



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**HEMEM HEMEN η -RICCI-BOURGUIGNON SOLİTONLAR
ÜZERİNE**

Moctar TRAORE

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN**

Aralık, 2023

İSTANBUL

Bu çalışma 06.12.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Fatma KARACA
İstanbul Beykent Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç .Dr. Sinem GÜLER
İstanbul Sabahattin Zaim Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi

Doç. Dr. Nurettin Cenk TURGAY
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) nun 119F179 numaralı 1001-Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Projelerini Destekleme Programı kapsamında desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca bilgi ve tecrübeleriyle bana yön gösteren, emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, beni akademik açıdan yetiştiren ve bir matematikçinin nasıl olması gerektiği konusunda her zaman örnek aldığım danışman hocam Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca, her zaman bana destek olan eşim Adja Ndeye Birame GUEYE'ye ve eğitim hayatım boyunca en az benim kadar emek sahibi olan aileme de teşekkür ederim.

Aralık, 2023

Moctar TRAORE

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	4
2.1. RIEMANN MANİFOLDLAR	4
2.2. BAZI ÖZEL VEKTÖR ALANLARI VE GEOMETRİ YAPILARI	11
2.3. RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLAR	12
2.4. *-RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLAR	15
2.5. RIEMANN ALTMANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI	16
2.6. KENMOTSU MANİFOLDLAR	18
3. MALZEME VE YÖNTEM	22
4. BULGULAR	23
4.1. $\xi(Ric)$ -VEKTÖR ALANI VE RİCCİ SOLİTONLAR	23
4.1.1. Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\xi(Ric)$ -vektör alanları	23
4.1.2. Potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ olan Ricci solitonlar	28
4.2. η -RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLAR	30
4.2.1. η -Ricci-Bourguignon ve hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar	30
4.2.2. Gradyent hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar için integral formülleri	38
4.2.3. Gradyent hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlarının karakterizasyonu	46
4.3. KENMOTSU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE η -RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLARI	57
4.3.1. Değişmez altmanifoldlarda potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar	62

4.3.2. Kenmotsu manifoldlarının hiperyüzeyleri	64
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	73



SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

$\tilde{F}$	: Riemann manifold
$Boy(\tilde{F})$	: $\tilde{F}$ Riemann manifoldunun boyutu
$\mathfrak{X}(\tilde{F})$	: $\tilde{F}$ manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının uzayı
$T_p\tilde{F}$	: $p \in \tilde{F}$ noktasındaki tanjant uzayı
$C^\infty(\tilde{F}, \mathbb{R})$	: $\tilde{F}$ den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı C^∞ sınıfindan fonksiyonların uzayı
$\tilde{g}$	: Metrik tensör
R	: Riemann eğrilik tensörü
Ric	: $(0, 2)$ -tipindeki Ricci tensörü
Q	: Ricci operatörü
r	: Skaler eğrilik
div	: Diverjans
∇k	: fonksiyon Gradyenti
$\nabla^2 k$	: k fonksiyonunun Hessian tensörü
Δ	: Laplasyan operatörü
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{S}^n$	: n -boyutlu birim Küresi uzayı
$\mathbb{H}^n$	: n -boyutlu Hiperbolik uzayı

Kısaltmalar

Açıklama

RB	: Ricci-Bourguignon
------------------------	---------------------

ÖZET

DOKTORA TEZİ

HEMEM HEMEN η -RICCI-BOURGUIGNON SOLİTONLAR ÜZERİNE

Moctar TRAORE

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

Bu tez çalışmasının amacı, potansiyel vektör alanları bazı özel vektör alanları olan hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde problemlerin genel değerlendirmesi ve arka planı sunulmaktadır.

İkinci bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde, Riemann manifold tanımı, Riemann manifold üzerinde bazı geometrik yapılar ve daha ilerideki çalışmalar için gerekli olan sonuçlar verilmiştir. İkinci alt bölümde, özel vektör alanlarının ve kuazi-Einstein manifold kavramının tanımları verilmiştir. Üçüncü alt bölümde, bu tezin ana konusu olan hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonların tanımı verilmiştir, ayrıca ana sonuçlarımızı elde etmemizi sağlayan bazı teoremler verilmiştir. Bu nedenle, dördüncü alt bölümde, Ricci solitonların arasında bir ilişki vermemizi sağlayan $*$ -Ricci soliton adlı başka bir Ricci soliton türü verilmiştir. Beşinci alt bölümde Riemann manifoldların altmanifoldu kavramı temel denklemleri verilmiştir. Altıncı alt bölümde kontakt metrik manifoldların ve Kenmotsu manifoldlarının tanımları verilmiştir. Bu alt bölümde Kenmotsu manifoldların değişmeyen altmanifoldun tanımını verilmiştir.

Üçüncü bölümde tez çalışmasının hazırlanmasında izlenen yöntemlerden ve kullanılan araçlardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm ise tez çalışmasının bulgularından oluşmaktadır. Bu bölüm tezin orijinal kısmıdır, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde $\xi(Ric)$ -vektör alanının tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca potansiyel vektör alanı bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan Ricci solitonlar çalışmıştır. Bölüm 4.2. de hemen hemen η -Ricci-Bourguignon soliton yapısına sahip bir Riemann manifoldu incelenmiştir. Aşikâr (trivial) olmayan, kompakt hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonun Öklid küresine izometrik olduğu kanıtlanmıştır. Hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitondan elde edilen bazı sonuçlar kullanarak kompakt ve yönlendirilebilir hemen hemen η -Ricci-Bourguignon soliton için integral formülleri verilmiştir. İyi tanımlanmış bir potansiyel f fonksiyonu ile, bir hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonun bir gradyent hemen hemen sıfır izli (traceless) $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, sabit skaler eğriliğe sahip bir Einstein manifoldunun iyi tanımlanmış f potansiyel fonksiyonuna sahip bir uzay formuna izometrik olduğu gösterilmiştir. Bölüm 4.3. te $*$ -Ricci-Bourguignon ve hemen hemen η -Ricci-Bourguignon soliton yapısına izin veren Kenmotsu manifold ele alındı. Bir Kenmotsu manifolduna izometrik olarak daldırılmış altmanifoldlar üzerindeki potansiyel vektör alanı bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının teğetsel bileşeni olan hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonların bazı temel özellikler verilmiştir. Özellikle, $\xi(Ric)$ -vektör alanına izin veren bir Kenmotsu manifolduna izometrik olarak daldırılmış bir hiperyüzey üzerindeki hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonun bir genelleştirilmiş kuazi-Einstein manifoldu olduğu kanıtlanmıştır.

Beşinci bölümde, tez çalışmasının genel bir değerlendirmesi yapılmış ve çalışmanın literatüre katkısından bahsedilmiştir. Ayrıca, bu çalışmadan hareketle hangi çalışmaların yapılabileceği üzerinde durulmuştur.

Aralık 2023, 85 sayfa.

Anahtar kelimeler: $\xi(Ric)$ -vektör alanı, harmonik vektör alanı, hemen hemen η -Ricci-Bourguignon soliton, kuazi-Einstein manifold, konformal vektör alanı, uzay formu, $*$ -Ricci-Bourguignon soliton, Kenmotsu manifold.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

ON ALMOST η -RICCI-BOURGUIGNON SOLITONS

Moctar TRAORE

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Mathematics Program

Supervisor: Prof. Dr. Hakan Mete TAŞTAN

The aim of this thesis is to examine the potential vector fields of some special vector fields and almost η -Ricci-Bourguignon solitons.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter the general literacy evaluation of the problems and their background are presented.

The second chapter has six subsections. In the first subsection, firstly we give the definitions of the Riemannian manifold and some geometry structures on Riemannian manifold. Important results which will be used for the further study of this thesis are given. Some definitions of special vector fields and the notion of quasi-Einstein manifolds are given in the second subsection. In the third subsection the definition of almost η -Ricci-Bourguignon solitons is given which is the main topic of this thesis, we give also some important theorems which allow us to obtain our main results. Therefore in the fourth subsection, we give another type of Ricci solitons called $*$ -Ricci solitons, which allow us to give a relation between Ricci solitons. In the fifth subsection, the concept of submanifold of Riemannian manifolds is given. In the sixth subsection the definitions of contact metric manifolds and Kenmotsu manifolds are given. In this subsection, we give the definition of invariant submanifold in Kenmotsu manifolds.

In the third chapter, tools and methods that are used through the thesis are mentioned.

The fourth chapter is the original part of the thesis. This chapter consists of three subsections which give the originality of the topic. In the first subsection the notion of $\xi(Ric)$ -Ricci vector field and some proprieties are given. Therefore, Ricci solitons, whose potential vector field is a $\xi(Ric)$ -vector field are studied. Section 4.2., Riemannian manifold with almost η -Ricci-Bourguignon soliton structure is investigated. Moreover, it is proved that a nontrivial, compact η -Ricci-Bourguignon soliton of constant scalar curvature is isometric to the Euclidean sphere. Using some results obtaining from almost η -Ricci Bourguignon soliton, we give the integral formulas for compact orientable almost η -Ricci-Bourguignon soliton. Further with a well defined potential function f , it is proved that a gradient almost η -Ricci-Bourguignon soliton is gradient almost $(-\frac{1}{\mu u})$ -traceless Ricci soliton. Moreover, it is investigated that an Einstein manifold of constant scalar curvature is isometric to a space form with a well defined potential function f . Section 4.3., Kenmotsu manifolds endowed with $*$ -Ricci-Bourguignon and almost η -Ricci-Bourguignon solitons is studied. Some properties of an almost η -Ricci-Bourguignon solitons on submanifolds isometrically immersed into a Kenmotsu manifold whose potential vector field is the tangential component of a $\xi(Ric)$ -vector field is proved. And it is proved that an almost η -Ricci-Bourguignon soliton on a hypersurface isometrically immersed into a Kenmotsu manifold admitting $\xi(Ric)$ -vector field is generalized and pseudo generalized quasi-Einstein manifold.

In the fifth chapter, the study is reviewed. The contribution of thesis to the literature is mentioned and what's more, it is mentioned that this study will inspire to different research topics.

December 2023, 85 pages.

Keywords: $\xi(Ric)$ -vector field, harmonic vector field, almost η -Ricci-Bourguignon soliton, quasi-Einstein manifold, conformal vector field, space form, $*$ -Ricci-Bourguignon soliton, Kenmotsu manifold.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, eğrilerin, yüzeylerin ve daha yüksek boyutlu diferansiyellenebilir manifoldların geometrisini incelemektedir. Diferansiyel geometri ve integral hesabın, lineer ve multilineer cebirlerin, topolojinin ve diferansiyel denklemlerin kavram ve tekniklerini kullanmaktadır. Diferansiyel geometri aynı zamanda geometrik analiz olarak bilinen diferansiyel denklemler teorisinin geometrik yönleriyle de yakından ilgilidir.

Bazı özel vektör alanlarının içinde bulunduğu uzayın geometrik yapısını doğrudan etkilediği iyi bilinmektedir. Örneğin, jeodezik çemberler koruyan konformal dönüşümlerin çalışılmasında ilk olarak ortaya çıkan eşdairesel vektör alanların [21], [68] içinde bulunduğu n -boyutlu bir Riemann manifold yerel olarak $I \times_{(f(s))} F$ çarpık çarpımı biçimindedir, burada, F , bir $(n - 1)$ -boyutlu Riemann manifolddur ve I , $\mathbb{R}$ reel sayıların açık alt aralığıdır ve f , I üzerinde sabit olmayan bir düzgün positive fonksiyondur [19].

Öte yandan, Killing vektör alanına sahip Riemann manifoldları birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır ([7], [12], [49], [65], [70]). Killing olmayan konformal vektör alanları, kompakt Riemann manifoldları arasında küreleri karakterize etmede kullanılmıştır ([27], [26], [45], [59]-[62]).

D. Alekseevskii [3] te klasik bir sonucu olarak, bir Riemann manifoldunun konformal otomorfizmalar grubu ya konformal olarak eşdeğer bir metriği sabitler ya da manifold konformal olarak düzdür. Bu ispattaki bir boşluk J. Ferrand tarafından çözüldü [33]. Yani, bir konformal manifold gerekli konformal vektör alanına sahip ise, bu durumda manifold konformal olarak düzdür. Daha yakın bir zamanda, C. Frances bu sonucun yerel bir versiyonunu sözde Riemannian manifoldu için kanıtladı ([31], [32], [48]). Konformal vektör alanları, Killing vektör alanlarının genellemeleridir.

$\xi(Ric)$ -vektör alanları ilk olarak [39] de tanımlandı ve bu çalışmada, bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının boyu sabit kabul edildiğinde tanımlandığı manifoldunun sabit skaler eğriliğe sahip olduğu kanıtlanmıştır. Bu vektör alanları daha spesifik geometrik yapılarda incelenmeye devam ediyor. Örneğin, ([40], [45], [46], [47]) de içinde uyumlu düz ve alt projektif uzaylara genişletildi.

Öte yandan literatürden iyi bilindiği üzere, Einstein manifoldunun [12] bir çok genelleştirilmiş mevcuttur. Örneği, ([16], [15], [24], [59], [10]).

Hamilton [38], 1982 de Ricci akışını şöyle tanımlar: Bir (M, g_0) Riemann manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}g(t) &= -2Ric(g(t)), \\ g(0) &= g_0\end{aligned}$$

sağlanıyorsa $Ric(g(t))$ ye Ricci akış denir.

Ricci akışının kendi kendine benzer (self-similar) çözümlerine Ricci soliton adı verilir. Ricci soliton kavramı tanımlandığı tarihten itibaren birçok matematikçi ve fizikçinin ilgisini çekmiş ve bu konuda önemli sonuçlar elde edilmiştir. Hamilton ve Ivey ([37], [41]), 2 ve 3-boyutta, kapalı bir manifold üzerinde her daralan (shrinking) gradient Ricci solitonun Einstein manifoldu olduğunu kanıtlamışlardır. Daha sonra Hamilton'un bu sonucu genelleştirmek için ortaya attığı, kompakt pozitif eğrilikli, daralan gradient Ricci solitonun Einstein olması gerektiği iddiası, [42] numaralı çalışmada kanıtlanmıştır. Bundan itibaren, hangi koşullar altında Ricci solitonun Einstein manifolduna indirgeneceği (yani trivial olacağı) problemi bir çok araştırmacının ilgisini çeken bir problem haline gelmiştir. Sonra η -Ricci soliton ([11], [2], [5], [14]) gibi Ricci solitonları başka bir genelleştirmesi ortaya çıktı ve halen çok genelleştirilme devam etmektedir.

1972 de K. Kenmotsu [44] te, Kenmotsu manifoldları olarak bilinen yeni bir hemen hemen kontakt Riemann manifoldları sınıfı tanımladı. Günümüzde kadar yoğun bir biçimde çalışılmaya devam etmektedir.

Yakın zamanlarda, Kaimakamis ve Panagiotidou [43] te $*$ -Ricci solitonlar kavramını karmaşık bir uzay formunun gerçek hiperyüzeyleri çerçevesinde tanımladı ve burada Ricci tensörü yerine ona benzer bir tensör kullanarak $*$ -Ricci tensörlü Ric^* . Ghosh ve Patra [35] ilk olarak hemen hemen kontakt metrik manifoldları üzerinde $*$ -Ricci solitons çalışmasını üstlendiler. $*$ -Ricci soliton kavramını ortaya çıkardılar. $*$ -Ricci solitonlar [53] te, hemen hemen Hermityen ve hemen hemen kontakt manifoldların alt sınıflarında aktif bir biçimde çalışılmaya devam etmektedir.

Bütün bu çalışmalardan esinlenerek, bu tezde η -Ricci-Bourguignon solitonlar çerçevesinde Riemann manifoldları incelenmiştir. Manifoldların bazı özel vektör alanları ile donatıldığı durumlar ele alınmıştır. Gradyent hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlarının bir uzay formuna izometrik olması için gerek ve yeter koşullar da incelenmiştir. Kenmotsu manifolduna izometrik olarak daldırılmış değişmez altmanifoldları ve bu altmanifoldlar üzerinde η -Ricci-Bourguignon ve $*$ -Ricci-Bourguignon solitonlar çalışılmıştır.



2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, tez boyunca gerekli olan temel tanımlar ve kavramlar ile bazı sonuçları verilmiştir.

2.1. RIEMANN MANİFOLDLAR

Bu alt bölümde, Riemann manifoldları ile ilgili temel kavramlar verilmektedir.

Tanım 2.1.1 [25] $\tilde{F}$ bir C^∞ —manifold olsun. $\tilde{F}$ üzerinde $\tilde{g}$ ile gösterilen bilineer formu, simetrik ve pozitif tanımlı $(0,2)$ -tipinden bir tensör alanı olsun. Bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g})$ ikilisine bir Riemann manifold denir.

Uyarı 2.1.2 Bu tez boyunca aksi belirtilmedikçe manifold derken onun diferansiyellenebilir C^∞ — olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 2.1.3 [25] $(\tilde{F}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve bu manifold üzerindeki lineer konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. Her $L, S, V \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için

$$R : \mathfrak{X}(\tilde{F}) \times \mathfrak{X}(\tilde{F}) \times \mathfrak{X}(\tilde{F}) \rightarrow \mathfrak{X}(\tilde{F})$$

$$R(L, S)V = \nabla_L \nabla_S V - \nabla_S \nabla_L V - \nabla_{[L, S]} V$$

ile tanımlı R tensör alanına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü ya da $(1,3)$ -tipinden bir tensör alanıdır denir. Bazı durumlarda, $R(L, S, V, Z) = \tilde{g}(R(L, S)V, Z)$ ile tanımlanan $(0,4)$ -tipinden tensör alanı ya da Riemann Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

Teorem 2.1.4 [60] Her $L, S, V, Z \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

- i) $R(L, S)V = -R(S, L)V$,
- ii) $R(L, S, V, Z) = -R(L, S, Z, V) = -R(S, L, V, Z)$,

$$ii) R(L, S, V, Z) = R(V, Z, L, S),$$

$$iv) R(L, S)V + R(S, V)L + R(V, L)S = 0 \text{ (Birinci Bianchi Özdeşliği),}$$

$$v) (\nabla_L R)(S, V) + (\nabla_S R)(V, L) + (\nabla_V R)(L, S) = 0 \text{ (ikinci Bianchi Özdeşliği).}$$

Tanım 2.1.5 [25] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve bu manifold üzerinde lokal ortonormal çatı alanı $\{e_1, \dots, e_s\}$ olsun. Her $L, S, V \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için,

$$Ric(L, S) = iz\{V \rightarrow R(V, L)S\}$$

veya

$$Ric(L, S) = \sum_{i=1}^s \tilde{g}(R(e_i, L)S, e_i) \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanan $(0, 2)$ -tipindeki Ric tensör alanına, $\tilde{F}$ nin Ricci eğrilik tensörü denir.

$Q, T_p \tilde{F} \rightarrow T_p \tilde{F}$, $p \in \tilde{F}$ nin simetrik endomorfizmiyse ve $Ric(L, S) = \tilde{g}(QL, S)$ yazarsak, Q $(1, 1)$ -Ricci tensörüdür, bazen Q ya Ricci-operatör denir.

Tanım 2.1.6 [18] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun, L ve S teğet vektörü tarafından belirlenen γ düzlemsel kesitinin $K(\gamma)$ ile gösterilen kesitsel eğriliği,

$$K(\gamma) = \frac{R(L, S; L, S)}{\tilde{g}(L, L)g(S, S) - \tilde{g}(L, S)^2} \quad (2.2)$$

ile tanımlanır ve bu değer $\{L, S\}$ bazının seçiminden bağımsızdır. Eğer kesitsel eğrilik bütün düzlem kesitleri için aynı c sabitine eşit ise $\tilde{F}$ manifolduna sabit eğrilikli uzay ya da reel uzay form denir ve $\tilde{F}(c)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.7 [18] (Schur 1886) $\tilde{F}^s$, boyutlu ($s > 2$) olan Riemann manifold olsun. Eğer $K(\gamma)$ kesitsel eğriliği yalnızca P noktasına bağlı ise $\tilde{F}$ sabit eğriliği uzaydır.

Tanım 2.1.8 [60] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve bu manifold üzerinde lokal ortonormal

çatı alanı $\{e_1, \dots, e_s\}$ olsun. $\tilde{F}$ manifoldunun skaler eğriliği

$$r = \sum_{i=1}^s Ric(e_i, e_i) \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.9 [60] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir Riemann manifold olsun. $\tilde{F}$ manifoldu üzerinde ξ vektör alanının diverjansı

$$div\xi = iz\nabla\xi = \sum_{i=1}^s \tilde{g}(\nabla_{e_i}\xi, e_i) \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

A , $(1, r)$ -tipinde bir tensör alanı ise,

$$(divA)(\xi_1, \dots, \xi_r) = \sum_{i=1}^s \tilde{g}\left((\nabla_{e_i}A)(\xi_1, \dots, \xi_r), e_i\right) \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlanan, $(0, r)$ -tipinde bir tensör alanıdır.

Tanım 2.1.10 [60] $(\tilde{F}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $k \in C^\infty(\tilde{F})$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere. Bu durumda k fonksiyonunun gradyenti ∇k ,

$$\tilde{g}(\nabla k, \xi) = df(\xi) = \xi(k) \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (2.6)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.11 [60] $(\tilde{F}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $k \in C^\infty(\tilde{F})$ olsun. Bu durumda $L, S \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için

$$\begin{aligned} \nabla^2 k(L, S) &= (LS)k - (\nabla_L S)k \\ &= \tilde{g}(\nabla_L \nabla k, S) \end{aligned} \quad (2.7)$$

tensörüne k fonksiyonunun Hessiyen formu denir.

Teorem 2.1.12 [60] $(\tilde{F}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $f, k \in C^\infty(\tilde{F})$ olsun. Bu durumda

$$\operatorname{div}(kX) = g(\nabla k, X) + k \operatorname{div} X, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (2.8)$$

$$\nabla(fk) = f\nabla k + k\nabla f \quad (2.9)$$

dır.

Tanım 2.1.13 [60] $(\tilde{F}, \tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $k \in C^\infty(\tilde{F})$ olsun. k fonksiyonunun Laplasyanı Δk ,

$$\Delta k = \operatorname{div} \nabla k \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.1.14 Bazı kaynaklarda $\Delta k = -\operatorname{div} \nabla k$ olarak tanımlanmaktadır.

$\forall k \in C^\infty(\tilde{F})$. Eğer $\Delta k = 0$ ise k fonksiyonuna $(\tilde{F}, \tilde{g})$ üzerinde harmoniktir denir.

Lemma 2.1.15 [25] (Bianchi özdeşliği) Ricci tensörü ve r skaler eğriliği için

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \frac{1}{2} dr \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 2.1.16 [25] Ric Ricci tensörü, r skaler eğriliği, Q Ricci operatörü ve d türev operatörü olmak üzere. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_X \operatorname{Ric})(e_i, e_i) = dr(X) = \nabla_X r, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{Ric} = \operatorname{div} QX = \frac{1}{2} dr(X) \quad (2.13)$$

denklemleri geçerlidir.

Tanım 2.1.17 [25] $\tilde{F}$ bir C^∞ – manifold olsun. Eğer $\tilde{F}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü var ise $\tilde{F}$ ye kompakt denir.

Tanım 2.1.18 [60] $\tilde{F}$ bir manifold olsun. $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ ve $\{U_\beta, \varphi_\beta\}$ komşulukları için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ve $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ yönlendirmeyi koruyor ise $\tilde{F}$ manifoldu yönlendirilebilirdir denir.

Teorem 2.1.19 [25] (Stokes Teoremi) $\tilde{F}$, kenarı olmayan sahip yönlendirilebilir s boyutlu bir manifold ve ω , $\tilde{F}$ üzerinde kompakt bir şekilde desteklenen $(s - 1)$ bir form olsun. Bu durumda

$$\int_{\tilde{F}} d\omega = \int_{\partial\tilde{F}} \omega \quad (2.14)$$

eşitliği gerçekleşir.

Lemma 2.1.20 [60] (Hopf Lemma) $\tilde{F}$ bağlantılı, kompakt Riemann manifoldu ve $k \in C^\infty(\tilde{F})$ için

$$\Delta k \geq 0 \quad \text{veya} \quad \Delta k \leq 0 \quad (2.15)$$

olsun. Bu durumda k sabittir.

Önerme 2.1.21 [69] $\tilde{F}$ bir manifold olsun. Bu durumda

$$\int_{\tilde{F}} \left(Ric(\xi, \xi) + |\nabla \xi|^2 \right) dV \geq 0 \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (2.16)$$

geçerlidir. Burada dV , $\tilde{F}$ üzerindeki hacim elemanını göstermektedir. Bu eşitsizlik ancak ve ancak ξ harmonik ise eşit olur.

Tanım 2.1.22 [36] K ve L topolojik uzayı ve t ile l , K ten L ye tanımlı sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer

$$D(x, 0) = t(a) \quad \text{ve} \quad D(a, 1) = l(a)$$

eşitliklerini sağlayan $D : K \times [0, 1] \rightarrow L$ sürekli fonksiyon varsa t , l ye homotopiktir denir. Burada D fonksiyonu t ve l arasındaki bir homotopi denir.

Tanım 2.1.23 [36] Bir M manifoldu üzerindeki $i : M \rightarrow M$ özdeşlik dönüşümü null-homotopik ise, bu manifolda büzülebilir denir. Öte yanda eğer

$$D(x, 0) = a \quad \text{ve} \quad D(a, 1) = a_0, \quad a \in M$$

eşitliklerini sağlayan $x_0 \in M$ ve $D : M \times I \rightarrow I$ varsa, M büzülebilir denir. D homotopisine M uzayının daralması denir.

Lemma 2.1.24 [28] (Poincare Lemma) M büzülebilir dif bilir bir manifold olsun ve ω , $d\omega = 0$ ile M de dif bilir bir k -form olsun. Bu durumda ω kesindir, yani M de $d\alpha = \omega$ olacak şekilde bir $(k-1)$ -form α vardır.

Teorem 2.1.25 [55] (Bochner, 1948) $(\tilde{F}, \tilde{g})$ kompakt, yönlendirilebilir ve $\text{Ric} \geq 0$ ise, bu durumda her harmonik 1-form paraleldir.

Tanım 2.1.26 [69] $\tilde{F}$ bir Riemann manifold olsun. Eğer

$$H^k = \{\omega \in \Lambda^k(\tilde{F}) : \Delta\omega = 0\} \quad (2.17)$$

denklemi gerçekleşirse, H^k nin elemanlarına harmonik k -formları denir.

Teorem 2.1.27 [30] [64] (Hodge ayrıştırma Teoremi) $\tilde{F}$ kompakt sınırı olmayan yönlenmiş bir Riemann manifoldu olsun. Her $\omega \in \Lambda^k(\tilde{F})$ formu için

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma \quad (2.18)$$

yazılabilecek şekilde $\alpha \in \Lambda^{k-1}(\tilde{F})$, $\beta \in \Lambda^{k+1}(\tilde{F})$ ve $\gamma \in H^k(\tilde{F})$ formları vardır ve bu gösterilim tektir. Dolayısıyla

$$\Lambda^k(\tilde{F}) = d\Lambda^{k-1}(\tilde{F}) \oplus \delta\Lambda^{k+1}(\tilde{F}) \oplus H^k(\tilde{F})$$

yazabiliriz. Bu alt uzayların hepsi karşılıklı olarak ortogonaldır.

Bir ω nun p -formu aşağıdakileri sağlaması durumunda harmonik olduğu söylenir

$$d\omega = 0 \quad \text{ve} \quad \delta\omega = 0 \quad (2.19)$$

dır. Burada d , ω nin diferansiyeli ve δ , ω nin eşdiferansiyeli.

$$\Delta\omega = (\delta d + d\delta)\omega \quad (2.20)$$

alanırsa. Bu durumda

$$\Delta\omega = 0, \quad (2.21)$$

ω bir harmonic p -formdur. ω nin eşdiferansiyel $\delta\omega$ si şu şekilde verilir:

$$\delta\omega = -\nabla_i \xi^i = -g^{ij} \nabla_i \xi_j \quad (2.22)$$

dır.

Bir ξ vektör alanı veya ω onun dual 1-form,

$$d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \quad (2.23)$$

sağlıyorsa harmoniktir.

Teorem 2.1.28 [13] ξ , $(\tilde{F}, \tilde{g})$ kompakt Riemannian manifold üzerinde keyfi bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\int_{\tilde{F}} \xi \cdot r dV = 0, \quad (2.24)$$

burada r , $\tilde{g}$ metriğinin skaler eğriliğini gösterir.

Lemma 2.1.29 [6] ξ bir $(\tilde{F}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunda keyfi bir vektör alanı olmak üzere. Bu durumda

$$\text{div}(\text{Ric}(\phi\xi)) = \phi(\text{divRic})(\xi) + \phi\langle \nabla\xi, \text{Ric} \rangle + \text{Ric}(\nabla\phi, \xi) \quad (2.25)$$

eşitliği gerçekleşir, burada ϕ , $\tilde{F}$ üzerinde keyfi bir fonksiyondur.

2.2. BAZI ÖZEL VEKTÖR ALANLARI VE GEOMETRİ YAPILARI

Bu alt bölümde Riemann manifoldlar üzerinde bazı özel vektör alanlarını ve geometri yapılarını kısaca tanımlanacaktır.

Tanım 2.2.1 [61, 67, 68] ξ bir $(\tilde{F}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer

$$\nabla_L \xi = \varphi L \quad \forall \quad L \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (2.26)$$

denklemi sağlanıyorsa, ξ ye eşdairesel (conccircular) denir. Burada φ düzgün bir fonksiyondur. Ayrıca, $\varphi = 0$, ise ξ paralel vektör alanı denir.

Tanım 2.2.2 [27] ξ bir $(\tilde{F}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = 2\psi \tilde{g} \quad (2.27)$$

eşitliği gerçekleşirse, ξ bir konformal vektör alanı olarak adlandırılır. Burada $\mathcal{L}_\xi \tilde{g}$, $\tilde{g}$ nin ξ e göre bir Lie türevi ve ψ düzgün bir fonksiyondur.

Eğer $\psi = 0$ ise, ξ vektör alanı Killing vektör alanı adı verilir [7]. Bir Riemann manifoldunda

$$(\mathcal{L}_\xi \tilde{g})(L, S) = \tilde{g}(\nabla_L \xi, S) + \tilde{g}(L, \nabla_S \xi) \quad (2.28)$$

eşitliği gerçekleşir.

Tanım 2.2.3 [39] ξ bir $(\tilde{F}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer

$$\nabla_L \xi = \mu QL \quad \forall \quad L \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (2.29)$$

denklemi sağlanırsa, ξ ye $\xi(\text{Ric})$ -vektör alanı denir. Burada ∇ , $\tilde{g}$ ye göre Levi-Civita Koneksiyondur Q , $\tilde{F}$ nin Ricci tensörü Ric nin Ricci operatörüdür ve μ bir sabittir.

Tanım 2.2.4 [8] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$, $(s \geq 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\tilde{F}$ nin Ricci eğrilik tensörü

$$Ric = f\tilde{g} + hU \otimes U + kV \otimes V + t(U \otimes V + V \otimes U) \quad (2.30)$$

denklemini sağlanırsa $\tilde{F}$ ye bir karışık genelleştirilmiş kuazi-Einstein manifoldu denir, burada f, h, k ve t olan skaler fonksiyonlardır. Her ξ_1, ξ_2 birim ortogonal vektörler olmak üzere

$$\tilde{g}(\zeta, \xi_1) = U(\zeta), \tilde{g}(\zeta, \xi_2) = V(\zeta), \tilde{g}(\xi_1, \xi_1) = \tilde{g}(\xi_2, \xi_2) = 1 \text{ ve } \tilde{g}(\xi_1, \xi_2) = 0 \quad \forall \zeta \quad (2.31)$$

koşulunu sağlayan U ve V , 1-formlar ve ξ_1, ξ_2 vektör alanları üreticileri olarak adlandırılır.

Özel olarak,

- (1) Eğer, $t = 0$ ise $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ ye bir genelleştirilmiş kuazi-Einstein manifolda indirgenir [15].
- (2) Eğer, $h = t = 0$ ya da $k = t = 0$ ise $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ ye bir kuazi-Einstein manifolda indirgenir [16].
- (3) Eğer, $h = k = t = 0$ ise $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ ye bir Einstein manifolda indirgenir [12].

Tanım 2.2.5 [57] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$, $(s \geq 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\tilde{F}$ nin Ricci eğrilik tensörü

$$Ric = f\tilde{g} + hU \otimes U + kV \otimes V + tE \quad (2.32)$$

denklemini sağlanırsa $\tilde{F}$ ye bir sözde genelleştirilmiş kuazi Einstein manifoldu adı verilir. Burada E , izli sıfır olan simetrik bir $(0,2)$ -tipinden tensör alanıdır.

Özel olarak, eğer, $h = 0$ ya da $k = 0$ ise $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ ye bir sözde kuazi-Einstein manifolda indirgenir [50].

2.3. RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLAR

Bu alt bölümde, Ricci solitonlar kavramı ve sonraki çalışmalarda kullanılacak bazı teoremler kısaca tanımlanacaktır.

Tanım 2.3.1 [22] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde RB solitonu

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{g}(t) = -2(\text{Ric} - \rho r \tilde{g}) \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlı RB akışının (flow) kendi kendine benzer çözümleridir, burada $\rho \in \mathbb{R}$ bir sabittir.

Tanım 2.3.2 [29] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu için

$$\text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \tilde{g} = (\lambda + \rho r) \tilde{g} \quad (2.34)$$

denklemini sağlanıyorsa, bu manifolda RB soliton denir. Eğer $\rho = 0$ ise durumunda

$$\text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \tilde{g} = \lambda \tilde{g} \quad (2.35)$$

Ricci solitonu elde edilir [37].

Tanım 2.3.3 [58] Eğer bir ξ vektör alanı, $\lambda \in \mathbb{R}$ sabiti için η , $\tilde{g}$ -dual 1-formu olmak üzere

$$\text{Ric} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \tilde{g} = (\lambda + \rho r) \tilde{g} + \mu \eta \otimes \eta \quad (2.36)$$

denklemini sağlanıyor ise, $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu η -RB soliton olarak adlandırılır.

λ negatif, sıfır ve pozitif ise sırasıyla genişleyen (expanding), dengeli (steady), veya daralan (shrinking) soliton denir [23].

ξ vektör alanı diferansiyellenebilir bir $k : \tilde{F}^s \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun gradyenti olduğunda, yani $\xi = \nabla k$ ise $\tilde{F}$ manifoldu *gradyent η -RB soliton* olarak adlandırılır, bu durumda

$$\text{Ric} + \nabla^2 k = (\lambda + \rho r) \tilde{g} + \mu dk \otimes dk \quad (2.37)$$

denklemini sağlanır, burada $\nabla^2 k$, k nin Hessianıdır. Böylece

$$(1 - s\rho) \tilde{g}(\nabla k, \nabla r) + \tilde{g}(\nabla k, \nabla \Delta k) = s \tilde{g}(\nabla k, \nabla \lambda) + \mu \tilde{g}(\nabla |\nabla k|^2, \nabla k) \quad (2.38)$$

elde edilir. Eğer (2.36) denkleminde tanımlı olan λ , düzgün bir fonksiyon ise, $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir *hemen hemen (almost) η -RB soliton* olarak adlandırılır ve $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ ile gösterilir.

Vektör alanı ξ *aşıkâr (trivial) kuasi-Einstein* veya k potansiyel fonksiyonu sabit olduğunda, η -RB solitonu Einstein manifoldu ya da *aşıkâr soliton* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.4 [34] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu için

$$Ric + \frac{h}{2} \mathcal{L}_\xi \tilde{g} = (\lambda + \rho r) \tilde{g} \quad (2.39)$$

denklemini sağlanıyorsa, bu manifoldta *hemen hemen h -RB soliton* denir, burada λ ve h düzgün fonksiyonlardır.

Ayrıca, ξ vektör alanı diferansiyellenebilir (düzgün) bir k fonksiyonunun gradyenti olduğunda, yani $\xi = \nabla k$ ise $\tilde{F}^s$ manifoldu *hemen hemen gradyent h -RB soliton* denir, bu durumda (2.39) denklemini

$$Ric + h \nabla^2 k = (\lambda + \rho r) \tilde{g} \quad (2.40)$$

gibi yazabiliriz. ρ parametresinin özel değerleri için, aşağıdaki tanımlara sahibiz.

- (a) Eğer $\rho = \frac{1}{2}$ ise, *gradyent h -hemen hemen Einstein soliton*,
- (b) Eğer $\rho = \frac{1}{s}$ ise, *gradyent h -hemen hemen sıfır izli Ricci soliton*,
- (c) Eğer $\rho = \frac{1}{2(s-1)}$ ise, *gradyent h -hemen hemen Schouten soliton*,
ve
- (d) Eğer $\rho = 0$ ise *gradyent h -hemen hemen Ricci soliton* elde edilir.

Teorem 2.3.5 [63] $\tilde{F}$, $(s \geq 2)$ boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\tilde{F}^s$ üzerinde Z özel bir eşdairesel vektör alanı olsun. Eğer

$$\nabla^2 Z = (-kZ + b) \tilde{g} \quad (2.41)$$

denklemini sağlanıyorsa, bu durumda $\tilde{F}$ manifoldu aşağıdaki manifoldlardan biridir:

- i) $k = 0$ ama $b \neq 0$ ise, bir Öklid uzayı,
- ii) $k = -c^2 < 0$ ise ve $-c^2$ eğriliğine sahip bir hiperbolik uzay ve,

iii) $k = c^2 > 0$ ise, c^2 eğrilikli küresel bir uzaydır, burada c pozitif bir sabittir.

Lemma 2.3.6 [69] $\tilde{F}$ manifoldu sahip ve $\xi \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ Killing olmayan ($\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = 2\psi \tilde{g}$, $\psi \neq 0$) olsun. Bu durumda

$$\Delta \psi = \frac{r}{s-1} \psi \quad (r > 0), \quad (2.42)$$

denklemini sağlanır. Sonuç olarak

$$\int_{\tilde{F}} \psi dV = 0 \quad (2.43)$$

dır.

Teorem 2.3.7 [69] Eğer $r =$ sabit skaler eğrilikli bir kompakt $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ ($s \geq 2$) Riemann manifold, Killing olmayan bir konformal X vektör alanına haiz ise, bu durumda $\tilde{F}$ bir küreye izometriktir.

Lemma 2.3.8 [54] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldunda

$$\operatorname{div}(\mathcal{L}_\xi \tilde{g})(\xi) = \frac{1}{2} \Delta |\xi|^2 - |\nabla \xi|^2 + \operatorname{Ric}(\xi, \xi) + \nabla_\xi \operatorname{div} \xi, \quad (2.44)$$

$$\operatorname{div} \nabla^2 k = \operatorname{Ric}(\nabla k) + \nabla \Delta k \quad (2.45)$$

ve

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla k|^2 = |\nabla^2 k|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) + \tilde{g}(\nabla \Delta k, \nabla k) \quad (2.46)$$

eşitlikleri sağlanır, burada $\xi \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ ve k düzgün bir fonksiyondur.

2.4. *-RİCCİ-BOURGUIGNON SOLİTONLAR

Bu alt bölümde, *-Ricci solitonlar kavramı tanımlanacaktır.

Tanım 2.4.1 [43] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu için

$$\operatorname{Ric}^* + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\xi \tilde{g} = \lambda \tilde{g} \quad (2.47)$$

denklemini sağlanıyorsa, $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi)$ ye $*$ -Ricci soliton denir. Burada

$$Ric^*(L, S) = \tilde{g}(Q^*L, S) = \frac{1}{2}iz\{\varphi \circ R(L, \varphi S)\}, \quad (2.48)$$

$L, S \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ biçimindedir, Q^* , $*$ -Ricci nin operatörü, φ bir $(1, 1)$ tensör alanı ve Ric^* , $(0, 2)$ -tipinde tensörüdür.

Eğer $Ric^* = \lambda \tilde{g} + \mu \eta \otimes \eta$ ise ve λ, μ düzgün fonksiyonları $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi)$, $*$ - η -Einstein manifoldu denir. Özel olarak $\mu = 0$ ise, yani $Ric^* = \lambda \tilde{g}$, $*$ -Einstein denir.

Tanım 2.4.2 [43] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu için

$$Ric^* + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = (\lambda + \rho r^*)\tilde{g} \quad (2.49)$$

denklemini geçeriye bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi)$ üçlüüne hemen hemen $*$ -RB soliton denir. Burada λ düzgün bir fonksiyondur. Eğer λ sabitse $*$ -Ricci-Bourguignon soliton olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.3 [43] Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu için

$$Ric^* + \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \tilde{g} = (\lambda + \rho r^*)\tilde{g} + \mu \eta \otimes \eta \quad (2.50)$$

denklemini geçekleiyse, bu durumda $\tilde{F}^s$ manifoldu hemen hemen $*$ - η -RB soliton denir. Burada λ ve ρ düzgün fonksiyonlardır. Eğer $\rho = 0$ ise, $\tilde{F}$ manifoldu hemen hemen $*$ - η -Ricci soliton denir.

2.5. RIEMANN ALTMANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bu alt bölümde, Riemann altmanifoldların tanımı verilecektir.

$\tilde{F}$, bir $(\hat{K}, \hat{g})$ Riemann manifoldu içine izometrik olarak gömülmüş bir Riemann manifold olsun ve $\tilde{\nabla}$, $\hat{K}$ nin $\tilde{g}$ metriği ile Levi-Civita koneksiyonunu olsun. Aynı zamanda $\tilde{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}^\perp$ ise sırası ile $\tilde{F}$ üzerine indirgenmiş ve indirgenmiş normal koneksiyonu olsun. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri [66]

$$\hat{\nabla}_\zeta L = \tilde{\nabla}_\zeta L + h(\zeta, L) \quad \text{ve} \quad \hat{\nabla}_\zeta S = -A_S \xi + \tilde{\nabla}_\zeta^\perp S \quad (2.51)$$

ile verilir. burada $\zeta, L \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ ve $S \in \mathfrak{X}(\tilde{F}^\perp)$. Öte yanda $h, \tilde{F}$ nin ikinci temel formu ve A_S, S ile ilgili Weingarten endomorfizmidir. İkinci temel form h ve şekil operatörü A

$$\hat{g}(h(\zeta, L), S) = \tilde{g}(A_S \zeta, L) \quad (2.52)$$

denklemini ile bağlantılıdır.

$T_p \tilde{F}$, $p \in \tilde{F}$ teğet uzayının bir $\{e_1, \dots, e_s\}$ ortonormal çatısı için, $\tilde{F}$ Riemann altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı $H = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s h(e_i, e_i)$ ile tanımlıdır, burada $Boy(\tilde{F}) = s$. Eğer $\tilde{F}$ manifoldunun ikinci temel formu $h = 0$ ise $\tilde{F}$ manifolduna $\hat{K}$ içinde *tümel jeodezik* denir. Eğer ortalama eğrilik vektör alanı $H = 0$ ise $\tilde{F}$ manifolduna *minimal* denir. Eğer $h(\zeta, L) = g(\zeta, L)H \forall \zeta, L \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ ise $\tilde{F}$ manifolduna *tümel umbilik* denir [60].

Eğer $\hat{K}$, sabit c kesit eğrilikli uzay form $\forall \zeta, L, V, U \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için Gauss denklemi

$$\begin{aligned} \hat{R}(\zeta, L, V, U) &= \tilde{R}(\zeta, L, V, U) + \tilde{g}(h(\zeta, U), h(L, V)) - \tilde{g}(h(\zeta, V), h(L, U)) \\ &= c[\tilde{g}(L, V)\tilde{g}(\zeta, U) - \tilde{g}(\zeta, V)\tilde{g}(L, U)] + \tilde{g}(h(\zeta, U), h(L, V)) \\ &\quad - \tilde{g}(h(\zeta, V), h(L, U)) \end{aligned} \quad (2.53)$$

olarak elde edilir. $\{e_1, \dots, e_s\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olmak üzere

$$Ric(\zeta, L) = c(s-1)g(\zeta, L) + iz(h)(h)(\zeta, L) - h^2(\zeta, L) \quad (2.54)$$

elde edilir.

Tanım 2.5.1 [20] Bir $\hat{K}$ Riemann manifoldundaki bir $(\tilde{F}, \tilde{g})$ altmanifoldunun A şekil operatörü $A_\xi = \beta I$ koşulunu sağlıyorsa bu $\tilde{F}$ altmanifolduna (ξ normal vektör alanına göre) A_ξ -umbilik denir, burada $\beta, \tilde{F}$ üzerinde bir fonksiyondur.

Tanım 2.5.2 [18] $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir $(\hat{K}, \hat{g})$, $(s \geq 3)$ Riemann manifoldu bir hiperyüzey olsun. Eğer $\tilde{F}$ nin ikinci temel tensör alanı h

$$h_\xi = \alpha \tilde{g} + \beta \omega \otimes \omega \quad (2.55)$$

denklemini sağlarsa, $\tilde{F}$ ye bir kuazi-umbilik altmanifold denir, burada ξ, ω ve α, β sırasıyla

$\tilde{F}$ üzerinde birim normal vektör alanı, 1-form ve düzgün fonksiyonlardır. Eğer

$$h_\xi = \alpha \tilde{g} + \beta \omega \otimes \omega + E \quad (2.56)$$

denklemini sağlarsa, $\tilde{F}$ ye bir sözde kuazi-umbilik altmanifold denir [50], burada E , izi sıfır olan simetrik bir $(0,2)$ -tipinde tensör alanıdır. Bu durumda $E = 0$ olursa $\tilde{F}$ bir kuazi-umbilik altmanifold indirgenir.

$\hat{K}$ Riemann manifoldundaki herhangi bir $\tilde{F}$ hiperyüzeyi için

$$\bar{g}(h(\zeta, L), \xi^\perp) = h_\xi(\zeta, L)g(N, \xi^\perp) \quad (2.57)$$

denklemini gerçektir [9]. Burada N , $\tilde{F}$ üzerinde birim normal vektör alanı ve h ikinci temel tensör alanıdır.

2.6. KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu alt bölümde, Kenmotsu manifoldları ve sonraki çalışmalarda kullanılacak bazı teoremler verilecektir.

Tanım 2.6.1 [17] $\hat{K}^{2s+1}$ bir diferensiyellenebilir manifoldu ve $\hat{K}$ üzerinde θ , ζ ve η sırasıyla $(1,1)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ -tipinden tensör alanları olsun. (θ, ζ, η) üçlüsü keyfi $L \in \mathfrak{X}(\hat{K})$ için

$$\theta^2 L = -L + \eta(L)\zeta, \quad \eta(\zeta) = 1, \quad (2.58)$$

$$\theta\zeta = 0, \quad \eta(\theta L) = 0 \quad (2.59)$$

koşullarını sağlıyorsa, bu üçlüye hemen hemen kontakt yapı adı verilir.

Tanım 2.6.2 [17] $(\hat{K}^{2s+1}, \hat{g})$ Riemann manifold üzerinde bir (θ, ζ, η) hemen hemen kontakt yapı olsun. $\forall L, Z \in \mathfrak{X}(\hat{K})$ için

$$\hat{g}(\theta L, \theta Z) = \hat{g}(L, Z) - \eta(L)\eta(Z), \quad (2.60)$$

$$\hat{g}(\zeta, \zeta) = 1, \quad \eta(L) = \hat{g}(L, \zeta) \quad (2.61)$$

eşitlikleri gerçekleşirse, $(\theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ yapısına hemen hemen kontakt metrik yapı adı verilir ve bu yapıda

$$d\eta(L, Z) = \hat{g}(L, \theta Z) \quad (2.62)$$

koşullunu sağlıyorsa, bu yapıya kontak metrik yapı denir. Bir Riemann manifold, kontakt metrik yapı ile donatılmış ise manifolda kontak manifold denir. ξ ye vektör alanında karakteristik ya da Reeb vektör alanı denir.

Tanım 2.6.3 [17] Bir $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ hemen hemen kontakt metrik manifold için, eğer ξ bir Killing vektör alanı ise, $\hat{K}^{2s+1}$ K-kontakt manifold denir.

Tanım 2.6.4 [44] Bir $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ hemen hemen kontakt metrik manifold için

$$(\hat{\nabla}_L \theta)Z = -\eta(Z)\theta(L) + \hat{g}(\theta L, Z)\zeta \quad (2.63)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu manifolda Kenmotsu manifold denir, burada $\hat{\nabla}$, $\hat{g}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyondur.

Yukardaki denklemden

$$\hat{\nabla}_L \zeta = L - \eta(L)\zeta \quad (2.64)$$

elde edilir.

Örnek. Kenmotsu manifoldların en bilinen örneği $\mathbb{H}(-1)$ hiperbolik uzayıdır.

Bir $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ Kenmotsu manifoldunda [4]

$$\hat{R}(L, Z)\xi = \eta(L)Z - \eta(Z)L, \quad (2.65)$$

$$\hat{R}ic(L, \zeta) = -2s\eta(L), \quad (2.66)$$

$$\hat{R}(L, \zeta)Z = \hat{g}(L, Z)\zeta - \eta(Z)L, \quad (2.67)$$

$$\hat{R}(\zeta, L)Z = \eta(Z)\zeta - \hat{g}(L, Z)\zeta, \quad (2.68)$$

$$\hat{Ric}(\zeta, \zeta) = -2s \quad (2.69)$$

eşitlikleri sağlanır, burada $L, Z \in \mathfrak{X}(\hat{K})$.

Şimdi, bir Kenmotsu manifoldu üzerindeki *-Ricci tensörünün ifadesini hatırlayalım.

Lemma 2.6.5 [52] *Bir $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ Kenmotsu manifoldu üzerinde*

$$\hat{Ric}^* = \hat{Ric} + (2s - 1)\hat{g} + \eta \otimes \eta \quad (2.70)$$

denklemleri ile verilir.

Tanım 2.6.6 *Kenmotsu manifoldunun Ricci eğriliği*

$$\hat{Ric} = \alpha\hat{g} + \beta\eta \otimes \eta \quad (2.71)$$

biçiminde tanımlanan, η -Einstein manifold denir.

Aslında, bu kavram Tanım 2.2.4 de bahsettiğimiz kuazi-Einstein kavramının bir özel biçimidir.

Bir Kenmotsu manifoldu $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ nin bir $\tilde{F}$ altmanifoldu, eğer yapı vektör alanı ξ her yerde $\tilde{F}$ ye teğet ve $\theta(T\tilde{F}) \subset (T\tilde{F})$ ise, $\hat{K}^{2s+1}$ nin değişmez altmanifoldu olarak adlandırılır. Bir Kenmotsu manifoldunun değişmez bir altmanifoldunda, $\tilde{F}, L \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için $h(L, \zeta) = 0$. Daha fazla ayrıntı için (bkz. [51]).

Lemma 2.6.7 [51] *$\tilde{F}$ manifoldu bir Kenmotsu manifoldunun bir değişmez altmanifoldu olsun. Bu durumda herhangi bir $\zeta, L \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$*

$$\tilde{\nabla}_L \zeta = L - \eta(L)\zeta, \quad (2.72)$$

$$h(\zeta, L) = 0, \quad (2.73)$$

denklemleri gerçekleşir.

Teorem 2.6.8 [51] $\tilde{F}$ manifoldu bir Kenmotsu manifoldunun bir değişmez altmanifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{F}$ manifoldu Kenmotsu manifoldtur.



3. MALZEME VE YÖNTEM

Tezin özünü oluşturan bir Riemann manifold üzerinde η -Ricci-Bourguignon solitonlarının varlığı incelenmiştir. Ayrıca potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan $*$ -Ricci-Bourguignon solitonlar ve Kenmotsu manifoldlar incelenmiştir. Bu kavramların tarih içindeki oluşum süreci hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bulgular için diferansiyel geometrideki temel tanımlardan, teoremlerden ve Kenmotsu manifold teorisindeki temel denklemler ve sonuçlardan yararlanılmıştır. Bulgular için temel tanımlar, diferansiyel geometri teoremleri ve Riemman manifoldlarındaki temel denklemler ve sonuçlar kullanılır.

Ayrıca bu çalışma yapılırken diferansiyel geometrinin dalı olan manifoldlar ve Ricci-solitonlar teorisi ile ilgili kitap ve makaleler kütüphane ve web üzerinden taranmıştır. Bir η -Ricci-Bourguignon solitonlar, $*$ -Ricci-Bourguignon solitonlar, Kenmotsu manifoldlar ve $\xi(Ric)$ -vektör alanlar ile ilgili sonuçlar elde etmek için bu konu ile ilgili makaleler kronolojik olarak incelenmiştir. Tezin belgelenmesinde latex programı kullanılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. $\xi(Ric)$ -VEKTÖR ALANI VE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu alt bölümde, bir $\xi(Ric)$ -vektör alanına izin veren Riemann manifoldlar çalışacaktır.

4.1.1. Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\xi(Ric)$ -vektör alanları

ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. O zaman $\forall L, S \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$, (2.29) denklemi nedeniyle

$$\tilde{g}(\nabla_L \xi, S) = \mu Ric(L, S) \quad (4.1)$$

denklemi sağlanır. Buradan da

$$(\mathcal{L}_\xi \tilde{g})(L, S) = 2\mu Ric(L, S) \quad (4.2)$$

elde edilir. Böylece (4.2) denkleminden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.1.1 ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\mu \neq 0$ olan bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. Bu durumda

- (i) ξ Killing ancak ve ancak $\tilde{F}^s$ Ricci-flat,
- (ii) ξ konformal ancak ve ancak $\tilde{F}^s$, $(s > 2)$ Einstein manifold.

Teorem 4.1.1.2 Bir Riemann manifoldu üzerindeki herhangi bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı daima kapalıdır.

İspat. ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. Bu durumda, herhangi $\forall L, S \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$, iyi bilinen Koszul formülünden

$$2\tilde{g}(\nabla_L \xi, S) = 2d\xi^\#(L, S) + \tilde{g}(\nabla_S \xi, L) + \tilde{g}(\nabla_L \xi, S)$$

elde ederiz, burada $\xi^\#$, ξ nin $\tilde{g}$ -dual 1-formudur. (4.1) denklemi ve Ric tensörünün simetrisini kullanarak,

$$d\xi^\#(L, S) = 0$$

elde ederiz. L ve S keyfi olduğundan, $\xi^\#$ kapalıdır, dolayısıyla ξ kapalıdır. $\square$

Lemma 4.1.1.3 ψ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldunda düzgün bir fonksiyon olsun. Bu durumda, ψ nin $\nabla\psi$ gradyentinin bir $\nabla\psi(Ric)$ -vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla^2\psi(V, W) = \mu Ric(V, W) \quad \forall \quad V, W \in \mathfrak{X}(\tilde{F}) \quad (4.3)$$

denklemini sağlamasıdır.

İspat. $\psi \in C^\infty(\tilde{F})$. ψ nin Hessiyeninin (4.3) denklemini sağladığını varsayalım. O halde, $\forall V, W \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$ için

$$Ric(\mu V, W) = \tilde{g}(\mu QV, W) = \nabla^2\psi(V, W) = \tilde{g}(\nabla_V \nabla\psi W)$$

elde edilir. Buradan $\nabla_V \nabla\psi = \mu QV$ çıkar. Bu ise $\nabla\psi$ nin bir $\nabla\psi(Ric)$ -vektör alanı olduğunu söyler. Öte yanda $\nabla^2\psi(V, W) = \mu Ric(V, W)$ varsayalım, $\tilde{g}(\nabla_V \nabla\psi, W) = \mu Ric(V, W)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi, ξ bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun L ve S , $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ üzerinde keyfi vektör alanları olsun. (2.29) denklemi ile

$$R(L, S)\xi = \mu \left((\nabla_L Q)S - (\nabla_S Q)L \right) \quad (4.4)$$

elde edilir. Burada R , $\tilde{F}^s$ nin eğrilik tensörüdür. Buradan $\forall \zeta \in \mathfrak{X}(\tilde{F}^s)$ için

$$\tilde{g}(R(L, S)\xi, \zeta) = \mu \left\{ (\nabla_L Ric)(S, \zeta) - (\nabla_S Ric)(L, \zeta) \right\} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.5) denkleminde $S = \zeta = e_i$ koyarsak ve i üzerinden toplarsak

$$\sum_{i=1}^s \tilde{g}(R(L, e_i)\xi, e_i) = \mu \left\{ \sum_{i=1}^s (\nabla_L Ric)(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^s (\nabla_{e_i} Ric)(L, e_i) \right\} \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{i=1}^s \tilde{g}(R(L, e_i)\xi, e_i) = - \sum_{i=1}^s \tilde{g} \left(R(L, e_i)e_i, \xi \right) = -\tilde{g}(Q(L), \xi)$$

ve

$$\sum_{i=1}^s (\nabla_{e_i} Ric)(L, e_i) = \sum_{i=1}^s \tilde{g} \left((\nabla_{e_i} Q)L, e_i \right) = \operatorname{div} Q(L)$$

dır.

Uyarı 2.1.16 ve (4.6) denkleminde $\sum_{i=1}^s (\nabla_L Ric)(e_i, e_i) = L[r]$ ve $\operatorname{div} Q(L) = \frac{1}{2}L[r]$,

$$\tilde{g}(Q(L), \xi) = -\frac{\mu}{2}L[r] \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada $r, (\tilde{F}^s, \tilde{g})$ nin skaler eğriliğidir ve $\operatorname{div}, \nabla$ ya göre diverjans operatörüdür.

Şimdi, $k = \frac{1}{2}\tilde{g}(\xi, \xi)$ tarafından tanımlanan k fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda $\tilde{F}^s$ üzerinde her L vektör alanı için

$$\tilde{g}(\nabla k, L) = L[k] = \tilde{g}(\nabla_L \xi, \xi) \quad (4.8)$$

elde edilir. Böylece (4.8) denkleminde, (2.29) ve (4.7) kullanarak,

$$\tilde{g}(\nabla k, L) = -\frac{\mu^2}{2}\tilde{g}(\nabla r, L) \quad (4.9)$$

denkleminde ulaşılır. Böylece, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.1.4 $\xi, (\tilde{F}^s, \tilde{g})$ üzerindeki bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı ve $r, (\tilde{F}^s, \tilde{g})$ nin skaler eğriliği olsun. Bu durumda

$$\nabla k = -\frac{\mu^2}{2}\nabla r$$

denklemini gerçeklenir.

Böylece hem Teorem 2.1 [39] hem de Teorem 2.3 [46], bizim Teorem 4.1.1.4 ün sonucu olarak çıkar. Şimdi bunu ifade edelim.

Teorem 4.1.1.5 ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\mu \neq 0$ olan bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. Bu durumda, $\|\xi\| = \text{sabit}$ ancak ve ancak $r = \text{sabit}$.

Şimdi, (4.8) denkleminde, $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ üzerinde her L vektör alanı için

$$\tilde{g}(\nabla k, L) = \mu \tilde{g}(QL, \xi) = \tilde{g}(\mu Q\xi, L) = \tilde{g}(\nabla_\xi \xi, L)$$

elde ederiz. Buradan

$$\nabla k = \nabla_\xi \xi \tag{4.10}$$

ıkar. Bu durumda, (4.10) denklemini ve Teorem 4.1.1.4 ten aşığıdaki sonucu bulunuz.

Teorem 4.1.1.6 ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. O halde ξ bir jeodezik bir vektör alanıdır ancak ve ancak $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ nin r skaler eğriliği sabit.

Uyarı 4.1.1.7 Bir ξ vektör alanı

$$\nabla_\xi \xi = 0 \tag{4.11}$$

denklemini sağlanıyorsa, bu durumda ξ bir jeodezik vektör alanı denir.

ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. Bu durumda (2.29) denklemini kullanarak

$$\text{div} \xi = \mu r \tag{4.12}$$

elde ederiz.

Şimdi $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ nin kompakt ve yönlendirilebilir olduğunu ve skaler eğriliğinin $r \geq 0$ veya $r \leq 0$ olduğunu varsayalım. (4.12) denkleminin $\tilde{F}^s$ üzerinde integral alırsak $r = 0$ elde ederiz. Böylece, aşağıdaki sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.1.8 ξ , kompakt ve yönlendirilebilir bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\mu = \text{sabit} \neq 0$ olan bir $\xi(\text{Ric})$ -vektör alanı olsun. Bu durumda $\tilde{F}^s$ nin r skaler eğriliği ne kesinlikle pozitif ne de kesinlikle negatiftir.

Teorem 4.1.1.9 Harmonik $\xi(\text{Ric})$ -vektör alanına sahip bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu skaler eğriliği sıfırdır. Bunun tersi de doğrudur.

İspat. ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ üzerinde harmonik bir $\xi(\text{Ric})$ -vektör alanı olsun. Bu durumda

$$d\xi^\# = 0 \quad \text{and} \quad \delta\xi^\# = 0 \quad (4.13)$$

elde ederiz, burada d ve δ , sırasıyla $\tilde{F}^s$ üzerindeki diferansiyel ve eşdiferansiyel operatörlerdir. Öte yandan, (2.22) denkleminde

$$\delta\xi^\# = -\text{div}\xi$$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda, (4.13) denkleminde

$$\text{div}\xi = 0 \quad (4.14)$$

sonucunun çıkarırız. Böylece gerekli koşul hemen (4.12) denkleminde gelir. Tersisi sadece bir doğrulamadır. $\square$

Kompakt ve yönlendirilebilir durum için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.1.1.10 $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ kompakt, yönlendirilebilir bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda manifold üzerinde $\mu \neq 0$ olacak biçimde paralel olandan başka bir harmonik $\xi(\text{Ric})$ -vektör alanı yoktur.

İspat. ξ , kompakt ve yönlendirilebilir bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $\mu \neq 0$ ile

harmonik bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. O zaman Teorem 2.1.21 den

$$\int_{\tilde{F}^s} \left(Ric(\xi, \xi) + |\nabla \xi|^2 \right) dV = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Öte yandan, (4.1) ve (4.10) denklemleri kullanarak, 4.1.1.4 ve 4.1.1.9 Teoremlerinden

$$Ric(\xi, \xi) = 0 \quad (4.16)$$

buluruz. Denklem (4.15) ve denklem (4.16) kullanarak $\nabla \xi = 0$ buluruz. Bu işe ξ nin paralel olduğu anlamına gelir. $\square$

4.1.2. Potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ olan Ricci solitonlar

Teorem 4.1.2.1 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$ potansiyel vektör alanı ξ bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olacak şekilde büzülebilir bir Ricci soliton olsun. Bu durumda, bu soliton gradyenttir. Böylece, çözüm ya dengeli ya da Einsteinyen ve yerel çarpım $J \times_{\kappa(s)} N$ dir, burada $\kappa(s)$, J üzerinde sıfır olmayan bir fonksiyondur ve N , $(s - 1)$ -boyutlu bir Riemann manifoldudur, burada J , reel eksen üzerinde bir açık aralıktır.

İspat. $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$ bir büzülebilir Ricci soliton olsun, öyle potansiyel vektör alanı ξ bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olsun. Teorem 4.1.1.2'den ξ potansiyel vektör alanının kapalı olduğunu biliyoruz, dolayısıyla $\tilde{g}$ -dual 1-form $\xi^\#$ kapalıdır ve iyi bilinen Poincaré Lemma 2.1.24 nedeniyle, $\xi^\#$ büzülebilir bir manifold üzerinde tanımlandığından de tam. $\xi^\# = d\psi$, yerine olarak yazalım, burada $\psi \in C^\infty(\tilde{F}^s)$. Dolayısıyla, $\xi = \nabla \psi$ olur. Böylece, Ricci soliton gradyenttir ve (2.35) şu hale gelir:

$$\nabla^2 \psi + Ric = \lambda \tilde{g} \quad (4.17)$$

dır. Burada $\nabla^2 \psi$, ψ nin Hessiyen tensörüdür. $\xi = \nabla \psi$ aynı zamanda bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olduğundan Lemma 4.1.1.3 i kullanarak

$$\nabla^2 \psi = \mu Ric \quad (4.18)$$

elde ederiz. Burada $\mu = -1$ ise, Ricci soliton açıkça dengelidir. $\mu \neq -1$ ise, (4.17) ve (4.18)

denlemlerinden

$$Ric = \frac{\lambda}{1+\mu} \tilde{g} \quad (4.19)$$

çıkar. Yani $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Einsteindir. Ayrıca, (2.35) ve (4.18) denklemlerinden

$$\nabla^2 \psi = \lambda \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right) \tilde{g}$$

çıkararız. Dolayısıyla, Önerme 4.1 [21] den, $\xi = \nabla \psi$ bir eşdaireseel vektör alanı olur. Geri kalan iddia Teorem 3.11 [21] den çıkar. $\square$

Teorem 4.1.2.2 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$ kompakt, yönlendirilebilir ve sınırı olmayan bir Ricci soliton olsun. Potansiyel vektör alanı ξ bir $\xi(Ric)$ -vektör ise, bu durumda ξ harmoniktir.

İspat. ξ nin bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı olduğundan Teorem 4.1.1.2 den ξ nin kapalı olduğunu biliyoruz. Hodge-de Rham ayrıştırma Teorem 2.1.27 kullanarak

$$\xi = \nabla \sigma + Z \quad (4.20)$$

elde edilir. Burada σ , $\tilde{F}^s$ üzerinde düzgün bir fonksiyondur ve Z , $\tilde{F}^s$ üzerinde bir harmonik vektör alanıdır. (2.35) denklemini kullanarak

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_Z \tilde{g}(L, S) + Ric(L, S) = \lambda \tilde{g}(L, S) - \nabla^2 \sigma(L, S) \quad (4.21)$$

elde edilir. Öte yandan, (4.19) denkleminde (4.21) denklemini kullanarak

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_Z \tilde{g}(L, S) - \frac{\lambda \mu}{1+\mu} \tilde{g}(L, S) + \nabla^2 \sigma(L, S) = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) denkleminin izini alarak

$$div Z - \frac{\lambda \mu}{1+\mu} s + \Delta \sigma \quad (4.23)$$

elde edilir. Burada $div Z = 0$, çünkü Z harmoniktir. Böylece,

$$\Delta \sigma = \frac{\lambda \mu}{1+\mu} s \quad (4.24)$$

elde edilir. Burada λ , μ ve s sabit olduğundan, $\Delta\sigma \geq 0$ veya $\Delta\sigma \leq 0$. Hopf'un Lemmasına göre Lemma 2.1.20 σ nin sabit olduğunu buluruz. Böylece sonuç hemen (4.21) denkleminde gelir. $\square$

Böylece, 4.1.1.9 ve 4.1.2.2 Teoremleri ile aşağıdaki teorem elde ederiz.

Sonuç 4.1.2.3 ξ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$ kompakt, yönlendirilebilir ve sınırı olmayan Ricci soliton üzerinde bir $\xi(\text{Ric})$ potansiyel vektör alanı olsun. Bu durumda, $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$ dengelidir (steady).

4.2. η -RİCCI-BOURGUIGNON SOLİTONLAR

Bu alt bölümde bir η -RB ve hemen hemen η -RB solitonlar yapısı inceleyeceğiz.

4.2.1. η -Ricci-Bourguignon ve hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar

Hodge-de Rham ayrıştırma teoremini kullanarak Teorem 2.1.27, ξ vektör alanını bir kompakt, yönlendirebilir Riemann manifoldu üzerinde, bir k fonksiyonunun gradyenti ve diverjans sıfır olan bir Z vektör alanının toplamı olarak ayrıştırabiliriz, yani

$$\xi = \nabla k + Z, \quad (4.25)$$

burada $\text{div}Z = 0$. Notasyon kolaylığı için k ya Hodge-de Rham potansiyeli diyelim.

Teorem 4.2.1.1 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \mu, \lambda)$ bir kompakt hemen hemen η -RB soliton olsun. $\tilde{F}^s$, aynı zamanda f potansiyel fonksiyonuna sahip bir gradyent hemen hemen η -RB soliton ise, bu durumda Hodge-de Rham potansiyeli k ile uyumludur.

İspat. $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \mu, \lambda)$ hemen hemen η -RB solitonu için, 2.36 denkleminde izi alırsak

$$(1 - s\rho)r + \text{div}\xi = s\lambda + \mu|\xi|^2 \quad (4.26)$$

elde edilir, ζ , η nin dual vektör alanıdır. 4.25 denkleminde diverjansı alırsak $\text{div}\xi = \Delta k$

elde ederiz ve $\zeta = \nabla f$ varsayalım. Buradan

$$(1 - s\rho)r + \Delta k = s\lambda + \mu|\nabla f|^2 \quad (4.27)$$

elde edilir. $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \mu, \lambda)$ aynı zamanda kompakt gradyent hemen hemen η -RB soliton olduğundan, bu durumda (2.37) denkleminde

$$(1 - s\rho)r + \Delta f = s\lambda + \mu|\nabla f|^2 \quad (4.28)$$

sonucunu elde ederiz. (4.27) ve (4.28) denklemlerini birbirinden çıkararak, $\Delta(f - h) = 0$ sonucunu buluruz. Hopf Lemma 2.1.20 kullanarak $f = k + c$ sonucuna ulaşırız, dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde tanımlı $u = e^{-\mu k}$ fonksiyonunu düşünürsek, bu durumda $\nabla u = -\mu e^{-\mu k} \nabla k$ eşitliğini ulaşabiliriz. O halde,

$$\nabla^2 k - \mu dk \otimes dk = -\frac{\nabla^2 u}{\mu u} \quad (4.29)$$

elde edilir. Öte yandan (2.37) denklemini kullanarak

$$Ric - \frac{\nabla^2 u}{\mu u} = \lambda \tilde{g} + \rho r \tilde{g} \quad (4.30)$$

ve

$$\frac{\Delta u}{u\mu} = \left((1 - s\rho)r - s\lambda \right) \quad (4.31)$$

sonucuna ulaşılır.

$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\nabla u} \tilde{g} = \psi \tilde{g}$ olacak şekilde düzgün bir $\psi : \tilde{F} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, $(\tilde{F}, \tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerindeki bir ∇u vektör alanı bir konformal vektör alanı olarak adlandırılır. $\psi \neq 0$ ise ∇u konformal vektör alanı aşikâr değildir. ∇u konformal vektör alanının aşikâr olmadığını varsayalım. Bu durumda $\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\nabla u} \tilde{g} = \nabla^2 u = \frac{\Delta u}{s} \tilde{g}$ elde edilir. (4.31) denklemini (4.30) denkleminde yerine konulursa,

$$Ric = \frac{r}{s} \tilde{g} \quad (4.32)$$

elde edilir, burada r sabit bir skaler eğriliktir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.1.2 $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ bir Einstein manifold olması için gerek ve yeter koşul $\xi = \nabla u$ bir konformal vektör alanı olmasıdır.

∇u nun aşikâr olmayan konformal vektör alanı olduğunu varsayalım, yani $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u}\tilde{g} = \psi\tilde{g}$, bu durumda (4.30) denklemi

$$Ric = (\lambda + \rho r + \frac{\psi}{\mu u})\tilde{g} \quad (4.33)$$

haline gelir. (4.33) denkleminin izi ve sonra da kovaryant türevi alınır

$$(1 - s\rho)\nabla r = s\nabla(\lambda + \frac{\psi}{\mu u}) \quad (4.34)$$

elde edilir. Şimdi, (4.33) denklemin diverjansı alınır ve $dr = 2\text{div}Ric$ gerçeği kullanılırsa

$$(\frac{1}{2} - \rho)\nabla r = \nabla(\lambda + \frac{\psi}{\mu u}) \quad (4.35)$$

bulunur. Böylece (4.34) ve (4.35) denklemlerinden

$$(1 - s\rho)\nabla r = s(\frac{1}{2} - \rho)\nabla r \quad (4.36)$$

ifade edilir. Bu r ve $\lambda + \frac{\psi}{\mu u}$ nun sabit olduğu anlamına gelir.

Sonraki teorem, ξ bir konformal vektör alanı olduğunda gradyent η -RB soliton için bir karakterizasyon verir ve Ricci soliton için bir genelleştirmesidir.

Teorem 4.2.1.3 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir gradyent η -RB soliton olsun ve $\xi = \nabla u$ bir konformal vektör alanı olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır:

1. $\tilde{F}$ kompakt ise, ∇u bir Killing vektör alanıdır, böylece $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ bir Einstein manifoldtur.
2. $\tilde{F}$ kompakt olmayan gradyent η -RB soliton ise, bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ bir $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzaya izometriktir veya ∇u bir Killing vektör alanıdır.

İspat. ∇u bir konformal vektör alanı ise, bu durumda $\tilde{F}$ üzerinde bir ψ düzgün fonksiyonu vardır öyle ki

$$\mathcal{L}_{\nabla u} g = 2\psi \tilde{g} \quad (4.37)$$

eşitliği sağlanır. (4.37) denklemin izi alınır,

$$\operatorname{div} \nabla u = s\psi \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.38) denklemin integrali alınır, $\tilde{F}$ kompakt olduğundan

$$0 = \int_{\tilde{F}} 2\operatorname{div} \nabla u dV = s\operatorname{Vol}(V)\psi \quad (4.39)$$

bulunur, bu $\psi = 0$ anlamına gelir. Bu durumda ∇u bir Killing vektör alanıdır. Böylece birinci iddia ispatlanmış olur.

İkincisi için, (4.36) denkleminde ψ sabit olduğundan, $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u} \tilde{g} = \nabla^2 u = \psi \tilde{g}$ elde ederiz. Bu durumda $\psi \neq 0$ ise, $\tilde{F}^s$ nin $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzaya izometrik olduğu sonucuna varmak için Teorem 2.3.5 kullanabiliriz. Eğer $\psi = 0$ ise, bu durumda ∇u bir Killing vektör alanıdır ve ispat tamamlanır. $\square$

Hemen hemen kompakt η -RB soliton için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.2.1.4 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir kompakt hemen hemen η -RB soliton olsun. $\xi = \nabla u$ aşikâr olmayan bir konformal vektör alanı ise, bu durumda $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir.

İspat. $\xi = \nabla u$ aşikâr olmayan konformal vektör ise, bu durumda $\mathcal{L}_{\nabla u} \tilde{g} = 2\psi \tilde{g}$, burada $\psi \neq 0$. (4.36) denkleminde r ve $\lambda + \frac{\psi}{\mu u}$ sabittir. $r \neq 0$ olduğu sonucuna varmak için Lemma 2.3.6 kullanabiliriz, aksi halde $\psi = 0$ olur. Dolayısıyla (4.30) denkleminde

$$\mathcal{L}_{\nabla u} \operatorname{Ric} = 2(\lambda + \rho r + \frac{\psi}{\mu u})\psi \tilde{g}$$

elde edilir. Böylece, $\lambda + \rho r + \frac{\psi}{\mu u}$ sabit olduğundan, $\mathcal{L}_{\nabla u} \operatorname{Ric} = 2(\lambda + \rho r + \frac{\psi}{\mu u})\mathcal{L}_{\nabla u} \tilde{g} = 2(\lambda + \rho r + \frac{\psi}{\mu u})\psi \tilde{g}$ elde edilir. Şimdi Teorem 2.3.7 yi kullanırsak $\tilde{F}^s$ nin bir $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küreye izometrik olduğunu gösterebiliriz. $\square$

Sonuç 4.2.1.5 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ aşikârsa yani Einstein ise veya ∇u konformal vektör alanıysa bu durumda bir $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küreye izometriktir.

Lemma 4.2.1.6 $(\tilde{F}^s, g, \xi, \lambda, \mu)$ bir hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$\begin{aligned} \frac{(1-s\rho)}{2} \Delta |\xi|^2 &= (1-s\rho) |\nabla \xi|^2 + (s\rho - 1) Ric(\xi, \xi) + s\rho \nabla_\xi \operatorname{div} \xi \\ &+ 2\rho(1-s\rho) \tilde{g}(\nabla r, \xi) - [s(2\rho + 1) - 2] \tilde{g}(\nabla \lambda, \xi) \\ &+ 2\mu(1-s\rho) |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \mu s\rho \xi (|\xi|^2) \end{aligned} \quad (4.40)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{(1-s\rho)}{2} (\Delta - \nabla_\xi) |\xi|^2 &= (1-s\rho) |\nabla \xi|^2 + \lambda(s\rho - 1) |\xi|^2 \\ &+ \rho(s\rho - 1) r |\xi|^2 + \mu(s\rho - 1) |\xi|^4 + s\rho \nabla_\xi \operatorname{div} \xi \\ &+ 2\rho(1-s\rho) \tilde{g}(\nabla r, \xi) - [s(2\rho + 1) - 2] \tilde{g}(\nabla \lambda, \xi) \\ &+ 2\mu(1-s\rho) |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \mu s\rho \xi (|\xi|^2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

dır.

İspat. (2.36) denkleminde

$$2\operatorname{div} Ric + \operatorname{div}(\xi_\xi \tilde{g}) = 2\nabla \lambda + 2\rho \nabla r + 2\mu \operatorname{div}(\eta \otimes \eta) \quad (4.42)$$

elde edilir. $\operatorname{div}(\eta \otimes \eta) = \xi \operatorname{div} \xi + \nabla_\xi \xi$ olduğu kullanılarak ve (2.36) denklemin izini alarak $(1-s\rho)r + \operatorname{div} \xi = s\lambda + \mu |\xi|^2$ elde ederiz. Kovaryant türev operatörünün yardımıyla

$$(1-s\rho) \nabla_\xi r + \nabla_\xi (\operatorname{div} \xi) = s \nabla_\xi \lambda + \mu \nabla_\xi |\xi|^2 \quad (4.43)$$

elde edilir. $dr = 2\text{div}Ric$ ve (2.44), (4.42), (4.43) denklemlerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\nabla_{\xi}(\text{div}\xi) &= s\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + (s\rho - 1)\nabla_{\xi}r + \mu\xi(|\xi|^2) \\
&= s\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + 2(s\rho - 1)\text{div}Ric(\xi) + \mu\xi(|\xi|^2) \\
&= s\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + \mu\xi(|\xi|^2) - (s\rho - 1)\text{div}(\mathcal{L}_{\xi}\tilde{g})(\xi) + 2(s\rho - 1)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) \\
&\quad + 2\rho(s\rho - 1)\tilde{g}(\nabla r, \xi) + 2\mu(s\rho - 1)|\xi|^2\text{div}\xi + \mu(s\rho - 1)\xi(|\xi|^2) \\
&= (1 - s\rho)\left(\frac{1}{2}\Delta|\xi|^2 - |\nabla\xi|^2 + Ric(\xi, \xi) + \nabla_{\xi}\text{div}\xi\right) \\
&\quad + 2\rho(s\rho - 1)\tilde{g}(\nabla r, \xi) + (s(2\rho + 1) - 2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + \mu\xi(|\xi|^2) \\
&\quad + 2\mu(s\rho - 1)|\xi|^2\text{div}\xi + \mu(s\rho - 1)\xi(|\xi|^2) \\
&= \frac{(1 - s\rho)}{2}\Delta|\xi|^2 - (1 - s\rho)|\nabla\xi|^2 + (1 - s\rho)Ric(\xi, \xi) \\
&\quad + (1 - s\rho)\nabla_{\xi}\text{div}\xi + 2\rho(s\rho - 1)\tilde{g}(\nabla r, \xi) + (s(2\rho + 1) - 2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) \\
&\quad + 2\mu s\rho|\xi|^2\text{div}\xi - 2\mu|\xi|^2\text{div}\xi + \mu s\rho\xi(|\xi|^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{(1 - s\rho)}{2}\Delta|\xi|^2 &= (1 - s\rho)|\nabla\xi|^2 + (s\rho - 1)Ric(\xi, \xi) + s\rho\nabla_{\xi}\text{div}\xi \\
&\quad + 2\rho(1 - s\rho)\tilde{g}(\nabla r, \xi) - (s(2\rho + 1) - 2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) \\
&\quad + 2\mu(1 - s\rho)|\xi|^2\text{div}\xi - \mu s\rho\xi(|\xi|^2)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

bulunur. Böylece (4.40) denklemi çıkar.

Şimdi (2.36) denkleminde

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\xi}\tilde{g}(\xi, \xi) + Ric(\xi, \xi) = (\lambda + \rho r)|\xi|^2 + \mu|\xi|^4$$

eşitliğini elde edebilir. Bu denklemi 4.44 te kullanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s\rho)}{2}\Delta|\xi|^2 &= (1-s\rho)|\nabla\xi|^2 + (s\rho-1)[\lambda|\xi|^2 + \rho r|\xi|^2 + \mu|\xi|^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\tilde{g}(\xi, \xi)] + s\rho\nabla_\xi\operatorname{div}\xi + 2\rho(1-s\rho)\tilde{g}(\nabla r, \xi) \\
&\quad - (s(2\rho+1)-2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + 2\mu(1-s\rho)|\xi|^2\operatorname{div}\xi - \mu s\rho\xi(|\xi|^2) \\
&= (1-s\rho)|\nabla\xi|^2 + \frac{(1-s\rho)}{2}\nabla_\xi|\xi|^2 + \lambda(s\rho-1)|\xi|^2 + \rho r(s\rho-1)|\xi|^2 \\
&\quad + \mu(s\rho-1)|\xi|^4 + s\rho\nabla_\xi\operatorname{div}\xi + 2\rho(1-s\rho)\tilde{g}(\nabla r, \xi) \\
&\quad - (s(2\rho+1)-2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) + 2\mu(1-s\rho)|\xi|^2\operatorname{div}\xi - \mu s\rho\xi(|\xi|^2)
\end{aligned}$$

elde edebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s\rho)}{2}(\Delta - \nabla_\xi)|\xi|^2 &= (1-s\rho)|\nabla\xi|^2 + \lambda(s\rho-1)|\xi|^2 \\
&\quad + \rho r(s\rho-1)|\xi|^2 + \mu(s\rho-1)|\xi|^4 + s\rho\nabla_\xi\operatorname{div}\xi \\
&\quad + 2\rho(1-s\rho)\tilde{g}(\nabla r, \xi) - (s(2\rho+1)-2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \xi) \\
&\quad + 2\mu(1-s\rho)|\xi|^2\operatorname{div}\xi - \mu s\rho\xi(|\xi|^2)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur ve ispat biter. $\square$

$\Delta_\xi = \Delta - \nabla_\xi$ (bkz. [1] sayfa 143) difüzyon denklem operatörünü kullanarak ve önceki lemmada $\xi = \nabla k$ alarak, yani, $\Delta k = \Delta - \nabla_{\nabla k}$ ve (4.41) denklemin yardımıyla bir sonraki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.1.7 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ bir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{(1-s\rho)}{2}\Delta_k|\nabla k|^2 &= (1-s\rho)|\nabla^2 k|^2 + \lambda(s\rho-1)|\nabla k|^2 \\
&\quad + \rho(s\rho-1)r|\nabla k|^2 + \mu(s\rho-1)|\nabla k|^4 + s\rho\nabla_{\nabla k}(\Delta k) \\
&\quad + 2\rho(1-s\rho)\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) - [s(2\rho+1)-2]\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) \\
&\quad + 2\mu(1-s\rho)\Delta k|\nabla k|^2 - \mu s\rho\nabla k(|\nabla k|^2)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

denklemini elde edilir.

Sonuç 4.2.1.8 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ bir η -RB soliton olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{(1-s\rho)}{2} \Delta |\xi|^2 &= (1-s\rho) |\nabla \xi|^2 + (s\rho - 1) Ric(\xi, \xi) + s\rho \nabla_\xi \operatorname{div} \xi \\ &\quad + 2\rho(1-s\rho) \tilde{g}(\nabla r, \xi) + 2\mu(1-s\rho) |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \mu s\rho \xi(|\xi|^2) \end{aligned} \quad (4.47)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{(1-s\rho)}{2} (\Delta - \nabla_\xi) |\xi|^2 &= (1-s\rho) |\nabla \xi|^2 + \lambda(s\rho - 1) |\xi|^2 + \rho r(s\rho - 1) |\xi|^2 \\ &\quad + \mu(s\rho - 1) |\xi|^4 + s\rho \nabla_\xi \operatorname{div} \xi + 2\rho(1-s\rho) \tilde{g}(\nabla r, \xi) \\ &\quad + 2\mu(1-s\rho) |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \mu s\rho \xi(|\xi|^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

denklemleri elde edilir.

İspat. Lemma 4.2.1.6 ispatında $\nabla \lambda = 0$ alırsak istenen sonuçlar hemen çıkar. □

Bir kompakt hemen hemen Ricci soliton $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda)$, $(s \geq 3)$ için

$$\int_{\tilde{F}} \left(Ric(\xi, \xi) + (s-2)g(\nabla \lambda, \xi) \right) dV \leq 0,$$

burada potansiyel vektör alanı ξ Killingdir ve soliton aşıkârdır (Einstein). Şimdi, bir kompakt hemen hemen η -RB soliton için benzer bir sonucu verelim.

Teorem 4.2.1.9 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir kompakt hemen hemen η -RB soliton olsun. Eğer $\rho \neq \frac{1}{s}$ ve

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} \left(Ric(\xi, \xi) + \frac{s\rho}{s\rho - 1} \nabla_\xi \operatorname{div} \xi - 2\rho \tilde{g}(\nabla r, \xi) - \frac{(s(2\rho + 1) - 2)}{s\rho - 1} \tilde{g}(\nabla \lambda, \xi) \right. \\ \left. - 2\mu |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \frac{\mu s\rho}{s\rho - 1} \xi(|\xi|^2) \right) dV \leq 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

ise, $\tilde{F}^s$ bir kuazi-Einstein manifoldtur.

İspat. $\rho \neq \frac{1}{s}$ olmak üzere (4.40) denkleminin integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} |\nabla \xi|^2 dV &= \int_{\tilde{F}} \left(Ric(\xi, \xi) + \frac{s\rho}{s\rho - 1} \nabla_{\xi} \operatorname{div} \xi - 2\rho \tilde{g}(\nabla r, \xi) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(s(2\rho + 1) - 2)}{s\rho - 1} \tilde{g}(\nabla \lambda, \xi) - 2\mu |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \frac{\mu s\rho}{s\rho - 1} \xi(|\xi|^2) \right) dV \leq 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

elde edilir. (4.40) denkleminin sağ tarafının sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olduğunu varsaydığımız için, $\nabla \xi = 0$ elde ederiz, dolayısıyla $\xi_{\xi} \tilde{g} = 0$ bulunur. Böylece, $\tilde{F}^s$ bir kuazi-Einstein manifoldtur. $\square$

$\nabla \lambda = 0$ olduğunda aşağıdaki sonucu elde ediyoruz.

Sonuç 4.2.1.10 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir kompakt η -RB soliton olsun. Eğer $\rho \neq \frac{1}{s}$ ve

$$\int_{\tilde{F}} \left(Ric(\xi, \xi) + \frac{s\rho}{s\rho - 1} \nabla_{\xi} \operatorname{div} \xi - 2\rho \tilde{g}(\nabla r, \xi) - 2\mu |\xi|^2 \operatorname{div} \xi - \frac{\mu n\rho}{s\rho - 1} \xi(|\xi|^2) \right) dV \leq 0 \quad (4.51)$$

ise, M^n bir kuazi-Einstein manifoldtur.

4.2.2. Gradyent hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar için integral formülleri

Bu alt bölümde, bir kompakt gradyent hemen hemen η -RB soliton için integral formüller inceleyeceğiz.

Önerme 4.2.2.1 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ bir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu durumda, aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$(1 - s\rho)r + \Delta k = s\lambda + \mu |\nabla k|^2, \quad (4.52)$$

$$\left(1 - 2\rho(s - 1) \right) \nabla r = 2(1 - \mu) Ric(\nabla k) + 2(s - 1) \nabla \lambda + 2\mu \left(r - (s - 1)(\lambda + \rho r) \right) \nabla k, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{\zeta} Ric)(\xi, V) - (\nabla_{\xi} Ric)(\zeta, V) - \tilde{g}(R(\xi, \zeta)V, \nabla_k) \\
& = \zeta[\lambda]\tilde{g}(\xi, V) - \xi[\lambda]\tilde{g}(\zeta, V) + \rho \left((\nabla_{\zeta} r)\tilde{g}(\xi, V) - (\nabla_{\xi} r)\tilde{g}(\zeta, V) \right) \\
& + \mu \left(\nabla_{\zeta}(dk \otimes dk)(\xi, V) - \nabla_{\xi}(dk \otimes dk)(\zeta, V) \right),
\end{aligned} \tag{4.54}$$

burada $\xi, \zeta, V, \tilde{F}$ üzerinde herhangi vektör alanlarıdır ve

$$\begin{aligned}
\nabla \left([1 - 2\rho(s-1)]r + |\nabla k|^2 - 2(s-1)\lambda \right) & = 2(\lambda + \rho r)\nabla k \\
& + 2\mu \left(\nabla_{\nabla k} \nabla k + (|\nabla k|^2 - \Delta k)\nabla k \right)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

dır.

İspat. (2.37) denkleminin izini alarak, (4.52) denklemi elde edilir. (4.53) denklemi ispatlamak için, (2.37) denkleminin diverjansını alarak

$$div Ric + div(\nabla^2 k) = \mu \Delta k \nabla k + \mu \nabla_{\nabla k} \nabla k + \nabla(\lambda + \rho r) \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.52) denkleminde, $\Delta k = -r + s\lambda + s\rho r + \mu|\nabla k|^2$ bulunur. Şimdi

$$\nabla|\nabla k|^2 = 2\nabla_{\nabla k} \nabla k$$

ve

$$div \nabla^2 k = Ric(\nabla k) + \nabla \Delta k$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\nabla r & = -2Ric(\nabla k) - 2\nabla(-r + s(\lambda + \rho r) + 2\mu|\nabla k|^2) \\
& + 2\mu \Delta k \nabla k + 2\mu \nabla_{\nabla k} \nabla k + 2\nabla(\lambda + \rho r) \\
& = -2Ric(\nabla k) + 2\nabla r - 2\mu \nabla_{\nabla k} \nabla k + 2\mu \Delta k \nabla k - 2(s-1)\nabla(\lambda + \rho r)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla r = 2Ric(\nabla k) - 2\mu \Delta k \nabla k + 2\mu \nabla_{\nabla k} \nabla k + (s-1)\nabla(\lambda + \rho r) \tag{4.57}$$

bulunur. (2.37) denklemi kullanarak

$$\nabla_{\nabla k} \nabla k = (\lambda + \rho r) \nabla k + \mu |\nabla k|^2 \nabla k - Ric(\nabla k) \quad (4.58)$$

elde edilir. (4.57) ve (4.58) denklemleri birleştirilerek

$$\begin{aligned} [1 - 2\rho(s-1)] \nabla r &= (1 - \mu) Ric(\nabla k + \mu[(\lambda + \rho r) + \mu |\nabla k|^2 - \Delta k] \nabla k + (s-1) \nabla \lambda \\ &= (1 - \mu) Ric(\nabla k) + \mu[r - (s-1)(\lambda + \rho r) \nabla k] + (s-1) \nabla \lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.53) denklemi ispat biter.

(4.54) denklemi elde etmek için, (2.37) denklemi $Ric(\xi, V)$ ve $Ric(\zeta, V)$ nin kovaryant türevlerini kullanarak,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\zeta} Ric)(\xi, V) - (\nabla_{\xi} Ric)(\zeta, V) &= (\nabla_{\zeta} \nabla_{\xi} \nabla_V k - \nabla_{\xi} \nabla_{\zeta} \nabla_V k) \\ &\quad + (\nabla_{\zeta} \lambda) \tilde{g}(\xi, V) - (\nabla_{\xi} \lambda) \tilde{g}(\zeta, V) \\ &\quad + \rho \left((\nabla_{\zeta} r) \tilde{g}(\xi, \zeta) - (\nabla_{\xi} r) \tilde{g}(\zeta, V) \right) \\ &\quad + \mu \left(\nabla_{\zeta} (dk \otimes dk)(\xi, \zeta) - \nabla_{\xi} (dk \otimes dk)(\zeta, V) \right) \\ &= g(R(\xi, \zeta)V, \nabla k) + \zeta[\lambda] \tilde{g}(\xi, V) - \xi[\lambda] \tilde{g}(\zeta, V) \\ &\quad + \rho \left(\zeta[r] \tilde{g}(\xi, V) - \xi[r] \tilde{g}(\zeta, V) \right) \\ &\quad + \mu \left(\nabla_{\zeta} (dk \otimes dk)(\xi, V) - \nabla_{\xi} (dk \otimes dk)(\zeta, V) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.54) denklemi ispat biter.

(4.55) denklemi için, (4.53) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 - 2\rho(s-1) \right) \nabla r + \frac{1}{2} \nabla |\nabla k|^2 - (s-1) \nabla \lambda &= (1 - \mu) Ric(\nabla k) \\ - Ric(\nabla k) + \mu \left(r - (s-1)(\lambda + \rho r) \right) \nabla k &+ \mu |\nabla k|^2 \nabla k + (\lambda + \rho r) \nabla k \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}
& \nabla \left(1 - 2\rho(s-1)r + |\nabla k|^2 - 2(s-1)\lambda \right) - 2(\lambda + \rho r)\nabla k \\
&= 2\mu \left([|\nabla k|^2 + r - (s-1)(\lambda + \rho r)\nabla k] - Ric(\nabla k) \right) \\
&= 2\mu \left([|\nabla k|^2 + r - s(\lambda + \rho r)\nabla k + (\lambda + \rho r)]\nabla k - Ric(\nabla k) \right) \\
&= 2\mu \left(|\nabla k|^2 + \mu|\nabla k|^2 - \Delta k + (\lambda + \rho r)\nabla k - Ric(\nabla k) \right) \\
&= 2\mu \left(\nabla_{\nabla k} \nabla k + (|\nabla k|^2 - \Delta k)\nabla k \right)
\end{aligned}$$

olur ve önermenin ispatı tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 4.2.2.2 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \xi, \lambda, \mu)$ bir gradyent η -RB soliton olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler sağlanır:

$$(1 - s\rho)r + \Delta k = s\lambda + \mu|\nabla k|^2, \quad (4.59)$$

$$\left(1 - 2\rho(s-1) \right) \nabla r = 2(1 - \mu)Ric(\nabla k) + 2\mu \left(r - (s-1)(\lambda + \rho r) \right) \nabla k, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla_{\xi} Ric)(\xi, V) - (\nabla_{\xi} Ric)(\zeta, V) - g(R(\xi, \zeta)V, \nabla_f) \\
&= \rho \left((\nabla_{\xi} r)\tilde{g}(\xi, V) - (\nabla_{\xi} r)\tilde{g}(\zeta, V) \right) \\
&+ \mu \left(\nabla_{\xi}(dk \otimes dk)(\xi, V) - \nabla_{\xi}(dk \otimes dk)(\zeta, V) \right) ve
\end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\nabla \left((1 - 2\rho(s-1))r + |\nabla k|^2 - 2\lambda k \right) = 2\rho r \nabla k + 2\mu \left(\nabla_{\nabla k} \nabla k + (|\nabla k|^2 - \Delta k)\nabla k \right) \quad (4.62)$$

dır.

İspat. Önerme 4.2.2.1 ispatında $\nabla \lambda = 0$ alırsak istenen sonuçlar hemen çıkar. $\square$

Lemma 4.2.2.3 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ bir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu

durumda

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-2\rho(s-1)}{2}\right)\Delta r = & -|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}|^2 - \left(\frac{1-s\mu}{s}\right)(\Delta k)^2 - \frac{s}{2}\tilde{g}(\nabla k, \nabla \lambda) \\ & - \frac{s}{2}\rho\tilde{g}(\nabla k, \nabla r) + \left(\frac{1-2\mu}{2}\right)\tilde{g}(\nabla k, \nabla \Delta k) \\ & + \mu \operatorname{div}(\nabla_{\nabla k} \nabla k) + (s-1)\Delta \lambda + \lambda \Delta k + \rho r \Delta k \end{aligned} \quad (4.63)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Önerme 4.2.2.1 deki (4.55) denkleminin diverjansı alınırsa

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1-2\rho(s-1)}{2}\right)\Delta r + \Delta|\nabla k|^2 - (s-1)\Delta \lambda = \lambda \Delta k + \rho r \Delta k \\ & + \mu \left(\tilde{g}(\nabla(|\nabla k|^2 - \Delta k), \nabla k) + (|\nabla k|^2 - \Delta k)\Delta k + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla k} \nabla k) \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}|^2 = |\nabla^2 k|^2 - \frac{1}{s}(\Delta k)^2$ olduğundan, Bochner formülü yardımıyla

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla k|^2 = |\nabla^2 k|^2 + \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) + \tilde{g}(\nabla \Delta k, \nabla k)$$

ve önceki denklemden

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-2\rho(s-1)}{2}\right)\Delta r = & -\operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) - |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}|^2 - \frac{1}{s}(\Delta k)^2 \\ & - \tilde{g}(\nabla \Delta k, \nabla k) + (n-1)\Delta \lambda + \lambda \Delta k + \rho r \Delta k + 2\mu\tilde{g}(\nabla_{\nabla k} \nabla k, \nabla k) \\ & + \mu \left((|\nabla k|^2 - \Delta k)\Delta k - \tilde{g}(\nabla \Delta k, \nabla k) + \operatorname{div}(\nabla_{\nabla k} \nabla k) \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, (4.52) denklemini kullanarak

$$\tilde{g}(\nabla \Delta k, \nabla k) = \tilde{g} \left[\nabla \left(s(\lambda + \rho r) + \mu|\nabla k|^2 - r \right), \nabla k \right]$$

yazabiliriz ve

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1-2\rho(s-1)}{2}\right)\Delta r &= -Ric(\nabla k, \nabla k) - \left|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}\right|^2 - \frac{1+s\mu}{s}(\Delta k)^2 \\
&\quad + (s-1)\Delta\lambda - \tilde{g}(\nabla(\mu|\nabla k|^2 - r + (\lambda + \rho r)s), \nabla k) \\
&\quad + 2\mu\tilde{g}(\nabla_{\nabla k}\nabla k, \nabla k) + \lambda\Delta k + \rho r\Delta k \\
&\quad + \mu\left(|\nabla k|^2\Delta k - \tilde{g}(\nabla\Delta k, \nabla k) + div(\nabla_{\nabla k}\nabla k)\right) \\
&= -\left(Ric(\nabla k, \nabla f) + (s-1)\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k)\right) - \left|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}\right|^2 \\
&\quad - \frac{1+s\mu}{s}(\Delta k)^2 + (s-1)\Delta\lambda + (\lambda + \rho r)\Delta k + \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \\
&\quad - n\rho\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + \rho\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \\
&\quad + \mu\left(|\nabla k|^2\Delta k\right)\tilde{g}(\nabla\Delta k, \nabla k) + div(\nabla_{\nabla k}\nabla k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, bu denklem ile (4.53) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1-2\rho(s-1)}{2}\right)\Delta r \\
&= \frac{1}{2}g(\nabla r, \nabla k) - \left|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}\right|^2 - \frac{1+s\mu}{s}(\Delta k)^2 + (s-1)\Delta\lambda \\
&\quad + (\lambda + \rho r)\Delta k + \frac{\mu}{2}\tilde{g}(\nabla|\nabla k|^2, \nabla k) + \mu\left[-\tilde{g}(\nabla\Delta k, \nabla k) + div(\nabla_{\nabla k}\nabla k)\right] \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) - \left|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}\right|^2 - \frac{1+s\mu}{s}(\Delta k)^2 + (s-1)\Delta\lambda \\
&\quad + (\lambda + \rho r)\Delta k + \mu\left(\tilde{g}(\nabla_{\nabla k}\nabla k, \nabla k) - \tilde{g}(\nabla\Delta f, \nabla k) + div(\nabla_{\nabla k}\nabla k)\right) \\
&= \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) - \left|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s}\tilde{g}\right|^2 - \frac{1+s\mu}{s}(\Delta k)^2 + (s-1)\Delta\lambda \\
&\quad + (\lambda + \rho r)\Delta k + \frac{1}{2}\tilde{g}(\nabla k, \nabla\Delta k) - \frac{s}{2}\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) \\
&\quad - \frac{s\rho}{2}\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) - \mu\tilde{g}(\nabla\Delta k, \nabla k) + \mu div(\nabla_{\nabla k}\nabla k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\nabla_{\nabla k}\nabla k = \frac{1}{2}\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + \frac{1}{2}\tilde{g}(\nabla\Delta k, \nabla k) - \frac{s}{2}\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) - \frac{s\rho}{2}\tilde{g}(\nabla r, \nabla k)$$

olduğundan, bu denklemi yukarıdaki formülde yerine koyarak 4.63 elde edilir. $\square$

Bu lemmanın bir sonucu olarak, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.2.4 $(\tilde{F}, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ bir kompakt, yönlendirilebilir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu durumda

1. $\int_{\tilde{F}} \left(\rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + \tilde{g}(\nabla k, \nabla \lambda) \right) dV \geq 0$ ise, $\tilde{F}^s$ aşıkâr;
2. $\int_{\tilde{F}} \left| \nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g} \right|^2 d\mu = -\frac{s+2}{2s} \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla k, \nabla r) + \mu \Delta k |\nabla k|^2 \right) dV$

gerçeklenir.

İspat. $\tilde{F}^s$ kompakt ve yönlendirilebilir olduğundan, Lemma 4.2.2.3 ve Stokes formülünü kullanarak

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} \left| \nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g} \right|^2 dV &= -\left(\frac{1+s\mu}{s} \right) \int_{\tilde{F}} (\Delta k)^2 dV - \left(\frac{1-2\mu}{2} \right) \int_{\tilde{F}} (\Delta k)^2 dV \\ &\quad - \frac{s}{2} \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) dV \right) \\ &\quad - \rho \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla k, \nabla r) dV - \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) dV \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_{\tilde{F}} \left(\left| \nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g} \right|^2 + \left(\frac{s+2}{2s} \right) (\Delta k)^2 \right) dV = -\left(\frac{s+2}{2} \right) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV \quad (4.64)$$

bulunur. Bu durumda

$$\int_{\tilde{F}} \left(\rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + \tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) \right) dV \geq 0$$

elde edilir, yani r ve λ sabittir. Böylece 1. ifadeden

$$\int_{\tilde{F}} \left(\left| \nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g} \right|^2 + \left(\frac{s+2}{2s} \right) (\Delta k)^2 \right) dV = 0$$

çıkar. Bu durumda $\nabla^2 k = \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}$ ve $\Delta k = 0$ elde edilir, yani k sabittir, böylece $\tilde{F}^s$ aşıkâr. O halde İlk ifade kanıtlanmış olur.

İkinci ifade için, (4.52) denkleminde

$$\int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla k, \nabla \lambda) dV = \frac{1}{s} \int_{\tilde{F}} \tilde{g} \left(\nabla k, \nabla [(1 - s\rho)r + \Delta k - \mu |\nabla k|^2] \right) dV$$

elde edilir. Bu durumda, (4.64) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} \left(|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 + \left(\frac{s+2}{2s} \right) (\Delta k)^2 \right) dV &= -\frac{s+2}{2s} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla k, \nabla r) dV \\ &+ \frac{s+2}{2s} \int_{\tilde{F}} (\Delta k)^2 dV \\ &+ \frac{\mu(s+2)}{2} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla k, \nabla |\nabla k|^2) dV \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, direkt bir hesap ve Stokes formülü ile

$$\int_{\tilde{F}} |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 dV = -\frac{s+2}{2s} \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla k, \nabla r) + \mu \Delta k |\nabla k|^2 \right) dV$$

buluruz. Böylece ispat biter. $\square$

ξ bir $\tilde{F}^s$ kompakt, yönlendirilebilir Riemann manifoldu üzerinde bir konformal vektör alanı olsun. Bu durumda Teorem 2.1.28 olduğu için, $\int_{\tilde{F}} \xi_{\xi} r dV = \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\xi, \nabla r) dV = 0$ dır ve $\tilde{F}^s$ kompakt olduğu için $\int_{\tilde{F}} |\xi|^2 \text{div} \xi dV = 0$ dır. Böylece, Teorem 4.2.2.4 den aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.2.2.5 ($\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu$) bir kompakt, yönlendirilebilir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun.

1. Eğer $s \geq 3$, $\int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla k, \nabla r) dV = 0$ ve $\int_{\tilde{F}} \Delta k |\nabla k|^2 dV = 0$ ise, bu durumda ∇k bir konformal vektör alanıdır.
2. Eğer $s = 2$ ve $\int_{\tilde{F}} \Delta k |\nabla k|^2 dV = 0$ ise, bu durumda k bir sabittir.

İspat. Teorem 4.2.2.4 ün son ifadesini kullanarak, $\nabla^2 k = \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}$ elde ederiz, bu durumda ∇k bir konformal vektör alanı olur. Dolayısıyla ilk ifadeyi kanıtlanmış oluruz. Ayrıca $s = 2$ ve $\int_{\tilde{F}} \Delta k |\nabla k|^2 dV = 0$, varsayıldığında, k fonksiyonu sabit olduğu sonucu çıkar. $\square$

4.2.3. Gradyent hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlarının karakterizasyonu

Bu alt bölümde, gradyent hemen hemen η -RB soliton için karakterizasyonlar verilecektir.

(4.30) denkleminde aşağıdaki sonucu veriyoruz.

Önerme 4.2.3.1 *Eğer $u = e^{-\mu k}$ bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ gradyent hemen hemen η -RB soliton üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon ise, bu durumda $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ gradyent hemen hemen $(-\frac{1}{\mu u})$ -RB soliton olur.*

(4.30) denkleminde $\rho = \frac{1}{s}$ alırsak bu durumda *gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton* elde edilir. Ayrıca (4.30) denklemini

$$Ric - \frac{\nabla^2 u}{\mu u} = (\lambda + \frac{r}{s})\tilde{g} \quad (4.65)$$

şeklinde yazabiliriz.

İlerlemeden önce aşağıdaki örnekleri veriyoruz.

Örnek. Bir $(\mathbb{S}^n, g_0)$, $(n \geq 2)$ standart birim küre ve $(\mathbb{S}^n, g_0)$ üzerinde bir k fonksiyonu olmak üzere

$$k = -\frac{1}{\mu} \ln \left(\varphi - \frac{h_v}{n} \right) \quad (4.66)$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\varphi \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ aralığında yer alan bir reel parametredir, $v \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ birim vektörüne göre h_v fonksiyonu bir yükseklik fonksiyonudur. $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^{n+1}$ içinde hiperyüzeydir ve $h_v : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h_v(x) = \langle x, v \rangle$ şeklinde tanımladır.

Örnek. $\mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle_0 = -1, x_1 > 0$ bir hiperbolik uzay olsun. Burada $\mathbb{R}^{n+1}, \langle x, x \rangle_0 = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2$ iç çarpımı ile donatılmış bir $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayıdır. Şimdi $\mathbb{S}^n$ de kullanılan argümanı takip edelim. İlk olarak, $v \in \mathbb{H}^n(-1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bir vektör ve aşağıdaki biçimde tanımlanan h_v yükseklik fonksiyonunu ele alalım.

Örnek. Bir $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $(n \geq 2)$ Öklid uzayı ve $f(\mathbb{R}^n, g_0)$ üzerinde bir fonksiyonu olmak üzere

$$k = -\frac{1}{\mu} \ln(\phi + |x|^2) \quad (4.67)$$

şekilinde tanımlansın. Burada ϕ pozitif bir reel parametredir ve $|x|$, x in Öklidyen normudur.

Aşağıdaki teoremlerin Önerme 4.2.3.1 ve yukardaki örneklerden motive edildiğine işaret ediyoruz.

Teorem 4.2.3.2 $(\mathbb{S}^n(1), g_0)$, $(n \geq 2)$ potansiyel fonksiyonu $k = -\frac{1}{\mu} \ln(\phi - \frac{h_v}{n})$, $(\mu > 0)$ olan bir gradyent hemen hemen η -RB solitona izin veren bir standart Öklidyen küre olsun, burada $u = e^{-\mu k} = \phi - \frac{h_v}{n}$ ve $\phi \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ dur. Bu durumda $(\mathbb{S}^n(1), g_0, \nabla u, \lambda, \mu)$ daralan gradyent hemen hemen sıfır izli- $(-\frac{1}{\mu u})$ Ricci solitondur.

İspat. f in diferansiyelini alıp ve $\nabla^2 h_v = -h_v g_0$ eşitliğini kullanarak $dk = \frac{dh_v}{\mu(n\phi - h_v)}$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \nabla^2 k &= \nabla dk = \frac{\nabla dh_v}{\mu(n\phi - h_v)} + d\left(\frac{1}{\mu(n\phi - h_v)^2}\right) \otimes dh_v \\ &= \frac{\nabla^2 h_v}{\mu(n\phi - h_v)} + \frac{dh_v \otimes dh_v}{\mu(n\phi - h_v)^2} \\ &= -\frac{h_v}{\mu(n\phi - h_v)} g_0 + \frac{dh_v \otimes dh_v}{\mu(n\phi - h_v)^2} \end{aligned}$$

buluruz. Bu son denklem ve (4.29) den

$$-\frac{\nabla^2 u}{\mu u} = \nabla^2 k - \mu dk \otimes dk = -\frac{h_v}{\mu(n\phi - h_v)} g_0$$

elde dilir. $Ric = (n-1)g_0$ olduğundan, (4.29) denklemi

$$Ric - \frac{\nabla^2 u}{\mu u} = \left((n-1) - \frac{h_v}{\mu(n\phi - h_v)} \right) g_0 = (\lambda + \rho r) g_0 \quad (4.68)$$

şeklinde yazabilir, burada $\lambda = (n-1) - \frac{1}{\mu}(\frac{\phi-u}{u}) - \rho r$. Böylece $\rho = \frac{1}{n}$ ve $r = n(n-1)$ ise bu durumda $\lambda = -\frac{1}{\mu}(\frac{\phi-u}{u}) > 0$ olur ve ispat biter. $\square$

Teorem 4.2.3.3 $(\mathbb{H}^n(-1), g_0)$, $(n \geq 2)$ potansiyel fonksiyonu $k = -\frac{1}{\mu} \ln(\phi + \frac{h_v}{n})$, $(\mu > 0)$ olan bir gradyent hemen hemen η -RB solitona izin veren bir standart hiperbolik uzay olsun,

burada $u = e^{-\mu k} = \phi + \frac{h_v}{n}$ ve $\phi \in (\frac{1}{n}, +\infty)$ dur. Bu durumda $(\mathbb{H}^n(-1), g_0, \nabla u, \lambda, \mu)$ genişleyen gradyent hemen hemen sıfır izli- $(-\frac{1}{\mu u})$ Ricci solitondur.

İspat. Teorem 4.2.3.2 gibi bu teoremi kanıtlıyoruz. Direkt olarak $\nabla^2 h_v = h_v g_0$ eşitliğini alırsak ve $Ric = -(n-1)g_0$ olduğu için, bu durumda (4.29) denklemi

$$Ric - \frac{\nabla^2 u}{\mu u} = \left(-(n-1) - \frac{h_v}{\mu(n\phi - h_v)} \right) g_0 = (\lambda + \rho r) g_0 \quad (4.69)$$

biçiminde yazabiliriz, burada $\lambda = -(n-1) - \frac{1}{\mu}(\frac{u-\phi}{u}) - \rho r$. Böylece $\rho = \frac{1}{n}$ ve $r = -n(n-1)$ ise bu durumda $\lambda = -\frac{1}{\mu}(\frac{u-\phi}{u}) < 0$ ve istenen sonuç çıkar. $\square$

Teorem 4.2.3.4 $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $(n \geq 2)$ potansiyel fonksiyonu $k = -\frac{1}{\mu} \ln(\phi + |x|^2)$, $(\mu > 0)$ olan bir gradyent hemen hemen η -RB solitona izin veren bir standart Öklid uzay olsun, burada $u = e^{-\mu k} = \phi + |x|^2$ dur. Bu durumda $(\mathbb{R}^n, g_0, \nabla u, \lambda, \mu)$ genişleyen gradyent hemen hemen sıfır izli- $(-\frac{1}{\mu u})$ Ricci solitondur.

İspat. $\nabla^2 |x|^2 = 2g_0$ olduğunu hatırlırsak ve Teorem 4.2.3.2 deki gibi basit bir hesaplama ile

$$Ric - \frac{\nabla^2 u}{\mu u} = -\frac{2}{\mu u} g_0 = (\lambda + \rho r) g_0$$

elde edilir, burada $\lambda = -\frac{2}{\mu u} - \rho r$. Öklid uzayının Ricci tensörü düz olduğundan, skaler eğriliği $r = 0$ ve $\lambda = -\frac{2}{\mu u} < 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Bu alt bölümün kalanında potansiyel f fonksiyonu Teorem (4.2.3.2), Teorem (4.2.3.3) ve Teorem (4.2.3.4) deki gibi verilen gradyent hemen hemen η -RB solitonu gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ - Ricci soliton olarak adlandırıyoruz.

$u = e^{-\mu k}$ alırsak, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 4.2.3.5 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla u, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ triviyal olmayan bir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Eğer $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ bir Einstein manifoldu ise, bu durumda u fonksiyonu

$$\nabla^2 u = (-ku + b)\tilde{g} \quad (4.70)$$

eşitliği gerçekleşir, burada $k = -\frac{r}{s(s-1)}$ ve $b = c\mu$ sabit sayılardır.

İspat. $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$, $(s \geq 3)$ bir Einstein manifoldu olduğundan, $Ric = \frac{r}{s}\tilde{g}$ dir. (4.29) denkleminde

$$\nabla^2 u = \mu \left(\frac{r}{s}u - \rho r u - \lambda u \right) \tilde{g} \quad (4.71)$$

elde edilir. Dolayısıyla (2.45) denkleminde

$$Ric(\nabla u) + \nabla \Delta u = \mu \frac{r}{s} \nabla u - \mu \rho r \nabla u - \mu \nabla(\lambda u) \quad (4.72)$$

çıkar. Böylece

$$\frac{r}{s} \nabla u + \nabla \Delta u = \mu \frac{r}{s} \nabla u - \mu \rho r \nabla u - \mu \nabla(\lambda u) \quad (4.73)$$

elde edilir. (4.29) denklemi yardımıyla

$$\Delta u = \mu r \nabla u - s \mu \rho r \nabla u - \mu \nabla(\lambda u) \quad (4.74)$$

buluruz. (4.74) denklemini (4.73) denkleminde yerine koyarsak

$$\nabla(\lambda u) = r \frac{(1 + \mu s - \mu)}{\mu s(s-1)} \nabla u - \rho r \nabla u \quad (4.75)$$

elde edilir. Böylece $\lambda u = r \frac{(1 + \mu s - \mu)}{\mu s(s-1)} u - \rho r u - c$ olur, burada c sabittir. λu değerini (4.71) denkleminde koyarsak, istenen sonucu çıkar. $\square$

Şimdi gradyent hemen hemen η -RB solitonlar için bir genellemesi verelim.

Teorem 4.2.3.6 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla u, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton olsun. ∇u aşikâr olmayan bir konformal vektör alanıysa, aşağıdakiler geçerlidir

- (i) Eğer soliton pozitif skaler eğrilikli bir daralan soliton ise, bu durumda $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{S}^n$ standart küresine izometriktir.
- (ii) Eğer soliton negatif skaler eğrilikli ve u fonksiyonu sadece bir kritik noktası olan genişleyen bir soliton ise, bu durumda $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{H}^n$ standart hiperbolik uzaya izometriktir.
- (iii) Eğer soliton sıfır skaler eğrilikli genişleyen bir soliton ise, bu durumda $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayına izometriktir.

İspat. $\nabla u, \psi : \tilde{F} \rightarrow \mathbb{R}$, potansiyel fonksiyonuna sahip bir konformal vektör alanı olduğundan, $\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u}\tilde{g} = \nabla^2 u = \frac{\Delta u}{s}\tilde{g}$. Böylece $\tilde{F}^s$ Einstein manifoldudur. Bu nedenle (4.29) denkleminde

$$Ric = \left((\lambda + \rho r) + \frac{\Delta u}{su\mu} \right) \tilde{g}$$

elde edilir. $s \geq 3$ için Schur Lemma'sını 2.1.7 kullanarak, $r = \frac{s\lambda}{1-s\rho} + \frac{\Delta u}{u\mu(1-s\rho)}$ sabittir. Böylece, $\tilde{F}^s$ ın bir uzay formu olduğu sonucunu çıkarmak için Teorem 2.3.5 kullanabiliriz.

Eğer r pozitif ise, $\tilde{F}^s$ nin bir $\mathbb{S}^n$ standart küresine izometrik olduğunu varsayabiliriz. $r = n(n-1)$ olduğundan Lemma 4.2.3.5 den $\Delta u + su = ks$ sonucunu çıkarırız, burada k bir sabittir. O zaman u , $\mathbb{S}^n$ üzerindeki Laplasyenin bir ilk özvektörünü olur. Dolayısıyla, $u = h_v(x) = \langle x, v \rangle + k$ eşitliğine sahip oluruz, burada v , $\mathbb{R}^{n+1}$ deki birim vektörlerin bir lineer kombinasyonudur. Buradan, f (4.66) yı gerçekler.

Eğer $r < 0$ ise, bu durumda bir $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayına izometriktir u Theorem 2.3.5 den $\tilde{F}^s$, u için bir tek kritik noktaya sahip olduğumuzdan. Şimdi, $\tilde{F}^s$ nin $\mathbb{H}^n(-1)$ uzayına izometrik olduğunu kullanarak Bu durumda $\langle x, v \rangle_0 = -\cosh \eta(x, v)$ olduğunu, burada $\eta(x, v)$, x ile v arasındaki zaman-benzeri açıdır. Theorem 2.3.5 deki yöntemi $v \in \mathbb{H}^n(-1)$ (aslında onlar arasındaki jeodesik uzaklıktır.)

Son olarak, eğer $r = 0$ ise, (4.75) nedeniyle $c \neq 0$ dır. Bu durumda, $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayına izometriktir. Yine Lemma 4.2.3.5 i kullanarak $\Delta u = k$ elde ederiz, burada k bir sabittir. $u > 0$ olması gerektiğinden, uygun bir koordinat değişimi ile $u(x) = |x|^2 + \phi$, $\phi > 0$ sonucunu çıkarırız. Böylece ispat biter. $\square$

Aşağıdaki sonuç, hemen hemen Ricci solitonlar için bir genelleştirilmedir.

Lemma 4.2.3.7 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$ bir gradyent hemen hemen η -RB soliton olsun. Bu durumda

$$\Delta|\nabla k|^2 = 2|\nabla^2 k|^2 - 2Ric(\nabla k, \nabla k) + 4\mu|\nabla k|^2\Delta k - 2(s-2)\left(\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) + 2\rho\tilde{g}(\nabla r, \nabla k)\right) \quad (4.76)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. (2.63) denkleminin diverjansını alarak

$$dr + 2\operatorname{div}(\nabla^2 k) = 2d\lambda + 2\rho dr + 2\mu\Delta k\nabla k + 2\mu\nabla_{\nabla k}\nabla k \quad (4.77)$$

elde edilir. Buradan

$$2\operatorname{div}(\nabla^2 k)(\nabla k) = -\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + 2\mu\Delta k|\nabla k|^2 + 2\mu\tilde{g}(\nabla_{\nabla k}\nabla k, \nabla k) \quad (4.78)$$

$$+ 2\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) + 2\rho\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \quad (4.79)$$

çıkar. Sonra (2.38), (2.44) ve (4.78) denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\nabla k|^2 &= |\nabla^2 k|^2 - \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) + 2\mu|\nabla k|^2\Delta k - (s-2)\tilde{g}(\nabla\lambda, \nabla k) \\ &\quad - \rho(s-2)\tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \end{aligned} \quad (4.80)$$

elde edilir ve ispat biter. $\square$

Lemma 4.2.3.8 ∇k bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g})$ Riemannian manifoldu üzerinde bir gradyent konformal vektör alanı olsun. Eğer $\tilde{F}^s$ kompakt ise,

$$\int_{\tilde{F}} |\nabla k|^2 \Delta k dV = 0 \quad (4.81)$$

denklemini gerçekenir.

İspat. ∇k gradyent konformal vektör alanı olduğundan, $\tilde{F}$ üzerinde öyle bir düzgün ψ fonksiyonu vardır ki

$$\mathcal{L}_{\nabla k}\tilde{g} = 2\psi\tilde{g} \quad (4.82)$$

olur. (4.82) denkleminin izini alırsak

$$\psi = \frac{1}{s}\operatorname{div}\nabla k$$

elde edilir. Böylece

$$|\nabla k|^2 \operatorname{div}\nabla k = s\tilde{g}(\nabla_{\nabla k}\nabla k, \nabla k) \quad (4.83)$$

elde ederiz. Buradan

$$\operatorname{div}(\nabla k |\nabla k|^2) = |\nabla k|^2 \operatorname{div} \nabla k + 2\tilde{g}(\nabla_{\nabla k} \nabla k, \nabla k) = \frac{s+2}{s} |\nabla k|^2 \Delta k$$

elde edilir. Stokes formülünü kullanarak

$$\int_{\tilde{F}} |\nabla k|^2 \Delta k dV = 0 \quad (4.84)$$

çıkar. Böylece ispat biter. $\square$

Bir sonraki teorem, Ricci solitonlarının, hemen hemen Ricci solitonlarının ve Einstein manifoldlarının bir genelleştirilmesidir.

Teorem 4.2.3.9 *Bir $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla k, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ kompakt, yönlendirebilir ve sınırı olmayan gradyent hemen hemen η -RB soliton için*

1. ∇k konformal ve

$$\int_{\tilde{F}} \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) dV \leq -(s-2) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV.$$

2. $|\nabla f|$ sabit ve

$$\int_{\tilde{F}} \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) dV \leq -(s-2) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV.$$

3. $r \geq \frac{\lambda s}{1-s\rho}$ or $r \leq \frac{\lambda s}{1-s\rho}$.

koşulları sağlanıyorsa, $\tilde{F}^s$ bir Einstein manifoldtur.

İspat. Lemma 4.2.3.7 nin (4.76) denklemini integre ederek

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{F}} \Delta |\nabla k|^2 dV &= \int_{\tilde{F}} |\nabla^2 k|^2 dV - \int_{\tilde{F}} \operatorname{Ric}(\nabla k, \nabla k) d\mu + \int_{\tilde{F}} 2\mu |\nabla k|^2 \Delta k dV \\ &\quad - (s-2) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV \end{aligned} \quad (4.85)$$

elde edilir. $\tilde{F}$ kompakt ve ∇k konformal bir vektör alanı olduğundan, Lemma 4.2.3.8 den

$$\int_{\tilde{F}} |\nabla^2 k|^2 dV = \int_{\tilde{F}} Ric(\nabla k, \nabla k) dV + (s-2) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV \quad (4.86)$$

elde edilir. Böylece, (4.86) denkleminin sağ tarafının sıfırdan küçük veya sıfıra eşit olduğunu varsaydığımız için, $\nabla^2 k = 0$ elde ederiz. Buradan da $\Delta k = 0$ çıkar. Hopf un teoremi 2.1.20 ile k in sabit olduğunu buluruz.

İkinci iddia için, eğer $|\nabla k|$ sabitse, direkt Stokes formülünü (4.85) denklemine uygulayarak

$$\int_{\tilde{F}} |\nabla^2 k|^2 dV = \int_{\tilde{F}} Ric(\nabla k, \nabla k) dV + (s-2) \int_{\tilde{F}} \left(\tilde{g}(\nabla \lambda, \nabla k) + \rho \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) \right) dV \quad (4.87)$$

elde edilir. Böylece ikinci iddia tamamlanır.

Ayrıca, (4.29) denkleminin izini alarak $div(\nabla u) = \mu u((1-s\rho)r - s\lambda)$ elde ederiz. Böylece μu pozitifdir ve $(1-s\rho)r - s\lambda \leq 0 (\geq 0)$ dır. $\tilde{F}^s$ kompakt, bağlantılı, yönlendirebilir ve sınırı olmayan olduğundan, u un sabit olduğu sonucuna varmak için Hopf teoremini 2.1.20 kullanabiliriz, k in sabit olduğu anlamına gelir ve ispat biter. $\square$

Şimdi, bir kompakt gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton için integral formülleri vereceğiz. Bu formülleri aslında bir hemen hemen h -Ricci solitonlar için verilen integral formüllerinin genelleştirilmesidir.

Gradyent hemen hemen η -RB soliton için klasik tensör hesabı teorisini kullanarak, (4.29) denklemi

$$R_{ab} - \frac{\nabla_a \nabla_b u}{\mu u} = (\lambda + \rho r) \tilde{g}_{ab} \quad (4.88)$$

şeklinde verilebilir.

Önerme 4.2.3.10 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla u, \lambda, \mu)$ bir gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton olsun. Bu durumda

$$\frac{\Delta u}{\mu u} = -s\lambda, \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2-s}{s}\right) \nabla_a r = & -\frac{2}{\mu u} R_{ab} \nabla^b u + 2(s-1) \nabla_a \lambda + 2 \nabla_a \left(\frac{1}{\mu u}\right) \Delta u \\ & - 2 \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u}\right) \nabla_a \nabla_b u, \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2-s}{s}\right) \nabla r + \frac{1}{(\mu u)^2} \nabla |\nabla u|^2 = & -\frac{2}{\mu u} \left(\lambda + \frac{r}{s}\right) \nabla u + 2(s-1) \nabla \lambda \\ & + 2 \nabla \left(\frac{1}{\mu u}\right) \Delta u - 2 \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u}\right) \nabla_a \nabla_b u \end{aligned} \quad (4.91)$$

formülleri geçerlidir.

İspat. (4.88) denkleminin izini alarak ve $\rho = \frac{1}{s}$ ve (4.89) denklemini elde edilir.

(4.90) denklemini için, $2 \operatorname{div} Ric = dr$ ve (4.88) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla_a r &= \operatorname{div} Ric_{ab} \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c R_{ab} \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \nabla_a \nabla_b u + \lambda \tilde{g}_{ab} + \rho r \tilde{g}_{ab} \right) \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u + \frac{1}{\mu u} \tilde{g}^{bc} \nabla_b \nabla_a \nabla_b u + \tilde{g}^{bc} (\nabla_c \lambda) \tilde{g}_{ab} + \rho \tilde{g}^{bc} (\nabla_c r) \tilde{g}_{ab} \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u + \frac{1}{\mu u} \tilde{g}^{bc} \nabla_c \nabla_i \nabla_b u + \frac{1}{\mu u} \tilde{g}^{bc} R_{cabs} \nabla^s u + \nabla_a \lambda + \rho \nabla_a r \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u + \frac{1}{\mu u} \nabla_a \Delta u + \frac{1}{\mu u} R_{as} \nabla^s k + \nabla_a \lambda + \rho \nabla_a r \\ &= \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u + (1 + \rho(1-s)) \nabla_a r + (1-s) \nabla_a \lambda - \nabla_a \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta u \\ &\quad + \frac{1}{\mu u} R_{as} \nabla^s u. \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (4.90) denklemini çıkar. (4.90) denkleminde ve $\nabla |\nabla u|^2 = 2 \nabla_{\nabla u} \nabla u$ ve

$\frac{1}{\mu u} \nabla_{\nabla u} \nabla u = -(\lambda + \rho r) \nabla u + Ric(\nabla u)$ kullanarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{2-s}{2s} \right) \nabla r + \frac{1}{2(\mu u)^2} \nabla |\nabla u|^2 &= -\frac{1}{\mu u} Ric(\nabla u) + \frac{1}{(\mu u)^2} \nabla_{\nabla u} \nabla u + (s-1) \nabla \lambda \\ &\quad + \nabla \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta u - \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u \\ &= -\frac{1}{\mu u} (\lambda + \rho r) \nabla u + (s-1) \nabla \lambda \\ &\quad + \nabla \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta u - \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b u \end{aligned}$$

elde edilir, yani (4.91) çıkar. $\square$

Teorem 4.2.3.11 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla u, \lambda, \mu)$ bir kompakt gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\omega u})$ -Ricci soliton olsun. Bu durumda

$$\int_{\tilde{F}} \frac{1}{\mu u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{s} \tilde{g}|^2 dV = \frac{2-s}{2s} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla r, \nabla u) dV, \quad (4.92)$$

ya da

$$\int_{\tilde{F}} |Ric - \frac{r}{s} \tilde{g}|^2 dV = \frac{2-s}{2s} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla r, \nabla u) dV \quad (4.93)$$

eşitlikleri gerçekleşir.

İspat. Lemma 2.1.29 in kullanarak

$$div(Ric(\nabla k)) = (div Ric)(\nabla k) + \langle \nabla^2 k, Ric \rangle \quad (4.94)$$

elde edilir. (4.88) denkleminin, ikinci Bianchi özdeşliği ve $|\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 = |\nabla^2 k|^2 - \frac{(\Delta k)^2}{s} \tilde{g}$ kullanarak

$$\begin{aligned} div(Ric(\nabla k)) &= \frac{1}{2} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + (\lambda + \rho r) \Delta k + \frac{1}{\mu u} |\nabla^2 k|^2 \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + (\lambda + \rho r) \Delta k + \frac{1}{\mu u} |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 + \frac{(\Delta k)^2}{s \mu u} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) + \frac{r}{s} \Delta k + \frac{1}{\mu u} |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 \end{aligned} \quad (4.95)$$

elde edilir. Böylece, Önerme 4.2.3.10'in (4.90) denklemini kullanarak

$$\frac{1}{\mu u} Ric(\nabla k) = \left(\frac{s-2}{2s} \right) \nabla r + (s-1) \nabla \lambda + \nabla \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta k - \tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b k$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu u} div Ric(\nabla k) &= \left(\frac{s-2}{2n} \right) \Delta r + (s-1) \Delta \lambda + \Delta \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta k \\ &\quad - div(\tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b k) \end{aligned} \quad (4.96)$$

elde edilir. (4.95) denklemi ve (4.96) denklemiyle birleştirerek

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mu u)^2} |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 &= \left(\frac{s-2}{2s} \right) \Delta r + (s-1) \Delta \lambda + \Delta k \left(\frac{1}{\mu u} \right) \Delta k \\ &\quad - \frac{1}{2\mu u} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) - \frac{r \Delta k}{s \mu u} - div(\tilde{g}^{bc} \nabla_c \left(\frac{1}{\mu u} \right) \nabla_a \nabla_b k) \end{aligned} \quad (4.97)$$

elde edilir. (4.97) denkleminin her iki tarafını da integral alarak

$$\int_{\tilde{F}} \frac{1}{(\mu u)^2} |\nabla^2 k - \frac{\Delta k}{s} \tilde{g}|^2 d\mu = -\frac{1}{2\mu u} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) dV - \frac{1}{s \mu u} \int_{\tilde{F}} r \Delta k dV \quad (4.98)$$

elde edilir. $\tilde{F}^s$ kompakt ve $\int_{\tilde{F}} r \Delta k dV = -\int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla r, \nabla k) dV$ olduğu için (4.98) denkleminde k yi u ile değiştirerek

$$\int_{\tilde{F}} \frac{1}{\mu u} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{s} \tilde{g}|^2 dV = \frac{2-s}{2s} \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla u, \nabla r) dV \quad (4.99)$$

elde edilir.

(2.37) denkleminde

$$\begin{aligned} Ric - \frac{r}{s} \tilde{g} &= \frac{1}{\mu u} \nabla^2 u + (\lambda + \rho r - \frac{r}{s} \tilde{g}) \\ &= \frac{1}{\mu u} (\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{s} \tilde{g}) \end{aligned} \quad (4.100)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır □

Önceki teoremin bir kompakt gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton için aşağıdaki sonucu veriyoruz.

Sonuç 4.2.3.12 $(\tilde{F}^s, \tilde{g}, \nabla u, \lambda, \mu)$, $(s \geq 3)$ bir triviyal olmayan kompakt gradyent hemen hemen sıfır izli $(-\frac{1}{\mu u})$ -Ricci soliton olsun. Bu durumda $\tilde{F}^s$ bir $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine izometriktir, eğer Aşağıdaki koşullardan biri geçerliyse

(1) $\tilde{F}^s$ sabit skaler eğriliğe sahiptir,

$$(2) \quad \int_{\tilde{F}} \tilde{g}(\nabla r, \nabla u) dV \geq 0,$$

(3) $\tilde{F}^s$ bir homojen manifoldtur.

İspat. Sonuç 4.2.3.12 iddialarından herhangi birinin $\int_{\tilde{F}} |\nabla^2 u - \frac{\Delta u}{s} \tilde{g}|^2 dV = 0$ yazmamıza izin verdiğine dikkat edin. Dolayısıyla $Ric = \frac{r}{s} \tilde{g}$ olduğunu çıkar. Şimdi (4.29) denklemden

$$\nabla^2 u = \mu u \left(r \left(\frac{1}{s} - \rho \right) - \lambda \right) \tilde{g} \quad (4.101)$$

elde edilir, ∇u nin triviyal olmayan bir konformal vektör alanı olduğunu ima eder. Böylece Teorem 4.2.1.4 den $\tilde{F}^s$ nin bir $\mathbb{S}^n$ Öklidyen küresine, izometrikir. $\square$

4.3. KENMOTSU MANIFOLDLAR ÜZERİNDE η -RİCCI-BOURGUIGNON SOLİTONLARI

Bu alt bölümde Kenmotsu manifoldlar üzerinde η -RB solitonlar verilecektir.

$(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}^{2s+1}, \hat{g}, \xi, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. Bu durumda herhangi L ve Z vektör alanları için

$$\hat{Ric}^*(L, Z) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \hat{g})(L, Z) = (\lambda + \rho \hat{r}^*) \hat{g}(L, Z) \quad (4.102)$$

sahibiz. (2.70) denklemini (4.102) denkleminde kullanırsak

$$\hat{Ric}(L, Z) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \hat{g})(L, Z) + (2s-1)\hat{g}(L, Z) + \eta(L)\eta(Z) = (\lambda + \rho \hat{r}^*) \hat{g}(L, Z) \quad (4.103)$$

elde edilir. Daha sonra (2.70) denklemin izini alırsak

$$\hat{r}^* = \hat{r} + 4s^2 \quad (4.104)$$

denklemini elde ediiir, burada r^* , $\hat{K}^{2s+1}$ üzerinde $*$ -skaler eğriliğidir. Böylece, (4.103) denklemini basitleştirerek ve (4.104) denklemini kullanarak

$$\hat{Ric}(L, Z) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \hat{g})(L, Z) = \left(\lambda + \rho(\hat{r} + 4s^2) - 2s + 1 \right) \hat{g}(L, Z) - \eta(L)\eta(Z) \quad (4.105)$$

buluruz. Buradan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.3.1 $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}, \hat{g}, \xi, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. Bu durumda hemen hemen $*$ -RB soliton, yapısı $\Omega = \lambda + 2s(2sp - 1) + 1$ ve $\mu = -1$ koşulları ile $(\hat{K}^{2s+1}, \hat{g}, \xi, \Omega, \mu)$ bir hemen hemen η -RB soliton olur.

Önceki teoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 4.3.2 $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}, \hat{g}, \zeta, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. Bu durumda hemen hemen $*$ -RB soliton bir Einstein manifolduna indirgenir.

İspat. (2.64) denklemini kullanarak, $\mathcal{L}_\zeta \hat{g} = 2\hat{g} - 2\eta \otimes \eta$ elde edilir. Buradan (4.105) denklemden

$$\hat{Ric}(L, Z) = \left(\lambda + \rho\hat{r}^* - 2s \right) \hat{g}(L, Z) \quad (4.106)$$

bulunur. (4.104) denklemden

$$\hat{Ric}(L, Z) = \left(\lambda + \rho(\hat{r} + 4s^2) - 2s \right) \hat{g}(L, Z) \quad (4.107)$$

elde edilir ve ispat biter. □

Şimdi (4.107) denkleminde $Z = \zeta$ alarak ve (2.66) denklemini kullanarak

$$\lambda = -\rho(\hat{r} + 4s^2) = -\rho\hat{r}^* \quad \text{ve} \quad \hat{r} = -\frac{\lambda}{\rho} + 4s^2 \quad (4.108)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.3.3 $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}, \hat{g}, \zeta, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. Eğer $\rho \hat{r}^*$ negatif, $\rho \hat{r}^*$ sıfır ve $\rho \hat{r}^*$ pozitif koşulları sağlanırsa, soliton sırasıyla daralan, dengeli veya genişleyen olur.

(4.105) denklemin izini alarak

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\xi) &= (2s+1)\lambda + \rho(2s+1)(\bar{r} + 4s^2) - 4s^2 - r \\ &= (2s+1)\lambda + \left(\rho(2s+1) - 1\right)(\bar{r} + 4s^2) \end{aligned} \quad (4.109)$$

elde edilir, burada $\operatorname{div}(\xi)$, ξ vektör alanının diverjansıdır.

Uyarı 4.3.4 Bir ξ potansiyel vektör alanının diverjansı sıfır ise, bu durumda ξ bir solenoidal denir.

Buradan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.5 $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}, \hat{g}, \xi, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. O halde ξ nin bir solenoidal potansiyel vektör alanı olması için gerek ve yeter koşul

$$(2s+1)\lambda + \left(\rho(2s+1) - 1\right)(\hat{r} + 4s^2) = 0 \quad (4.110)$$

ve

$$\lambda = (\hat{r} + 4s^2) \left(\frac{1}{2s+1} - \rho \right) \quad (4.111)$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

Ayrıca, (4.109) denkleminde $\xi = \nabla k$ vektör alanını alarak, burada k düzgün bir fonksiyon. Bu durumda

$$\Delta k = (2s+1)\lambda + \left(\rho(2s+1) - 1\right)(\hat{r} + 4s^2) \quad (4.112)$$

elde edilir. Buradan, $\Delta k = 0$ ise k nin harmonik olduğu söylenir. Dolayısıyla, Teorem 4.3.5 deki ile aynı λ değerini, yani

$$\lambda = (\hat{r} + 4s^2) \left(\frac{1}{2s+1} - \rho \right) \quad (4.113)$$

yazabilir. Buradan aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.6 $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ bir Kenmotsu manifoldu ve $(\hat{K}, \hat{g}, \xi, \lambda)$ bir hemen hemen $*$ -RB soliton olsun. ξ vektör alanı $\xi = \nabla k$ biçimindeyse, burada k harmonik bir fonksiyon olmak üzere, bu durumda soliton $(\hat{r} + 4s^2) \left(\frac{1}{2s+1} - \rho \right) > 0$, $\rho = \frac{1}{2s+1}$ ya da $(\hat{r} + 4s^2) \left(\frac{1}{2s+1} - \rho \right) < 0$ koşulları altında sırasıyla daralan, dengeli veya genişleyen soliton olur.

Şimdi bir $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ Kenmotsu manifoldundaki bir $(\tilde{F}, \tilde{g}, \zeta, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip değişmez $\tilde{F}$ altmanifoldunu ele alalım. Bu durumda

$$Ric(L, Z) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\zeta \tilde{g})(L, Z) = (\lambda + \rho r)\tilde{g}(L, Z) + \mu \eta(L)\eta(Z) \quad (4.114)$$

eşitliğine sahibizdir.

Dolayısıyla, Lemma 2.6.7 den ve (2.51) denkleminde

$$L - \eta(L)\zeta = \hat{\nabla}_L \zeta = \tilde{\nabla}_L \zeta + h(L, \zeta) \quad (4.115)$$

elde edilir. $\tilde{F}$, $\hat{K}$ da değişmez olduğundan, $h(\zeta, L) = 0$ herhangi L , ζ vektör alanları için

$$L - \eta(L)\zeta = \tilde{\nabla}_L \zeta \quad (4.116)$$

elde edilir. (2.64) denkleminde

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_\zeta \tilde{g})(L, Z) = \tilde{g}(L, Z) - \eta(L)\eta(Z) \quad (4.117)$$

elde edilir. Buradan, (4.117) denklemini (4.114) denkleminde yerine koyarsak

$$Ric(L, Z) = (\lambda + \rho r - 1)\tilde{g}(L, Z) + (\mu + 1)\eta(L)\eta(Z) \quad (4.118)$$

buluruz ve $\tilde{F}$ bir η -Einstein manifoldtur. Böylece $h(L, \zeta) = \tilde{g}(L, \zeta)H = \eta(L)H = 0$ dır. Başka bir deyişle $\eta(L) \neq 0$ iken $H = 0$ dır. Bu durumda $\tilde{F}$, $\hat{K}$ içinde minimaldır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuları elde edebiliriz.

Teorem 4.3.7 $\tilde{F}$, bir $(\tilde{F}, \tilde{g}, \zeta, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldun bir değişmez altmanifold ise, bu durumda $\tilde{F}$ bir η -Einstein yapısına haiz minimal altmanifoldtur.

Böylece, (2.73) denkleminde,

$$0 = h(\zeta, L) = \tilde{g}(\zeta, L)H \quad (4.119)$$

elde edilir ve aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 4.3.8 $\tilde{F}$, bir $(\tilde{F}, \tilde{g}, \zeta, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldun bir değişmez altmanifold ise, bu durumda $\tilde{F}$ daima minimaldır.

Özel olarak (4.118) denkleminde, $\rho = 0$, $\rho = \frac{1}{2}$ ya da $\rho = \frac{1}{2(s-1)}$ alırsak.

Aşağıdaki sonucu elde edilir.

Sonuç 4.3.9 $\tilde{F}$, bir $(\tilde{F}, \tilde{g}, \zeta, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -Ricci soliton, η -Einstein soliton veya hemen hemen η -Schouten soliton yapısına sahip $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldun bir değişmez altmanifold ise, bu durumda $\tilde{F}$ bir η -Einstein yapısına haiz minimal altmanifolddur.

Aslında Lemma 2.6.7 den

$$Ric(\zeta, L) = -2s\eta(L), \quad (4.120)$$

sahibiz ve

$$Ric(\zeta, \zeta) = -2s \quad (4.121)$$

yazabiliriz. Böylece (4.118) denkleminde

$$Ric(\zeta, \zeta) = \lambda + \rho r + \mu \quad (4.122)$$

elde edilir.

Dolayısıyla (4.121) ve (4.122) denklemlerinden $\lambda = -\rho r - (2s + \mu)$ elde edilir. Buradan aşağıdaki teoremi veririz:

Teorem 4.3.10 *Bir $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldundaki $(\tilde{F}, \tilde{g}, \zeta, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip değişmez M altmanifold olsun. Eğer $\rho r + (2s + \mu)$ negatif, $\rho + (2s + \mu)$ pozitif veya $\rho r = -(2s + \mu)$ koşulları sağlanırsa, soliton sırasıyla daralan, genişleyen veya dengeli olur.*

4.3.1. Değişmez altmanifoldlarda potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan hemen hemen η -Ricci-Bourguignon solitonlar

Bu alt bölümde, $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ Kenmotsu manifolduna izometrik olarak daldırılmış $\tilde{F}$ değişmez altmanifoldları üzerindeki $\xi(Ric)$ -vektör alanları incelenecektir.

Potansiyel vektör alanı, $\hat{K}^{2s+1}$ üzerindeki bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının teğetsel bileşeni olan $\tilde{F}$ üzerindeki bir hemen hemen η -RB soliton için bir karakterizasyon verelim.

Teorem 4.3.1.1 *$\tilde{F}$ bir Kenmotsu manifoldu $\hat{K}^{2s+1}$ içine izometrik olarak daldırılmış bir değişmez altmanifold ve $\xi, (\hat{K}^{2s+1}, \hat{g})$ üzerinde bir $\xi^T(Ric)$ -vektör alanı olsun. Bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ bir hemen hemen η -RB solitondur ancak ve ancak $\tilde{F}$ nin Ricci tensör alanı, $L, Z \in \mathfrak{X}(\tilde{F})$*

$$Ric(L, Z) = \frac{1}{\gamma} \left[(\lambda + \rho r) \tilde{g}(L, Z) - \hat{g}(h(L, Z), \xi^\perp) + \mu \eta(L) \eta(Z) \right] \quad (4.123)$$

şeklinde yazabilir.

İspat. $\tilde{F}$ izometrik olarak bir Kenmotsu manifolduna daldırıldığı için

$$\xi = \xi^T + \xi^\perp \quad (4.124)$$

yazabiliriz. ξ , $\hat{K}$ üzerinde bir $\xi(Ric)$ -vektör alanı, (2.29), (4.124) denklemleri ve Gauss Weingarten formüllerinden

$$\mu Q^T L + \mu Q^\perp L = \hat{\nabla}_L \xi^T = \tilde{\nabla}_L \xi^T + h(L, \xi^T) - A_{\xi^\perp} L + \tilde{\nabla}_L^\perp \xi^\perp, \quad (4.125)$$

elde edilir. Teğetsel ve normal bileşenleri karşılaştırarak

$$\tilde{\nabla}_L \xi^T = \mu Q^T L + A_{\xi^\perp} L \quad (4.126)$$

ve

$$h(L, \xi) = \mu Q^\perp L - \tilde{\nabla}_L^\perp \xi^\perp \quad (4.127)$$

elde ederiz. Lie türevinin tanımından ve (4.126) denklemi kullanarak

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\xi^T} \tilde{g})(L, Z) &= \tilde{g}(\nabla_L \xi^T, Z) + \tilde{g}(\nabla_Z \xi^T, L) \\ &= 2\mu \tilde{g}(Q^T L, Z) + 2\hat{g}(h(L, Z), \xi^\perp) \end{aligned} \quad (4.128)$$

elde ederiz. $\tilde{F}$ değişmez altmanifoldu bir hemen hemen η -RB soliton kabul ettiğinden,

$$Ric(L, Z) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\xi^T} \tilde{g})(L, Z) = (\lambda + \rho r) \tilde{g}(L, Z) + \mu \eta(L) \eta(Z) \quad (4.129)$$

dır. Dolayısıyla, (4.128) ve (4.129) denkleminde

$$(1 + \mu) Ric(L, Z) = (\lambda + \rho r) \tilde{g}(L, Z) - \hat{g}(h(L, Z), \xi^\perp) + \mu \eta(L) \eta(Z) \quad (4.130)$$

elde ederiz. Burada $\tilde{\gamma} = 1 + \mu$ alırsak istenen sonucu elde ederiz. İddia (4.130) ten çıkar. $\square$

Bir önceki teoremin direkt bir sonucu olarak aşağıdakileri veriyoruz.

Sonuç 4.3.1.2 $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldunun $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ bir hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip izometrik olarak daldırılmış bir $\tilde{F}$ değişmez altmanifoldunun η -Einstein olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{F}$ nin $A_{\xi^\perp}^\perp$ -umbilik olmasıdır.

Sonuç 4.3.1.3 Bir $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldunun $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB

soliton yapısına sahip izometrik olarak daldırılmış tümel umbilik $\tilde{F}$ değişmez altmanifoldu eğer ξ^T bir $\xi^T(\text{Ric})$ -vektör alanı ise, bu durumda $\tilde{F}$ bir η -Einstein manifoldtur.

Önerme 4.3.1.4 *Eğer $\tilde{F}$ potansiyel vektör alanı ξ^T bir $\xi^T(\text{Ric})$ -vektör alanı olan bir $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldu izometrik olarak daldırılmış bir minimal altmanifold ise, bu durumda $\tilde{F}$ nin r skaler eğriliği*

$$r = \frac{\lambda s}{\tilde{\gamma} - \rho s} + \frac{\mu}{\tilde{\gamma} - \rho s} \quad (4.131)$$

ile verilir, burada $\frac{\tilde{\gamma}}{(2s+1)} \neq \rho$ bir sabittir.

İspat. Eğer $\tilde{F}$, $\hat{K}^{2s+1}$ de bir minimal altmanifold ise, $\tilde{F}$ nin ortalama vektör alanı $H = 0$ dır. Buradan, $g(H, \xi^\perp) = 0$ elde edilir. Şimdi (4.123) nin izini alırsak

$$r = \sum_{i=1}^s \text{Ric}(e_i, e_i) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \left((\lambda + \rho r)(s) + \mu \right) \quad (4.132)$$

elde ederiz. □

4.3.2. Kenmotsu manifoldlarının hiperyüzeyleri

Bu alt bölümde, $(\hat{K}^{2s+1}, \theta, \zeta, \eta, \hat{g})$ Kenmotsu manifolduna izometrik olarak daldırılmış bir $\tilde{F}$ hiperyüzeyi üzerinde bir hemen hemen η -RB soliton incelenecektir.

Denklem (2.57), eğer $\sigma = \tilde{g}(N, \xi^\perp)$ ile gösterirsek, bu durumda aşağıdaki teorem verebiliriz.

Teorem 4.3.2.1 *$(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ potansiyel vektör alanı $\xi^T(\text{Ric})$ -vektör alanı olan bir $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldunda izometrik olarak daldırılmış bir $\tilde{F}$ hiperyüzeyi üzerinde bir hemen hemen η -RB soliton olsun. Eğer $\tilde{F}$ bir kuazi-umbilik altmanifold ise bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ yapısı bir genelleştirilmiş kuazi-Einstein manifold olur.*

İspat. $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$, $\tilde{F}$ üzerinde bir hemen hemen η -RB soliton olduğundan, (2.57) denklemini (4.123) de kullanarak

$$\text{Ric}(L, Z) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} (\lambda + \rho r) \tilde{g}(L, Z) - \frac{\sigma}{\tilde{\gamma}} h_\xi(L, Z) + \frac{\mu}{\tilde{\gamma}} \eta(L) \eta(Z) \quad (4.133)$$

elde ederiz. Burada (2.55) kullanarak,

$$\begin{aligned}
 Ric(L, Z) &= \frac{1}{\tilde{\gamma}}(\lambda + \rho r)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\sigma}{\tilde{\gamma}}\left(\alpha\tilde{g}(L, Z) + \beta\omega(L)\omega(Z)\right) + \frac{\mu}{\tilde{\gamma}}\eta(L)\eta(Z) \\
 &= \frac{1}{\tilde{\gamma}}\left(\lambda + \rho r - \alpha\sigma\right)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\beta\sigma}{\tilde{\gamma}}\omega(L)\omega(Z) + \frac{\mu}{\tilde{\gamma}}\eta(L)\eta(Z)
 \end{aligned} \tag{4.134}$$

sonucu varırız. Bu ise, bize Tanım 2.2.4 e göre $\tilde{F}$ nin bir genelleştirilmiş kuazi-Einstein manifold olduğunu söyler. $\square$

Teorem 4.3.2.2 $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ potansiyel vektör alanı $\xi^T(Ric)$ -vektör alanı olan bir $\hat{K}^{2s+1}$ Kenmotsu manifoldunda izometrik olarak daldırılmış bir $\tilde{F}$ hiperyüzeyi üzerinde bir hemen hemen η -RB soliton olsun. Eğer $\tilde{g}$ bir sözde kuazi-umbilik altmanifold ise bu durumda $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ yapısı bir genelleştirilmiş sözde kuazi-Einstein manifold olur.

İspat. (4.133) denklemini (2.56) de kullanarak,

$$\begin{aligned}
 Ric(L, Z) &= \frac{1}{\tilde{\gamma}}(\lambda + \rho r)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\sigma}{\tilde{\gamma}}\left(\alpha\tilde{g}(L, Z) + \beta\omega(L)\omega(Z) + E(L, Z)\right) \\
 &\quad + \frac{\mu}{\tilde{\gamma}}\eta(L)\eta(Z) \\
 &= \frac{1}{\tilde{\gamma}}\left(\lambda + \rho r - \alpha\sigma\right)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\beta\sigma}{\tilde{\gamma}}\omega(L)\omega(Z) + \frac{\mu}{\tilde{\gamma}}\eta(L)\eta(Z) - \frac{\sigma}{\tilde{\gamma}}E(L, Z)
 \end{aligned} \tag{4.135}$$

sonucu varırız. Bu ise, bize Tanım 2.2.4 e göre $\tilde{F}$ nin bir genelleştirilmiş sözde kuazi-Einstein manifold olduğunu söyler. $\square$

Teorem 4.3.2.3 $(\hat{K}, \hat{g})$ bir sabit c eğrilikli Kenmotsu manifold ve $\tilde{F}$, $\hat{K}$ nin bir hiperyüzey izometrik olarak daldırılmış altmanifold olsun. $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ nin $\tilde{F}$ üzerinde potansiyel vektör alanı bir $\xi^T(Ric)$ -vektör alanı olan bir hemen hemen η -RB soliton olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{F}$ nin h_ξ ikinci temel tensör formunun

$$h_\xi^2(L, Z) = \left(\frac{\rho}{\tilde{\gamma}} + i_z(h_\xi)\right)h_\xi(L, Z) + \left(c(s-1) - \frac{1}{\tilde{\gamma}}(\lambda + \rho r)\right)\tilde{g}(L, Z) - \frac{1}{\tilde{\gamma}}\mu\eta(L)\eta(Z) \tag{4.136}$$

denklemini sağlamasıdır. Burada L ve Z , $\tilde{F}$ ye teğet keyfi vektör alanlarıdır.

İspat. $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ bir hemen hemen η -RB soliton olsun. Gauss denkleminde,

$$Ric(L, Z) = iz(h_\xi)h_\xi(L, Z) - h_\xi^2(L, Z) + c(s-1)\tilde{g}(L, Z) \quad (4.137)$$

elde ederiz. Şimdi (4.137) ve (4.133) i karşılaştırarak

$$\frac{1}{\bar{\gamma}}(\lambda + \rho r)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\sigma}{\bar{\gamma}}h_\xi(L, Z) + \frac{\mu}{\bar{\gamma}}\eta(L)\eta(Z) = iz(h_\xi)h_\xi(L, Z) - h_\xi^2(L, Z) + c(s-1)\tilde{g}(L, Z)$$

elde ederiz. Böylece,

$$h_\xi^2(L, Z) = \left(\frac{\rho}{\bar{\gamma}} + iz(h_\xi)\right)h_\xi + \left(c(s-1) - \frac{1}{\bar{\gamma}}(\lambda + \rho r)\right)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\mu}{\bar{\gamma}}\eta(L)\eta(Z)$$

elde ederiz.

Bu ise (4.136) dir geçerli olsun. Yine Gauss denkleminde

$$Ric(L, Z) = \frac{1}{\bar{\gamma}}(\lambda + \rho r)\tilde{g}(L, Z) - \frac{\sigma}{\bar{\gamma}}h_\xi(L, Z) + \frac{\mu}{\bar{\gamma}}\eta(L)\eta(Z), \quad (4.138)$$

elde ederiz. Bu ise $(\tilde{F}, \tilde{g}, \xi^T, \lambda, \mu)$ nun $\tilde{F}$ üzerinde bir hemen hemen η -RB soliton olduğunu söyler. $\square$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Riemann manifold, bazı özel vektör alanları ve geometrik özellikleri, η -RB solitonları, $*$ -RB solitonları, Kenmostu manifoldları ve Riemann manifoldların altmanifoldları tanımları ile başlanmıştır.

Tezin bulgularında, ilk olarak $\xi(Ric)$ -vektör alanı ve Ricci solitonlar çalışılmıştır. Teorem 4.1.1.1 de bir Riemann manifoldu üzerindeki bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının Killing ve konformal olması için koşullar verilmiştir. Teorem 4.1.1.2 de bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının daima kapalı olduğu ispatlanmıştır. Teorem 4.1.1.4 ve Teorem 4.1.1.5 te bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının manifoldun skaler eğriliği ile ilişkisini verir. Bu iki teoremin sonucunda bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının bir jeodezik vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın manifoldun skaler eğriliğinin sabit olması Teorem 4.1.1.6 da kanıtlandı. Manifoldun kompakt ve yönlendirilebilir olması durumu Teorem 4.1.1.8 ve Teorem 4.1.1.10 da incelendi. Teorem 4.1.1.9 da ise bir harmonik $\xi(Ric)$ -vektör alanına sahip bir Riemann manifoldu için bir karakterizasyon verildi. Alt bölüm 4.1.2. de ise potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ olan Ricci solitonlar çalışılmıştır. Özellikle Teorem 4.1.2.1 ve Teorem 4.1.2.2 de sırasıyla potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan büzülebilir ve kompakt Ricci solitonlar için karakterizasyonlar elde edildi.

Alt bölüm 4.2.1. de η -RB ve hemen hemen η -RB solitonlar çalışıldı. Özellikle, Şonuc 4.2.1.2, Teorem 4.2.1.3 ve Teorem 4.2.1.4 te ele alınan solitonun trivial olması (Einstein olması) ve bir S^n Öklidyen küreye izometrik olması için gerekli koşullar verildi. Ayrıca, kompakt hemen hemen η -RB solitonlar için integral formülleri elde ettik. (Bkz. Teorem 4.2.1.9 ve Şonuç 4.2.1.10). Alt bölüm 4.2.2. de gradyent hemen hemen η -RB solitonlar çalışıldı ve bu tür solitonların kompakt ve yönlendirilebilir olması durumunda Teorem 4.2.2.4 ve Şonuç 4.2.2.5 te integral formülleri inşa edildi. Alt bölüm 4.2.3., Teorem 4.2.3.2, Teorem 4.2.3.3, Teorem 4.2.3.4 ve Teorem 4.2.3.9 da gradyent hemen hemen η -RB solitonların literatürde bilinen hemen hemen sıfır izli, h -Ricci soliton, Einstein manifold, S^n standart küresi, $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayı ve $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayı gibi yapılara hangi şartlarda altında dönüşülebileceği ile ilgili geometrik koşullar verildi.

Alt bölüm 4.3. te Kenmotsu manifoldlar üzerinde η -RB ve $*$ -RB solitonlar çalışıldı. Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.2 de bir Kenmotsu manifoldu üzerindeki bir hemen hemen $*$ -RB solitonunun hemen hemen η -RB ve Einstein manifold olması için gerekli koşullar verilmiştir ve Teorem 4.3.5 te bu tip solitonun ξ potansiyel vektör alanının solenoidal olması için gerek ve yeter koşullar verildi. Ayrıca bu tip solitonların daralan, dengeli ve genişleyen olması için kriterler Teorem 4.3.6 te verildi. Teorem 4.3.7 da bir Kenmotsu manifoldunun hemen hemen η -RB soliton yapısına haiz bir değişmez altmanifoldun η -Einstein yapısına haiz bir minimal altmanifold olduğu kanıtlanmıştır. Teorem 4.3.10 da ise bir Kenmotsu manifoldunun hemen hemen η -RB soliton yapısına sahip bir değişmez altmanifoldunun daralan, dengeli ve genişleyen olması için koşullar elde edildi.

Alt bölüm 4.3.1. de bir Kenmotsu manifoldunun potansiyel vektör alanı $\xi(Ric)$ -vektör alanı olan hemen hemen η -RB soliton yapısına haiz değişmez altmanifoldları ele alındı ve çalışıldı. Teorem 4.3.1.1 de bu tür altmanifoldlar Ricci tensörünün gerçeklediği bir denklem kurulmuştur. Son alt bölüm ise Kenmotsu manifoldlarının kuazi-umbilik hiperyüzeyleri ele alındı ve çalışıldı. Bu amaçta Teorem 4.3.2.1 de potansiyel vektör alanı bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının teğetsel bileşeni olan bir hemen hemen η -RB soliton yapısına haiz bir hiperyüzeyin bir genelleştirilmiş kuazi-Einstein yapısına haiz olduğu ispatlanmıştır. Teorem 4.3.2.2 de ise bir genelleştirilmiş sözde kuazi-Einstein yapısına haiz olduğu ispatlanmıştır. Kesitsel eğriliği sabit olan bir Kenmotsu manifoldundaki bir hiperyüzeyin potansiyel vektör alanı bir $\xi(Ric)$ -vektör alanının teğetsel bileşeni olan bir hemen hemen η -RB soliton yapısına izin vermesi için bir gerek ve yeter koşul verilmiştir.

Bu tezde çalışılan değişik soliton tipleri ve altmanifold türleri literatürde aktif çalışagelmiş ve çalışılmaya devam etmektedir. Bu nedenle bu tez çalışmasında ele alınan problemlerin ve benzerlerinin çok çeşitli alt sınıflara haiz hemen hemen kontakt metrik yapıların bir çok alt sınıfına uygulanabileceği öngörülmektedir. Ayrıca bu tezde çalışılan soliton yapıların potansiyel vektör alanlarının daha farklı bir özel vektör alanı seçilmesi durumunda örneğin afin konformal vektör alanı gibi benzer problemler çalışılabilir. Dolayısıyla bu tez çalışması daha sonra gelecek çalışmalara yol gösterecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

- [1] Bakry, D., Gentil, I., Ledoux, M., 2014, *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*, Springer.
- [2] Aquino, C., Barros, A., Ribeiro Jr.E., 2011, Some applications of the Hodge-de Rham decomposition to Ricci solitons, *Results in Math.*, 60, 235-246
- [3] Alekseevskii, D.V., 1972, Groups of conformal transformations of Riemannian spaces, *Mat. Sb. (N.S.)*, 89(131), 280-296.
- [4] Baishya, K.K., Chowdhury, P.R., 2016, Kenmotsu manifold with some curvature conditions, *Ann. Univ. Sci. Bp. Rolando Eotvos. Sect. Math.*, 59, 3-13.
- [5] Barros, A., Ribeiro, E. Jr., 2014, Some characterizations for compact almost Ricci solitons, *Bull Braz Math. Soc, New Series.*, 45, 325-341.
- [6] Barros, A., Gomes, J.N., 2013, A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature, *J. Math. Anal. Appl.*, 401, 702-705.
- [7] Berestovskii, V., Nikonorov, Y., 2008, Killing Vector Fields of Constant Length on Riemannian Manifolds, *Siberian Math.J.*, 49(3), 395–407.
- [8] Bhattacharyya, A., De, T., 2007, On mixed generalized quasi-Einstein manifolds, *Differ. Geom.-Dyn. Syst.*, 9, 40-46.
- [9] Blaga, A.M., Özgür, C., 2022, Almost η -Ricci and almost η -Yamabe solitons with torse-forming potential vector field, *Quaest. Math.*, 45(1), 143-163.
- [10] Blaga, A. M., Taştan, A. M., 2021, Some results on almost η -Ricci-Bourguignon solitons, *J. Geom. Physics.*, 168, 104316.
- [11] Blaga, A.M., 2018, Almost η -Ricci solitons in $(LCS)_n$ -manifolds, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, 25(5), 641-653.
- [12] Besse, A. L., 1987, *Einstein manifolds*, Classic in Mathematics, Springer.
- [13] Bourguignon, J. P., Ezin, J. P., 1987, Scalar curvature functions in a conformal class of metrics and conformal transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 301, 723-736.
- [14] Bourguignon, J. P., 1981, Ricci curvature and Einstein metrics, *Global differential geometry and global analysis*, 42–63.
- [15] Chaki, M. C., 2001, On generalized quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen.*, 58 (4), 683-691.
- [16] Chaki, M. C., Maity, R. K., 2000, On quasi-Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen.*, 57 (3-4), 297-306.

- [17] Blair, D.E., 1976, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Lect notes. Math. Springer.
- [18] Chen, B.Y., 1973, *Geometry of Submanifolds*, Dekker, NewYork.
- [19] Chen, B.Y., 2017, Classification of torqued vector fields and its applications to Ricci solitons, *Kragujev. J. Math.*, 41(2), 239–250.
- [20] Chen, B.Y., 2016, A survey on Ricci solitons on Riemannian submanifolds, *Contemp. Math.*, 19(1) (2014), 13–21.
- [21] Chen, B.Y., 2015, Some results on concircular vector fields and their applications to Ricci solitons, *Bull. Korean Math. Soc.*, 52(5), 1535–1547.
- [22] Catino, G., Cremaschi, L., Djadli, Z., Mantegazza, C., Mazzieri, L., 2017, The Ricci-Bourguignon flow, *Pac. J. Math.*, 287(2) (2017), 337–370.
- [23] Chow, B., Lu, P., Ni, L., 2006, *Hamilton's Ricci Flow*, Graduate Studies in Mathematics 77, AMS, Providence, RI, USA.
- [24] Cho, J.T., Kimura, M., 2009, Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form, *Tohoku. Math. J.*, 61 (2), 205–212.
- [25] De, U.C., Shaikh A. A., 2007, *Differential geometry of manifolds*, Alpha Science.
- [26] Deshmukh, S., 2018, Characterizing spheres by conformal vector fields, *Ann. Univ. Ferrara.*, 56 (2), 231-236.
- [27] Deshmukh, S., Al-Solamy, F., 2008, Conformal gradient vector fields on a compact Riemannian manifold, *Colloquium Math.*, 112(1), 157-161.
- [28] Do Carmo, M. P., 1992, *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston.
- [29] S. Dwivedi, 2020, Some results on Ricci bourguignon solitons and almost soliton, *Canad Math. Bull.*, 64(3), 591–604.
- [30] Erdoğan S.Ş., 2008 *Diş Form Ananlizi*, TÜBA ,Ankara.
- [31] Frances, C., 2010, Local dynamics of conformal vector fields, arXiv:0909.0044 9.
- [32] Frances, C., 2012, Formes normales pour les champs conformes pseudo-riemanniens, arXiv:0909.0044 9.
- [33] Ferrand, J., 1986, The action of conformal transformations on a Riemannian manifold, *Math. Ann.*, 304, 277–29.
- [34] Ghahremani-Gol, H., 2019, Some results on h -almost Ricci solitons, *J. Geom. Phys.*, 137, 212–216.
- [35] Ghosh, A., Patra, D.S., 2018, $\ast$ -Ricci soliton within the frame-work of Sasakian and (K, μ) -contact manifold, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 15(7), 1850120.
- [36] Croom, F.H., 1970, *Basic concepts of algebraic topology*, Springer-Verlag.

- [37] Hamilton, R., 1988, *The Ricci flow on surfaces*, Contemp. Math. 71 (1988), AMS, 237–262.
- [38] Hamilton, R., 1982, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geo.*, 17, 255–306.
- [39] Hinterleitner, I., Kiosak, V.A., 2008, $\phi(Ric)$ -vector fields in Riemannian spaces, *Arch. Math. (Brno)*, 44(5), 385–390.
- [40] Hinterleitner, I., Kiosak, V.A., 2019, $\phi(Ric)$ -vector fields on conformally flat spaces, *AIP Conf. Proc.*, 1191(1).
- [41] Ivey, T., 1993, Ricci solitons on compact three-manifolds, *Differential Geom. Appl.*, 3, 301–307.
- [42] Baird, P., Eells, J., 1980, *A conservation law for harmonic maps*, Harmonic Maps, Geometry Symposium Utrecht, 1–25.
- [43] Kaimakamis, G., Panagiotidou, K., 2014, $*$ -Ricci solitons of real hypersurfaces in non-flat complex space forms, *J. Geom. Phys.*, 86, 408–413.
- [44] Kenmotsu, K., 1972, A class of almost contact Riemannian manifolds, *Tohoku Math. J.*, 24(1), 93–103.
- [45] Kırık, B., Zengin, F. Ö., 2015, Generalized quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *Acta.Math. Acad. Paedagog. Nyregyhziensis.*, 31(1), 61–69.
- [46] , Kırık, B., Zengin, F. Ö., 2015, Conformal mappings of quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields, *Filomat.*, 29(3), 525–534.
- [47] , Kırık, B., Zengin, F. Ö., 2019, Applications of a special generalized quasi-Einstein manifold, *Bull.Iran.Math. Soc.*, 45(1), 89–102.
- [48] Lampe, M., 2010, On conformal connections and infinitesimal conformal transformations, PhD Thesis.
- [49] Lynge, W. C., 1973, Sufficient conditions for periodicity of a Killing vector field, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38(3), 614–616.
- [50] Malick, S., De, U.C., 2018, Certain investigations on pseudo quasi-Einstein manifolds, *J. Math. Phys.*, 88(2), 223–230.
- [51] Mangione, V., 2005, Totally geodesic submanifolds of a Kenmotsu space form, *Math. Reports.* 57(4), 315–324.
- [52] Naik, D. M., Kumara, H. A., 2019, $*$ -Ricci solitons and gradient almost $*$ -Ricci solitons on Kenmotsu manifolds *Math. Slovaca.*, 69(6), 1447–1458.
- [53] Prakasha, D. G., Veerasha, P., 2019, Para-Sasakian manifolds and $*$ -Ricci solitons, *Afrika Mat.*, 30(7-8), 989–998.
- [54] Petersen, P., Wylie, W., 2009, Rigidity of gradient Ricci solitons, *Pacific. J. Math.*, 241(2), 329–345.

- [55] Petersen, P., 2006, *Riemannian geometry*, springer.
- [56] Perelman, G.Y., 2002, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv preprint math/0211159.
- [57] Shaikh, A.A., Jana, S.K., 2008, On pseudo generalized quasi-Einstein manifolds, *Tamkang J. Math.*, 39(1), 9-24.
- [58] Siddiqi, M.D., Akyol, M.A., 2020, η -Ricci-Yamabe solitons on Riemannian submersions from Riemannian submanifold, Preprint, arXiv: 14124v1.
- [59] Pigola, S., Rigoli, M., Rimoldi, M., Setti, A. G., 2011, Ricci almost solitons, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa.*, 10(4), 757–799.
- [60] Şahin, B., 2012, *Manifoldların diferansiyel geometrisi*, Nobel, Ankara.
- [61] Schouten, J. A., 1954, *Ricci Calculus*, Springer-Verlag, Berlin.
- [62] Tanno, S., Weber, W., 1965, Closed conformal vector fields, *J. Diff. Geom.* 3, 361-366.
- [63] Tashiro, Y., 1965, Complete Riemannian manifolds and some vector fields, *Trans. Amer. Math.Soc.*, 117, 251–275.
- [64] Warner, F., 1983, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York.
- [65] Xiaochun, R., 1999, Positive curvature, local and global symmetry, and fundamental groups, *Amer. J. Math.*, 121(5), 931-943.
- [66] Yano, K., Kon, M., 1984, *Structures on Manifolds*, World Scientific, Singapore, ISBN:9971-966-15-8.
- [67] Yano, K., Chen, B. Y., 1971, On the concurrent vector fields of immersed manifolds, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 23, 343–350.
- [68] Yano, K., 1940, Concircular geometry. I. Concircular transformations. II. Integrability conditions of $\rho_{\mu\nu} = \Phi g_{\mu\nu}$. III. Theory of curves. IV. Theory of subspaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 16, 195–200.
- [69] Yano, K. 1970, *Integral formulas in Riemannian geometry*, New York: M. Dekker.
- [70] Yorozu, S., 1982, Killing vector fields on complete Riemannian manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84, 115-120.
- [71] Zaeim, A., Haji-Badali, A., 2016, On torse forming direction in a Riemannian space *Proc. Imp. Acad. Tokyo.*, 13, 3455-3468.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Moctar TRAORE
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☐ T.C. ☒ Diğer: SENEGAL
Telefon	
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Universite Assane Seck de Ziguinchor
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	Universite Assane Seck de Ziguinchor
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2015

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Matematik
Mezuniyet Tarihi	2023

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Traore M., Taştan H.M., Gerdan Aydın S., 2022, On almost η -Ricci-Bourguignon solitons, <i>Miskolc. Math. Notes.</i> , accepted.	
Gerdan Aydın S., Traore M., Taştan H.M., 2023, $\zeta(Ric)$ -vector fields on doubly warped product manifolds, <i>Istanbul Journal of Mathematics.</i> , accepted.	
Traore M., Taştan H.M., Blaga, A. M., 2023, Some characterizations of quasi-Einstein	

and twisted product manifolds, *Int. J. Maps Math.*, 6, 1, 154-181.

Gerdan Aydın S., Taştan H.M., Traore, M., Ülker, Y., 2022, Biwarped product submanifolds with a slant base factor , *Int. J. Maps Math.*, 5, 2, 2636-7467

Traore M., Taştan H.M., Gerdan S., 2021, Multiply Warped Product GeneralizedSemi-Invariant Submanifolds, *Int. Electron. J. Geom.*, 14, 2, 313-330, DOI: 10.36890/iejg.845483

Bildiriler

Traore M., 2023, Some Characterization on gradient almost η -Ricci-Bourguigon solitons, *Riemannian Geometry and Applications*, Bucharest, Romania, 22-24 September.

Traore M., 2019, Quasi-Einstein and twisted product manifolds, *31th Mathematics symposium at Istanbul University*, Istanbul, Türkiye, 28-03 August.

Traore M., 2019, Mathematics and their interactions, *West Asia Mathematical School (WAMS)*, İzmir, Türkiye, 27-03 October.

Traore M., 2019, *Journees Arithmetiques İstanbul University*, İstanbul, Türkiye, 01-05 July.