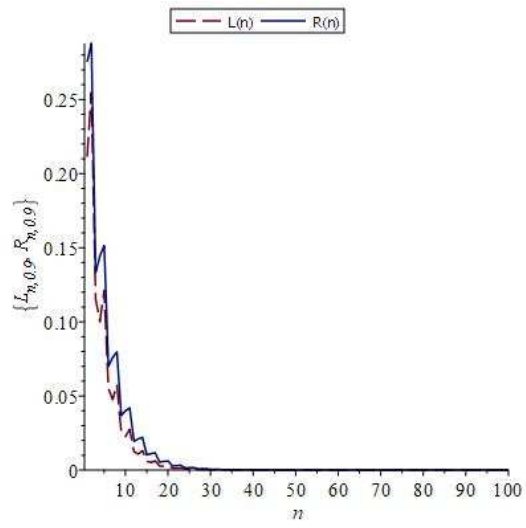
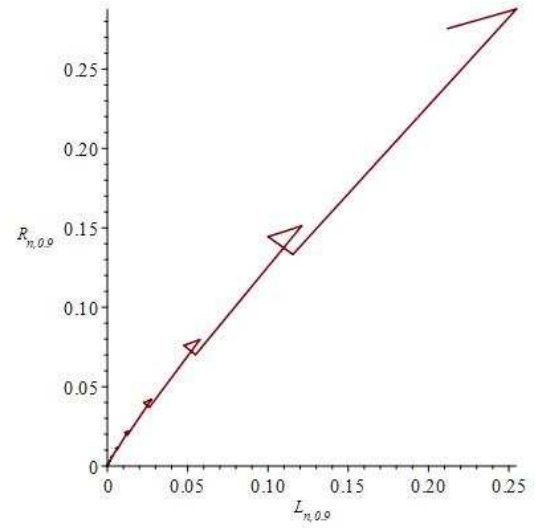
Şekil 4.1.5. $\alpha = 0.1$



Şekil 4.1.6. $\alpha = 0.5$



Şekil 4.1.7. $\alpha = 0.5$

Şekil 4.1.8. $\alpha = 0.9$ Şekil 4.1.9. $\alpha = 0.9$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; literatürde var olan bulanık fark denklemlerinin ışığında C parametresi ve başlangıç koşulları pozitif bulanık sayılar olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{z_{n-2}}{C + z_{n-2}z_{n-1}z_n}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bulanık fark denklemi tanımlanmış, bu denklemin pozitif çözümlerinin varlığı, sınırlılığı ve asimptotik davranışı incelenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda, bu çalışmada incelenen denklemdeki parametre sayısı veya mertebe artırılarak daha genel denklemler tanımlanabilir. Tanımlanan yeni denklemlerin çözümlerinin varlığı ve davranışı incelenebilir.

KAYNAKLAR

Atak, N., Yalçınkaya, İ. and Tollu, D. T., 2020, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, in press.

Bede, B., 2013, Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer*, New York.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Deeba, E. Y., De Korvin, A. and Koh, E. L., 1996, A fuzzy difference equation with an application, *Journal of Difference Equations and Applications*, 2, 365-374.

Deeba, E. Y. and De Korvin, A., 1999, Analysis by fuzzy difference equations of a model of CO₂ level in the blood, *Applied Mathematics Letters*, 12, 33-40.

Diamond, P. and Kloeden, P., 1994, Metric Spaces of Fuzzy Sets, World Scientific, Singapore.

Elaydi, S. N., 1995, An Introduction to Difference Equations, *Springer-Verlag*, New York.

Han, C., Su, G., Li, L., Xia, G. and Sun, T., 2020, Eventual periodicity of the fuzzy max-difference equation $x_n = \max\{C, x_{n-m-k} / x_{n-m}\}$, *Advances in Difference Equations*, 673, 10 pages.

Hatir, E., Mansour, T. and Yalcinkaya, İ., 2014, On a fuzzy difference equation, *Utilitas Mathematica*, 93, 135-151.

He, Q., Tao, C., Sun, T., Liu, X. and Su, D., 2014, Periodicity of the positive solutions of a fuzzy max-difference equation, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, Article ID 760247, 4 pages.

Khastan, A., 2017, New solutions for first order linear fuzzy difference equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312, 156-166.

Khastan, A., 2018, Fuzzy logistic difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 15(7), 55-66.

Khastan, A. and Alijani, Z., 2019, On the new solutions to the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Fuzzy Sets and Systems*, 358, 64-83.

Klir, G. and Yuan, B., 1995, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht.

- Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002a, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + B / x_n$, *Soft Computing*, 6, 456-461.
- Papaschinopoulos, G. and Papadopoulos, B. K., 2002b, On the fuzzy difference equation $x_{n+1} = A + x_n / x_{n-m}$, *Fuzzy Sets and Systems*, 129, 73-81.
- Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2003, Boundedness and asymptotic behavior of the solutions of a fuzzy difference equation, *Fuzzy Sets and Systems*, 140, 523-539.
- Rahman, G., Din, Q., Faizullah, F. and Khan, F. M., 2018, Qualitative behavior of a second-order fuzzy difference equation, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 34, 745-753.
- Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.
- Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2005, Behavior of the positive solutions of fuzzy max-difference equations, *Advances in Difference Equations*, 2005, 153-172.
- Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max-difference equation, *Information Sciences*, 176, 3694-3710.
- Sun, T., Xi, H., Su, G. and Qin, B., 2018, Dynamics of the fuzzy difference equation $z_n = \max\{1 / z_{n-m}, \alpha_n / z_{n-r}\}$, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 11, 477-485.
- Sun, T., Su, G. and Qin, B., 2020, On the fuzzy difference equation $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-k})$, *Fuzzy Sets and Systems*, 387, 81-88.
- Wang, C., Su, X., Liu, P., Hu, X. and Li, R., 2017, On the dynamics of a five-order fuzzy difference equation, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 3303-3319.
- Wang, G. and Zhang, Q., 2018, Dynamical behavior of first-order nonlinear fuzzy difference equation, *International Journal of Computer Science*, 45(4), 552-559.
- Wang, C., Wei, W., Yang, Q. and Li, Y., 2019, On the periodicity of a max-type fuzzy difference equations, *American Journal of Electromagnetics and Applications*, 7(2), 13-18.
- Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- Zhang, Q., Yang, L. and Liu, J., 2012, Dynamics of a system of rational third-order difference equation, *Advances in Difference Equations*, 2012:136, 6 pages.
- Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2012, Behavior of solutions to a fuzzy nonlinear difference equation, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 9, 1-12.
- Zhang, Q., Yang, L. and Liao, D., 2014, On first-order fuzzy Ricatti difference equation, *Information Sciences*, 270, 226-236.
- Zhang, Q., Liu, J. and Luo, Z., 2015, Dynamical behavior of a third-order rational fuzzy difference equation, *Advances in Difference Equations*, 2015, 18 pages.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nur ATAK OVALI
Uyruğu : T.C
Doğum Yeri ve Tarihi : Keçiören / Ankara, 1993
Telefon : 05536027406
e-mail : nuratak993@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Farabi Lisesi, Keçiören, Ankara	2011
Üniversite	: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Yenimahalle, Ankara	2015
Yüksek Lisans :	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Meram, Konya	2021

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2017-2018	Özel Kahramanlar Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2018-	Sarayönü Çok Programlı Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER

İngilizce (Orta Düzey)

YAYINLAR

Atak, N., Yalçinkaya, İ. and Tollu, D. T., 2021, On a third-order fuzzy difference equation, *Journal of Prime Research in Mathematics*, (kabul edildi).