

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**MODİFİYE ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE PARALEL REGLE
YÜZEYLER**

Yusuf GÜZEL

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

ŞUBAT 2024

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

MODİFİYE ORTOGONAL ÇATIYA GÖRE PARALEL REGLE YÜZEYLER

Tez Yazarı
Yusuf GÜZEL

Danışman
Doc.Dr. Gülden Altay SUROĞLU

ŞUBAT 2024
ELAZIĞ

T.C.
FIRATÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Paralel Regle Yüzeyler
Yazarı:	Yusuf GÜZEL
İlk Teslim Tarihi:	09.01.2024
Savunma Tarihi:	05.02.2024

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doc.Dr. Gülden Altay SUROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof.Dr.Handan ÖZTEKİN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Doc.Dr. Hülya Gün BOZOK Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Paralel Regle Yüzeyler” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

05.02.2024

Yusuf GÜZEL



ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, " Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Paralel Regle Yüzeyler " başlıklı araştırmanın sonuçlarını içermektedir. Bu çalışma, matematiksel temelleri içeren bir perspektifle, yüzeyler hakkında önemli bir konuyu ele almaktadır. Tez, paralel regle yüzey ailesinin modifiye ortogonal çatıya olan evölüsyonu detaylı bir şekilde inceleyerek bu evölüsyonu mühendislik, mimari tasarım açısından potansiyel etkilerini değerlendirmeyi amaçlamaktadır.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında en büyük destekçim ve rehberim olan danışmanım Doc.Dr. Güliden Altay Suroğlu'na içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin sağladığı değerli rehberlik ve bilgiler, bu çalışmanın derinleşmesine ve kapsamlı bir şekilde ele alınmasına olanak tanımıştır ve bu tez çalışması sürecinde beni destekleyen ve büyük fedakarlık gösteren eşim Fatıma, çocuklarım Ömer ve Ayşe'ye içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca, bu tezin oluşturulmasında etkisi olan tüm akademisyenlere ve Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na teşekkürlerimi iletiyorum. Üniversitemizin sunduğu akademik imkanlar ve atmosfer, bu çalışmanın başarılı bir şekilde tamamlanmasına katkıda bulunmuştur.

Bu tez çalışması, Fırat Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (FÜBAP) tarafından FF.22.12 protokol numaralı proje ile desteklenmiştir.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasına katkı sağlayan tüm ilgili kişi ve kurumlara içten teşekkürlerimi sunar, bu önsözü okuyan herkese teşekkürlerimi bir kez daha iletmek isterim.

Yusuf GÜZEL
ELAZIĞ, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. Giriş	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
3. PARALEL REGLE YÜZEY AİLESİNİN YÜZEY EVOLÜSYONU	14
4. SONUÇLAR.....	37
ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Modifiye Ortogonal Çatıya Göre Paralel Regle Yüzeyler

Yusuf GÜZEL

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Şubat 2024, Sayfa: ix +39

Bu tez çalışması, öncelikle paralel regle yüzey, Frenet-Serret çatısı, modifiye ortogonal çatı ve yüzey evolüsyonu üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler incelenmiştir. Daha sonra, bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Son olarak ise, çalışmanın temel amacı olarak, paralel regle yüzey ailesinin modifiye ortogonal çatı ile olan evolüsyonu incelenerek, bu evolüsyonun Frenet-Serret Çatısı ve modifiye ortogonal çatıya göre değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Paralel Regle Yüzey, Frenet-Serret Çatısı, Modifiye Ortogonal Çatı, Yüzey Evolüsyonu

ABSTRACT

Parallel Ruled Surfaces According to Modified Orthogonal Frame

Yusuf GÜZEL

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

February 2024, Pages: ix + 39

This thesis examines the literature regarding studies conducted on parallel ruled surfaces, Frenet-Serret frame, modified orthogonal frame, and surface evolution. Then, the basic definitions and theorems used in this study are given. Finally, as the main purpose of the study, the evolution of the parallel ruled surface family with the modified orthogonal frame was examined and this evolution was evaluated according to the Frenet-Serret Frame and the modified orthogonal frame.

Keywords: Parallel Ruled Surface, Frenet-Serret Frame, Modified Orthogonal Frame, Surface Evolution

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1. Örnek 4.1 $\alpha(u, p)$ eğrisinin $p = i, i = 1, 2, 3, 4$ değerleri için evolüsyonu.....	28
Şekil 3.2. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormali (b) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli	30
Şekil 3.3. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormali (B) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli.....	32
Şekil 3.4. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve teğeti (t) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli33	
Şekil 3.5. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve teğeti (T) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli	33
Şekil 3.6. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve normali (n) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli	33
Şekil 3.7. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve normali (N) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli	34
Şekil 3.8. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 1$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılması.....	36
Şekil 3.9. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 2$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılması.....	36
Şekil 3.10. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 3$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılması.....	36

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$\langle ., . \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\times$	: Vektörel çarpım
$\ \cdot \ $	: Norm
t	: Serret-Frenet çatıda teğet vektör
n	: Serret-Frenet çatıda asli normal vektör
b	: Serret-Frenet çatıda binormal vektör
T	: Modifiye edilmiş ortogonal çatıda teğet vektör
N	: Modifiye edilmiş ortogonal çatıda asli normal vektör
B	: Modifiye edilmiş ortogonal çatıda binormal vektör
κ	: Eğrilik
τ	: Torsiyon(Burulma)
u	: Yay parametresi
I	: Birinci temel form
II	: İkinci temel form
K	: Gauss eğriliği
H	: Ortalama eğrilik
p	: Zaman parametresi

1. Giriş

Diferansiyel geometri, geometrik yapıları çözmek amacıyla geometrik cisimlerin diferansiyel yöntemler ve integral hesapları kullanarak inceleyen matematiğin önemli bir dalıdır.

XVII. yüzyıla kadar diferansiyel geometri sadeleştirilmiş bir formatta yer ve arazi ölçümlerinde kullanıldı. Ancak, XVII. yüzyılda Descartes, tüm bilinen geometriyi cebirle ilişkilendiren "Geometrie" adlı kitabı yayımladı. Bu eser, Descartes tarafından yazılan ve 1637'de yayımlanan bir kitaptır ve analitik geometri alanının başlangıcını işaret eder, [10]. Bu noktadan sonra, Leibnitz, Fermat ve Newton eğrilik ölçümleri ve düzlem eğrilerini araştırmaya koyuldu.

XVIII. yüzyılda Euler, eğrileri farklı şekillerde açıklamak ve yüzeyler üzerine çalışma yapmak için çaba sarf etti. Euler bu çalışmalar ile Einstein'ın genel görelilik teorisinin önemli bir öncülü oldu. Euler, yüzeyler ve eğrilerle ilgili kapsamlı çalışmalarını içeren "Introductio" adlı eseri ile analitik geometrinin gelişimine katkıda bulunarak, analitik geometri hakkında yazılmış ilk ders kitabı olduğu düşünülebilir.

Bu dönemde, uzay eğrileri üzerine çalışmaya başlayan Alexis Clairaut, uzay eğrilerinin diferansiyel ve analitik geometrisi ile alakalı bir kitap yazarak bu alandaki bilgi birikimine katkıda bulundu, [13].

XIX. yüzyılda Hannover krallığından arazileri ölçmek için görevlendirilen Gauss ve kurmuş olduğu nirengi ağı, diferansiyel geometri adına teori pratik arasındaki geçişin ilk örneklerden biridir. Gauss'un çalışmaları, yüzeyler ve eğrilerin günümüz diferansiyel geometrisi hakkındaki ana hatların ortaya çıkmasına önemli ölçüde katkı yapmış ve bu oluşumlar Öklid dışı geometride de benzer olarak kullanılmaya devam etmektedir.

Bu dönemde, Gaspard Monge yüzeyler ve düzlem eğrileri teorisine önemli katkıda bulunmuştur. Monge, özellikle regle yüzeyler hakkında çalışmalar ortaya çıkarmıştır, [4]. Yüzeyler teorisinde, bir doğrunun bir eğriyi takip etmesi ve sürekli hareket etmesi sonucu regle yüzeyler meydana gelir.

Regle yüzeyler teorisi, diferansiyel geometri alanının yanı sıra birçok mühendislik dalı ve mimarlıkta da önemli bir rol oynamaktadır. Regle yüzeyler, mimari yapıların tasarımında sıkça kullanılmaktadır. Örneğin, cephe tasarımı olarak Los Angeles'da bulunan Walt Disney Konser Salonu'nu, regle yüzeylerin mimaride kullanılmasına örnek olarak gösterilebilir. Açılabilir bir yüzey, mimarlık ve mühendislik ile ilgili alanlarda yapı ve tasarım için kritik bir öneme sahiptir,[14].

Regle yüzeyler hakkında daha fazla bilgi edinmek isteyenler, çeşitli basılı kaynaklara başvurabilirler. Örneğin: "Diferansiyel Geometri Dersleri" (Hacısalıhoğlu, 1983): Bu kitap, diferansiyel geometri konusunda temel bilgileri içeren bir kaynaktır. Hacısalıhoğlu'nun eseri, regle yüzeyler ve benzer konularda detaylı bilgiler sunabilir. "Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar

Teorisi" (Hacısalıhoğlu, 1983): Hacısalıhoğlu'nun bu kitabı, hareket geometrisi ve kuaterniyonlar teorisi gibi konulara odaklanmış olsa da, diferansiyel geometriyle ilgilenenler için önemli bilgiler içerebilir. "Diferansiyel Geometri" (Sabuncuoğlu, 2006): Sabuncuoğlu'nun bu kitabı, diferansiyel geometri alanında genel bilgiler sunan bir kaynaktır. Regle yüzeyler gibi konulara da değinebilir. Bu kitaplar, diferansiyel geometri genelinde olduğu gibi özellikle regle yüzeyler üzerine de bilgi sunabilir. Ancak, regle yüzeylere odaklanan daha spesifik kaynakları incelemek de faydalı olabilir, [13].

Bu çerçevede, diferansiyel geometri alanında kilit bir rol oynayan Serret-Frenet formülleri, regle yüzeylerin ve eğrilerin matematiksel analizi sürecinde işlevsel bir araç olarak kendini gösterir. Serret-Frenet formülleri, bir parçacığın eğri üzerindeki hareketini 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlayan bir dizi formülasyondur. Bu formüller, düzgün bir eğri boyunca hareket eden sürekli ve diferansiyasyonel parçacıkların teğet, asli normal ve bir normal vektörlerinin türevlerini ifade eder. Serret-Frenet formüllerinin regle yüzeylerin analizinde kullanımı, bu yüzeylerin kinematik özelliklerini daha derinlemesine anlamak ve tasarlamak için matematiksel bir içgörü sunar. Özellikle, mimari yapıların tasarımında regle yüzeylerin açılabilir olması gibi özellikler, Serret-Frenet formüllerinin pratik uygulamalarını daha da güçlendirebilir, [8].

Bu bağlamda, Serret-Frenet formüllerinin, regle yüzeylerin anlaşılmasına katkıda bulunarak diferansiyel geometrinin mühendislik ve mimarlık alanlarındaki uygulamalarını güçlendiren kritik bir araç olduğunu ifade edebiliriz. Matematiksel teori ile pratik uygulamalar arasında kurulan bu köprü, hem teorik hem de uygulamalı matematik açısından önemli bir birleşim noktası oluşturur. Bu nedenle, Serret-Frenet formüllerinin regle yüzeylerin analizi üzerindeki etkisi, matematik ve mühendislik disiplinlerini bir araya getirerek zenginleştirici bir katkı sağlar,[9].

Yüzey evolüsyonu genel olarak bir matematiksel yüzeyin zaman içindeki değişimini inceleyen bir konsepttir. Bu değişim genellikle belirli bir evrim yasasına tabi tutulan parametrik veya belirgin bir yüzeyle ifade edilir. Yüzey evolüsyonu, matematik, fizik, bilgisayar bilimi ve mühendislik gibi birçok disiplinde kullanılan bir konsepttir.

Yüzey evolüsyonu, belirli bir başlangıç durumundan yola çıkarak zamanla yüzeyin nasıl değiştiğini modellemek için kullanılır. Bu değişim genellikle diferansiyel denklemlerle ifade edilir ve evrim yasaları altında gerçekleşir. Yüzey evolüsyonu, malzeme bilimi, görüntü işleme, bilgisayar grafikleri ve fiziksel modellerle ilgili birçok uygulama alanında kullanılır.

Örneğin, malzeme bilimi alanında yüzey evolüsyonu, malzemelerin zaman içindeki deformasyonlarını veya değişimlerini anlamak için kullanılabilir. Bilgisayar grafikleri ve animasyon alanında, yüzey evolüsyonu gerçekçi animasyonlar ve modeller oluşturmak için kullanılır. Ayrıca, fizikte ve mühendislikte, elastik ve plastik deformasyonları modellemek için de kullanılır,[6].

Günümüzde bilimsel araştırmalar, karmaşık sorunlara çözüm bulma amacı taşıyan disiplinler arası bir çaba içerisinde. Bu bağlamda, bu çalışma da önemli bir bilimsel problemin üzerine odaklanarak, bu problemin çözümüne katkı sağlamayı hedeflemektedir. Aşağıda, çalışmanın temel odak noktalarını tanımlayan sorulara yanıtlar verilmiştir:

Bu çalışmanın temel bilimsel problemi, paralel regle yüzey ailesinin modifiye ortogonal çatıya göre evolüsyonunun incelenmesidir. Paralel regle yüzeylerin bu modifiye çatı altında nasıl evrildiğı ve bu evrimin matematiksel olarak nasıl tanımlandığı sorunsalı, bu çalışmanın ana odak noktasını oluşturmaktadır. Paralel regle yüzeylerin modifiye ortogonal çatıya göre evrimi, geometri, matematik ve uygulamalı bilimler açısından önemlidir. Bu evrimin anlaşılması, özellikle bu tür yüzeylerin çeşitli endüstriyel tasarım ve modelleme uygulamalarında etkili bir şekilde kullanılabilmesi için önemli bir adımdır. Bu tezin nihai amacı, paralel regle yüzey ailesinin modifiye ortogonal çatıya göre evrimini ayrıntılı bir şekilde inceleyerek, elde edilen sonuçlarla literatüre yeni bir katkı sağlamaktır. Bu bağlamda, modifiye çatının avantajları ve bu evrimin geometrik özellikleri üzerinde odaklanılacak ve bu konuda daha derin bir anlayış elde edilecektir. Bu çalışmada, paralel regle yüzeylerin modifiye ortogonal çatıya göre evrimi üzerine çeşitli hipotezler öne sürülecektir. Bu hipotezler, yüzeylerin evrimindeki belirli değişkenler arasındaki ilişkileri varsayarak, tezin ana sorularına yönlendirecek bir çerçeve oluşturacaktır. Değişkenler arasındaki ilişkilerin varlığını göstermek ve ispatlamak için çeşitli matematiksel ve geometrik metotlar kullanılacaktır. Özellikle, modifiye ortogonal çatı altında paralel regle yüzeylerin evrimini açıklamak için diferansiyel geometri ve matematiksel analiz teknikleri kullanılacaktır. Bu çalışma, önceki araştırmacıların benzer problemlere yaklaşımlarını değerlendirecek ve literatürdeki boşlukları doldurarak mevcut bilgi birikimine katkı sağlayacaktır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, diferansiyel geometrinin temel kavramlarına, regle yüzeylere, Serret-Frenet çatısı ve yüzey evolüsyonu ile ilgili temel kavramlara ve bunların karakteristik özellikleri verilmiştir. Ayrıca, yüzey evolüsyonu ile ilgili bazı tanım ve teoremler ile modifiye edilmiş ortogonal çatı tanımlanarak, Serret-Frenet çatı ve modifiye ortogonal çatı arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tanım 2.1. A kümesi boş olmayan bir küme ve K bir cisim, K cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı V olsun.

$$g: Ax A \rightarrow V$$

şeklinde fonksiyon varsa A kümesine V vektörüyle birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } g(P, Q) + g(Q, R) = g(P, R)$$

$$(A2). \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } g(P, Q) = \alpha \text{ biçimde tek bir } Q \in A \text{ noktası vardır, [2].}$$

Tanım 2.2. V vektör uzayıyla birleşen A bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ olmak üzere $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörleri için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ oluşumu V vektör uzayının bazıysa $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, $(n+1)$ -lisine A afin uzayının afin çatısı denir, [2].

Tanım 2.3. A reel bir afin uzay ve V vektörü de A afin uzayıyla birleşen vektör uzayı olsun. İç çarpım işlemi V vektör uzayında

$$\langle ., . \rangle = V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

tanımlanırsa A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar bu işlem yardımıyla tanımlanır. Böylece A afin uzayı Öklid uzayı olarak tanımlanmış olur, [2].

Tanım 2.4.

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$$

$\mathbb{E}^n$ öklid uzayında uzaklık fonksiyonu d olarak tanımlanır ve $d(x, y)$ şeklinde ifade edilen reel bir sayıdır ve $x, y \in \mathbb{E}^n$ noktalarının arasındaki uzaklık olarak adlandırılır, [2].

Tanım 2.5. $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^n$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{xy}\| \|\overrightarrow{yz}\|}$$

işleminden hesaplanabilen θ reel sayıdır, [2].

Tanım 2.6. $\mathbb{E}^n$ uzayında sıralanmış $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ bir nokta $(n + 1)$ –lisine $\mathbb{E}^n$ uzayında karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n –lisi $\mathbb{E}^n$ de bir ortonormal bir baz olursa $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ oluşumu $\mathbb{E}^n$ de bir dik çatı veya öklid çatısı olarak adlandırılır,[2].

Tanım 2.7. $\mathbb{E}^n$ deki $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısı, standart öklid çatısı olarak adlandırılır,[2].

Tanım 2.8. $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir, $\vec{v}_p \in T_{\mathbb{E}^n}(P)$ olsun. Şu koşullarda $\vec{v}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere;

$$\vec{v}_p[f] = \frac{d}{dt} (f(P_1 + t(Q_1 - P_1), \dots, P_n, t(Q_n - P_n))) \Big|_{t=0}$$

elde edilen reel sayıya f fonksiyonunun $\vec{v}_p$ vektörü yönündeki türevi denir,[2].

Tanım 2.9. $\mathbb{R}$ 'nin açık aralıklarından biri I olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ biçiminde düzgün bir α (C^∞ sınıfından) dönüşümüne, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir eğridir denir,[1].

Tanım 2.10. α , $\mathbb{E}^n$ uzayında bir eğri olsun. $\forall u \in I$ için $\alpha'(u) \neq 0$ ve hız vektörü $\mathbb{E}^n$ de tüm noktalarda sıfırdan farklıysa α eğrisi regüler eğridir denir,[5].

Tanım 2.11. M , $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayında bir eğri koordinat komşuluğu (I, α) verilmiş olsun. $\forall u \in I$ için

$$\|\alpha'(u)\| = 1$$

şartı sağlanıyorsa (I, α) ya göre M eğrisi birim hızlı bir eğridir ve $u \in I$ ise yay parametresi olarak adlandırılır,[4].

Tanım 2.12. $I \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı $\mathbb{E}^n$ uzayında bir α eğrisi verilsin $a, b \in I$ iken

$$\int_a^b \|\alpha'(u)\| du$$

olan reel sayıya a alt sınırdan b üst sınıra α eğrisine ait yay uzunluğu denir,[4].

Tanım 2.13. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ şeklinde bir eğri verilsin. $u_0 \in I$ ise eğri üstünde $\alpha(u_0)$ noktası itibariyle yay uzunluğu ölçüldüğünde;

$u < u_0$ ise $\alpha(u_0)$ ve $\alpha(u)$ noktaları referans alınarak oluşturulan parçanın uzunluğunun negatifi $f(u)$ olsun.

$u = u_0$ için $f(u_0) = 0$ olsun.

$u_0 < u$ $\alpha(u_0)$ ve $\alpha(u)$ noktaları referans alınarak oluşturulan eğri parçasının uzunluğunu da $f(u)$ diyelim.

Buradan $f: u \rightarrow f(u)$ fonksiyonu I aralığından $\mathbb{R}$ 'ye giden bir fonksiyon olarak tanımlanmış olur. Elde edilen f fonksiyonuna $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ şeklindeki eğrinin yay uzunluk fonksiyonu denir,[1].

Tanım 2.14. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ uzayında birim hızlı bir eğri olsun,

$$T(u) = \alpha'(u)$$

eşitliği ile tanımlanmış $T(u)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(u)$ noktasına karşılık gelen birim teğet vektörü, denir,[1].

Tanım 2.15. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrisi için,,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(u) = \|T'(u)\|$$

şeklindeki fonksiyona, α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\alpha(u)$ noktasındaki $\kappa(u)$ sayısına o noktadaki eğriliği denir,[1].

Tanım 2.16. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrisi için,, $T(u) = \alpha'(u)$ eşitliği ile yazılan bir $T(u)$ vektörüne, α eğrisine ait $\alpha(u)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir,[1].

T, I aralığındaki u noktasına, $T(u)$ teğet vektörünü, $\alpha(u)$ 'daki noktaya denk düşüren bir fonksiyondur. Buradan hareketle α eğrisi üstünde T bir vektör alanı oluşur ve bulunan bu vektör alanına α eğrisinin birim vektör alanı denir. Kısaca $T = \alpha'$ yazılabilir,[1].

Tanım 2.17. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrisi için,

$$N(u) = \frac{1}{\kappa(u)} T'(u)$$

eğriliğiyle oluşturulmuş $N(u)$ vektörüne, α eğrisine ait $\alpha(u)$ noktasında birinci dik (asli normal) vektör denir.

N vektör alanına α eğrisine ait birinci dik vektör(asli normal) alanı denir,[1].

Tanım 2.18. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrisi için,

$$B(u) = T(u) \times N(u)$$

denklemlerle gösterilen $B(u)$ vektörüne, α eğrisine ait $\alpha(u)$ noktasında ikinci dik vektör (binormal) denir.

B vektör alanıysa α eğrisine ait ikinci dik vektör alan (binormal vektör alan) denir,[1].

Tanım 2.19. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin $\alpha(u)$ noktasına karşılık gelen $T(u), N(u), B(u)$ vektörlerine, Frenet vektörleri denir.

$$\{T(u), N(u), B(u)\}$$

kümesine ise α eğrisinin $\alpha(u)$ noktasındaki Frenet çatısı denir.

T, N, B vektör alanları α eğrisi üzerindeki Frenet vektör alanlarını oluşturur,[1].

Tanım 2.20. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrinin T, N, B Frenet vektör alanları için,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(u) = -\langle B'(u), N(u) \rangle$$

fonksiyonuysa α eğrisinin burulma fonksiyonu olarak adlandırılır. $\tau(u)$ sayısına eğrinin $\alpha(u)$ noktasına ait burulması denir,[1].

Tanım 2.21. $\mathbb{E}^3$ uzayında $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ şeklinde tanımlı α birim hızlı eğrinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dir,[1].

Tanım 2.22. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre,

$$N \times B = T$$

$$B \times T = N$$

dir,[1].

Tanım 2.23. $\varphi: U \rightarrow \mathbb{E}^3$ koordinat komşuluğu $M \subset \mathbb{E}^3$ ve $\forall P \in M$, M nin içindeki görüntüsü P ye ait bir komşuluğu ihtiva eden bir koordinat komşuluğu varsa ve $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ süreklilyse M ye bir yüzey denir,[3].

Tanım 2.24. $\varphi(U) = M$ regüler bir yüzey olsun. Bu durumda $\varphi_u(q)$ ve $\varphi_v(q)$ vektörleri, yüzeye $\varphi(q) = p$ noktasına teğet olan bir düzlemi gererler. Bu düzleme, yüzeyin p noktasındaki teğet düzlemi veya tanjant uzayı denir,[7].

Tanım 2.25. Teğet düzlemin, parametre eğrilerine ait φ_u ve φ_v teğet vektörleri paralel olduğu için

$$N_0 = \varphi_u \wedge \varphi_v$$

vektörü, M yüzeyinin P noktasına ait teğet düzlemine diktir. Bu vektöre M yüzeyinin P noktasına ait normal vektörü ve

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

vektörüne de birim normal vektörü denir,[4].

Tanım 2.26. $\mathbb{E}^n$ de bir yüzey M ve N de M yüzeyinde birim dik vektör alanı olmak üzere $\forall v_p \in T_p(M)$ için M nin bir P noktasına karşılık gelen

$$S(v_p) = D_{v_p} N$$

eşitliği ile gösterilen $S_p: T_p(M) \rightarrow T_p(M)$ fonksiyonuna M nin P noktasında N vektör alanına bağlı Weingarten dönüşümü veya şekil operatörü denir,[3].

Tanım 2.27. $\mathbb{E}^n$ de bir M hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen şekil operatörü $S(P)$ ise

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona M nin Gauss eğriliği fonksiyonu ve $K(P)$ değerinde M hiperyüzeyinin P noktasına göre Gauss eğriliği denir,[3].

Tanım 2.28. $\mathbb{E}^n$ de bir M hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin bir P noktasına karşılık gelen şekil operatörü $S(P)$ ise

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = iz(S(P))$$

şeklinde tanımlı fonksiyona M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir,[3].

Tanım 2.29. M yüzey için parametrik denklem $X = X(u, v)$ olsun. Tüm noktalardaki teğet düzleminin tabanı $B = \{X_u, X_v\}$ olmak üzere

$$E = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilen fonksiyonlara I .temel formun katsayıları denir. Bu takdirde I .temel form

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

şeklindedir.

$$h_{11} = -\langle X_u, N_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle$$

$$h_{12} = -\langle X_u, N_v \rangle = \langle X_v, N_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle$$

$$h_{22} = -\langle X_v, N_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlarına da II .temel formun katsayıları denir.

Bu takdirde II .temel form

$$II = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$$

şeklinde ifade edilir. F_I ve F_{II} , 2×2 simetrik matrisleri

$$F_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}, F_{II} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece M yüzeyinin ortalama eğrili ve Gauss eğrili, sırasıyla,

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{EG - F^2}$$

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2}$$

şeklindedir,[15-16].

Tanım 2.30. $M \subset \mathbb{E}^n$ şeklinde yüzey verilsin. $\forall P \in M$ noktasındaki, $\mathbb{E}^n$ in M yüzeyinde kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzeyi, $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruyaysa M nin doğrultmanı denir,[3].

Tanım 2.31. 3-boyutlu $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ şartını sağlayan diferensiyellenebilen birim hızlı bir α eğrisi

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n, t \rightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

kabul edelim. $\forall u \in I$ için $\alpha(u)$ noktasındaki $T_{\alpha(u)}$ teğet vektörü ve ana doğrunun doğrultman vektörünün lineer bağımsızlık şartını sağlayacak şekilde

$$l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$v \rightarrow l(v) = (\alpha_1(u) + vX_1, \alpha_2(u) + vX_2, \alpha_3(u) + vX_3)$$

doğrusu seçilsin. Bu durumda $1 \leq i \leq 3$ ise $X_i(u) \in \mathbb{R}$ skalarları $\alpha(u)$ noktasında olan doğrultman vektörünün bileşenleridir. l doğrusu eğri boyunca hareket etmesi ile, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen

$$\varphi: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$(u, v) \rightarrow \varphi(u, v) = (\alpha_1(u) + vX_1, \alpha_2(u) + vX_2, \alpha_3(u) + vX_3)$$

$\varphi(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ olacak biçimde bir regle yüzey elde edilir,[3].

Tanım 2.32. Bir eğri, $\varphi(u, v)$ regle yüzeyin ana doğrularının hepsini eksiksiz olarak dik keserse bu eğri regle yüzeyin ortogonal yörüngesi olarak adlandırılır,[3].

Tanım 2.33. $\varphi(u, v)$ şeklindeki bir regle yüzeyde iki doğrultmanın komşu olması durumunda orta dikmesinin esas doğrultman üzerine gelen ayağına boğaz (striksiyon veya merkez) noktası denir,[3].

Tanım 2.34. (u, v) şeklindeki bir regle yüzeyde ana doğru dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerlerine regle yüzeyin striksiyon eğrisi (boğaz çizgisi) denir,[3].

Tanım 2.35. Regle yüzeyin komşu olan ana iki doğrusu arasındaki uzaklığın en kısa olduğu durumda şartı sağlayan iki komşu ana doğru arasındaki açı ile oranına regle yüzeyin drali (dağılma parametresi) denir. Ayrıca yüzeyin dralinin diferensiyel gösterimi

$$\lambda = -\frac{\det(T, X, X')}{\langle X', X' \rangle}$$

şeklinde dir,[3].

Tanım 2.36. Ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olan bir regle yüzey açılabilir dir şeklinde ifade edilir,[3].

Önerme 2.37. $\vec{\varphi}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{X}(u)$ regle yüzeyin açılabilir olması için aynı zamanda $\det(\alpha', X, X') = 0$ olması gerekir,[7]

Tanım 2.38. α , başlangıç eğrisinin yay uzunluğu l ise,

$$\alpha: [0, l] \times [0, w] \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \alpha(u, v)$$

şeklinde tanımlanan $\alpha(u, v)$ fonksiyonuna, eğri evolüsyonu denir,[12].

Tanım 2.39. Bir

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u)$$

eğrisi için,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

ifadesine $\alpha(u, t)$ evolüsyonunun akışı denir,[12].

Tanım 2.40. $\mathbb{E}^2$ veya $\mathbb{E}^3$ de $\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right\| = 0$ ise $\alpha(u, t)$ eğri evolüsyonuna ve onun $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ akışına elastik olmayan denir,[11].

Tanım 2.41. $X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vw(u, p)$, $\|w(u)\| = 1, w' \neq 0, \det(w, w', \alpha') = 0$ ve u, α nın yay uzunluğu olsun. X in I .temel formun katsayıları, $\{E, F, G\}$,

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p} = 0$$

şartını sağlıyorsa $X(u, v, p)$ yüzey evolüsyonu ve $\frac{\partial X}{\partial p}$ akışı, elastik olmayan olarak adlandırılır,[12]

Tanım 2.42. $\mathbb{E}^3$ de $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ koordinatları olsun. $\alpha(u), u$ parametrelili eğri olsun. Kabul edelim ki α tekil olmayan eğri olmak üzere, $\sum_{i=1}^3 (\frac{d\alpha_i}{du})$ sıfırdan farklıdır. $\alpha(u), I \subset \mathbb{R}$ boştan farklı açık aralığında u parametrelili eğri olmak üzere;

$$\alpha = \alpha(u) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

dir. $\alpha(u)$ eğrisinin eğriliği $\kappa(u)$ sıfırdan farklıdır. $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatısı

$$\begin{aligned} T &= \frac{d\alpha}{du} \\ N &= \frac{dT}{du} \\ B &= T \times N \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir,[9].

$\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı Frenet çatısı $\{t, n, b\}$ ile modifiye edilmiş dik çatı $\{T, N, B\}$ arasındaki ilişkiler, κ eğrilik fonksiyonunun sıfır olmayan noktalarında şunlardır;

$$\begin{aligned} T &= t \\ N &= \kappa n \\ B &= \kappa b \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= 1 \\ \langle N, N \rangle &= \langle B, B \rangle = \kappa^2 \\ \langle T, N \rangle &= \langle T, B \rangle = \langle N, B \rangle = 0 \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.43. $\mathbb{E}^3$ de $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\kappa^2 & \frac{\kappa'}{\kappa} & \tau \\ 0 & -\tau & \frac{\kappa'}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

matris sistemi sağlanır,[3].

Tanım 2.44. α eğrisinin torsiyonu ve eğriliği;

$$\kappa = \|T'\|$$

$$\tau = \tau(s) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\kappa^2}$$

dir,[9].

Teorem 2.45. $\mathbb{E}^3$ de $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı olmak üzere

$$T \times N = B$$

$$N \times B = \kappa^2 T$$

$$B \times T = N$$

dir,[3]

İspat: $\mathbb{E}^3$ de $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet vektörleri ve $\{T, N, B\}$ eğriliğiyle modifiye edilmiş ortaogonal çatı vektörleri olsun. Serret-Frenet vektörlerinin vektörel çarpımları

$$t \times n = b, \quad n \times b = t, \quad b \times t = n$$

şeklindedir ve Serret-Frenet çatı vektörleri ile eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri arasındaki ilişki

$$T = t, \quad N = \kappa n, \quad B = \kappa b$$

olduğundan, bunlardan hareketle eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatıdaki vektörler çarpımlarına bakılacaktır.

$$t \times n = b$$

$$T \times \frac{N}{\kappa} = \frac{B}{\kappa}$$

$$T \times N = B$$

bulunur. Benzer şekilde

$$n \times b = t$$

$$\frac{N}{\kappa} \times \frac{B}{\kappa} = T$$

$$N \times B = \kappa^2 T$$

ve

$$b \times t = n$$

$$\frac{B}{\kappa} \times T = \frac{N}{\kappa}$$

$$B \times T = N$$

dir. Bu durumda eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı

$$T \times N = B$$

$$N \times B = \kappa^2 T$$

$$B \times T = N$$

şeklinde elde edilmiştir. Böylece ispat tamamlanmış olur,[8].

Örnek 2.1. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$

$$\alpha(u) = \left(\frac{3}{5}\sin(u), 1 + \cos(u), \frac{4}{5}\sin(u)\right)$$

eğrisi için

$$\alpha'(u) = \left(\frac{3}{5}\cos(u), -\sin(u), \frac{4}{5}\cos(u)\right)$$

dir. Normuna bakacak olursak

$$\begin{aligned}\|\alpha'(u)\| &= \sqrt{\frac{9}{25}\cos^2(u) + \sin^2(u) + \frac{16}{25}\cos^2(u)} \\ &= 1\end{aligned}$$

dir. O halde eğrim birim hızlı bir eğridir.

$$\alpha(u) = \left(\frac{3}{5}\sin(u), 1 + \cos(u), \frac{4}{5}\sin(u)\right)$$

birim hızlı eğrisini ele alalım. Tanım 2.42 kullanarak $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı ile $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı elemanları

$$\begin{aligned}t &= \alpha'(u) = \left(\frac{3}{5}\cos(u), -\sin(u), \frac{4}{5}\cos(u)\right) \\ n &= \frac{dt}{du} = \left(-\frac{3}{5}\sin(u), -\cos(u), -\frac{4}{5}\sin(u)\right) \\ b &= t \times n = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{3}{5}\cos(u) & -\sin(u) & \frac{4}{5}\cos(u) \\ -\frac{3}{5}\sin(u) & -\cos(u) & -\frac{4}{5}\sin(u) \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\cos(2u), 0, -\frac{3}{5}\cos(2u)\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha(u)$ eğrisinin eğriliği için;

$$\kappa = \|t'\| = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\sin^2(u) + \cos^2(u) + \frac{16}{25}\sin^2(u)\right)} = 1$$

bulunur.

$\alpha(u)$ eğrisinin torsiyonu için;

$$\tau = \tau(s) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\kappa^2} = 0$$

elde edilir. Buradan hareketle $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı ve $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı arasındaki ilişki

$$T = \alpha'(u) = \left(\frac{3}{5} \cos(u), -\sin(u), \frac{4}{5} \cos(u) \right)$$

$$N = \kappa n = \left(-\frac{3}{5} \sin(u), -\cos(u), -\frac{4}{5} \sin(u) \right)$$

$$B = \kappa b = \left(-\frac{4}{5} \cos(2u), 0, -\frac{3}{5} \cos(2u) \right)$$

şeklindedir. $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri bulunur. Ayrıca eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı için vektörel çarpımlar

$$T \times N = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{3}{5} \cos(u) & -\sin(u) & \frac{4}{5} \cos(u) \\ -\frac{3}{5} \sin(u) & -\cos(u) & -\frac{4}{5} \sin(u) \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{4}{5} \cos(2u), 0, -\frac{3}{5} \cos(2u) \right)$$

$$= B$$

$$N \times B = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{3}{5} \sin(u) & -\cos(u) & -\frac{4}{5} \sin(u) \\ -\frac{4}{5} \cos(2u) & 0 & -\frac{3}{5} \cos(2u) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{3}{5} \cos(u), -\sin(u), \frac{4}{5} \cos(u) \right)$$

$$= \kappa^2 T$$

$$B \times T = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{4}{5} \cos(2u) & 0 & -\frac{3}{5} \cos(2u) \\ \frac{3}{5} \cos(u) & -\sin(u) & \frac{4}{5} \cos(u) \end{bmatrix}$$

$$= \left(-\frac{3}{5} \sin(u), -\cos(u), -\frac{4}{5} \sin(u) \right)$$

$$= N$$

şeklinde elde edilir.

3. PARALEL REGLE YÜZEY AİLESİNİN YÜZEY EVOLÜSYONU

Teorem 3.1. $P(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$, $\|\beta(u, p)\| = 1$, $\beta' \neq 0$, $\det(\beta, \beta', \alpha') = 0$ ve u, α nin yay uzunluğu olsun. $P(u, v, p)$ 'nin I .temel formun katsayıları;

$$E = 1 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + v^2$$

$$F = \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle$$

$$G = 1$$

dir.

İspat:

Yüzey ailesinin evolüsyonunun u ve v ye göre kısmi türevleri

$$P_u = \alpha^{(1,0)}(u, p) + v\beta^{(1,0)}(u, p) = T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p)$$

$$P_v = \beta(u, p)$$

olur. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} E &= \langle P_u, P_u \rangle = \langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p), T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) \rangle \\ &= \langle T_\alpha(u, p), T_\alpha(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), vT_\beta(u, p) \rangle + \langle vT_\beta(u, p), T_\alpha(u, p) \rangle + \langle vT_\beta(u, p), vT_\beta(u, p) \rangle \\ &= 1 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + v^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} F &= \langle P_u, P_v \rangle = \langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &= \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &= \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G &= \langle P_v, P_v \rangle = \langle \beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.2. $P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$ tanımlanan $P(u, v, p)$ elastik olmayan yüzey evolüsyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle = -\langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle$$

ve

$$\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), \beta(u, p) \rangle = -\langle T_\alpha(u, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle$$

olmasıdır.

İspat: $P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$ yüzeyinin I .temel formun katsayıları;

$$E = 1 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + v^2$$

$$F = \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle$$

$$G = 1$$

şeklinde bulunur. Tanım 2.41'dan

$$E_p = \frac{\partial}{\partial p} (1 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + v^2) = 0$$

olmalıdır. Çarpımın türevinden;

$$2v(\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle) = 0$$

bulunur.

$$(\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle) = 0$$

ve

$$\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle = -\langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle$$

elde edilir. Tanım 2.41'dan

$$F_p = \frac{\partial}{\partial p} (\langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle) = 0$$

olmalıdır. Çarpımın türevinden;

$$\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), \beta(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle = 0$$

bulunur.

$$\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), \beta(u, p) \rangle = -\langle T_\alpha(u, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle$$

elde edilir.

$$G_p = 0$$

bulunur. Buradan hareketle E_p, F_p, G_p eşitliklerinin;

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

sağlandığı görülür ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3. $P(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$, $\|\beta(u, p)\| = 1, \beta' \neq 0, \det(\beta, \beta', \alpha') = 0$ ve u, α nın yay uzunluğu olsun. $P(u, v, p)$ 'nin II .temel formun katsayıları;

$$h_{11} = \langle N_\alpha(u, p) + vN_\beta(u, p), U(u, v, p) \rangle$$

$$h_{12} = \langle T_\beta(u, p), U(u, v, p) \rangle$$

$$h_{22} = \langle 0, U(u, v, p) \rangle = 0$$

dir.

İspat:

Yüzey evölüsyonunun u ve v ye göre ikinci dereceden kısmi türevleri

$$P_{uu} = T_{\alpha}^{(1,0)}(u, p) + vT_{\beta}^{(1,0)}(u, p) = N_{\alpha}(u, p) + vN_{\beta}(u, p)$$

$$P_{vv} = 0$$

$$P_{uv} = T_{\beta}(u, p)$$

ve normali;

$$U(u, v, p) = \frac{P_u \times p_v}{\|P \times P_v\|} = \frac{(T_{\alpha}(u, p) + vT_{\beta}(u, p)) \times \beta(u, p)}{\|(T_{\alpha}(u, p) + vT_{\beta}(u, p)) \times \beta(u, p)\|}$$

olur. Buradan hareketle;

$$h_{11} = \langle \phi_{uu}, U(u, v, p) \rangle = \langle N_{\alpha}(u, p) + vN_{\beta}(u, p), U(u, v, p) \rangle$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$h_{12} = \langle \phi_{uv}, U(u, v, p) \rangle = \langle T_{\beta}(u, p), U(u, v, p) \rangle$$

ve

$$h_{22} = \langle \phi_{vv}, U(u, v, p) \rangle = \langle 0, U(u, v, p) \rangle = 0$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.4. $P(u, v, p)$ yüzey ailesinin sırası ile Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

Tanım 2.29'dan

$$H = \frac{1}{2} \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{EG - F^2}$$

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2}$$

olduğundan

$$H = \frac{1}{2} \frac{\langle N_{\alpha}(u, p) + vN_{\beta}(u, p), U(u, v, p) \rangle - 2\langle T_{\beta}(u, p), U(u, v, p) \rangle \langle T_{\alpha}(u, p), \beta(u, p) \rangle}{(1 + 2v\langle T_{\alpha}(u, p), T_{\beta}(u, p) \rangle + v^2) - \langle T_{\alpha}(u, p), \beta(u, p) \rangle^2}$$

ve

$$K = \frac{-\langle T_{\beta}(u, p), U(u, v, p) \rangle^2}{(1 + 2v\langle T_{\alpha}(u, p), T_{\beta}(u, p) \rangle + v^2) - \langle T_{\alpha}(u, p), \beta(u, p) \rangle^2}$$

elde edilir.

Teorem 3.5. $P(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$, $\|\beta(u, p)\| = 1$, $\beta' \neq 0$, $\det(\beta, \beta', \alpha') = 0$ ve u, α nin yay uzunluğu olsun. $P(u, v, p)$ 'nin paralelinin $\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$ I.temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= 1 + r^2 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\ &\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \\ F &= \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\ G &= 1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \end{aligned}$$

dir.

İspat:

$$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$$

Yüzey ailesinin paraleli;

$$\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$$

Yüzey ailesinin paralelinin u ve v ye göre kısmi türevleri;

$$\begin{aligned} \tilde{P}_u &= \alpha_u(u, p) + v\beta_u(u, p) + rU_u(u, v, p) = T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p) \\ \tilde{P}_v &= \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \end{aligned}$$

olur. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} E &= \langle \tilde{P}_u, \tilde{P}_u \rangle = \langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p), T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) \\ &\quad + rU^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \\ &= \langle T_\alpha(u, p), T_\alpha(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), vT_\beta(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), rU^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \\ &\quad + \langle vT_\beta(u, p), T_\alpha(u, p) \rangle + \langle vT_\beta(u, p), vT_\beta(u, p) \rangle \\ &\quad + \langle vT_\beta(u, p), rU^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + \langle rU^{(1,0,0)}(u, v, p), T_\alpha(u, p) \rangle \\ &\quad + \langle rU^{(1,0,0)}(u, v, p), vT_\beta(u, p) \rangle + \langle rU^{(1,0,0)}(u, v, p), rU^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \\ &= 1 + r^2 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\ &\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} F &= \langle \tilde{P}_u, \tilde{P}_v \rangle = \langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\ &= \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G &= \langle \tilde{P}_v, \tilde{P}_v \rangle = \langle \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p), \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
&= \langle \beta(u, p), \beta(u, p) \rangle + \langle \beta(u, p), rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + \langle rU^{(0,1,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\
&\quad + \langle rU^{(0,1,0)}(u, v, p), rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
&= 1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.6. $P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$ tanımlanan yüzey evolüsyonunun paraleli $\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$ için $\tilde{P}(u, v, p)$ elastik olmayan yüzey evolüsyonu olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\begin{aligned}
&\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), vT_\beta(u, p) + U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + \\
&+ v\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) + T_\alpha(u, p) \rangle \\
&= -r\langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p) + vT_\beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(1,0,1)}(u, v, p), \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
&= -\langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\langle \beta^{(0,1)}(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle = -\langle \beta(u, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle$$

olmasıdır.

İspat: $\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$ yüzeyinin I.temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned}
E &= 1 + r^2 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\
&\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle \\
F &= \langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\
&\quad + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\
&\quad + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
G &= 1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Tanım 2.41'dan

$$\begin{aligned}
E_p &= \frac{\partial}{\partial p} (1 + r^2 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\
&\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle) = 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. Çarpımın türevinden;

$$\begin{aligned}
&2v\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle \\
&\quad + 2r\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle \\
&\quad + 2vr\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
& v\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta^{(0,1)}(u, p) \rangle \\
& + r\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle \\
& + vr\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle \\
& = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), vT_\beta(u, p) + U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + \\
& + v\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) + T_\alpha(u, p) \rangle \\
& = -r\langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p), U^{(1,0,1)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.41'dan

$$\begin{aligned}
F_p = \frac{\partial}{\partial p} & (\langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\
& + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\
& + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle) = 0
\end{aligned}$$

olmalıdır. Çarpımın türevinden;

$$\begin{aligned}
& \langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), \beta(u, p) \rangle + \langle T_\alpha(u, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
& + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), \beta(u, p) \rangle \\
& + v\langle T_\beta(u, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle + vr\langle T_\beta^{(0,1)}(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
& + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,1)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\
& + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta^{(0,1)}(u, p) \rangle + r^2\langle U^{(1,0,1)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
& + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p) + vT_\beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(1,0,1)}(u, v, p), \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
& + \langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \langle T_\alpha^{(0,1)}(u, p) + vT_\beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(1,0,1)}(u, v, p), \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle \\
& = -\langle T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta^{(0,1)}(u, p) + rU^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.41'dan

$$G_p = \frac{\partial}{\partial p} (1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle) = 0$$

olmalıdır. Çarpımın türevinden;

$$\langle \beta^{(0,1)}(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + \langle \beta(u, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle = 0$$

ve

$$\langle \beta^{(0,1)}(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle = -\langle \beta(u, p), U^{(0,1,1)}(u, v, p) \rangle$$

elde edilir.

Buradan hareketle E_p, F_p, G_p eşitliklerinin;

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

sağlandığı görülür ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.7. $P(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$, $\|\beta(u, p)\| = 1, \beta' \neq 0, \det(\beta, \beta', \alpha') = 0$ ve u, α nın yay uzunluğu olsun. $P(u, v, p)$ 'nin paralelinin $\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$ II.temel formun katsayıları;

$$h_{11} = \langle N_\alpha(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

$$h_{12} = \langle T_\beta(u, p) + rU^{(1,1,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

$$h_{22} = \langle rU^{(0,2,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

İspat:

$$P(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p)$$

Yüzey ailesinin paraleli;

$$\tilde{P}(u, v, p) = \alpha(u, p) + v\beta(u, p) + rU(u, v, p)$$

Yüzey evolüsyonunun u ve v ye göre kısmi türevleri

$$\tilde{P}_u = \alpha^{(1,0)}(u, p) + v\beta^{(1,0)}(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p)$$

Modifiye çatının özelliğinden

$$\tilde{P}_u = T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p)$$

elde edilir.

$$\tilde{P}_v = \beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p)$$

$$\tilde{P}_{uu} = T_\alpha^{(1,0)}(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p)$$

Modifiye çatının özelliğinden

$$\tilde{P}_{uu} = N_\alpha(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p)$$

elde edilir.

$$\tilde{P}_{vv} = rU^{(0,2,0)}(u, v, p)$$

$$\tilde{P}_{uv} = T_\beta(u, p) + rU^{(1,1,0)}(u, v, p)$$

ve normal;

$$\tilde{U}(u, v, p) = \frac{\tilde{P}_u \times \tilde{P}_v}{\|\tilde{P}_u \times \tilde{P}_v\|}$$

$$= \frac{(T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p)) \times (\beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p))}{\|(T_\alpha(u, p) + vT_\beta(u, p) + rU^{(1,0,0)}(u, v, p)) \times (\beta(u, p) + rU^{(0,1,0)}(u, v, p))\|}$$

olur. Buradan hareketle;

$$h_{11} = \langle \tilde{P}_{uu}, \tilde{U}(u, v, p) \rangle = \langle N_\alpha(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$h_{12} = \langle \tilde{P}_{uv}, \tilde{U}(u, v, p) \rangle = \langle T_\beta(u, p) + rU^{(1,1,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

ve

$$h_{22} = \langle \tilde{P}_{vv}, \tilde{U}(u, v, p) \rangle = \langle rU^{(0,2,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.8.

$$\begin{aligned} a = EG - F^2 &= (1 + r^2 + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\ &\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle)(1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle) \\ &\quad - (\langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle)^2 \end{aligned}$$

olsun. $\tilde{P}(u, v, p)$ yüzey ailesinin sırası ile Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği Tanım 2.29'dan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{EG - F^2} \\ K &= \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2a} (\langle N_\alpha(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle (1 + r^2 + 2\langle \beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle) \\ &\quad - 2\langle T_\beta(u, p) + rU^{(1,1,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle (\langle T_\alpha(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + r\langle T_\alpha(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + v\langle T_\beta(u, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + vr\langle T_\beta(u, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle + r\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), \beta(u, p) \rangle \\ &\quad + r^2\langle U^{(1,0,0)}(u, v, p), U^{(0,1,0)}(u, v, p) \rangle) + \langle rU^{(0,2,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle (1 + r^2 \\ &\quad + 2v\langle T_\alpha(u, p), T_\beta(u, p) \rangle + 2r\langle T_\alpha(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle + v^2 \\ &\quad + 2vr\langle T_\beta(u, p), U^{(1,0,0)}(u, v, p) \rangle) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{a} (\langle N_\alpha(u, p) + rU^{(2,0,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle \langle rU^{(0,2,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle \\ &\quad - \langle T_\beta(u, p) + rU^{(1,1,0)}(u, v, p), \tilde{U}(u, v, p) \rangle^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.9. $X(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$, $\|T(u, p)\| = 1$, $T' \neq 0$, $\det(T, T', \alpha') = 0$ ve u, α nin yay uzunluğu olsun. $X(u, v, p)$ 'in I .temel formun katsayıları;

$$E = 1 + v^2 \kappa^2$$

$$F = 1$$

$$G = 1$$

İspat: Yüzey evolüsyonunun u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$X_u = \alpha^{(1,0)}(u, p) + vT^{(1,0)}(u, p)$$

olur. Modifiye ortogonal çatının özeliğinden;

$$= vN(u, p) + T(u, p)$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$X_v = T(u, p)$$

olur. Buradan hareketle;

$$E =$$

$$= \langle X_u vN(u, p) + T(u, p), vN(u, p) + T(u, p) \rangle$$

Tanım 2.42 'dan

$$= 1 + v^2 \kappa^2$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$= \langle vN(u, p) + T(u, p), T(u, p) \rangle$$

$$= 1$$

ve

$$G = \langle X_v, X_v \rangle$$

$$= \langle T(u, p), T(u, p) \rangle$$

$$= 1$$

olarak bulunur.

Teorem 3.10. $X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$ tanımlanan $X(u, v, p)$ elastik olmayan yüzey evolüsyonu olabilmesi,

$$\kappa = c, \quad c = sbt.$$

olması ile mümkündür.

İspat: $X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$ yüzeyinin l .temel formun katsayıları;

$$E = 1 + v^2 \kappa^2$$

$$F = 1$$

$$G = 1$$

şeklinde bulunur. Tanım 2.41'dan

$$E_p = \frac{\partial}{\partial p}(1 + v^2 \kappa^2) = 0$$

olmalıdır. Buradan hareketle;

$$2v^2 \kappa \kappa' = 0$$

bulunur.

$$\kappa = c$$

şeklinde olmalıdır. ($c = \text{sabit}$)

$$F_p = 0$$

elde edilir.

$$G_p = 0$$

bulunur. Buradan hareketle E_p, F_p, G_p eşitliklerinin;

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

sağlandığı görülür ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.11. $X(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$, $\|T(u, p)\| = 1, T' \neq 0, \det(T, T', \alpha') = 0$ ve u, α nın yay uzunluğu olsun. $X(u, v, p)$ 'in II. temel formun katsayıları;

$$h_{11} = -v\tau\kappa$$

$$h_{12} = 0$$

$$h_{22} = 0$$

dir.

İspat:

Yüzey evolüsyonunun u ve v ye göre ikinci dereceden kısmi türevleri modifiye ortogonal çatı göz önünde bulundurularak;

$$X_{uu} = N(u, p) + v[B(u, p)\tau - \kappa^2 T(u, p) + \frac{\kappa'}{\kappa} N(u, p)]$$

$$X_{vv} = 0$$

$$X_{uv} = N(u, p)$$

ve normal;

$$\begin{aligned} U(u, v, p) &= \frac{[vN(u, p) + T(u, p)] \times T(u, p)}{\|[vN(u, p) + T(u, p)] \times T(u, p)\|} \\ &= \frac{[vN(u, p) \times T(u, p) + T(u, p) \times T(u, p)]}{\|[vN(u, p) \times T(u, p) + T(u, p) \times T(u, p)]\|} \\ &= \frac{-vB(u, p)}{\|-vB(u, p)\|} \end{aligned}$$

Modifiye ortogonal çatının özeliğinden;

$$= -\frac{1}{\kappa} B(u, p)$$

elde edilir. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} h_{11} &= \langle X_{uu}, U(u, v, p) \rangle \\ &= \langle N(u, p) + v[B(u, p)\tau - \kappa^2 T(u, p) + \frac{\kappa'}{\kappa} N(u, p)], -\frac{1}{\kappa} B(u, p) \rangle \end{aligned}$$

$$= -v\tau\kappa$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$h_{12} = \langle X_{uv}, U(u, v, p) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle N(u, p), -\frac{1}{\kappa} B(u, p) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h_{22} &= \langle X_{vv}, U(u, v, p) \rangle \\ &= \langle 0, -\frac{1}{\kappa} B(u, p) \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.12. $X(u, v, p)$ yüzey ailesinin sırası ile ortalama eğriligi ve Gauss eğriligi Tanım 2.29'dan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{EG - F^2} \\ K &= \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$H = -\frac{\tau}{2v\kappa}$$

ve

$$K = 0$$

elde edilir.

Teorem 3.13. $X(u, v, t)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$, $\|T(u, p)\| = 1$, $T' \neq 0$, $\det(T, T', \alpha') = 0$ ve u, α nin yay uzunluğu olsun. $X(u, v, p)$ 'in paralelinin $\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa} B(u, p)$ I. temel formun katsayıları;

$$E = 1 + (v\kappa + r\tau)^2$$

$$F = 1$$

$$G = 1$$

dir.

İspat:

$$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$$

Yüzey evolüsyonunun paraleli;

$$\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa} B(u, p)$$

Yüzey evolüsyonunun paralelinin u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\tilde{X}_u = N(u, p) \left(v + r \frac{\tau}{\kappa} \right) + T(u, p)$$

$$\tilde{X}_v = T(u, p)$$

olur. Buradan hareketle;

$$\begin{aligned} E = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle &= \langle N(u, p) \left(v + r \frac{\tau}{\kappa} \right) + T(u, p), N(u, p) \left(v + r \frac{\tau}{\kappa} \right) + T(u, p) \rangle \\ &= 1 + (v\kappa + r\tau)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned} F = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle &= \langle N(u, p) \left(v + r \frac{\tau}{\kappa} \right) + T(u, p), T(u, p) \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G = \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle &= \langle T(u, p), T(u, p) \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.14. $X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$ tanımlanan yüzey evolüsyonunun paraleli $\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa}B(u, p)$ için $\tilde{X}(u, v, p)$ elastik olmayan yüzey evolüsyonu olabilmesi,

$$\frac{\kappa'}{\tau'} = -\frac{r}{v}$$

olması ile mümkündür.

İspat: $\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa}B(u, p)$ yüzeyinin I .temel formun katsayıları;

$$E = 1 + (v\kappa + r\tau)^2$$

$$F = 1$$

$$G = 1$$

şeklinde bulunur. Tanım 2.41'dan

$$E_p = \frac{\partial}{\partial p} (1 + (v\kappa + r\tau)^2) = 0$$

olmalıdır. Buradan hareketle;

$$2(v\kappa + r\tau)(v\kappa' + r\tau') = 0$$

bulunur.

$$(v\kappa' + r\tau') = 0$$

ve

$$\frac{\kappa'}{\tau'} = -\frac{r}{v}$$

şeklinde olmalıdır.

$$F_p = 0$$

elde edilir.

$$G_p = 0$$

bulunur. Buradan hareketle E_p, F_p, G_p eşitliklerinin;

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

sağlandığı görülür ki ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.15. $X(u, v, p)$ yüzey ailesinin evolüsyonu p parametrizasyonu ile verilsin.

$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$, $\|T(u, p)\| = 1, T' \neq 0, \det(T, T', \alpha') = 0$ ve u, α nın yay uzunluğu olsun. $X(u, v, p)$ 'nin paralelinin $\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa}B(u, p)$ II.temel formun katsayıları;

$$h_{11} = -\tau(v\kappa + r\tau)$$

$$h_{12} = 0$$

$$h_{22} = 0$$

dir

İspat:

$$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p)$$

Yüzey ailesinin paraleli;

$$\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vT(u, p) - \frac{r}{\kappa}B(u, p)$$

Yüzey ailesinin u ve v değişkenlerine göre ikinci dereceden kısmi türevleri

$$\tilde{X}_{uu} = B(u, p) \left(v\tau + r \frac{\tau^2}{\kappa} \right) + (-v\kappa^2 - r\kappa\tau)T(u, p) + N(u, p) \left(1 + v \frac{\kappa'}{\kappa} + r \frac{\tau'}{\kappa} \right)$$

$$\tilde{X}_{vv} = 0$$

$$\tilde{X}_{uv} = N(u, p)$$

ve normal;

$$\hat{U}(u, v, p) = \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{\|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v\|} = -\frac{1}{\kappa}B(u, p)$$

olur. Buradan hareketle;

$$h_{11} = \langle \tilde{X}_{uu}, \hat{U}(u, v, p) \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \langle B(u, p) \left(v\tau + r \frac{\tau^2}{\kappa} \right) + (-v\kappa^2 - r\kappa\tau)T(u, p) + N(u, p) \left(1 + v \frac{\kappa'}{\kappa} + r \frac{\tau'}{\kappa} \right), -\frac{1}{\kappa}B(u, p) \rangle \\ &= -\tau(v\kappa + r\tau) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$h_{12} = \langle \tilde{X}_{uv}, \hat{U}(u, v, p) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle N(u, p), -\frac{1}{\kappa} B(u, p) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
h_{22} &= \langle \tilde{X}_{vv}, \tilde{U}(u, v, p) \rangle \\
&= \langle 0, -\frac{1}{\kappa} B(u, p) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.16. $\tilde{X}(u, v, p)$ yüzey ailesinin sırası ile Ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği

Tanım 2.29'dan

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{h_{11}G - 2h_{12}F + h_{22}E}{EG - F^2} \\
K &= \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{EG - F^2}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$H = -\frac{\tau}{2v\kappa + 2r\tau}$$

ve

$$K = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.1.

Bir α eğrisi

$$\alpha: [-2\pi, 2\pi] \subset R \rightarrow R^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u) = (\cos(u), \sin(u), u)$$

ve bu eğrinin,

$$\alpha: [-2\pi, 2\pi] \times [0, w] \rightarrow R^3$$

$$u \rightarrow \alpha(u, p) = \left(\frac{3}{5}p \cos(u), \frac{3}{5}p \sin(u), \frac{4}{5}pu \right)$$

biçiminde tanımlı $\alpha(u, p)$ evolüsyonu için;

$$\alpha'(u, p) = \left(-\frac{3}{5}p \sin(u), \frac{3}{5}p \cos(u), \frac{4}{5}p \right)$$

dir.

Tanım 2.42 kullanarak $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı ile $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı elemanları aşağıdaki gibi elde edilir.

$\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı elemanları

$$t = \alpha'(u) = \left(-\frac{3}{5}p \sin(u), \frac{3}{5}p \cos(u), \frac{4}{5}p \right)$$

$$\begin{aligned}
n &= \frac{dt}{du} = \left(-\frac{3}{5}p \cos(u), -\frac{3}{5}p \sin(u), 0 \right) \\
b &= t \times n = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\frac{3}{5}p \sin(u) & \frac{3}{5}p \cos(u) & \frac{4}{5}p \\ -\frac{3}{5}p \cos(u) & -\frac{3}{5}p \sin(u) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{12}{25}p^2 \sin(u), -\frac{12}{25}p^2 \cos(u), \frac{9}{25}p^2 \right)
\end{aligned}$$

vektörleri elde edilir.

$\alpha(u)$ eğrisinin eğriliği için;

$$\kappa = \|t'\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}p \cos(u), -\frac{3}{5}p \sin(u), 0 \right)} = \frac{3}{5}p$$

bulunur.

$\alpha(u, p)$ eğrisinin torsiyonu için;

$$\tau = \tau(s) = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\kappa^2} = \frac{4}{5}p$$

elde edilir. Buradan hareketle $\{t, n, b\}$ Serret-Frenet çatı ve $\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}
T(u, p) &= t(u, p) = \alpha'(u, p) = \left(-\frac{3}{5}p \sin(u), \frac{3}{5}p \cos(u), \frac{4}{5}p \right) \\
N(u, p) &= \kappa n(u, p) = \left(-\frac{9}{25}p^2 \cos(u), -\frac{9}{25}p^2 \sin(u), 0 \right) \\
B(u, p) &= \kappa b(u, p) = \left(\frac{36}{125}p^3 \sin(u), -\frac{36}{125}p^3 \cos(u), \frac{27}{125}p^3 \right)
\end{aligned}$$

$\{T, N, B\}$ eğrilik ile modifiye edilmiş ortogonal çatı vektörleri bulunur. (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. $\alpha(u, p)$ eğrisinin $p = i, i = 1, 2, 3, 4$ değerleri için evolüsyonu

$\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormali ile oluşturulan yüzey;

$$X(u, v, p) = \alpha(u, p) + vb(u, p)$$

olur. Böylece;

$$X(u, v, p) = (\frac{3}{5}p\cos(u) + \frac{12}{25}p^2v\sin(u), -\frac{12}{25}p^2v\cos(u) + \frac{3}{5}p\sin(u), \frac{4}{5}pu + \frac{9}{25}p^2v)$$

elde edilir.

$X(u, v, p)$ yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre türevleri;

$$X_u = (\frac{12}{25}p^2v\cos(u) - \frac{3}{5}p\sin(u), \frac{3}{5}p\cos(u) + \frac{12}{25}p^2v\sin(u), \frac{4}{5}p)$$

ve

$$X_v = (\frac{12}{25}p^2\sin(u), -\frac{12}{25}p^2\cos(u), \frac{9}{25}p^2)$$

şeklinde bulunur.

Yüzeyin normali;

$$U(u, v, p) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} U(u, v, p) &= \left(\frac{125\cos(u) + 36pvsin(u)}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}, \frac{-36pvcos(u) + 125sin(u)}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}, -\frac{48pv}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} (125\cos(u) + 36pvsin(u), -36pvcos(u) + 125sin(u), -48pv) \end{aligned}$$

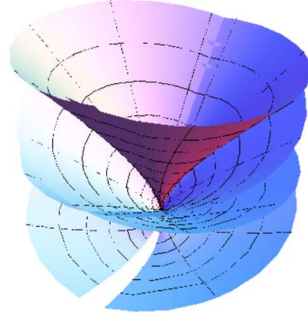
olarak bulunur. Yüzey $X(u, v, p)$ ailesinin paraleli;

$$\tilde{X}(u, v, p) = X(u, v, p) + rU(u, v, p)$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} \tilde{X}(u, v, p) &= \alpha(u, p) + vb(u, p) + rU(u, v, p) \\ &= (\frac{3}{5}p\cos(u) + \frac{12}{25}p^2v\sin(u) \\ &\quad + \frac{r(125\cos(u) + 36pvsin(u))}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}, -\frac{12}{25}p^2v\cos(u) + \frac{3}{5}p\sin(u) \\ &\quad + \frac{r(-36pvcos(u) + 125sin(u))}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}, \frac{4pu}{5} + \frac{9p^2v}{25} - \frac{48prv}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormalı (b) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli

$\tilde{X}(u, v, p)$ yüzey ailesinin u ve v ye göre kısmi türevleri;

$$\tilde{X}_u = \left(\frac{12}{25}p^2v\cos(u) + \frac{r(36pvcos(u) - 125sin(u))}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} - \frac{3}{5}psin(u), \frac{3}{5}pcos(u) + \frac{12}{25}p^2vsin(u) \right. \\ \left. + \frac{r(125cos(u) + 36pvsin(u))}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}, \frac{4}{5}p \right)$$

ve

$$\tilde{X}_v = \left(\frac{12}{25}p^2Sin(u) + \frac{36prsin(u)}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} \right. \\ \left. - \frac{4896p^2rv(125cos(u) + 36pvsin(u))}{(15625 + 4896p^2v^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{12}{25}p^2Cos[u] \right. \\ \left. - \frac{36prcos(u)}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} - \frac{4896p^2rv(-36pvcos(u) + 125sin(u))}{(15625 + 4896p^2v^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{9p^2}{25} \right. \\ \left. + \frac{235008p^3rv^2}{(15625 + 4896p^2v^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{48pr}{\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} \right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{X}(u, v, p)$ yüzey ailesinin I .temel formunun katsayıları;

$$E = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_u \rangle = p^2 + \frac{144p^4v^2}{625} + \frac{r^2(15625 + 1296p^2v^2)}{15625 + 4896p^2v^2} + \frac{6pr(625 + 144p^2v^2)}{25\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}$$

ve

$$F = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = -\frac{60pr(31250p + 9792p^3v^2 + 75r\sqrt{15625 + 4896p^2v^2})}{(15625 + 4896p^2v^2)^{3/2}}$$

ve

$$G = \langle \tilde{X}_v, \tilde{X}_v \rangle = \frac{9}{25} p^2 (p^2 + \frac{6250000r^2(390625 + 166464p^2v^2)}{(15625 + 4896p^2v^2)^3})$$

olur.

$$E_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 + \frac{144p^4v^2}{625} + \frac{r^2(15625 + 1296p^2v^2)}{15625 + 4896p^2v^2} + \frac{6pr(625 + 144p^2v^2)}{25\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}} \right) = 0$$

Tanım 2.41'dan dolayı olmalıdır. Buradan;

$$E_p = \frac{576p^3v^2}{625} + \frac{6r(9765625 + 432p^2v^2(15625 + 3264p^2v^2))}{25(15625 + 4896p^2v^2)^{3/2}} + p \left(2 - \frac{112500000r^2v^2}{(15625 + 4896p^2v^2)^2} \right)$$

olur. Benzer şekilde;

$$F_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{60pr(31250p + 9792p^3v^2 + 75r\sqrt{15625 + 4896p^2v^2})}{(15625 + 4896p^2v^2)^{3/2}} \right) = 0$$

$$F_p = -60r \left(\frac{1171875r\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}}{(15625 + 4896p^2v^2)^{5/2}} + \frac{4p(244140625 + 3672pv^2(31250p + 3264p^3v^2 - 25r\sqrt{15625 + 4896p^2v^2}))}{(15625 + 4896p^2v^2)^{5/2}} \right)$$

ve

$$G_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{9}{25} p^2 (p^2 + \frac{6250000r^2(390625 + 166464p^2v^2)}{(15625 + 4896p^2v^2)^3}) \right) = 0$$

$$G_p = \frac{36}{25} p(p^2 - \frac{3125000r^2(-6103515625 + 88128p^2v^2(-15625 + 9248p^2v^2))}{(15625 + 4896p^2v^2)^4})$$

olur.

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

yüzey evülasyonu elastik olmayan olması için;

$$p \cong -1.08231, v = 2, r = 3$$

olmasıdır.

Aynı yüzeyi benzer şekilde Modifiye edilmiş ortogonal çatıya göre oluşturduğumuzda;

$$Y(u, v, p) = \alpha(u, p) + vB(u, p)$$

yüzeyi oluşur. Böylece;

$$Y(u, v, p) = (\frac{3}{5} p \cos(u) + \frac{36}{125} p^3 v \sin(u), -\frac{36}{125} p^3 v \cos(u) + \frac{3}{5} p \sin(u), \frac{4}{5} pu + \frac{27}{125} p^3 v)$$

$Y(u, v, p)$ yüzeyinin u ve v değişkenlerine göre türevleri;

$$Y_u = (\frac{36}{125} p^3 v \cos(u) - \frac{3}{5} p \sin(u), \frac{3}{5} p \cos(u) + \frac{36}{125} p^3 v \sin(u), \frac{4}{5} p)$$

ve

$$Y_v = (\frac{36}{125} p^3 \sin(u), -\frac{36}{125} p^3 \cos(u), \frac{27}{125} p^3)$$

olarak bulunur. Yüzeyin normali;

$$U(u, v, p) = \frac{Y_u \times Y_v}{\|Y_u \times Y_v\|}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} U(u, v, p) &= \left(\frac{625\cos(u) + 108p^2v\sin(u)}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}}, \frac{-108p^2v\cos(u) + 625\sin(u)}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}}, -\frac{144p^2v}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}} \right) \\ &= \frac{1}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}} (625\cos(u) + 108p^2v\sin(u), -108p^2v\cos(u) \\ &\quad + 625\sin(u), -144p^2v) \end{aligned}$$

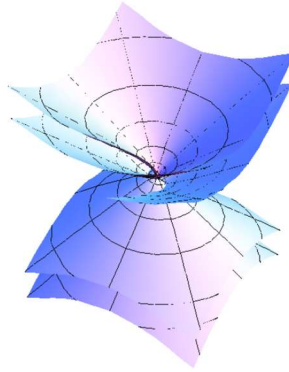
olarak bulunur. $Y(u, v, p)$ yüzey ailesinin paraleli;

$$\tilde{Y}(u, v, p) = Y(u, v, p) + rU(u, v, p)$$

olur.

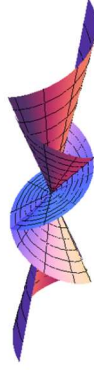
$$\begin{aligned} \tilde{Y}(u, v, p) &= \alpha(u, p) + vB(u, p) + rU(u, v, p) \\ &= \left(\frac{3}{5}p\cos(u) + \frac{36}{125}p^3v\sin(u) \right. \\ &\quad + \frac{r(625\cos(u) + 108p^2v\sin(u))}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}}, -\frac{36}{125}p^3v\cos(u) + \frac{3}{5}p\sin(u) \\ &\quad \left. + \frac{r(-108p^2v\cos(u) + 625\sin(u))}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}}, \frac{4pu}{5} + \frac{27p^3v}{125} - \frac{144p^2rv}{5\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (Şekil 3.3).

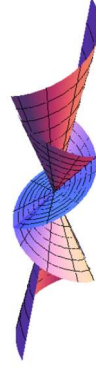


Şekil 3.3. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormali (B) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli

$\alpha(u, p)$ eğrisi ve binormali ile oluşturulan yüzeye benzer olarak teğeti ve normali ile de oluşturulabilir. ((Şekil 3.4), (Şekil 3.5), (Şekil 3.6), (Şekil 3.7)).



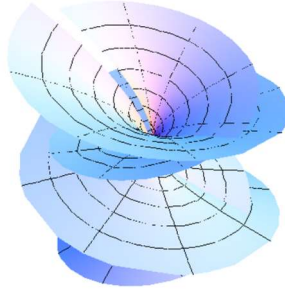
Şekil 3.4. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve teğeti (t) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli



Şekil 3.5. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve teğeti (T) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli



Şekil 3.6. Frenet-Serret çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve normali (n) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli



Şekil 3.7. Modifiye ortogonal çatıya göre göre $\alpha(u, p)$ eğrisi ve normali (N) ile oluşturulan yüzey ailesinin paraleli

$\tilde{Y}(u, v, p)$ yüzey evolüsyonunun u ve v değişkenlerine göre kısmi türevleri;

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_u = & \left(\frac{36}{125} p^3 v \cos(u) + \frac{r(108p^2 v \cos(u) - 625 \sin(u))}{5\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}} - \frac{3}{5} p \sin(u), \frac{3}{5} p \cos(u) \right. \\ & \left. + \frac{36}{125} p^3 v \sin(u) + \frac{r(625 \cos(u) + 108p^2 v \sin(u))}{5\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}}, \frac{4}{5} p \right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_v = & \left(\frac{36}{125} p^3 \sin(u) + \frac{108p^2 r \sin(u)}{5\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}} \right. \\ & - \frac{1296p^4 r v (625 \cos(u) + 108p^2 v \sin(u))}{5(15625 + 1296p^4 v^2)^{3/2}}, -\frac{36}{125} p^3 \cos(u) \\ & - \frac{108p^2 r \cos(u)}{5\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}} - \frac{1296p^4 r v (-108p^2 v \cos(u) + 625 \sin(u))}{5(15625 + 1296p^4 v^2)^{3/2}}, \frac{27p^3}{125} \\ & \left. + \frac{186624p^6 r v^2}{5(15625 + 1296p^4 v^2)^{3/2}} - \frac{144p^2 r}{5\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}} \right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\tilde{Y}(u, v, p)$ Yüzey ailesinin I .temel formun katsayıları;

$$\begin{aligned}E = \langle \tilde{Y}_u, \tilde{Y}_u \rangle = & p^2 + \frac{1296p^6 v^2}{15625} + \frac{6}{625} p r \sqrt{15625 + 1296p^4 v^2} + \frac{1}{25} r^2 (9 \\ & + \frac{250000}{15625 + 1296p^4 v^2})\end{aligned}$$

ve

$$F = \langle \tilde{Y}_u, \tilde{Y}_v \rangle = 36p^2 r \left(-\frac{75r}{15625 + 1296p^4 v^2} - \frac{2p}{\sqrt{15625 + 1296p^4 v^2}} \right)$$

ve

$$G = \langle \tilde{Y}_v, \tilde{Y}_v \rangle = \frac{81p^6}{625} + \frac{20250000p^4r^2}{(15625 + 1296p^4v^2)^2}$$

olarak bulunur.

$$E_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(p^2 + \frac{1296p^6v^2}{15625} + \frac{6}{625}pr\sqrt{15625 + 1296p^4v^2} + \frac{1}{25}r^2 \left(9 + \frac{250000}{15625 + 1296p^4v^2} \right) \right) = 0$$

Tanım 2.41'dan dolayı olmalıdır. Buradan;

$$E_p = 2p + \frac{7776p^5v^2}{15625} - \frac{51840000p^3r^2v^2}{(15625 + 1296p^4v^2)^2} + \frac{6r(15625 + 3888p^4v^2)}{625\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}}$$

olur. Benzer şekilde;

$$F_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(36p^2r \left(-\frac{75r}{15625 + 1296p^4v^2} - \frac{2p}{\sqrt{15625 + 1296p^4v^2}} \right) \right) = 0$$

ve

$$F_p = -\frac{216pr}{(15625 + 1296p^4v^2)^{5/2}} \left(390625r\sqrt{15625 + 1296p^4v^2} + p \left(244140625 + 432p^3v^2 \left(62500p + 1296p^5v^2 - 75r\sqrt{15625 + 1296p^4v^2} \right) \right) \right)$$

olur. Benzer şekilde,

$$G_p = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{81p^6}{625} + \frac{20250000p^4r^2}{(15625 + 1296p^4v^2)^2} \right) = 0$$

ve

$$G_p = \frac{486p^5}{625} - \frac{81000000p^3r^2(-15625 + 1296p^4v^2)}{(15625 + 1296p^4v^2)^3}$$

$$E_p = F_p = G_p = 0$$

yüzey evülasyonunun elastik olmayan olması için;

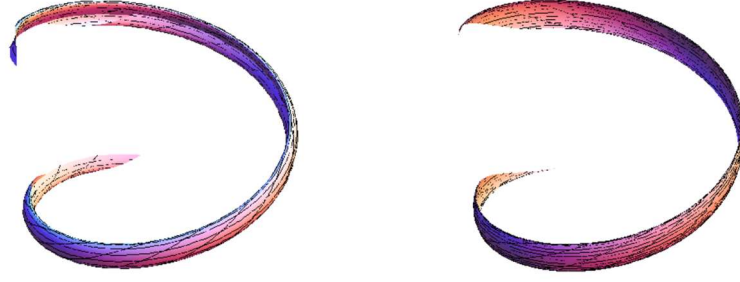
$$p \cong -1.57743, v = 2, r = 3$$

olması gerekir.

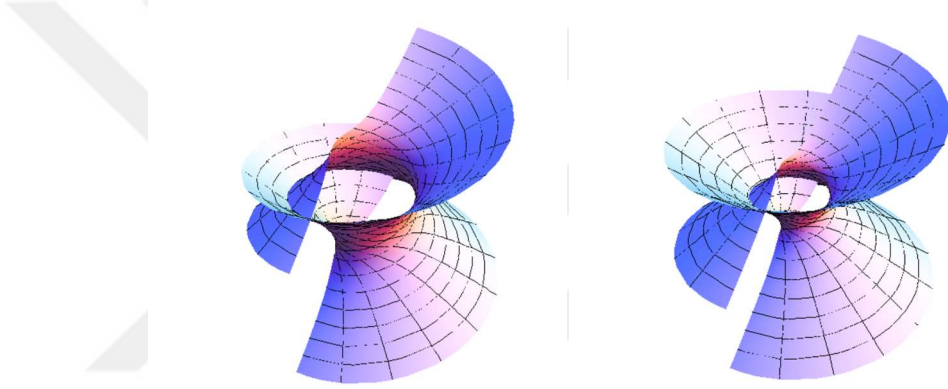
$$\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vb(u, p) + rU(u, v, p)$$

$$\tilde{Y}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vB(u, p) + rU(u, v, p)$$

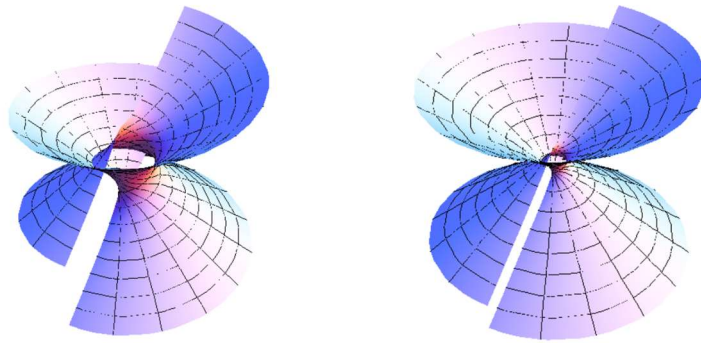
$X(u, v, p)$ ve $Y(u, v, p)$ yüzeylerinin paralellerinin yüzey evölüsyonlarının $v = 2, r = 3$ ve $u = [-2\pi, 2\pi]$ değerleri arasında Frenet-Serret çatı ve modifiye ortogonal çatıya göre görüntüsü karşılaştırmalı olarak p zamanına göre değişimleri sırasıyla Şekil 3.8. , Şekil 3.9. ve Şekil 3.10. da gösterilmiştir.



Şekil 3.8. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 1$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılması



Şekil 3.9. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 2$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılması



Şekil 3.10. Bu yüzey evolüsyonunun Frenet-Serret çatıya ve modifiye ortogonal çatıya ve $p = 3$ zamanına göre görüntüsünün karşılaştırılma

4. SONUÇLAR

Sonuç olarak, bu tezde

$$\tilde{X}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vb(u, p) + rU(u, v, p)$$

$$\tilde{Y}(u, v, p) = \alpha(u, p) + vB(u, p) + rU(u, v, p)$$

yüzey ailelerinin bazı karakterizasyonları elde edilerek, Wolfram Mathematica programı yardımıyla şekilleri elde edilmiştir.



ÖNERİLER

Çalışmanın sonuçları, endüstriyel tasarım, matematiksel modelleme ve uygulamalı geometri gibi alanlarda kullanılabilir. Elde edilen bilgiler, mühendislik ve tasarım alanlarında çeşitli uygulamalara ilham verebilir, bu da toplumsal faydaya katkı sağlar. Bu çalışmanın sonuçları, ilgili endüstrilerdeki profesyoneller ve araştırmacılar için değerli olacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel Geometri*. Ankara: Nobel Yayınları.
- [2] Hacısalihoglu, H. (2000), *Diferensiyel Geometri Cilt I*. Ankara:Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.
- [3] Bükcü, B., & Karacan, M. K. (2016). On the modified orthogonal frame with curvature and torsion in 3-Space. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(1), 184-188.
- [4] Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc, New Jersey.
- [5] O'Neil, B. (1997). *Elementary Differential Geometry Revised Second Edition*. Academic Press.
- [6] Kwon, D. Y., Park, F. C., & Chi, D. P. (2005). Inextensible flows of curves and developable surfaces. *Applied Mathematics Letters*, 18(10), 1156–1162.
- [7] Savcı, Ü. Z., Görgülü, A., & Ekici, C. (2015). Parallel surface of ruled Weingarten surfaces. *NTMSCI*, 3(4), 237-246.
- [8] Akdemir A.A. (2021).*Eğrilik ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Eğrilik*,Yüksek Lisans tezi,ErciyesÜniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
- [9] Sasai, T. (1984). The fundamental theorem of analytic space curves and apparent singularities of Fuchsian differential equations. *Tohoku Mathematical Journal*, 36, 17-24.
- [10] Struik, D. J. (2011). *Kısa Matematik Tarihi*. Doruk Yayıncılık.
- [11] Kwon, D. Y., & Park, F. C. (1999). *Evolution of inelastic plane curves*, Applied Mathematics Letters, 12, 115-119.
- [12] Kwon, D.Y. ; Park, F.C. ; Chi, D.P. *Inextensible flows of curves and developable surfaces*, Appl. Math. Lett., 2005,18, 1156-1162
- [13] Akdağ, K. (2023). *Successor Eğrileri ve Eş Uzaklıklı Regle Yüzeyleri*,Doktora Tezi. Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [14] Yazar, T. (2019). *Mimarlıkta Yüzey Pannelleme Yaklaşımlarının Gauss Eğriliği İle İlişkisi*. Megaron E-Dergisi, doi:10.5505/MEGARON.2018.50103

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf GÜZEL

■■■■■■■■■■

114

■■■■■■■■■■

114

114

11

114

114

© 2006 The Authors

██████████

© 2006 The Authors

© 2006 The Authors

© 2006 The Authors

11

11

7

7

■■■■■■■■■■

██████████
