

84126

**İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERENSİYEL  
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI**

**OSCILLATION OF SOLUTIONS OF NONLINEAR SECOND  
ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**BÜLENT AYANLAR**


Hacettepe Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin  
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

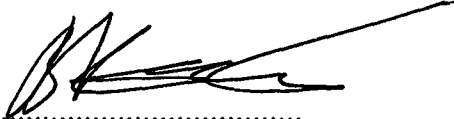
**DOKTORA TEZİ**  
olarak hazırlanmıştır.


1999

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :   
: Prof. Dr. Okay ÇELEBİ

Üye :   
: Prof. Dr. Varga KALANTAROV

Üye :   
: Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU


Üye (Danışman) :   
: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Üye :   
: Doç. Dr. Ağacık ZAFER

**ONAY**

Bu tez ...../...../19..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../19.....

  
Prof. Dr. Seyfi KULAKSIZ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

## ÖZET

Bu çalışma, iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmaya esas olan orjinal sonuçların alt yapısını oluşturan, ikinci basamaktan diferensiyel denklemlere ilişkin, literatürde yer alan, amaca yönelik sonuçlara sistematik biçimde yer verilmiştir.

İkinci bölüm, tamamen orjinal sonuçlar olup, iki kesimden oluşmaktadır. Bu bölümün birinci kesiminde, Grace, Lalli ve Li'nin makalelerinden esinlenerek

$$[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0$$

lineer olmayan diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin kriterler elde edilmiştir.

İkinci kesimde,  $\varphi(s) = |s|^{p-2} s$  olmak üzere, Li'nin sonuçları ,

$$[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))] + c(t)\varphi(x(t)) = 0$$

biçimindeki daha genel yapı için araştırılmış ve yeni salınımlılık kriterleri inşa edilmiştir.

## ABSTRACT

This work consists of two chapters.

The first chapter systematically includes the results that constitute the infrastructure of the original results that serve as the basis of this study and these results which lead to the objective are found in the literature of second order differential equations.

The second chapter has two sections containing original results. In the first section of this chapter the criteria on oscillation of solutions of nonlinear differential equation

$$[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0$$

are obtained by employing methods of Grace, Lalli and Li.

In the second section, where  $\varphi(s) = |s|^{p-2}s$ , Li's results, for

$$[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))] + c(t)\varphi(x(t)) = 0$$

has been investigated for a more general structure and new oscillation criteria are built.

## TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın oluőturulması esnasında, engin birikimi, sabrı ve yol gostericiliğiyle bu gūnlere ulaőmamı sağlayan çok değerli tez hocam ve danıőmanım, Sayın Prof.Dr. Aydın TİRİYAKİ'ye, bana kazandırmaya çalıőtıęı tūm değerler için minnettarlığımı ve Őukranlarımı bildirmeyi bir gōrev kabul ediyorum. Ayrıca, bu yorucu çalıőmalarım boyunca gōsterdięi anlayıő ve yardımlar için, eőim Tūlin AYANLAR'a teőekkūr ediyorum.



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vii
0. GİRİŞ.....	1
1. İKİNCİ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI.....	5
1.1. Lineer Denklemlere İlişkin Sonuçlar.....	6
1.2. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Sonuçlar.....	12
2. İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BELLİ SINIFTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI.....	31
2.1. $[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0$ Denklemine İlişkin Sonuçlar.....	31
2.2. $[r(t)\Phi(x(t))\phi(x'(t))] + c(t)\phi(x(t)) = 0$ Denklemine İlişkin Sonuçlar....	47
3. KAYNAKLAR DİZİNİ.....	63
4. ÖZGEÇMİŞ.....	69

## 0. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler, mühendislik, fen ve sosyal bilimlerde önemli rol oynar. Bu alanlarda araştırılan problemlerin özelliklerini taşıyan anlamlı matematiksel modeller, çoğu kez diferensiyel denklemler olarak karşımıza çıkar. Dolayısıyla her denklemin çözümünü bilmek istememiz doğaldır. Ancak, bu durum çok az sayıda, belli yapıdaki denklemler için söz konusudur. Bu nedenle, çözümlerin bilinen metotlar yardımıyla bulunamadığı durumlarda; denklemin analizinden hareket ederek davranışını araştırmak, oldukça önemlidir. Kalitatif inceleme alanı olarak adlandırılan bu metodun önemli bir dalı da, salınım teorisidir. Bu teori, lineer denklemler için hayli zengin olmasına karşın, lineer olmayan denklemler için kısıtlıdır. Bu teori içerisinde yaygın olarak kullanılan tekniklerden biri de ortalama tekniğidir.

Bilindiği üzere, bir diferensiyel denklemin belirgin olmayan bir çözümü,  $[t_0, \infty)$  aralığında keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımlıdır. Tersine söz konusu çözüm  $[t_0, \infty)$  aralığında sonlu sayıda sıfırlara sahipse bu aralıkta salınımsızdır. Buna göre salınımlı bir çözüm için  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir  $\{t_n\}$  dizisi mevcuttur. Çözüm salınımsız ise her  $t \geq t_1 \geq t_0$  için çözüm, ya pozitif ya da negatif olacak şekilde bir  $t_1$  sayısı mevcuttur.

Bu çalışmada konu sınırlandırılarak, belli tipten ikinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı araştırılmıştır. Bu tip denklemler için eğer bütün çözümleri salınımlı ise denkleme salınımlı diyeceğiz.

Çalışmaya esas olan orjinal sonuçların alt yapısını oluşturmak için, birinci bölümde, önce

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (E_1)$$

lineer denklemi ele alınmış, bu denklemin salınımlılık sonuçlarına ilişkin, sırasıyla,

Sturm(1836), Kneser(1893), Fite(1918), Wintner(1949), Hartman(1952), Atkinson (1955), Moore ve Nehari(1959), Nehari(1960), Jasny(1960), Kurzweill(1960), Belohorec(1961), Kiguradze(1962), Nehari(1969), Kamenev(1978), Yan(1984) ve Philos(1989)'un çalışmaları, amaca yönelik olarak, sistematik biçimde sunulmaya çalışılmıştır.

1995 yılında, Li'nin genelleştirilmiş bir Riccati dönüşümü kullanarak,  $r(t) \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  ve  $q(t) \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$ ,  $t_0 \geq 0$  olmak üzere,

$$[r(t)x'(t)]' + q(t)x(t) = 0 \quad (E_5)$$

lineer denklemi için elde ettiği kriterlere yer verilmiştir.

Daha sonra,  $q$ ,  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve gerçel-değerli bir fonksiyon,  $f$ ,  $\mathfrak{R}$ 'de sürekli, gerçel-değerli,  $\mathfrak{R} - \{0\}$  üzerinde sürekli türevlenebilir, her  $y \neq 0$  için  $yf(y) > 0$  ve  $f'(y) \geq 0$  koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere,  $f(y) = |y|^\lambda \operatorname{sgn} y$ ,  $y \in \mathfrak{R}$  ( $\lambda > 1$ ) özel durumu için, Emden–Fowler denklemi olarak adlandırılan,

$$x''(t) + q(t)[f(x(t))] = 0 \quad (E_6)$$

diferensiyel denklemi gözönüne alınmıştır. Wintner'in lineer durum için bulduğu klasik ortalama kriterden esinlenerek, ortalama teknikleri kullanılan birçok araştırma arasından; Butler(1976, 1980), Butler ve Erbe(1987), Kamenev(1974,1978), Kura (1982), Kwong ve Wong(1982–1983), Wong(1968–1986), Onose(1975–1983), Philos(1983–1990)'un çalışmaları irdelenmiş, bunlardan bir sentez yapılmaya çalışılarak,  $(E_6)$  ve onun özel durumu olan,

$$x''(t) + q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t) = 0 \quad (E_2)$$

Emden–Fowler denklemi ve de  $p(t)$ ,  $[t_0, \infty)$  aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)[f(x(t))] = 0 \quad (E_7)$$

denkleminin salınımlılığı için, Philos'un inşa ettiği kriterlere yer verilmiştir.

$a, p, q: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli ve  $t \geq t_0$  için  $a(t) > 0$  olmak üzere, 1989 yılında Grace'in, ele aldığı,

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t) = 0, \quad \lambda > 0 \quad (E_8)$$

biçimindeki lineer olmayan diferensiyel denklemi incelenmiş ve bu denklemin salınımlılığına ilişkin sonuçları üzerinde durulmuştur.

$a, p, q: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\Psi, f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli,  $a(t) > 0$ ,  $x \neq 0$  için  $xf(x) > 0$  olmak üzere;  $\Psi(x)$  üzerine sınırlılık koşulları koyarak, Grace ve Lalli tarafından araştırılan,

$$[a(t)\Psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0 \quad (E_{10})$$

denkleminin salınımlılığına ilişkin sonuçları irdelenmiştir.

Son olarak,  $q(t)$ ,  $[t_0, \infty)$  aralığında sürekli olmak üzere

$$[\varphi(x'(t))] + c(t)\varphi(x(t)) = 0, \quad (E_{14})$$

denklemi için, Li tarafından 1994 yılında inşa edilen salınımlılık kriterleri ifade edilmiştir.

Tamamen orjinal sonuçlardan oluşan ikinci bölümde, yukarıda bahsedilen çalışmalardan, özellikle Grace, Lalli ve Li'nin makalelerinden esinlenerek

$$[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0, t \geq t_0 \quad (E_{15})$$

denkleminin salınımlılığına ilişkin bazı orjinal kriterler inşa edilmiştir.,

Son olarak  $\varphi(s)$ ,  $\varphi(s) = |s|^{p-2}s$ , olmak üzere Li'nin sonuçları,

$$[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))] + c(t)\varphi(x(t)) = 0, \quad (E_{19})$$

biçimindeki daha genel yapı için araştırılmış, bazı yeni salınımlılık kriterleri oluşturulmuştur.

## 1. İKİNCİ BASAMAKTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

İkinci basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve salınımsızlık problemi, son yıllarda çok ilgi duyulan bir araştırma konusu olmuş ve bu konuda yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir.

Bu bölümde, araştırma konusunun altyapısını oluşturan bir dizi önemli sonuç ve kriter, tarihsel süreç içerisinde sistematik biçimde sunulacaktır.

Sturm [52], 1836 yılında,  $q(t) \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$ ,  $t_0 \geq 0$  olmak üzere,

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (E_1)$$

lineer diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışını araştıran ilk kişi olmuştur.  $q(t)$ 'nin sonuçta negatif olmadığı durumda, pek çok salınımlılık kriterinin inşası Atkinson [1]'un klasik çalışmasıyla başlamış, Moore ve Nehari [36], Nehari [37], Jasny [23], Kurzweill [30], Belohorec [2] ve Kiguradze [27]'nin çalışmaları ile sürmüştür. Nehari [37,38]'nin hemen ardından bir dizi makale halinde Coffman ve Wong [7-9] tarafından, bu sonuçlar, salınımlılık konusunda birçok ilginç özelliğe sahip olan ve Emden-Fowler denklemi olarak isimlendirilen

$$x''(t) + q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t) = 0 \quad (E_2)$$

denkleminin de sistematik bir davranışını kapsayacak bir şekilde,  $(E_2)$ 'den daha genel bir denkleme genişletilmiştir. Eğer,  $(E_2)$ 'de  $q(t) = t^\lambda$  alınırsa astrofiziğin çalışma konusu olarak ortaya çıkan Emden-Fowler denklemi elde edilir. Cecchi ve Marini [6]'nin belirttiği gibi, pek çok fiziksel problem;  $a, q : [0 \leq t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\Psi, f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli,  $a(t) > 0$  ve  $q, [t_0, \infty)$ 'un herhangi bir alt aralığı üzerinde özdeş sıfır olmamak üzere,

$$[a(t)\Psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0 \quad (E_3)$$

biçimindeki ikinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemlerle modellenir. Örneğin, Thomas-Fermi ve Schrodinger-Persico denklemlerinin her ikisi de atomik alanların araştırmasında ortaya çıkan,  $(E_3)$  biçimindeki denklemlerdir. Ayrıca, bu tip denklemler, kuvvet alanı zamana bağlı olduğunda, “açısal momentumun korunması kanununda” olduğu gibi birçok mekanik probleminde de görülür. Bu denklemlerle ilgili olarak, Butler [4], Coles [10,11], Grace ve Lalli [17–19], Hartman [22], Kamenev [25,26], Kwong ve Wong [31], Philos [43,46,49,50], Wintner [55], Wong [57,60,61], Yan [62] ve Yeh [63]’in araştırmalarına başvurulabilir.

### 1.1. Lineer Denklemlere İlişkin Sonuçlar

$(E_1)$  lineer diferensiyel denkleminin salınımlılığı için  $q(t)$  üzerine koşulları esas alan kriterleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz :

1. Kneser (1893) [28] :  $q(t) > 0$  ve  $w = \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 q(t)$  olmak üzere,  $w > \frac{1}{4}$  ise  $(E_1)$

denklemini salınımlı,  $w < \frac{1}{4}$  ise salınımsızdır.

2. Fite (1918) [12] : Eğer  $\int_{t_0}^{\infty} q(s) ds = \infty$  ise  $(E_1)$  denklemini salınımlıdır.

3. Wintner (1949) [55] : Eğer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u) du ds = \infty$  ise  $(E_1)$  denklemini

salınımlıdır.

4. Hartman (1952)[22] : Eğer

$$-\infty < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u) du ds < \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s q(u) du ds \leq \infty$$

ise  $(E_1)$  denkleml salınımlıdır.

5. Kamenev (1978)[26] :  $\lambda > 1$  bir sabit olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds = \infty$$

ise  $(E_1)$  denkleml salınımlıdır.

6. Yan (1984)[62] :  $\lambda > 1$  sabiti için  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds < \infty$  olsun.

Eğer  $[t_0, \infty)$  üzerinde tanımlı,  $A_+(t) = \max\{A(t), 0\}$ ,  $t \geq t_0$  ve  $\int_{t_0}^{\infty} A_+^2(s) ds = \infty$

olacak şekilde sürekli bir  $A$  fonksiyonu var ve her  $T \geq t_0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds \geq A(T)$$

ise  $(E_1)$  denkleml salınımlıdır.

7. Philos (1989)[48] :  $H, D \equiv \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli bir fonksiyon,

$t \geq t_0$  için  $H(t, t) = 0$ ,  $t > s \geq t_0$  için  $H(t, s) > 0$  ve  $H'$  ın  $D$  üzerinde ikinci değişkene

göre sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevi var olsun. Ayrıca  $h: D \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli bir

fonksiyon ve her  $(t, s) \in D$  için  $-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)}$

koşulu sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t, s)q(s) - \frac{1}{4} h^2(t, s) \right\} ds = \infty$$

ise  $(E_1)$  denkleml salınımlıdır.

(E<sub>1</sub>) denkleminde  $\gamma > 0$  bir sabit olmak üzere  $q(t) = \frac{\gamma}{t^2}$  alınırsa, yukarıdaki

kriterler için,

$$(i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t \int_1^s q(u) du ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t \int_1^s \frac{\gamma}{u^2} du ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{t} \int_1^t \left[ -\frac{1}{s} + 1 \right] ds \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{t} (-\log t + t - 1) = \gamma < \infty ;$$

(ii)  $\lambda > 1$  sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda q(s) ds = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \frac{\gamma(t-s)^\lambda}{s^2} ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\gamma}{s^2} ds = \gamma < \infty ,$$

her  $T \geq 1$  için

$$A(T) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^\lambda q(s) ds \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t (t-s)^\lambda q(s) ds \leq \frac{\gamma}{T} \quad \text{ve}$$

$A(t)$  ve  $A_+(t)$  Yan [62] teoremden tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\int_1^\infty A_+^2(s) ds \leq \int_1^\infty \frac{\gamma^2}{s^2} ds = \gamma^2 < \infty$$

dir.

(iii)  $H$  ve  $h$ , Philos [48] teoremden tanımlandığı gibi olmak üzere,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,1)} \int_1^t \left[ H(t,\xi) q(\xi) - \frac{1}{4} h^2(t,\xi) \right] d\xi \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\gamma}{\xi^2} d\xi = \gamma < \infty$$

elde edilir. Böylece yukarıda sözü edilen Wintner, Hartman, Kamenev, Yan ve Philos'un kriterleri,

$$x''(t) + \frac{\gamma}{t^2} x(t) = 0 \quad (E_4)$$

Euler diferensiyel denkleminde uygulanamaz. Bilindiği gibi, eğer  $\gamma > \frac{1}{4}$  ise (E<sub>4</sub>)

denklemin salınımlı,  $\gamma \leq \frac{1}{4}$  ise salınımsızdır.

Li[34], 1995 yılında Yu[64]'nünkine göre genelleşmiş bir Riccati dönüşümü kullanarak,  $r(t) \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  ve  $q(t) \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$ ,  $t_0 \geq 0$  olmak üzere, Wintner, Hartman, Kamenev, Yan ve Philos'un yukarıda verilen salınımlılık kriterlerini,

$$[r(t)x'(t)]' + q(t)x(t) = 0 \quad (E_s)$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemine genişleterek, aşağıdaki sonuçları elde etmiştir :

**1.1.1. Teorem :**  $D_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$  olmak üzere,

$H \in C(D; \mathfrak{R})$  fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlasın :

(a)  $t \geq t_0$  için  $H(t, t) = 0$ ,  $t > s \geq t_0$  için  $H(t, s) > 0$ ,

(b)  $H$ ,  $D_0$ 'da sürekli, ikinci değişkene göre kısmi türevi mevcut ve monoton artmayan olsun . Ayrıca her  $(t, s) \in D_0$  için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)} \text{ olacak şekilde, sürekli bir } h: D_0 \rightarrow \mathfrak{R} \text{ fonksiyonu}$$

tanımlı olsun.

$$a(s) = \exp\left\{-2 \int_s^t f(\xi) d\xi\right\} \text{ ve } \Psi(s) = a(s)\left\{q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]'\right\} \text{ şeklinde}$$

tanımlı fonksiyonlar olmak üzere, eğer her  $t \geq t_0$  için

$$\int_{t_0}^t a(s)r(s)h^2(t, s)ds < \infty \quad (C_1)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s)\Psi(s) - \frac{1}{4} a(s)r(s)h^2(t, s) \right] ds = \infty \quad (C_2)$$

koşulları sağlanacak şekilde bir  $f \in C^1[t_0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_s)$  denklemini salınımlıdır.

**1.1.2. Sonuç :**  $R(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{r(s)}$ ,  $t \geq t_0$  olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} R^{-\lambda}(t) \int_{t_0}^t [R(t) - R(s)]^\lambda q(s) ds = \infty \quad (\lambda > 1 \text{ sabit})$$

ise  $(E_s)$  denklemi salınımlıdır.

**1.1.3. Sonuç :**  $Q(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{r(s)} < \infty$ ,  $t \geq t_0$  olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [-\log Q(t)]^{-\lambda} \int_{t_0}^t \left( \log \frac{Q(s)}{Q(t)} \right)^\lambda \left( Q(s)q(s) - \frac{1}{4r(s)Q(s)} \right) ds = \infty \quad (\lambda > 1 \text{ sabit})$$

ise  $(E_s)$  denklemi salınımlıdır.

**1.1.4. Uyarı [34]:** [45]'de Philos,  $(E_s)$  denklemi için

$$z(t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right) u(Q^{-1}(\exp(-t))), \quad t \geq -\log Q(t_0)$$

dönüşümünü kullanarak aynı problemle uğraşmıştır.

**1.1.5. Sonuç :**  $\lambda > 1$  bir sabit olmak üzere,  $H(t, s) = (t - s)^\lambda$ ,  $t \geq s \geq t_0$  olsun.

$a(s) = \exp\left\{-2 \int_s^\infty f(\xi) d\xi\right\}$  ve  $\Psi(s) = a(s) \left\{ q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]' \right\}$  olmak üzere,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t \left\{ (t - s)^\lambda \Psi(s) - \frac{\lambda^2}{4} (t - s)^{\lambda-2} a(s)r(s) \right\} ds = \infty$$

koşulu sağlanacak şekilde bir  $f \in C^1[t_0, \infty)$  fonksiyonu varsa 1.1.1. Teorem'den  $(E_s)$  denklemi salınımlıdır.

**1.1.6. Uyarı [34]:** Eğer  $r(t) \equiv 1$  ve  $f(t) \equiv 0$  ise 1.1.5. Sonuç, Kamenev [26]'in kriterine indirgenir.

**1.1.7. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 1.1.1. Teorem 'deki gibi ve

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right\} \leq \infty \quad (C_3)$$

olsun. Eğer

$$a(s) = \exp \left\{ -2 \int^s f(\xi) d\xi \right\}, \quad \Psi(s) = a(s) \left\{ q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]' \right\} \text{ ve}$$

$$A_+(s) = \max\{A(s), 0\} \text{ olmak üzere,}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t a(s)r(s)h^2(t,s)ds < \infty \quad (C_4)$$

$$\int_t^\infty \frac{A_+^2(s)}{a(s)r(s)} ds = \infty \quad (C_5)$$

ve her  $T \geq t_0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \left[ H(t,s)\Psi(s) - \frac{1}{4}a(s)r(s)h^2(t,s) \right] ds \geq A(T) \quad (C_6)$$

koşullarını sağlayan  $A \in C[t_0, \infty)$  ve  $f \in C^1[t_0, \infty)$  fonksiyonları varsa  $(E_5)$  denklemini salınımlıdır.

**1.1.8. Sonuç :**  $\lambda > 1$  bir sabit olmak üzere,  $H(t,s) = (t-s)^\lambda$ ,  $t \geq s \geq t_0$  olsun.

Ayrıca, her  $t \geq t_0$  için,

$$\int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda-2} a(s)r(s)ds < \infty, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-s)^\lambda a(s)r(s) < \infty$$

koşulları sağlansın. Eğer

$$a(s) = \exp \left\{ -2 \int^s f(\xi) d\xi \right\}, \quad \Psi(s) = a(s) \left\{ q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]' \right\} \text{ ve}$$

$$A_+(s) = \max\{A(s), 0\} \text{ olmak üzere, her } T \geq t_0 \text{ için } (C_5),$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_T^t \left\{ (t-s)^\lambda \Psi(s) - \frac{\lambda^2}{4} (t-s)^{\lambda-2} a(s)r(s) \right\} ds \geq A(T)$$

koşullarını sağlayan  $A \in C[t_0, \infty)$  ve  $f \in C^1[t_0, \infty)$  fonksiyonları varsa  $(E_5)$  denklemini salınımlıdır.

**1.1.9 Uyarı [34]** : Eğer  $r(t) \equiv 1$  ve  $f(t) \equiv 0$  ise, bu durumda 1.1.8. Sonuç, Yan [62]'ın sonucunu geliştirir.

**1.1.10. Teorem** :  $H$  ve  $h$ , 1.1.1. Teorem 'deki gibi olsun ve  $(C_3)$  koşulu sağlansın.

Eğer

$$a(s) = \exp\left\{-2 \int^s f(\xi) d\xi\right\}, \quad \Psi(s) = a(s)\left\{q(s) + r(s)f^2(s) - [r(s)f(s)]'\right\} \text{ ve}$$

$$A_+(s) = \max\{A(s), 0\} \text{ olmak üzere; } (C_1), (C_5),$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \Psi(s) ds < \infty \quad (C_7)$$

ve her  $T \geq t_0$  için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \Psi(s) - \frac{1}{4} a(s) r(s) h^2(t, s) \right] ds \geq A(T) \quad (C_8)$$

koşullarını sağlayan  $A \in C[t_0, \infty)$  ve  $f \in C^1[t_0, \infty)$  fonksiyonları varsa  $(E_5)$  denklemini salınımlıdır.

## 1.2. Lineer Olmayan Denklemlere İlişkin Sonuçlar

$q, [t_0, \infty)$  aralığı üzerinde sürekli ve gerçel-değerli bir fonksiyon,  $f, \mathfrak{R}$ 'de sürekli, gerçel-değerli,  $\mathfrak{R} - \{0\}$  üzerinde sürekli türevlenebilir ve her  $y \neq 0$  için  $yf(y) > 0$  ve  $f'(y) \geq 0$  koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere ikinci basamaktan lineer olmayan

$$x''(t) + q(t)[f(x(t))] = 0 \quad (E_6)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Bu tip denklemlerin salınımlılık çalışması özel bir ilgi alanı olmuş ve değişken katsayının ortalama davranışını içine alan çok sayıda kriter bulunmuştur. Bu testler, genellikle Wintner [55]'in lineer durum için bulduğu klasik ortalama kriterden ilham alarak harekete geçirilmiştir.  $(E_6)$  biçimindeki lineer olmayan ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için ortalama tekniklerini kullanan birçok araştırma arasından, Butler [3,4], Butler ve Erbe [5], Kamenev [24,25], Kura [29], Kwong ve Wong [31–33], Wong [56–60], Onose [39,40], Philos [41–43, 46, 47]'un çalışmaları gösterilebilir.

Dikkat edilirse,  $f(y) = |y|^\lambda \operatorname{sgn} y$ ,  $y \in \mathfrak{R}$  ( $\lambda > 1$ ) olarak alındığında lineer olmayan  $(E_6)$  denkleminin prototipi olan,  $(E_2)$  Emden-Fowler denklemi karşımıza çıkar. Wong [57],  $(E_2)$  Emden-Fowler denkleminin salınımlılığı için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s) ds > -\infty \quad (C_9)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t (t-s)q(s) ds = \infty \quad (C_{10})$$

koşullarının yeterli olduğunu kanıtlamıştır. 1984 yılında Philos [43], Wong'un bu sonucunu  $(E_2)$  denkleminin genel bir durumu olan  $(E_6)$  denklemine, aşağıdaki gibi genişletmiştir :

**1.2.1. Teorem :**  $(C_9)$  ve  $(C_{10})$  koşulları sağlansın. Ayrıca  $(E_6)$  denklemi

üst- lineer, yani  $\int \frac{dy}{f(y)} < \infty$  ve  $\int \frac{dy}{f(y)} < \infty$  olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu için,

$$\left. \begin{aligned}
& \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{f'(y)}}{f(y)} dy < \infty \text{ ve } \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{f'(y)}}{f(y)} dy < \infty \quad (C_{11}) \\
& \text{ve} \\
& \min \left\{ \inf_{y>0} \frac{\left[ \int_y^{\infty} \frac{\sqrt{f'(z)}}{f(z)} dz \right]^2}{\int_y^{\infty} \frac{dz}{f(z)}}, \inf_{y<0} \frac{\left[ \int_y^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(z)}}{f(z)} dz \right]^2}{\int_y^{-\infty} \frac{dz}{f(z)}} \right\} > 0 \quad (C_{12})
\end{aligned} \right\} (F_0)$$

koşulları sağlanırsa  $(E_6)$  denklemini salınımlıdır.

Daha sonra 1986'da Wong [60], bu denklemin özel bir durumu olan  $(E_2)$  Emden-Fowler denklemini için aşağıdaki salınımlılık kriterini inşa etmiştir.

**1.2.2. Teorem :** (Wong [60])  $(C_9)$  koşuluna ek olarak,  $\lambda > 2$  sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\lambda-1}} \int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda-1} q(s) ds = \infty \quad (C_{13})$$

koşulu sağlanıyorsa  $(E_2)$  denklemini salınımlıdır.

**1.2.3. Uyarı [50] :** Lineer durumda, yani  $(E_1)$  denkleminin salınımlılığı için, Kamenev [26],  $(C_{13})$  koşulunun yeterli olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca Kamenev'in kriteri Wintner [55]'in klasik salınımlılık sonucunu da kapsar.

1988'de Philos, ayrıca bir integral ortalama tekniği kullanarak,  $(E_6)$  denklemini için Wong [60]'un yukarıdaki salınımlılık kriterini de kapsayacak biçimde, aşağıdaki yeni salınımlılık kriterini sunmuştur :

**1.2.4. Teorem :** [Philos,50]  $(C_9)$  ve  $(C_{13})$  koşulları sağlansın. Ayrıca,  $(E_6)$  denklemi üst–lineer olsun. Eğer  $f$  fonksiyonu,

$$\min \left\{ \inf_{y>0} \sqrt{f'(y)} \int_y^{\infty} \frac{\sqrt{f'(z)}}{f(z)} dz, \inf_{y<0} \sqrt{f'(y)} \int_y^{-\infty} \frac{\sqrt{f'(z)}}{f(z)} dz \right\} > 0 \quad (C_{14}) \quad (F)$$

koşullarını sağlarsa  $(E_6)$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.5. Uyarı [50]:**  $f(y) = |y|^\lambda \operatorname{sgn} y, y \in \mathfrak{R} (\lambda > 1)$  özel durumunda

$$f(y) = y|y|^{\lambda-1}, y \neq 0$$

ve  $y \neq 0$  için,

$$\int_y^{(\operatorname{sgn} y)^\infty} \frac{\sqrt{f'(z)}}{f(z)} dz = \frac{2\lambda^{1/2}}{\lambda-1} |y|^{(1-\lambda)/2}$$

elde edilir ve sonuç olarak  $(F)$  koşulu sağlanır. Böylece, özel duruma 1.2.4. Teorem uygulanırsa,  $(C_9)$  ve  $(C_{13})$  koşullarının,  $(E_2)$  diferensiyel denkleminin salınımlılığı için yeterli koşullar olduğu görülür. Bu şekilde Wong [60]'un kriteri, 1.2.4. Teorem'in bir sonucu olarak elde edilir.

$p(t), [t_0, \infty)$  aralığı üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $(E_6)$ 'nın daha geneli olan,

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)[f(x(t))] = 0 \quad (E_7)$$

diferensiyel denklemi için aşağıdaki sonuç geçerlidir :

**1.2.6. Teorem :** [Philos,50]  $p, [t_0, \infty)$  aralığı üzerinde pozitif olmayan artan bir fonksiyon olsun. Bundan başka ( F ) koşulu sağlansın. Eğer  $(C_9)$  ve  $(C_{13})$  koşulları gerçekleşirse  $(E_7)$  denklemini salınımlıdır.

Grace[14], 1989 yılında,  $a, p, q : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli ve  $t \geq t_0$  için  $a(t) > 0$  olmak üzere,

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t) = 0, \quad \lambda > 0 \quad (E_8)$$

biçimindeki denklemlerin salınımlılığı ile ilgilenmiştir.

Son zamanlarda, Yan[62,Teorem2], Kwong ve Wong[31]'un teoreminin, Kamenev[26] tipi ortalama koşulu ile  $\lambda = 1$  iken  $(E_8)$  denklemini için geçerli kaldığını kanıtlamıştır. Öte yandan [31], [47] ve [62]'deki sonuçlar,  $\lambda > 1$  iken,  $(E_8)$  denklemine uygulanamaz. Bundan dolayı Grace[14], Kamenev[26] tarafından ortaya konulan tipte bir ortalama koşulu kullanarak,  $(E_8)$  denklemini için bir salınımlılık kriteri oluşturmuştur. Üst-lineer durumda, yani  $\lambda > 1$  için elde edilen bu sonuç Kwong ve Wong[31], Philos[47] ve Yan[62]'in çalışmalarının bir devamıdır. Grace, ayrıca alt -lineer durumda, yani  $0 < \lambda < 1$  için, [31], [47] ve [62]'dekilerden bağımsız olarak fakat  $\lambda = 1$  iken Yan[62]'inkine benzer sonuçları inşa etmiştir. Şimdi bu sonuçların bir kısmını verelim :

**1.2.7. Teorem :** Eğer,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \rho(s)q(s)ds > -\infty, \quad (C_{15})$$

$$a(t)\rho'(t) - p(t)\rho(t) = \gamma(t) \geq 0 \text{ ve } t \geq t_0 \text{ için } \gamma'(t) \leq 0, \quad (C_{16})$$

$$\eta(t) = \frac{1}{a(t)\rho(t)} \text{ olmak üzere } \int \eta(s)ds = \infty \quad (C_{17})$$

ve her  $\theta > 0$  ve  $\alpha \in (1, \infty)$  için  $\mathfrak{G}(t) = \eta(t) / \int_{t_0}^t \eta(s) ds$ ,  $\phi_+(t) = \max\{\phi(t), 0\}$

olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-u) \rho(u) q(u) du < \infty, \quad (C_{18})$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_s^t (t-u)^{\alpha-2} \bullet$$

$$\bullet \left[ (t-u)^2 \rho(u) q(u) - \frac{\theta}{4\lambda} \frac{1}{\mathfrak{G}(u)} [\gamma(u) \eta(u) (t-u) - \alpha]^2 \right] du > \phi(s) \quad (C_{19})$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \mathfrak{G}(s) \phi_+^2(s) = \infty \quad (C_{20})$$

koşullarını sağlayan türevlenebilir bir  $\rho : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu ve sürekli bir  $\phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu varsa her  $\lambda > 1$  için  $(E_8)$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.8. Sonuç :** 1.2.7. Teorem 'deki  $\rho$  fonksiyonu

$$t \geq t_0 \text{ için } \rho(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{p(s)}{a(s)} ds\right) \quad (C_{21})$$

ile tanımlansın. Eğer  $(C_{15})$ ,  $(C_{17})$ - $(C_{19})$  koşulları sağlanırsa her  $\lambda > 0$  için  $(E_8)$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.9. Sonuç :**  $\alpha \in (1, \infty)$  olsun. Ayrıca

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t q(s) ds > -\infty, \quad (C_{22})$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{a(s)} ds = \infty, \quad (C_{23})$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-u)^\alpha q(u) du < \infty, \quad (C_{24})$$

koşulları sağlansın. Eğer, her  $\theta > 0$  için

$$\phi_+(t) = \max\{\phi(t), 0\} \text{ ve } \mathfrak{G}(t) = \frac{1}{a(t)} \left( \int_{t_0}^t \frac{1}{a(s)} ds \right)^{-1} \text{ olmak üzere}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_s^t (t-u)^{\alpha-2} \left[ (t-u)^2 q(u) - \frac{\theta \alpha^2}{4\lambda \mathfrak{G}(u)} \right] du > \phi(s), \quad (C_{25})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \mathfrak{G}(s) \phi_+^2(s) ds = \infty \quad (C_{26})$$

koşullarını sağlayan sürekli bir  $\phi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu varsa her  $\lambda > 0$  için

$$(a(t)x'(t))' + q(t)|x(t)|^\lambda \operatorname{sgn} x(t) = 0, \lambda > 0 \quad (E_9)$$

denklemini salınımlıdır.

**1.2.10. Teorem :** Eğer  $(C_{15}) - (C_{17})$  koşullarını ve  $\eta$  ve  $\mathfrak{G}$  1.2.7. Teoremdeki gibi olmak üzere,  $\alpha \in (1, \infty)$  ve her  $\theta > 0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-u)^{\alpha-2} \bullet$$

$$\bullet \left[ (t-u)^2 \rho(u) q(u) - \frac{\theta}{4\lambda} \frac{1}{\mathfrak{G}(u)} [\gamma(u) \eta(u) (t-u) - \alpha]^2 \right] du = \infty \quad (C_{27})$$

koşulunu sağlayan türevlenebilir bir  $\rho : [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa her  $\lambda > 1$  için  $(E_9)$  denklemini salınımlıdır.

**1.2.11. Sonuç :** 1.2.10. Teoremdeki  $(C_{27})$  koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_{t_0}^t (t-u)^\alpha \rho(u) q(u) du = \infty, \quad (C_{28})$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{(t-u)^{\alpha-2}}{\mathfrak{G}(u)} [\gamma(u)\eta(u)(t-u) - \alpha]^2 du < \infty \quad (C_{29})$$

koşulları alınırsa 1.2.10. Teoremin sonuçları sağlanır.

Aşağıdaki sonuçlar Wong'un [60]'daki kriterini,  $(E_8)$  ve  $(E_9)$  biçimindeki daha genel denklemlere genişletir.

**1.2.12. Sonuç :** 1.2.10. Teoremdeki  $\rho$  fonksiyonu 1.2.8. Sonuçdaki  $(C_{21})$  ile tanımlı olsun. Eğer  $(C_{15}), (C_{17})$  ve  $(C_{27})$  koşulları sağlanırsa her  $\lambda > 0$  için  $(E_8)$  denklemi salınımlıdır.

Yine Grace [13], 1989 yılında  $a, p, q: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\Psi, f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli,  $a(t) > 0$  ve  $x \neq 0$  için  $xf(x) > 0$  olmak üzere,

$$[a(t)\Psi(x(t))x'(t)]' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0 \quad (E_{10})$$

denklemini incelemiş ve bu denklemin salınımlılığına ilişkin bazı kriterleri inşa etmiştir. Bu kriterler aşağıdaki gibidir :

**1.2.13. Teorem :**  $x \neq 0$  için  $f'(x) \geq k$  (C<sub>30</sub>)

her  $x$  için  $0 < c \leq \Psi(x) \leq c_1$  (C<sub>31</sub>)

koşulları sağlansın. Ayrıca,

$$Q(t) = q(t) - \frac{1}{4k} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_1} \right) \frac{p^2(t)}{a(t)} \quad \text{olarak alalım.}$$

Eğer,  $\alpha \in (1, \infty)$  olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} \int_{t_0}^t \left\{ (t-s)^\alpha \sigma(s) Q(s) - \frac{a(s)}{4kc_1\sigma(s)} (t-s)^{\alpha-2} \bullet \right. \\ \left. \bullet \left[ \left( \frac{p(s)\sigma(s)}{a(s)} - c_1\sigma'(s) \right) (t-s) + \alpha c_1\sigma(s) \right]^2 \right\} ds = \infty \quad (C_{32})$$

koşulu sağlanacak şekilde türevlenebilir bir  $\sigma: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{10})$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.14. Uyarı [13]:** Eğer  $(E_{10})$  denkleminin yalnız sınırlı çözümleri ile ilgilenilirse,

1.2.13. Teoremde  $(C_{31})$  koşulu yerine  $\Psi(x) \geq c > 0$  koşulu alınabilir.

**1.2.15. Uyarı [13]:** 1.2.13. Teorem,  $\beta$  ve  $\delta$ 'nin farklı değerleri için

$$x''(t) \pm \frac{\beta}{t} x'(t) + \frac{\delta}{t^2} x(t) = 0, t > 0 \quad (E_{11})$$

Euler denkleminin salınım ve salınımsızlık araştırmasında kullanışlıdır.

**1.2.16. Teorem :**  $\Psi(x) > 0$  ve  $x \neq 0$  için  $\frac{f'(x)}{\Psi(x)} \geq \gamma > 0$  (C<sub>33</sub>)

koşulu sağlansın. Eğer,  $\alpha \in (1, \infty)$  olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} \int_{t_0}^t \left\{ (t-s)^\alpha \sigma(s)q(s) - \frac{[(t-s)\sigma'(s) - \alpha\sigma(s)]^2 a(s)}{4\gamma\sigma(s)} (t-s)^{\alpha-2} \right\} ds = \infty \quad (C_{34})$$

koşulu sağlanacak şekilde türevlenebilir bir  $\sigma: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa

$$[a(t)\Psi(x(t))x'(t)]' + q(t)f(x(t)) = 0 \quad (E_{12})$$

denklemini salınımlıdır.

**1.2.17. Sonuç :** Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-2} \int_{t_0}^t \left[ (t-s)^2 \sigma(s)q(s) - \frac{(t-s)\sigma^2(s)a(s)}{4\gamma\sigma(s)} - \frac{(t-s)\sigma(s)a'(s)}{\gamma} \right] ds = \infty \quad (C_{35})$$

koşulu sağlanacak şekilde türevlenebilir bir  $\sigma: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa

$(E_{12})$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.18. Teorem :** (C<sub>33</sub>) koşulu ve ek olarak üst-lineerlik, yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad (C_{36})$$

koşulu sağlansın.  $\alpha \in (1, \infty)$  olmak üzere, eğer  $t \geq t_0$  için  $p(t) \leq 0$

$$(p(t)\sigma(t))' \geq 0 \quad (C_{37})$$

ve (C<sub>34</sub>) koşulu sağlanacak şekilde türevlenebilir bir  $\sigma: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa (E<sub>10</sub>) denklemi salınımlıdır.

**1.2.19. Uyarı [13]:** Eğer 1.2.18. Teoremde  $p(t) \equiv 0$  ise (C<sub>36</sub>) ve (C<sub>37</sub>) koşullarına gerek kalmaz. Bu durumda 1.2.16. Teorem ile 1.2.18. Teorem çakışır.

1990 yılında yine Grace, Lalli [19] birlikte;  $a, p, q: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli ve  $t \geq t_0 \geq 0$  için  $a(t) > 0$  olmak üzere,

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)[f(x(t))] = 0, \quad (E_{13})$$

biçimindeki ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınımlılığı problemi ile uğraşmıştır. Problemin incelenmesi esnasında, (E<sub>13</sub>) denkleminin üst-lineer olduğunu, yani (C<sub>36</sub>) koşulunun sağlandığını kabul etmişlerdir. Grace ve Lalli çalışmalarını, Wong'un daha önce 1.2.2. Teorem ile verilen kriterini, daha genel olan (E<sub>6</sub>) diferensiyel denklemine genişleten Philos [49]'un aşağıda verilen kriterinden esinlenerek ortaya koymuşlardır :

**1.2.20. Teorem : (Philos [49])**  $x \neq 0$  için  $xf(x) > 0$  ve  $f'(x) \geq 0$  (C<sub>38</sub>) ,

(C<sub>11</sub>), (C<sub>14</sub>) ve (C<sub>36</sub>) koşulları sağlansın. Ayrıca sürekli türevlenebilir bir  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu var ve  $\rho', [t_0, \infty)$  aralığı üzerinde negatif olmayan ve artan olsun. Eğer (C<sub>15</sub>) koşuluna ek olarak,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^t \rho(s) \left( \int_{t_0}^s \frac{du}{\rho(u)} \right) ds < \infty \quad (C_{39})$$

ve  $\lambda > 2$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{\lambda-1}} \int_{t_0}^t (t-s)^{\lambda-1} \rho(s) q(s) ds = \infty \quad (C_{40})$$

koşulları sağlanırsa  $(E_6)$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.21. Teorem :**  $(C_{11}), (C_{14}), (C_{36})$  ve  $(C_{38})$  koşulları sağlansın. Eğer,  $(C_{15}),$

$(C_{16})$  ve  $(C_{17})$  koşulları, bir  $\lambda > 1$  tamsayısı, sürekli bir  $\phi: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$

fonksiyonu ve herhangi bir  $c^* > 0$  sabiti için,

$$\mathfrak{S}(t) = \eta(t) / \int_{t_0}^t \eta(s) ds, \quad \phi_+(t) = \max\{\phi(t), 0\} \text{ olmak üzere,}$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_s^t (t-u)^{\lambda-2} \bullet \left[ (t-u)^2 \rho(u) q(u) - \frac{c^*}{4\mathfrak{S}(u)} [\gamma(u) \eta(u) (t-u) - \lambda]^2 \right] du \geq \phi(u) \quad (C_{41})$$

ve  $(C_{20})$  koşulları sağlanacak şekilde türevlenebilir bir  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{13})$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.22. Teorem :**  $(C_{11}), (C_{14}), (C_{36})$  ve  $(C_{38})$  koşulları sağlansın. Eğer,  $(C_{16}),$

$(C_{17})$  koşulları, bir  $\lambda > 1$  tamsayısı var ve  $\eta$  ve  $\mathfrak{S}$ , 1.2.21. Teoremdeki gibi olmak

üzere, herhangi bir  $c^* > 0$  sabiti için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_{t_0}^t (t-u)^{\lambda-2} \bullet \left[ (t-u)^2 \rho(u) q(u) - \frac{c^*}{4\mathfrak{S}(u)} [\gamma(u) \eta(u) (t-u) - \lambda]^2 \right] du = \infty \quad (C_{42})$$

koşulunu sağlayan türevlenebilir bir  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{13})$

denklemi salınımlıdır.

**1.2.23. Uyarı[19]:** (i) Grace ve Lalli'nin ortaya koydukları bu sonuçların,  $\lambda > 1$  için  $(E_2)$  Emden-Fowler denkleminde uyarlandığı zaman yeni olduğu görülür.

(ii) Eğer  $f(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ ,  $\lambda > 1$  olarak seçilirse, bu durumda,  $(C_{11}), (C_{14}), (C_{36})$  ve  $(C_{38})$  koşulları doğrudan sağlanır.

(iii) 1.2.21. Teorem,  $0 < \lambda < 1$  olmak üzere  $(E_2)$  denklemin için Kwong ve Wong [41],  $f, \int_{\pm 0} \frac{du}{f(u)} < \infty$  koşulunu sağlamak üzere,  $(E_6)$  denklemin için Philos [49] ve  $f(x) = x$  olmak üzere,  $(E_{13})$  denklemin için Yan [62] ile elde edilen sonuçların bir tamamlayıcısıdır.

1.2.21. Teorem, ayrıca, Grace [13], Grace ve Lalli [15], Kamenev [26], Yan [62] ve Yeh [63]'in  $(E_{13})$  denkleminde ilişkin çalışmalarını, ve  $a(t) = 1$   $f(x) = |x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ ,  $0 < \lambda < 1$  olacak şekilde, Grace ve Lalli [16]'nin çalışmasını tamamlar.

Daha sonra, 1992 yılında Grace ve Lalli [20], Yan [62]'in ve daha önceki bazı araştırmacıların çalışmalarını tamamlayan bir çalışma ortaya koymuşlar ve  $a, q: [0 \leq t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\Psi, f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli,  $a(t) > 0$  ve  $[t_0, \infty)$ 'un herhangi bir alt aralığı üzerinde özdeş sıfır olmamak üzere,  $(E_{10})$  denklemini tekrar ele alarak bu denklemin ve bazı özel durumları için aşağıdaki kriterleri elde etmişlerdir :

**1.2.24. Uyarı :** Dikkat edilirse, Grace [13], daha önce  $(E_{10})$  denkleminde  $\Psi(x)$  üzerine sınırlılık koşulu koymuştur. Burada ise,  $(E_{10})$  denklemindeki  $\Psi(x)$  üzerindeki sınırlılık koşulu kaldırılarak aşağıdaki sonuçlar verilmiştir :

**1.2.25. Teorem :**  $(C_{11}), (C_{38})$  koşulu ve

$$\int \frac{\Psi(u)}{f(u)} du < \infty \quad \text{ve} \quad \int \frac{\Psi(u)}{f(u)} du < \infty, \quad (C_{43})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\Psi(u)f'(u)}}{f(u)} du < \infty \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{\Psi(u)f'(u)}}{f(u)} du < \infty, \quad (C_{44})$$

$$\min \left\{ \inf_{x>0} \sqrt{\frac{f'(x)}{\Psi(x)}} \int_x^{\infty} \frac{\sqrt{\Psi(z)f'(z)}}{f(z)} dz, \inf_{x<0} \sqrt{\frac{f'(x)}{\Psi(x)}} \int_x^{-\infty} \frac{\sqrt{\Psi(z)f'(z)}}{f(z)} dz \right\} > 0 \quad (C_{45})$$

koşulları sağlansın. Ayrıca  $h, H: D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$  sürekli fonksiyonları var,

$H$ 'ın  $D$  üzerinde ikinci değişkene göre kısmi türevleri mevcut ve

$$\left. \begin{array}{l} t \geq t_0 \text{ için } H(t, t) = 0, \quad t > s \geq t_0 \text{ için } H(t, s) > 0 \\ (t, s) \in D \text{ için } -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} h(t, s) \sqrt{H(t, s)} \end{array} \right\}, \quad (C_{46})$$

olsun. Eğer,  $(C_{15})$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} ds = \infty, \quad (C_{47})$$

$$p(t) \leq 0, \quad [\rho(t)p(t)]' \geq 0, \quad \rho'(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad t \geq t_0 \text{ için } [a(t)\rho'(t)]' \leq 0 \quad (C_{48})$$

ve her  $c > 0$  için

$$\eta(t) = a(t)\rho(t) \left( \int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)\rho(s)} \right) \text{ olmak üzere,}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s)\rho(s)q(s) - c\eta(s)h^2(t, s)] ds = \infty \quad (C_{49})$$

koşullarını sağlayan bir  $\rho: [t_0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{10})$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.26. Sonuç :** 1.2.25. Teoremdeki  $(C_{49})$  koşulu yerine

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \eta(s)h^2(t, s) ds < \infty \quad (C_{50})$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s)\rho(s)q(s) ds = \infty \quad (C_{51})$$

koşulları alınır, 1.2.25. Teoremin sonucu elde edilir.

$$1.2.27. \text{ Teorem : } (C_{43}) \text{ ve } x \neq 0 \text{ için } \frac{f'(x)}{\Psi(x)} \geq K \quad (C_{32})$$

koşulları sağlansın. Ayrıca  $\rho$ ,  $h$  ve  $H$  fonksiyonları, 1.2.25. Teoremdaki gibi olsun ve  $(C_{46})$  ve  $(C_{48})$  koşulları sağlansın. Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{a(s) \rho(s)}{4K} h^2(t, s) \right] ds = \infty \quad (C_{33})$$

ise  $(E_{10})$  denklemleri salınımlıdır.

1.2.28. Sonuç :  $\rho$ ,  $h$  ve  $H$  fonksiyonları 1.2.25. Teoremdaki gibi olsun. Ayrıca  $(C_{15})$ ,  $(C_{46})$ ,  $(C_{47})$  ve

$$t \geq t_0 \text{ için } \gamma(t) = a(t) \rho'(t) - p(t) \rho(t) \geq 0 \text{ ve } \gamma'(t) \leq 0 \quad (C_{34})$$

koşulları sağlansın.  $\eta$ , 1.2.25. Teoremdaki gibi tanımlı olmak üzere, eğer her  $c > 0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s) \rho(s) q(s) - c \eta(s) \left( h(t, s) - \frac{\gamma(s) \sqrt{H(t, s)}}{a(s) \rho(s)} \right)^2 \right] ds = \infty \quad (C_{35})$$

ise her  $\lambda > 1$  için,  $(E_8)$  denklemleri salınımlıdır.

1.2.29. Sonuç :  $\rho$ ,  $h$  ve  $H$  fonksiyonları, 1.2.25. Teoremdaki gibi olsun ve  $(C_{46})$  ve  $(C_{47})$  koşulları sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s) \rho(s) q(s) - \frac{1}{4} \left( h(t, s) - \frac{\gamma(s) \sqrt{H(t, s)}}{a(s) \rho(s)} \right)^2 \right] ds = \infty \quad (C_{36})$$

ise  $\lambda = 1$  için  $(E_8)$  denklemleri salınımlıdır.

1.2.30. Sonuç :  $h$  ve  $H$  fonksiyonları 1.2.25. Teoremda tanımlandığı gibi ve  $\rho$

$$\rho(t) = \exp \left( \int_{t_0}^t \frac{p(s)}{a(s)} ds \right) \quad (C_{37})$$

ile tanımlı olsun. Ayrıca  $(C_{15})$ ,  $(C_{46})$ ,  $(C_{47})$  koşulları sağlansın.

$\eta$ , 1.2.25. Teoremdaki gibi tanımlı olmak üzere, eğer her  $c > 0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - c \eta(s) h^2(t, s)] ds = \infty \quad (C_{58})$$

ise her  $\lambda > 0$  için  $(E_8)$  denklemleri salınımlıdır.

**1.2.31. Teorem :**  $(C_{38})$ ,  $(C_{43})$  ve  $(C_{45})$  koşulları sağlansın ve  $\rho$ ,  $h$  ve  $H$  fonksiyonları 1.2.25. Teoremdaki gibi olsun. Ek olarak;  $(C_{15})$ ,  $(C_{46})$  ve  $(C_{47})$  koşulları gerçekleşsin.

$$t \geq t_0 \text{ için } \rho'(t) \geq 0 \text{ ve } (a(t)\rho'(t)) \leq 0 \quad (C_{59})$$

olsun. Ayrıca,  $[t_0, \infty)$  üzerinde tanımlı ve sürekli bir  $\Omega$  fonksiyonu var,  $\Omega_+(t) = \max\{\Omega(t), 0\}$ ,  $t \geq t_0$  ve  $\eta$ , 1.2.25. Teoremdaki gibi tanımlı olmak üzere,

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Omega_+^2(s)}{\eta(s)} ds = \infty \quad (C_{60})$$

koşulu sağlansın. Eğer her  $c > 0$  için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - c \eta(s) \left( h(t, s) - \frac{\rho'(s) \sqrt{H(t, s)}}{\rho(s)} \right)^2] ds \geq \Omega(T), T \geq t_0 \quad (C_{61})$$

ise  $(E_3)$  denklemleri salınımlıdır.

**1.2.32. Teorem :**  $(C_{15})$ ,  $(C_{36})$ ,  $(C_{38})$ ,  $(C_{43})$ ,  $(C_{44})$  ve  $(C_{45})$  koşulları  $\Psi(x) = 1$  olmak üzere sağlansın. Ayrıca  $\rho$ ,  $h$  ve  $H$  fonksiyonları, 1.2.25. Teoremdaki gibi olsun ve  $(C_{46})$ ,  $(C_{47})$  ve  $(C_{54})$  koşulları sağlansın. Eğer  $[t_0, \infty)$  üzerinde  $(C_{60})$ 'ı sağlayan sürekli bir  $\Omega$  fonksiyonu var ve her  $c > 0$  için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s) \rho(s) q(s) - c \eta(s) \left( h(t, s) - \frac{\gamma(s) \sqrt{H(t, s)}}{a(s) \rho(s)} \right)^2] ds \geq \Omega(T), T \geq t_0 \quad (C_{62})$$

ise  $(E_{13})$  denklemi salınımlıdır.

**1.2.33. Sonuç :**  $(C_{22})$  koşulu sağlansın ve  $h, H$  ve  $\Omega$  1.2.31. Teoremdeki gibi olsun. Ayrıca her  $c > 0$  için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t [H(t, s)q(s) - csh^2(t, s)] ds \geq \Omega(T), T \geq t_0 \quad (C_{63})$$

koşulu sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Omega_+^2(s)}{s} ds = \infty \quad (C_{64})$$

ise her  $\lambda > 0$  için  $(E_2)$  Emden-Fowler denklemi salınımlıdır.

**1.2.34. Sonuç :**  $(C_{22})$  koşulu sağlansın ve  $[t_0, \infty)$  üzerinde tanımlı ve sürekli bir  $\Omega$  fonksiyonu var ve  $\alpha \in (1, \infty)$  olmak üzere, her  $c > 0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_T^t [(t-s)^\alpha q(s) - c\alpha^2 s] ds \geq \Omega(T), T \geq t_0 \quad (C_{65})$$

olsun. Eğer  $(C_{64})$  koşulu sağlanırsa her  $\lambda > 0$  için  $(E_2)$  Emden-Fowler denklemi salınımlıdır.

**1.2.35. Sonuç :**  $(C_{22})$  koşulu sağlansın.  $\alpha \in (1, \infty)$  olsun. Eğer  $[t_0, \infty)$  üzerinde pozitif ve türevlenebilir bir  $\phi$  fonksiyonu var ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\Omega_+^2(s)}{s\phi^2(s)} ds = \infty, \quad (C_{66})$$

her  $c > 0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha} \int_T^t \left[ (t-s)^\alpha \phi(s)q(s) - \frac{cs(t-s)^{\alpha-2}}{\phi(s)} (\phi'(s)(t-s) - \alpha\phi(s))^2 \right] ds \geq \Omega(s), T \geq t_0 \quad (C_{67})$$

ise  $(E_2)$  Emden-Fowler denklemi salınımlıdır.

1994 yılında Horng Jaan Li [35],  $q(t) [t_0, \infty)$  üzerinde sürekli bir fonksiyon ve  $\varphi(s)$ ,  $\varphi(s) = |s|^{p-2} s$ ,  $p > 1$  sabit bir reel sayı ile tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$[\varphi(u'(t))] + c(t)\varphi(u(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (E_{14})$$

ikinci basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemi ile ilgili bazı salınım kriterleri vermiştir. Eğer  $p = 2$  ise bu sonuçlar Wintner, Hartman, Kamenev ve Philos'un daha önceki sonuçlarını geliştirir.  $p = 2$  iken  $(E_{14})$  denklemi daha önceden incelediğimiz ikinci basamaktan lineer

$$u''(t) + c(t)u(t) = 0 \quad (E_1)$$

denkleme indirgenir.

Eğer,  $\varphi(u') \in C^1[t_0, \infty)$  ve her  $t \geq t_0$  için  $(E_{14})$  denklemi sağlanacak fonksiyonu varsa, bu fonksiyona  $(E_{14})$  denkleminin  $[t_0, \infty)$ 'da bir çözümü denir. Pino [51],  $(E_{14})$  denklemi için başlangıç-değer probleminin çözümünün varlık, teklik ve  $[t_0, \infty)$ 'a genişlemesini kanıtlamıştır.

**1.2.36. Lemma [21]:** Eğer  $X$  ve  $Y$  negatif olmayan ise

$$X^\gamma + (\gamma - 1)Y^\gamma - \gamma XY^{\gamma-1} \geq 0, \quad \gamma > 1$$

dir. Eşitliğin sağlanması ile  $X = Y$  olması eşdeğerdir.

Li, yukarıdaki lemmayı kullanarak Kamenev [26]'in kriterinin  $(E_{14})$  denklemine bir genişlemesini vermiş, ayrıca Philos [48]'un sonuçlarını geliştirmiştir.

**1.2.37. Teorem :**  $D_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$  olmak üzere

$H \in C(D; \mathcal{R})$  fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlasın :

(a)  $t \geq t_0$  için  $H(t,t) = 0$ ,  $t > s \geq t_0$  için  $H(t,s) > 0$ ,

(b)  $H$ ,  $D_0$ 'da sürekli, ikinci değişkene göre kısmi türevi mevcut ve monoton artmayan olsun. Ayrıca  $(1/p) + (1/q) = 1$  olmak üzere her  $(t,s) \in D_0$  için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) = h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} \text{ ve her } t \geq t_0 \text{ için } \int_{t_0}^t h^p(t,s)ds < \infty$$

olacak şekilde, sürekli bir  $h: D_0 \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu tanımlı olsun.

Eğer,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t,s)c(s) - \left( \frac{1}{p} h(t,s) \right)^p \right\} ds = \infty \quad (C_{68})$$

ise  $(E_{14})$  denklemlı salınımlıdır.

**1.2.38. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 1.2.37. Teoremdaki gibi olsun. Ayrıca

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right\} \leq \infty \quad (C_{69})$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t h^p(t,s)ds < \infty \quad (C_{70})$$

koşulları sağlansın. Eğer,

$$A_+(s) = \max\{A(s), 0\}, s \geq t_0 \text{ olmak üzere}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} A_+(s)ds = \infty \quad (C_{71})$$

ve her  $T \geq t_0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \left\{ H(t,s)c(s) - \left( \frac{1}{p} h(t,s) \right)^p \right\} ds \geq A(T) \quad (C_{72})$$

koşullarını sağlayan bir  $A \in C[t_0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{14})$  denklemlı salınımlıdır.

**1.2.39. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 1.2.37. Teoremdeki gibi olsun. Ayrıca,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) c(s) ds < \infty \quad (C_{73})$$

ve  $(C_{69})$  koşulları sağlansın. Eğer  $(C_{71})$  ve her  $T \geq t_0$  için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, s) c(s) - \left( \frac{1}{p} h(t, s) \right)^p \right\} ds \geq A(T) \quad (C_{74})$$

koşullarını sağlayan bir  $A \in C[t_0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{14})$  denklemini salınımlıdır.

**1.2.40. Sonuç :**  $\lambda > p - 1$  bir sabit olsun. Eğer  $(C_{71})$  ve her  $T \geq t_0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\lambda} \int_{t_0}^t (t - s)^\lambda c(s) ds \geq A(T) \quad (C_{75})$$

koşullarını sağlayan bir  $A \in C[t_0, \infty)$  fonksiyonu varsa  $(E_{14})$  denklemini salınımlıdır.

**1.2.41. Uyarı [35]:**  $\lambda > p - 1$  bir sabit olsun ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\lambda} \int_{t_0}^t (t - s)^\lambda c(s) ds = \infty$$

koşulu sağlansın. Bu durumda, her  $T \geq t_0$  için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-\lambda} \int_T^t (t - s)^\lambda c(s) ds = \infty$$

olduğu açıktır. Böylece  $[t_0, \infty)$  üzerinde  $A(T) = 1$  seçeriz. Bu durumda,  $(C_{71})$  ve  $(C_{72})$  koşulları sağlanır. Bundan dolayı Kamenev kriteri [26],  $p=2$  için 1.2.40. Sonuç içinde yer alır. Bundan başka dikkat edilirse 1.2.40. Sonuç, Yan [62]'in salınımlılık sonucunu geliştirir.

## 2. İKİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BELLİ SINIFTAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

İki kesimden oluşan bu bölümde, birinci bölümde yapılan literatür taramasından hareketle, tamamen orjinal sonuçlar olarak elde edilen çalışmalar sunulacaktır. Bu araştırmalar, literatürdeki bazı bilinen salınımlılık kriterlerini genelleştirir ve geliştirir.

Birinci kesimde, Grace [13,14], Lalli [20] ve Li [34]'nin makalelerinden esinlenerek

$$[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0$$

biçimindeki lineer diferensiyel denkleminin salınımlılığına ilişkin bazı kriterler verilecektir.

İkinci kesimde, Li [35]'nin sonuçlarından hareket ederek,  $\varphi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu  $\varphi(s) = |s|^{p-2}s$ ,  $p > 1$  ile tanımlı olmak üzere,

$$[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))] + c(t)\varphi(x(t)) = 0$$

denklemini için bazı salınımlılık kriterleri inşa edilecektir.

### 2.1. $[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0$ Denklemine İlişkin

#### Sonuçlar

$a, p, q: [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $k, \Psi, f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$[a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))] + p(t)k(x'(t)) + q(t)f(x(t)) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (E_{15})$$

denklemini göz önüne alalım.

$t_0 \geq 0$  olmak üzere,  $[t_0, \infty)$  aralığında  $(E_{15})$  denkleminin çözümlerinin varlığını kabul edelim. Ayrıca bu kesim boyunca

(a)  $a(t) > 0$ ,  $q(t) \geq 0$  ve  $p$  türevlenebilir,

(b) her  $x$  için  $0 < c \leq \Psi(x) \leq c_1$ ,

(c)  $x \neq 0$  için  $\frac{f(x)}{x} \geq \gamma > 0$

(d)  $\gamma_1 > 0$  ve her  $y \neq 0$  için  $k^2(y) \leq \gamma_1 y k(y)$

temel koşullarının sağlandığını varsayalım.

Kesim 1.1. den görüleceği üzere, 1995 yılında Li [34],  $a(t) \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  ve  $q(t) \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$  olmak üzere,

$$(a(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0 \quad (E_5)$$

lineer denklemini incelemiş ve

$$w(t) = a(t)\Phi(t) \left[ \frac{x'(t)}{x(t)} + R(t) \right], \Phi(t) = e^{-2 \int R(\zeta) d\zeta} \quad (E_{16})$$

genelleştirilmiş Riccati dönüşümünü kullanarak bazı salınımlılık teoremlerini elde etmiştir.

Burada amacımız  $(E_{15})$  denkleminin salınımlılığına ilişkin kriterleri ortaya koymaktır.  $\Phi \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}^+)$  ve  $(aR) \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}]$  olmak üzere  $w(t)$ 'yi

$$w(t) = \Phi(t) \left[ \frac{a(t)\Psi(x(t))k(x'(t))}{x(t)} + a(t)R(t) + \frac{\gamma_1}{2} p(t) \right] \quad (E_{17})$$

şeklinde alalım.  $\frac{\gamma_1}{2}p(t)$  terimi önemlidir. Bu terim olmaksızın metot çalışır ancak,

bu durumda  $p$  üzerinde bir işaret koşuluna gerek vardır. Eğer  $R(t) = -\frac{\gamma_1 p(t)}{2 a(t)}$  ise,

$p(t)$  üzerindeki türevlenebilirlik koşulu kaldırılabilir. Amacımız,  $Li$ 'nin sonuçlarını

da genelleştirmek olduğundan  $(E_{17})$ 'de  $a(t)R(t) + \frac{\gamma_1}{2}p(t)$  terimi korunmuştur.

$f(x) = x$  olduğunda  $q(t) \geq 0$  koşuluna gerek kalmaz. Öte yandan,

$$w(t) = \Phi(t) \left[ \frac{a(t)\Psi(x(t))x'(t)}{f(x(t))} \right]$$

dönüşümünü kullanarak [54]'de  $q(t)$  üzerine herhangi bir işaret koşulu koymadan salınımlılık sonuçlarını vermek mümkündür. Fakat bu durumda  $f'(x) \geq k > 0$  koşuluna ihtiyaç vardır.

**2.1.1. Teorem :**  $D_0 = \{(t, s) : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t, s) : t \geq s \geq t_0\}$  olmak üzere

$H \in C(D; \mathfrak{R})$  fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlasın :

(i)  $t \geq t_0$  için  $H(t, t) = 0$ ,  $t > s \geq t_0$  için  $H(t, s) > 0$ ,

(ii)  $H$ ,  $D_0$ 'da sürekli, ikinci değişkene göre kısmi türevi mevcut ve monoton artmayan olsun. Ayrıca her  $(t, s) \in D_0$  için

$$-\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = h(t, s)\sqrt{H(t, s)} \quad (C_{76})$$

olacak şekilde sürekli bir  $h: D_0 \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu tanımlı olsun.

Eğer,  $\Phi \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}^+)$  ve  $(aR) \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  fonksiyonları var ve

$$\varphi(s) = \gamma q(s) - \frac{\gamma_1 p^2(s)}{4 ca(s)} + \frac{1}{c_1 \gamma_1} a(s) R^2(s) - \frac{\gamma_1}{2} p'(s) - (a(s)R(s))'$$

olmak üzere,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{\gamma_1 c_1}{4} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds = \infty \quad (C_{77})$$

ise (E<sub>15</sub>) denklemini salınımlıdır.

**Kanıt:**  $x(t)$ , (E<sub>15</sub>) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın  $T_0 \geq t_0$  olmak üzere, her  $t \geq T_0$  için  $x(t) > 0$  kabul edelim.  $x(t) < 0$  iken her  $t \geq T_0$  için kanıt benzerdir.

(E<sub>17</sub>)'nin türevi alınır, (E<sub>15</sub>), (c) ve (d) kullanılırsa,

$$w'(t) \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} w(t) + \frac{\gamma_1 p^2(t)}{4 a(t) \psi(x(t))} \frac{\Phi(t)}{\psi(x(t))} - \gamma q(t) \Phi(t) - \frac{w^2(t)}{\gamma_1 a(t) \psi(x(t)) \Phi(t)} + \frac{2R(t)w(t)}{\gamma_1 \psi(x(t))} - \frac{a(t)R^2(t)\Phi(t)}{\gamma_1 \psi(x(t))} + \Phi(t) \left[ \frac{\gamma_1}{2} p'(t) + (a(t)R(t))' \right], \quad t \geq T_0$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte (b) kullanılarak,

$$w'(t) \leq \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} w(t) + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(t) w(t) - \frac{1}{c_1 \gamma_1} \frac{w^2(t)}{a(t) \Phi(t)} - \varphi(t) \Phi(t)$$

bulunur. Böylece, (C<sub>76</sub>) ve (ii) den,  $t \geq T \geq T_0$  için,

$$\int_T^t H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) ds \leq H(t, T) w(T) - \int_T^t \left[ \frac{H(t, s)}{\sqrt{c_1 a(s) \Phi(s) \gamma_1}} w(s) + \sqrt{\frac{c_1 a(s) \Phi(s) \gamma_1}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\} \right]^2 ds$$

$$+ \int_T^t \frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 ds$$

bulunur. Bu durumda, her  $t \geq T \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned} & \int_T^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \\ & \leq H(t, T) w(T) - \int_T^t \left[ \sqrt{\frac{H(t, s)}{c_1 a(s) \Phi(s) \gamma_1}} w(s) + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\} \right]^2 ds \quad (C_{78}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da her  $t \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned} & \int_{T_0}^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \\ & \leq H(t, T_0) w(T_0) \leq H(t, T_0) |w(T_0)| \leq H(t, t_0) |w(T_0)| \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Böylece, her  $t \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \\ & = \int_{t_0}^{T_0} \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{T_0}^t \left[ H(t,s)\varphi(s)\Phi(s) - \frac{c_1\gamma_1 a(s)\Phi(s)}{4} \left\{ h(t,s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1\gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t,s)} \right\}^2 \right] ds \\
& \leq H(t,t_0) \int_{t_0}^{T_0} |\varphi(s)|\Phi(s) ds + H(t,t_0) |w(T_0)| \\
& = H(t,t_0) \left\{ \int_{t_0}^{T_0} |\varphi(s)|\Phi(s) ds + |w(T_0)| \right\}
\end{aligned}$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[ H(t,s)\varphi(s)\Phi(s) - \frac{c_1\gamma_1 a(s)\Phi(s)}{4} \left\{ h(t,s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1\gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t,s)} \right\}^2 \right] ds \\
\leq \int_{t_0}^{T_0} |\varphi(s)|\Phi(s) ds + |w(T_0)|
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da  $(C_{77})$  koşulu ile çelişir. Böylece kanıt biter.

**2.1.2. Uyarı :** (i) 2.1.1. Teoremde  $p(t) \equiv 0$ ,  $R(t) \equiv 0$ ,  $a(t) \equiv 1$  ve  $\Phi(t) \equiv 1$  olsun.

Eğer  $H(t,s) = (t-s)^\lambda$ ,  $\lambda > 1$  olarak seçilirse Kamenev kriteri sağlanır.

( Kesim 1.1. Sayfa 7 )

(ii) 2.1.1. Teoremde  $p(t) \equiv 0$ ,  $R(t) \equiv 0$ ,  $a(t) \equiv 1$  ve  $\Phi(t) \equiv 1$  ise Philos kriteri sağlanır. ( Kesim 1.1. Sayfa 7 )

(iii) 2.1.1. Teoremde  $p(t) \equiv 0$ ,  $R(t) \equiv 0$  ve  $\Phi(t) \equiv 1$  olsun. Eğer  $L(t) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{a(s)}$ ,

$t \geq t_0$  olmak üzere  $H(t,s) = [L(t) - L(s)]^\lambda$ ,  $\lambda > 1$  ise 1.1.2. Sonuç,

$Q(t) = \int_t^\infty \frac{ds}{a(s)} < \infty$ ,  $t \geq t_0$  olmak üzere  $H(t,s) = \left( \log \frac{Q(s)}{Q(t)} \right)^\lambda$ ,  $\lambda > 1$  ise 1.1.3.

Sonuç elde edilir.

2.1.1. Teoremdede  $(C_{77})$  koşulu,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) ds = \infty \quad (C_{79})$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 ds < \infty \quad (C_{80})$$

koşulları ile yer değişebilir. Bu ise aşağıdaki sonucu verir :

**2.1.3. Sonuç :**  $(C_{77})$  koşulu hariç, 2.1.1. Teoremin koşulları gerçekleşsin. Eğer,  $(C_{79})$  ve  $(C_{80})$  koşulları sağlanırsa  $(E_{15})$  denkleminin salınımlıdır.

**2.1.4. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.1.1. Teoremdede gibi olsun ve

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} \quad (C_{81})$$

koşulu sağlansın. Ayrıca,  $\Phi \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}^+)$ ,  $(aR) \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  ve  $A \in C([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  fonksiyonları var ve her  $t \geq t_0$  için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 ds < \infty \quad (C_{82})$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{A_+^2(s)}{a(s) \Phi(s)} ds = \infty \quad (C_{83})$$

koşulları sağlansın. Eğer  $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$  ve

$$\varphi(s) = \gamma q(s) - \frac{\gamma_1 p^2(s)}{4 ca(s)} + \frac{1}{c_1 \gamma_1} a(s) R^2(s) - \frac{\gamma_1}{2} p'(s) - (a(s) R(s))'$$

olmak üzere, her  $T \geq t_0$  için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1}{4} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \geq A(T) \quad (C_{84})$$

ise  $(E_{15})$  denklemini salınımlıdır.

**Kanıt:** 2.1.1. Teoremin kanıtındaki yol izlenirse, her  $t \geq T \geq t_0$  için,  $(C_{78})$ 'in sağlandığı görürülür. Böylece,  $t \geq T \geq t_0$  için,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1}{4} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \\ & \leq w(T) - \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \sqrt{\frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}} w(s) + \sqrt{\frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \quad (C_{85}) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, her  $T \geq T_0$  için,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1}{4} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds$$

$$\leq w(T) - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \sqrt{\frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}} w(s) + \sqrt{\frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\} \right]^2 ds \quad (C_{86})$$

bulunur. Böylece, (C<sub>84</sub>) ile her  $T \geq T_0$  için,

$$w(T) \geq A(T) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \sqrt{\frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}} w(s) + \sqrt{\frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\} \right]^2 ds \quad (C_{87})$$

dır. Bu ise,

$$A(T) \leq w(T) \quad (C_{88})$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \sqrt{\frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}} w(s) + \sqrt{\frac{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)}{4}} \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\} \right]^2 ds < \infty \quad (C_{89})$$

olduğunu gösterir. (C<sub>88</sub>)'den

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{w^2(s)}{a(s) \Phi(s)} ds \geq \int_{T_0}^{\infty} \frac{A^2(s)}{a(s) \Phi(s)} ds$$

elde edilir ve böylece, (C<sub>83</sub>) ile

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{w^2(s)}{a(s)\Phi(s)} ds = \infty \quad (C_{90})$$

bulunur. Kanıtı tamamlamak için, (C<sub>90</sub>)'ın mümkün olmadığı göstermek yeterlidir.

Bunun için, u ve v fonksiyonlarını sırasıyla, her  $t \geq T_0$  için,

$$u(t) = \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s)\Phi(s)} w^2(s) ds$$

ve

$$v(t) = \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \left\{ h(t, s) \sqrt{H(t, s)} - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) H(t, s) \right\} w(s) ds$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda, (C<sub>89</sub>)'den,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [u(t) + v(t)] < \infty \quad (C_{91})$$

dur. Öte yandan, (C<sub>81</sub>)'den

$$\inf_{s \geq t_0} (\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)}) > M_1 \quad (C_{92})$$

olacak şekilde sağlayan pozitif bir  $M_1$  sabiti vardır. Ayrıca,  $T_1 > T_0$  yeterince

büyük ise bu durumda, her  $t \geq T_1$  için, (C<sub>90</sub>)'dan,

$$\int_{T_0}^t \frac{w^2(s)}{a(s)\Phi(s)} ds \geq \frac{c_1 \gamma_1 M_2}{M_1}$$

sağlanacak şekilde bir  $M_2 > 0$  sabiti vardır. Böylece, her  $T \geq T_1$  için,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \frac{H(t, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)} w^2(s) ds \\
 &= \frac{1}{c_1 \gamma_1 H(t, T_0)} \int_{T_0}^t H(t, s) d \left( \int_{T_0}^s \frac{w^2(\xi)}{a(\xi) \Phi(\xi)} d\xi \right) \\
 &\geq \frac{1}{c_1 \gamma_1 H(t, T_0)} \int_{T_1}^t \left( -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) \left\{ \int_{T_0}^s \frac{w^2(\xi)}{a(\xi) \Phi(\xi)} d\xi \right\} ds \\
 &\geq \frac{M_2}{M_1} \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_1}^t \left( -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right) ds = \frac{M_2}{M_1} \frac{H(t, T_1)}{H(t, T_0)}
 \end{aligned}$$

olur.  $(C_{92})$ 'den,

$$\text{her } t \geq T_2 \text{ için } \frac{H(t, T_1)}{H(t, T_0)} \geq M_1$$

olacak şekilde bir  $T_2 \geq T_1$  vardır. Böylece,

$$t \geq T_2 \text{ için } u(t) \geq M_2$$

elde edilir.  $M_2$  keyfi olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \infty \quad (C_{93})$$

dur. Şimdi,  $(t_0, \infty)$ 'da  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  olacak şekilde keyfi bir  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisini gözönüne

alalım.  $(C_{91})$ 'den,

$$n = 1, 2, 3, \dots \text{ için } u(t_n) + v(t_n) \leq M \quad (C_{94})$$

sağlanacak biçimde bir  $M$  sayısı vardır.  $(C_{93})$ 'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = \infty \quad (C_{95})$$

elde edilir. Bu ve  $(C_{94})$ 'den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(t_n) = -\infty \quad (C_{96})$$

olur.  $(C_{94})$  ve  $(C_{95})$ 'den, yeterince büyük  $n$  için,

$$1 + \frac{v(t_n)}{u(t_n)} \leq \frac{M}{u(t_n)} < \frac{1}{2} \quad \text{veya} \quad \frac{v(t_n)}{u(t_n)} < -\frac{1}{2}$$

bulunur. Bu ve  $(C_{96})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v^2(t_n)}{u(t_n)} = \infty \quad (C_{97})$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan, Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, herhangi pozitif  $n$  tamsayısı için,

$$v^2(t_n) = \left\{ \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) \sqrt{H(t_n, s)} - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) H(t_n, s) \right] w(s) ds \right\}^2$$

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

$$\begin{aligned}
&\leq \left\{ \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \frac{H(t_n, s)}{c_1 \gamma_1 a(s) \Phi(s)} w^2(s) ds \right\} \\
&\left\{ \frac{c_1 \gamma_1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t_n, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t_n, s)} \right\}^2 ds \right\} \\
&= \frac{u(t_n) c_1 \gamma_1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t_n, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t_n, s)} \right\}^2 ds \quad (C_{98})
\end{aligned}$$

bulunur.  $(C_{92})$ 'den, yeterince büyük  $n$  için,

$$\frac{H(t_n, T_0)}{H(t_n, t_0)} \geq M_1 \quad (C_{99})$$

yazılabilir. Böylece,  $(C_{98})$  ve  $(C_{99})$ ' u birleştirerek, her büyük  $n$  için,

$$\begin{aligned}
\frac{v^2(t_n)}{u(t_n)} &\leq \frac{c_1 \gamma_1}{M_1} \frac{1}{H(t_n, t_0)} \int_{t_0}^{t_n} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t_n, s) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t_n, s)} \right\}^2 ds
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,  $(C_{97})$ 'ye göre

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t_n, t_0)} \int_{t_0}^{t_n} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t_n, s) - \right. \\
\left. - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t_n, s)} \right\}^2 ds = \infty \quad (C_{100})
\end{aligned}$$

olup,  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  keyfi olduğundan  $(C_{100})$ ,  $(C_{82})$  ile çelişir. Bu da kanıtı tamamlar.

$$2.1.5. \text{Örnek : } \left( \frac{1}{t^2} \Psi(x)k(x') \right)' + \frac{1}{t^3}k(x') + \frac{1}{t^2}f(x) = 0 \quad t \geq t_0 > 0 \quad (E_{18})$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım.

$$\Phi(t) \equiv 1, R(t) \equiv 0 \text{ ve } H(t,s) = (t-s)^2, \quad t \geq s \geq t_0 \text{ olsun.}$$

Bu durumda,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{t_0}^t \frac{4}{s^2} ds = 0$$

bulunur.  $c = \frac{1}{6}$  seçilirse,  $\varphi(s) = \frac{\gamma}{s^2}$  olmak üzere,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \left\{ (t-s)^2 \varphi(s) - c_1 \frac{\gamma_1}{s^2} \right\} ds = \frac{\gamma}{T}, \quad T \geq t_0$$

olur.  $A(T) = \frac{\gamma}{T}$  alınırsa,  $\int_{t_0}^{\infty} \frac{A^2_+(s)}{a(s)} ds = \infty$  olduğu açıktır.

Sonuç olarak, eğer  $\Psi$ ,  $f$  ve  $k$  sırasıyla, ( b ), ( c ) ve ( d ) sağlanacak şekilde alınırsa  $(E_{18})$  denklemini salınımlıdır. Özel olarak,

$$\left[ \frac{1}{t^2} \left( \frac{1}{6} + e^{-|x(t)|} \right) \left( \frac{x'(t)}{1+x'^2(t)} \right) \right]' + \frac{1}{t^3} \frac{x'(t)}{1+x'^2(t)} + \frac{1}{t^2} (x(t) + x^3(t)) = 0, \quad t > 0$$

denklemini için 2.1.4. Teoremin bütün koşulları sağlanır. Böylece, bu denklem salınımlıdır.

**2.1.6. Uyarı :** 2.1.4. Teoremde, eğer  $p(t) \equiv 0$ ,  $R(t) \equiv 0$ ,  $\Phi(t) \equiv 1$ ,  $a(t) \equiv 1$  ve  $t \geq s \geq t_0$ ,  $\lambda > 1$  için  $H(t, s) = (t-s)^\lambda$  seçilirse,  $(E_1)$  denklemini için Yan'ın sonucu geliştirilir. ( Kesim 1.1. Sayfa 7 ).

**2.1.7. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.1.1. Teoremdeki gibi olsun ve  $(C_{81})$  koşulu sağlansın. Ayrıca,  $(C_{83})$  koşulu ve aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde  $\Phi \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}^+)$ ,

$(aR) \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  ve  $A \in C([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  fonksiyonları var olsun.

Eğer her  $t \geq t_0$  için,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 ds < \infty \quad (C_{101})$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{c_1 \gamma_1}{4} a(s) \Phi(s) \left\{ h(t, s) \sqrt{H(t, s)} - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right\}^2 \right] ds \geq A(T) \quad (C_{102})$$

ise  $(E_{15})$  denklemini salınımlıdır.

**Kanıt:** 2.1.4. Teoremin kanıtındaki yol izlenirse,  $(C_{85})$  bulunur.  $t \rightarrow \infty$  için  $(C_{85})$ 'in limit sup'u alınır, limsup ve liminf yer değiştirmek üzere  $(C_{86})$  elde edilir. Bu durumda,  $(C_{87})$ 'den  $(C_{93})$ 'e olan koşullar,  $(C_{87})$ ,  $(C_{89})$  ve  $(C_{91})$ 'de limsup yerine liminf gelmek üzere sağlanır. Şimdi  $(C_{94})$ 'daki  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi keyfi olmadığından,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{u(t_n) + v(t_n)\} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \{u(t) + v(t)\} \text{ dir.}$$

Kanıtın geri kalan kısmı 2.1.4. Teoremin kanıtına benzerdir.

**2.1.8. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.1.1. Teoremdeki gibi olsun ve  $(C_{81})$  koşulu sağlansın.

Eğer,  $(C_{83})$ ,  $(C_{84})$  ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) ds < \infty \quad (C_{103})$$

koşulları sağlanacak şekilde  $\Phi \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R}^+)$ ,  $(aR) \in C^1([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  ve  $A \in C([t_0, \infty), \mathfrak{R})$  fonksiyonları varsa  $(E_{15})$  denklemini salınımlıdır.

**Kanıt :**  $(C_{84})$ 'den,

$$\begin{aligned} A(t_0) &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \varphi(s) \Phi(s) ds - \\ &- \frac{c_1 \gamma_1}{4} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \Phi(s) \left[ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right]^2 ds \end{aligned}$$

ve böylece,  $(C_{103})$  ile

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t a(s) \Phi(s) \left[ h(t, s) - \left( \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} + \frac{2}{c_1 \gamma_1} R(s) \right) \sqrt{H(t, s)} \right]^2 ds < \infty$$

olur. Kanıtın kalan bölümü, 2.1.4. Teoremin kanıtı ile yol olarak aynıdır.

**2.1.9. Uyarı :** Eğer  $\Phi(t) = e^{-2 \int_{t_0}^t R(\xi) d\xi}$  olarak alınırsa  $(E_s)$  denklemi için; 2.1.1., 2.1.7. ve 2.1.8. Teorem, sırasıyla 1.1.1., 1.1.7. ve 1.1.10. Teoreme indirgenir. Ayrıca 1.1.5. ve 1.1.8. Sonuç elde edilir. Eğer  $f'(x) \geq k > 0$  ise [54]'teki Teorem 4'e benzer bir teorem bulunabilir.

## 2.2. $[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))]'+c(t)\varphi(x(t))=0$ Denklemine İlişkin Sonuçlar

Bu kesimde,

$$[r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))]'+c(t)\varphi(x(t))=0, \quad (E_{19})$$

denklemi incelenecektir. Burada  $r \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$ ,  $c \in C([t_0, \infty); \mathfrak{R})$ ,  $\Phi \in C(\mathfrak{R}; \mathfrak{R})$  olup,  $\varphi$  de,  $p > 1$  olmak üzere  $\varphi(s) = |s|^{p-2}s$  şeklinde bir fonksiyondur.

Amacımız,  $(E_{19})$  denklemi için bazı salınımlılık kriterleri oluşturmaktır. Elde edilecek sonuçlar, Li[35]'nin kriterlerini genişletir ve geliştirir.  $r\Phi(x)\varphi(x')$  sürekli türevlenebilir ve her  $t \geq T_x$  için  $(E_{19})$  denklemi sağlanacak şekilde bir  $x: [T_x, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $T_x \geq t_0$  fonksiyonu varsa, bu fonksiyona  $(E_{19})$  denkleminin  $[T_x, \infty)$ ,  $T_x \geq t_0$  da bir çözümü denir.  $t_0 \geq 0$  olmak üzere,  $[t_0, \infty)$  aralığında  $(E_{19})$  denkleminin çözümlerinin varlığını kabul edelim. Ayrıca bu kesim boyunca,

(a)  $r(t) > 0$ ,

(b)  $\gamma$  bir reel sayı ve her  $x$  için  $0 < \Phi(x) \leq \gamma$

temel koşullarının sağlandığını varsayalım.

Eğer  $\Phi(t) \equiv 1$ ,  $r(t) \equiv 1$  ve  $p = 2$  ise  $(E_{19})$  denklemi  $(E_1)$ 'e indirgenir.

**2.2.1. Teorem :**  $D_0 = \{(t,s) : t > s \geq t_0\}$  ve  $D = \{(t,s) : t \geq s \geq t_0\}$  olsun.

$H \in C(D, \mathfrak{R})$  fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlasın :

(i)  $t \geq t_0$  için  $H(t,t) = 0$ ,  $t > s \geq t_0$  için  $H(t,s) > 0$ ;

(ii)  $H$ ,  $D_0$  'da sürekli, ikinci değişkene göre kısmi türevi mevcut ve monoton artmayan olsun.

Ayrıca,  $(1/p) + (1/q) = 1$  olmak üzere, her  $(t,s) \in D_0$  için,

$$-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} = h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} \quad (C_{104})$$

olacak şekilde sürekli bir  $h : D_0 \rightarrow \mathfrak{R}$  fonksiyonu tanımlı olsun. Eğer her  $t \geq t_0$  için,

$$h(t,s)\rho(s) \geq [H(t,s)]^{1/p} \rho'(s) \quad (C_{105})$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t,s)\rho(s)c(s) - \gamma \rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds = \infty \quad (C_{106})$$

koşullarını sağlayan bir  $\rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  fonksiyonu varsa  $(E_{19})$  denklemini salınımlıdır.

**Kanıt:**  $x(t)$ ,  $(E_{19})$  denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan, bir  $T_0 \geq t_0$  için,  $[T_0, \infty]$  üzerinde  $x(t) > 0$  kabul edelim.  $x(t) < 0$  iken, her  $t \geq T_0$  için, kanıt benzerdir.  $\rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  olmak üzere,

$$w(t) = \rho(t) \left[ \frac{r(t)\Phi(x(t))\varphi(x'(t))}{\varphi(x(t))} \right], \quad t \geq t_0 \quad (C_{107})$$

dönüşümü tanımlansın.  $(C_{107})$ 'dan  $w'(t)$  bulunur,  $(E_{19})$ , (a) ve (b) kullanılırsa ,

her  $t \geq T_0$  için,

$$w'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} w(t) - \rho(t)c(t) - (p-1)[\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(t)|^q$$

bulunur. Böylece, her  $t \geq T \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned} \int_T^t H(t,s)\rho(s)c(s)ds &\leq H(t,T)w(T) - \int_T^t \left( -\frac{\partial H}{\partial s}(t,s) \right) w(s)ds + \int_T^t H(t,s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} w(s)ds - \\ &\quad - (p-1) \int_T^t [\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t,s)ds \\ &= H(t,T)w(T) - \int_T^t \left\{ \left( h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \right) w(s) + \right. \\ &\quad \left. + (p-1)[\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t,s) \right\} ds \\ &= H(t,T)w(T) - \int_T^t \left[ \left( h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \right) w(s) + \right. \\ &\quad \left. + (p-1)[\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t,s) + \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds + \\ &\quad + \int_T^t \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p ds \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_T^t \left\{ H(t,s)\rho(s)c(s) - \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \quad (C_{108})$$

$$\leq H(t,T)w(T) - \int_T^t \left[ \left( h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t,s) \right) w(s) + \right. \\ \left. + (p-1)[\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t,s) + \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds.$$

olur.  $q > 1$  olduğundan, 1.2.36. Lemmadan, her  $t > s \geq T_0$  için,

$$\left[ h(t,s)[H(t,s)]^{1/q} - H(t,s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right] w(s) + (p-1)[\gamma\rho(s)r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t,s) + \\ + \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \geq 0$$

yazılabilir. Bu da, her  $t \geq T_0$  için,

$$\int_{T_0}^t \left\{ H(t,s)\rho(s)c(s) - \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \\ \leq H(t,T_0)w(T_0) \leq H(t,T_0)|w(T_0)| \leq H(t,t_0)|w(T_0)|$$

olmasını gerektirir. Böylece,

$$\int_{t_0}^t \left\{ H(t,s)\rho(s)c(s) - \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \\ = \int_{t_0}^{T_0} \left\{ H(t,s)\rho(s)c(s) - \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \left\{ H(t,s) \rho(s) c(s) - \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \\
& \leq H(t, t_0) \int_{t_0}^{T_0} |c(s)| \rho(s) ds + H(t, t_0) |w(T_0)| = H(t, t_0) \left\{ \int_{t_0}^{T_0} |c(s)| \rho(s) ds + |w(T_0)| \right\}
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t,s) \rho(s) c(s) - \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t,s) - [H(t,s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \\
\leq \left\{ \int_{t_0}^{T_0} |c(s)| \rho(s) ds + |w(T_0)| \right\}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise  $(C_{106})$  ile çelişir. Böylece kanıt biter.

**2.2.2. Uyarı :** Eğer  $p$  bir çift sayı ise,  $(C_{105})$  koşuluna gerek yoktur. Çünkü, bu durumda 1.2.36. Lemmanın sağlandığı açıktır.

**2.2.3. Örnek :**  $\gamma > \frac{1}{4}$  için  $(E_4)$  Euler diferensiyel denklemini düşünelim.  $\lambda > 1$  ve

$t \geq s \geq 1$  için  $H(t,s) = (t-s)^\lambda$  ve  $\rho(s) = s$  olsun. [21]'den,

$(t-s)^\lambda \geq t^\lambda - \lambda s t^{\lambda-1}$ ,  $t \geq s \geq 1$  eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliği kullanarak,

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\lambda} \int_1^t \left\{ (t-s)^\lambda \frac{\gamma}{s} - s \left[ \frac{1}{2} \left( \lambda (t-s)^{\lambda/2-1} - \frac{1}{s} (t-s)^{\lambda/2} \right) \right]^2 \right\} ds \\
\geq \left( \gamma - \frac{1}{4} \right) \limsup_{t \rightarrow \infty} \log t + \frac{1}{2} - \lambda = \infty
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, 2.2.1. Teoremin bütün koşulları sağlanır. Bu durumda, eğer  $\gamma > \frac{1}{4}$

ise  $(E_4)$  denklemlerinin salınımlıdır.

**2.2.4. Örnek :** 
$$\left( |x'(t)|^2 x'(t) \right)' + \frac{1}{t^2} |x(t)|^2 x(t) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 1$$

diferensiyel denklemini düşünelim.  $H(t, s) = (t - s)^4, t \geq s > 0$  ve  $\rho(s) = s$  olarak seçelim. Böylece 2.2.1. Teoremin bütün koşulları sağlanır. Bu durumda, yukarıdaki denklem salınımlıdır. Belirtelim ki, bu denklem için, Li [35]'nin kriterleri uygulanamaz.

**2.2.5. Örnek :** 
$$\left[ \frac{1}{t^4} (1 + e^{-|x(t)|}) |x'(t)|^2 x'(t) \right]' + \frac{1}{t^2} |x(t)|^2 x(t) = 0, \quad t \geq t_0 > 0$$

diferensiyel denklemini düşünelim.  $H(t, s) = (t - s)^4, t \geq s > 0$  ve  $\rho(s) = s$  olarak seçelim. Böylece 2.2.1. Teoremin bütün koşulları sağlanır ve bu denklem salınımlı olur.

Kolaylıkla görülebilir ki, 2.2.1. Teoremdeki  $(C_{106})$  koşulu,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \rho(s) c(s) ds = \infty \quad (C_{109})$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p ds < \infty \quad (C_{110})$$

koşulları ile yer değiştirilebilir. Bu ise aşağıdaki sonucu verir :

**2.2.6. Sonuç :**  $(C_{106})$  koşulu hariç, 2.2.1. Teoremin koşulları,  $(C_{109})$  ve  $(C_{110})$  koşulları ile beraber sağlanırsa  $(E_{19})$  denklemini salınımlıdır.

**2.2.7. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.2.1. Teoremdeki gibi olsun ve

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} \leq \infty, \quad (C_{111})$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \rho(s) r(s) \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right)^p ds < \infty \quad (C_{112})$$

koşulları sağlansın. Ayrıca,  $A_+(s) = \max\{A(s), 0\}$  olmak üzere,

$$\int_{t_0}^{\infty} A_+^q(s) ds = \infty \quad (C_{113})$$

olacak şekilde bir  $A \in C[t_0, \infty)$  fonksiyonu mevcut olsun. Eğer, her  $T \geq t_0$  için,  $(C_{105})$  ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, s) \rho(s) c(s) - \right. \\ \left. - \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \geq A(T) \quad (C_{114})$$

koşulunu sağlayan bir  $\rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  fonksiyonu varsa  $(E_{19})$  denklemini salınımlıdır.

**Kanıt:**  $x(t)$ ,  $(E_{19})$  denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın,

$T_0 \geq t_0$  olmak üzere,  $[T_0, \infty)$  üzerinde  $x(t) > 0$  kabul edelim.

$w(t)$ ,  $t \geq t_0$  için  $(C_{107})$ 'deki gibi tanımlansın. 2.2.1 Teoremin kanıtında olduğu gibi  $(C_{108})$  sağlanır. Bu durumda,  $t > T > T_0$  için,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, s) \rho(s) c(s) - \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \quad (C_{115}) \\
& \leq w(T) - \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \left( h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t, s) \right) w(s) + \right. \\
& \quad \left. + (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t, s) + \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, her  $T \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned}
& \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, s) \rho(s) c(s) - \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \quad (C_{116}) \\
& \leq w(T) - \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \left( h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t, s) \right) w(s) + \right. \\
& \quad \left. + (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t, s) + \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (C<sub>114</sub>) ile, her  $T \geq T_0$  için,

$$\begin{aligned}
w(T) & \geq A(T) + \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left[ \left( h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t, s) \right) w(s) + \right. \\
& \quad \left. + (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t, s) + \right. \\
& \quad \left. + \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds \quad (C_{117})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da gösterir ki, her  $T \geq T_0$  için,

$$w(T) \geq A(T) \quad (C_{118})$$

ve

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left( h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t, s) \right) w(s) + \\
& + (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} |w(s)|^q H(t, s) + \\
& + \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p ds < \infty \quad (C_{119})
\end{aligned}$$

dir. Her  $t > T_0$  için,  $f$  ve  $g$  fonksiyonlarını,

$$f(t) = \frac{(p-1)}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} H(t, s) |w(s)|^q ds$$

ve

$$g(t) = \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \left[ h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - H(t, s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right] w(s) ds$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda,  $(C_{119})$ 'den,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [f(t) + g(t)] \quad (C_{120})$$

$$= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \left\{ (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} H(t, s) |w(s)|^q + \left[ h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - H(t, s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right] w(s) \right\} ds$$

$$\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{T_0}^t \left[ (p-1) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} H(t, s) |w(s)|^q + \left[ h(t, s) [H(t, s)]^{1/q} - H(t, s) \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right] w(s) + \right.$$

$$\left. + \gamma \rho(s) r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right] ds < \infty$$

elde edilir. Şimdi,

$$\int_{T_0}^{\infty} |w(s)|^q ds < \infty \quad (C_{121})$$

olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki tersine,

$$\int_{T_0}^{\infty} |w(s)|^q ds = \infty \quad (C_{122})$$

olsun.  $(C_{111})$ 'den,

$$\inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, s)}{H(t, t_0)} \right\} \geq \eta > 0 \quad (C_{123})$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir  $\eta$  sabiti vardır.  $\mu$  herhangi bir keyfi pozitif sayı olsun. Bu durumda,  $(C_{122})$ 'den her  $t \geq T_1$  için,

$$\int_{T_0}^{\infty} |w(s)|^q ds \geq \frac{\mu}{\eta}.$$

olacak şekilde bir  $T_1 > T_0$  vardır. Böylece, her  $t \geq T_1$  için,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(p-1)}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} H(t, s) d \left( \int_{T_0}^s |w(\tau)|^q d\tau \right) \\ &= \frac{p-1}{H(t, T_0)} \int_{T_0}^t \left( \int_{T_0}^s |w(\tau)|^q d\tau \right) \left( -\frac{\partial}{\partial s} [H(t, s) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q}] \right) ds \\ &\geq \frac{p-1}{H(t, T_0)} \int_{T_1}^t \left( \int_{T_0}^s |w(\tau)|^q d\tau \right) \left( -\frac{\partial}{\partial s} [H(t, s) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q}] \right) ds \\ &\geq \frac{(p-1)\mu}{H(t, T_0)\eta} \int_{T_1}^t \left( -\frac{\partial}{\partial s} [H(t, s) [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q}] \right) ds \\ &= (p-1) \frac{\mu H(t, T_1)}{\eta H(t, T_0)} [\gamma \rho(T_1) r(T_1)]^{1-q} \end{aligned}$$

olur. (C<sub>123</sub>)'den, her  $t \geq T_2$  için,

$$\frac{H(t, T_1)}{H(t, t_0)} \geq \eta$$

olacak şekilde bir  $T_2 \geq T_1$  vardır. Bu ise her  $t \geq T_2$  için,

$$f(t) \geq (p-1)\mu[\gamma\rho(T_1)r(T_1)]^{1-q}$$

olmasını gerektirir.  $\mu$  keyfi bir sabit olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty. \quad (C_{124})$$

bulunur.  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(t_n) + g(t_n)] = \limsup_{t \rightarrow \infty} [f(t) + g(t)].$$

olacak şekilde bir  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisini düşünelim. (C<sub>120</sub>)'den

$$f(t_n) + g(t_n) \leq M \quad n=1,2,3,\dots \quad (C_{125})$$

olacak şekilde bir  $M$  sabiti vardır. Bundan başka (C<sub>124</sub>),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = \infty \quad (C_{126})$$

olmasını garantiler. (C<sub>125</sub>)'den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n) = -\infty \quad (C_{127})$$

elde edilir. Bu durumda, (C<sub>125</sub>) ve (C<sub>126</sub>) ile yeterince büyük n için,

$$1 + \frac{g(t_n)}{f(t_n)} \leq \frac{M}{f(t_n)} < \frac{1}{2}$$

olur. Böylece, yeterince büyük n için,

$$\frac{g(t_n)}{f(t_n)} < -\frac{1}{2}$$

yazılabilir. Bu ve (C<sub>127</sub>),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|g(t_n)|^q}{f(t_n)} = \infty \quad (C_{128})$$

olmasını gerektirir. Öte yandan, Hölder eşitsizliği kullanılarak, ile herhangi bir pozitif n tamsayısı için,

$$|g(t_n)|^q = \left| \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) [H(t_n, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t_n, s) \right] w(s) ds \right|^q$$

$$= \left| \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) [H(t_n, s)]^{1/q} - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} H(t_n, s) \right] \cdot \right.$$

$$\left. \bullet [H(t_n, s)]^{-1/q} [H(t_n, s)]^{1/q} [\gamma \rho(s) r(s)]^{\frac{q-1}{q}} [\gamma \rho(s) r(s)]^{\frac{1-q}{q}} w(s) ds \right|^q$$

$$= \left| \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{1/p} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \bullet [\gamma \rho(s) r(s)]^{\frac{q-1}{q}} [\gamma \rho(s) r(s)]^{\frac{1-q}{q}} [H(t_n, s)]^{1/q} w(s) ds \right|^q$$

$$\leq \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_0, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{1/p} \right]^p \gamma \rho(s) r(s) ds \right\}^{q-1} \bullet$$

$$\bullet \left\{ \frac{p-1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} [\gamma \rho(s) r(s)]^{1-q} H(t_n, s) |w(s)|^q ds \right\}$$

$$\leq \frac{f(t_n)}{p-1} \left\{ \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{1/p} \right]^p \gamma \rho(s) r(s) ds \right\}^{q-1}$$

yazılabilir. Sonuç olarak, yeterince büyük  $n$  için,

$$\frac{|g(t_n)|^q}{f(t_n)} \leq \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{1}{H(t_n, T_0)} \int_{T_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{1/p} \right]^p \gamma \rho(s) r(s) ds \right\}^{q-1}$$

elde edilir.  $(C_{123})$ 'den,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t, T_0)}{H(t, t_0)} > \eta$$

olup, her  $t \geq T_3$  için,

$$\frac{H(t, T_0)}{H(t, t_0)} \geq \eta.$$

olacak şekilde bir  $T_3 \geq T_0$  vardır. Bundan dolayı, yeterince büyük  $n$ 'ler için,

$$\frac{H(t_n, T_0)}{H(t_n, t_0)} \geq \eta$$

olur ve

$$\frac{|g(t_n)|^q}{f(t_n)} \leq \frac{1}{p-1} \left\{ \frac{1}{\eta H(t_n, t_0)} \int_{t_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{\frac{1}{p}} \right]^p \gamma \rho(s) r(s) ds \right\}^{q-1}$$

bulunur. (C<sub>128</sub>)'den,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t_n, t_0)} \int_{t_0}^{t_n} \left[ h(t_n, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t_n, s)]^{\frac{1}{p}} \right]^p \gamma \rho(s) r(s) ds = \infty \quad (C_{129})$$

elde edilir. Bu ise (C<sub>112</sub>) ile çelişir. O halde (C<sub>121</sub>) koşulu sağlanır. Böylece (C<sub>118</sub>)'den,

$$\int_{T_0}^{\infty} A_+^q(s) ds \leq \int_{T_0}^{\infty} |w(s)|^q ds < \infty$$

olup, bu da (C<sub>113</sub>) ile çelişir. Bu ise teoremin kanıtını tamamlar.

**2.2.8 Örnek :**  $\left[ t^{-1/2} (1 + e^{-|x(t)|}) x'(t) \right]' + t^{-5/2} x(t) = 0 \quad t \geq t_0 > 1.$

diferensiyel denklemini düşünelim.  $H(t, s) = (t-s)^2$ ,  $t \geq s \geq 1$  ve  $\rho(s) = s$  olsun.

Bu durumda,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{t_0}^t 2s^{1/2} \left(3 - \frac{t}{s}\right)^2 ds < \infty$$

ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(t-T)^2} \int_T^t \left\{ (t-s)^2 s^{-3/2} - \frac{s^{1/2}}{2} \left(3 - \frac{t}{s}\right)^2 \right\} ds \geq T^{-1/2}, \quad T \geq t_0 > 1$$

dir.  $A(T) = T^{-1/2}$  olarak alalım.  $\int_{t_0}^{\infty} A_+^2(s)ds = \infty$  olduğu açıktır. Böylece,

2.2.7. Teoremin bütün hipotezleri sağlanır ve bu denklem salınımlı olur.

Aşağıdaki iki teorem,  $(E_{19})$  denklemini için, sırasıyla 1.2.38. ve 1.2.39. Teoremin genelleştirilmiştir. Kanıtlar benzer olduğundan verilmemiştir.

**2.2.9. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.2.1 Teoremdeki gibi olsun. Ayrıca,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left[ h(t, s) - \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} [H(t, s)]^{1/p} \right]^p \rho(s)r(s)ds < \infty \quad (C_{130})$$

ve  $(C_{111})$  koşulları sağlansın. Eğer her  $T \geq t_0$  için,  $(C_{105})$ ,  $(C_{113})$  ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, s)\rho(s)c(s) - \gamma\rho(s)r(s) \left[ \frac{1}{p} \left( h(t, s) - [H(t, s)]^{1/p} \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \right) \right]^p \right\} ds \geq A(T) \quad (C_{131})$$

koşulları sağlanacak şekilde,  $A \in C[t_0, \infty)$  ve  $\rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  fonksiyonları varsa  $(E_{19})$  denklemini salınımlıdır.

**2.2.10. Uyarı :** 2.2.9. Teoremde;  $\Psi(x) \equiv 1$ ,  $r(t) \equiv 1$  ve  $\rho(t) \equiv 1$  olsun. Eğer  $\lambda > 1$  bir sabit ve  $t \geq s \geq t_0$  olmak üzere,  $H(t, s) = (t-s)^\lambda$  ve  $p = 2$  ise 1.2.40. Sonuç elde edilir.

**2.2.11. Teorem :**  $H$  ve  $h$ , 2.21. Teoremdeki gibi olsun ve ayrıca  $(C_{111})$  koşulu sağlansın. Eğer, , her  $T \geq t_0$  için  $(C_{105})$ ,  $(C_{113})$ ,  $(C_{114})$  ve

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t H(t, s) \rho(s) c(s) ds < \infty \quad (C_{132})$$

koşulları sağlanacak şekilde  $A \in C[t_0, \infty)$  ve  $\rho \in C^1([t_0, \infty); (0, \infty))$  fonksiyonları varsa  $(E_{19})$  denklemi salınımlıdır.

**2.2.12. Uyarı :** Eğer  $\Psi(x) \equiv 1$ ,  $r(t) \equiv 1$  ve  $\rho(t) \equiv 1$  ise, bu durumda 2.2.1., 2.2.9. ve 2.2.11. Teorem, sırasıyla 1.2.37., 1.2.38. ve 1.2.39. Teoreme indirgenir. Ayrıca, 2.2.7. Teorem, diğer üç teoreme göre yenidir. Bundan başka,  $\lambda > p - 1$  bir sabit ve

$k(x)$ ,  $[t_0, \infty)$  üzerinde pozitif, sürekli bir fonksiyon ve  $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{k(x)} dx = \infty$  olsun. Eğer,

$$H(t, s) = \left( \int_s^t \frac{1}{k(x)} dx \right)^\lambda, \quad t \geq s \geq t_0$$

olarak alınırsa, 2.2.1., 2.2.7., 2.2.9. ve 2.2.11. Teoremin özel durumu olarak  $(E_{19})$  denklemi için 4 yeni salınımlılık kriteri türetilir.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] F. V. Atkinson, On second order non-linear oscillation, *Pacific J. Math.*, 5 (1955), 643-647.
- [2] S. Belohorec, Oscillatory solution of certain nonlinear differential equations of the second order, *Mat. Fyz. Casopis Sloven. Akad.*, Vied 11 (1961), 250-255.
- [3] G. J. Butler, Oscillation theorems for a nonlinear analogue of Hill's equation, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (2) 27 (1976), 159-171.
- [4] G. J. Butler, Integral averages and the oscillation of second order ordinary differential equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 11 (1980), 190-200.
- [5] G. J. Butler and L. H. Erbe, A generalization of Olech-Opial-Wazewski oscillation criteria to second order nonlinear equations, *Nonlinear Anal.*, 11 (1987), 207-219.
- [6] M. Cecchi and M. Marini, Asymptotic decay of solutions of nonlinear second order differential equations with deviating arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, 138 (1989), 371-384.
- [7] C. V. Coffman and J. S. W. Wong, On a second order nonlinear oscillation problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 147 (1970), 357-366.
- [8] C. V. Coffman and J. S. W. Wong, Oscillation and nonoscillation theorems for the generalized Emden-Fowler equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167 (1972), 399-434.
- [9] C. V. Coffman and J. S. W. Wong, Oscillation and nonoscillation theorems for second order ordinary differential equations, *Funkcial. Ekvac.* 15 (1972), 119-130.
- [10] W. J. Coles, Oscillation criterion for second order differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 755-758.
- [11] W. J. Coles, Oscillation criteria for nonlinear second order differential equations, *Ann. Math. Pura. Appl.*, 82 (1969), 123-134.

- [12] W. B. Fite, concerning the zeros of solutions of certain differential equations, *Trans. Amer. J. Math.*, 19 (1918), 341-352.
- [13] S. R. Grace, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping, *Math. Nachr.*, 141 (1989), 117-127.
- [14] S. R. Grace, Oscillation criteria for second order differential equations with damping, *J. Austral. Math. Soc.*, (Ser. A) 49 (1990), 43-54.
- [15] S. R. Grace and B. S. Salli, Oscillatory behavior of solutions of second order differential equations with alternating coefficients, *Math. Nachr.*, 127 (1986), 165-175.
- [16] S. R. Grace and B. S. Salli, An oscillation criterion for second order sublinear ordinary differential equations with damping term, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 35 (1987), 181-184.
- [17] S. R. Grace and B. S. Salli, Integral averaging and the oscillation of second order nonlinear differential equations, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 151 (1988), 149-159.
- [18] S. R. Grace and B. S. Salli, Integral averaging techniques for the oscillation of second order nonlinear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 149 (1990), 277-311.
- [19] S. R. Grace and B. S. Salli, Oscillation theorems for second order superlinear differential equations with damping, *J. Austral. Math. Soc.*, (Ser. A) 53 (1992), 156-165.
- [20] S. R. Grace and B. S. Salli, Oscillations of second order general nonlinear differential equations, *WSSIAA 1* (1992), 413-429.
- [21] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, "Inequalities", 2<sup>nd</sup> edition, Cambridge University Press. 1988.
- [22] P. Hartman, On nonoscillatory linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, 74 (1952), 389-400.

- [23] M. Jasný, On the existence of an oscillating solution of the nonlinear differential equation of the second order  $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$ ,  $f(x) > 0$ , *Casopis pest. Mat.*, 85 (1960), 78-83. (Russian) MR 26 # 408.
- [24] I. V. Kamenev, Certain specifically nonlinear oscillation theorems, *Mat. Zametki* 10 (1971), 129-134 ; (*Math. Notes* 10 (1971), 502-505).
- [25] I. V. Kamenev, Oscillation criteria related to averaging of solutions of ordinary differential equations of second order, *Differential'nye Uravneniya*, 10 (1974), 246-252. [ In Russian ].
- [26] I. V. Kamenev, Integral criterion for oscillations of linear differential equations of second order, *Mat. Zametki*, 23 (1978), 249-251. [ In Russian ].
- [27] I. T. Kiguradze, On condition for oscillation of solution of the equation  $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ , *Casopis Pest. Mat.*, 87 (1962), 492-495. (Russian).
- [28] A. Kneser, Untersuchungen über reellen Nullstellen der Integrale Linearer differentialgleichungen, *Math. Ann.*, 42 (1893), 409-435.
- [29] T. Kura, Oscillation Theorems for a second order sublinear ordinary differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84 (1982), 535-538.
- [30] J. Kurzweil, A note on oscillatory solution of equation  $y'' + f(x)y^{2n-1} = 0$ , *Casopis Pest. Mat.*, 85 (1960), 357-358. (Russian) MR 23 # a3322.
- [31] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, On the oscillation and nonoscillation of second order sublinear equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85 (1982), 547-551.
- [32] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, On an oscillation theorem of Belohorec, *SIAM J. Math. Anal.*, 14 (1983), 474-476.
- [33] M. K. Kwong and J. S. W. Wong, Linearization of second order nonlinear oscillation theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 279 (1983), 705-722.
- [34] H. J. Li, Oscillation criteria for second order linear differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 194 (1995), 217-234.

- [35] H. J. Li, Oscillation criteria for hale-linear second order differential equations, *Hiroshima Math. J.* 25 (1995), 571-583.
- [36] R. A. Moore and Z. Nehari, Non-oscillation theorems for a class of nonlinear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 (1959), 30-52.
- [37] Z. Nehari, On a class of nonlinear second order differential equations, *Trans. Amer. Mat. Soc.*, (1960), 101-123.
- [38] Z. Nehari, A nonlinear oscillation problem, *J. Differential Equations* 5 (1969), 432-460.
- [39] H. Onose, Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51 (1975), 67-73.
- [40] H. Onose, On Butler's conjecture for oscillation of an ordinary differential equations, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 34 (1983), 235-239.
- [41] Ch. G. Philos, Oscillation of sublinear differential equations of second order, *Nonlinear Anal.*, 7 (1983), 1071-1080.
- [42] Ch. G. Philos, An oscillation criterion for second order sublinear ordinary differential equations, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.*, 32 (1984), 567-572.
- [43] Ch. G. Philos, A second order superlinear oscillation criterion, *Canad. Math. Bull.*, 27 (1984), 102-112.
- [44] Ch. G. Philos, On second order sublinear oscillation, *Aequationes Math.*, 27 (1984), 242-254.
- [45] Ch. G. Philos, On a Kamenev's integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order, *Utilitas Math.*, 26 (1985), 276-289.
- [46] Ch. G. Philos, Integral averages and second order superlinear oscillation, *Math. Nachr.*, 120 (1985), 127-138.
- [47] Ch. G. Philos, Integral averaging techniques for the oscillation of second order sublinear ordinary differential equations, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 40 (1986), 111-130.

- [48] Ch. G. Philos, Oscillation theorems for linear differential equations of second order, Arch. Math., (Basel) 53 (1989), 483-492.
- [49] Ch. G. Philos, Oscillation criteria for second order superlinear differential equation, Canad. J. Math., XLI (1989), 321-340.
- [50] Ch. G. Philos, An oscillation criterion for superlinear differential equations of second order, J. Math. Anal. Appl., 148 (1990), 306-316.
- [51] M. Del Pino, Applied Math. Engineering Thesis, Univ. of Chile.
- [52] C. Sturm, Sur les equations differentielles linearies du second ordre, J. Math. Pures Appl., 1 (1836), 106-186.
- [53] C. A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, 1968.
- [54] A. Tiryaki and A. Zafer, Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping, submitted for publication
- [55] A. Wintner, A criterion of oscillatory stability, Quart. Appl. Math., 7 (1949), 114-117.
- [56] J. S. W. Wong, On the second order nonlinear oscillation, Funkcial. Ekvac., 11 (1968), 207-234.
- [57] J. S. W. Wong, A second order nonlinear oscillation theorem, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 487-491.
- [58] J. S. W. Wong, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 3 (1975), 283-309.
- [59] J. S. W. Wong, On the generalized Emden-Fowler equation, SIAM Rev. 17 (1975), 339-360.
- [60] J. S. W. Wong, An oscillation criterion for second order nonlinear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 109-112.

- [61] J. S. W. Wong, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989).
- [62] J. Yan, Oscillation theorems for second order nonlinear differential equations with damping, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 276-282.
- [63] C. C. Yeh, Oscillation theorems for nonlinear second order differential equations with damped term, Proc. Amer. Math. Soc., 84 (1982), 397-402.
- [64] Y. H. Yu, Leighton type oscillation criterion and Sturm type comparison theorem, Math. Nachr., 153 (1991), 137-143.



## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bülent Ayanlar  
Doğum Yeri : Ankara  
Doğum Yılı : 1962  
Medeni Hali : Evli ve iki çocuk babası

### Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1977-1980 İzmir Karabağlar Cumhuriyet Lisesi  
Lisans : 1980-1985 H.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü  
Yüksek Lisans : 1991-1994 H.Ü. Fen Fakültesi Matematik Bölümü  
Yabancı Dil : İngilizce

### İş Tecrübesi :

1985-1991 Astsubay Hazırlama Okulu ÇANKIRI  
1991-1999 Kara Harp Okulu ANKARA

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**