

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİDAN DEMİRBİLEK

DENİZLİ, OCAK-2024

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİDAN DEMİRBİLEK

DENİZLİ, OCAK-2024

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

FİDAN DEMİRBILEK

ÖZET

**LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRO DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FİDAN DEMİRBİLEK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ FİLİZ
DENİZLİ, OCAK-2024

Yapmış olduğumuz bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde lineer olmayan Volterra integro diferansiyel denklemlerle ilgili literatür bilgisi ve yapılan çalışmanın amacı verilmiştir. İkinci bölümde integral denklemler tanımı ve çeşitleri verilmiş, Volterra integral tipindeki denklemlerin kullanım alanları ve çözümünün varlığı üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde, Volterra integral denklemleri için nümerik yöntemler verilmiş, bu yöntemler örneklere uygulanarak nümerik çözüm tabloları elde edilmiştir. Dördüncü bölümde ise lineer olmayan Volterra-integro diferansiyel denklemlere geçiş yapılarak, bu denklemler üzerinde durulmuş ve nümerik metodlar uygulanarak grafikler elde edilmiştir. Son bölümde ise lineer olmayan integro diferansiyel denklemlere Euler metodundan başlayarak Runge-Kutta-6 metoduna kadar birçok nümerik yöntem uygulanmış, uygun bilgisayar programları kullanılarak yüksek mertebeden yakınsak düzgün grafikler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER:Butcher tablosu, lineer olmayan Volterra integral denklemler, nümerik çözümler.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MSC THESIS

FİDAN DEMİRBILEK

**PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ FİLİZ)

DENİZLİ, JANUARY-2024

This study consists of five main sections. In the first section, the literature on nonlinear Volterra integro differential equations and the aim of the study are given. In the second section, the definition and types of integral equations are given, the usage areas of Volterra integral type equations and the existence of solutions are emphasised. In the third section, numerical methods for Volterra integral equations are given and numerical solution tables are obtained by applying these methods to examples. In the fourth chapter, nonlinear Volterra-integro differential equations are discussed and numerical methods are applied to these equations and graphs are obtained. In the last section, numerical methods ranging from Euler's method to Runge-Kutta-6 method are applied to nonlinear integro differential equations and high order convergent smooth graphs are obtained by using appropriate computer programmes.

KEYWORDS: Butcher table, nonlinear Volterra integral equations, numerical solutions.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. İNTEGRAL DENKLEMLER	4
2.1 İntegral Denklem Modeli	5
2.2 II. Tip Volterra İntegral Denklem Çözümünün Varlığı	6
3. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER	8
3.1 Dikdörtgenler Kuralı	9
3.2 Yamuklar Kuralı	10
3.3 Yamuklar+Simpson Kuralları	10
3.3.1 Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$	11
3.3.2 Simpson $\frac{1}{3}$ + Yamuklar Kuralı	12
3.4 Simpson Kuralları	14
3.4.1 Simpson I Kuralı	14
3.4.2 Simpson II Kuralı	15
3.5 Nümerik Örnekler	17
4. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA-İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER	21
4.1 Tekli Türlerin Büyümesi	21
4.2 Lojistik Diferansiyel Denklem	23

4.2.1 Lojistik Diferansiyel Denklem İçin Nümerik Yöntemler	25
4.3 Populasyon ve Hasat	29
4.3.1 Genel Büyüme	29
4.4 Lineer Olmayan İntegro Diferansiyel Denklem	30
4.5 Lojistik Volterra-İntegro Diferansiyel Denklem	32
5. LİNEER OLMAYAN İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL YÖNTEMLER	34
5.1 Euler Metodu	34
5.2 Theta Metodu	36
5.3 Runge-Kutta 4 Metodu	39
5.4 Runge-Kutta Fehlberg Metodu	41
5.5 Runge-Kutta Verner Metodu	51
5.6 Runge-Kutta Verner Metodu+6. Mertebe Newton-Cotes	59
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	68
5. KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	71

SEMBOL LİSTESİ

- $\mathcal{K}(t, s, u(s))$: Lineer olmayan integral denklemin çekirdeği
 $k(t - s)$: Konvolüsyon tipdeki integral denklemin çekirdeği



ÖNSÖZ

Bu çalışmayı tamamlamamda bana rehberlik eden danışman hocam Prof. Dr. Ali FİLİZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tezimi başarıyla tamamlamak için gerekli bilgi, yönlendirme ve motivasyonu sağladığı için minnettarım.

Ayrıca, bu süreçte desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Sinan DEMİRBİLEK'e ve değerli çocuklarım Eymen ve Ecem'e teşekkür etmek istiyorum. Sabrınız, anlayışınız ve sürekli destekleriniz olmadan bu çalışmayı tamamlamak mümkün olmazdı.

Son olarak, bu tezi tamamlamamda katkıda bulunan tüm arkadaşlarım ve aileme teşekkür ederim.

Teşekkürlerimle,

Fidan DEMİRBİLEK

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1: $u'(t) = au(t)$, $a = 5$, $u_0 = 1$, $h = 0.1$ Euler yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözüm grafiği	23
Şekil 4.2: (4.3) Lojistik büyüme denkleminin, $a = 0.5$ ve $b = 1$ ve $u(0) = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ başlangıç değerleri için elde edilmiş nümerik çözüm grafiği	25
Şekil 4.3: (4.3) lojistik diferansiyel denklemine $a = 1$; $b = 0.5$; $c = 0.1$; $h = 0.5, 0.25, 0.125$ $t_{max} = 20$, $u_0 = 1$ için Runge-Kutta-4 metodunun nümerik çözüm grafiği	27
Şekil 5.1: (5.1) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan integro-diferansiyel denkleminin, $h = 0.01$, $a = 0.5$, $b = 0$, $c = 1$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 1$ için Euler metodu ile nümerik çözümünün grafiği	35
Şekil 5.2: (5.1) Lineer olmayan integro-diferansiyel denkleminin, $h = 0.01$, $a = 0.5$, $b = 1$, $c = \mu = 1$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 1$ için θ -metodu kullanılarak elde edilen nümerik çözümünün grafiği . . .	38
Şekil 5.3: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.05$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta 4 ve integral terimi için Simpson $\frac{1}{3}$ + yamuklar metodunun çözüm grafiği . . .	42
Şekil 5.4: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Fehlberg ve integral terimi için Boole metodunun çözüm grafiği	50
Şekil 5.5: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Verner ve integral terimi için Boole metodunun çözüm grafiği	59
Şekil 5.6: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Verner ve integral terimi için altıncı mertebeden Newton-Cotes formülleri uygulanarak elde edilen nümerik çözüm grafiği	67

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 3.1: Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı	11
Tablo 3.2: Simpson $\frac{1}{3}$ + Yamuklar kuralı	13
Tablo 3.3: Simpson I Kuralı	15
Tablo 3.4: Simpson II Kuralı	16
Tablo 3.5: YAMUKLAR KURALI ÖRNEK (3.4)	18
Tablo 3.6: YAMUKLAR + SİMPSON 1/3 KURALI ÖRNEK (3.4)	18
Tablo 3.7: SİMPSON I ÖRNEK (3.4)	19
Tablo 3.8: SİMPSON II ÖRNEK (3.4)	19
Tablo 3.9: YAMUKLAR ÖRNEK (3.13)	20

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Gerçek hayatta fen bilimleri (Biyoloji, Kimya ve Fizik), mühendislik, tıp gibi uygulamalı bilimlerde pek çok problemin matematiksel modeli integral denklem yardımıyla ifade edilmektedir. İntegral işareti altında bilinmeyen fonksiyonu barındıran denklemler integral denklemler olarak adlandırılmaktadır.

Bilinmeyen fonksiyonun türev veya türevlerinden oluşan denklemler ise diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Türev hesaplanırken fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanıldığından, diferansiyel denklemler yerel (lokal) denklemlerdir. Tüm uzay üzerinde integral alınmasını gerektiren denklemler, integral denklemlerdir. Bu sebeple intagral denklemler evrensel denklemlerdir.

İntegral denklemler ve diferansiyel denklemler güçlü bir ilişki içindedir. Bazı problemler, tek bir denklem ile ifade edilemeyebilirler. Bu sebeple problem, birden çok diferansiyel, integral veya bunların doğrusal veya doğrusal olmayan bilinmeyen fonksiyonun bileşimlerinden oluşabilir.

Fiziksel olayları modellemede bir çok diferansiyel ve integral denklemi aynı anda barındıran integro-diferansiyel denklemler kullanılmaktadır.

Integro-diferansiyel denklemler, doğa olayları, teknolojik süreçler ve sosyal fenomenlerin matematiksel modellenmesi için önemli bir araçtır. Bu tür denklemler, bir sistem veya sürecin geçmiş, şimdiki ve gelecekteki davranışları arasındaki karmaşık ilişkileri yakalamak için kullanılır.

Nükleer reaktörlerin modellenmesi, elektrik devrelerinin davranışını modellenmesi ve analiz edilmesi, bir cismin hareketinin veya bir sistemin dinamik davranışının modellenmesi (füze, roket, uydu ve gezegen hareketlerinin belirlenmesi), kimyasal reaksiyonların zamanla nasıl ilerleyeceğinin modellenmesi, hastalıkların yayılması, popülasyonların büyümesi veya azalması gibi biyolojik süreçlerin modellenmesi, ısı transferi ve maddenin difüzyonu gibi durumların modellenmesi, ekonomik modellerde, gelecekteki değerlerin geçmiş davranışlara bağlı olarak

tahmin edilmesi, otomatik kontrol sistemlerinin tasarımı ve analizi sırasında, sistem davranışının zaman içindeki değişiminin modellenmesi için integro-diferansiyel denklemler kullanılır(Cushing, 1977, Filiz, 2000, Ishak ve Ahmad, 2016).

Sınır değerlerinden en az biri değişken olan integro diferansiyel denklemlere Volterra integral denklemi denir.

Volterra integral denklemi ilk defa Vito Volterra tarafında ortaya konulmuş ve 1908 yılında Emile Picard'ın danışmalığında Traian Lalescu tarafından yazılan “Sur les équations de Volterra” başlıklı tezinde incelenmiştir.

1911 tarihinde, Lalescu integral denklemler üzerinde ilk kitabı yazmıştır.

İtalyan matematikçi ve Ekolog olan Vito Volterra 1920'li yıllarda Adriyatik'te bulunan canlılarının matematiksel modellenmesini yaparak işe başlamıştır.

Tricomi (1957), ve Smithies (1958), “Integral Equations” adlı çalışmalarında integral denklemlerle ilgili önemli çözümler sunmaktadır.

Miller (1971), “Nonlinear Volterra Integral Equations” adlı kitabında lineer olmayan Volterra integral denklemler üzerine farklı çalışmalar yapmıştır.

Bunun yanında, 1977 yılında C. T. H. Baker tarafında yazılan 1034 sayfadan oluşan “The Numerical Solution of Integral Equations” başlıklı kitap dünya çapında binlerce kez referans verilmiştir ve verilmeye devam etmektedir.

Linz (1985)'de Volterra integral denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri detaylı bir şekilde verilmektedir.

Burden and Faires (1997), “Numerical Analysis” adlı kitabında nümerik analiz üzerine birçok çalışma yapmıştır.

Yukarıda sözü edilen Volterra integral denklemler günümüze kadar çalışılmaya devam etmiş ve hala çalışılmaya devam etmektedir.

Erdem (2004), Lotka - Volterra sistemleri ve sayısal çözümleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Tunç (2009), Parabolik Volterra İntegro-diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri ve tarihçesi hakkında bilgi vermiştir.

2013-2015 yılları arasında Filiz (2013^{a,b})’de Volterra integral denklemlerinin yüksek mertebeden nümerik çözümleri için yeni metotlar geliştirilmiş ve ulusal ve uluslararası birçok makalelerde referans olarak gösterilmeye devam etmektedir.

Wazwaz (2015), “A First Course in Integral Equations” kitabında Volterra integral denklem türleri ile ilgili farklı çözüm yöntemlerini açıklamaktadır.

Ishak ve Ahmad (2016), “Development of extended trapezoidal method for numerical solution of Volterra integro-differential equations” adlı çalışmalarında Volterra integro-diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümü için genişletilmiş yamuk yönteminin geliştirilmesi üzerine çözümler elde etmiştir.

Majid ve Mohamed (2019), “Fifth Order Multistep Block Method for Solving Volterra-Integro-Differential Equations of Second Kind” adlı çalışmasında ikinci tip Volterra integral denklem için beşinci mertebeden block metodu kullanarak çözüm elde etmiştir.

Volterra integral denklemlerin her zaman gerçek çözümünün elde edilmesi mümkün değildir. Bu gibi durumlarda Volterra tipindeki analitik çözümleri olmayan denklemlerin nümerik yöntemler ile yaklaşık çözümleri elde edilmektedir(Linz, 1985).

Bu tez çalışmasında lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemlerin yüksek mertebeden çözümleri üzerinde durulacaktır. Başlangıç olarak Volterra tipi denklemler tanıtılacak, integral denklem çeşitleri ve nümerik çözümleri verilecektir.

2. İNTEGRAL DENKLEMLER

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha fazla integral işaretinin altında görülebildiği denklemlerdir (Kanwal, 1997). Genel bir integral denklem formunu

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x, t)u(x)dx \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edebiliriz. (2.1) eşitliğinde integrasyon limitleri; $g(x)$ ve $h(x)$ olmak üzere, λ ise sabit parametre ve $K(x, t)$ ise x, t değişkenlerine bağlı bir çekirdek fonksiyonudur.

İntegral denklemler, Fredholm denklemleri ve Volterra denklemleri olmak üzere iki başlık altında incelenir. İntegrasyon sınırları bu ayırmada belirleyici olmaktadır.

I. Tip Fredholm denklemi:

$$f(t) = \int_a^b K(x, t)u(x)dx \quad (2.2)$$

II. Tip Fredholm denklemi:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(x)dx \quad (a \leq t \leq b); \quad (2.3)$$

Tanım 2.1. *İntegrasyon limitlerinden en az bir tanesi değişken olan denklemlere Volterra tipi integral denklem denir.*

Volterra tipi integral denklemlerinin genel formu:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(x, t)u(x)dx \quad (t \geq a) \quad (2.4)$$

şeklindedir.

I. Tip volterra integral denklemi:

$$f(t) = \int_0^t K(x, t)u(x)dx \quad (t \geq 0); \quad (2.5)$$

II. Tip volterra integral denklemi:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t K(x, t)u(x)dx \quad (t \geq 0); \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir.

Lineer olmayan integral denklemler ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu integral işareti içinde birden fazla bulunduruyorsa veya denklem $u(x)$ fonksiyonunun $\exp(u)$, $\cos(u)$, $\ln(1 + u)$ gibi lineer olmayan fonksiyonlarını bulunduruyorsa o denkleme lineer olmayan denklem denir (Ergün, 2010).

Lineer olmayan Volterra integral denklemini genel formu aşağıdaki şekildedir:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(x, t, u(x))dx \quad (t \geq 0); \quad (2.7)$$

Bu tür denklemler birçok fen ve mühendislik alanında kullanılır.

2.1 İntegral Denklem Modeli

İnsan nüfusunu tahmin etme problemi, (2.6) eşitliği ile tanımlı ikinci tip Volterra integral denklemleri kullanılarak formüle edilen ve çeşitli modellerin kullanıldığı en açık örneklerden biri olabilir. t zamanındaki $u(t)$ nüfusu, bu zaman zarfında doğan çocuk sayısına bağlıdır.

Jerri (1985)'e göre, t zamanına kadar hayatta kalan $0 < s < t$ aralığındaki $u(t)$ popülasyonunun bir önceki $u(s)$ popülasyonu üzerindeki etkisi, $0 < s < t$ için aşağıdaki integral denklem kullanılarak modellenenir.

$$u(t) = u_0\mathcal{K}(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(t - s)u(s)ds \quad (t \geq 0); \quad (2.8)$$

Burada u_0 , $t = 0$ zamanında doğan çocuk sayısıdır ve $\mathcal{K}(t)$, $t = 0$ zamanında doğan çocuk sayısının t yaşına kadar hayatta kalan kısmı olan hayatta kalma fonksiyonudur.

(2.8) denklemindeki integral ile ilgili olarak, $\lambda \mathcal{K}(t-s)u(s)t\delta_s$ terimlerinin toplamının sınır değerini temsil ettiğini belirtebiliriz (s zamanının etrafındaki δ_s zaman aralığında doğan ve t zamanına kadar hayatta kalan çocukların sayısını temsil eder) ve burada $\lambda, \mathcal{K}(t-s), u(s), t, \delta_s$ terimi, s zamanında mevcut nüfus olan $u(s)$ ile orantılıdır ve t zamanındaki "hayatta kalma fonksiyonu" $\mathcal{K}(t-s)$ 'dir, çünkü o zaman ($t-s$) yaşındadırlar (Jerri, 1985).

Denklem (2.8), $\mathcal{K}(t-s)$ fark çekirdeği ile $u(t)$ 'de ikinci türden bir Volterra integral denklemdir. Böyle bir çekirdek Laplace çözüm yöntemini kullanılarak ileriki bölümlerde çözülecektir. İkinci tür Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümleri tezin ilerleyen bölümlerinde gösterilecektir.

2.2 II. Tip Volterra İntegral Denklemin Çözümünün Varlığı

İkinci tip Volterra integral denklemi;

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(x, t, u(x))dx \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.9)$$

denkleminde $u(x)$ 'in bilinmediği, $f(t)$ fonksiyonu ile \mathcal{K} çekirdeğinin bilindiği varsayılırsa varsayılırsa teorem (2.2)'de ifade edildiği haliyle $u(x)$ çözümünün tek ve sürekli olduğundan bahsedilebilir.

- Teorem 2.2.** 1) $f(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ aralığında sürekli fonksiyon,
2) $\mathcal{K}(x, t, z)$ çekirdeği, $(0 \leq x \leq t \leq T)$, $-\infty < z < \infty$ aralığında sürekli,
3) Çekirdek Lipschitz koşulunu sağlayacak,

$$|\mathcal{K}(x, t, z_1) - \mathcal{K}(x, t, z_2)| \leq L|z_1, z_2|,$$

$0 \leq x \leq t \leq T$ ve $\forall z_1, z_2$ için $[0, T]$ aralığında $u(x)$ çözümlü tek ve süreklidir (Erdem, 2004).

Bu sonucun ispatı birçok kaynakta mevcuttur (Linz, 1985, Tricomi, 1957, Davis, 1962 ve Smithies, 1958).



3. VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM İÇİN NÜMERİK YÖNTEMLER

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{K}(x, t, u(x)) dx \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

Bu bölümde (3.1) eşitliği ile verilen ikinci tip Volterra integral denklemi için dikdörtgenler (Euler) yöntemi, yamuklar yöntemi, Simson $\frac{1}{3}$ ve Simson $\frac{3}{8}$ yöntemlerini ele alınacaktır.

(3.1) denkleminde adım aralığı $h > 0$ olmak üzere; t_0 integral alt sınırı için $t_k = t_0 + k * h$ ve $k = 0, 1, 2, \dots, n$ noktaları için çözüm yapacağız.

$\tilde{u}(t_n)$ yaklaşık çözümü ve $u(t_n)$ de gerçek çözümü ifade etsin. (3.1) denkleminin sağ tarafına $t = t_n$ olarak nümerik integrasyon uygularsak $\tilde{u}(t_n)$ yaklaşık çözümünü elde ederiz.

(3.1) Volterra integral denkleminde nümerik integrasyon kuralı uygulandığında

$$\int_0^{nh} g(t) dt \approx \sum_{k=0}^n \sigma_{nk} g(t_k); \quad (3.2)$$

elde edilir. (3.2) denklemini (3.1) da yerine koyarsak:

$$\tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=0}^n \sigma_{nk} \mathcal{K}(x, t, \tilde{u}(t_k)), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

formundaki denklem elde edilir. $\tilde{u}(t_n)$ (yaklaşık çözüm) uygun şartlar altında tanımlıdır. Başlangıçta $\tilde{u}(t_0) = \tilde{f}(t_0)$ şeklinde alınır. σ_{nk} ile verilen ağırlık fonksiyonu düzgün sürekli olma şartını sağlıyorsa, yeterince küçük h adım aralığı ve bölüm (2.2)'de verilen şartlar altında denklemin tek bir çözümü mevcuttur.

3.1 Dikdörtgenler Kuralı

Bu bölümde (3.1) eşitliğinde verilen lineer olmayan Volterra integral denkleminde dikdörtgenler metodunu uygulayalım. Denkleminde verilen $y = f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olmak üzere, bu aralığı $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$ şeklinde n parçaya bölelim.

$$h_k = t_{k+1} - t_k$$

olmak üzere integral aşağıdaki şekilde hesaplanır.

Tanım 3.1. *Rieman integrali:*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta t_k, \quad \Delta t_k = \frac{(b-a)}{n} = h; \quad (3.4)$$

ifadesine f fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki *Rieman integrali* denir.

Tanım 3.2. (Açık Euler)

$$\tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)). \quad (3.5)$$

Tanım 3.3. (Kapalı Euler)

$$\tilde{u}(t_n) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=1}^n \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)). \quad (3.6)$$

Eğer $u(t_k)$, ($k = 1, 2, 3, \dots, n-1$) değerlerini biliyorken $u(t_n)$ değeri de çok rahat bir şekilde bulunabilir. Dolayısıyla aşağıdaki denklem elde edilir. (3.7) denklemi Açık Euler olarak adlandırılır.

$$\tilde{u}(t_n)(1 - \lambda h K(t_n, t_n)) = f(t_n) + \lambda h \sum_{k=1}^{n-1} K(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)) \quad (3.7)$$

(3.7) denklemi (3.1) denkleminin açık euler metodu kullanılarak elde edilmiş nümerik çözümdür.

3.2 Yamuklar Kuralı

Şimdi ise yamuklar kuralını (3.1) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan Volterra integral denkleminde uygulayalım;

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t_n) &= f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0, \tilde{u}(t_0)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)) + \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n, \tilde{u}(t_n)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

olarak $u(\tilde{t}_n)$ hesaplanır. Bu denklemi düzenlersek;

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t_n) - \frac{\lambda h}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n, \tilde{u}(t_n)) &= f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0, \tilde{u}(t_0)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k, \tilde{u}(t_k)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$\mathcal{K}(t, s, u(s)) = \mathcal{K}(t, s)u(s)$ ile doğrusal integral denklemin için (3.9) denkleminde $\tilde{u}(t_0) = f(t_0)$ ile,

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t_n) \left\{ 1 - \frac{\lambda h}{2} \mathcal{K}(t_n, t_n) \right\} &= f(t_n) + \lambda h \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{K}(t_n, t_0) \tilde{u}(t_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{K}(t_n, t_k) \tilde{u}(t_k) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.10) denklemin lineer olmayan Volterra integral denkleminin yamuklar yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözümünü vermektedir.

3.3 Yamuklar+Simpson Kuralları

Bu bölümde (3.1) denklemin ile verilen lineer olmayan Volterra integral denkleminde Simpson $\frac{1}{3}$ ve Simpson $\frac{3}{8}$ kurallarını uygulayalım. Bu yöntemler uygulanırken dikkat edilmesi gereken husus aralık sayısıdır. Dikdörtgenler ve

yamuklar kuralları tüm aralıklar için uygulanabilir iken, simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ($n \geq 2$) için sadece çift sayıda aralıklarda, Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ise ($n \geq 3$) için üçe bölünebilen aralıklarda uygulanabilir. Eğer aralık sayısı uygun değil ise başta ya da sonda yamuklar kuralı uygulanarak aralıklar denklem için uygun hale getirilir.

3.3.1 Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$

Burada (3.1) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan Volterra integral denklemine ilk önce yamuklar ardından ise Simpson $\frac{1}{3}$ kurallarını uygularsak (3.11) denklemi elde ederiz.

$$\int_0^{(2n+1)h} g(t)dt \approx \frac{h}{2} (g(0) + g(h)) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n g(2kh) + \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h), \quad (3.11)$$

nh sabit ve $h \rightarrow 0$ iken bu nümerik yöntemler sırasıyla $O(h^4)$ ve $O(h^3)$ lokal kesme hatalarını vermektedir. $w_{n,k}$ katsayıları Tablo (3.1) ile verilmiştir.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{3h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$					
3	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$				
4	$\frac{3h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$			
5	$\frac{2h}{3}$	$\frac{h}{2} + \frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{h}{3}$		
6	$\frac{3h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$
⋮				

Tablo 3.1: Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı

Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$ 'ün $w_{n,k}$ ağırlık fonksiyonlarının verildiği Tablo aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Eğer n çift ise:

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Eğer n tek ise:

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= \frac{1}{2}, \\w_{n,1} &= \frac{5}{6}, \quad n \geq 3, \\w_{n,2k} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \\w_{n,2k+1} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1, \\w_{n,n} &= \frac{1}{3}, \quad n \geq 3,\end{aligned}$$

ağırlıkları verilen Yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, üçüncü mertebeden $O(h^3)$ yakınsama sağlar.

3.3.2 Simpson $\frac{1}{3}$ + Yamuklar Kuralı

Şimdi ise (3.1) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integral denkleminin ilk önce Simpson $\frac{1}{3}$, son aralıkta ise yamuklar kurallarını uygulayalım.

$$\int_0^{(2n+1)h} g(t) dt \approx \frac{4h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} g(2kh) + \frac{2h}{3} \sum_{k=0}^n g((2k+1)h) + \frac{h}{2} (g(0) + g(h)) \quad (3.12)$$

Elde edilen 3.12 denkleminin nh sabit iken $O(h^4)$ ve $h \rightarrow 0$ iken $O(h^3)$ yerel kesme hatasını verir. Tablo (3.2) ile $w_{n,k}$ katsayıları verilmiştir.

Simpson $\frac{1}{3}$ - Yamuklar yönteminin $w_{n,k}$ ağırlık fonksiyonlarının verildiği Tablo (3.2) aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$				
4	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{3h}{2h}$	$\frac{3h}{4h}$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{3h}{2h}$	$\frac{3h}{4h}$	$\frac{h}{3} + \frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$		
6	$\frac{h}{3}$	$\frac{4h}{3}$	$\frac{3h}{2h}$	$\frac{3h}{4h}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{2h}{4h}$	$\frac{h}{3}$	
⋮				

Tablo 3.2: Simpson $\frac{1}{3}$ + Yamuklar kuralı

Eğer n çift ise:

$$w_{n,0} = w_{n,n} = \frac{1}{3},$$

$$w_{n,2k} = \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$w_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

Eğer n tek ise:

$$w_{n,0} = \frac{1}{3},$$

$$w_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} - 1,$$

$$w_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2},$$

$$w_{n,n-1} = \frac{5}{6}, \quad n \geq 3,$$

$$w_{n,n} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 3,$$

ağırlıkları verilen Simpson $\frac{1}{3}$ + Yamuklar kuralı, üçüncü mertebeden $O(h^3)$ yakınsama sağlar.

3.4 Simpson Kuralları

Simpson kuralı yamuklar kuralına kıyasla daha pürüzsüz sonuçlar vermektedir. Burada Simpson kurallarının sadece n çift iken uygulanabilir olduğu gözden kaçırılmamalıdır. n tek olduğu durumlarda ise ek bir yöntem kullanılarak problem çözülmektedir.

3.4.1 Simpson I Kuralı

Simpson I yönteminin $w_{n,k}$ ağırlık fonksiyonlarının verildiği Tablo (3.7) aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Eğer n çift ise:

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= w_{n,n} = \frac{1}{3}, \\w_{n,2k} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \\w_{n,2k+1} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1.\end{aligned}$$

Eğer n tek ise:

$$\begin{aligned}w_{n,0} &= \frac{3}{8}, \\w_{n,1} &= w_{n,2} = \frac{9}{8}, \\w_{n,3} &= \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3}, \\w_{n,2k} &= \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \\w_{n,2k+1} &= \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2},\end{aligned}$$

$$w_{n,n} = \frac{1}{3}, \quad n \geq 5,$$

Burada Kronecker deltası $\delta_{i,j}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Yukarıda ağırlıkları gösterilen sayısal yöntem Simpson I kuralı olarak bilinmektedir ve dördüncü mertebeden $O(h^4)$ yakınsar.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{3h}{8}$	$\frac{4h}{8}$	$\frac{h}{8}$					
3	$\frac{8h}{27}$	$\frac{8h}{27}$	$\frac{8h}{27}$	$\frac{3h}{27}$				
4	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{h}{8}$			
5	$\frac{8h}{243}$	$\frac{8h}{243}$	$\frac{8h}{243}$	$\frac{3h}{243}$	$\frac{3h}{243}$	$\frac{h}{243}$		
6	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{h}{8}$	
7	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{3h}{8}$	$\frac{h}{8}$
...				

Tablo 3.3: Simpson I Kuralı

3.4.2 Simpson II Kuralı

Simpson II kuralının ağırlık fonksiyonlarının verildiği Tablo (3.8) aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

Eğer n çift ise:

$$w_{n,0} = w_{n,n} = \frac{1}{3},$$

$$w_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1,$$

$$w_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2}$$

Eğer n tek ise:

$$w_{n,0} = \frac{1}{3}, \quad n \geq 5,$$

$$w_{n,2k} = \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2},$$

$$w_{n,2k+1} = \frac{4}{3}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n-5}{2},$$

$$w_{n,n-3} = \frac{17}{24} - \frac{1}{3}\delta_{n3},$$

$$w_{n,n-1} = \frac{9}{8},$$

$$w_{n,n} = \frac{3}{8}.$$

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
1	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$						
2	$\frac{2}{3}h$	$\frac{4}{3}h$	$\frac{h}{3}$					
3	$\frac{8}{3}h$	$\frac{8}{3}h$	$\frac{8}{3}h$	$\frac{3h}{4}$				
4	$\frac{3}{8}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{3}{2}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{h}{3}$			
5	$\frac{3}{8}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{h}{3} + \frac{8}{3}h$	$\frac{3}{9}h$	$\frac{9}{8}h$	$\frac{3h}{8}$		
6	$\frac{3}{8}h$	$\frac{3}{4}h$	$\frac{2}{8}h$	$\frac{4}{4}h$	$\frac{2}{8}h$	$\frac{8}{4}h$	$\frac{h}{3}$	
7	$\frac{3}{3}h$	$\frac{4}{3}h$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{4}{3}h$	$\frac{h}{3} + \frac{3}{8}h$	$\frac{9}{8}h$	$\frac{9}{8}h$	$\frac{3h}{8}$
⋮				

Tablo 3.4: Simpson II Kuralı

3.5 Nümerik Örnekler

Bu bölümde amacımız yamuklar, Simpson I ve Simpson II kurallarını örneklendirerek yakınsama durumlarını göstermektir.

Örnek 3.4.

$$u(t) = t + \lambda \int_0^t (t-s)u(s)ds$$

denkleminin gerçek çözümünü bulup nümerik yöntemlerle elde edilen yaklaşık değer tablolarını oluşturalım.

Gerçek çözüm: (3.4) integral denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alırsak;

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{t\} + \mathcal{L}\left\{\lambda \int_0^t (t-s)u(s)ds\right\}$$

$$\mathcal{L}\{u(s)\} = \frac{1}{s^2} + \lambda \frac{\mathcal{L}\{u(s)\}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{u(s)\} \left(1 - \frac{\lambda}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{u(s)\} = \frac{1}{s^2 - \sqrt{\lambda}^2}$$

$$\mathcal{L}\{u(s)\} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{s^2 - \sqrt{\lambda}^2}$$

Son eşitliğin her iki yanına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{s^2 - \sqrt{\lambda}^2}\right\}$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \sinh(\sqrt{\lambda}t)$$

$$\lambda = -1$$

için;

$$u(t) = \frac{1}{i} \cdot \sinh(it)$$
$$u(t) = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$$
$$u(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin(t)$$

gerçek çözümü elde edilir.

Nümerik çözüm: (3.4) integral denklemine $h = 0.1, 0.05, 0.025$ için $t \in [0, 1]$ aralığında yamuklar kuralını uygulayalım.

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025	GERÇEK
0.10	0.09523810	0.09518144	0.09516730	0.09983342
0.20	0.18140590	0.18130337	0.18127778	0.19866933
0.30	0.25936724	0.25922810	0.25919336	0.29552021
0.40	0.32990369	0.32973583	0.32969392	0.38941834
0.50	0.39372239	0.39353254	0.39348514	0.47942554
0.60	0.45146311	0.45125699	0.45120552	0.56464247
0.70	0.50370472	0.50348714	0.50343280	0.64421769
0.80	0.55097094	0.55074595	0.55068976	0.71735609
0.90	0.59373561	0.59350659	0.59344940	0.78332691
1.00	0.63242746	0.63219722	0.63213972	0.84147098

Tablo 3.5: YAMUKLAR KURALI ÖRNEK (3.4)

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025	GERÇEK
0.10	0.10000000	0.09983333	0.09983341	0.09983342
0.20	0.19866667	0.19866903	0.19866929	0.19866933
0.30	0.29568444	0.29551954	0.29552013	0.29552021
0.40	0.38940865	0.38941719	0.38941820	0.38941834
0.50	0.47958543	0.47942376	0.47942532	0.47942554
0.60	0.56462159	0.56463994	0.56464216	0.56464247
0.70	0.64437153	0.64421429	0.64421727	0.64421769
0.80	0.71732015	0.71735170	0.71735555	0.71735609
0.90	0.78347346	0.78332142	0.78332623	0.78332691
1.00	0.84141650	0.84146430	0.84147016	0.84147098

Tablo 3.6: YAMUKLAR + SİMPSON 1/3 KURALI ÖRNEK (3.4)

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025	GERÇEK
0.10	0.10000000	0.09983333	0.09983341	0.09983342
0.20	0.19866667	0.19866910	0.19866931	0.19866933
0.30	0.29551500	0.29551982	0.29552018	0.29552021
0.40	0.38941091	0.38941831	0.38941831	0.38941834
0.50	0.47941639	0.47942487	0.47942549	0.47942554
0.60	0.56463059	0.56464167	0.56464242	0.56464247
0.70	0.64420501	0.64421676	0.64421763	0.64421769
0.80	0.71734025	0.71735505	0.71735602	0.71735609
0.90	0.78331129	0.78332576	0.78332684	0.78332691
1.00	0.84145181	0.84146974	0.84147091	0.84147098

Tablo 3.7: SİMPSON I ÖRNEK (3.4)

t	h=0.1	h=0.05	h=0.025	GERÇEK
0.10	0.10000000	0.09983333	0.09983341	0.09983342
0.20	0.19866667	0.19866910	0.19866931	0.19866933
0.30	0.29551500	0.29551982	0.29552018	0.29552021
0.40	0.38941091	0.38941781	0.38941831	0.38941834
0.50	0.47941504	0.47942487	0.47942549	0.47942554
0.60	0.56463061	0.56464167	0.56464242	0.56464247
0.70	0.64420306	0.64421676	0.64421763	0.64421769
0.80	0.71734033	0.71735506	0.71735602	0.71735609
0.90	0.78330881	0.78332577	0.78332684	0.78332691
1.00	0.84145201	0.84146976	0.84147091	0.84147098

Tablo 3.8: SİMPSON II ÖRNEK (3.4)

Yukarıdaki örnek Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının oldukça iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir. Bu sebeple pek çok uygulamada Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, yamuklar kuralına nazaran daha kullanışlıdır. Fakat Simpson $\frac{1}{3}$ kuralının sıkıntılı olan noktası, çift sayıda aralık kullanılması zorunluluğudur. Bazı uygulamalarda yuvarlama hatası az olması için aralığın tek sayıda bölünmesi gerekebilir. Bu gibi durumlarda Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı ile birlikte kullanılabilir.

Örnek 3.5.

$$u(t) = 1 + \lambda \int_0^t \frac{(t + u(s))}{1 + (u(s))^2} ds \quad (3.13)$$

denklemini için $h= 0.2, 0.1$ ve 0.05 , $\lambda = 1$ için $t \in [0, 1]$ olmak üzere yamuklar yöntemini uygulayarak elde edilen yaklaşık değer tablolarını oluşturalım.

Çözüm :

Lineer olmayan Volterra integral denkleminin gerçek çözümü yoktur. Yamuklar yöntemini kullanarak yaklaşık çözümünü elde edelim.

t	h=0.2	h=0.1	h=0.005
0	1.000000	1.000000	1.000000
0.20	1.118572	1.118681	1.118708
0.40	1.468853	1.269081	1.269138
0.60	1.442195	1.442466	1.442534
0.80	1.631001	1.631222	1.631277
1.00	1.829517	1.829619	1.829644

Tablo 3.9: YAMUKLAR ÖRNEK (3.13)

4. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA-İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde biyoloji (veya ekoloji) bilimleri gibi uygulama alanlarında ortaya çıkan bazı integro-diferansiyel denklemleri ele alacağız.

İlk olarak nüfus sorunları ve analizlerinden elde edilen sonuçları tartışacağız. Tekli türlerin büyümesi, lojistik denklem ve uzantıları ele alınacaktır. Lineer olmayan integro diferansiyel denkleme Euler, adi diferansiyel denklem için Runge-Kutta, integral terimi için yamuklar, Simpson kuralları uygulanarak bazı nümerik çözümler elde edeceğiz. Lineer olmayan integro diferansiyel denklem için nümerik sonuçları tablo ve şekillerle sunacağız.

4.1 Tekli Türlerin Büyümesi

Adi diferansiyel denklemlerin (ODE'ler), gecikmeli diferansiyel denklemlerin (DDE'ler), Volterra integro-diferansiyel denklemlerin (VIDE'ler) ve gecikmeli Volterra integro diferansiyel denklemlerin (DVIDE'ler) çok çeşitli evrimsel problemleri modellemek için kullanılabileceği iyi bilinmektedir. Volterra integro-diferansiyel denklemleri ilk olarak 1920'lerde Volterra tarafından tanıtılmıştır (Volterra'nın kitabı (1962) daha önceki materyallerin çoğunu içerir). Daha genel DVIDE'lerin teori ve uygulamaları, tıp, biyoloji, ekoloji, sistem teorisi, nükleer reaktör dinamiği gibi bilim ve mühendislik uygulamalarının birçok alanında ortaya çıkan matematiksel modelleme ve çalışmalarda önemli bir rol oynamıştır.

Volterra modeli, ekolojik sistemlerin anlaşılması ve yönetilmesinde önemli bir araçtır. Bu model, tek türün popülasyon dinamiklerini açıklamak için kullanılır ve türler arasındaki etkileşimleri göz önünde bulundurarak popülasyonun büyüme ve düşüşünü modeller.

Volterra modeli, doğal kaynakların sürdürülebilir kullanımı, biyolojik çeşitliliğin korunması, avlanma politikaları, çevre kirliliğinin azaltılması ve diğer çevre

sorunlarının çözümünde kullanılabilir. Model, bir türün popülasyon dinamiklerini anlamak için kullanıldığında, bu türün avcılarının ve doğal düşmanlarının sayısını ve etkilerini de dikkate alabilir.

Volterra modeli, ekolojik sistemlerin karmaşık yapısını anlamak için kullanılabilir. Bu model, bir türün popülasyon dinamiklerini etkileyen faktörleri analiz etmek için kullanılabilir ve bu faktörler arasındaki etkileşimleri göz önünde bulundurabilir. Örneğin, bir türün besin kaynaklarındaki azalma, doğal düşmanların artması veya yaşam alanının azalması gibi faktörler, türün popülasyon dinamiklerinde değişikliklere neden olabilir.

Volterra modeli ayrıca biyolojik mücadele yöntemlerinin tasarımında da kullanılabilir. Bu yöntem, zararlı türlerin doğal düşmanları kullanarak kontrol edilmesidir. Bu yaklaşım, pestisit kullanımının azaltılmasına ve biyolojik çeşitliliğin korunmasına yardımcı olabilir.

Sonuç olarak, Volterra modeli ekolojik sistemlerin anlaşılması ve yönetilmesinde önemli bir araçtır. Bu model, bir türün popülasyon dinamiklerini anlamak ve yönetmek için kullanılabilir ve doğal kaynakların sürdürülebilir kullanımı, biyolojik çeşitliliğin korunması ve çevre sorunlarının çözümüne katkıda bulunabilir.

Burada çalışmamızı sadece bir türden oluşan ekolojik sistemle sınırlandırıp ve onun büyümesini göz önüne alacağız. Bu sistem laboratuvar ortamında uygun gibi görülebilir ancak daha genel ekolojik sistemlerin analizi için bir başlangıç noktasıdır. Tüm ekolojik sistemler küçük olsa bile bir çok türün birleşmesinden oluşur ve bu türler birbirini etkilemektedir.

$$u'(t) = u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_{p(t)}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

(4.1) denkleminde $b = 0$ ve $c = 0$ alırsak;

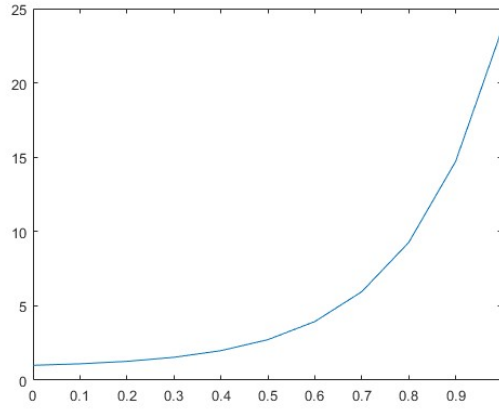
$$u'(t) = au(t), \quad t \geq 0 \quad (4.2)$$

$$u(0) = u_0,$$

şeklinde verilen test denklemi oluşur. Bu denklemde $u(t)$, t zamanında bir canlı popülasyonun birey sayısını verir. (4.2) denkleminin çözümü,

$$u(t) = u_0 e^{at},$$

olur. Bu denklem şekil (4.1)'de verilen biyolojide üstel (sınırsız) büyümeyi ifade eder.



Şekil 4.1: $u'(t) = au(t)$, $a = 5$, $u_0 = 1$, $h = 0.1$ Euler yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik çözüm grafiği

4.2 Lojistik Diferansiyel Denklem

Lojistik diferansiyel denklemi, lineer olmayan bir diferansiyel denklemdir ve doğrusal olmayan davranışlar gösterebilir. Bu nedenle, kaotik (zaman içinde yaşanan değişikliklerin başlangıç koşullarına çok hassas bir biçimde bağlı olduğu) sistemlerde kullanılabilir. Ayrıca, bu denklem, doğal kaynakların sınırlı olduğu durumlarda bir popülasyonun büyümesini modellemek için de kullanılır.

Lojistik diferansiyel denklem, birçok farklı disiplinde kullanıldığı için, çeşitli uygulama alanlarına sahiptir. Örneğin, popülasyon dinamikleri, doğal kaynakların yönetimi, ekonomi, finans ve epidemioloji gibi alanlarda kullanılır. Bu denklem,

ayrıca benzer matematiksel yapıya sahip diğer diferansiyel denklemler ile birlikte kullanılarak daha karmaşık modellerin oluşturulmasına da olanak tanır.

Uzayda homojen olarak dağılmış ve büyüme için sonlu bir üst sınıra sahip tek bir türün popülasyon büyümesi için yaygın olarak kullanılan model, lojistik denklem olarak bilinir. Lojistik diferansiyel denklemi ve çözümünü verelim.

Lojistik adi diferansiyel denklem: Burada $u(t)$ fonksiyonunu t zamanındaki popülasyon yoğunluğudur.

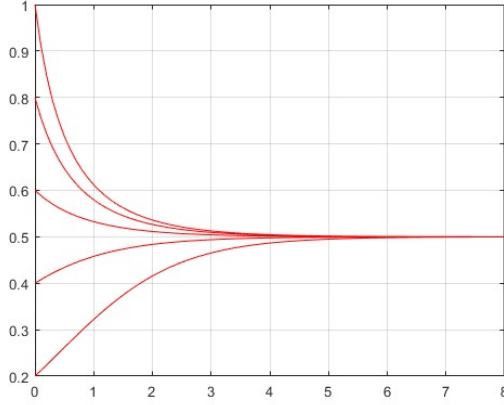
$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\{a - bu(t)\}, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

(4.3) denkleminde $a, b \in (0, \infty)$ aralığındadır.

Bu denklemin çözümü:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)\{a - bu(t)\}, \\ \frac{du}{dt} &= u\{a - bu\}, \\ \frac{du}{u\{a - bu\}} &= dt, \\ \int \frac{du}{u\{a - bu\}} &= \int dt, \\ \frac{1}{a} \ln(u) - \frac{1}{a} \ln(a - bu) &= t + c, \\ u(t) &= \frac{u_0 a \exp(at)}{a - b u_0 + u_0 \exp(at)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Şekil (4.2), popülasyon dinamiğini vermektedir. $u(0) < \frac{a}{b}$ için $t \rightarrow \infty$ için $u(t)$ değeri artar ve asimptotik olarak $\frac{a}{b}$ değerine yaklaşmaktadır. $0 < u(0) < \frac{a}{b}$ durumunda çözümün davranışı ise lojistik büyüme olarak adlandırılır. u' 'nin yeterince küçük değerleri için popülasyon üstel olarak artar. $u(0) = u_0 > \frac{a}{b}$ için, $t \rightarrow \infty$ iken asimptotik olarak $\frac{a}{b}$ değerine yaklaşır. $u(0) = u_0 = \frac{a}{b}$ iken ise popülasyon $\frac{a}{b}$ değerine eşittir.



Şekil 4.2: (4.3) Lojistik büyüme denkleminin, $a = 0.5$ ve $b = 1$ ve $u(0) = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ başlangıç değerleri için elde edilmiş nümerik çözüm grafiği

$\frac{a}{b}$ değeri popülasyon dinamiği için sınırlayıcı bir faktördür ve çevrenin taşıma kapasitesi olarak adlandırılır.

4.2.1 Lojistik Diferansiyel Denklem İçin Nümerik Yöntemler

Adi diferansiyel denklemler için Runge-Kutta metodlarının genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{F}(t, u(t)), \quad t \geq 0 \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i, \\ k_i &= h \left(t_n + c_i h, \tilde{u}_n + \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \end{aligned}$$

Runge-Kutta yöntemleri için Burcher tablosu aşağıdaki gibidir:

c_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
	b_1	b_2	\dots	b_s

(4.3) lojistik diferansiyel denkleminde Runge-Kutta-4 metodunu uygulayalım.

Runge-Kutta-4 Burcher tablosu:

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

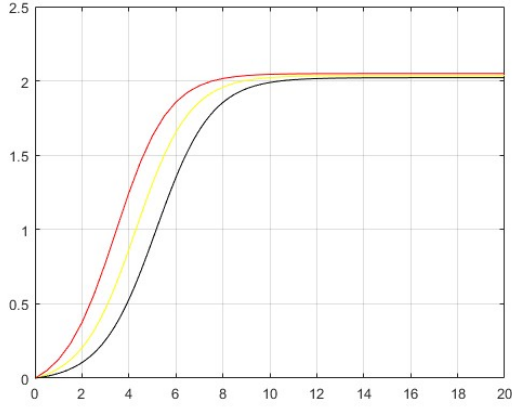
Yukarıda kullanılan k_1, k_2, k_3 ve k_4 değerleri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$k_1 = h\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n)$$

$$k_2 = h\mathcal{F}(t_n + \frac{1}{2}h, \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = h\mathcal{F}(t_n + \frac{1}{2}h, \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = h\mathcal{F}(t_n + h, \tilde{u}_n + k_3)$$



Şekil 4.3: (4.3) lojistik diferansiyel denkleminin $a = 1; b = 0.5; c = 0.1; h = 0.5, 0.25, 0.125$ $t_{max} = 20$, $u_0 = 1$ için Runge-Kutta-4 metodunun nümerik çözüm grafiği

Runge-Kutta-Fehlberg Burcher tablosu

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0

4.3 Populasyon ve Hasat

Bu bölümde basit bir hasat oranının etkisini temsil etmek için (4.3)'e hasat terimini ekliyoruz. Populasyon denkleminde sabit hasat oranının $\mathcal{H} > 0$ olduğunu varsayarsak:

$$\begin{aligned}u'(t) &= u(t)\{a - bu(t)\} - \mathcal{H}, \\u(0) &= u_0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

denklemini elde edilir. (4.6) denklemini kısmi kesir açılımı yapıp integral alınarak kolayca çözülebilmektedir. Denge noktaları (4.6) denkleminin sağ tarafını sıfır kabul ettiğimiz

$$u(t)\{a - bu(t)\} - \mathcal{H} = 0$$

denkleminin çözümüdür. Bu denklemde kısmi kesir açılımı yapıp integral alınarak çözümlerse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) Eğer $\mathcal{H} \geq \frac{a^2}{4b}$ ise bu denklemin pozitif reel kökleri vardır. Diğer durumda (4.6) denkleminin sağ tarafı her zaman negatif olur.

2) $\mathcal{H} < \frac{a^2}{4b}$ ise kök $u^* = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b\mathcal{H}}}{2b}$ denkleminde verilir.

4.3.1 Genel Büyüme

Tek tür popülasyonuna ait lojistik denklem (4.3)'de popülasyonun büyüme hızının, popülasyon yoğunluğunun doğrusal bir fonksiyonu olduğunu varsaydığından bazı ekolojistler tarafından uygulanamaz olduğu hususunda eleştirilmiştir. Bu nedenle genel büyümeyi aşağıda verildiği gibi adi diferansiyel denklem olarak ele alacağız.

$$u'(t) = u(t)G(u(t)),\tag{4.7}$$

Yukarıda verilen $G(u(t))$ popülasyon büyüme oranıdır. Bu denklem aşağıdaki varsayımları sağlar:

$$(1) G(u(t)) \in C^1[0, \infty),$$

$$(2) G(0) > 0, u \in [0, \infty) \text{ için } \frac{dG(v)}{dv} < 0,$$

$$(3) G(a/b) = 0 \text{ olacak şekilde } a/b > 0 \text{ vardır.}$$

(1) sadece matematiksel bir kabuldür. (2) kabulünün ilk kısmı küçük popülasyon için üstel büyümeyi sağlar, ikinci kısmı ise kaynakların sınırlı olduğu anlamına gelir. (3)' de ise a/b oranı ortamın taşıma kapasitesi olarak ifade edilebilir.

Lojistik büyüme için

$$G(u(.)) = a - bu(.)$$

olur ve yukarıdaki varsayımları sağlar. (4.6) ile verilen genel büyüme modeli birçok kişi tarafından kullanılmıştır (Filiz (2000)).

4.4 Lineer Olmayan İntegro Diferansiyel Denklem

Lojistik denklem ilk olarak Volterra (1931) tarafından ele alınmıştır ve Miller (1966) tarafından genişletilmiştir. 1930'larda Volterra'nın çalışmasının etkisiyle hızlı çoğalan türler ile tek veya iki türün laboratuvar popülasyonlarıyla birçok deney yapıldı. Lojistik modelleri bu deneylere uygulama girişimleri çoğu zaman hüsrarla sonuçlandı. Çünkü popülasyonlar sürdürülebilir bir sabit değere ulaşmak yerine yok oldu. Bunun nedeninin kapalı ortamın atık ürünler ve ölü organizmalar tarafından bozulmuş olması olduğu anlaşıldı. Böylece Volterra deneyin başlangıcından itibaren her zaman popülasyona bağlı olarak türlerin ölüm oranındaki kümülatif etkiyi araştırmaya başladı.

Yaşadığı canlının (konak) ortamını kullanan ve onu öldürmeden hayat döngüsünü tamamlayabilen bir parazit için de benzer bir durum meydana gelebilir. Konağın bağışıklık direnci maruz kaldığı parazit popülasyonuna bağlıdır. Miller(1969)'da "konağın ideal ortam sunduğu zaman hastalığın erken aşamalarında

artım üsteldir. Sonradan konak direnç kazandığında ve daha iyi ortam oluştuğunda artış oranı giderek sıfıra doğru azalır ve popülasyon bu sebeple hızlı bir şekilde azalır.” (4.7) denklemini genelleştirirsek aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$u'(t) = u(t)G(t, u(.)), \quad (4.8)$$

Burada $G(t, (.))$, $s \leq t$ için $u(s)$ değerine bağlıdır. (4.8) ile verilen denklemde $G(t, (.))$ aşağıdaki şekilde seçilirse:

$$G(t, u(.)) := a - bu(t) - c \int_{p(t)}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+0,$$

$$u'(t) = a - bu(t) - c \int_{p(t)}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+0, \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir.

Burada üç farklı durum söz konusudur;

- 1) $p(t) = 0$
- 2) $p(t) = -\infty$
- 3) $p(t) = t - \tau$

yukarıda verilen $\tau > 0$, τ sabit veya $t \geq 0$ için $\tau(t)$ sınırlıdır.

$p(t) = 0$ değeri deneyin başlangıç anını, konağın parazitle bulunduğu anı temsil eder. Çekirdek fonksiyonunu $\mathcal{K} \equiv c$ alır ve anlık ikinci dereceden terimi ihmal edersek aşağıdaki denklem oluşur.

$$u'(t) = u(t) \left\{ r - c \int_0^t u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0,$$

$$u(0) = u_0 > 0. \quad (4.10)$$

$$n(t) = \int_0^t u(s)ds, \quad n(0) = 0,$$

Yukarıdaki denklemin türevi alınırsa,

$$n'(t) = u(t), \quad n''(t) = u'(t),$$

olur.(4.10) denklemini aşağıdaki gibi olur;

$$n''(t) = n'(t)(r - cn(t)), \quad (4.11)$$

(4.11) denkleminin integralini alırsak;(n, t'ye bağlı bir bağımlı değişken) ;

$$n'(t) = -\frac{c}{2} \left(n^2(t) - \frac{2n(t)r}{c} - \frac{2}{c}u_0 \right),$$

denklemini oluştur. Bu denkleminde gerekli düzenlemeler yapıp, uygun bilgisayar programı ile çözülürse:

$$n(t) = \frac{ab(e^{\gamma t} - 1)}{(a + be^{\gamma t})},$$

Denkleminde yerine koyulursa:

$$u(t) = \frac{u_0(a + b)^2 e^{\gamma t}}{(a + be^{\gamma t})^2}, \quad (4.12)$$

elde edilir. İntegro-diferansiyel denklem maksimum değere yükseldikten sonra $e^{\gamma t}$ değerine doğru azalmaktadır (Filiz (2000)).

4.5 Lojistik Volterra-İntegro Diferansiyel Denklem

Üzerinde çalışacağımız bir başka model ise Volterra-integro diferansiyel denklemdir.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_0^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.13) denkleminde ikinci dereceden anlık terime bir kirlilik (toksin) terimi (integral olarak ifade edilir) eşlik eder. (4.13) denkleminde integral alt limitinin sıfır alınması gerektiği unutulmamalıdır. Bazı durumlarda $b = 0$ olarak ikinci dereceden terimi göz ardı edeceğiz.

Biyolojik popülasyon: Biyolojik popülasyonların büyümesi üzerine yaptığı çalışmada Volterra (1931) ve Volterra (1959), tek bir popülasyon için aşağıdaki formda matematiksel modeller ortaya koymuştur.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_0^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

veya

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_{-\infty}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Buna ek olarak, integralin limitindeki τ gecikmesini içeren bir denklem daha üretebiliriz.

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_{t-\tau}^t \mathcal{K}(t-s)u(s)ds \right\}, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.16) denkleminde $u(t)$, t zamanındaki popülasyon büyüklüğüdür ve a , b ve c pozitif oran sabitleridir ve $\mathcal{K}(t)$ kalıtsal etkidir.

Volterra (1959) orijinal çalışmasında, $t \geq 0$ için $\mathcal{K}(t) \geq 0$ olduğunu varsaymıştır. Eğer $c = 0$ veya $\mathcal{K}(t) \equiv 0$ ise, (4.14), (4.15) ve (4.16) denklemleri iyi bilinen (4.8) lojistik denkleminde indirgenir (Volterra (1931, 1962)).

5. LİNEER OLMAYAN İNTEGRO DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SAYISAL YÖNTEMLER

Bu bölümde lineer olmayan bazı Volterra integro-diferansiyel denklemler için bazı nümerik yöntemleri kullanarak yaklaşık çözümler elde edip, sonuçları grafikler şeklinde paylaşacağız. İlk olarak test amacıyla ileri Euler metodu ile başlayalım.

İleri Euler metodunun amacı lineer olmayan denklemlerin nümerik çözümünün olup olmadığını kontrol etmektir. İleri Euler metodu çalışıldıktan sonra daha karmaşık metodların programlamasına gidilecektir.

5.1 Euler Metodu

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_{p(t)}^t \exp(-\mu(t-s))u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

(5.1) denkleminde sağ tarafta bulunan integral terimine herhangi bir nümerik yöntemi (dikdörtgenler, yamuklar, Simpson kuralları vb.) uyguladığımızda Euler kuralı birinci mertebeden yakınsak olduğundan yakınsama birinci mertebeden olur. (5.1) denkleminde modifiye yamuklar (Açık Euler) yöntemini uygularsak,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} &= \frac{1}{2}\tilde{u}_{n+1} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh))\tilde{u}_j \right\} \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{u}_n \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^{n-1} w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh))\tilde{u}_j \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

denklemini elde edilir. Burada $w_{n,j}$ ağırlık fonksiyonlarıdır. (5.2) denklemini yeniden düzenlersek,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} \left[1 - \frac{h}{2} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\} \right] = \\ \tilde{u}_n \left[1 + \frac{1}{2} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^{n-1} w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.3)$$

(5.3) eşitliğinde

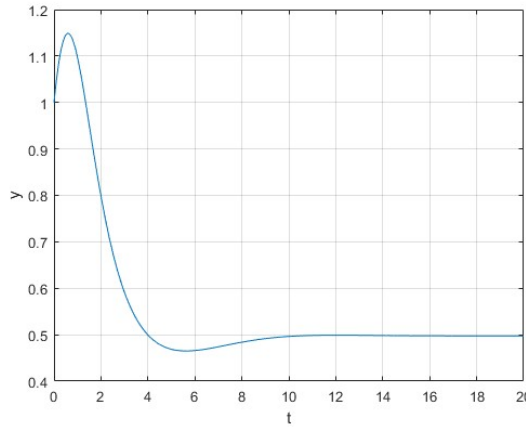
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^{n-1} w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}$$

ve

$$b_n = 1 - \frac{h}{2} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}$$

denirse denklem kısaca (5.4) eşitliği ile ifade edilebilir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n \frac{a_n}{b_n}. \quad (5.4)$$



Şekil 5.1: (5.1) eşitliği ile tanımlı lineer olmayan integro-diferansiyel denkleminin, $h = 0.01, a = 0.5, b = 0, c = 1, t_{max} = 20, u_0 = 1$ için Euler metodu ile nümerik çözümünün grafiği

(5.1) denkleminde $h = 0.01, a = 0.5, b = 0, c = 1, \mu = 1, t_{max} = 20$ ve başlangıç değeri $u_0 = 1$ için Euler yöntemi ile elde edilen nümerik çözüm grafiği şekil 5.1’de gösterilmiştir.

Şekil 5.1’de verilen nümerik çözüm grafiğimiz ilk olarak başlangıç noktasından $au(t)$ faktörü ile üstel olarak artmakta, $c \int_{p(t)}^t \exp(-\mu(t-s))u(s)ds$ integral terimi ile azalmaktadır. Başka bir deyişle (5.1) denklemin nümerik çözümü yeterince küçük c değeri için sıfırdır(sıfıra yakındır) ve (5.1) denklemi lojistik denklem gibi davranır. Burada a değerinin pozitif olduğu açıktır. Yani başlangıçta integral terimi sıfırdır ve $au(t)$ üstel olarak artmaktadır. İntegral terimi oluştuktan sonra grafiğimiz hızlı bir düşüş göstermekte ve sonunda $t \rightarrow \infty$ için $\frac{a}{c}$ değerine yakınsamaktadır.

5.2 Theta Metodu

Şimdi ise Euler metodu ile başladığımız yöntemi θ -metodunu kullanarak lineer olmayan integro-diferansiyel denkleme uygulayalım.

$$u'(x) = u(x) \left\{ a - bu(x) - c \int_0^t \exp^{-(t-s)} u(s)ds \right\} \quad t > 0 \quad (5.5)$$

denkleminin θ - metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n}{h} &= \theta \tilde{u}_{n+1} \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^{n+1} w_{n+1,j} \exp(-\mu((n+1)h - jh))\tilde{u}_j \right\} \\ &+ (1 - \theta)\tilde{u}_n \left\{ a - b\tilde{u}_n - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh))\tilde{u}_j \right\}, \quad (5.6) \end{aligned}$$

burada $w_{n,j}$ ağırlık fonksiyonlarıdır, denklemini düzenlersek,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u} \left[1 + h(1 - \theta) \left\{ a - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\} - h(1 - \theta) b \tilde{u}_n \right] \\
&+ h\theta \tilde{u}_{n+1} \left\{ a - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\} \\
&- h\theta b \tilde{u}_{n+1}^2 - h\theta c w_{n+1,n} \exp(-h) \tilde{u}_n \tilde{u}_{n+1} - h\theta c w_{n+1,n+1} \tilde{u}_{n+1}^2. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

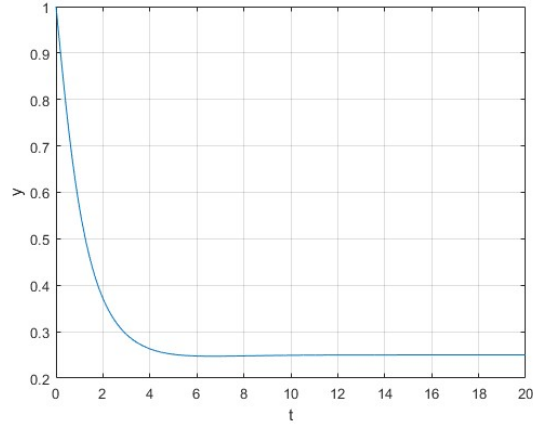
kısaltmalar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + h(1 - \theta) \left\{ a - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\} \\
b_n &= h\theta \left\{ a - c \sum_{j=0}^n w_{n,j} \exp(-\mu(nh - jh)) \tilde{u}_j \right\}
\end{aligned}$$

\tilde{u}_{n+1} 'e bağlı lineer olmayan ikinci dereceden bir fonksiyon elde edilir. $\frac{1}{2}$ Newton metodu için $V = 0$ 'dır.

$$\begin{aligned}
V &= \tilde{u}_n \{ a_n - h(1 - \theta) b \tilde{u}_n \} + \tilde{u}_{n+1} \{ b_n - 1 - h\theta c w_{n+1,n} \exp(-h) \tilde{u}_n \} \\
&- \tilde{u}_{n+1}^2 \{ bh\theta + h\theta c w_{n+1,n+1} \} = 0. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

(5.8) denklemini Newton Raphson yöntemini kullanarak veya ikinci dereceden denklemin köklerini bularak çözebiliriz.



Şekil 5.2: (5.1) Lineer olmayan integro-diferansiyel denkleminin, $h = 0.01, a = 0.5, b = 1, c = \mu = 1, t_{max} = 20, u_0 = 1$ için θ -metodu kullanılarak elde edilen nümerik çözümünün grafiği

(5.1) denkleminin çözümünde diferansiyel terim için θ -metodu ve integral terimi için yamuklar metodu uygulanarak elde edilen çözümün grafiği şekil 5.2'de gösterilmiştir. Alternatif olarak, diferansiyel terim için Runge-Kutta metodu ve integral terimi için yamuklar, Simpson kurallarını uygulayacağız.

Örnek 5.1. *Lineer olmayan Volterra integro diferansiyel denklemine bir örnek olarak (5.9) denklemini verelim.*

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t) \left\{ a - bu(t) - c \int_0^t \exp(-(t-s))u(s)ds \right\}, \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.9) denklemine Runge-Kutta yöntemini uygulayabilmek için denklemini (5.10) eşitliği ile verimli formda ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_0^t u(s)ds \right), \quad t \geq 0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

5.3 Runge-Kutta 4 Metodu

Klasik dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu (RK-4) adi diferansiyel denkleme uygulandığında dördüncü mertebeden yakınsama verir. Elde edilen grafik ileri Euler metoduna göre daha iyi yakınsama vermektedir.

Yöntemi (5.9) denkleminde uyguladığımızda daha iyi sonuçlar ve daha pürüzsüz grafik elde edeceğiz.

Bunun için ise diferansiyel kısmına RK-4 ve integral parçasında da Simpson yöntemleri uygun bir biçimde kullanılacaktır.

\tilde{u}_n 'den \tilde{u}_{n+1} 'e h adım uzunluğunda RK-4 ve integral terimi için yamuklar + Simpson $\frac{1}{3}$ metodlarını uygulayalım.

$$\begin{aligned}k_1 &= h\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n), \\ \tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_1, \\ k_2 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\ &= h\mathcal{F}\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_n + \frac{h}{4}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^b]\right) \\ \tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_2, \\ k_3 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\ &= h\mathcal{F}\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_n + \frac{h}{4}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^b]\right) \\ \tilde{u}_{n+1}^c &= \tilde{u}_n + k_3, \\ k_4 &= h\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^c, \tilde{z}_{n+1}), \\ &= h\mathcal{F}\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^c, \tilde{z}_n + \frac{h}{6}[\tilde{u}_n + 4\tilde{u}_{n+1}^c + \tilde{u}_{n+1}^c]\right) \\ \tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\right).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Burada $\int_0^t u(s)ds$ integral terimine k_2 ve k_3 değerleri için $[t_n, t_{n+1/2}]$ aralığında yamuklar, k_4 için $[t_n, t_{n+1}]$ aralığında $Simpson\frac{1}{3}$ kuralı uygulanarak üçüncü mertebeden yakınsak nümerik çözüm elde edilir.

Yakınsamanın dördüncü mertebeden olmasını sağlamak için Runge-Kutta 4 metodunun yanında $\int_0^t u(s)ds$ integral teriminin $[t_n, t_{n+1/2}]$ aralığında k_2 ve k_3 değerlerinin daha etkili hesaplanması gerekir. İlk adım için (5.11) formülünü uygulayıp, $\tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_n, \tilde{u}_{n+1/2}$ değerleri için

$$u(t) = \frac{1}{h^2} \left[\frac{2}{3}t \left(t - \frac{h}{2} \right) u_{-1} - 2(t-h) \left(t - \frac{h}{2} \right) u_0 + \frac{4}{3}t(t+h)u_{1/2} \right]$$

bulunur. $u(t)$ polinomunun $[0, h/2]$ aralığında integralini alırsak, k_2 ve k_3 değerleri için son yarım aralıkta aşağıdaki eşitliği buluruz.

$$\int_0^{h/2} u(s)ds \approx h \left(-\frac{1}{72}u_{-1} + \frac{7}{24}u_0 + \frac{2}{9}u_{1/2} \right), \quad (5.12)$$

$t = -1, 0, 1$ noktaları için

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(-\frac{1}{12}u_{-1} + \frac{2}{3}u_0 + \frac{5}{12}u_{1/2} \right), \quad (5.13)$$

eşitliği elde edilir. Runge-Kutta metodları lineer integro diferansiyel denklemlere Filiz(2013) ve Majid and Mohamed (2019) tarafından uygulanmıştır.

Elde edilen denklemler göz önüne alınırsa $n \geq 2$ için RK-4 formülleri aşağıdaki şekilde oluşur.

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}_n), \\
\tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_1, \\
k_2 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\
k_2 &= h\mathcal{F}\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_n + h\left[-\frac{1}{72}\tilde{u}_{n-1} + \frac{7}{24}\tilde{u}_n + \frac{2}{9}\tilde{u}_{n+1/2}^b\right]\right), \\
\tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{1}{2}k_2, \\
k_3 &= h\mathcal{F}(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_{n+1/2}), \\
&= h\mathcal{F}\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^b, \tilde{z}_n + h\left[-\frac{1}{72}\tilde{u}_{n-1} + \frac{7}{24}\tilde{u}_n + \frac{2}{9}\tilde{u}_{n+1/2}^b\right]\right), \\
\tilde{u}_{n+1/2}^c &= \tilde{u}_n + k_3, \\
k_4 &= h\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^b, \tilde{z}_{n+1}), \\
&= h\mathcal{F}\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^c, \tilde{z}_n + h\left[-\frac{1}{12}\tilde{u}_{n-1} + \frac{2}{3}\tilde{u}_n + \frac{5}{12}\tilde{u}_{n+1/2}^b\right]\right), \\
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \left(\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}\right). \tag{5.14}
\end{aligned}$$

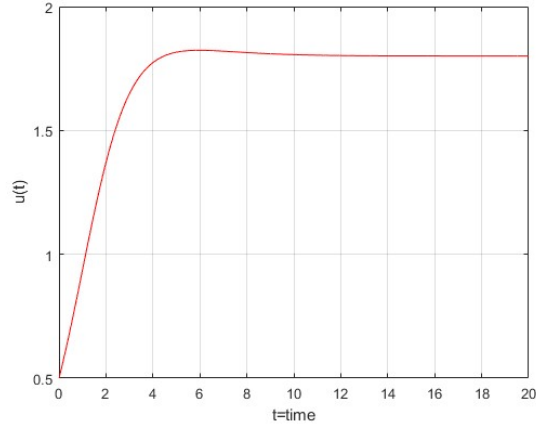
Elde edilen formül (5.9) denkleminde uygulanmış, elde edilen çözümün grafiği Şekil 5.3 'de verilmiştir.

5.4 Runge-Kutta Fehlberg Metodu

Bu bölümde lineer olmayan Volterra integro diferansiyel denkleme Runge-Kutta-Fehlberg metodunu uygulayacağız. Bu metod beşinci mertebeden yakınsaklık sağlayan bir metoddur.

İntegral terimi ise açık olarak belirlenemediğinden, nümerik yöntemlerle aynı mertebeden yakınsama sağlamak için farklı yöntemleri kullanacağız.

Newton-Cotes integrasyon formüllerinin başlıcaları; 2 noktalı kapalı Newton-Cotes formülü yamuklar kuralı, 3 nokta kuralı Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, 4 nokta kuralı Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı, 5 noktalı kural Boole kuralı (Bode kuralı), Weddle kuralı olarak bilinir. Daha yüksek kurallar 6 nokta, 7 nokta ve 8 noktayı içerir.



Şekil 5.3: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.05$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta 4 ve integral terimi için Simpson $\frac{1}{3}$ + yamuklar metodunun çözüm grafiği

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)F\left(t, u(t), \int_{t_0}^t k(t-s)u(s)ds\right), \quad t \geq t_0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Yukarıda (5.15) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra-İntegro diferansiyel denkleminde Runge-Kutta Fehlberg metodunu uygulayalım.

$h = t_n - t_{n-1}$ adım aralığı olmak üzere $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ için $t_n = t_0 + nh$ zamanında $u(t_n)$ gerçek değer ve $\tilde{u}(t_n)$ nümerik çözümdür.

$$\tilde{z}(t_n) := h \sum_{j=0}^n w_{n,j} k(t_n - t_j) \tilde{u}(t_j) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds. \quad (5.16)$$

İntegral terimi için, lisans nümerik derslerinden bilinen sayısal yöntemler kullanılarak beşinci mertebeden yakınsak yaklaşım çözüm elde edilecektir. Newton-Cotes formüllerinden yamuklar kuralı, Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Simpson $\frac{3}{8}$

kuralını kullanmak uygundur((Filiz, 2000; Filiz, 2013).

$$\int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds \approx h \sum_{j=0}^n w_{n,j}k(t_n - t_j)\tilde{u}(t_j), \quad (5.17)$$

$w_{n,j}$ katsayıları birleşik integrasyon kuralları için uygun katsayılardır.

Açık Euler metodu (5.18) denklemi ile verilir (Filiz, 2013). (5.18) eşitliğinde \tilde{u}_{n+1}^k değeri, $\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h\tilde{u}_n(\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)))$ 'de yamuklar kuralından daha yüksek yakınsaklık elde etmek için kullanılan farklı bölünmelerdeki noktalarda yaklaşık değerlerdir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h\tilde{u}_n \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^k, \tilde{z}(t_{n+1})) \right). \quad (5.18)$$

Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi (RKF olarak gösterilir). (5.15) denklemi uygun h adım uzunluğu belirleyerek çözmeye çalışalım. Her bir adımında, çözüm için iki farklı yaklaşım yapılır ve karşılaştırılır. Eğer iki cevap birbirine yakınsa yaklaşım kabul edilir. Eğer iki cevap uyuşmuyor ise, adım boyutu küçültülür. Her

adım aşağıdaki altı maddenin kullanılmasını gerektirir.

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\tilde{u}_n F(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\
\tilde{u}_{n+1/4}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{4}k_1, \\
k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/4}^a F(t_{n+1/4}, \tilde{u}_{n+1/4}^a, \tilde{z}_{n+1/4}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/4}^a F\left(t_{n+1/4}, \tilde{u}_{n+1/4}^a, \tilde{z}_n + \frac{h}{8}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/4}^a]\right) \\
\tilde{u}_{n+3/8}^b &= \tilde{u}_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, \\
k_3 &= h\tilde{u}_{n+3/8}^b F(t_{n+3/8}, \tilde{u}_{n+3/8}^b, \tilde{z}_{n+3/8}) \\
&= h\tilde{u}_{n+3/8}^b F\left(t_{n+3/8}, \tilde{u}_{n+3/8}^b, \tilde{z}_n + \frac{3h}{16}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+3/8}^b]\right) \\
\tilde{u}_{n+12/13}^c &= \tilde{u}_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+12/13}^c F(t_{n+12/13}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_{n+2/3}) \\
&= h\tilde{u}_{n+12/13}^c F\left(t_{n+12/13}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_n + \frac{12h}{26}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+12/13}^c]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^d &= \tilde{u}_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 - \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4, \\
k_5 &= h\tilde{u}_{n+1}^d F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^d, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^d F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^d, \tilde{z}_n + \frac{5h}{12}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1}^d]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^e &= \tilde{u}_n + \frac{12}{15}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1}^e F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^e F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_n + \frac{h}{2}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1}^e]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+1/15}^f &= \tilde{u}_n + \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5, \\
k_7 &= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F\left(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_{n+1/15}\right) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F\left(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_n + \frac{h}{30}\left[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/15}^f\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^g &= \tilde{u}_n + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7, \\
k_8 &= h\tilde{u}_{n+1}^g F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_{n+1}\right) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^g F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_n + \frac{h}{2}\left[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1}^g\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5. \tag{5.19}
\end{aligned}$$

(5.19) denklemini k_1, k_3, k_4, k_5 değerlerinin kullanıldığı dördüncü mertebeden yakınsama veren Runge-Kutta metodudur. Burada daha iyi yakınsama elde edebilmek için beşinci mertebeden Runge-Kutta denklemini verelim:

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \tag{5.20}$$

Bu örnekte

$$z'(t_n) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds$$

yaklaşık değeri bulunurken $[t_n, t_{n+1/4}]$, $[t_n, t_{n+3/8}]$, $[t_n, t_{n+12/13}]$, $[t_n, t_{n+1}]$, $[t_n, t_{n+1/2}]$ aralıkları için k_2, k_3, k_4, k_5 ve k_6 değerleri elde edilmiştir.

İntegral değerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için $[t_0, t_n]$ aralığında 2. mertebeden yakınsama veren yamuklar kuralı veya 3. mertebeden yakınsama sağlayan yamuklar+ Simpson 1/3 kuralı uygulanabilir (Filiz, 2000; Filiz 2013).

Beşinci mertebeden yakınsama elde etmek için integral terimi $[t_n, t_{n+1/4}]$, $[t_n, t_{n+3/8}]$, $[t_n, t_{n+12/13}]$, $[t_n, t_{n+1}]$, $[t_n, t_{n+1/2}]$, aralıkları için k_2, k_3, k_4, k_5 ve k_6 değerleri sırasıyla (5.21), (5.22), (5.23), (5.24), (5.25) denklemlerinde verilecektir.

Burada beşinci mertebeden yakınsama elde edebilmek için $[t_0, t_n]$ aralığında Boole'un kuralını uygulayacağız.

$$z(1) = 0$$

$$u(1) = u_0$$

$$Ifn = 1$$

$$z(n + 1) = z(n) + h(u(n) + u(n + 1))/2$$

Yamuklar kuralı

$$elseifn == 2$$

$$z(n + 1) = z(n - 1) + h(u(n - 1) + 4u(n) + u(n + 1))/3$$

Simpson 1/3 kuralı

$$elseifn == 3$$

$$z(n + 1) = z(n - 2) + 3h(u(n - 2) + 3u(n - 1) + 3u(n) + u(n + 1))/8$$

Simpson 3/8 kuralı

$$elseifn == 4$$

$$z(n + 1) = z(n - 3) + 2h(7u(n - 3) + 32u(n - 2) + 12u(n - 1) + 32u(n) + 7u(n + 1))/45$$

Boole kuralı

$$elseifn == 5$$

$$z(n + 1) = z(n - 4) + 5h(19u(n - 4) + 75u(n - 3) + 50u(n - 2) + 50u(n - 1) + 75u(n) + 19u(n + 1))/288$$

$$elseifn == 6$$

$$z(n + 1) = z(n - 5) + h(41u(n - 5) + 216u(n - 4) + 27u(n - 3) + 272u(n - 2) + 27u(n - 1) + 216u(n) + 41u(n + 1))/140$$

$$elseifn == 7$$

$$z(n + 1) = z(n - 6) + 7h(751u(n - 6) + 3577u(n - 5) + 1323u(n - 4) + 2989u(n - 3) + 2989u(n - 2) + 1323u(n - 1) + 3577u(n) + 7511u(n + 1))/17280$$

$$elseifn == 8$$

$$z(n + 1) = z(n - 3) + 2h(7u(n - 3) + 32u(n - 2) + 12u(n - 1) + 32u(n) + 7u(n + 1))/45$$

elseif mod($n, 4$) == 0

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif mod($n, 4$) == 1

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif mod($n, 4$) == 2

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif mod($n, 4$) == 3

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

else

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

$t = -2, -1, 0, 1/4$ noktalarında Lagrange interpolasyonunu uygularsak (ilk iki nokta için (5.19) ve (5.20) formüllerini kullanacağız.) $\tilde{u}_{n-2}, \tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_n$ ve $\tilde{u}_{n+1/4}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u(t) = \frac{1}{h^3} \left[-\frac{2}{9}t \left(t - \frac{h}{4} \right) (t+h)u_{-2} + \frac{4}{5}t \left(t - \frac{h}{4} \right) (t-2h)u_{-1} - 2(t+h)(t+2h) \left(t - \frac{h}{4} \right) u_0 + \frac{64}{45}t(t+h)(t+2h)u_{1/4} \right].$$

Yukarıdaki ifadenin 0 ve $h/6$ aralığında integralini alırsak:

$$\int_0^{h/4} u(s)ds \approx h \left(\frac{9}{80}u_{1/4} + \frac{1}{1536}u_{-2} - \frac{17}{3840}u_{-1} + \frac{217}{3840}u_0 \right). \quad (5.21)$$

Benzer şekilde $t = -2, -1, 0, 3/8$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^{3h/8} u(s)ds \approx h \left(\frac{57}{352}u_{3/8} + \frac{9}{4096}u_{-2} - \frac{315}{22528}u_{-1} + \frac{921}{496}u_0 \right). \quad (5.22)$$

$t = -2, -1, 0, 12/13$ için hesaplanır:

$$\int_0^{12h/13} u(s)ds \approx h \left(\frac{114}{325}u_{12/13} + \frac{72}{2197}u_{-2} - \frac{9216}{54925}u_{-1} + \frac{1554}{2197}u_0 \right). \quad (5.23)$$

$t = -2, -1, 0, 1$ için hesaplanır:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{24}u_{-2} - \frac{5}{24}u_{-1} + \frac{19}{24}u_0 \right). \quad (5.24)$$

$t = -2, -1, 0, 1/2$ için hesaplanır:

$$\int_0^{h/2} u(s)ds \approx h \left(\frac{5}{24}u_{1/2} + \frac{1}{192}u_{-2} - \frac{1}{32}u_{-1} + \frac{61}{192}u_0 \right). \quad (5.25)$$

Runge-Kutta-Fehlberg formülleri $n \geq 3$ için aşağıdaki gibidir(başlangıç değerleri için (5.19) ve (5.20) kullanılmıştır.)

$$\begin{aligned} k_1 &= h\tilde{u}_n \mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\ \tilde{u}_{n+1/4}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{4}k_1, \\ k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/4}^a F(t_{n+1/4}, \tilde{u}_{n+1/4}^a, \tilde{z}_{n+1/4}) \\ &= h\tilde{u}_{n+1/4}^a F\left(t_{n+1/4}, \tilde{u}_{n+1/4}^a, \tilde{z}_n + h \left[\frac{9}{80}u_{n+1/4}^a + \frac{1}{1536}u_{n-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{17}{3840}u_{n-1} + \frac{217}{1536}u_n \right] \right) \\ \tilde{u}_{n+3/8}^b &= \tilde{u}_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2, \\ k_3 &= h\tilde{u}_{n+3/8}^a F(t_{n+3/8}, \tilde{u}_{n+3/8}^b, \tilde{z}_{n+3/8}) \\ &= h\tilde{u}_{n+3/8}^a F\left(t_{n+3/8}, \tilde{u}_{n+3/8}^b, \tilde{z}_n + h \left[\frac{57}{352}u_{n+3/8}^b + \frac{9}{4096}u_{n-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{315}{22528}u_{n-1} + \frac{921}{4096}u_n \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+12/13}^c &= \tilde{u}_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+12/13}^c F(t_{n+12/13}, \tilde{u}_{n+12/13}^c, \tilde{z}_{n+12/13}) \\
&= h\tilde{u}_{n+12/13}^c F\left(t_{n+12/13}, \tilde{u}_{n+12/13}^c, \tilde{z}_n + h\left[\frac{114}{325}u_{n+12/13}^c + \frac{721}{2197}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{9216}{54925}u_{n-1} + \frac{1554}{2197}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^d &= \tilde{u}_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4,
\end{aligned}$$

(5.27)

$$\begin{aligned}
k_5 &= h\tilde{u}_{n+1}^d F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^d, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^d F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^d, \tilde{z}_n + h\left[\frac{3}{8}u_{n+1}^d + \frac{1}{24}u_{n-2} - \frac{5}{24}u_{n-1} + \frac{19}{24}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^e &= \tilde{u}_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_{n+1/2}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_n + h\left[\frac{5}{24}u_{n+1/2}^e + \frac{1}{192}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1}{32}u_{n-1} + \frac{61}{192}u_n\right]\right). \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5. \tag{5.29}$$

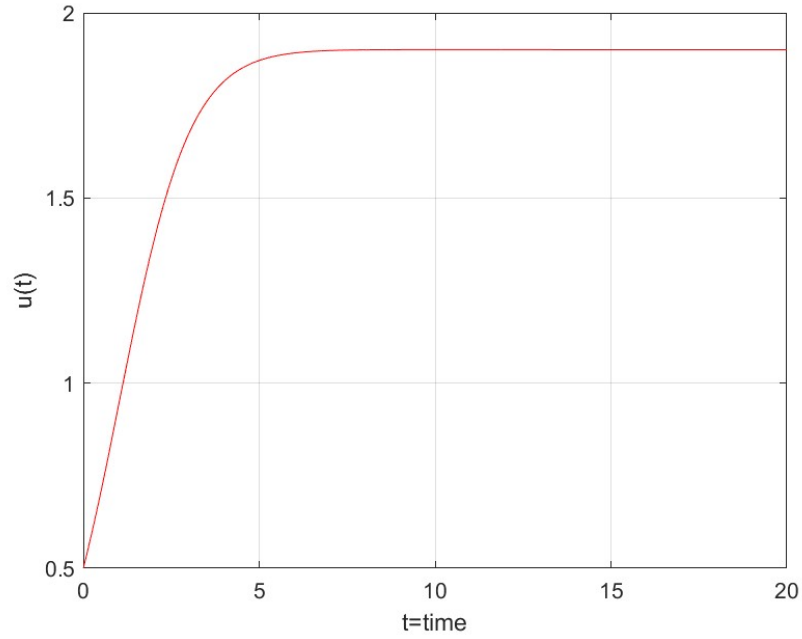
ve beşinci mertebeden hata veren metod aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6. \tag{5.30}$$

(5.9) denkleminde Runge-Kutta-Fehlberg yöntemleri ve dikdörtgenler, yamuklar kuralı, 3 nokta kuralı olarak Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, 4 noktalı kapalı Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı, 5 noktalı kapalı Boole kuralı (Bode kuralı), Weddle kuralı, daha yüksek kurallar 6-nokta, 7-nokta ve 8-nokta ve bunların kombinasyonlarını içerir.

Örnek (5.9)'u bu yeni yöntemi kullanarak tekrarladık. Runge-Kutta-Fehlberg yöntemleri ve sayısal kuadratur kuralları, örneğin yamuk kuralı, 3 nokta kuralı olarak Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı, 4 noktalı kapalı Simpson $\frac{3}{8}$ kuralı, 5 noktalı kapalı Boole kuralıdır (Bode kuralı), Weddle kuralı, daha yüksek kurallar arasında 6 nokta, 7 nokta ve 8 nokta ve bunların kombinasyonları kullanılabilir.

(5.9) denkleminin Runge -Kutta-Fehlberg metodu ile çözümünün grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.4: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Fehlberg ve integral terimi için Boole metodunun çözüm grafiği

5.5 Runge-Kutta Verner Metodu

$$\begin{aligned} u'(t) &= u(t)F\left(t, u(t), \int_{t_0}^t k(t-s)u(s)ds\right), \quad t \geq t_0, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Yukarıda verilen (5.31) denkleminde Runge-Kutta Verner metodunu uygulayalım. Bu denklemde $u(t_n)$, $t_n = t_0 + nh$ için hesaplanan gerçek değer, $\tilde{u}(t_n)$, t_n değeri için nümerik çözümü ifade etmektedir. Bu bölümde (5.31) denkleminde yüksek mertebeli sayısal yöntemler uygulanacaktır.

Genel olarak, integro-diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü için formüller, temelde yatan adi diferansiyel denklemler için verilen formüllere dayanır.

Kullanılacak yardımcı kuadratur kuralları yaklaşımı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\tilde{z}(t_n) := h \sum_{j=0}^n w_{n,j} k(t_n - t_j) \tilde{u}(t_j) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds. \quad (5.32)$$

İntegral, bilinen sayısal entegrasyon yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Newton-Cotes integrasyonu sol ve sağ dikdörtgen kuralları, yamuk kuralı, Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı ve Simpson $\frac{3}{8}$ kuralını içeren formüller çok uygundur.

$t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $h = t_n - t_{n-1}$ adım aralığıdır.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h \tilde{u}_n \left(\frac{1}{2} \mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)) + \frac{1}{2} \mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^k, \tilde{z}(t_{n+1})) \right). \quad (5.33)$$

(5.31) denkleminde Runge-Kutta 2 (RK2) metodu uygulanırsa (5.47) denklemi elde edilir. Bu metod açık Euler olarak da adlandırılır. Bizim amacımız daha iyi yakınsamalar elde etmektir.

(5.31) denkleminde \tilde{u}_n değerinden \tilde{u}_{n+1} değerine h adım uzunluğunda Runge-Kutta-Verner metodunu uygulayalım.

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\tilde{u}_n\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\
\tilde{u}_{n+1/6}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}k_1, \\
k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_{n+1/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F\left(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_n + \frac{h}{12}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/6}^a]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2, \\
k_3 &= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_{n+4/15}) \\
&= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F\left(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_n + \frac{4h}{30}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+4/15}^b]\right) \\
\tilde{u}_{n+2/3}^c &= \tilde{u}_n + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_{n+2/3}) \\
&= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F\left(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_n + \frac{2h}{6}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+2/3}^c]\right) \\
\tilde{u}_{n+5/6}^d &= \tilde{u}_n + \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4, \\
k_5 &= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_{n+5/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F\left(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_n + \frac{5h}{12}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+5/6}^d]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^e &= \tilde{u}_n + \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_{n+1/2}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_n + \frac{h}{4}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^e]\right) \\
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8. \tag{5.35}$$

Bu örnekte

$$z'(t_n) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds$$

yaklaşık değeri bulunurken $[t_n, t_{n+1/6}]$, $[t_n, t_{n+4/15}]$, $[t_n, t_{n+12/3}]$, $[t_n, t_{n+5/6}]$, $[t_n, t_{n+1}]$, $[t_n, t_{n+1/15}]$, $[t_n, t_{n+1}]$ aralıkları için $k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ ve k_8 değerleri elde edilmiştir.

İntegral değerinin yaklaşık değeri hesaplanırken farklı nümerik metodlar kullanılabilir. Eğer yamuklar kuralı kullanılırsa ikinci mertebeden yakınsama, yamuklar ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı uygulanırsa üçüncü mertebeden yakınsama veririr.

Daha yüksek mertebeden doğruluk elde etmek için integral terimi daha doğru bir şekilde değerlendirilmelidir. Burada beşinci mertebeden yakınsama elde edebilmek için $[t_0, t_n]$ aralığında Boole'un kuralını uygulayacağız.

$$z(1) = 0$$

$$u(1) = u_0$$

$$\text{If } n = 1$$

$$z(n+1) = z(n) + h(u(n) + u(n+1))/2$$

$$\text{elseif } n == 2$$

$$z(n+1) = z(n-1) + h(u(n-1) + 4u(n) + u(n+1))/3$$

$$\text{elseif } n == 3$$

$$z(n+1) = z(n-2) + 3h(u(n-2) + 3u(n-1) + 3u(n) + u(n+1))/8$$

$$\text{elseif } n == 4$$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

$$\text{elseif } n == 5$$

$$z(n+1) = z(n-4) + 5h(1u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1) + 75u(n) + 19u(n+1))/288$$

$$\text{elseif } n == 6$$

$$z(n+1) = z(n-5) + h(41u(n-5) + 216u(n-4) + 27u(n-3) + 272u(n-2) + 27u(n-1) + 216u(n) + 41u(n+1))/140$$

$$\text{elseif } n == 7$$

$$z(n+1) = z(n-6) + 7h(751u(n-6) + 3577u(n-5) + 1323u(n-4) + 2989u(n-3) + 2989u(n-2) + 1323u(n-1) + 3577u(n) + 7511u(n+1))/17280$$

elseif $n == 8$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif $\text{mod}(n, 4) == 0$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif $\text{mod}(n, 4) == 1$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif $\text{mod}(n, 4) == 2$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

elseif $\text{mod}(n, 4) == 3$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

else

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

$t = -2, -1, 0, 1/6$ noktalarında Lagrange interpolasyonunu uygularsak (ilk iki nokta için (5.48) ve (5.49) formüllerini kullanacağız.) \tilde{u}_{n-2} , \tilde{u}_{n-1} , \tilde{u}_n ve $\tilde{u}_{n+1/6}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u(t) = \frac{1}{h^3} \left[-\frac{3}{13}t \left(t - \frac{h}{6} \right) (t+h)u_{-2} + \frac{6}{7}t \left(t - \frac{h}{6} \right) (t-2h)u_{-1} \right. \\ \left. - 3(t+h)(t+2h) \left(t - \frac{h}{6} \right) u_0 + \frac{216}{91}t(t+h)(t+2h)u_{1/6} \right]. \quad (5.36)$$

Yukarıdaki ifadenin $[0, h/6]$ aralığında integralini alırsak:

$$\int_0^{h/6} u(s)ds \approx h \left(\frac{13}{168}u_{1/6} + \frac{1}{5184}u_{-2} - \frac{25}{18144}u_{-1} + \frac{469}{5184}u_0 \right). \quad (5.37)$$

elde edilir. Benzer şekilde $t = -2, -1, 0, 4/15$ için hesaplarırsa:

$$\int_0^{4h/15} u(s)ds \approx h \left(\frac{34}{285}u_{4/15} + \frac{8}{10125}u_{-2} - \frac{1024}{192375}u_{-1} + \frac{1538}{10125}u_0 \right). \quad (5.38)$$

$t = -2, -1, 0, 2/3$ için hesaplarırsa:

$$\int_0^{2h/3} u(s)ds \approx h \left(\frac{4}{15}u_{2/3} + \frac{1}{81}u_{-2} - \frac{28}{405}u_{-1} + \frac{37}{81}u_0 \right). \quad (5.39)$$

$t = -2, -1, 0, 5/6$ için hesaplarırsa:

$$\int_0^{5h/6} u(s)ds \approx h \left(\frac{85}{264}u_{5/6} + \frac{125}{5184}u_{-2} - \frac{3625}{28512}u_{-1} + \frac{3185}{5184}u_0 \right). \quad (5.40)$$

$t = -2, -1, 0, 1$ için hesaplarırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{24}u_{-2} - \frac{5}{24}u_{-1} + \frac{19}{24}u_0 \right). \quad (5.41)$$

$t = -2, -1, 0, 1/15$ için hesaplarırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{31}{960}u_1 + \frac{1}{81000}u_{-2} - \frac{61}{648000}u_{-1} + \frac{2791}{81000}u_0 \right). \quad (5.42)$$

Sonuç olarak $t = -2, -1, 0, 1$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{24}u_{-2} - \frac{5}{24}u_{-1} + \frac{19}{24}u_0 \right). \quad (5.43)$$

elde edilir.

Runge-Kutta-Verner formülleri $n \geq 3$ için aşağıdaki gibidir(başlangıç değerleri için (5.48) ve (5.49) kullanılmıştır.):



$$\begin{aligned}
k_1 &= h\tilde{u}_n\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\
\tilde{u}_{n+1/6}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}k_1, \\
k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_{n+1/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F\left(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_n + h\left[\frac{13}{168}u_{n+1/6}^a + \frac{1}{5184}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{25}{18144}u_{n-1} + \frac{469}{5184}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2, \\
k_3 &= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_{n+4/15}) \\
&= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F\left(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_n + h\left[\frac{34}{285}u_{n+4/15}^b + \frac{8}{10125}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{1024}{192375}u_{n-1} + \frac{1538}{10125}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+2/3}^c &= \tilde{u}_n + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_{n+2/3}) \\
&= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F\left(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_n + h\left[\frac{4}{15}u_{n+2/3}^c + \frac{1}{81}u_{n-2} - \frac{28}{405}u_{n-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{37}{81}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+5/6}^d &= \tilde{u}_n + \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4, \\
k_5 &= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_{n+5/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F\left(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_n + h\left[\frac{85}{264}u_{n+5/6}^d + \frac{125}{5184}u_{n-2} - \frac{3625}{28512}u_{n-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{3185}{5184}u_n\right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+1}^e &= \tilde{u}_n + \frac{12}{15}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1}^e F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^e F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_n + h\left[\frac{3}{8}u_{n+1}^e + \frac{1}{24}u_{n-2} - \frac{5}{24}u_{n-1} + \frac{19}{24}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/15}^f &= \tilde{u}_n + \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5, \\
k_7 &= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_{n+1/15}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F\left(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_n + h\left[\frac{31}{960}u_{n+1}^f + \frac{1}{81000}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{61}{648000}u_{n-1} + \frac{2791}{81000}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^g &= \tilde{u}_n + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7, \\
k_8 &= h\tilde{u}_{n+1}^g F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^g F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_n + h\left[\frac{3}{8}u_{n+1}^g + \frac{1}{24}u_{n-2} - \frac{5}{24}u_{n-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{19}{24}u_n\right]\right). \tag{5.44}
\end{aligned}$$

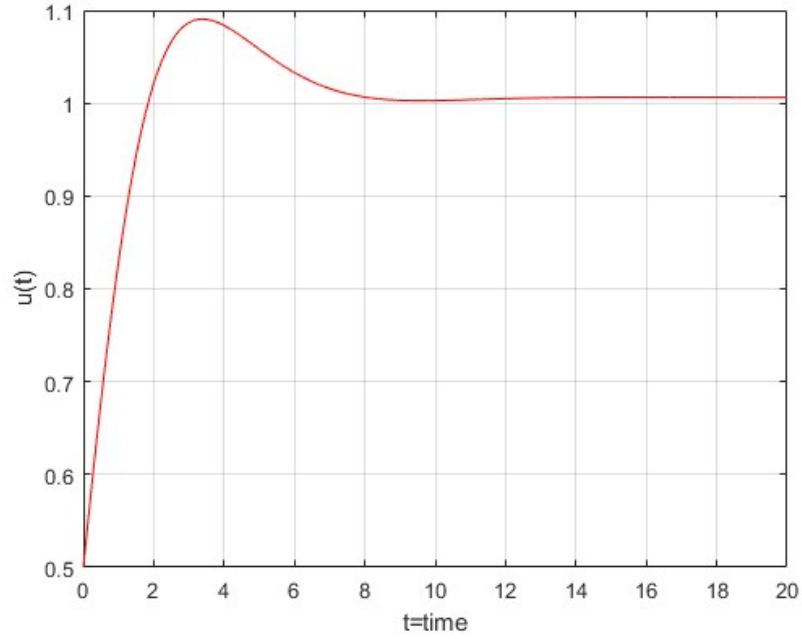
altıncı mertebeden metod aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6.$$

ve beşinci mertebeden hata veren metod aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8. \tag{5.45}$$

Örnek (5.9) denkleminde verilen Runge-Kutta-Verner yöntemleri ve dikedörtgenler, yamukla kuralı, 3 nokta kuralı olarak Simpson 1/3 kuralı, 4 noktalı kapalı Simpson 3/8 kuralı, 5 noktalı kapalı Boole kuralı (Bode kuralı), Weddle kuralı, daha yüksek kurallar 6-nokta, 7-nokta ve 8-nokta ve bunların kombinasyonlarını içerir(Filiz, 2013).



Şekil 5.5: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denklemde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Verner ve integral terimi için Boole metodunun çözüm grafiği

5.6 Runge-Kutta Verner Metodu+6. Mertebe Newton-Cotes

Yukarıda verilen (5.31) denklemin diferansiyel kısmı için Runge-Kutta Verner, integral kısmına ise daha fazla yakınsama elde etmek için 6. mertebe Newton-Cotes formüllerini uygulayalım.

Bu denklemde $u(t_n)$, $t_n = t_0 + nh$ için hesaplanan gerçek değer, $\tilde{u}(t_n)$, t_n değeri için nümerik çözümü ifade etmektedir. Bu bölümde (5.31) denklemin yüksek mertebeli sayısal yöntemler uygulanacaktır.

$$\tilde{z}(t_n) := h \sum_{j=0}^n w_{n,j} k(t_n - t_j) \tilde{u}(t_j) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s) u(s) ds. \quad (5.46)$$

İntegral, bilinen sayısal entegrasyon yöntemleri kullanarak hesapladık. Burada amacımız daha yüksek mertebeden yakınsama elde edebilmek için 6. mertebeden Newton-Cotes integrasyonu uygulayarak 6. mertebeden yakınsama elde etmektir.

$t_n = t_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $h = t_n - t_{n-1}$ adım aralığıdır.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + h\tilde{u}_n \left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^k, \tilde{z}(t_{n+1})) \right). \quad (5.47)$$

(5.31) denklemine Runge-Kutta 2 metodu uygulanırsa (5.47) denklemi elde edilir. Bu metod açık Euler olarak da adlandırılır. Bizim amacımız daha iyi yakınsamalar elde etmektir.

(5.31) denklemine \tilde{u}_n değerinden \tilde{u}_{n+1} değerine h adım uzunluğunda Runge-Kutta-Verner metodunu uygulayalım.

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\tilde{u}_n\mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\
\tilde{u}_{n+1/6}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}k_1, \\
k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_{n+1/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F\left(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_n + \frac{h}{12}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/6}^a]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2, \\
k_3 &= h\tilde{u}_{n+4/15}^b F(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_{n+4/15}) \\
&= h\tilde{u}_{n+4/15}^b F\left(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_n + \frac{4h}{30}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+4/15}^b]\right) \\
\tilde{u}_{n+2/3}^c &= \tilde{u}_n + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_{n+2/3}) \\
&= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F\left(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_n + \frac{2h}{6}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+2/3}^c]\right) \\
\tilde{u}_{n+5/6}^d &= \tilde{u}_n + \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4, \\
k_5 &= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_{n+5/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F\left(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_n + \frac{5h}{12}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+5/6}^d]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/2}^e &= \tilde{u}_n + \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_{n+1/2}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/2}^e F\left(t_{n+1/2}, \tilde{u}_{n+1/2}^e, \tilde{z}_n + \frac{h}{4}[\tilde{u}_n + \tilde{u}_{n+1/2}^e]\right) \\
\tilde{u}_{n+1} &= \tilde{u}_n + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6 \tag{5.48}
\end{aligned}$$

ve

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8. \tag{5.49}$$

Bu örnekte

$$z'(t_n) \approx \int_{t_0}^{t_n} k(t-s)u(s)ds$$

yaklaşık değeri bulunurken $[t_n, t_{n+1/6}]$, $[t_n, t_{n+4/15}]$, $[t_n, t_{n+12/3}]$, $[t_n, t_{n+5/6}]$, $[t_n, t_{n+1}]$, $[t_n, t_{n+1/15}]$, $[t_n, t_{n+1}]$ aralıkları için $k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7$ ve k_8 değerleri elde edilmiştir.

İntegral değerinin yaklaşık değeri hesaplanırken farklı nümerik metodlar kullanılabilir. Eğer yamuklar kuralı kullanılırsa ikinci mertebeden yakınsama, yamuklar ve Simpson $\frac{1}{3}$ kuralı uygulanırsa üçüncü mertebeden yakınsama verir.

Daha yüksek mertebeden doğruluk elde etmek için integral terimi daha doğru bir şekilde değerlendirilmelidir. Burada beşinci mertebeden yakınsama elde edebilmek için $[t_0, t_n]$ aralığında integral terimi için altıncı mertebeden Newton-Cotes formüllerini uygulayacağız.

$$z(1) = 0$$

$$u(1) = u_0$$

$$\text{If } n = 1$$

$$z(n+1) = z(n) + h(u(n) + u(n+1))/2$$

$$\text{elseif } n == 2$$

$$z(n+1) = z(n-1) + h(u(n-1) + 4u(n) + u(n+1))/3$$

$$\text{elseif } n == 3$$

$$z(n+1) = z(n-2) + 3h(u(n-2) + 3u(n-1) + 3u(n) + u(n+1))/8$$

$$\text{elseif } n == 4$$

$$z(n+1) = z(n-3) + 2h(7u(n-3) + 32u(n-2) + 12u(n-1) + 32u(n) + 7u(n+1))/45$$

$$\text{elseif } n == 5$$

$$z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1) + 75u(n) + 19u(n+1))/288$$

$$\text{elseif } n == 6$$

$$z(n+1) = z(n-5) + h(41u(n-5) + 216u(n-4) + 27u(n-3) + 272u(n-2) + 27u(n-1) + 216u(n) + 41u(n+1))/140$$

$$\text{elseif } n == 7$$

$$z(n+1) = z(n-6) + 7h(751u(n-6) + 3577u(n-5) + 1323u(n-4)$$

$+2989u(n-3) + 2989u(n-2) + 1323u(n-1)$
 $+3577u(n) + 7511u(n+1))/17280$
elseif $n == 8$
 $z(n+1) = z(n-7) + 4h(989u(n-7) + 5888u(n-6) - 928u(n-5) + 10496u(n-4)$
 $-4540u(n-3) + 10496u(n-2) - 928u(n-1) + 5888u(n) + 989u(n+1))/14175$
elseif $n == 9$
 $z(n+1) = z(n-8) + 9h(2857(u(n-8) + u(1)) + 15741(u(n-7) + u(n)) + 1080$
 $(u(n-6) + u(n-1)) + 19344(u(n-5) + u(n-2)) + 5778(u(n-4) + u(n-3)))/89600$
elseif $n == 10$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
elseif $\text{mod}(n, 5) == 0$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
elseif $\text{mod}(n, 5) == 1$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
elseif $\text{mod}(n, 5) == 2$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
elseif $\text{mod}(n, 5) == 3$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
elseif $\text{mod}(n, 5) == 4$
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$
else
 $z(n+1) = z(n-4) + 5h(19u(n-4) + 75u(n-3) + 50u(n-2) + 50u(n-1)$
 $+75u(n) + 19u(n+1))/288$

$t = -2, -1, 0, 1/6$ noktalarında Lagrange interpolasyonunu uygularsak (ilk iki nokta için (5.48) ve (5.49) formüllerini kullanacağız.) $\tilde{u}_{n-2}, \tilde{u}_{n-1}, \tilde{u}_n$ ve $\tilde{u}_{n+1/6}$:

$$u(t) = \frac{1}{h^3} \left[-\frac{3}{13}t \left(t - \frac{h}{6} \right) (t+h)u_{-2} + \frac{6}{7}t \left(t - \frac{h}{6} \right) (t-2h)u_{-1} - 3(t+h)(t+2h) \left(t - \frac{h}{6} \right) u_0 + \frac{216}{91}t(t+h)(t+2h)u_{1/6} \right].$$

Yukarıdaki ifadenin $[0, h/6]$ aralığında integralini alırsak:

$$\int_0^{h/6} u(s)ds \approx h \left(\frac{13}{168}u_{1/6} + \frac{1}{5184}u_{-2} - \frac{25}{18144}u_{-1} + \frac{469}{5184}u_0 \right). \quad (5.50)$$

Benzer şekilde $t = -2, -1, 0, 4/15$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^{4h/15} u(s)ds \approx h \left(\frac{34}{285}u_{4/15} + \frac{8}{10125}u_{-2} - \frac{1024}{192375}u_{-1} + \frac{1538}{10125}u_0 \right). \quad (5.51)$$

$t = -2, -1, 0, 2/3$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^{2h/3} u(s)ds \approx h \left(\frac{4}{15}u_{2/3} + \frac{1}{81}u_{-2} - \frac{28}{405}u_{-1} + \frac{37}{81}u_0 \right). \quad (5.52)$$

$t = -2, -1, 0, 5/6$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^{5h/6} u(s)ds \approx h \left(\frac{85}{264}u_{5/6} + \frac{125}{5184}u_{-2} - \frac{3625}{28512}u_{-1} + \frac{3185}{5184}u_0 \right). \quad (5.53)$$

$t = -2, -1, 0, 1$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{24}u_{-2} - \frac{5}{24}u_{-1} + \frac{19}{24}u_0 \right). \quad (5.54)$$

$t = -2, -1, 0, 1/15$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{31}{960}u_1 + \frac{1}{81000}u_{-2} - \frac{61}{648000}u_{-1} + \frac{2791}{81000}u_0 \right). \quad (5.55)$$

sonuç olarak $t = -2, -1, 0, 1$ için hesaplanırsa:

$$\int_0^h u(s)ds \approx h \left(\frac{3}{8}u_1 + \frac{1}{24}u_{-2} - \frac{5}{24}u_{-1} + \frac{19}{24}u_0 \right). \quad (5.56)$$

Runge-Kutta-Verner formülleri $n \geq 3$ için aşağıdaki gibidir(başlangıç değerleri için (5.48) ve (5.49) kullanılmıştır.):

$$\begin{aligned} k_1 &= h\tilde{u}_n \mathcal{F}(t_n, \tilde{u}_n, \tilde{z}(t_n)), \\ \tilde{u}_{n+1/6}^a &= \tilde{u}_n + \frac{1}{6}k_1, \\ k_2 &= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_{n+1/6}) \\ &= h\tilde{u}_{n+1/6}^a F\left(t_{n+1/6}, \tilde{u}_{n+1/6}^a, \tilde{z}_n + h \left[\frac{13}{168}u_{n+1/6}^a + \frac{1}{5184}u_{n-2} - \frac{25}{18144}u_{n-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{469}{5184}u_n \right] \right) \\ \tilde{u}_{n+1/2}^b &= \tilde{u}_n + \frac{4}{75}k_1 + \frac{16}{75}k_2, \\ k_3 &= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_{n+4/15}) \\ &= h\tilde{u}_{n+4/15}^a F\left(t_{n+4/15}, \tilde{u}_{n+4/15}^b, \tilde{z}_n + h \left[\frac{34}{285}u_{n+4/15}^b + \frac{8}{10125}u_{n-2} - \frac{1024}{192375}u_{n-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1538}{10125}u_n \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{n+2/3}^c &= \tilde{u}_n + \frac{5}{6}k_1 - \frac{8}{3}k_2 + \frac{5}{2}k_3, \\
k_4 &= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_{n+2/3}) \\
&= h\tilde{u}_{n+2/3}^c F\left(t_{n+2/3}, \tilde{u}_{n+2/3}^c, \tilde{z}_n + h\left[\frac{4}{15}u_{n+2/3}^c + \frac{1}{81}u_{n-2} - \frac{28}{405}u_{n+1} + \frac{37}{81}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+5/6}^d &= \tilde{u}_n + \frac{165}{64}k_1 + \frac{55}{6}k_2 - \frac{425}{64}k_3 + \frac{85}{96}k_4, \\
k_5 &= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_{n+5/6}) \\
&= h\tilde{u}_{n+5/6}^d F\left(t_{n+5/6}, \tilde{u}_{n+5/6}^d, \tilde{z}_n + h\left[\frac{85}{264}u_{n+5/6}^d + \frac{125}{5184}u_{n-2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{3625}{28512}u_{n-1} + \frac{3185}{5184}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^e &= \tilde{u}_n + \frac{12}{15}k_1 - 8k_2 + \frac{4015}{612}k_3 - \frac{11}{36}k_4 + \frac{88}{255}k_5, \\
k_6 &= h\tilde{u}_{n+1}^e F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^e F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^e, \tilde{z}_n + h\left[\frac{3}{8}u_{n+1}^e + \frac{1}{24}u_{n-2} - \frac{5}{24}u_{n-1} + \frac{19}{24}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1/15}^f &= \tilde{u}_n + \frac{8263}{15000}k_1 + \frac{124}{75}k_2 - \frac{643}{680}k_3 - \frac{81}{250}k_4 + \frac{2484}{10625}k_5, \\
k_7 &= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_{n+1/15}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1/15}^f F\left(t_{n+1/15}, \tilde{u}_{n+1/15}^f, \tilde{z}_n + h\left[\frac{31}{960}u_{n+1}^f + \frac{1}{81000}u_{n-2} - \frac{61}{648000}u_{n-1}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{2791}{81000}u_n\right]\right) \\
\tilde{u}_{n+1}^g &= \tilde{u}_n + \frac{3501}{1720}k_1 - \frac{300}{43}k_2 + \frac{297275}{52632}k_3 - \frac{319}{2322}k_4 + \frac{24068}{84065}k_5 + \frac{3850}{26703}k_7, \\
k_8 &= h\tilde{u}_{n+1}^g F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_{n+1}) \\
&= h\tilde{u}_{n+1}^g F\left(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}^g, \tilde{z}_n + h\left[\frac{3}{8}u_{n+1}^g + \frac{1}{24}u_{n-2} - \frac{5}{24}u_{n-1} + \frac{19}{24}u_n\right]\right). \quad (5.57)
\end{aligned}$$

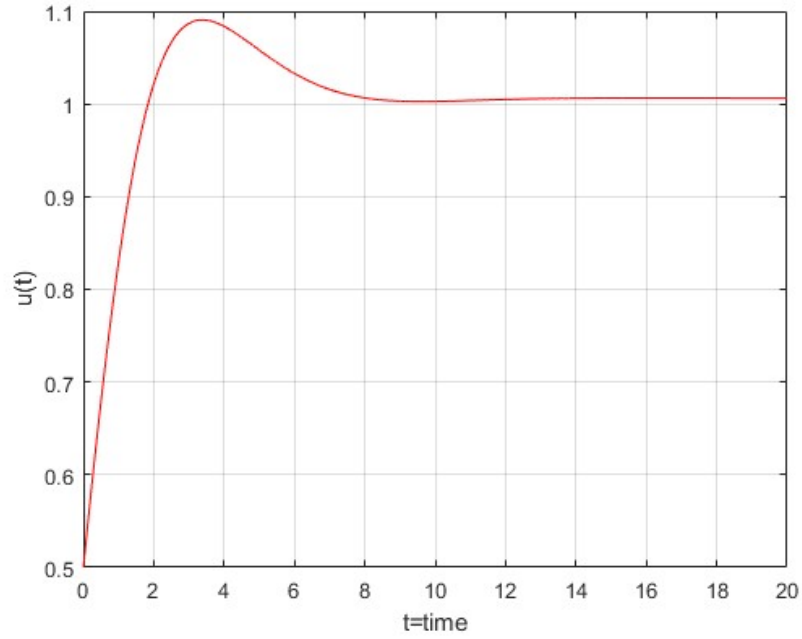
altıncı mertebeden metod aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{13}{160}k_1 + \frac{2375}{5984}k_3 + \frac{5}{16}k_4 + \frac{12}{85}k_5 + \frac{3}{44}k_6$$

ve beşinci mertebeden hata veren metod aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{3}{40}k_1 + \frac{875}{2244}k_3 + \frac{23}{72}k_4 + \frac{264}{1955}k_5 + \frac{125}{11592}k_7 + \frac{43}{616}k_8. \quad (5.58)$$

(5.9) denkleminde Runge-Kutta-Verner yöntemleri ve dikdörtgenler kuralı, yamuklar kuralı, 3 nokta kuralı olarak Simpson 1/3 kuralı, 4 noktalı kapalı kural Simpson 3/8 kuralı, 5 noktalı kapalı kural Boole kuralı (Bode kuralı), Weddle kuralı, daha yüksek kurallar 6-nokta, 7-nokta ve 8-nokta ve bunların kombinasyonlarını içerir(Filiz, 2013).



Şekil 5.6: (5.9) eşitliği ile verilen lineer olmayan Volterra integro-diferansiyel denkleminde $h = 0.05$, $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 0.5$, $t_{max} = 20$, $u_0 = 0.5$ için Runge-Kutta-Verner ve integral terimi için altıncı mertebeden Newton-Cotes formülleri uygulanarak elde edilen nümerik çözüm grafiği

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer olmayan Volterra integro diferansiyel denklemlerin yüksek mertebeden nümerik çözümleri uygun bilgisayar programları kullanılarak elde edildi, grafikleri çizdirildi.

Test denklemine ileri-Euler metodundan başlanarak Runge-Kutta-6'ya kadar birçok metod uygulandı ve düzgün çözümler elde edildi. Yüksek mertebeden Runge-Kutta metodları kullanılarak daha iyi sonuçlar elde edilebileceği görüldü.

Uygun ve daha iyi programlama yapılarak Runge-Kutta-10'a kadar gidilebileceği görüldü.

5. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun I. A.(Eds), “*Integration. 25.4 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*”, 9th printing, New York: Dover, 885–887, (1972).
- Burden, R. L. and Faires, J. D., *Numerical Analysis*, New York: Brooks/Cole Publishing Company, USA, ch.5, (1997).
- Cushing, J. M., *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*, Lecture Notes in Biomathematics, Vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1977).
- Erdem, Y., “*Lotka Volterra sistemleri ve sayısal çözümleri*”, Adnan Menderes Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Aydın, (2004).
- Filiz, A., “*Numerical Solution Of Some Volterra Equations. PhD. Thesis*”, University of Manchester, (2000).
- Filiz, A., “*Fourth-Order Robust Numerical Method for Integro-differential Equations*”, Asian Journal of Fuzzy and Applied Mathematics, Vol 1 I, pp. 28-33, (2013).
- Filiz, A., “*Numerical Solution of a non-linear Volterra Integrodifferential Equation via Runge-Kutta-Verner Method*”, International Journal of Scientific and Research Publications, Volume 3, Issue 9, (2013).
- Filiz, A., “*Numerical Solution of Linear Volterra Integro-Differential Equation using Runge-Kutta-Fehlberg Method*”, Applied and Computational Mathematics. Vol. 3, No. 1, 9-14, (2014).
- Ishak, F. and Ahmad, S.N., “*Development of extended trapezoidal method for numerical solution of Volterra integro-differential equations*”, International Journal of Mathematics, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering 10(11): 52856, (2016).
- Jerri, A. J., *Introduction to Integral Equations with Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1985).
- Linz, P., *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), (1985).
- Miller, R. K., *On Volterra’s population equation*, SIAM J. Appl. Math. 14, 446-452, (1966).

- Small, R.D., *Population Growth in a Closed System and Mathematical Modeling*, Classroom Notes in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 317-320, (1989).
- Smithies, F., *Integral Equations*, Cambridge University Press, (1958).
- TeBeest, K. G., “*Numerical and Analytical Solutions of Volterra’s Population Model*”, SIAM Review Vol. 39, No. 3, pp. 484–493, (1997).
- Tricomi, F. G., *Integral Equations*, Interscience, New York, (1957).
- Volterra, V., *Animal Ecology with Special Reference to Insects*, A translation of his 1926 paper can be found in appendix to R. N. Chapman, McGraw-Hill, 1931, New York, (1926).
- Volterra, V., *Variations and fluctuations of the number of individuals in animal species living together in Animal Ecology*, (R. N. Chapman), 409- 448, McGraw-Hill, New York, (1931).
- Volterra, V., *Lecons sur la Theorie Mathematique de la Lutte Pour la Vie*, Gauthier-Villars, Paris, (1931).
- Volterra, V., *Theory of Functionals and of Integro-Diferential Equations*, Dover, New York, (1959).
- Volterra, V., *Opere Matematiche*, Memorie e Note Vol. 5 . Accademia Nazionale dei Lincei (Rome) 1962, 1926-1940, (1962).
- Wolfram MathWorld, “*Newton-Cotes Formulas*[online]”,(2023) <http://mathworld.wolfram.com/Newton-CotesFormulas.html>,(2004).