T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# SÜREKLİ KESİRLER VE PELL DENKLEMLERİNE UYGULAMALARI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ABDURRAHMAN AKGÜL**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI**
**Prof. Dr. Zafer ŞİAR**

**BİNGÖL-2023**

**T.C.**
**BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# SÜREKLİ KESİRLER VE PELL DENKLEMLERİNE UYGULAMALARI

Prof. Dr. Zafer ŞİAR danışmanlığında, Abdurrahman AKGÜL tarafından hazırlanan bu çalışma 29/09/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Başkan | : Prof. Dr. Zafer ŞİAR | *İmza* | : |
| Üye | : Doç. Dr. Bahar DEMİRTÜRK | *İmza* | : |
| Üye | : Doç. Dr. Emel BİÇER | *İmza* | : |

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ........./ ……../ ………….. tarih ve . . . . . ./ . . . . . . . . . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. Zafer ŞİAR**
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖNSÖZ

Tez çalışmaları süresince yardımlarını ve bilgi birikimini esirgemeyen, çalışmaların tamamlanabilmesi için gerekli desteği veren değerli hocam Prof. Dr. Zafer ŞİAR'a teşekkür ederim.

Yüksek lisans ders dönemi ve tez aşamasında bana her türlü yardımları olan Matematik Bölümü öğretim üyelerine, desteklerini esirgemeyip birlikte eğitim aldığımız öğretmen arkadaşlarıma, yüksek lisansa başlamama vesile olan Mustafa ALTUNER ve Mehmet YILMAZ'a teşekkür ederim.

Son olarak tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, başarılarımda en büyük pay sahibi olan başta annem ile babam olmak üzere; kardeşlerim, eşim ve çocuklarıma teşekkürü bir borç bilirim.

**Abdurrahman AKGÜL**
**Bingöl 2023**

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

N : Doğal sayılar kümesi

R : Reel sayılar kümesi

Z : Tam sayılar kümesi

[ ] : Sürekli kesir

≡ : Denktir

a | b : a,b’yi böler

| | : Mutlak değer

⇒ : İse bağlacı

⇔ : Ancak ve ancak bağlacı

∈ : Elemanıdır

∀ : Her

⟦ ⟧ : Tam Değer

# ŞEKİLLER LİSTESİ

# TABLOLAR LİSTESİ

# SÜREKLİ KESİRLER VE PELL DENKLEMLERİNE UYGULAMALARI


## ÖZET

Tez çalışmamız 4 ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm girişten oluşmaktadır. Bu bölümde sürekli kesirlerin ve Pell denkleminin tarihçesinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde ise Sürekli kesirler başlığı altında, sonlu ve sonsuz sürekli kesirlerin yaklaşımları, bu yaklaşımlarla ilgili bazı teoremler, $\sqrt{d}$'nin periyodik açılımı, periyodik sürekli kesirler ve tamamıyla periyodik sürekli kesirlerden bahsedilmektedir. Ayrıca, Pell denklemlerinin çözümünde yardımcı olacak sonsuz sürekli kesirlerin yaklaşımları ile ilgili teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise sonsuz sürekli kesirlerin yaklaşımlarını kullanarak d tamkare olmayan bir tamsayı olmak üzere, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denkleminin temel çözümü ve tüm tamsayı çözümlerinin nasıl bulunacağından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde ise sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.



**Anahtar Kelimeler**: Sonlu ve sonsuz Sürekli kesirler , Sonlu ve sonsuz Sürekli kesirlerin yaklaşımları, Periyodik sürekli kesirler, Pell denklemi, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell Denklemlerinin Çözümü.

# CONTINUED FRACTIONS AND APPLICATIONS TO PELL EQUATIONS


## ABSTRACT

Our study consists of 4 main sections. The first section is the introduction. In this section, the history of continued fractions and the Pell equation is discussed.

In the second section, under the title of Continued Fractions, the approximations of finite and infinite continued fractions, some theorems related to these approximations, the periodic expansion of $\sqrt{d}$, periodic continued fractions, and completely periodic continued fractions are discussed. Also, the theorems related to the approximations of infinite continued fractions that assist in solving Pell equations are given.

In the third section, using the approximations of infinite continued fractions, it is discussed how to find the fundamental solution and all integer solutions of the equation $x^2 - dy^2 = \pm 1$, where d is a non-square positive integer.

The fourth section discusses the results and recommendations.



**Keywords:** Finite and infinite continued fractions, approximations of finite and infinite continued fractions, periodic continued fractions, the Pell equation, and the solution of Pell equations, $x^2 - dy^2 = \pm 1$.

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Kesirlerin Tarihçesi

Sürekli kesirlerin tarihi matematiksel kavramlar arasında en uzun olanlardan biridir. Sürekli kesirler sayıları ifade etmek için kullanışlı bir görev üstlenir. M.Ö. 300. ile M.S. 200. yılları arasında matematikçiler sayıları ifade etmek ve Diophantine denklemlerinin çözümleri için farklı algoritmalar kullandılar. Bu algoritmaların çoğu, sonraki algoritmaların geliştirilmesinde incelenmiş ve modellenmiştir. Sürekli kesirler, 18. yüzyıl boyunca matematik alanında sınırlı olarak kullanılmaktaydı. Yirminci yüzyılın başlarından itibaren sürekli kesirler farklı alanlarda da yaygınlaştı. Örneğin; Robert M. Corless, kaos teorisiyle sürekli kesirler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Sürekli kesirler, reel sayılara rasyonel yaklaşımları hesaplamak ve Diophantine ve Pell denklemlerini çözmek için bilgisayar algoritmalarında da kullanılmıştır[1].

1748'de, Leonhard Euler, ünlü kitabı 'Introductio in analysin infinitorum'da sürekli kesirler teorisinin ilk kapsamlı ve sistematik açıklamasını yapmıştır[2].

Sürekli kesirlerin asıl keşfi iki matematikçiye aittir. Bu matematikçilerden birincisi Rafael Bombelli, diğeri ise Pietro Antonio Cataldi'dir [2]. Rafael Bombelli ''L'Algebra Opera'' adlı kitabında sonsuz sürekli kesirleri kullanarak karekökleri bulmaya çalışmıştır[3]. 1579'da L'Agebra Opera adlı kitabının ikinci baskısında 13 sayısının karekökünü bulmak için modern yöntemlerle ifade edilebilecek bir algoritma verdi. Bu algoritma

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}$$

şeklindedir.

Öte yandan, Pietro Antonio Cataldi de karekökleri çıkarmak için Bombelli ile aynı yöntemi izledi ancak sürekli kesirlerin gösterimini geliştiren ilk kişiydi. Cataldi, sürekli kesrilerin gösterimi için

$$a_0. \& \frac{n_1}{d_1} \& \frac{n_2}{d_2} \& \dots \tag{1.1.1}$$

formunu kullanıma sunmuştur. Ayrıca, sürekli kesirlerin bazı özelliklerini vermiştir[2].

# 2. SÜREKLİ KESİRLER

**Tanım 2.1.** $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ reel sayılar veya kompleks sayılar cisminin elemanları olmak üzere

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}}$$

formuna bir sürekli kesir denir. Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots$ $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sayıları sonlu veya sonsuz olabilir[4].

Yukarıdaki formda $b_0, b_1, b_2, \ldots$ sayılarının hepsi 1 olarak alındığında elde edilen

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{2.1}$$

sürekli kesir formuna basit sürekli kesir denir ve $[a_0; a_1, a_2 \ldots]$ şeklinde ifade edilir[5].

Sürekli kesirler, aşağıda kısaca bahsedilen bir çok konuda sağladığı kolaylıklar sebebiyle matematikçileri etkilemiştir. Bunlar,

1. Sürekli kesir yaklaşımlarından faydalanılarak küçük hata payına sahip ölçekleme modelleri oluşturulabilir.
2. Diğer yöntemlere göre karşılaştırma bakımından daha hızlı ve kullanışlılardır.
3. İstenilen özelliklere göre daha çok hesaplama yapılabilir.
4. Bütün reel sayılar sürekli kesirler tarafından tam olarak ifade edilebilir[6].

Sürekli kesirler, sonlu sürekli kesirler ve sonsuz sürekli kesirler olarak iki ana başlık altında incelenecektir.

## 2.1. Sonlu Sürekli Kesirler

**Tanım 2.1.1.** $a, b$ birer tamsayı olmak üzere $a = b.c$ olsun. Bu takdirde $c$ ve $b$ ye $a$ nın çarpanı veya böleni; a ya ise b veya c'nin katı denir. Şayet b, a'nın böleni ise $b|a$ ile gösterilir[7].

**Önerme 2.1.1. (Bölme Algoritması)** $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ için $a = b.q + r$ ve $0 \leq r < |b|$ olacak biçimde bir tek $q, r \in \mathbb{Z}$ vardır[7].

**Önerme 2.1.2.** $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur.

i) $\mp 1|a$ ve $a|a$
ii) $a| \mp 1$ ise $a = \mp 1$
iii) $a|b$ ve $b|c$ ise $a|c$
iv) $b|a$ ise $b|ac$
v) $a|b$ ve $a|c$ ise $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $a|(bx + cy)$
vi) $a|b$ ve $b|a$ ise $a = \pm b$

dir[7].

**Tanım 2.1.2.** $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $c|a$ ve $c|b$ ise c'ye a ve b'nin ortak böleni (veya çarpanı) denir. a ile b sayılarını bölen en büyük d pozitif tamsayısına a ile b'nin en büyük ortak böleni denir. Bu durum $\text{ebob}(a, b) = d$ veya kısaca $(a, b) = d$ ile gösterilir. $d = 1$ olması halinde ise a ve b'ye aralarında asaldır denir[7].

**Teorem 2.1.3.** $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}, c_{n-1}$ birer tamsayı ve $c_0 \neq 0$ olmak üzere $\alpha$, $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots c_1 x + c_0$ polinomunun bir reel kökü olsun. O zaman $\alpha$ sayısı ya bir tamsayıdır ya da bir irrasyonel sayıdır[8].

**Tanım 2.1.3.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tamsayıları verilsin.

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{2.1.1}$$

formuna sonlu basit sürekli kesir denir. Bu kesir $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ ile gösterilir[4].

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ ifadesi (2.1.1) formundaki kesrin "sürekli kesir açılımı" olarak ifade edilecektir.

**Örnek 2.1.1.** $\frac{53}{29}$ kesrinin sonlu sürekli kesir açılımını bulunuz?

**Çözüm:** $\frac{53}{29} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}$

olduğundan $\frac{53}{29}$ sayısını sürekli kesir açılımı $[1; 1,4,1,4]$ ile gösterilir.

**Örnek 2.1.2.** $\frac{68}{181}$ in sonlu sürekli kesir açılımını bulunuz?

**Çözüm:** $\frac{68}{181} = 0+\cfrac{1}{\frac{181}{68}} = 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{68}{45}}} = 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{23}{45}}}$

$$= 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{22}{23}}}} = 0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{22}}}}}$$

$$= [0; 2,1,1,1,22]$$

olduğu kolaylıkla görülür.

**Tanım 2.1.4. (**Euclid Algoritması) $b \neq 0$ olmak üzere $r_0 = a$ ve $r_1 = b$ negatif olmayan tamsayılar olsun. Eğer bölme algoritması $j = 0,1,2, \dots, n-2$ için $0 < r_{j+2} < r_{j+1}$ olmak üzere $r_j = r_{j+1} q_{j+1} + r_{j+2}$ ve $r_n = 0$ olana kadar art arda devam ettirilirse o zaman $(a, b) = r_{n-1}$ olur[8].

**Teorem 2.1.4.** Herhangi bir rasyonel sayısı sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir[4].

**İspat:** $q > 0$ olmak üzere $\frac{p}{q}$ bir rasyonel sayısı olsun. Bölme algoritması kullanırsa $p = a_0 q + r_1$ ve $0 \leq r_1 < q$ olacak biçimde $a_0, r_1 \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}$ elde edilir. Eğer $r_1 = 0$ ise $\frac{p}{q} = a_0 = [a_0]$ olur. Eğer $r_1 \neq 0$ ise $q$ ve $r_1$'e tekrar bölme algoritması uygulandığında $q = a_1 r_1 + r_2$ ve $0 \leq r_2 < r_1$ olacak biçimde $a_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{r_1}{q}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}}$$

elde edilir. Eğer $r_2 = 0$ ise $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1]$ olur. Eğer $r_2 \neq 0$ ise o zaman $r_1$ ve $r_2$'ye bölme algoritması uygulanır. Bu işlem kalan sıfır olana kadar devam ettirilirse

$$\begin{aligned}
p &= a_0 q + r_1 \\
q &= a_1 r_1 + r_2 \\
r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\
r_2 &= a_3 r_3 + r_4 \\
&\vdots \\
r_{n-1} &= a_n r_n + r_{n+1} \\
r_n &= q_{n+2} r_{n+1} + 0
\end{aligned}$$

olacak biçimde $r_{n+2} = 0$ elde edilir. Böylece

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

olduğu görülür. Bu durumda $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ olur.

**Örnek 2.1.3.** $\frac{4257}{512}$ rasyonel sayısına karşılık gelen sonlu sürekli kesir açılımını Euclid Algoritması yardımıyla bulunuz?

**Çözüm:** Euclid Algoritması uygulanırsa

$4257 = 8 \cdot 512 + 161$

$512 = 3 \cdot 161 + 29$

$161 = 5 \cdot 29 + 16$

$29 = 1.16 + 13$

$16 = 1.13 + 3$

$13 = 4.3 + 1$

$3 = 3.1 + 0$

elde edilir. Böylece $\frac{4257}{512}$ sürekli kesir açılımı $[8; 3,5,1,1,4,3]$ olarak bulunur.

**Örnek 2.1.4.** $\frac{82}{21}$ rasyonel sayısının sürekli kesir açılımını bulunuz?

**Çözüm:** Euclid algoritması kullanılırsa

$82 = 3.21 + 19$

$21 = 1.19 + 2$

$19 = 9.2 + 1$

$2 = 2.1 + 0$

olduğu görülür. Böylece $\frac{82}{21} = [3; 1,9,2]$ şeklinde bulunur.

**Örnek 2.1.5.** $\frac{195}{63}$ rasyonel sayısını sürekli kesir açılımını bulunuz?

**Çözüm:** Euclid Algoritması yardımıyla

$195 = 3.63 + 6$

$63 = 10.6 + 3$

$6 = 2.3 + 0$

olup bu eşitliklerden, $\frac{195}{63}$ sayısının sürekli kesir açılımının $[3; 10,2]$ olduğu görülür.

**2.2. Sonlu Sürekli Kesirlerin Yaklaşımları ve Özellikleri**

$a_0$ hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamsayıları verilsin. $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olsun. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin parçalanışları (2.1.1) formu dikkate alınarak

$$C_0 = [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1}$$

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$C_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$C_k = [a_0; a_1, \ldots, a_k] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.2.1.** $0 \leq k \leq n$ için yukarıda tanımlanan $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ ifadesine $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin $k.(k - \text{yinci})$ yaklaşımı denir. $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k$ kesirlerine $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ sürekli kesrinin sırasıyla $0,1,2, \ldots, k$. yaklaşımları denir[4].

**Örnek 2.2.1.** $\frac{79291}{3825}$ kesrinin 2. ve 4. yaklaşımlarını bulunuz?

**Çözüm:** $\frac{79291}{3825}$ kesrinin, Euclid algoritması yardımıyla, öncelikle sonlu sürekli kesir açılımı aşağıdaki gibi bulunur.

$79291 = 20.3825 + 2791$

$3825 = 1.2791 + 1034$

$2791 = 2.1034 + 723$

$1034 = 1.723 + 311$

$723 = 2.311 + 101$

$311 = 3.101 + 8$

$101 = 12.8 + 5$

$8 = 1.5 + 3$

$5 = 1.3 + 2$

$3 = 1.2 + 1$

$2 = 2.1 + 0$

olduğundan

$$\frac{79291}{3825} = [20; 1,2,1,2,3,12,1,1,1,2]$$

olur. Böylece $C_2$ ve $C_4$ yaklaşımları

$$C_2 = [20; 1,2] = 20 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{62}{3}$$

ve

$$C_4 = [20; 1,2,1,2] = 20 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} = \frac{228}{11}$$

şeklinde bulunur.

**Önerme 2.2.1.** $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

i) $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, \mathrm{a}_k, \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, [\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]\right]$

ii) $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_k, \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n] = \mathrm{a}_0 + \frac{1}{[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n]}$

dir[9].

**İspat:** i) $\left[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, [\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]\right]$ ifadesinin en içteki $[\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]$ sürekli kesrinde terim sayısı üzerinden tümevarım uygulanırsa, terim sayısı $n - k + 1$ olduğundan, eğer $n - k + 1 = 1$ ise $\mathrm{k} = \mathrm{n}$ olup $[\mathrm{a}_n] = \mathrm{a}_n$ dir. Dolayısıyla iddia doğrudur.

Şimdi $n - k + 1 = \mathrm{m}$ için (i) özdeşliği doğru olsun. O zaman gösterilmesi gereken $n - k + 1 = \mathrm{m} + 1$ için (i) özelliğinin doğru olduğudur. Eğer (i) özdeşliği $n - k + 1 = \mathrm{m}$ için doğruysa

$$[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, \mathrm{a}_k, [\mathrm{a}_{k+1}; \mathrm{a}_{k+2}, \dots, \mathrm{a}_n]\right]$$

yazılabilir. Ayrıca

$$[\mathrm{a}_{k+1}; \mathrm{a}_{k+2} \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_k; [\mathrm{a}_{k+1}; \mathrm{a}_{k+2} \dots, \mathrm{a}_n]\right] = [\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]$$

olarak yazılabileceğinden

$$[\mathrm{a}_{k+1}; \mathrm{a}_{k+2} \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, [\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]\right]$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii) $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, \mathrm{a}_k, \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_{k-1}, [\mathrm{a}_k; \mathrm{a}_{k+1}, \dots, \mathrm{a}_n]\right]$ eşitliğinde $\mathrm{k} = 1$ alınırsa

$$[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_n] = \left[\mathrm{a}_0; [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2 \dots, \mathrm{a}_n]\right] = \mathrm{a}_0 + \frac{1}{[\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2, \dots., \mathrm{a}_n]}$$

olarak elde edilir.

**Sonuç 2.2.2.** $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ sonlu sürekli kesir olsun. O zaman

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right] \tag{2.2.1}$$

dir[10].

**İspat:** Önerme 2.2.1 (i) şıkkında $k = n - 1$ alınırsa

$$[a_0; a_1, \dots, a_n] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, [a_{n-1}; a_n]\right] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right]$$

olduğu görülür.

**Örnek 2.2.2.** $\frac{357}{94} = [3; 1,3,1,18] = \left[3; 1, [3; 1,18]\right] = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{[3;1,18]}}$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

**Örnek 2.2.3.** $\frac{79}{14} = 5 + \frac{9}{14} = 5 + \frac{1}{1+\frac{5}{9}} = 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}}$

$$= 5 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

$$= [5; 1,1,1,4] = \left[5; 1,1,1 + \frac{1}{4}\right] = \left[5; 1,1, \frac{5}{4}\right] = \left[5; 1,1 + \frac{1}{\frac{5}{4}}\right]$$

$$= \left[5; 1, \frac{9}{5}\right] \quad = \left[5; 1 + \frac{1}{\frac{9}{5}}\right] = \left[5 + \frac{1}{\frac{14}{9}}\right] = \frac{79}{14}$$

şeklinde yazılabilir.

**Teorem 2.2.3.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan $(a_n)$ bir sonlu veya sonsuz reel sayı dizisi olsun. $k = 0,1,2$ ... olmak üzere

$$\begin{cases} p_0 = a_0, \ p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \end{cases} \tag{2.2.2}$$

ve

$$\begin{cases} q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1 \\ q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{cases} \tag{2.2.3}$$

olarak tanımlansın. Eğer $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ ise o zaman $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ dir[10].

**İspat:** İspat için k üzerine tümevarım yöntemi uygulanacaktır.

$k = 0$ için $C_0 = [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$ olduğundan iddia doğrudur.

$k = 1$ için $C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$ olduğundan iddia doğrudur.

k için iddia doğru olsun. Yani $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ doğru olsun. Şimdi iddianın $k + 1$ için doğruluğu gösterilecektir. Sonuç 2.2.2'ye göre

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = \left[a_0; a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right]$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ifadede k tane eleman olduğundan varsayıma göre

$$\begin{aligned}\left[a_0; a_1, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right] &= \frac{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{\left(\frac{a_k a_{k+1} + 1}{a_{k+1}}\right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left(\frac{a_k a_{k+1} + 1}{a_{k+1}}\right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{(a_k a_{k+1} + 1) p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{(a_k a_{k+1} + 1) q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Bundan sonra, $p_k$ ve $q_k$ değerlerinin Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlandığı ve aksi belirtilmediği sürece $a_0$ hariç $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının hepsi pozitif tamsayı olduğu varsayılacaktır.

**Önerme 2.2.4.** $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$ sürekli kesrinin k. yaklaşımı $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ ve $a_0 > 0$ ise $\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]$ ve $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_2, a_1]$ dir[11].

**İspat:** $p_k$ ve $q_k$ değerlerinin Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlamaları kullanılıp k üzerine tümevarım uygulanacaktır. Buna göre

$k = 1$ için $\frac{p_1}{p_0} = a_1 + \frac{1}{a_0} = [a_1; a_0]$ olduğundan iddia doğrudur.

k için iddia doğru olsun. Yani $\frac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{p_k} = a_{k+1} + \frac{p_{k-1}}{p_k} = a_{k+1} + \frac{1}{\frac{p_k}{p_{k-1}}} = a_{k+1} + \frac{1}{[a_k; a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]}$$

olup Önerme 2.2.1'den $\frac{p_{k+1}}{p_k} = [a_{k+1}; a_k, \dots, a_1, a_0]$ olarak elde edilir. Dolayısıyla iddia $k + 1$ için de doğru olur. Benzer şekilde

$k = 1$ için $\frac{q_1}{q_0} = \frac{a_1}{1} = [a_1]$ olduğundan iddia doğrudur.

k için iddia doğru olsun. Yani $\frac{q_k}{q_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \dots, a_2, a_1]$ olsun. Bu durumda

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{a_{k+1}q_k + q_{k-1}}{q_k} = a_{k+1} + \frac{q_{k-1}}{q_k} = a_{k+1} + \frac{1}{\frac{q_{k-1}}{q_k}} = a_{k+1} + \frac{1}{[a_k; a_{k-1}, \dots, a_2, a_1]}$$

olup Önerme 2.2.1'den $\frac{q_{k+1}}{q_k} = [a_{k+1}; a_k, \dots, a_2, a_1]$ olarak elde edilir. Dolayısıyla iddia $k + 1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.5.** $p_k$ ve $q_k$ değerleri Teorem 2.2.3.'deki gibi tanımlansın. Bu taktirde $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$ dir[10].

**İspat:** k üzerine tümevarım uygulanırsa

$\mathrm{k}=1$ için $\mathrm{p}_1\mathrm{q}_0-\mathrm{q}_1\mathrm{p}_0=(\mathrm{a}_0\mathrm{a}_1+1)-\mathrm{a}_1\mathrm{a}_0=1=(-1)^0$ olduğundan iddia doğrudur. k için $\mathrm{p}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}-\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}=(-1)^{\mathrm{k}-1}$ eşitliği doğru olsun. Bu durumda, (2.2.2) ve (2.2.3) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{q}_\mathrm{k}-\mathrm{q}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{p}_\mathrm{k} &= (\mathrm{a}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{p}_\mathrm{k}+\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1})\mathrm{q}_\mathrm{k}-(\mathrm{a}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{q}_\mathrm{k}+\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1})\mathrm{p}_\mathrm{k}\\
&= \mathrm{a}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{p}_\mathrm{k}\mathrm{q}_\mathrm{k}+\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_\mathrm{k}-\mathrm{a}_{\mathrm{k}+1}\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{p}_\mathrm{k}-\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_\mathrm{k}\\
&= \mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_\mathrm{k}-\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_\mathrm{k}\\
&= -(\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_\mathrm{k}-\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_\mathrm{k})=(-1)^\mathrm{k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani iddia $k+1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

**Sonuç 2.2.6.** $\forall\mathrm{k}\geq 1$ için $\mathrm{C}_\mathrm{k}-\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1}=\frac{(-1)^{\mathrm{k}-1}}{\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}}$'dir[9].

**İspat:** Teorem 2.2.5'de verilen eşitliğin her iki tarafı $\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}$'e bölünürse $\frac{\mathrm{p}_\mathrm{k}}{\mathrm{q}_\mathrm{k}}-\frac{\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}}{\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}}=\frac{(-1)^{\mathrm{k}-1}}{\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}}=\mathrm{C}_\mathrm{k}-\mathrm{C}_{\mathrm{k}-1}$ elde edilir.

**Sonuç 2.2.7.** $\mathrm{p}_\mathrm{k}$ ve $\mathrm{q}_\mathrm{k}$ değerleri Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlansın. Bu taktirde $(\mathrm{p}_\mathrm{k},\mathrm{q}_\mathrm{k})=1$ dir[10].

**İspat:** $(\mathrm{p}_\mathrm{k},\mathrm{q}_\mathrm{k})=d$ olsun. O zaman $\mathrm{d}|\mathrm{p}_\mathrm{k}$ ve $\mathrm{d}|\mathrm{q}_\mathrm{k}$ olup $\mathrm{d}|\mathrm{p}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}-\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}$ olur. Buradan Teorem 2.2.5'e göre $\mathrm{d}|1$ olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathrm{p}_\mathrm{k}$ ve $\mathrm{q}_\mathrm{k}$ aralarında asaldır.

**Teorem 2.2.8.** $\mathrm{p}_\mathrm{k}$ ve $\mathrm{q}_\mathrm{k}$ değerleri Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlansın. Bu taktirde her $\mathrm{k}\geq 1$ için $\mathrm{p}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}=(-1)^\mathrm{k}\mathrm{a}_\mathrm{k}$'dir[10].

**İspat:** $\mathrm{p}_\mathrm{k}=\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}+\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}$ eşitliği $\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}$ ile $\mathrm{q}_\mathrm{k}=\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}+\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}$ eşitliği $\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}$ ile çarpılarak elde edilen denklemler birbirinden çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{q}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2} &= (\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}+\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2})\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-(\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}+\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2})\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}\\
&= \mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}+\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}\\
&= \mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{a}_\mathrm{k}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2}=\mathrm{a}_\mathrm{k}(\mathrm{p}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{q}_{\mathrm{k}-2}-\mathrm{q}_{\mathrm{k}-1}\mathrm{p}_{\mathrm{k}-2})
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2.5’den $p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = (-1)^k a_k$ olduğu görülür.

**Sonuç 2.2.9.** $\forall k \geq 2$ için $C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$’dir[4]

**İspat:** Teorem 2.2.8’de verilen eşitliğin her iki tarafı $q_k q_{k-2}$’ye bölünürse

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2}}{q_k q_{k-2}} - \frac{p_{k-2} q_k}{q_{k-2} q_k} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$$

elde edilir.

**Örnek 2.2.4.** $\frac{89}{37}$ kesri için $C_2 - C_0$ değerini Sonuç 2.2.9. yardımıyla bulunuz?

**Çözüm:** $C_0 = \frac{p_0}{q_0} = [2] = 2 = \frac{2}{1}$ olduğundan $p_0 = 2$ ve $q_0 = 1$ bulunur.

$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = [2; 2,2] = 2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{12}{5}$ olduğundan $p_2 = 12$ ve $q_2 = 5$ bulunur. Böylece

$$C_2 - C_0 = \frac{a_2(-1)^2}{q_2 q_0} = \frac{2(-1)^2}{5.1} = \frac{2}{5}$$ elde edilir.

**Teorem 2.2.10.** $p_k$ ve $q_k$ değerleri Teorem 2.2.3’deki gibi tanımlansın. Bu taktirde $k \geq 1$ için $q_{k-1} \leq q_k$ ve özellikle $a_0 \geq 0$ ise $p_{k-1} < p_k$ dir[10].

**İspat:** Öncelikle $q_{k-1} \leq q_k$ olduğu k üzerine tümevarım uygulanarak gösterilecektir.

$k = 1$ için $q_0 = 1 \leq a_1 = q_1$ olduğundan iddia doğrudur. k için iddia doğru olsun. Yani $q_{k-1} \leq q_k$ olsun. O zaman $k \geq 1$ için $a_k \geq 1$ ve dolayısıyla $q_{k-1} \geq 1$ olduğu kullanılırsa

$$q_{k+1} = a_{k+1} q_k + q_{k-1} > q_k$$

olduğu görülür. Böylece iddia $k + 1$ için de doğrudur. Yani $k \geq 1$ için $q_{k-1} \leq q_k$ dir. Şimdi ise $a_0 \geq 0$ ise $p_{k-1} < p_k$ olduğu benzer şekilde gösterilecektir. Buna göre

$k = 1$ için $p_0 = a_0 < a_1 a_0 + 1 = p_1$ olduğundan iddia doğrudur. k için iddia doğru olsun. Yani $a_0 \geq 0$ ise $p_{k-1} < p_k$ olsun. Bu durumda $a_0 \geq 0$, $k \geq 1$ için $a_k \geq 1$ ve dolayısıyla $p_{k-1} \geq 0$ olduğu kullanılırsa

$$p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1} > p_k$$

olduğu görülür. Böylece iddia $k + 1$ için de doğrudur. Yani $k \geq 1$ için $a_0 \geq 0$ ise $p_{k-1} < p_k$ dir.

**Teorem 2.2.11.** $k \geq 0$ olmak üzere $q_k \geq k$ dır[12].

**İspat:** k üzerine tümevarım uygulansın. $k = 0$ için $q_k = q_0 = 1 \geq 0 = k$ olduğundan iddia doğrudur. k için $q_k \geq k$ olsun. O zaman Teorem 2.2.10'den $q_{k-1} \leq q_k$ olduğundan $k \leq q_k \leq q_{k+1}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.2.12.** $C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ ifadesi $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ sonlu sürekli kesrin bir yaklaşımı olsun. Bu taktirde

$i)$ $(C_{2k})$ kesinlikle monoton artan bir dizidir.
ii) $(C_{2k+1})$ kesinlikle monoton azalan bir dizidir.
iii) Her $r, s \in \mathbb{N}$ için $C_{2s} < C_{2r-1}$

dir[9].

**İspat:** i) Sonuç 2.2.9'da verilen $C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$ eşitliği, Teorem 2.2.10'deki $q_{k-1} \leq q_k$ eşitsizliği ve Teorem 2.2.11 kullanılırsa

$$C_{2k} - C_{2k-2} = \frac{a_{2k}}{q_{2k}q_{2k-2}} > 0$$

elde edilir. Böylece $(C_{2k})$ dizisinin kesinlikle monoton artan bir dizi olduğu görülür.

ii) Sonuç 2.2.6'de verilen $C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$ eşitliği, Teorem 2.2.10'daki $q_{k-1} \leq q_k$ eşitsizliği ve Teorem 2.2.11 kullanılırsa

$$C_{2k+1} - C_{2k-1} = \frac{-1}{q_{2k+1}q_{2k-1}} < 0$$

elde edilir. Böylece $(C_{2k+1})$ dizisinin kesinlikle monoton azalan bir dizi olduğu görülür.

Ayrıca Sonuç 2.2.6'den $C_{2k} - C_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{q_{2k}q_{2k-1}} = \frac{-1}{q_{2k}q_{2k-1}} < 0$ olduğundan $C_{2k} < C_{2k-1}$ olur.

iii) Her $r, s \in \mathbb{N}$ için i) ve ii) şıklarından $C_{2s} < C_{2s+2r} < C_{2s+2r-1} < C_{2r-1}$ olduğu kolaylıkla görülür.

**Örnek 2.2.5.** $[3,1,2,3,5,2,1,3]$ sonlu sürekli kesir için ilk birkaç yaklaşım aşağıda verilmiştir.

$$C_0 = [3] = 3$$
$$C_1 = [3;1] = 4$$
$$C_2 = [3;1,2] = \frac{11}{3} = 3{,}66666667$$
$$C_3 = [3;1,2,3] = \frac{37}{10} = 3{,}7$$
$$C_4 = [3;1,2,3,5] = \frac{196}{53} = 3{,}69811321$$
$$C_5 = [3;1,2,3,5,2] = \frac{429}{116} = 3{,}69827586$$
$$C_6 = [3;1,2,3,5,2,1] = \frac{625}{169} = 3{,}69822485$$
$$C_7 = [3;1,2,3,5,2,1,3] = \frac{2304}{623} = 3{,}69823435$$

Buradan görülüyor ki $C_1 > C_3 > C_5 > C_7 > C_6 > C_4 > C_2 > C_0$ dır.

**Teorem 2.2.13.** $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ve bir yaklaşımı $C_k$ olsun. O zaman $r > s$ için

$$|C_r - C_s| < |C_{s-1} - C_s| \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır[10].

**İspat:** s çift olsun. O halde $\mathrm{s} = 2\mathrm{k}$ olsun. Bu durumda, Teorem 2.2.12 iii)'ye göre, eğer $r = 2\mathrm{t}$ ise $\mathrm{C}_{2\mathrm{t}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1}$ olup

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} = \mathrm{C}_{2\mathrm{t}} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}}$$

ve eğer $r = 2\mathrm{t} - 1$ ise $\mathrm{r} > \mathrm{s}$ olduğundan $\mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1} > \mathrm{C}_{2\mathrm{t}-1}$ olup

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} = \mathrm{C}_{2\mathrm{t}-1} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1} - C_{2\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}}$$

oldukları görülür. Böylece

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} < \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} \tag{2.2.5}$$

soncuna varılır. $s$ tek olsun. O zaman $\mathrm{s} = 2\mathrm{k} + 1$ olsun. Bu durumda, Teorem 2.2.12 iii)'ye göre, eğer $r = 2\mathrm{t}$ ise $\mathrm{C}_{2\mathrm{t}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}+1}$ ve $\mathrm{C}_{2\mathrm{k}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1}$ olup

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} = \mathrm{C}_{2\mathrm{t}} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}-1} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}+1} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{s}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1}$$

ve eğer $r = 2\mathrm{t} - 1$ ise $\mathrm{r} > \mathrm{s}$ olduğundan $\mathrm{C}_{2\mathrm{k}+1} > \mathrm{C}_{2\mathrm{t}-1}$ olup

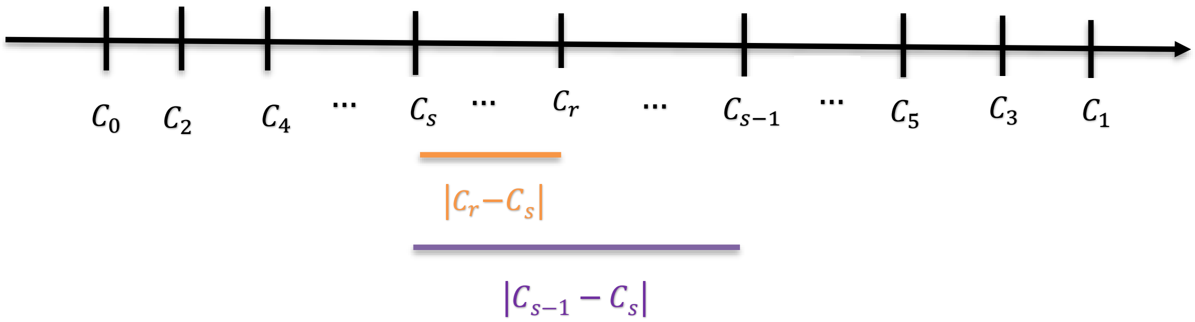
$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} = \mathrm{C}_{2\mathrm{t}-1} - \mathrm{C}_{2\mathrm{k}} < \mathrm{C}_{2\mathrm{k}+1} - C_{2\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{\mathrm{s}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1}$$

oldukları görülür. Böylece

$$\mathrm{C}_{\mathrm{r}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}} < \mathrm{C}_{\mathrm{s}} - \mathrm{C}_{\mathrm{s}-1} \tag{2.2.6}$$

olur. (2.2.5) ve (2.2.6) eşitsizliklerinden istenen elde edilmiş olur.

Şekil 2.1. Teorem 2.2.13'un geometrik ifadesi




## 2.3. Sonsuz Sürekli Kesirler

Önceki bölümde bir rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir ile ifade edildiği belirtilmiş ve özelliklerinden bahsedilmişti. Bu bölümde ise sonsuz sürekli kesrin bir irrasyonel sayıyı belirtiğinden ve sonsuz sürekli kesrin özelliklerinden bahsedilecek.

**Tanım 2.3.1.** (2.1.1) formunda ifade edilen $(a_n)$ dizisi sonsuz bir dizi ise bu durumda

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

formuna sonsuz basit sürekli kesir denir ve bu kesir $[a_0; a_1, a_2 \dots, a_n, \dots]$ şeklinde gösterilir[4].

Bundan sonraki kısımlarda, "sonsuz basit sürekli kesir" ifadesi yerine "sonsuz sürekli kesir" ifadesi kullanılacaktır. Ayrıca aksi belirtilmediği sürece $[a_0; a_1, a_2 \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinde $(a_n)$ dizisinin terimleri $a_0$ hariç hepsi pozitif tamsayı olarak ele alınacaktır.

Sonsuz sürekli kesirleri tartışmak için dizilerde limitlerin varlığı ile ilgili aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır.

**Lemma 2.3.1.** $(x_n)$ bir dizi olsun. Bu durumda

i) $(x_n)$ monoton artan ve üstten sınırlı ise $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ vardır.

ii) $(x_n)$ monoton azalan ve alttan sınırlı ise $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ vardır.

iii) $(x_n)$ $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \alpha$ ise $\lim_{n\to\infty}(x_n)$ vardır ve $\lim_{n\to\infty}(x_n) = \alpha$

dir[13].

Ayrıca $p_k$ ve $q_k$ değerleri Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlandığında, $C_k = [a_0; a_1, a_2 \dots, a_k]$ sürekli kesri $\frac{p_k}{q_k}$ ile ifade edilmişti. Teorem 2.2.3'e göre $(a_n)$ dizisi sonsuz bir dizi ise $C_k$, $[a_0; a_1, a_2 \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesrin k-yinci yaklaşımı olarak tanımlanır[4].

Böylece yukarıdaki tartışmalar neticesinde sonsuz sürekli kesirlerin değeri ile ilgili aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.3.2.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayıları verilsin. $C_k = [a_0; a_1, a_2 \dots, a_k]$ ise bu durumda $\lim_{k\to\infty} C_k$ mevcut olup bu limite $[a_0; a_1, a_2 \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinin değeri denir ve $\lim_{k\to\infty} C_k = [a_0; a_1, a_2 \dots, a_n, \dots]$ şeklinde gösterilir[14].

**Teorem 2.3.2.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan bir $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ reel sayılar dizisi verilsin. $C_n = [a_0; a_1, a_2 \dots, a_n]$ ise $C_n$ yaklaşımları bir α limitine gider. O halde

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \alpha$$

dir[13].

**İspat:** Teorem 2.2.12'e göre her $r, s \in \mathbb{N}$ için $C_{2s} < C_{2r-1}$ olduğundan $(C_{2n})$ monoton artan ve üstten sınırlıdır. Dolayısıyla Lemma 2.3.1'e göre $\lim_{n\to\infty} C_{2n}$ vardır. Benzer şekilde $(C_{2n+1})$ monoton azalan ve alttan sınırlıdır. Dolayısıyla Lemma 2.3.1'e göre $\lim_{n\to\infty} C_{2n+1}$

vardır. O halde $\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = y_1$ ve $\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = y_2$ olsun. Öte yandan Sonuç 2.2.6'ye göre

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

olduğu görülebilir. Teorem 2.2.11 kullanılırsa

$$C_{2n+1} - C_{2n} \leq \frac{1}{(2n+1).(2n)}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} (C_{2n+1} - C_{2n}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1).(2n)} = 0$$

olacağından $\lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} C_{2n}$ yani $y_1 = y_2$ olduğu görülür. Böylece Lemma 2.3.1'e göre $\lim_{n\to\infty} C_n$ vardır ve dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} C_n = \alpha$ yazılabilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

**Sonuç 2.3.3.** $\alpha = [a_0; a_1, a_2 \dots]$ ve $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ ise $\alpha$ sayısı $C_n$ ile $C_{n+1}$ arasındadır[13].

**İspat:** Öncelikle $n = 2k$ olsun. Bu durumda $(C_{2k})$ monoton artan ve $\lim_{n\to\infty} C_{2k}$ mevcut olduğundan $C_{2k} < \alpha$ ve $(C_{2k+1})$ monoton azalan ve $\lim_{n\to\infty} C_{2k+1}$ mevcut olduğundan $\alpha < C_{2k+1}$ olur. Dolayısıyla $C_n < \alpha < C_{n+1}$ bulunur. Benzer şekilde hareket edilirse $n = 2k - 1$ olduğunda $C_{n+1} < \alpha < C_n$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem her sonsuz sürekli kesrin bir irrasyonel sayı olduğunu belirtir.

**Teorem 2.3.4.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ tam sayılar dizisi olsun. $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesri bir irrasyonel sayı belirtir[13].

**İspat:** Tersine $\alpha$ sayısı bir rasyonel sayı olsun. O halde $\alpha = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $b \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. Sonuç 2.3.3'in ispatından $C_{2k} < \alpha < C_{2k+1}$ olduğu görülür. Buradan $0 < \alpha - C_{2k} < C_{2k+1} - C_{2k}$ eşitsizliği elde edilir. Sonuç 2.2.6'den

$$0 < \alpha - C_{2k} < C_{2k+1} - C_{2k} = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}$$

yazılabilir. $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ ve $\alpha = \frac{a}{b}$ değerleri son eşitsizlikte yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$0 < aq_{2k} - bp_{2k} < \frac{b}{q_{2k+1}} \tag{2.3.1}$$

elde edilir. Her pozitif k tamsayısı için $aq_{2k} - bp_{2k}$ ifadesinin bir tamsayı olduğu açıktır. Burada $2k_0 + 1 > b$ olacak biçimde bir $k_0 > 0$ tamsayısı ele alınsın. O zaman Teorem 2.2.11'den $q_{2k_0+1} \geq 2k_0 + 1 > b$ olacağından (2.3.1) eşitsizliği

$$0 < aq_{2k_0} - bp_{2k_0} < \frac{b}{q_{2k_0+1}} \leq \frac{q_{2k_0+1}}{q_{2k_0+1}} = 1$$

olur. Bu ise $aq_{2k_0} - bp_{2k_0}$ ifadesi bir tamsayı olduğundan imkansızdır. O halde $\alpha$ sayısı bir irrasyonel sayıdır. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 2.3.5.** $a_0$ hariç tüm terimleri pozitif olan $(a_n)$ bir reel sayı dizisi ve $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ sonsuz sürekli kesir olsun. k pozitif bir tamsayı olmak üzere $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$ olsun. O halde

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \alpha_k]$$

dir[9].

**İspat:** Tanım 2.3.2'den $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n\to\infty}[a_0; a_1, a_2, \dots a_{n-1}, a_n]$ yazılabilir. Önerme 2.2.1'e göre

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \ldots a_{n-1}, a_n]}$$

dir. Böylece

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} [a_1; a_2, \ldots a_{n-1}, a_n]}$$

olduğundan $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1]$ bulunur. Dolayısıyla iddia $k = 1$ için doğru olur. $\forall k \geq 1$ için iddia doğru olsun. Yani $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$ olsun. Öte yandan Tanım 2.3.2'ye göre $\alpha_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots] = \lim\limits_{r\to\infty} [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_r]$ ve $[a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_r] = a_k + \frac{1}{[a_{k+1}; a_{k+2}, \ldots, a_r]}$ olduğundan $\alpha_k = [a_k; \alpha_{k+1}]$ olduğu görülür. Dolayısıyla Önerme 2.2.1'i kullanılarak

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, a_2, \ldots] &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, [a_k; \alpha_{k+1}]] \\ &= [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}]\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iddia $k + 1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Sonsuz sürekli kesirlerin açılımlarını bulmak kolay değildir. Bunun için geliştirilen metotlardan biri aşağıdaki teoremde verilmiştir. Ayrıca bu teorem, her irrasyonel sayıya bir sonsuz sürekli kesrin denk geldiğini ortaya koyması bakımından da önemlidir.

**Teorem 2.3.6.** $\alpha = \alpha_0$ bir irrasyonel sayı ve $a_0, a_1, a_2 \ldots$ bir tamsayı dizisi olsun. $[\![\ \ ]\!]$ ifadesi tam değer fonksiyonunu göstermek üzere $k = 0,1,2, \ldots$ için

$$a_k = [\![\alpha_k]\!]$$

ve

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

şeklinde tanımlansın. O halde $\alpha = [a_0; a_1, a_2 \ldots]$ şeklindedir[13].

**İspat:** Öncelikle tümevarımla $\alpha_{k+1}$'in irrasyonel sayı olduğu gösterilecek. Buna göre $k = 0$ için $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0}$ sayısı bir irrasyoneldir. Çünkü $\alpha_0 - a_0$ irrasyoneldir. k için $\alpha_k$ sayısı irrasyonel olsun. Bu durumda $a_k$ tamsayı olduğundan $\alpha_k \neq a_k$ olup

$$\alpha_k = a_k + \alpha_k - a_k = a_k + \frac{1}{\frac{1}{\alpha_k - a_k}} = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \tag{2.3.2}$$

elde edilir. Eğer $\alpha_{k+1}$ rasyonel sayı olsaydı $\alpha_k$ sayısı da rasyonel olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha_{k+1}$ irrasyoneldir. Sonuç olarak $\alpha_k$ bir irrasyonel sayı ve $a_k$ bir tamsayı olduğundan $\alpha_k \neq a_k$ olur. Böylece (2.3.2) eşitliğinden $a_k < \alpha_k < a_k + 1$ sonucuna varılabilir. Son eşitsizlikten

$$1 < \frac{1}{\alpha_k - a_k} = \alpha_{k+1}$$

elde edilir. Böylece $k = 0,1,2,3,\ldots$ için $\alpha_{k+1} = [\![\alpha_{k+1}]\!] \geq 1$ elde edilir. Bu durumda $a_1, a_2, a_3, \ldots$ değerleri pozitif tamsayılardır. (2.3.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+2}}} &= a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2} + \frac{1}{\alpha_{k+3}}}} \\
&= a_k + \frac{1}{a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2} + \frac{1}{a_{k+3} + \frac{1}{\ldots}}}} \\
&= [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots]
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla Teorem 2.3.5'e göre

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k, \alpha_{k+1}]$$

olur. Şimdi k üzerine tümevarımla $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}]$ olduğu gösterilecek. İddia $k = 0$ için $\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0; \alpha_1]$ doğrudur. $k - 1$ için doğru olsun. Yani $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k]$ olsun. O halde

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}}\right]$$

$$= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, [a_k; \alpha_{k+1}]\right] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, \alpha_{k+1}]$$

olduğu görülür. Böylece $\alpha = [a_0; a_1, a_2 \dots]$ elde edilir.

**Lemma 2.3.7.** α bir irrasyonel sayı**,** $C_n = [a_0; a_1, a_2 \dots a_n]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \alpha$ ise

$a_0 = [\![\alpha]\!]$ ve $\alpha = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2 \dots]}$

dir [15].

**İspat:** Sonuç 2.3.3'ün ispatına göre $a_0 = C_0 < \alpha < C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1}$ eşitsizliği sağlandığından $a_0 = [\![\alpha]\!]$ olduğu kolaylıkla görülür. Öte yandan

$$C_n = [a_0; a_1, a_2 \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_n]}$$

olarak yazılabileceğinden her iki tarafın limiti alınırsa

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} C_n = a_0 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} [a_1; a_2, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots]}$$

bulunur.

**Teorem 2.3.8.** $a_0$ hariç hepsi pozitif olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ bir tamsayı dizisi olsun. $p_k$ ve $q_k$ ifadeleri Teorem 2.2.3'deki gibi tanımlansın. Bu taktirde

i) $p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$

ii) $\forall k \geq 1$ için $c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$

iii) $\forall k \geq 1$ için $p_k q_{k-2} - q_k p_{k-2} = (-1)^k a_k$

iv) $\forall k \geq 2$ için $c_k - c_{k-2} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}}$

v) $(p_k, q_k) = 1$

vi) $k \geq 2$ olmak üzere $q_{k-1} < q_k$ ve $p_{k-1} < p_k$

vii) $k \geq 0$ olmak üzere $q_k \geq k$

dir[10].

**İspat:** Sonlu sürekli kesirler kısmında benzer ifadelerin ispatları yapıldığı için ve bu ispatlar sonsuz sürekli kesirler için de geçerli olduğu için ispatları verilmemiştir.

**Önerme 2.3.9.** $a_0$ ve $b_0$ tamsayılar, $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ pozitif tamsayılar ve $x \geq 1$, $y \geq 1$ olan iki reel sayılar olmak üzere

i) $b_0 = [a_0; x]$ ise $x = 1$ ve $b_0 = a_0 + 1$

ii) $a_0 \neq b_0$ ise $[a_0; x] \neq [b_0; y]$

iii) $[a_0; a_1, a_2, \ldots a_n, x] = [a_0; a_1, a_2, \ldots a_n, y]$ ise $x = y$

dir[9].

**İspat:** i) $b_0 = [a_0; x]$ olsun. Tersine $x > 1$ olsun. Bu durumda

$$a_0 < [a_0; x] = b_0 = a_0 + \frac{1}{x} < a_0 + 1$$

elde edilir. Fakat $b_0$ tamsayı olduğundan son eşitsizlik imkansızdır. O halde $x = 1$'dir. Dolayısıyla $b_0 = [a_0; x] = [a_0, 1] = a_0 + 1$ olur.

ii) $a_0 \neq b_0$ olsun. Genelliği bozmadan $b_0 > a_0$ olsun. Bu durumda

$$[a_0; x] = a_0 + \frac{1}{x} \leq a_0 + 1 \leq b_0 < [b_0; y]$$

bulunur. Dolayısıyla $[a_0; x] \neq [b_0; y]$ olur.

iii) n üzerine tümevarım yöntemi uygulanacaktır. Buna göre $[a_0; x] = [a_0; y]$ ise $a_0 + \frac{1}{x} = a_0 + \frac{1}{y}$ olduğundan $x = y$ olur. Dolayısıyla iddia $n = 0$ için doğrudur. İddia n için doğru, yani $[a_0; a_1, a_2, \dots a_n, x] = [a_0; a_1, a_2, \dots a_n, y]$ iken $x = y$ olsun. Bu durumda

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, x] = \big[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, [a_{n+1}; x]\big]$$

ve

$$[a_0; a_1, a_2, \dots a_n, a_{n+1}, y] = \big[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, [a_{n+1}; y]\big]$$

olduğundan hipoteze göre $[a_n; x] = [a_n; y]$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $x = y$ olur.

**Lemma 2.3.10.** $[a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ ise $i \geq 0$ için $a_i = b_i$ dir[15].

**İspat:** Lemma 2.3.7.'ye göre $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots]$ ise $[\![\alpha]\!] = a_0 = b_0$ olur. O zaman

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2 \dots]} = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, \dots]}$$

eşitliğinden $[a_1; a_2 \dots] = [b_1; b_2, \dots]$ elde edilir. Dolayısıyla $a_1 = b_1$ olur. Benzer metot uygulanmaya devam edildiğinde tümevarımla $i \geq 0$ için $a_i = b_i$ olduğu elde edilir.

**Örnek 2.3.1.** $\beta = [1; 3,2,2,2, \dots]$ sonsuz sürekli kesrine karşılık gelen irrasyonel sayıyı bulunuz.

**Çözüm:** $\beta = [1; 3,2,2,2, \dots] = 1 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$

şeklinde olup $2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}} = \alpha$ denilirse $\alpha = [2; 2,2, \dots]$ ve dolayısıyla $\beta = [1; 3, \alpha]$ olur. Öte yandan $\alpha = [2; \alpha]$ olarak yazılabileceği kolaylıkla görülebilir. O halde $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha}$ eşitliğinden $\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklemden, $\alpha > 2$

olduğundan, $\alpha = 1+\sqrt{2}$ elde edilir. Dolayısıyla $\beta = [1;3,\alpha] = 1+\frac{1}{3+\frac{1}{\alpha}} = \frac{4\alpha+1}{3\alpha+1} = \frac{5+4\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}}$ irrasyonel sayısına ulaşılır.

**Örnek 2.3.2.** $x > 0$ bir tamsayı olmak üzere $\beta = [1;3,x,x,x\ldots]$ sonsuz sürekli kesrine karşılık gelen irrasyonel sayıyı bulunuz.

**Çözüm:** $\beta = [1;3,x,x,x,\ldots] = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\ddots}}}}$

şeklinde olup $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\ddots}} = \alpha$ denirse $\alpha = [x;x,x,\ldots]$ ve dolayısıyla $\beta = [1;3,\alpha]$ olur. Ayrıca $\alpha = [x;\alpha]$ olarak yazılabileceği kolaylıkla görülebilir. O halde $\alpha = x+\frac{1}{\alpha}$ eşitliğinden $\alpha^2 - x\alpha - 1 = 0$ denklemi elde edilir. $x > 0$ olduğundan $\alpha > 0$ olup $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ olduğu görülebilir. Öte yandan $x^2+4$ ifadesi tam kare, yani $x^2+4 = y^2$ olsun. $x > 0$ olduğundan $y^2 > 4$ olur. Böylece $x^2+4-y^2 = 0$ denkleminden

$$\Delta = 0 - 4.1.(4-y^2) = -16+4.1.y^2 > 0$$

ve dolayısıyla $\Delta \neq 0$ elde edilir. Bu ise $x^2+4$ ifadesinin tam kare olması varsayımıyla çelişir. O halde $x^2+4$ ifadesi tam kare değildir. Dolayısıyla $\sqrt{x^2+4}$ sayısı irrasyoneldir. O halde $\alpha$ sayısı da irrasyoneldir. Böylece

$$\beta = 1+\frac{1}{3+\frac{1}{\alpha}} = \frac{4\alpha+1}{3\alpha+1} = \frac{4x+2+4\sqrt{x^2+4}}{3x+2+3\sqrt{x^2+4}}$$

irrasyonel sayısına ulaşılır.

**Örnek 2.3.3.** $\alpha = \frac{12+\sqrt{15}}{3}$ irrasyonel sayısına karşılık gelen sonsuz sürekli kesir açılımını bulunuz.

**Çözüm:** $\alpha_0 = \frac{12+\sqrt{15}}{3}$ olsun. Teorem 2.3.6. uygulandığında

$$a_0 = [\![\alpha_0]\!] = \left[\!\!\left[\frac{12+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right] = 5; \quad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{12+\sqrt{15}}{3}-5} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

$$a_1 = [\![\alpha_1]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]\!\!\right] = 3; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}-3} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

$$a_2 = [\![\alpha_2]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right] = 2; \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}-2} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

$$a_3 = [\![\alpha_3]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]\!\!\right] = 3; \quad \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - a_3} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}-3} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

$$a_4 = [\![\alpha_4]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right] = 2; \quad \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - a_4} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}-2} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

değerleri elde edilir. Bu değerlere bakılarak

$$a_k = \begin{cases} 5 & \text{eğer } k = 0 \text{ ise} \\ 2 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ için } k \text{ çift ise} \\ 3 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ için } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

tahmini yapılabilir. Bu tahminin doğru olduğu tümevarımla gösterilecektir. $k = 0$ için tahminin doğru olduğu açıktır. Şimdi $k \geq 1$ çift olsun. Bu durumda $k = 2m$ yazılırsa $a_{2m} = 2$ olduğu gösterilmeli. Bunun için öncelikle $\alpha_{2m} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$ olduğu gösterilmesi gerekir ki böylece $a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right]$ olur.

$m = 1$ olsun. $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}-3} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$ olduğundan $m = 1$ için iddia doğrudur. m için $\alpha_{2m} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$ doğru olsun. Bu durumda

$$a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right] = 2,$$

$$\alpha_{2m+1} = \frac{1}{\alpha_{2m} - a_{2m}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}-2} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

ve

$$a_{2m+1} = [\![\alpha_{2m+1}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]\!\!\right] = 3,$$

bulunur. Böylece

$$\alpha_{2m+2} = \frac{1}{\alpha_{2m+1}-a_{2m+1}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{2}-3} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$$

olur. Dolayısıyla tahmin $m+1$ için de doğru olur. Yani $\alpha_{2m} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$ olur. O halde her $m \geq 1$ için

$$a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{3}\right]\!\!\right] = 2 \tag{2.3.3}$$

elde edilir.

Şimdi ise $k \geq 1$ tek olsun. O zaman $k = 2m-1$ yazılabilir. $m = 1$ için $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{12+\sqrt{15}}{3}-5} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$ ve dolayısıyla $a_1 = [\![\alpha_1]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]\!\!\right] = 3$ bulunur. O halde $m \geq 2$ olsun. Bu durumda (2.3.3) eşitliği ve her $m \geq 1$ için $\alpha_{2m} = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$ olduğu kullanılırsa

$$\alpha_{2m-1} = \frac{1}{\alpha_{2m-2}-a_{2m-2}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{15}}{3}-2} = \frac{3+\sqrt{15}}{2}$$

olduğu görülür. Böylece $m \geq 1$ için

$$a_{2m-1} = [\![\alpha_{2m-1}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{3+\sqrt{15}}{2}\right]\!\!\right] = 3 \tag{2.3.4}$$

olur. Sonuç olarak

$$a_k = \begin{cases} 5 & \text{eğer } k = 0 \text{ ise} \\ 2 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ için } k \text{ çift ise} \\ 3 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ için } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece $\alpha = \frac{12+\sqrt{15}}{3}$ irrasyonel sayısına karşılık gelen sonsuz sürekli kesir açılımı $[5; 3,2,3,2,3,2, \dots]$ olarak bulunur.

**Örnek 2.3.4.** $\alpha = \sqrt{5}$ irrasyonel sayısına karşılık gelen sonsuz sürekli kesir açılımını bulunuz.

**Çözüm:** $\alpha_0 = \sqrt{5}$ olsun. Teorem 2.3.6 uygulandığında

$$a_0 = [\![\alpha_0]\!] = [\![\sqrt{5}]\!] = 2; \qquad \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$$

$$a_1 = [\![\alpha_1]\!] = [\![\sqrt{5}+2]\!] = 4; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$$

$$a_2 = [\![\alpha_2]\!] = [\![\sqrt{5}+2]\!] = 4; \quad \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

ve böyle devam edilirse tümevarımla

$$\alpha_n = \sqrt{5}+2\,, \;\; a_n = [\![\alpha_n]\!] = [\![\sqrt{5}+2]\!] = 4 \text{ ve } \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2$$

olduğu görülebilir. O halde $\alpha = [2; 4,4,4,4,4,4,4, \dots]$ sürekli kesir açılımı bulunur.

**Örnek 2.3.5.** $x$ bir pozitif tamsayı olmak üzere $\alpha = \frac{-x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$ sayısına karşılık gelen $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ sürekli kesir açılımı için $k \geq 1$ olmak üzere

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{eğer } k = 0 \text{ ise} \\ x & \text{eğer } k \geq 1 \text{ ve } k \text{ çift ise} \\ 1 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ ve } k \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde olduğunu gösteriniz?

**Çözüm:** Öncelikle $x^2 + 4x$ cebirsel ifadesinin tam kare olmadığını gösterilecek. Tersine $x^2 + 4x$ ifadesi tam kare yani $x^2 + 4x = y^2$ olsun. Böylece $x^2 + 4x - y^2 = 0$ denkleminden

$\Delta = 4^2 - 4.1.(-y^2) = 16 + 4.1.y^2 \geq 16 > 0$

ve dolayısıyla $\Delta \neq 0$ elde edilir. Bu ise $x^2 + 4x$ ifadesinin tam kare olması varsayımıyla çelişir. O halde $x^2 + 4x$ ifadesi tam kare değildir. Dolayısıyla $\sqrt{x^2 + 4x}$ sayısı irrasyonel olup $\alpha$ sayısı da irrasyoneldir. Böylece α'ya bir sonsuz sürekli kesir karşılık gelir. Bu durumda Teorem 2.3.6.'e göre $\alpha = \alpha_0$ olmak üzere $k = 0,1,2, \ldots$ için

$a_k = [\![\alpha_k]\!]$ ve $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$

olarak tanımlanıyor. $k = 0$ için $(x+1)^2 < x^2 + 4x < (x+2)^2$ olduğundan

$a_0 = [\![\alpha_0]\!] = \left[\!\!\left[\frac{-x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right]\!\!\right] = 1$

bulunur. O halde $k \geq 1$ olsun. Şimdi $k \geq 1$ çift olsun. Bu durumda $k = 2m$ yazılırsa $a_{2m} = x$ olduğu gösterilmeli. Bunun için öncelikle $\alpha_{2m} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$ olduğu gösterilirse böylece $a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}\right]\!\!\right] = x$ olur.

$m = 1$ olsun. $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{-x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}$ ve dolayısıyla $a_1 = [\![\alpha_1]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}\right]\!\!\right] = 1$ olduğundan $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x} - 1} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$ olur. O halde $m = 1$ için iddia doğrudur. m için

$\alpha_{2m} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$

doğru olsun. Bu durumda

$a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}\right]\!\!\right] = x,$

$$\alpha_{2m+1} = \frac{1}{\alpha_{2m} - a_{2m}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2} - x} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}$$

ve

$$a_{2m+1} = [\![\alpha_{2m+1}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}\right]\!\!\right] = 1,$$

bulunur. Böylece

$$\alpha_{2m+2} = \frac{1}{\alpha_{2m+1} - a_{2m+1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x} - 1} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$$

olur. Dolayısıyla iddia $m+1$ için de doğru olur. Yani $\alpha_{2m} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$ olur. O halde her $m \geq 1$ için

$$a_{2m} = [\![\alpha_{2m}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}\right]\!\!\right] = x \tag{2.3.5}$$

elde edilir.

Şimdi ise $k \geq 1$ tek olsun. O zaman $k = 2m - 1$ yazılabilir. $m = 1$ için $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{-x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}$ ve dolayısıyla $a_1 = [\![\alpha_1]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}\right]\!\!\right] = 1$ bulunur. O halde $m \geq 2$ olsun. Bu durumda (2.3.5) eşitliği ve her $m \geq 1$ için $\alpha_{2m} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2}$ olduğu kullanılırsa

$$\alpha_{2m-1} = \frac{1}{\alpha_{2m-2} - a_{2m-2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2} - x} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}$$

olduğu görülür. Böylece $m \geq 1$ için

$$a_{2m-1} = [\![\alpha_{2m-1}]\!] = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{x^2+4x}+x}{2x}\right]\!\!\right] = 1 \tag{2.3.6}$$

olur. Sonuç olarak

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{eğer } k = 0 \text{ ise} \\ x & \text{eğer } k \geq 1 \text{ ve k çift ise} \\ 1 & \text{eğer } k \geq 1 \text{ ve k tek ise} \end{cases}$$

olduğu görülür. Böylece $\alpha = \frac{-x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2}$ irrasyonel sayısına karşılık gelen sonsuz sürekli kesir açılımı $[1; 1, x, 1, x, 1, x, \ldots]$ olarak bulunur.

### 2.4. Sonsuz Sürekli Kesirlerin Yaklaşımları İle İlgili Bazı Teoremler

x herhangi bir irrasyonel sayı ve $x_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \ldots]$ olmak üzere x sayının sürekli kesir açılımı

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \\ + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x_{n+1}}}$$

olsun. Böylece $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$ yazılabilir. Sabit bir n doğal sayısı için $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ sonsuz sürekli kesrinin ilk $n+1$ yaklaşımı $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ $(0 \leq k \leq n)$ ile $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$ sürekli kesrinin ilk $n+1$ yaklaşımı aynıdır. O halde $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}]$ sürekli kesrinin $(n+2)$. yaklaşımı $C_{n+1}{}'$ ile gösterilirse o zaman

$$x = C_{n+1}{}' = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} \tag{2.4.1}$$

ifadesi elde edilir[11].

**Teorem 2.4.1.** $\frac{p_k}{q_k}$, x irrasyonel sayısının k. yaklaşımı ise $k \geq 1$ için

$$\frac{1}{2q_{k+1}q_k} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_{k+1}q_k} < \frac{1}{{q_k}^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

eşitsizliği sağlanır[10].

**İspat:** x bir irrasyonel sayı olduğu ve bu sayıya karşılık gelen sonsuz sürekli kesir $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ olsun. Burada $a_0$ hariç $a_1, a_2, \dots$ sayıları pozitiftir. Teorem 2.3.5'e göre $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots]$ olmak üzere $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}]$ olarak yazılabilir. Bu durumda (2.4.1) eşitliğine göre

$$x = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}$$

olur. Bu eşitlikten

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}\right| = \left|\frac{p_{k-1}q_k - p_k q_{k-1}}{(x_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k}\right| \tag{2.4.2}$$

elde edilir. $x_{k+1} = [a_{k+1}; a_{k+2}, \dots] = a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+2} + \frac{1}{\vdots}}$ olduğundan

$$0 < a_{k+1} < x_{k+1} < 1 + a_{k+1}$$

olur. Böylece $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$ olduğu kullanılırsa

$$k \leq q_k < q_{k+1} < x_{k+1}q_k + q_{k-1} < q_{k+1} + q_k$$

olduğu görülebilir. O halde Teorem 2.3.8'nin vi) ve vii) şıkları kullanılırsa (2.4.2)'den

$$\frac{1}{2q_{k+1}q_k} < \frac{1}{(q_{k+1} + q_k)q_k} < \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_{k+1}q_k} < \frac{1}{{q_k}^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

**Teorem 2.4.2.** Eğer x bir irrasyonel sayı, $k \geq 1$ ve $\frac{p_k}{q_k}$ x'in k. yaklaşımı ise o zaman

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|$$

dir[4].

**İspat:** x bir irrasyonel sayı ise (2.4.1)'den $x = \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}}$ yazılabilir. Buradan

$$x(x_{k+1}q_k + q_{k-1}) = x_{k+1}p_k + p_{k-1}$$

olup

$$x_{k+1}(xq_k - p_k) = p_{k-1} - xq_{k-1} = -q_{k-1}\left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafı $x_{k+1}q_k$ ifadesine bölünürse

$$x - \frac{p_k}{q_k} = \frac{-q_{k-1}}{x_{k+1}q_k}\left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right)$$

eşitliği elde edilir. Burada mutlak değer alınırsa

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k}\left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|$$

olur. Teorem 2.3.8'in vi) şıkkı özellikle $k \geq 1$ için $q_k \geq q_{k-1}$ olarak yazılabileceğinden ve $x_{k+1} > 1$ olduğundan

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| < \left|x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right|$$

sonucuna varılır.

**Teorem 2.4.3.** x bir rasyonel sayı ve $n \geq 1$ olmak üzere

i) x'in her iki ardışık yaklaşımlarından en az biri $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2{q_n}^2}$ eşitsizliğini sağlar.

ii) x'in her üç ardışık yaklaşımlarından en az biri $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}{q_n}^2}$ eşitsizliğini sağlar[16].

**İspati:** Sonuç 2.3.3'e göre x irrasyonel sayısı $\frac{p_n}{q_n}$ ile $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ arasında olduğundan $x - \frac{p_n}{q_n}$ ile $x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ifadeleri zıt işaretlidir. Dolayısıyla Teorem 2.3.8'in i) şıkkı kullanılırsa

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \qquad (2.4.3)$$

elde edilir. Şimdi hipotez sağlanmasın. Yani hem $k = n$ hem de $k = n + 1$ için $\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \frac{1}{2{q_k}^2}$ olsun. Bu durumda (2.4.3)'den

$$\frac{1}{2{q_n}^2} + \frac{1}{2{q_{n+1}}^2} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her tarafı $2q_n q_{n+1}$ ile çarpılırsa

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n+1}} \leq 2$$

olur. Eğer $r = \frac{q_n}{q_{n+1}}$ olarak alınırsa $r + \frac{1}{r} \leq 2$ ve buradan $(r-1)^2 \leq 0$ eşitsizliği bulunur. Bu ise $r = 1$ olmasını ve dolayısıyla $q_n = q_{n+1}$ olmasını gerektirir. Fakat bu $n = 0$ olmasıyla mümkündür. Bu ise $n \geq 1$ olduğundan imkansızdır. O halde hipotez doğrudur.
ii) (2.4.3) eşitliğinin sağlandığı açıktır. i) deki ispata benze şekilde hipotez sağlanmadığı varsayılsın. Yani $k = n$, $k = n + 1$ ve $k = n + 2$

$$\left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}{q_k}^2}$$

olsun. O halde (2.4.3) eşitliğinden

$$\frac{1}{\sqrt{5}{q_n}^2} + \frac{1}{\sqrt{5}{q_{n+1}}^2} \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

ve

$$\frac{1}{\sqrt{5}{q_{n+1}}^2}+\frac{1}{\sqrt{5}{q_{n+2}}^2}\leq\frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son iki eşitsizlikten $\frac{q_{n+1}}{q_n}+\frac{q_n}{q_{n+1}}\leq\sqrt{5}$ ve $\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}+\frac{q_{n+1}}{q_{n+2}}\leq\sqrt{5}$ olur. Şimdi $\frac{q_{n+1}}{q_n}=m$ ve $\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}=t$ olarak alınırsa $m+\frac{1}{m}\leq\sqrt{5}$ ve $t+\frac{1}{t}\leq\sqrt{5}$ olup gerekli işlemler yapıldığında $m\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $t\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bulunur. $q_{n+2}=a_{n+2}q_{n+1}+q_n\geq q_{n+1}+q_n$ eşitsizliğinden faydalanarak $\frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}\geq 1+\frac{q_n}{q_{n+1}}$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $t\geq 1+\frac{1}{m}>1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ bulunur ki bu $t\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla hipotez doğrulanmış olur.

**Sonuç 2.4.4.** Eğer x bir irrasyonel sayı ise $\left|x-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}b^2}$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda $\frac{a}{b}$ rasyonel sayıları mevcuttur[4].

**Teorem 2.4.5.** α bir irrasyonel sayı ve $\frac{p_k}{q_k}$, α'nın sonsuz sürekli kesir açılımındaki k. yaklaşımı olsun. Eğer a ve b tamsayı ve $1\leq b<q_{k+1}$ ise

$$|q_k\alpha-p_k|\leq|b\alpha-a|$$

dır[11].

**İspat:** $1\leq b<q_{k+1}$ ve $\frac{p_k}{q_k}$, α'nın sürekli kesir açılımının k. yaklaşımı olsun. $x,y\in\mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$\begin{cases}p_kx+p_{k+1}y=a\\ q_kx+q_{k+1}y=b\end{cases}\tag{2.4.4}$$

denklem sistemi ele alınsın. Bu denklem sistemi

$$\begin{pmatrix}p_k & p_{k+1}\\ q_k & q_{k+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\tag{2.4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A=\begin{pmatrix} p_k & p_{k+1} \\ q_k & q_{k+1}\end{pmatrix}$ olarak alınırsa Teorem 2.3.8'in i) şıkkından

$$\det A=\det\begin{pmatrix} p_k & p_{k+1} \\ q_k & q_{k+1}\end{pmatrix}=p_kq_{k+1}-p_{k+1}q_k=(-1)^{k+1}\neq 0$$

bulunur. Dolayısıyla A matrisinin tersi vardır. Böylece

$$\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}=(-1)^{k+1}\begin{pmatrix} q_{k+1} & -p_{k+1} \\ -q_k & p_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$$

dir. Buradan $x=(-1)^{k+1}(aq_{k+1}-bp_{k+1})$ ve $y=(-1)^{k+1}(bp_k-aq_k)$ bulunur. Eğer $x=0$ ise $aq_{k+1}=bp_{k+1}$ dir. Bu durumda $(p_{k+1},q_{k+1})=1$ olduğundan $q_{k+1}|b$ ve dolayısıyla $q_{k+1}\leq b$ olur. Bu ise $b<q_{k+1}$ olmasıyla çelişir. O halde $x\neq 0$ olur. Eğer $y=0$ ise (2.4.4)'den $p_kx=a$ ve $q_kx=b$ olur. Böylece

$$|b\alpha-a|=|q_kx\,\alpha-p_kx|=|x||q_k\alpha-p_k|\geq|q_k\alpha-p_k| \tag{2.4.6}$$

olur. Şimdi $y\neq 0$ olsun. Eğer $y<0$ ise (2.4.4)'deki ikinci denklemden $q_kx>0$ olur. Bu durumda $x>0$ bulunur. Eğer $y>0$ ise $y\geq 1$ olacağından (2.4.4)'deki ikinci denklemden $q_kx=b-q_{k+1}y<b-q_{k+1}<0$ olur. Bu durumda $q_kx<0$ olacaktır. Dolayısıyla $x<0$ olur. Sonuç olarak x ve y farklı işaretlere sahip olur.

Ayrıca α irrasyonel sayısı $\frac{p_k}{q_k}$ ile $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ arasında olduğundan $q_k\alpha-p_k$ ve $q_{k+1}\alpha-p_{k+1}$ ifadeleri de zıt işaretlidir. O halde

$$\begin{aligned}|b\alpha-a|&=|(q_kx+q_{k+1}y)\alpha-p_kx-p_{k+1}y|=|(q_k\alpha-p_k)x+y(q_{k+1}\alpha-p_{k+1})|\\&=|(q_k\alpha-p_k)x|+|y(q_{k+1}\alpha-p_{k+1})|\geq|x||q_k\alpha-p_k|\geq|q_k\alpha-p_k|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat biter.

**Sonuç 2.4.6.** α bir irrasyonel sayı ve $\frac{p_k}{q_k}$ , α'nın sürekli kesir açılımındaki k. yaklaşımı olsun. Eğer a ve b tamsayı, $1\leq b<q_{k+1}$ ise $\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|\leq\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|$ dir[11].

**Sonuç 2.4.7.** α bir irrasyonel sayı ve $i = 1,2,3,\ldots$ için, α'nın sürekli kesir yaklaşımı, a ve b tamsayılar ve $b > 0$ olsun. Eğer $k > 0$ bir tamsayı ve $|b\alpha - a| < |q_k\alpha - p_k|$ ise $b \geq q_{k+1}$ dir[8].

**Teorem 2.4.8.** β bir irrasyonel sayı, a ve b tamsayı olsun. Eğer $\left|\beta - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{2b^2}$ ise $\frac{a}{b}$, β'nın sürekli kesir açılımının bir yaklaşımıdır[9].

**İspat:** Aksine $\frac{a}{b}$, β'nın sürekli kesir açılımının bir yaklaşımı olmasın. O halde $\frac{a}{b} \neq \frac{p_k}{q_k}$ olacak biçimde $k \geq 0$ için β'nın sürekli kesir açılımının bir $\frac{p_k}{q_k}$ yaklaşımı vardır. O zaman $q_k \leq b < q_{k+1}$ olacak şekilde bir $k \geq 0$ mevcuttur. Teorem 2.4.5'e göre

$$|q_k\beta - p_k| \leq |b\beta - a| = b\left|\beta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b}$$

olur. Buradan $\left|\beta - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2bq_k}$ olur. $\frac{a}{b} \neq \frac{p_k}{q_k}$ olduğundan $|aq_k - bp_k| \geq 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{bq_k} \leq \frac{|aq_k - bp_k|}{bq_k} = \left|\frac{a}{b} - \frac{p_k}{q_k}\right| \leq \left|\beta - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\beta - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bq_k} + \frac{1}{2b^2}$$

bulunur. Son eşitsizlik $2b^2q_k$ ile çarpılırsa $b < q_k$ elde edilir. Bu ise $q_k \leq b < q_{k+1}$ olması ile çelişir. O halde $\frac{a}{b} = \frac{p_k}{q_k}$ olan $k \geq 0$ mevcuttur. Böylece ispat biter.

**Teorem 2.4.9.** $\alpha > 1$ bir irrasyonel olsun. Eğer $\frac{p_k}{q_k}$, α'nın k. yaklaşımı ise $k \geq 1$ için $\frac{1}{\alpha}$'nın k. yaklaşımı $\frac{q_{k-1}}{p_{k-1}}$'dir. Ayrıca $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ ise

$$\frac{1}{\alpha} = [0;\ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

dir[17].

**İspat:** $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ ise $C_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} C_n = \alpha$ olduğunu biliniyor. $R_n = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ olsun. O zaman

$$R_n = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = 0 + \frac{1}{[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]} = 0 + \frac{1}{C_n}$$

olup burada limit alındığında $\lim_{n\to\infty} R_n = 0 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} C_n} = \frac{1}{\alpha}$ bulunur. Dolayısıyla $\frac{1}{\alpha} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ olur. Ayrıca

$$\frac{1}{\alpha} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] = 0 + \frac{1}{[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}]} = \frac{1}{\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{q_{k-1}}{p_{k-1}}$$

olduğundan $\frac{1}{\alpha}$'nın k. yaklaşımının $\frac{q_{k-1}}{p_{k-1}}$ olduğu görülür.

## 2.5. Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

Bu bölümde periyodik olan sonsuz sürekli kesirlerden bahsedilecektir.

**Tanım 2.5.1.** $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesir ve n bir pozitif tamsayı olsun. $\forall n \geq N$ için $a_n = a_{n+k}$ olacak şekilde $N \geq 0$ doğal sayısı ve k pozitif tamsayısı varsa $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ sonsuz sürekli kesrine periyodiktir denir. Bu şartı sağlayan en küçük k pozitif tamsayısına da sonsuz sürekli kesrin periyodu denir. Bu durumda $\forall n \geq N$ için $a_n = a_{n+k}$ ise $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, , a_N, \dots, a_{N+k-1}, a_{N+k}, \dots]$ sonsuz sürekli kesrinin periyodikliği

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, \overline{, a_N, \dots, a_{N+k-1}}]$$

ile gösterilir[8].

**Örnek 2.5.1.** $\frac{5+4\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = [1; 3,2,2,2, \dots]$ olduğu Örnek 2.3.1'de gösterilmişti. O halde bu kesir periyodiktir. Bu durum $[1; 3, \overline{2}]$ şeklinde gösterilir. Ayrıca periyodu 1'dir.

**Örnek 2.5.2.** $\alpha = \frac{12+\sqrt{15}}{3} = [5; 3,2,3,2,3,2, \dots] = [5; \overline{3,2}]$ periyodiktir ve periyodu 2'dir.

**Tanım 2.5.2.** $\alpha$ irrasyonel sayısı katsayıları tamsayı olan 2. dereceden bir polinomun kökü ise $\alpha$'ya kuadratik irrasyonel sayı denir[8].

Yukarıdaki tanıma göre $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ve $A \neq 0$ olmak üzere $Ax^2 + Bx + C = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = \frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ ve $x_2 = \frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ dir. Eğer $B^2 - 4AC > 0$ ve tam kare olmayan bir sayı ise o zaman $x_{1,2} = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ sayıları kuadratik irrasyoneldir. Kuadratik irrasyonel olmayan sonsuz tane irrasyonel sayı vardır. Kuadratik irrasyonel olmayan irrasyonel sayılara örnek olarak π ve e sayıları verebilir.

**Örnek 2.5.3.** $\sqrt{3} + 1$ sayısının kuadratik irrasyonel sayı olduğunu gösteriniz

**Çözüm:** $x = \sqrt{3} + 1$ olsun. Buradan katsayıları tamsayı olan 2. dereceden $x^2 - 2x - 2 = 0$ polinomu elde edilir. Dolayısıyla $x = \sqrt{3} + 1$ kuadratik irrasyoneldir.

**Lemma 2.5.1.** $\alpha$ reel sayısı kuadratik irrasyoneldir $\Leftrightarrow$ $a, b, c$ tamsayılar, $c \neq 0$ ve $b > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\alpha = (a + \sqrt{b})/c$$

dir[8].

**Lemma 2.5.2.** Eğer $\alpha$ kuadratik irrasyonel ve $r, s, t$ ve $u$ tamsayılar ise, $\frac{r\alpha+s}{t\alpha+u}$ sayısı ya rasyoneldir ya da bir kuadratik irrasyoneldir[8].

**Tanım 2.5.3** $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ irrasyonel sayısı kuadratik irrasyonel ise $\alpha$'nın eşleniği $\alpha' = \frac{a-\sqrt{b}}{c}$ ile tanımlanır[8].

**Lemma 2.5.3.** $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ ve $\beta = \frac{x+\sqrt{y}}{z}$ iki kuadratik irrasyonel ise

i) $(\alpha \mp \beta)' = \alpha' \mp \beta'$

ii) $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$

iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{\alpha'}{\beta'}$

dir[8].

Öte yandan $a, b, c, d$ rasyonel sayılar olmak üzere $a + \sqrt{b}$ ve $c + \sqrt{d}$ iki kuadratik irrasyonel sayı ve $a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$ ise $a = c$ ve $b = d$ dir.

**Teorem 2.5.4.** $\alpha$ bir kuadratik irrasyonel sayı ise $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı, P ve Q tamsayılar, $Q \neq 0$ ve $Q|(d - P^2)$ olmak üzere $\alpha = \frac{P+\sqrt{d}}{Q}$ biçimindedir[8].

**İspat:** $\alpha$ bir kuadratik irrasyonel sayısı ise katsayıları tamsayı olan 2. dereceden $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ denklemi sağlanır. O halde $A \neq 0$ olup $\alpha = \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ şeklindedir. $\alpha$ bir reel sayı olduğundan $B^2 - 4AC > 0$ ve $B^2 - 4AC$ tam kare değildir. Dolayısıyla $P = -B, Q = 2A$ ve $d = B^2 - 4AC$ olarak alınırsa teoremin hipotezi sağlanmış olup

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{d}}{Q}$$

biçiminde olur. Böylece ispat tamamlanır.

Bir kuadratik irrasyonelin sürekli kesri Teorem 2.3.6 yardımıyla bulunabileceği gibi alternatif olarak aşağıdaki teorem yardımıyla da bulunabilir.

**Teorem 2.5.5.** $\alpha$ bir kuadratik irrasyonel sayı olsun. $Q_0 \neq 0$, $d > 0$ tamkere olmayan bir tamsayı ve $Q_0|d - {P_0}^2$ olmak üzere $\alpha = \frac{P_0+\sqrt{d}}{Q_0}$ olacak biçimde $P_0$ ve $Q_0$ tamsayıları mevcuttur. $k = 0,1,2,3, \ldots$ için

$\alpha_k = \frac{P_k+\sqrt{d}}{Q_k}$,

$a_k = [\![\alpha_k]\!]$,

$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k,$

$Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k},$

ardışık olarak tanımlanırsa

$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$

dir[8].

**İspat:** $k$ üzerine tümevarım yöntemiyle $P_k$ ve $Q_k$'nın tamsayılar, $Q_k \neq 0$ ve $Q_k | d - P_k^2$ olduğu gösterilecektir.

$k = 0$ için teoremin hipotezinden iddia doğrudur. Şimdi iddia $k$ için doğru olsun. Yani $P_k$ ve $Q_k$'nın tamsayılar, $Q_k \neq 0$, $Q_k | d - P_k^2$ olsun. Öte yandan $P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$'in bir tam sayı olduğu açıktır. Ayrıca

$$Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k} = \frac{d - (a_k Q_k - P_k)^2}{Q_k} = \frac{d - (P_k)^2}{Q_k} + \frac{(2a_k P_k - a_k^2 Q_k) Q_k}{Q_k}$$

dır. Dolayısıyla varsayıma göre $Q_k | d - P_k^2$ olduğundan $Q_{k+1}$'in tamsayı olduğu söylenebilir. $d \neq P_k^2$'dir. Çünkü $d$ tamkare değildir. O halde $Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k} \neq 0$ dır. $Q_{k+1} = \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k}$ eşitliği $Q_k$ ile çarpılırsa $Q_{k+1} Q_k = d - P_{k+1}^2$ bulunur. Buradan $Q_{k+1} | d - P_{k+1}^2$ bulunur. Böylece iddia $k + 1$ için ispatlanmıştır.

Şimdi ise $k = 0,1,2,3, \dots$ için $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$ olduğu gösterilecektir. Böylece Teorem 2.3.6'ya göre $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ olduğu söylenebilir. Bunun için $\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}$ eşitliği ele alınırsa ve $d - P_{k+1}^2 = Q_k Q_{k+1}$ eşitliği kullanılırsa

$$\alpha_k - a_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - a_k = \frac{P_k + \sqrt{d} - a_k Q_k}{Q_k} = \frac{\sqrt{d} - (a_k Q_k - P_k)}{Q_k} = \frac{\sqrt{d} - P_{k+1}}{Q_k}$$

$$= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})} = \frac{Q_k Q_{k+1}}{Q_k(\sqrt{d} + P_{k+1})} = \frac{Q_{k+1}}{(\sqrt{d} + P_{k+1})} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}$$

elde edilir. Böylece $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\alpha = [a_0; a_1, a_2, , \dots]$ olur.

**Örnek 2.5.4.** $\alpha = \sqrt{7}$ sayısının sürekli kesir açılımının $[2; 1,1,1,4,1,1,1,4, \dots] = [2; \overline{1,1,1,4}]$ şeklinde olduğunu gösteriniz?

**Çözüm:** Teorem 2.5.5'e göre $\alpha = \frac{0+\sqrt{7}}{1}$ olarak yazılırsa $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$ ve $d = 7$ olur. $k = 0,1,2,3, \dots$ olmak üzere;

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}\ , a_k = [\![\alpha_k]\!]\ ,\ P_{k+1} = a_k Q_k - P_k \text{ ve } Q_{k+1} = \frac{d - {P_{k+1}}^2}{Q_k}$$

formülleri kullanılırsa $a_k$, $P_k$, $Q_k$ değerleri aşağıdaki tabloda verildiği gibi elde edilmiştir.

Tablo 2.1 $\alpha = \sqrt{7}$ sayısı için bulunan k, $a_k$, $\alpha_k$, $P_k$ , $Q_k$ $(k = 1,2,3, \dots)$ değerleri için

| k | $a_k$ | $\alpha_k$ | $P_k$ | $Q_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | $\frac{0+\sqrt{7}}{1}$ | 0 | 1 |
| 1 | 1 | $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ | 2 | 3 |
| 2 | 1 | $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ | 1 | 2 |
| 3 | 1 | $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ | 1 | 3 |
| 4 | 4 | $\frac{2+\sqrt{7}}{1}$ | 2 | 1 |
| 5 | 1 | $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ | 2 | 3 |
| 6 | 1 | $\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ | 1 | 2 |
| 7 | 1 | $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ | 1 | 3 |
| 8 | 4 | $\frac{2+\sqrt{7}}{1}$ | 2 | 1 |

Tablodaki verilerden tümevarımla $\sqrt{7}$ sayısının periyodik sürekli kesir açılımına sahip olduğu görülür. Böylece

$$\alpha = [2; 1,1,1,4,1,1,1,4, \dots] = [2; \overline{1,1,1,4}]$$

dır.

**Teorem 2.5.6.** Bir irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir açılım periyodiktir ancak ve ancak bu sayı kuadratik irrasyoneldir[8]

**İspat:** $\alpha$ bir irrasyonel sayı ve bu sayının sürekli kesir açılımı periyodik olsun. O halde $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+k}}]$ ile gösterilir. Burada $x = [\overline{a_{n+1}; \dots, a_{n+k}}]$ alındığında $x = [a_{n+1}; \dots, a_{n+k}, x]$ olarak yazılabileceğinden Teorem 2.2.3'e göre $x = \frac{xp_{n+k}+p_{n+k-1}}{xq_{n+k}+q_{n+k-1}}$ olur. Bu eşitlikten katsayıları tamsayı olan 2. dereceden

$$x^2 q_{n+k} + x(q_{n+k-1} - p_{n+k}) - p_{n+k-1} = 0$$

polinomu elde edilir. Ayrıca x'in sürekli kesir açılımı sonsuz olduğundan irrasyonel sayıdır. Dolayısıyla x bir kuadratik irrasyonel sayıdır. O halde

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{a_{n+1}, \dots, a_{n+k}}] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}$$

olup x bir kuadratik irrasyonel olduğundan Lemma 2.5.2'ye göre $\alpha$'da kuadratik irrasyonel sayıdır.

Şimdi $\alpha$ bir kuadratik irrasyonel olsun. Öyleyse Teorem 2.5.4'e göre $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı, P ve Q tamsayılar, $Q \neq 0$ ve $Q|(d - P^2)$ olmak üzere

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{d}}{Q}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Teorem 2.5.5'e göre $k = 0,1,2,3, \dots$ için

$$\alpha_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k},$$
$$a_k = [\![\alpha_k]\!],$$
$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k,$$
$$Q_{k+1} = \frac{d - {P_{k+1}}^2}{Q_k},$$

olmak üzere

$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$

dir. $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, \alpha_k]$ olarak yazılabileceğinden Teorem 2.2.3'ye göre $\alpha = \frac{\alpha_k p_{k-1} - P_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} - q_{k-2}}$ olur. Bu eşitlikte her iki tarafın eşleniği alınırsa Lemma 2.5.3'e göre

$$\alpha' = \frac{\alpha'_k p_{k-1} - P_{k-2}}{\alpha'_k q_{k-1} - q_{k-2}}$$

eşitliği ve buradan da

$$\alpha'_k = \frac{-q_{k-2}}{q_{k-1}} \left( \frac{\alpha' - \frac{P_{k-2}}{q_{k-2}}}{\alpha' - \frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}} \right)$$

elde edilir. Burada $k$ sonsuza giderken limit alınırsa $\frac{P_{k-2}}{q_{k-2}}$ ve $\frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}$ ardışık iki yaklaşım α' ya yaklaşacağından $\frac{\alpha' - \frac{P_{k-2}}{q_{k-2}}}{\alpha' - \frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}}$ ifadesi 1'e yaklaşır. Bu yüzden $N$ sabit bir tamsayı olmak üzere $k \geq N$ olacak şekilde her $k$ pozitif tam sayısı için $\frac{\alpha' - \frac{P_{k-2}}{q_{k-2}}}{\alpha' - \frac{P_{k-1}}{q_{k-1}}}$ ifadesi pozitif olacağından $\alpha'_k < 0$ olur. Öte yandan $k \geq 1$ için $\alpha_k > 0$ olduğundan $\alpha_k - \alpha'_k > 0$'dır. Dolayısıyla

$$\alpha_k - \alpha'_k = \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k} - \frac{P_k - \sqrt{d}}{Q_k} = \frac{2\sqrt{d}}{Q_k} > 0$$

$k \geq N$ için $Q_k > 0$ olur. Ayrıca $d - {P_{k+1}}^2 = Q_k Q_{k+1}$ olduğundan $k \geq N$ için

$$Q_k \leq Q_k Q_{k+1} = d - {P_{k+1}}^2 \leq d$$

ve dahası ${P_{k+1}}^2 \leq d = Q_k Q_{k+1} + {P_{k+1}}^2$ olduğundan

$$-\sqrt{\mathrm{d}} < \mathrm{P}_{\mathrm{k}+1} < \sqrt{\mathrm{d}}$$

olduğu görülür. $0 \leq \mathrm{Q}_{\mathrm{k}} \leq d$ ve $-\sqrt{\mathrm{d}} < \mathrm{P}_{\mathrm{k}+1} < \sqrt{\mathrm{d}}$ eşitsizlikleri $k \geq N$ için sağlandığından $k > N$ ise sonlu sayıda $\mathrm{P}_{\mathrm{k}}$ ve $\mathrm{Q}_{\mathrm{k}}$ değeri vardır. $k \geq N$ için sonsuz sayıda $k$ var olduğundan öyle $i$ ve $j$ tamsayıları vardır ki $i < j$ olmak üzere $\mathrm{P}_{\mathrm{i}} = \mathrm{P}_{\mathrm{j}}$ ve $\mathrm{Q}_{\mathrm{i}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{j}}$ dir. Böylece $\alpha_{\mathrm{k}}$ tanımından $\alpha_{\mathrm{i}} = \alpha_{\mathrm{j}}$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\alpha &= [\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}+1} \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{j}-1}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}+1}, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{j}-1}, \dots] \\ &= [\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{i}-1}, \overline{\mathrm{a}_{\mathrm{i}}, \mathrm{a}_{\mathrm{i}+1} \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{j}-1}}]\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\alpha$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımının periyodik olduğunu gösterir.

## 2.6. Tamamıyla Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler

**Tanım 2.6.1.** Eğer $\mathrm{k} = 0,1,2,3, \dots$ için $\mathrm{a}_{\mathrm{n}} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}+\mathrm{k}}$ olan n tamsayısı varsa $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}}, \dots]$ sürekli kesrine tamamıyla periyodik sürekli kesir denir. Bu durum

$$[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}}, \dots.] = [\overline{\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \dots, \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}}]$$

şeklinde gösterilir[8].

**Örnek 2.6.1.** $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}]$ ve $\beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} = [\overline{2,3}]$ sonsuz sürekli kesirleri tamamıyla periyodiktir. Bu durumda $\alpha$'nın periyodu 1 ve $\beta$'nın periyodu 2'dir.

**Tanım 2.6.2.** $\alpha = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{d}}}{\mathrm{c}}$ bir kuadratik irrasyonel olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $\alpha$'nın eşleniği olan $\alpha' = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}\sqrt{\mathrm{d}}}{\mathrm{c}}$ sayısı $-1 < \alpha' < 0$ eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman $\alpha$'ya indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı denir[8].

**Örnek 2.6.2.** $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ sayısı için α' nın eşleniği $\alpha' = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ olur ki $-1 < \alpha' < 0$ eşitsizliğini sağlar. Dolayıyla $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ sayısı indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıdır. Fakat $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ sayısının eşleniği $\frac{1-\sqrt{29}}{2} < -1$ olduğundan $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ sayısı indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı değildir.

**Teorem 2.6.1.** α bir kuadratik irrasyonel sayı olsun. α'nın sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodiktir ancak ve ancak α indirgenmiş kuadratik irrasyoneldir[15].

**İspat:** α bir kuadratik irrasyonel sayı ve $\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$ olsun. O zaman $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha\,]$ şeklinde yazılabilir.
$\frac{p_n}{q_n}$ ve $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, α'nın sürekli kesir açılımlarının n. ve $(n-1)$. yaklaşımları olmak üzere Teorem 2.2.3'den $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha\,] = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}$ olur. Buradan

$$q_n\alpha^2 + (q_{n-1} - p_n)\alpha - p_{n-1} = 0 \tag{2.6.1}$$

denklemine ulaşılır. Bu durumda α sayısı katsayıları tamsayı olan 2. dereceden

$$f(x) = q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$$

polinomunun bir kökdür. $\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n}]$ olduğundan $\alpha > a_0 \geq 1$ olduğu açıktır. O halde $f(x)$ polinomunun bir kökünün $-1$ ile 0 aralığında olduğu gösterilirse α'nın eşleniği olan $\alpha'$ sayısının $-1 < \alpha' < 0$ eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olacak. Böylece α indirgenmiş kuadratik irrasyonel olur. Bunun için $f(-1)$ ve $f(0)$ değerlerinin zıt işaretli olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Buna göre

$$f(0) = -p_{n-1} < 0$$

ve

$$\begin{aligned} f(-1) &= q_n - q_{n-1} + p_n - p_{n-1} = a_n q_{n-1} + q_{n-2} - q_{n-1} + a_n p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-1} \\ &= (p_{n-1} + q_{n-1})(a_n - 1) + p_{n-2} + q_{n-2} \end{aligned}$$

$$\geq p_{n-2} + q_{n-2} > 0$$

olduğundan $f(x)$ polinomunun $-1$ ile $0$ aralığında bir kökü mevcuttur. Dolayısıyla tanıma göre $\alpha$ indirgenmiş kuadratik irrasyoneldir.

Şimdi $\alpha$ indirgenmiş kuadratik irrasyonel olsun. O zaman tanıma göre $\alpha > 1$ ve $\alpha$'nın eşleniği olan $\alpha'$ sayısı $-1 < \alpha' < 0$ eşitsizliğini sağlar. Teorem 2.3.6.'ya göre $\alpha = \alpha_0$ olmak üzere $k = 0,1,2,3, \ldots$

$$a_0 = [\![\alpha_0]\!], \quad \alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$$

şeklinde olduğu biliniyor. $\alpha_k - a_k = \frac{1}{\alpha_{k+1}}$ eşitliğinin eşleniği alınırsa

$$\alpha_k' - a_k = \frac{1}{\alpha_{k+1}'} \tag{2.6.2}$$

eşitliğine ulaşılır. $k = 0,1,2,3, \ldots$ için $-1 < \alpha_k' < 0$ olduğu tümevarım yöntemiyle gösterilebilir. Gerçekten de, $k = 0$ için $\alpha = \alpha_0$ ve dolayısıyla $-1 < \alpha' = \alpha_0{}' < 0$ olduğundan iddia doğrudur. $k$ için $-1 < \alpha_k' < 0$ sağlandığı varsayılsın. Öte yandan $k = 0,1,2,3, \ldots$ için $a_k \geq 1$'dir. O halde (2.6.2)'den $\frac{1}{\alpha_{k+1}'} < -1$ ifadesi elde edilir. Buradan da $-1 < \alpha_{k+1}' < 0$ bulunur. Böylece $k = 0,1,2,3, \ldots$ için $-1 < \alpha_k' < 0$ eşitsizliği doğru olur. O zaman (2.6.2)'den

$$a_k < -\frac{1}{\alpha_{k+1}'} < a_k + 1$$

ve dolayısıyla

$$a_k = \left[\!\!\left[ -\frac{1}{\alpha_{k+1}'} \right]\!\!\right]$$

elde edilir.

$\alpha$ indirgenmiş kuadratik irrasyonel olduğundan Teorem 2.5.6'dan i ve j pozitif tamsayıları $j < i$ olmak üzere $\alpha_j = \alpha_i$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan $\alpha_j{}' = \alpha_i{}'$ olup $\frac{-1}{\alpha_j{}'} = \frac{-1}{\alpha_i{}'}$ olur. Dolayısıyla

$$a_{j-1} = \left[\!\left[ -\frac{1}{\alpha_j{}'} \right]\!\right]$$

ve

$$a_{i-1} = \left[\!\left[ -\frac{1}{\alpha_i{}'} \right]\!\right]$$

olduğundan $a_{j-1} = a_{i-1}$ elde edilir. Bu durumda $\alpha_{j-1} = a_{j-1} + \frac{1}{\alpha_j}$ ve $\alpha_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{\alpha_i}$ olduğundan $\alpha_{j-1} = \alpha_{i-1}$ olur. Aynı şekilde devam edilirse $\alpha_{j-2} = \alpha_{i-2}$, $\alpha_{j-3} = \alpha_{i-3}$ ve son olarak $\alpha_0 = \alpha_{i-1}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\alpha_0 = \alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \alpha] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{i-j-1}, \alpha_0] = [\overline{a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{i-j-1}}]$$

olup $\alpha$'nın sonsuz sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodiktir.

**Örnek 2.6.3.** $x^2 - 3x - 2 = 0$ denkleminin pozitif kökü $\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2} > 1$ ve eşleniği $-1 < \alpha' = \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 0$ bağıntısını sağlar. Dolayısıyla $\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ irrasyonel sayısı indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıdır. O halde Teorem 2.6.1'e göre $\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodiktir. Sonsuz sürekli kesir açılımı $\alpha = \frac{3+\sqrt{17}}{2} = [\overline{3; 1,1}]$ olur.

**Örnek 2.6.4.** $\alpha = \sqrt{5} > 1$ irrasyonel sayısının eşleniği $\alpha' = -\sqrt{5} < -1$ olduğundan indirgenmiş kuadratik irrasyonel değildir. Dolayısıyla $\alpha = \sqrt{5}$'in sonsuz sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodik değildir.

### 2.7. $\sqrt{d}$ İrrasyonel Sayısının Sürekli Kesir Açılımı

$d > 0$ tam kare olmayan pozitif bir tamsayı olsun. Bu durumda $\sqrt{d}$ sayısı $x^2 - d$ polinomunun bir kökü olduğundan $\sqrt{d}$ bir kuadratik irrasyoneldir. Bu kısımda $\sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının sonsuz sürekli kesir açılımı elde edilecek.

**Teorem 2.7.1.** $d > 0$ tamkare olmayan bir tamsayı ve $a_0 = [\![\sqrt{d}]\!]$ olmak üzere $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımı $[a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}]$ şeklindedir[15].

**İspat:** $\alpha = \sqrt{d}$ olsun. O halde Teorem 2.3.6'ya göre $a_0 = [\![\alpha]\!] = [\![\sqrt{d}]\!]$ olup $d > 0$ bir tamsayı olduğundan $a_0 \geq 1$'dir. Ayrıca $\sqrt{d} > 1$ olduğundan $-\sqrt{d} < -1$ olup $-\sqrt{d}$ indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı değildir. Fakat $[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d} > 1$ ve $-1 < [\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d} < 0$ olduğundan $[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d}$ indirgenmiş kuadratik irrasyoneldir. O halde Teorem 2.6.1'e göre $[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d}$'nın sürekli kesir açılımı tamamıyla periyodiktir. O zaman

$$[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d} = [\overline{2a_0; a_1, a_2, \dots, a_{r-1}}]$$

olsun. $[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d}$'nın periyodunun r olduğu açıktır. Ayrıca

$$[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d} = [2a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}]$$

olarak da yazılabilir. Böylece

$$[\![\sqrt{d}]\!] + \sqrt{d} = a_0 + \sqrt{d} = [2a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}] = 2a_0 + \frac{1}{[\overline{a_1; a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}]}$$

eşitliğinden

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{[\overline{a_1; a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}]} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{r-1}, 2a_0}] \tag{2.7.1}$$

elde edilir.

**Örnek 2.7.1.** $\sqrt{15}$ sayısının sürekli kesir açılımı Teorem 2.7.1 yardımıyla bulunuz?

**Çözüm:** $\alpha_0 = \sqrt{15}$ olsun. $k = 0,1,2,3,\ldots$ için $a_k = [\![\alpha_k]\!]$ ve $\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k - a_k}$ formülleri kullanılırsa

$$a_0 = [\![\sqrt{15}]\!] = 3,\ \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{15}-3} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$
$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{15}+3}{6}\right]\!\!\right] = 1,\ \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}+3}{6}-1} = \sqrt{15}+3$$
$$a_2 = [\![\sqrt{15}+3]\!] = 6,\ \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{15}+3-6} = \frac{\sqrt{15}+3}{6}$$

elde edilir. Burada $a_2 = 2a_0$ olduğundan Teorem 2.7.1'ye göre $\sqrt{15} = [3; 1,6,1,6,1,6, \ldots] = [3; \overline{1,6}]$ olur.

**Örnek 2.7.2.** $d \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $\sqrt{d^2-1}$ saysısının sürekli kesir açılımını Teorem 2.7.1. yardımıyla bulunuz[17].

**Çözüm:** $d^2 - 1$ tamkare olmadığından $\sqrt{d^2-1}$ irrasyoneldir. O halde sonsuz sürekli kesir açılımı periyodiktir. Şimdi $\alpha_0 = \sqrt{d^2-1}$ olsun. Bu durumda Teorem 2.3.6.'e göre

$$a_0 = [\![\sqrt{d^2-1}]\!] = d-1,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{d^2-1}-(d-1)} = \frac{\sqrt{d^2-1}+d-1}{(2d-2)}$$
$$a_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{d^2-1}+d-1}{(2d-2)}\right]\!\!\right] = 1,$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{\sqrt{d^2-1}+d-1}{(2d-2)}-1} = \frac{(2d-2)}{\sqrt{d^2-1}-(d-1)} = \frac{(2d-2)\left(\sqrt{d^2-1}+d-1\right)}{(2d-2)} = \left(\sqrt{d^2-1}+d-1\right)$$

ve böylece

$$a_2 = \left[\!\!\left[\left(\sqrt{d^2-1}+d-1\right)\right]\!\!\right] = 2d-2 = 2a_0$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.7.1'e göre $\sqrt{d^2-1}=\left[d-1;\overline{1,2d-2}\right]$ bulunur.

**Teorem 2.7.2.** $d>0$ tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere; $\sqrt{d}=\left[\mathrm{a}_0;\overline{\mathrm{a}_{r-1},\mathrm{a}_{r-2},\dots,\mathrm{a}_2,\mathrm{a}_1,2\mathrm{a}_0}\right]$ olsun. O zaman $1\le j\le r-1$ için $\mathrm{a}_j\le \mathrm{a}_0$ Ayrıca $\mathrm{a}_j=2\mathrm{a}_0 \Leftrightarrow r|j$ dir[18].

**Teorem 2.7.3.** $d>0$ tam kare olmayan bir tam sayı olmak üzere $\alpha=\sqrt{d}$ olsun. $\alpha_k$, $P_k$ ve $Q_k$ ifadeleri Teorem 2.5.5'deki gibi tanımlansın. Bu durumda

i) $\forall k\ge 0$ için $Q_k>0$'dir

ii) $m$, $\sqrt{d}$'nin periyodu olmak üzere $Q_k=1\Leftrightarrow m|k$ dir.

iii) $\frac{p_k}{q_k}$, $\sqrt{d}$'nin $k$. yaklaşımı olmak üzere ${p_{k-1}}^2-d{q_{k-1}}^2=(-1)^kQ_k$'dir[9].

Aşağıdaki tabloda $2\le d\le 99$ için $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımları verilmiştir.

Tablo 2.2. $d$ tam kare olmayan tamsayı$(2\le d\le 99)$; $\sqrt{d}$ nin sürekli kesir açılımları

| d | √d İÇİN SÜREKLİ KESİR AÇILIMI | d | √d İÇİN SÜREKLİ KESİR AÇILIMI |
|---|---|---|---|
| 2 | $[1;\overline{2}]$ | 53 | $[7;\overline{3,1,1,3,14}]$ |
| 3 | $[1;\overline{1,2}]$ | 54 | $[7;\overline{2,1,6,1,2,14}]$ |
| 5 | $[2;\overline{4}]$ | 55 | $[7;\overline{2,2,2,14}]$ |
| 6 | $[2;\overline{2,4}]$ | 56 | $[7;\overline{2,14}]$ |
| 7 | $[2;\overline{1,1,1,4}]$ | 57 | $[7;\overline{1,1,4,1,1,14}]$ |
| 8 | $[2;\overline{1,4}]$ | 58 | $[7;\overline{1,1,1,1,1,1,14}]$ |
| 10 | $[3;\overline{6}]$ | 59 | $[7;\overline{1,2,7,2,1,14}]$ |
| 11 | $[3;\overline{3,6}]$ | 60 | $[7;\overline{1,2,1,14}]$ |
| 12 | $[3;\overline{2,6}]$ | 61 | $[7;\overline{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}]$ |
| 13 | $[3;\overline{1,1,1,1,6}]$ | 62 | $[7;\overline{1,6,1,14}]$ |
| 14 | $[3;\overline{1,2,1,6}]$ | 63 | $[7;\overline{1,14}]$ |
| 15 | $[3;\overline{1,6}]$ | 65 | $[8;\overline{16}]$ |
| 17 | $[4;\overline{8}]$ | 66 | $[8;\overline{8,16}]$ |
| 18 | $[4;\overline{4,8}]$ | 67 | $[8;\overline{5,2,1,1,7,1,1,2,5,16}]$ |
| 19 | $[4;\overline{2,1,3,1,2,8}]$ | 68 | $[8;\overline{4,16}]$ |
| 20 | $[4;\overline{2,8}]$ | 69 | $[8;\overline{3,3,1,4,1,3,3,16}]$ |
| 21 | $[4;\overline{1,1,2,1,1,8}]$ | 70 | $[8;\overline{2,1,2,1,2,16}]$ |
| 22 | $[4;\overline{1,2,4,2,1,8}]$ | 71 | $[8;\overline{2,2,1,7,1,2,2,16}]$ |
| 23 | $[4;\overline{1,3,1,8}]$ | 72 | $[8;\overline{2,16}]$ |
| 24 | $[4;\overline{1,8}]$ | 73 | $[8;\overline{1,1,5,5,1,1,16}]$ |
| 26 | $[5;\overline{10}]$ | 74 | $[8;\overline{1,1,1,1,16}]$ |
| 27 | $[5;\overline{5,10}]$ | 75 | $[8;\overline{1,1,1,16}]$ |
| 28 | $[5;\overline{3,2,3,10}]$ | 76 | $[8;\overline{1,2,1,1,5,4,5,1,1,2,1,16}]$ |
| 29 | $[5;\overline{2,1,1,2,10}]$ | 77 | $[8;\overline{1,3,2,3,1,16}]$ |
| 30 | $[5;\overline{2,10}]$ | 78 | $[8;\overline{1,4,1,16}]$ |
| 31 | $[5;\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$ | 79 | $[8;\overline{1,7,1,16}]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 32 | $[5;\overline{1,1,1,10}]$ | 80 | $[8;\overline{1,16}]$ |
| 33 | $[5;\overline{1,2,1,10}]$ | 82 | $[9;\overline{18}]$ |
| 34 | $[5;\overline{1,4,1,10}]$ | 83 | $[9;\overline{9,18}]$ |
| 35 | $[5;\overline{1,10}]$ | 84 | $[9;\overline{6,18}]$ |
| 37 | $[6;\overline{12}]$ | 85 | $[9;\overline{4,1,1,4,18}]$ |
| 38 | $[6;\overline{6,12}]$ | 86 | $[9;\overline{3,1,1,1,8,1,1,1,3,18}]$ |
| 39 | $[6;\overline{4,12}]$ | 87 | $[9;\overline{3,18}]$ |
| 40 | $[6;\overline{3,12}]$ | 88 | $[9;\overline{2,1,1,1,2,18}]$ |
| 41 | $[6;\overline{2,2,12}]$ | 89 | $[9;\overline{2,3,3,2,18}]$ |
| 42 | $[6;\overline{,2,12}]$ | 90 | $[9;\overline{2,18}]$ |
| 43 | $[6;\overline{1,1,3,1,5,1,3,1,1,12}]$ | 91 | $[9;\overline{1,1,5,1,5,1,1,18}]$ |
| 44 | $[6;\overline{1,1,1,2,1,1,1,12}]$ | 92 | $[9;\overline{1,1,2,4,2,1,1,18}]$ |
| 45 | $[6;\overline{1,2,2,2,1,12}]$ | 93 | $[9;\overline{1,1,1,4,6,4,1,1,1,18}]$ |
| 46 | $[6;\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12}]$ | 94 | $[9;\overline{1,2,3,1,1,5,1,8,1,5,1,1,3,2,1,18}]$ |
| 47 | $[6;\overline{1,5,1,12}]$ | 95 | $[9;\overline{1,2,1,18}]$ |
| 48 | $[6;\overline{1,12}]$ | 96 | $[9;\overline{1,3,1,18}]$ |
| 50 | $[7;\overline{14}]$ | 97 | $[9;\overline{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}]$ |
| 51 | $[7;\overline{7,14}]$ | 98 | $[9;\overline{1,8,1,18}]$ |
| 52 | $[7;\overline{4,1,2,1,4,14}]$ | 99 | $[9;\overline{1,18}]$ |

# 3. PELL DENKLEMİ

**Tanım 3.1.** $d > 0$ ve $N$ birer tamsayı olmak üzere;

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{3.1}$$

denklemine Pell denklemi,

$$x^2 - dy^2 = N \tag{3.2}$$

denklemine ise genel Pell denklemi denir[17].

**Tanım 3.2.** $a$ ve $b$ birer tamsayı, $d > 0$ ve $N$ birer tamsayı olmak üzere $a^2 - db^2 = N$ ise $(a, b)$ veya $a + b\sqrt{d}$'ye $x^2 - dy^2 = N$ Pell denkleminin bir çözümü denir. Bu durum $(x, y) = (a, b)$ veya $x + y\sqrt{d} = a + b\sqrt{d}$ şeklinde gösterilir.

Öte yandan $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin herhangi bir çözümü $(a, b)$ ise $(a, -b)$, $(-a, b)$ $(-a, -b)$ ikilileri de $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin bir çözümüdür. Bu nedenle, tezin bundan sonraki kısmında x ve y çözümleri pozitif tamsayılar olarak kabul edilecektir. Aşağıdaki teorem Pell denklemleri ile sürekli kesirler arasındaki ilişkiyi gösterir[17].

**Teorem 3.1.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı, $N$ bir tamsayı ve $|N| < \sqrt{d}$ olsun. Eğer $x^2 - dy^2 = N$ ise $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımıdır[8].

**İspat:** İlk olarak $N > 0$ olsun. O zaman

$$x^2 - dy^2 = \left(x + y\sqrt{d}\right).\left(x - y\sqrt{d}\right) = N$$

eşitliğinden $x - y\sqrt{d} > 0$ ve dolayısıyla $x > y\sqrt{d}$ olduğu görülür. Buradan $\frac{x}{y} - \sqrt{d} > 0$ olup $|N| < \sqrt{d}$ olduğundan

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{d} = \frac{x - y\sqrt{d}}{y} = \frac{\left(x - y\sqrt{d}\right)\left(x + y\sqrt{d}\right)}{y\left(x + y\sqrt{d}\right)} = \frac{x^2 - dy^2}{y\left(x + y\sqrt{d}\right)}$$
$$= \frac{N}{y\left(x + y\sqrt{d}\right)} < \frac{\sqrt{d}}{y\left(y\sqrt{d} + y\sqrt{d}\right)} = \frac{1}{2y^2}$$

bulunur. Dolayısıyla $\frac{x}{y} - \sqrt{d} < \frac{1}{2y^2}$ olup Teorem 2.4.8.'den $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımıdır.

Şimdi $N < 0$ olsun. Bu durumda $x - y\sqrt{d} < 0$ olur. O halde $x < y\sqrt{d}$ olup

$$|\, x^2 - dy^2| = \left|\, x - y\sqrt{d}\right|\left|\, x + y\sqrt{d}\right| = N < \sqrt{d}$$

olduğundan $\left|\, x - y\sqrt{d}\right| < \frac{\sqrt{d}}{|\, x + y\sqrt{d}|}$ olur. Eşitsizliğin iki tarafı $x\sqrt{d}$'ye bölünürse

$$\left|\frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{d}}\right| < \frac{1}{x\left(x + y\sqrt{d}\right)} < \frac{1}{x(x + x)} = \frac{1}{2x^2}$$

olur. Teorem 2.4.8'e göre $\frac{y}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{d}}$ nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımdır. O halde Teorem 2.4.9'e göre $\frac{x}{y}$, $\sqrt{d}$ nin bir yaklaşımıdır.

**Teorem 3.2.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı ve $a, b, u, v$ pozitif tamsayılar olmak üzere $a + b\sqrt{d}$ ve $u + v\sqrt{d}$ , $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin iki çözümü olsun. O halde

i) $a + b\sqrt{d} = u + v\sqrt{d} \Leftrightarrow a = u$ ve $b = v$ dir.
ii) $u > a$ ise $v > b$ ve $u + v\sqrt{d} > a + b\sqrt{d}$ dir[17].

**İspat:** i) $a + b\sqrt{d} = u + v\sqrt{d}$ ve $a \neq u$ olsun. O halde $\sqrt{d} = (a - u)/\ (b - v)$ rasyonel sayı olur ki bu ise $\sqrt{d}$ nin irrasyonel sayı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $a = u$ ve sonuç olarak $b = v$ dir. İspatın ters yönü açıktır.

ii) $u + v\sqrt{d}$ ve $a + b\sqrt{d}$ , $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin herhangi iki çözümü ise

$$u^2 - dv^2 = a^2 - db^2 = N$$

dir. Buradan $u^2 - a^2 = d(v^2 - b^2)$ olur. Hipotezden $u > a$ ve $a \geq 1$ olduğundan $u^2 > a^2$ olup $v^2 - b^2 > 0$ yani $v^2 > b^2$ elde edilir. O halde $v > 0$ ve $b > 0$ olduğundan $v > b$ bulunur. Dolayısyla $u > a$ ve $v > b$ olduğundan $u + v\sqrt{d} > a + b\sqrt{d}$ bulunur.

**Sonuç 3.3.** $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin çözümleri arasında bir sıralama vardır[17].

**Lemma 3.4.** $x$ ve $y$ aralarında asal iki tamsayı olsun. Eğer α bir irrasyonel sayı ise $\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda $(x, y)$ ikilisi vardır[19].

**Lemma 3.5.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı olsun. O halde $x^2 - dy^2 < 1 + 2\sqrt{d}$ eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda $x$ ve $y$ pozitif tam sayıları vardır[19].

**İspat:** $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı olduğundan $\sqrt{d}$ irrasyonel bir sayıdır. O halde Lemma 3.4'e göre $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| < \frac{1}{y^2}$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda $x$ ve $y$ pozitif tam sayıları vardır. Ayrıca

$$\left|\frac{x}{y} + \sqrt{d}\right| = \left|\frac{x}{y} - \sqrt{d} + 2\sqrt{d}\right| < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} \tag{3.3}$$

dir. Böylece (3.3) ve Lemma 3.4'den dolayı

$$\begin{aligned} |x^2 - dy^2\ | &= \left|x + y\sqrt{d}\right|\left|x - y\sqrt{d}\right| = |y|\left|\frac{x}{y} + \sqrt{d}\right||y|\left|\frac{x}{y} - \sqrt{d}\right| \\ &< y^2\left(\frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d}\right)\frac{1}{y^2} < \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} < 1 + 2\sqrt{d} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $|x^2 - dy^2\ | < 1 + 2\sqrt{d}$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda $(x, y)$ ikilisi vardır.

**Sonuç 3.6.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tam sayı, $N$ bir tamsayı ve $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımı olsun. $|N| < 1 + 2\sqrt{d}$ olmak üzere $p + q\sqrt{d}$ ifadesi $x^2 - dy^2 = N$ denklemlerinden birinin çözümüdür[19].

**Örnek 3.1.** $x^2 - 8y^2 = -4$ Pell denkleminin bir çözümünü Sonuç 3.6'ya kullanarak bulunuz?

**Çözüm:** $d = 8$ için Tablo 2.2'den $\sqrt{8}$'nin sürekli kesir açılımı $[2; \overline{1,4}]$'dir. $|-4| < 1 + 2\sqrt{8}$ olduğundan Sonuç 3.6'ya göre $\sqrt{8}$'nin yaklaşımlarından birinin $x^2 - 8y^2 = -4$ denkleminin çözümü olması gerekir. Dolayısıyla $\sqrt{8}$'nın ilk birkaç yaklaşımı

$$C_0 = 2 = \frac{2}{1}, C_1 = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}, C_2 = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{14}{5}$$

olup $C_2$ yaklaşımı $x^2 - 8y^2 = -4$ denkleminin çözümüdür.

### 3.1. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell Denkleminin Çözümü

**Tanım 3.1.1.** $d > 0$ tamkare olmayan pozitif bir tamsayı olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasında $x$'in en küçük değerini aldığı $(x, y)$ çözümüne denklemin temel çözümü denir[17].

Yukarıdaki tanıma göre $x$ tamsayısı en küçük değeri aldığında Teorem 3.2'ye göre $y$ ve $x + y\sqrt{d}$ de en küçük değerlerini alırlar. Bu yüzden $x$ ve $y$ tamsayılarından birinin alabileceği en küçük değerini alması temel çözümü bulmak için yeterlidir[17].

**Örnek 3.1.1.** $x^2 - 6y^2 = 1$ denkleminin temel çözümünü bulunuz?

**Çözüm:** Bu denklemin herhangi bir çözümü $u + v\sqrt{6}$ olsun. O zaman $u^2 - 6v^2 = 1$ olur. $v = 1$ için çözüm yoktur. Dolayısıyla $v \geq 2$ olur. Benzer şekilde $u = 1,2,3,4$ için çözüm yoktur. O halde $u \geq 5$ olduğundan $u + v\sqrt{6} \geq 5 + 2\sqrt{5}$ olmalıdır. Öte yandan $5^2 - 6 \cdot 2^2 = 1$ olduğundan $5 + 2\sqrt{5}$ temel çözümüdür. Bu çözüm $(5,2)$ ile gösterebilir.

**Teorem 3.1.1.** $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = 1$ denkleminin temel çözümü varsa tektir[20].

**İspat:** Hipotezin tersine $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = 1$ denkleminin iki farklı temel çözümü $(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1)$ ve $(\mathrm{x}_2, \mathrm{y}_2)$ şeklinde olsun. Bu durumda $\mathrm{x}_1 \neq \mathrm{x}_2$ ve $\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y}_2$'dir. O halde temel çözüm tanımından

$$x_1 + y_1\sqrt{d} \leq x_2 + y_2\sqrt{d} \leq x_1 + y_1\sqrt{d}$$

olur ki $x_1 + y_1\sqrt{d} = x_2 + y_2\sqrt{d}$ olur. Teorem 3.2'ye göre $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olduğu görülür. Bu ise varsayımla çelişir. Dolayısıyla temel çözüm varsa tektir.

**Teorem 3.1.2.** $\sqrt{d}$ nin periyodu $m$ olan sürekli kesrinin açılımı

$$\sqrt{d} = \left[\mathrm{a}; \overline{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m}\right]$$

ve

$\frac{p}{q} = [\mathrm{a}; b_1, b_2, b_3, \dots, b_{m-1}]$

olsun. O zaman $x^2 - dy^2 = +1$ Pell denkleminin pozitif tamsayılardaki en küçük(temel) çözümü

$$(x_1, y_1) = \begin{cases} (p, q), & eğer\ m\ çift\ \ ise \\ (p^2 + dq^2, 2pq), & eğer\ \ m\ tek\ ise \end{cases}$$

ile verilir. Ayrıca diğer tüm tamsayı çözümleri $n = 1,2,3, \dots$ için $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n$ formülü ile bulunur[21].

**Örnek 3.1.2.** $x^2 - 99y^2 = 1$ denkleminin temel çözümünü Teorem 3.1.2 yardımıyla çözünüz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'den $\sqrt{99}$ un sürekli kesir açılımı $\sqrt{99} = [9; \overline{1,18}]$ olduğu bilinir. Dolayısıyla Teorem 3.1.2'den $\frac{p}{q} = [9,1] = 9 + \frac{1}{1} = \frac{10}{1}$ olduğundan p $= 10$ ve q $= 1$ olur. Teorem 3.1.2'den $m = 2$ çift olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (p, q) = (10,1)$ olur.

**Örnek 3.1.3.** $x^2 - 85y^2 = 1$ denkleminin temel çözümünü Teorem 3.1.2 yardımıyla bulunuz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'den $\sqrt{85}$ un sürekli kesir açılımı $\sqrt{85} = [9; \overline{4,1,1,4,18}]$ olduğu bilinir. Dolayısıyla Teorem 3.1.2'ye göre

$$\frac{p}{q} = [9; 4,1,1,4] = 9 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}} = \frac{378}{41}$$

olduğundan p $= 378$ ve q $= 41$ olur. Teorem 3.1.2'den $m = 5$ tek olduğundan temel çözüm $(x_1, y_1) = (p^2 + dq^2, 2pq) = (285769,30996)$ olur.

**Teorem 3.1.3.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin her zaman bir tamsayı çözümü vardır[14].

**Teorem 3.1.4.** $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin herhangi bir çözümü $a + b\sqrt{d}$ olsun. O zaman

$a > 0$ ve $b > 0 \Leftrightarrow a + b\sqrt{d} > 1$

dir[17].

**İspat:** $a > 0$ ve $b > 0$ ise $a + b\sqrt{d} > 1$ olduğu aşikardır. Tersine $a + b\sqrt{d} > 1$ olsun. $a + b\sqrt{d}$ bir çözüm olduğundan $a^2 - db^2 = 1$ ve dolayısıyla $\left(a + b\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right) = 1$ olur. O halde $a + b\sqrt{d} > 1$ olduğundan $0 < a - b\sqrt{d} < 1$ olur. Böylece

$$a = \frac{1}{2}\left[\left(a + b\sqrt{d}\right) + \left(a - b\sqrt{d}\right)\right] > 0$$

ve

$$b = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left[\left(a + b\sqrt{d}\right) - \left(a - b\sqrt{d}\right)\right] > 0$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.1.5.** $d > 0$ tamkare olmayan bir tamsayı olsun. Eğer $a$ ve $b$ doğal sayıları

$$a > \frac{b^2}{2} - 1$$

bağıntısını sağlıyorsa ve $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise bu taktirde $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümüdür[17].

**İspat:** $b = 1$ ise Tanım 3.1.1'e göre $a + b\sqrt{d}$ temel çözüm olduğu aşikardır. O halde $b > 1$ olsun. $u + v\sqrt{d},\ x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin herhangi bir pozitif çözümü olsun. O halde $u^2 - dv^2 = 1$'dir. Şimdi $1 \leq v < b$ olsun. $u^2 - dv^2 = 1$ ve $a^2 - db^2 = 1$ olduğundan

$$d = \frac{a^2-1}{b^2} = \frac{u^2-1}{v^2}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan $u^2b^2 - a^2v^2 = b^2 - v^2$ elde edilir. Böylece $v < b$ olduğundan $u^2b^2 - a^2v^2 = b^2 - v^2 = m > 0$ elde edilir. Öte yandan

$$u^2b^2 - a^2v^2 = (ub - av)(ub + av)$$

olduğundan $m_1 = ub - av$ ve $m_2 = ub + av$ olarak alınırsa $m_1m_2 = m > 0$ olur. Buradan $m_2 > 0$ ve dolayısıyla $m_1 > 0$ olduğu görülür. Böylece

$$a = \frac{m_2-m_1}{2v} \leq \frac{m-1}{2v} = \frac{b^2-v^2-1}{2v} \leq \frac{b^2}{2} - 1$$

elde edilir. Bu ise $a > \frac{b^2}{2} - 1$ olmasıyla çelişir. O halde $b < v$ dir. Ayrıca

$$\frac{a^2-1}{b^2} = \frac{u^2-1}{v^2} < \frac{u^2-1}{b^2}$$

olup $a^2 - 1 < u^2 - 1$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $a < u$ olduğu görülür. Dolayısıyla $a + b\sqrt{d}$ temel çözüm olur.

**Örnek 3.1.4.** $k \geq 1$ olmak üzere $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 1$ denkleminin temel çözümünün $2k^2 + 1 + 2k\sqrt{k^2 + 1}$ olduğunu gösteriniz[22].

**Çözüm:** $x^2 - (k^2 + 1)y^2 = 1$ denkleminin bir çözümünün $2k^2 + 1 + 2k\sqrt{k^2 + 1}$ olduğunu kolaylıkla görülebilir. $a = 2k^2 + 1$ ve $b = 2k$ olmak üzere

$$a = 2k^2 + 1 > 2k^2 - 1 = \frac{b^2}{2} - 1$$

olduğundan Teorem 3.1.5'e göre $2k^2+1+2k\sqrt{k^2+1}$ temel çözüm olur.

**Lemma 3.1.6.** $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının $k$. yaklaşımı $\frac{p_k}{q_k}$ ve periyot uzunluğu m olsun. O halde $k=1,2,3,\ldots$ için

$$p_{km-1}^2-dq_{km-1}^2=(-1)^{km}$$

dir[8].

**Örnek 3.1.5.** $x^2-7y^2=1$ denkleminin ilk iki pozitif tamsayı çözümünü bulunuz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'den $\sqrt{7}$'nin sürekli kesir açılımı $[2;\overline{1,1,1,4}]$ olduğundan periyod $m=4$'tür. Dolayısıyla Lemma 3.1.6'ya göre $p_{4k-1}^2-dq_{4k-1}^2=(-1)^{4k}=1$'dir. Dolayısıyla $k=1,2,3,\ldots$ değerleri için çözüm vardır.

$k=1$ için $(p_3,q_3)$ ikilisi $x^2-7y^2=1$ denkleminin bir çözümüdür.

$$\frac{p_3}{q_3}=[2;1,1,1]=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}=\frac{8}{3}$$

olduğundan (8,3) bir çözümdür. Bu çözüm denklemin ilk pozitif çözümüdür. $k=2$ için $(p_7,q_7)$, $x^2-7y^2=1$ denkleminin bir çözümüdür.

$$\frac{p_7}{q_7}=[2;1,1,1,4,1,1,1]=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}=\frac{127}{48}$$

olduğundan $(127,48)$ bir çözümdür.

**Sonuç 3.1.7.** Eğer $(p,q)$, $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü ise $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımıdır[23].

**Teorem 3.1.8.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı ve $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n$ olmak üzere $x_n + y_n\sqrt{d}$ ifadesi de $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümüdür[24].

**İspat:** $a + b\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümü ise $a^2 - db^2 = 1$ olur. Buna göre $x_n + y_n\sqrt{d} = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_n^2 - dy_n^2 &= \left(x_n + y_n\sqrt{d}\right)\left(x_n - y_n\sqrt{d}\right) = \left(a + b\sqrt{d}\right)^n\left(a - b\sqrt{d}\right)^n \\ &= \left(\left(a + b\sqrt{d}\right)\left(a - b\sqrt{d}\right)\right)^n = (a^2 - db^2)^n = 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla $x_n + y_n\sqrt{d}$, $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin bir çözümüdür.

**Örnek 3.1.6.** $x^2 - 3y^2 = 1$ denkleminin birkaç tam sayı çözümünü Teorem 3.1.8'den bulunuz?

**Çözüm:** $7^2 - 3.4^2 = 1$ olduğundan $x^2 - 3y^2 = 1$ denkleminin bir çözümü $(7,4)$ olur. Teorem 3.1.8'den $x_n + y_n\sqrt{3} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^n$ eşitliği kullanılırsa $n = 2$ için $x_2 + y_2\sqrt{3} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^2 = 97 + 56\sqrt{3}$ olur. Bu durumda $(97,56)$ da bir çözümdür. Gerçekten $97^2 - 3 \cdot 56^2 = 9409 - 9408 = 1$ olur. $n = 6$ için $x_6 + y_6\sqrt{3} = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^6 = \left(3650401 + 2107560\sqrt{3}\right)$ olur. Bu durumda $(3650401,2107560)$ da bir çözümdür. Gerçekten $3650401^2 - 3 \cdot 2107560^2 = 13325427460801 - 13325427460800 = 1$ olur.

**Teorem 3.1.9.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı ve $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının $k$. yaklaşımı $\frac{p_k}{q_k}$ ve periyodu $m$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümleri $(x_n, y_n)$ ile gösterilsin. O halde

i) $m$ çift ise $(x_n, y_n) = (p_{mn-1}, q_{mn-1})$
ii) $m$ tek ise $(x_n, y_n) = (p_{2mn-1}, q_{2mn-1})$

şeklindedir[23].

**İspat:** $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin çözümlerinden biri $(p, q)$ olsun. Sonuç 3.1.7'ye göre $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$'nin bir yaklaşımıdır ve dolayısıyla tüm çözümler $\sqrt{d}$'nin bir yaklaşımıdır. $\frac{p}{q} = \frac{p_k}{q_k}$ ve $\sqrt{d}$'nin sonsuz sürekli kesir açılımının periyodu m olsun. Lemma 3.1.6'ya göre periyot m ise $p_{km-1}^2 - dq_{km-1}^2 = (-1)^{km}$ denklemi sağlanır. Burada m çift ise $p_{km-1}^2 - dq_{km-1}^2 = 1$ olacağından
$(x_n, y_n) = (p_{mn-1}, q_{mn-1})$

biçimindedir.

Eğer m tek ise $k = 2n$ için $p_{2mn-1}^2 - dq_{2mn-1}^2 = 1$ olacağından
$(x_n, y_n) = (p_{2mn-1}, q_{2mn-1})$

biçimindedir.

Tersine $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere $(x_n, y_n)$ çözümlerinin $x^2 - dy^2 = 1$ denklemini sağladığı görülür.

**Örnek 3.1.7.** $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerini bulunuz?

Tablo 2.2'den $\sqrt{3}$'nin sürekli kesir açılımı $[1; \overline{1,2}]$ olduğundan periyodu m = 2 dir. O halde Teorem 3.1.9'a göre $x^2 - 3y^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri $n \geq 1$ için

$(x_n, y_n) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$

biçimindedir. $n = 1$ için $(x_1, y_1) = (p_1, q_1)$ olup $\frac{p_1}{q_1} = [1,1] = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$ olduğundan $(x_1, y_1) = (2,1)$ bulunur. Bu çözümün ayrıca temel çözüm olduğu görülebilir.

**Sonuç 3.1.10.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olsun. $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının $k$. yaklaşımı $\frac{p_k}{q_k}$ ve periyodu $m$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin temel çözümü

i) $m$ çift ise $(x, y) = (p_{m-1}, q_{m-1})$
ii) $m$ tek ise $(x, y) = (p_{2m-1}, q_{2m-1})$

şeklindedir[25].

**İspat:** $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının periyodu $m$ ve $k$. yaklaşımı $\frac{p_k}{q_k}$ olsun. $x^2 - dy^2 = 1$ Pell denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri Teorem 3.1.9'a göre $(p_0, q_0), (p_1, q_1), (p_1, q_2), \ldots$ şeklinde olduğu açıktır. Ayrıca $[\![\sqrt{d}]\!] > 0$ olduğundan bu çözümlerin bileşenleri artandır. Buna göre eğer $(x_1, y_1)$ bu denklemin ilk çözümü olarak ele alınırsa diğer tüm çözümler için $x > x_1$ ve $y > y_1$ eşitsizlikleri geçerli olur. Bu yüzden $(x_1, y_1)$ denklemin temel çözümü olur. O halde Teorem 3.1.9'a göre

$m$ çift ise $(x_1, y_1) = (p_{m-1}, q_{m-1})$
$m$ tek ise $(x_1, y_1) = (p_{2m-1}, q_{2m-1})$

şeklinde olduğu görülür.

**Teorem 3.1.11.** $x^2 - dy^2 = 1$ denkleminin temel çözümü $(x_1, y_1)$ ve genel çözümü $(x_n, y_n)$ olsun. Bu taktirde $n = 1,2,3, \ldots$ için tüm $(x_n, y_n)$ değerleri

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n \tag{3.4}$$

denklemi ile bulunabilir[4].

**Örnek 3.1.8.** $x^2 - 71y^2 = 1$ denkleminin temel ve genel çözümünü bulunuz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'den $\sqrt{71} = [8; \overline{2,2,1,7,1,2,2,16}]$ olduğundan periyodu m = 8 olur. O halde Sonuç 3.1.10'a göre $(x_1, y_1)$ temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (p_7, q_7) \Rightarrow \frac{p_7}{q_7} = [8; 2,2,1,7,1,2,2]$$

$$= 8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}} = \frac{3480}{413}$$

olduğundan $(x_1, y_1) = (3480,413)$ olarak bulunur. Bu taktirde denklemin genel çözümü $n = 1,2,3, \ldots$ olmak üzere

$$x_n + y_n\sqrt{71} = \left(3480 + 413\sqrt{71}\right)^n$$

şeklindedir.

**Teorem 3.1.12.** $k \geq 1$ herhangi bir tamsayı ve $d = k^2 + 1$ olsun. $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımı

$$\sqrt{d} = \begin{cases} [1; \overline{2}], & eğer\ k = 1\ ise \\ [k; \overline{2k}], & eğer\ k > 1\ ise \end{cases}$$

şeklindedir[25].

**İspat:** $d = k^2 + 1$ ve $k = 1$ olsun. Bu durumda Tablo 2.2'den $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$ olduğu açıktır. Şimdi $k > 1$ olsun. O zaman

$$k < \sqrt{k^2 + 1} = k + \left(\sqrt{k^2 + 1} - k\right) = k + \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt{k^2+1}-k\right)}} = k + \frac{1}{\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)} < k + 1$$

olduğundan Teorem 2.3.6'ya göre $\alpha_0 = \sqrt{d}$ olmak üzere

$$a_0 = [\![\alpha_0]\!] = [\![\sqrt{d}]\!] = k,\ \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+1}-k} = \frac{\sqrt{k^2+1}+k}{1}$$

olup $2k < \frac{\sqrt{k^2+1}+k}{1} < 2k+1$ olduğundan $a_1 = [\![\alpha_1]\!] = 2k = 2a_0$ bulunur. Böylece Teorem 2.7.1'e göre $\sqrt{k^2+1} = [k; \overline{2k}]$ olduğu görülür.

**Teorem 3.1.13.** $x^2 - (k^2+1)y^2 = 1$ denkleminin temel çözümü

$$(x_1, y_1) = (2k^2 + 1\ ,2k)$$

dir[25].

**İspat:** Teorem 3.1.12'den $\sqrt{k^2+1} = [k; \overline{2k}]$ olduğundan periyot m = 1'dir. O zaman Sonuç 3.1.10'a göre temel çözüm $(x_1, y_1) = (p_1, q_1)$ dir. Öte yandan

$$\frac{p_1}{q_1} = [k; 2k] = k + \frac{1}{2k} = \frac{2k^2+1}{2k}$$

olup $2k^2 + 1$ ile $2k$ aralarından asal olduğundan Teorem 2.3.8'e göre

$$(x_1, y_1) = (p_1, q_1) = (2k^2 + 1, 2k)$$

bulunur.

## 3.2. $x^2 - dy^2 = -1$ Pell Denkleminin Çözümü

**Tanım 3.2.1.** $d > 0$ tamkare olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri arasında $x$'in en küçük değeri aldığı $(x, y)$ çözümüne $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin temel çözümü denir [17].

**Teorem 3.2.1.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olsun. $(p, q)$, $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin bir çözümü ise $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımıdır [17].

**İspat:** $(p, q)$, $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin bir çözümü ise $p^2 - dq^2 = -1$ olacağından

$$p - q\sqrt{d} = \frac{-1}{p + q\sqrt{d}}$$

veya

$$\frac{p}{q} - \sqrt{d} = \frac{-1}{q(p + q\sqrt{d})}$$

olur. Öte yandan, eğer $0 < p < q$ ise

$$-1 = p^2 - dq^2 < p^2 - dp^2 = p^2(1 - d) \leq -p^2$$

olur ki bu imkansızdır. O halde $p \geq q$'dir. Dolayısıyla $p + q\sqrt{d} > 2q$ olur. Böylece

$$\left|\frac{p}{q} - \sqrt{d}\right| = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})} < \frac{1}{2q^2}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 2.4.8'e göre $\frac{p}{q}$, $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının bir yaklaşımı olur.

**Teorem 3.2.2.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. ve $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımının periyodu m olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümleri

i) $m$ çift ise çözüm yoktur.

ii) $m$ tek ise $(x_n, y_n) = \left(p_{(2n-1)m-1}, q_{(2n-1)m-1}\right)$

şeklindedir[17].

**İspat:** Teorem 3.1.9'un ispatına benzer bir şekilde yapılır.

**Örnek 3.2.1.** $x^2 - 7y^2 = -1$ denkleminin varsa tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz?

**Çözüm:** $\sqrt{7} = \left[2; \overline{1,1,1,4}\right]$ sonsuz sürekli kesir açılımının periyodu $m = 4$ çift olduğundan Teorem 3.2.2'ye göre çözüm yoktur.

**Örnek 3.2.2.** $x^2 - 13y^2 = -1$ denkleminin tüm pozitif tam sayı çözümlerini bulunuz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'e göre $\sqrt{13} = \left[3; \overline{1,1,1,1,6}\right]$ olduğundan periyot $m = 5$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.2'e göre çözüm vardır. Tüm pozitif tam sayı çözümleri

$$(x_n, y_n) = \left(p_{(2n-1)5-1}, q_{(2n-1)5-1}\right) = (p_{10n-6}, q_{10n-6})$$

biçimindedir.

**Teorem 3.2.3.** $d > 0$ tam kare olmayan bir tamsayı olsun. $\sqrt{d}$ nin sonsuz sürekli kesir açılımının periyodu $m$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = -1$ Pell denkleminin

i) $m$ çift ise çözüm yoktur.
ii) $m$ tek ise temel çözüm $(x_1, y_1) = (p_{m-1}, q_{m-1})$ şeklindedir[17].

**Örnek 3.2.3.** $x^2 - 17y^2 = -1$ pell denkleminin temel çözümünü bulunuz?

**Çözüm:** Tablo 2.2'e göre $\sqrt{17} = \left[4; \overline{8}\right]$ olduğundan periyot $m = 1$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.2.3'ye göre temel çözüm

$(x_1, y_1) = (p_{m-1}, q_{m-1}) = (p_0, q_0)$

dır. $\frac{p_0}{q_0} = [4] = 4 = \frac{4}{1}$ olduğundan $x_1 = 4$ ve $y_1 = 1$ olduğu görülür.

**Teorem 3.2.4.** $k > 1$ olsun. O zaman

$$\sqrt{k^2+4} = \begin{cases} \left[k; \overline{\frac{k}{2}, 2k}\right], & eğer\ k\ çift\ ise \\ \left[k; \overline{\frac{k-1}{2}, 1, 1, \frac{k-1}{2}, 2k}\right], & eğer\ k\ tek\ ise \end{cases}$$

dir[17].

**İspat:** Öncelikle $k = 2t$ olsun. O zaman $k^2 + 4 = 4t^2 + 4$ olur.

$$2t < \sqrt{4t^2+4} < 2t + 1$$

olduğundan Teorem 2.3.6'ya göre $\alpha_0 = \sqrt{4t^2+4}$ olmak üzere

$$a_0 = [\![\alpha_0]\!] = [\![\sqrt{4t^2+4}]\!] = 27,\ \alpha_1 = \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{4t^2+4} - 2t} = \frac{\sqrt{4t^2+4} + 2t}{4}$$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 2.3.6 tekrar tekrar uygulandığında,

$$t < \frac{\sqrt{4t^2+4} + 2t}{4} < t + \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$a_1 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4} + 2t}{4}\right]\!\right] = t,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4}+2t}{4} - t} = \sqrt{4t^2+4} + 2t$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$4t < \sqrt{4t^2+4} + 2 < 4t + 1$$

olduğundan $\mathrm{a}_2 = [\![\sqrt{4t^2+4} + 2]\!] = 4t$ bulunur. Böylece Teorem 2.7.1'e göre $\mathrm{a}_2 = 2\mathrm{a}_0$ olduğundan $\sqrt{4t^2+4} = [2t; \overline{t, 4t}]$ elde edilir. O halde $k$ çift olduğunda

$$\sqrt{k^2+4} = \left[k; \overline{\frac{k}{2}, 2k}\right]$$

bulunur. Şimdi $k = 2t+1$ olsun. Bu durumda $k^2+4 = 4t^2+4t+5$ olur.

$$2t + 1 < \sqrt{4t^2+4t+5} < 2t + 2$$

olduğundan Teorem 2.3.6'ya göre
$\mathrm{a}_0 = [\![\sqrt{4t^2+4t+5}]\!] = 2t+1,\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{4t^2+4t+5}-(2t+1)} = \frac{\sqrt{4t^2+4}+2t+1}{4}$

bulunur. Benzer şekilde Teorem 2.3.6 tekrar uygulandığında,

$$t + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4} < t + \frac{3}{4}$$
olduğundan

$$\mathrm{a}_1 = \left[\!\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}\right]\!\!\right] = t,\ \alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t+1}{4}-t} = \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{2t+1}$$

elde edilir. Ayrıca

$$2 - \frac{2}{2t+1} < \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{2t+1} < 2 - \frac{1}{2t+1}$$

olduğundan

$$\mathrm{a}_2 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{2t+1}\right]\!\right] = 1,\ \alpha_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{2t+1}-1} = \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}$$

dir. Bunu yanısıra

$$1 + \frac{2}{2t+1} < \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1} < 1 + \frac{3}{2t+1}$$

olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{a}_3 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}\right]\!\right] = 1,\ \alpha_4 = \frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2}{2t+1}-1} = \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{4}$$

olur. Ayrıca

$$t < \frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{4} < t + \frac{1}{4}$$

olduğundan

$$\mathrm{a}_4 = \left[\!\left[\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{4}\right]\!\right] = t,\ \alpha_5 = \frac{1}{\frac{\sqrt{4t^2+4t+5}+2t-1}{4t}-t} = \sqrt{4t^2+4t+5} + 2t + 1$$

bulunur. Buradan $\mathrm{a}_5 = \left[\!\left[\sqrt{4t^2+4t+5} + 2t + 1\right]\!\right] = 2(2t+1) = 2\mathrm{a}_0$ olur. Böylece Teorem 2.7.1'e göre $\mathrm{a}_2 = 2\mathrm{a}_0$ olduğundan $\sqrt{4t^2+4t+5} = \left[2t+1; \overline{t, 1, 1, t, 4t+2}\right]$ bulunur. Dolayısıyla $k$ tek olduğunda

$$\sqrt{k^2+4} = \left[k; \overline{\frac{k-1}{2}, 1, 1, \frac{k-1}{2}, 2k}\right]$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.2.5.** $k > 1$ tamsayı ve $d = k^2 + 4$ olmak üzere $x^2 - (k^2+4)y^2 = -1$ denkleminin temel çözümü $k$ tek ise

$(x_1, y_1) = \left(\frac{k^2+3k}{2}, \frac{k^2+1}{2}\right)$

şeklindedir. Ayrıca $k$ çift ise $x^2 - (k^2+4)y^2 = -1$ denkleminin tamsayı çözümü yoktur[17].

**İspat:** Öncelikle $k$ çift olsun. Bu durumda $\sqrt{d} = \sqrt{k^2+4}$ sayısının periyodu Teorem 3.2.2'ye göre periyodu çift olduğundan $x^2 - (k^2+4)y^2 = -1$ denkleminin çözümü yoktur.

Şimdi $k$ tek olsun. O halde $\sqrt{d} = \sqrt{k^2+4}$ sayısının periyodu $\mathrm{m} = 5$ tektir. O zaman Teorem 3.2.3'ye göre temel çözüm $(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1) = (\mathrm{p}_4, \mathrm{q}_4)$ olur. Öte yandan

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \left[k, \frac{k-1}{2}, 1, 1, \frac{k-1}{2}\right] = k + \frac{1}{\frac{k-1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{k-1}{2}}}}} = \frac{\frac{k^3+3k}{2}}{\frac{k^2+1}{2}}$$

ve $\frac{k^3+3k}{2}$ ile $\frac{k^2+1}{2}$ aralarında asal olduğundan Teorem 2.3.8'e göre $p_4 = \frac{k^2+3k}{2}$ ve $q_4 = \frac{k^2+1}{2}$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki tabloda $2 \leq d \leq 99$ için $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = 1$ ve $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = -1$ denklemlerinin $(x_1, y_1)$ temel çözümleri verilmiştir.

Tablo 3.1. $d$ tam kare olmayan tamsayı$(2 \leq d \leq 99)$; $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = \mp 1$ denklemlerinin temel çözümleri

| d | $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = 1$ denkleminin $(x_1, y_1)$ temel çözümü | $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = -1$ denkleminin $(x_1, y_1)$ temel çözümü | d | $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = 1$ denkleminin $(x_1, y_1)$ temel çözümü | $\mathrm{x}^2 - \mathrm{dy}^2 = -1$ denkleminin $(x_1, y_1)$ temel çözümü |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | (3,2) | (1,1) | 53 | (66249,9100) | (182,25) |
| 3 | (2,1) | Çözüm yok | 54 | (485,66) | Çözüm yok |
| 5 | (9,4) | (2,1) | 55 | (89,12) | Çözüm yok |
| 6 | (5,2) | Çözüm yok | 56 | (15,2) | Çözüm yok |
| 7 | (8,3) | Çözüm yok | 57 | (151,20) | Çözüm yok |
| 8 | (3,1) | Çözüm yok | 58 | (19653,2574) | (99,13) |
| 10 | (19,6) | (3,1) | 59 | (530,69) | Çözüm yok |
| 11 | (10,3) | Çözüm yok | 60 | (31,4) | Çözüm yok |
| 12 | (7,2) | Çözüm yok | 61 | (1766319049,226153980) | (29718,3805) |
| 13 | (649,180) | (18,5) | 62 | (63,8) | Çözüm yok |
| 14 | (15,4) | Çözüm yok | 63 | (8,1) | Çözüm yok |
| 15 | (4,1) | Çözüm yok | 65 | (129,16) | (8,1) |
| 17 | (33,8) | (4,1) | 66 | (65,8) | Çözüm yok |
| 18 | (17,4) | Çözüm yok | 67 | (48842,5967) | Çözüm yok |
| 19 | (170,39) | Çözüm yok | 68 | (33,4) | Çözüm yok |
| 20 | (9,2) | Çözüm yok | 69 | (7775,936) | Çözüm yok |
| 21 | (55,12) | Çözüm yok | 70 | (251,30) | Çözüm yok |
| 22 | (197,42) | Çözüm yok | 71 | (3480,413) | Çözüm yok |
| 23 | (24,5) | Çözüm yok | 72 | (17,2) | Çözüm yok |
| 24 | (5,1) | Çözüm yok | 73 | (2281249,267000) | (1068,125) |
| 26 | (51,10) | (5,1) | 74 | (3699,430) | (43,5) |
| 27 | (26,5) | Çözüm yok | 75 | (26,3) | Çözüm yok |
| 28 | (127,24) | Çözüm yok | 76 | (57799,6630) | Çözüm yok |
| 29 | (9801,1820) | (70,13) | 77 | (351,40) | Çözüm yok |
| 30 | (11,2) | Çözüm yok | 78 | (53,6) | Çözüm yok |
| 31 | (1520,273) | Çözüm yok | 79 | (80,9) | Çözüm yok |
| 32 | (17,3) | Çözüm yok | 80 | (9,1) | Çözüm yok |
| 33 | (23,4) | Çözüm yok | 82 | (163,18) | (9,1) |
| 34 | (35,6) | Çözüm yok | 83 | (82,9) | Çözüm yok |
| 35 | (6,1) | Çözüm yok | 84 | (55,6) | Çözüm yok |
| 37 | (73,12) | (6,1) | 85 | (285769,30996) | (378,41) |
| 38 | (37,6) | Çözüm yok | 86 | (10405,1122) | Çözüm yok |
| 39 | (25,4) | Çözüm yok | 87 | (28,3) | Çözüm yok |
| 40 | (19,3) | Çözüm yok | 88 | (197,21) | Çözüm yok |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 41 | (2049,320) | (32,5) | 89 | (500001,53000) | (500,53) |
| 42 | (13,2) | Çözüm yok | 90 | (19,2) | Çözüm yok |
| 43 | (3482,531) | Çözüm yok | 91 | (1574,165) | Çözüm yok |
| 44 | (199,30) | Çözüm yok | 92 | (1151,120) | Çözüm yok |
| 45 | (161,24) | Çözüm yok | 93 | (12151,1260) | Çözüm yok |
| 46 | (24335,3588) | Çözüm yok | 94 | (2143295,221064) | Çözüm yok |
| 47 | (48,7) | Çözüm yok | 95 | (39,4) | Çözüm yok |
| 48 | (7,1) | Çözüm yok | 96 | (49,5) | Çözüm yok |
| 50 | (99,14) | (7,1) | 97 | (62809633,6377352) | (5604,569) |
| 51 | (50,7) | Çözüm yok | 98 | (99,10) | Çözüm yok |
| 52 | (649,90) | Çözüm yok | 99 | (10,1) | Çözüm yok |

# 4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bir rasyonel sayının $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}]$ şeklinde sonlu bir sürekli kesir açılımına, bir irrasyonel sayının ise $[\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1, \dots]$ şeklinde sonsuz bir sürekli kesir açılımına sahip olduğu verilmiştir. Ayrıca $\sqrt{d} = [\mathrm{a}_0; \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1, \dots]$ açılımından ve sürekli kesirlerin yaklaşımlarından yararlanılarak $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin temel çözümü verilmiş ve tüm pozitif tamsayı çözümlerine ilişkin formüller ifade edilmiştir.

Literatürde $a^2b^2 \pm a, a^2b^2 \pm 2a$ ve $a^2b^2 \pm 4a$ formlarında olan fakat tam kare olmayan $d$ pozitif tamsayıları için $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımları bulunmuştur. Benzer bir çalışma $d = a^2 \pm ab \pm b^2$ formlarında olan tam kare olmayan $d$ pozitif tamsayıları için $\sqrt{d}$'nin sürekli kesir açılımları bulunabilir Böylece $d = a^2 \pm ab \pm b^2$ olmak üzere $x^2 - dy^2 = \pm 1$ Pell denklemlerinin temel çözümü ve tüm pozitif tamsayı çözümleri tespit edilebilir.

# KAYNAKLAR

[1] Collins DC. Continued fractions. The MIT Undergraduate Journal of Mathematics. 1999; 1: 11-20.

[2] Widž J. From the History of Continued Fractions. WDS'09 Proceedings of Contributed Papers. 2012; Part I: 176-181.

[3] Thomas J. A Study on Pell's equation (Doctoral dissertation, St Teresa's College (Autonomous), Ernakulam); 2018.

[4] Olds CD. Contineud Fractions. First Edition. New York: Random Hause; 1963.

[5] Khinchin AY. Continued Fractions. 3rd ed. Edited by B. V. Gnedenko. Chicago: State Publishing House of Physical-Mathematical Literature; 1961.

[6] Kaplan F. Sürekli Kesirlerde Çatallanma (Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi); 2014.

[7] Bayraktar M. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Basımevi; 1988.

[8] Rosen HK. Elementary Number Theory And Its Application. Addison –Wesley, 1984.

[9] Pekasil M. Sürekli Kesirler ve Pell Denklemi. (Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi); 2006.

[10] Barzen J, Leymann F. Continued Fractions and Probability Estimations in the Shor Algorithm: A Detailed and Self-Contained Treatise. AppliedMath. 2022; 2: 393–432.

[11] Burton DM. Elementary Number Theory. University Of New Hampshire. Printed in the United States of America; 1980.

[12] Krishnan GG. Continued Fractions. Cornell University: Notes for a short course at the Ithaca High School Senior Math Seminar; 2016.

[13] Çınar F. Mobiüs Dönüşümleri ile Sürekli Kesirlerin İlişkisi. (Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi); 2008.

[14] Özden D. İkinci Dereceden Bazı Diofant Denklemleri. (Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi); 2010.

[15] Niven I, Zuckerman SH, Montgomery HL. An Introduction to the Theory of Numbers. 5th ed. New York: John Wiley Sons Inc.; 1991.

[16] Waldschmidt M. Continued fractions. https://webusers.imj-prg.fr/~michel.waldschmidt/articles/pdf/ContinuedFractionsOujda2015.pdf.

[17] Güney M. Pell Denklemleri (Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi); 2012.

[18] Keskin R. Lisansüstü Ders Notları. 2021.

[19] Conrad K. Pell's equation-I, II. https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn2.pdf (Erişim Yılı: 2023).

[20] Karadağ D. Balans sayıları ve Pell Denklemleri (Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi); 2017.

[21] Gilbert WS. https://www.math.brown.edu/johsilve/frintonlinechapters.pdf.

[22] Keskin R, Duman MG. Positive integer solutions of some Pell equations. Palestine Journal of Mathematics. 2019; 8(2): 213-226.

[23] Peker B. Continued Fractions and Pell's Equation. Edited by Mehmet Ozaslan, Yasmeen Junejo. ISRES Publishing; 2021.

[24] Keskin R, Şiar Z. Positive integer solutions of some Diophantine equations in terms of integer sequences. Afrika Matematika. 2019; 30: 181-194.

[25] Tekcan A. Continued fractions expansion of $\sqrt{\mathrm{D}}$ and Pell equation $\mathrm{X}^2 - \mathrm{DY}^2 = 1$. Mathematica Moravica. 2011; 15(2): 19-27.