

**TÜREVLENEBİLİR (α_1, m) –KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
ELDE EDİLEN CAPUTO-HİBRİT VE ATANGANA BALEANU YENİ
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

Furkan GÜZEL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2023

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜREVLENEBİLİR (α_1, m) –KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
ELDE EDİLEN CAPUTO-HİBRİT VE ATANGANA BALEANU YENİ
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

FURKAN GÜZEL

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2023

(Her hakkı saklıdır)

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum **“Türevlenebilir (α_1, m) –Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Caputo-Hibrit ve Atangana-Baleanu Yeni Kesirli İntegral Eşitsizlikleri”** adlı yüksek lisans tez çalışmasında bulunan sonuçları bilimsel kriterlere uygun olarak atıfta bulunulduğunu başka bir yerden yararlanılması durumunda ve bu tezi Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna veya dergilere akademik gaye ve unvan almak amacıyla vermediğimi beyan ederim.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

Tez çalışmamın tamamı her yerden erişime açılabilmesi uygundur.

Furkan GÜZEL

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TÜREVLENEBİLİR (α_1, m) –KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLEN CAPUTO-HİBRİT VE ATANGANA BALEANU YENİ KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Furkan GÜZEL

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasında (α_1, m) -konveks fonksiyonlar için çeşitli eşitsizlikler incelenerek sonuçların elde edilmesi sürecinde Hölder, Power Mean ve Young eşitsizlikleri kullanılmıştır. Tezin ilk bölümünde eşitsizliklerin geniş tarihi konu edilmiş, ikinci bölümünde tanım teorem ve örneklerle yer verilmiş, üçüncü bölümde Caputo-Hybrid ve Atangana-Baleanu kesirli integral operatörler ile ilgili bilgiler sunulmuş, dördüncü bölümde var olan lemmalar kullanılarak (α_1, m) -konveks fonksiyonlarla ilgili yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Beşinci bölümde tartışma ve sonuçlar verilmiştir.

Bu tezin asıl hedefi, (α_1, m) -konveks fonksiyonları geniş bir açıdan incelemek ve bu fonksiyonlarla yeni eşitsizlikler elde edilmek suretiyle bu türdeki eşitsizlikler için yeni üst sınırlara ulaşmaktır.

2023, 48 sayfa

Anahtar kelimeler: (α_1, m) -konveks fonksiyon, Hölder eşitsizliği, Power-Mean eşitsizliği, Young eşitsizliği

ABSTRACT

Master

TÜREVLENEBİLİR (α_1, m) –KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN ELDE EDİLEN CAPUTO-HİBRİT VE ATANGANA BALEANU KESİRLİ İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Furkan GÜZEL

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis study, various inequalities for (α_1, m) -convex functions were examined and Hölder, Power Mean and Young inequalities were used in the process of obtaining the results. In the first part of the thesis, the broad history of inequalities is discussed, in the second part, definition theorems and examples are given, in the third part, information about Caputo-Hybrid and Atangana-Baleanu fractional integral operators is presented, in the fourth part, using existing lemmas, new inequalities regarding (α_1, m) -convex functions have been obtained. Discussion and results are given in the fifth section.

The main goal of this thesis is to examine (α_1, m) -convex functions from a broad perspective and to reach new upper limits for inequalities of this type by obtaining new inequalities with these functions.

2023, 48 pages

Keywords: (α_1, m) -convex functions, Höder's Inequality, Power Mean Inequality, Young's Inequality

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasını hazırlarken tüm aşamalarında katkı sunan Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesinde görev yapan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e, lisans ve yüksek lisans eğitim hayatım boyunca rehberlik edip tecrübesiyle beni matematik dalında yetiştirdiği için kendisine şükranlarımı sunuyorum. Aynı zamanda çalışmalarımda bilgileri ile bana yardımcı olan Sayın Dr. Sinan ASLAN'a, Sayın Osman KARA'ya teşekkürlerimi sunmak isterim.

Eğitim-öğretim hayatımın tüm kademelerinde her türlü destekleri ve fedakarlıklarıyla beni hiç yalnız bırakmayan başta anne ve babama özellikle eşime teşekkür ederim.

.../.../2023

Furkan GÜZEL

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

(ω_1, ω_2)	: Açık aralık
$[\omega_1, \omega_2]$	: Kapalı aralık
$L[\omega_1, \omega_2]$	: $[\omega_1, \omega_2]$ kapalı aralığında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$L_1[\omega_1, \omega_2]$	: $[\omega_1, \omega_2]$ kapalı aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$C[\omega_1, \omega_2]$	: $[\omega_1, \omega_2]$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi
$C_k[\omega_1, \omega_2]$	: k . mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonların kümesi
I	: $\mathbb{R}$ ' de bir aralık
I°	: I kümesinin içi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
φ'	: φ Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$<$	: Küçüktür
$>$	: Büyüktür
$\leq$	: Küçük veya Eşittir
$\geq$	: Büyük veya Eşittir
$\in$	: Elemanıdır
$\subseteq$	: Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	: Kapsar veya Eşit
$\cap$	: Kesişim
$\cup$	: Birleşim
$\Gamma(\omega)$	: Gamma Fonksiyonu
$\Gamma_p(\omega)$	: Gamma Fonksiyonu Genelleştirilmiş hali

$B(\omega, \psi)$: Beta fonksiyonu

$B_p(\omega, \psi)$: Beta Fonksiyonu Genelleştirilmiş hali



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Konveks Küme

Şekil 2. Konveks Olmayan Küme

Şekil 3. Aralıklar Üzerinde Konveks Fonksiyon ($\varphi(\omega) = |\omega|$)

Şekil 4. Kesin Konvekslik



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Temel Tanım ve Özellikler.....	4
3.MATERYAL VE YÖNTEM	15
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	19
4.1. Türevlenebilir (α_1, m) –Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Caputo-Hibrit ve Atangana Baleanu Operatörler İçeren Yeni Kesirli İntegral Eşitsizlikler	19
5.TARTIŞMA VE SONUÇ	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	48

1.GİRİŞ

Tarihi diferansiyellenme teorisinin ortaya çıkışına kadar eski tarihlere dayanan kesirli analiz konusu, fiziksel yapısındaki karmaşasından kaynaklı, bu konuyla ilgili çalışmaları ertelenmesi ve klasik analiz gibi ifade edilmemesinden dolayı bilim, mühendislikte gereken öneme ulaşamamıştır. Dolayısıyla tabiatın gerçekliğini daha iyi bir şekilde ifade edilmesi perspektifinden kesirli analiz konusunu dikkat çekici hale gelmesi kesirli türev ve integrallerin yerel veya noktasal bir büyüklük olmamalarıydı. Bu yüzden, doğadaki olayların daha iyi betimlenmesinde önemli bir rol oynaması için bu konunun bilim ve mühendislik alanlarında daha yaygın hale getirilmesi gereklidir.

Kesirli analizin doğuşu L'Hospital'in sorusunda yer alan türevin mertebesinin $1/2$ olması durumunda anlamlı olup olmayacağını 1695 yılında ilk kez Leibnitz'e gönderilen özel mektupta sormasıyla kesirli türev ve integral kavramları araştırılmaya başlanmıştır.

Kesirli analiz konusu bir diğer araştırmacı yazar olan Euler'in de, Leibnitz ve L'Hospital'den sonra 1730 yılında dikkatini çekmiştir. 1772 de diferansiyel operatörler için kuvvet alma kanunundan bahsettiği çalışmasında J.L. Lagrange dolaylı bir şekilde kesirli analize katkıda bulunmuştur. 1812 yılında P. S. Laplace, integraller yoluyla kesirli türev, 1819 yılında S.F. Lacroix keyfi mertebeden türevden bahsetmiştir. Bunların ardından 1822 yılında J. B. J. Fourier keyfi mertebeden türevlerle ilgili çalışmaları başlatmıştır.

1823 yılında ilk kez N. H. Abel tarafından kesirli türev ve integral operatörler tautochrone probleminin çözümü için kullanılmıştır. 1832 yılında ilk önemli çalışmayı yapan J. Liouville, kesirli analiz tanım ve teoremlerini teorik olarak problemlere uygulamıştır. 1892 yılında kesirli integrasyon teorisini geliştiren G. F. B. Riemann, yayımladığı çalışmasında önemli bulgular ortaya koymuştur. A. V. Letnikov bu konu üzerine pek çok makaleyi 1868 ile 1872 yılları arasında yayınlamıştır. 1900 ile 1970 yılları arasında kesirli analiz konusuna önemli katkılarda bulunan bilim adamları H. H. Hardy, S. Samko, H. Weyl, M. Riezs, S. Blair'dir. 1970 yılından bu güne kadar J. Spanier, K. B. Oldham, B. Ross, A. Kılbaş, M. Caputo, I. Podlubny, M. Fabrizio, T. Adbeljawad, R. Khalil, A. Atangana, D. Balenau, J. Losada, J.J. Nieto gibi birçok bilim insanı bu konu üzerinde çok ciddi çalışmalarla bilime katkı sağladılar.

Son yıllarda klasik türevin yeni bir formu olarak görülen kesirli türevin yeni tanımları verildi (Khalil et al. 2014). Klasik türeve uyumuyla bilinen bu tanımlar bu alandaki çalışmaların artmasına neden oldu. Yeni kesirli türev tanımı olan uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) , sağladığı bazı özelliklerden dolayı büyük bir ilgiyi üzerine çekmiş ve kısa zamanda bu yeni tanımla alakalı birçok üst düzey çalışma yapılmıştır.

Birçok araştırmacı yazar (Ortiguera and Machado 2015) uyumlu kesirli türevin kesirsel bir operatör olup olmadığı gerçekliğini tartışma konusu yapmıştır. Günümüzde bu soru tartışmaya hala açık görülüyor. Bu konu belki de felsefik bir paradokstan başka bir şey değildir (Batarfi et al. 2015).

Konveks fonksiyonlar, kesirli türev ve kesirli integral eşitsizlikleri üzerine çalışmaları bulunan diğer araştırmacılar M.E. Özdemir, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, A.W. Roberts, D.E. Varberg U.S. Kırmacı, R. Agarval, G. Anastassiou, , N.S. Barnett, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, , M. Darus, M.K. Bakula, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen, P. Cerone, G. Toader, M. Alomari, F. Qi, C.E.M. Pearce J. Pečarić, E. Set, A.O. Akdemir, H. Kavurmacı Önalın, M. Avcı Ardıç, M. Gürbüz, A. Ekinci, Ç. Yıldız şeklinde sıralanabilir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1 Konveks Fonksiyonlar ile İlgili Bazı Temel Tanım ve Özellikler

Bu tezde kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve özellikler aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay): L boştan farklı bir küme ve F bir cisim olmak üzere $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: F \times L \rightarrow L$ işlemleri verilsin. Eğer aşağıda belirtilen koşullar sağlanıyorsa, F cismi üzerinde L ye lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $\omega, \psi \in L$ için $\omega + \psi \in L$ dir,

G2. Her $\omega, \psi, z \in L$ için $\omega + (\psi + z) = (\omega + \psi) + z$ dir,

G3. Her $\omega \in L$ için $\omega + \psi = \psi + \omega = \omega$ olacak şekilde $\psi \in L$ vardır,

G4. Her $\omega \in L$ için $\omega + (-\omega) = (-\omega) + \omega = \psi$ olacak şekilde $-\omega \in L$ vardır,

G5. Her $\omega, \psi \in L$ için $\omega + \psi = \psi + \omega$ dir.

B) $\omega, \psi \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olsun. Dolayısıyla aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha \cdot \omega \in L$ dir,

L2. $\alpha \cdot (\omega + \psi) = \alpha \cdot \omega + \alpha \cdot \psi$ dir,

L3. $(\alpha + \beta) \cdot \omega = \alpha \cdot \omega + \beta \cdot \omega$ dir,

L4. $(\alpha\beta) \cdot \omega = \alpha \cdot (\beta \cdot \omega)$ dir,

L5. $1 \cdot \omega = \omega$ dir. (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

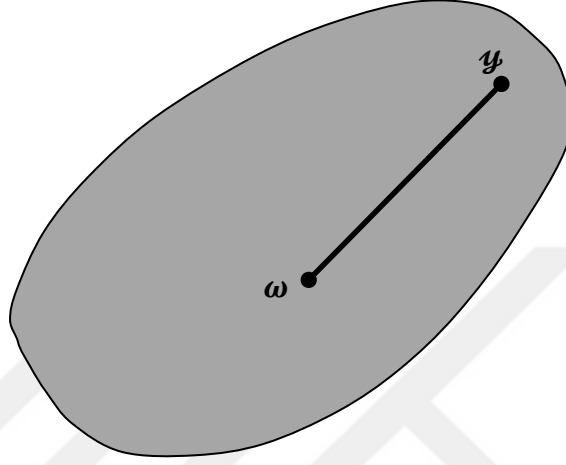
$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye karmaşık lineer uzay adı verilir (Anton, 1994).

Tanım 2.1.2. (Konveks Küme): $A \subseteq L$, $\omega, \psi \in A$ keyfi sabitler ve L bir lineer uzay olmak üzere

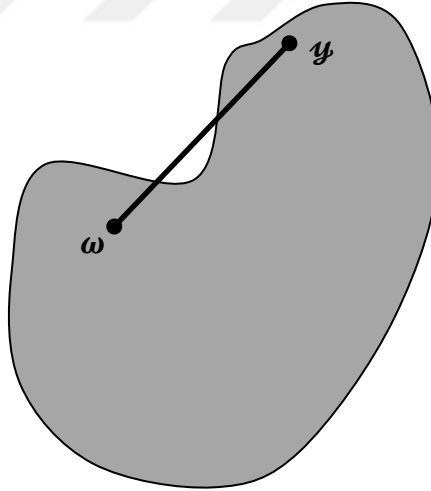
$$B = \{z \in L: z = \alpha\omega + (1 - \alpha)\psi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesi konvekstir denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha\omega + (1 - \alpha)\psi$ eşitliğindeki ω ve ψ 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bu bağıntı her koşulda geçerlidir. Bu nedenle konveks kümenin tanımında $\alpha, 1 - \alpha$ yerine negatif olmayan α, β reel sayılarını $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ifadesi yazılabilir. Geometrik olarak B kümesi her iki ucunda bulunan

noktaları ω ve y olan bir doğru parçasıdır. Burada sezgisel olarak konveks bir küme, en az iki noktayı birleştiren doğru parçasını içeren küme olarak tanımlanabilir (Bayraktar 2000).



Şekil 1. Konveks küme



Şekil 2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.3. (J –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık ve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\omega, y \in I$ için

$$\varphi\left(\frac{\omega + y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(\omega) + \varphi(y)}{2}$$

koşulunu sağlayan φ fonksiyonuna I üzerinde Jensen türünde konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Kesin J –Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık ve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $\omega, \psi \in I$ ve $\omega \neq \psi$ için

$$\varphi\left(\frac{\omega + \psi}{2}\right) < \frac{\varphi(\omega) + \varphi(\psi)}{2}$$

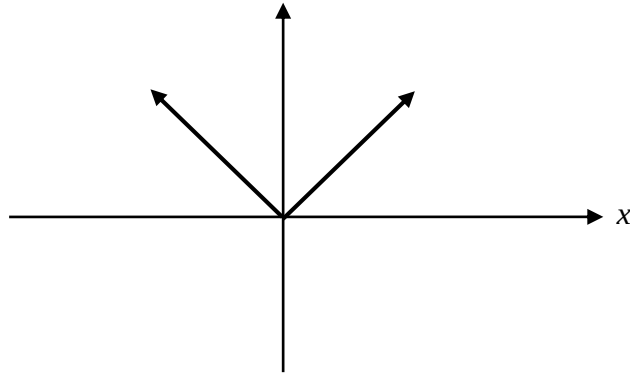
oluyorsa φ fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.5. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık ve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere her $\omega, \psi \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$\varphi(\alpha\omega + (1 - \alpha)\psi) \leq \alpha\varphi(\omega) + (1 - \alpha)\varphi(\psi) \quad (2.1)$$

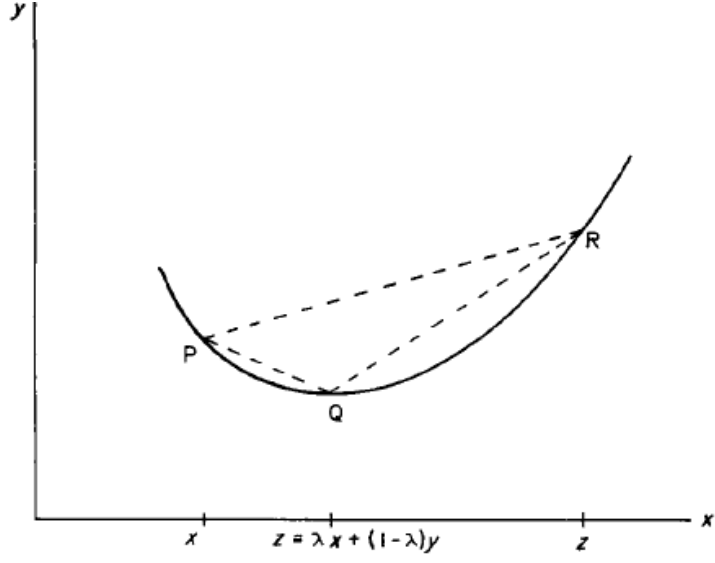
koşulunu sağlayan φ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (Pečarić et al. 1992).

Örnek: $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(\omega) = |\omega|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($\varphi(\omega) = |\omega|$)

Kesin konvekslik kavramını yeniden geometrik açıdan incelendiğinde;



Şekil 4. Kesin konvekslik

P, Q, R bir birinden farklı üç nokta ve $P < Q < R$ olmak üzere PQ , QR ve PR kirişleri eğri üzerinde bulunduğu ve burada kesin konvekslik için gerekli koşulun orataya çıktığı görülür. Yine burada;

$$egimPQ \leq egimPR \leq egimQR$$

ifadesinden açıkça görüldüğü üzere φ fonksiyonu kesin konvektir.

Teorem 2.1.6. Eğer φ fonksiyonu $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında tanımlı, $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında konveks (konkav) ve $\omega_0 \in (\omega_1, \omega_2)$ noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ için

$$\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0) \geq (\leq) \varphi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) \quad (2.2)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (ω_1, b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.7. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): I aralığında tanımlanan φ fonksiyonu için, I üzerinde ω_1, ω_2 de iki nokta olsun. Bu durumda

(a) $\omega_2 > \omega_1$ iken $\varphi(\omega_2) > \varphi(\omega_1)$ ise φ fonksiyonu I üzerinde artandır,

(b) $\omega_2 > \omega_1$ iken $\varphi(\omega_2) < \varphi(\omega_1)$ ise φ fonksiyonu I üzerinde azalandır,

(c) $\omega_2 > \omega_1$ iken $\varphi(\omega_2) \geq \varphi(\omega_1)$ ise φ fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

(d) $\omega_2 > \omega_1$ iken $\varphi(\omega_2) \leq \varphi(\omega_1)$ ise φ fonksiyonu I üzerinde artmayandır denir

(Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.8. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere φ , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

(a) Her $\omega \in J$ için $\varphi'(\omega) > 0$ ise φ fonksiyonu I üzerinde artandır.

(b) Her $\omega \in J$ için $\varphi'(\omega) < 0$ ise φ fonksiyonu I üzerinde azalandır.

(c) Her $\omega \in J$ için $\varphi'(\omega) \geq 0$ ise φ fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

(d) Her $\omega \in J$ için $\varphi'(\omega) \leq 0$ ise φ fonksiyonu I üzerinde artmayandır (Adams

and Essex 2010).

Teorem 2.1.9. φ, g konveks fonksiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ \varphi$ fonksiyonu konvekstir (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.10. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon olmak üzere $\varphi'_-(\omega)$ ve $\varphi'_+(\omega)$ mevcuttur ve I üzerinde artandır (kesin artandır) (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.11. φ fonksiyonunun ikinci türevi I açık aralığında varsa, φ fonksiyonunun bu aralıkta konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter koşul $\omega \in I$ için

$$\varphi''(\omega) \geq (>)0$$

olmasıdır (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.12. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi ω, y reel sayıları için ;

$$|\omega + y| \leq |\omega| + |y|,$$

$$||\omega| - |y|| \leq |\omega - y|,$$

$$||\omega| - |y|| \leq |\omega + y|$$

eşitsizlikleri ve tümevarım metoduyla

$$|\omega_1 + \dots + \omega_n| \leq |\omega_1| + \dots + |\omega_n|$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinović et al. 1993).

Teorem 2.1.13. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. φ ve g , $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\varphi|^p$ ve $|g|^q$, $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)g(\omega)| d\omega \leq \left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} |g(\omega)|^q d\omega \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinović et al. 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir diğer sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Sonuç 2.1.14. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. φ ve g , $[\omega_1, \omega_2]$ kapalı aralığında tanımlanan reel fonksiyonlar, $|\varphi|$ ve $|g|^q$, $[\omega_1, \omega_2]$ kapalı aralığında integrallenebilir fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)g(\omega)| d\omega \leq \left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)| d\omega \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)||g(\omega)|^q d\omega \right)^{\frac{1}{q}}$$

sağlanır.

Teorem 2.1.15. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): $\varphi, [\omega_1, \omega_2]$ kapalı aralığında sürekli reel değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \varphi(\omega) d\omega \right| \leq \int_{\omega_1}^{\omega_2} |\varphi(\omega)| d\omega \quad (a < b)$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinović et al. 1993).

Tanım 2.1.16. (Süreklilik): $\varphi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \omega_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$\omega \in S \text{ ve } |\omega - \omega_0| < \delta \text{ için } |\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, \omega_0) > 0$ sayısı mevcutsa φ, ω_0 'da sürekli bir fonsiyondur denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.17. (Düzgün Süreklilik): $\varphi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|\omega_1 - \omega_2| < \delta$ şartını sağlayan her $\omega_1, \omega_2 \in S$ için $|\varphi(\omega_1) - \varphi(\omega_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcutsa φ, S 'de düzgün sürekli bir fonsiyondur denir (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.18. (Lipschitz Şartı): $\varphi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\psi)| \leq M|\omega - \psi|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcutsa φ, S 'de Lipschitz şartını sağlayan bir fonsiyondur denir (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.19. φ, S' 'de Lipschitz şartını sağlıyorsa φ, S' 'de düzgün sürekli bir fonksiyondur (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.20. (Mutlak Süreklilik): $I, \mathbb{R}$ 'nin boş küme olmayan bir alt kümesi ve $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun. I nin $\{(\omega_{1i}, \omega_{2i})\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimi olsun. Şayet $\forall \varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |\omega_{2i} - \omega_{1i}| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |\varphi(\omega_{2i}) - \varphi(\omega_{1i})| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı var ise φ fonksiyonu I kümesinde mutlak sürekli bir fonksiyondur denir (Carter and Brunt 2000).

Konvekslik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilecektir.

Teorem 2.1.21. $[\omega_1, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise φ Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $\varphi, [\omega_1, \omega_2]$ aralığında mutlak sürekli ve I° 'de süreklidir (Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.22. φ fonksiyonu $[\omega_1, \omega_2]$ aralığında konveks ise

- a. $\varphi, (\omega_1, \omega_2)$ aralığında süreklidir ve
- b. $\varphi, [\omega_1, \omega_2]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Örnek: $\varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & \omega = -1 \text{ ise} \\ \omega^2, & \omega \in (-1, 1) \text{ ise} \\ 2, & \omega = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

funksiyonu $[-1, 1]$ aralığında konveks; $(-1, 1)$ aralığında süreklidir.

Tanım 2.1.23. (Ortalama Fonksiyonu): M fonksiyonu $M: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ şeklinde verilsin. Eğer;

- 1) $M(\omega, \psi) = M(\psi, \omega)$
- 2) $M(\omega, \omega) = \omega$
- 3) $\omega < M(\omega, \psi) < \psi, \quad \omega < \psi$
- 4) $M(a\omega, a\psi) = aM(\omega, \psi), \quad a > 0$

şartları sağlanıyorsa M fonksiyonu ortalama fonksiyonu olarak adlandırılır (Anderson et al. 2007).

Örnek 2.1.24. $M(\omega, \psi) = A(\omega, \psi) = \frac{\omega + \psi}{2}$ ise Aritmetik ortalama,

$M(\omega, \psi) = G(\omega, \psi) = \sqrt{\omega\psi}$ ise Geometrik ortalama,

$M(\omega, \psi) = H(\omega, \psi) = \frac{1}{A(\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\psi})}$ ise Harmonik ortalama,

$M(\omega, \psi) = L(\omega, \psi) = \frac{\omega - \psi}{\log \omega - \log \psi}$, $\omega \neq \psi$ ve $L(\omega, \omega) = \omega$ ise Logaritmik ortalama,

$M(\omega, \psi) = I(\omega, \psi) = \left(\frac{1}{e}\right) \left(\frac{\omega^\omega}{\psi^\psi}\right)^{\frac{1}{\omega - \psi}}$, $\omega \neq \psi$ ve $I(\omega, \omega) = \omega$ ise Identrik ortalama

yazılabilir (Anderson et al 2007).

Tanım 2.1.25. (MN –Konveks (Konkav) Fonksiyon): $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $I \subseteq (0, \infty)$ ve M, N herhangi iki ortalama fonksiyonu olsun. Eğer $\forall \omega, \psi \in I$ için;

$$\varphi(M(\omega, \psi)) \leq (\geq) N(\varphi(\omega), \varphi(\psi))$$

şartı sağlanıyor ise φ fonksiyonuna MN –konveks (konkav) fonksiyonu denir (Anderson et al 2007).

Teorem 2.1.26. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, \omega_2)$ ve $0 < \omega_2 < \infty$ olarak verilsin.

1- φ nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul φ nin konveks (konkav) olmasıdır.

2- φ nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\log \varphi$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

3- φ nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{\varphi}$ nin konveks (konkav) olmasıdır.

4- φ nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\omega_2 e^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

5- φ nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\omega_2 e^{-t})$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

6- φ nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{\varphi(\omega_2 e^{-t})}$ nin $(0, \infty)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

7- φ nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right)$ nin $\left(\frac{1}{\omega_2}, \infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

8- φ nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\log \varphi\left(\frac{1}{\omega_2}\right)$ nin $\left(\frac{1}{\omega_2}, \infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır.

9- φ nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{\omega}\right)}$ nin $\left(\frac{1}{\omega_2}, \infty\right)$ üzerinde konveks (konkav) olmasıdır (Anderson et al 2007).

Teorem 2.1.27. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$ sürekli fonksiyonu verilsin. (4)-(9) seçenekleri için $I = (0, \omega_2)$ ve $0 < \omega_2 < \infty$ olarak verilsin.

1- φ nin AA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\varphi'(\omega)$ in artan (azalan) olmasıdır.

2- φ nin AG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

3- φ nin AH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\varphi'(\omega)}{\varphi^2(\omega)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

4- φ nin GA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\omega\varphi'(\omega)$ in artan (azalan) olmasıdır.

5- φ nin GG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\omega\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

6- φ nin GH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\omega\varphi'(\omega)}{\varphi^2(\omega)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

7- φ nin HA –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\omega^2\varphi'(\omega)$ in artan (azalan) olmasıdır.

8- φ nin HG –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\omega^2\varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)}$ in artan (azalan) olmasıdır.

9- φ nin HH –konveks (konkav) olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\omega^2 \varphi'(\omega)}{\varphi(\omega)^2}$ in artan (azalan) olmasıdır (Anderson et al 2007).

Sonuç 2.1.28. Herhangi bir ortalama fonksiyonu olan N ; eğer φ fonksiyonu artan (azalan) ise; AN- konveksliği GN- konveksliği içerirken, GN- konvekslik ise HN- konveksliği içerir. Dolayısıyla; aralarında $H(\omega, \psi) \leq G(\omega, \psi) \leq A(\omega, \psi)$ ilişki dikkate alınarak;

1- φ , AH-konveks ise AG-konvektir ve dolayısıyla AA-konvektir.

2- φ , GH- konveks ise GG- konvektir ve dolayısıyla GA- konvektir.

3- φ , HH- konveks ise HG- konvektir ve dolayısıyla HA- konvektir ifadeleri yazılabilir (Anderson et al 2007).

3. MATERYAL YÖNTEM

Tanım 3.1.1. (Caputo-Hibrit Operatör): $\varphi : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Ayrıca φ ve φ' fonksiyonları lokal olarak I üzerinde L^1 e ait fonksiyonlar olmak üzere Caputo-Hibrit operatörü şu şekilde tanımlanabilir:

$${}^0{}^{CPC}D_t^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (K_1(\alpha)\varphi(\tau) + K_0(\alpha)\varphi'(\tau))(t-\tau)^{-\alpha} d\tau$$

Burada $\alpha \in [0,1]$ ve K_1 ve K_0 aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyonlardır.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_0(\alpha) = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} K_0(\alpha) = 1; \quad K_0(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in (0,1]; \quad (2.2)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} K_1(\alpha) = 0; \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} K_1(\alpha) = 1; \quad K_1(\alpha) \neq 0, \quad \alpha \in [0,1] \quad (2.3)$$

(Baleanu et. al., 2020).

Bu operatör yardımıyla elde edilen bazı eşitsizlikler aşağıda sunulmuştur.

Teorem 3.1.2. $\varphi : I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^0 üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ve $|\varphi''|$ fonksiyonları I üzerinde konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega_1)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega_1)|}{(3-\alpha)} \\ & \quad + \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega_2)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega_2)|}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \\ & \quad + \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega)|}{(2-\alpha)} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0,1], \omega_1 < \omega < \omega_2$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al. 2022).

Teorem 3.1.3. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, \omega_2], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde s –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega_1)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega_1)|}{(3 - \alpha)} \\ & \quad + \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega_2)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega_2)|}{(3 - \alpha)(2 - \alpha)} \\ & \quad + \frac{K_1(\alpha)|\varphi'(\omega)| + K_0(\alpha)|\varphi''(\omega)|}{(2 - \alpha)} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0, 1], \omega_1 < \omega < \omega_2, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al. 2022).

Teorem 3.1.4. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, \omega_2], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde s –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \times (2 - \alpha)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \leq \left\{ K_1(\alpha) \left(\frac{|\varphi'(\omega_1)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\varphi'(\omega)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + K_0(\alpha) \left(\frac{|\varphi''(\omega_1)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\varphi''(x)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + K_1(\alpha) \left(\frac{|\varphi'(\omega)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\varphi'(\omega_2)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + K_0(\alpha) \left(\frac{|\varphi''(\omega)|^q}{(3 - \alpha)} + \frac{|\varphi''(\omega_2)|^q}{(2 - \alpha)(3 - \alpha)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0,1], \omega_1 < \omega < \omega_2, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Teorem 3.1.5. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, \omega_2], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \frac{2(K_1(\alpha) + K_0(\alpha))}{p^2(1 - \alpha) + p} + \frac{K_1(\alpha)}{2q} (|\varphi'(\omega_1)|^q + 2|\varphi'(\omega)|^q |\varphi'(\omega_2)|^q) \\ & \quad + \frac{K_0(\alpha)}{2q} (|\varphi''(\omega_1)|^q + 2|\varphi''(\omega)|^q |\varphi''(\omega_2)|^q) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0,1], \omega_1 < \omega < b, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

Tanım 3.1.6. (Atangana Baleanu Kesirli Türev Operatörü): $\varphi \in H^1(\theta_1, \theta_2), \theta_2 > \theta_1, \alpha \in [0,1]$, olmak üzere yeni kesirli türevin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}^{ABC}_{\theta_1} D_{\tau_1}^{\alpha} [\varphi(\tau_1)] = \frac{B(\alpha)}{(1 - \alpha)} \int_a^{\tau_1} \varphi'(\omega) E_{\alpha} \left[-\alpha \frac{(\tau_1 - x)^{\alpha}}{(1 - \alpha)} \right] d\omega$$

(Atangana and Baleanu, 2016).

Tanım 3.1.7. $\varphi \in H^1(\theta_1, \theta_2), \theta_2 > \theta_1, \alpha \in [0,1]$, olmak üzere yeni kesirli türevin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$${}^{ABR}_{\theta_1} D_{\tau_1}^{\alpha} [\varphi(\tau_1)] = \frac{B(\alpha)}{(1 - \alpha)} \frac{d}{d\tau_1} \int_{\theta_1}^{\tau_1} \varphi(\omega) E_{\alpha} \left[-\alpha \frac{(\tau_1 - x)^{\alpha}}{(1 - \alpha)} \right] d\omega$$

(Atangana and Baleanu, 2016).

Aynı çalışmada ilgili integral operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.8. $\varphi \in H^1(\theta_1, \theta_2), \theta_2 > \theta_1, \alpha \in [0,1]$, olmak üzere kesirli integral tanımı verilmiştir:

$${}_{\theta_1}^{AB}I^\alpha[\varphi(\tau_1)] = \frac{(1-\alpha)}{B(\alpha)}\varphi(\tau_1) + \frac{\alpha}{B(\alpha)}\int_{\theta_1}^{\tau_1}(\tau_1 - \omega)^{\alpha-1}\varphi(\omega)d\omega$$

(Atangana and Baleanu, 2016).

Teorem 3.1.8. $\varphi: J \subset (0, \infty)$ fonksiyonu J^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in J^0$, $\varphi' \in L[\omega_1, \omega_2]$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ikinci mertebeden s –konveks fonksiyon ve $|\varphi'| \leq K, K > 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2], \varsigma, s \in (0, 1]$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\ & \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma\{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma\{\varphi(\omega_2)\}] \\ & \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\ & \leq \frac{K}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1} + (\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{\omega_2 - \omega_1} \right) \left(\frac{1}{\varsigma + s + 1} \right. \\ & \quad \left. + \beta(\varsigma + 1, s + 1) \right). \end{aligned}$$

Burada $B(\varsigma) > 0$ ve β Euler Beta fonksiyonudur (Ardıç et al. 2021).

Teorem 3.1.9. $\varphi: J \subset (0, \infty)$ fonksiyonu J^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in J^0$, $\varphi' \in L[\omega_1, \omega_2]$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ikinci mertebeden s –konveks fonksiyon ve $|\varphi'| \leq K, \omega \in [\omega_1, \omega_2], \varsigma, s \in (0, 1]$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\ & \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma\{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma\{\varphi(\omega_2)\}] \\ & \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\ & \leq \frac{K}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2}{s + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1} + (\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{\omega_2 - \omega_1} \right). \end{aligned}$$

Burada $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dır (Ardıç et al. 2021).

Teorem 3.1.10. Teorem 3.1.9. da verilen şartlar geçerli olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} [(\omega_2 - \omega)^\zeta + (\omega - \omega_1)^\zeta] \right. \\ & \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_2)\}] \\ & \quad \left. + \frac{1 - \zeta}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\ & \leq \frac{K}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\zeta + s + 1} \right. \\ & \quad \left. + \beta(\zeta + 1, s + 1) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1} + (\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{\omega_2 - \omega_1} \right) \end{aligned}$$

(Ardıç et al. 2021).

Teorem 3.1.11. Teorem 3.1.9. da verilen şartlar geçerli olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} [(\omega_2 - \omega)^\zeta + (\omega - \omega_1)^\zeta] \right. \\ & \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_2)\}] \\ & \quad \left. + \frac{1 - \zeta}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\ & \leq \frac{K}{B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1} + (\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{\omega_2 - \omega_1} \right) \left(\frac{q - 1}{\zeta(q - p) + q - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Burada $q \geq p > 1$ şeklindedir (Ardıç et al. 2021).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Türevlenebilir (α_1, m) –Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Caputo-Hibrit ve Atangana Baleanu Operatörler İçeren Yeni Kesirli İntegral Eşitsizlikler

Bu kısımda türevlenebilir (α_1, m) –konveks fonksiyonlarla elde edilen Caputo-Hibrit ve Atangana Baleanu kesirli integral operatörler içeren eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Lemma 4.1.1. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ve $|\varphi''|$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi''(ta + (1-t)\omega) dt \\ & + K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\ & + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi''(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\ & = \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \\ & + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha} \varphi \omega}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha} \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha \in [0, 1], \omega_1 < \omega < \omega_2$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır (Gürbüz et al., 2022).

İspat: Yukarıdaki varsayımlardan hareketle

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt \\
&= t^{1-\alpha} \frac{\varphi(t\omega_1 + (1-t)\omega)}{\omega_1 - \omega} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\varphi(t\omega_1 + (1-t)\omega)}{\omega_1 - \omega} (1-\alpha) t^{-\alpha} dt \\
&= -\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{\omega - \omega_1} \int_0^1 t^{-\alpha} \varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt \\
&= -\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{\omega - \omega_1} \int_{\omega}^{\omega_1} \left(\frac{\omega - u}{\omega - \omega_1} \right)^{-\alpha} \varphi(u) \frac{du}{\omega_1 - \omega} \\
&= -\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} \int_{\omega_1}^{\omega} (\omega - u)^{-\alpha} \varphi(u) du \tag{2.4}
\end{aligned}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt \\
&= -\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} \int_{\omega_1}^{\omega} (\omega - u)^{-\alpha} \varphi'(u) du \tag{2.5}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sırasıyla (2.4) $\frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$ ve (2.5) $\frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$ ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt + \frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi''(t\omega_1 + (1-t)\omega) dt \\
&= \frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{\varphi(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} \int_{\omega_1}^{\omega} (\omega - u)^{-\alpha} \varphi(u) du \right) \\
&+ \frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} \int_{\omega_1}^{\omega} (\omega - u)^{-\alpha} \varphi'(u) du \right) \\
&= -\frac{1}{(\omega - \omega_1)\Gamma(1-\alpha)} (K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_a^{\omega} K_1(\alpha)\varphi(u) + K_0(\alpha)\varphi'(u)(\omega-u)^{-\alpha} du \right] \\
&= -\frac{1}{(\omega - \omega_1)\Gamma(1-\alpha)} (K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} {}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha} \varphi(\omega)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\
&= t^{1-\alpha} \frac{\varphi(t\omega + (1-t)\omega_2)}{\omega - \omega_2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\varphi(t\omega + (1-t)\omega_2)}{\omega - \omega_2} (1-\alpha) t^{-\alpha} dt \\
&= -\frac{\varphi(\omega)}{\omega_2 - \omega} + \frac{1-\alpha}{\omega_2 - \omega} \int_0^1 t^{-\alpha} \varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\
&= -\frac{\varphi(\omega)}{\omega_2 - \omega} + \frac{1-\alpha}{\omega_2 - \omega} \int_b^{\omega} \left(\frac{\omega_2 - u}{\omega_2 - \omega} \right)^{-\alpha} \varphi(u) \frac{du}{\omega - \omega_2} \\
&= -\frac{\varphi(\omega)}{\omega_2 - \omega} \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \int_{\omega}^{\omega_2} (\omega_2 - u)^{-\alpha} \varphi(u) du
\end{aligned} \tag{2.7}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\
&= -\frac{\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} + \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \int_{\omega}^{\omega_2} (\omega_2 - u)^{-\alpha} \varphi'(u) du \quad (2.8)
\end{aligned}$$

sırasıyla (2.7) $\frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$ ve (2.8) $\frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}$ ile çarpılarak taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2) dt + \frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 t^{1-\alpha} \varphi''(t\omega + (1-t)\omega_2) dt \\
&= \frac{K_1(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{\varphi(\omega)}{\omega_2 - \omega} + \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \int_{\omega}^{\omega_2} (\omega_2 - u)^{-\alpha} \varphi(u) du \right) \\
&+ \frac{K_0(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} + \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \int_{\omega}^{\omega_2} (\omega_2 - u)^{-\alpha} \varphi'(u) du \right) \\
&= -\frac{1}{(\omega_2 - \omega)\Gamma(1-\alpha)} (K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}\Gamma(1-\alpha)} \left[\int_{\omega}^b K_1(\alpha)\varphi(u) + K_0(\alpha)\varphi'(u)(\omega_2 - u)^{-\alpha} du \right] \\
&= -\frac{1}{(\omega_2 - \omega)\Gamma(1-\alpha)} (K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)) \\
&+ \frac{1-\alpha}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} {}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha} \varphi(\omega_2) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.6) ve (2.9) ifadeleri toplanarak $\Gamma(1-\alpha)$ ile çarpımı sonucunda istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.2. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ve $|\varphi''|$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega_1)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_0(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi''(\omega_1)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_1(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_0(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi''(\omega)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0,1], \omega_1 < \omega < \omega_2$, K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Lemma 4.1.1 ve mutlak değerin özellikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} |\varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega)| dt \\
& \quad + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} |\varphi''(t\omega_1 + (1-t)\omega)| dt \\
& \quad + K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} |\varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2)| dt \\
& \quad + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} |\varphi''(t\omega + (1-t)\omega_2)| dt \tag{2.10}
\end{aligned}$$

yazılır. $|\varphi'|$ ve $|\varphi''|$, I üzerinde türevlenebilir (α_1, m) -konveks fonksiyonlar olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega_1)| + m(1 - t^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) dt \\
& \quad + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega_1)| + m(1 - t^{\alpha_1}) \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) dt \\
& \quad + K_1(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)| + m(1 - t^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right) dt \\
& \quad + K_0(\alpha) \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega)| + m(1 - t^{\alpha_1}) \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right) dt.
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq K_1(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega_1)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_0(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi''(\omega_1)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_1(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right) \\
& \quad + K_0(\alpha) \left(\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi''(\omega)| + m \frac{\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}\omega_1^\alpha D_\omega^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}\omega^\alpha D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
& \leq \frac{1}{((1 - \alpha)p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ K_1(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega_1)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi''(\omega_1)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi''(\omega)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \alpha, \alpha_1 \in [0, 1], \omega_1 < \omega < \omega_2$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat. Hölder eşitsizliği (2.10) ifadesine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}\omega_1^\alpha D_\omega^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}\omega^\alpha D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\omega_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi''(t\omega_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega_2) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\varphi''(t\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega_2) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ nin (α_1, m) -konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ K_1(\alpha) \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega_1)|^q + m(1-t^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega_1)|^q \right. \\
&\quad + m(1-t^{\alpha_1}) \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + K_1(\alpha) \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad + m(1-t^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 t^{(1-\alpha)p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega)|^q + m(1-t^{\alpha_1}) \right. \\
&\quad \left. \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left. \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit integral hesaplamaları ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{((1-\alpha)p+1)^{\frac{1}{p}}} \left\{ K_1(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega_1)|^q \right. \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\omega_1)|^q \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \left. \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4 $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2 - \alpha} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ K_1(\alpha) \left[\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega_1)|^q \right. \right. \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi''(\omega_1)|^q \right. \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{2 - \alpha + \alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\ & \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(2 - \alpha)(2 - \alpha + \alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0, 1], \omega_1 < \omega < \omega_2, q \geq 1$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat: Power mean eşitsizliği (2.10) ifadesine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\ & \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{1-\alpha} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\omega_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{1-\alpha} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\varphi''(t\omega_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_1(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{1-\alpha} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\varphi'(t\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega_2) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] + K_0(\alpha) \left[\left(\int_0^1 t^{1-\alpha} dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |\varphi''(t\omega \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1-t)\omega_2) |^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonlarının (α_1, m) – konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}_\omega D_\omega^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}_\omega D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ K_1(\alpha) \left(\int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega_1)|^q + m(1 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - t^{\alpha_1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega_1)|^q + m(1 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - t^{\alpha_1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad \left. + K_1(\alpha) \left(\int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q + m(1 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - t^{\alpha_1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left(\int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega)|^q + m(1 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - t^{\alpha_1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2-\alpha}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left\{ K_1(\alpha) \left[\frac{1}{2-\alpha+\alpha_1} |\varphi'(\omega_1)|^q \right. \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{(2-\alpha)(2-\alpha+\alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \Big]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{2-\alpha+\alpha_1} |\varphi''(\omega_1)|^q \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{(2-\alpha)(2-\alpha+\alpha_1)} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \Big]^{\frac{1}{q}} + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{2-\alpha+\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad + \frac{m\alpha_1}{(2-\alpha)(2-\alpha+\alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \Big]^{\frac{1}{q}} + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{2-\alpha+\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m\alpha_1}{(2-\alpha)(2-\alpha+\alpha_1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. $\varphi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve $\varphi, \varphi' \in L_1[\omega_1, b], \omega_1 < \omega_2$ olsun. Eğer $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonları I üzerinde (α_1, m) –konveks fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^\alpha \varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^\alpha \varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega_1)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right) \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi''(\omega_1)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega}{m} \right) \right|^q \right) \Big] + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right) \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha) + p} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi''(\omega)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi'' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $\alpha, \alpha_1 \in [0,1], \omega_1 < \omega < \omega_2, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve K_0, K_1 fonksiyonları (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

İspat: Young eşitsizliği (2.10) ifadesine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 t^{p(1-\alpha)} dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 |\varphi'(t\omega_1 + (1-t)\omega)|^q dt \right] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 t^{p(1-\alpha)} dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 |\varphi''(t\omega_1 + (1-t)\omega)|^q dt \right] + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 t^{p(1-\alpha)} dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 |\varphi'(t\omega + (1-t)\omega_2)|^q dt \right] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p} \int_0^1 t^{p(1-\alpha)} dt \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 |\varphi''(t\omega + (1-t)\omega_2)|^q dt \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi''|^q$ fonksiyonlarının (α_1, m) – konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
& \quad \left. + \Gamma(2 - \alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega_1)|^q + m(1 \right. \\
&\quad \left. - t^{\alpha_1}) |\varphi'(\frac{\omega}{m})|^q \right) dt \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega_1)|^q + m(1 \right. \\
&\quad \left. - t^{\alpha_1}) |\varphi''(\frac{\omega}{m})|^q \right) dt \Big] + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q + m(1 \right. \\
&\quad \left. - t^{\alpha_1}) |\varphi'(\frac{\omega_2}{m})|^q \right) dt \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 t^{1-\alpha} \left(t^{\alpha_1} |\varphi''(\omega)|^q + m(1 - t^{\alpha_1}) |\varphi''(\frac{\omega_2}{m})|^q \right) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\left| -\frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega_1) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega_1)}{\omega - \omega_1} - \frac{K_1(\alpha)\varphi(\omega) + K_0(\alpha)\varphi'(\omega)}{\omega_2 - \omega} \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2-\alpha) \left(\frac{{}^{CPC}D_{\omega_1}^{\alpha}\varphi(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{2-\alpha}} + \frac{{}^{CPC}D_{\omega_2}^{\alpha}\varphi(\omega_2)}{(\omega_2 - \omega)^{2-\alpha}} \right) \right| \leq K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega_1)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\frac{\omega}{m})|^q \right) \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\omega_1)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\frac{\omega}{m})|^q \right) \Big] + K_1(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\frac{\omega_2}{m})|^q \right) \Big] + K_0(\alpha) \left[\frac{1}{p^2(1-\alpha)+p} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{q} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\omega)|^q + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} |\varphi''(\frac{\omega_2}{m})|^q \right) \right]
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.6. $\omega_1 < \omega_2$, ve $\omega_1, \omega_2 \in J^0$ olsun. Eğer $\varphi: J \subset (0, \infty)$ fonksiyonu J^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve eğer $\varphi' \in L[\omega_1, \omega_2]$, $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, $\varsigma, \alpha_1 \in [0, 1]$ ise aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& = \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^\varsigma |\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1)| d\omega \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^\varsigma |\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1)| d\omega. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Burada $B(\varsigma) > 0$ ve β Euler Beta fonksiyonudur (Ardıç et al. 2021).

İspat. Lemma 4.1.6 ifadesinin sağ tarafı için kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{(\omega - \omega_1)^\varsigma}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^{\varsigma-1} \varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1) d\omega \\
& = \frac{(\omega - \omega_1)^\varsigma}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left[\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1) \frac{\omega^\varsigma}{\varsigma} \Big|_0^1 \right. \\
& \quad \left. - \int_0^1 \frac{\omega^\varsigma}{\varsigma} \varphi'(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1) (\omega - \omega_1) d\omega \right] \\
& = \frac{(\omega - \omega_1)^\varsigma}{\varsigma B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \varphi(\omega) \\
& \quad - \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{\varsigma B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^\varsigma \varphi'(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1) d\omega \quad (2.12)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{(\omega_2 - \omega)^\varsigma}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^\varsigma \varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_2) d\omega \\
&= \frac{(\omega_2 - \omega)^\varsigma}{B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left[\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_2) \frac{\omega^\varsigma}{\varsigma} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \frac{\omega^\varsigma}{\varsigma} \varphi'(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_2)(\omega_2 - \omega) d\omega \right] \\
&= \frac{(\omega_2 - \omega)^\varsigma}{\varsigma B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \varphi(\omega) \\
&\quad - \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{\varsigma B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \int_0^1 \omega^\varsigma \varphi'(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_2) d\omega \quad (2.13)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. (2.12) ve (2.13) eşitlikleri $-\frac{\varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplamı lemma sonucunda ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.7. $\varphi: J \subset (0, \infty)$ fonksiyonu J^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in J^0$, $\varphi' \in L[\omega_1, \omega_2]$ olsun. Eğer $|\varphi''|$ ikinci mertebeden (α_1, m) -konveks fonksiyon ve $|\varphi'| \leq K, K > 0, \omega \in [\omega_1, \omega_2], \varsigma, \alpha_1 \in (0, 1]$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} \right) \left\{ |\varphi'(\omega)| + \frac{m\alpha_1}{\varsigma + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right| \right\} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} \right) \left\{ |\varphi'(\omega)| \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\varsigma + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right\} \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Burada $B(\varsigma) > 0$ ve β Euler Beta fonksiyonudur.

İspat: (2.11)'deki eşitliği kullanarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} [(\omega_2 - \omega)^\zeta + (\omega - \omega_1)^\zeta] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \zeta}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^1 \omega^\zeta |\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1)| d\omega \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^1 \omega^\zeta |\varphi(\omega\omega + (1 - \omega)\omega_1)| d\omega
\end{aligned}$$

yazılır. (2.14) te $|\varphi'|$ ve $|\varphi'| \leq K$ fonksiyonlarının (α_1, m) -konveksliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} [(\omega_2 - \omega)^\zeta + (\omega - \omega_1)^\zeta] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \zeta}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^1 \omega^\zeta \left| \omega^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)| \right. \\
& \quad \left. + m(1 - \omega^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right| \right| d\omega \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \int_0^1 \omega^\zeta \left| \omega^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)| \right. \\
& \quad \left. + m(1 - \omega^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right| d\omega \\
& = \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta + \alpha_1 + 1} \right) \left\{ |\varphi'(\omega)| + \frac{m\alpha_1}{\zeta + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right| \right\} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta + \alpha_1 + 1} \right) \left\{ |\varphi'(\omega)| + \frac{m\alpha_1}{\zeta + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right| \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.8. $\varphi: J \subset (0, \infty)$ fonksiyonu J^0 üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in J^0$, $\varphi' \in L[\omega_1, \omega_2]$ olsun. Eğer $|\varphi'|$ ikinci mertebeden

(α_1, m) –konveks fonksiyon ve $|\varphi'| \leq K, \omega \in [\omega_1, \omega_2], \varsigma, \alpha_1 \in (0, 1]$ ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1 + 1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Burada $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Teorem 4.1.8 i kanıtlamak için Lemma 4.1.6 ya $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi'| \leq K$ için Hölder eşitsizliği ve (α_1, m) -konveksliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler yazılır.

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 w^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q + m(1 - w^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q dw \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 w^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + m(1 - w^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q dw \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\alpha_1+1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\alpha_1}{\alpha_1+1} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.9. Teorem 4.1.8'in şartları geçerli olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} [(\omega_2 - \omega)^\zeta + (\omega - \omega_1)^\zeta] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\zeta \{\varphi(\omega_2)\}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1 - \zeta}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
&\leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\zeta + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\zeta+1)(\zeta + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\zeta+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\zeta)\Gamma(\zeta)} \left(\frac{1}{\zeta+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\zeta + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
&\quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\zeta+1)(\zeta + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

İspat. Teorem 4.1.8. de kullanılan işlem adımlarına ek olarak, farklı bir şekilde $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi'| \leq K$ için Hölder eşitsizliği ve (α_1, m) -konveks fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \omega^\varsigma \left[\omega^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m(1 - \omega^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right] d\omega \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \omega^\varsigma \left[\omega^{\alpha_1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m(1 - \omega^{\alpha_1}) \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right] d\omega \right)^{\frac{1}{q}} . \\
& = \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{1}{\varsigma + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} .
\end{aligned}$$

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.10. Teorem 4.1.8’de verilen şartlar geçerli olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{q - 1}{\varsigma(q - p) + q - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{q - 1}{\varsigma(q - p) + q - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\varsigma p + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma p + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Burada $q \geq p > 1$ şeklindedir.

İspat. Yine, önceki teoremin ispatına benzer bir yolla $|\varphi'|^q$ ve $|\varphi'| \leq K$ için Hölder eşitsizliği ve (α_1, m) -konveksliği kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\varphi(\omega)}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} [(\omega_2 - \omega)^\varsigma + (\omega - \omega_1)^\varsigma] \right. \\
& \quad - \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)} [{}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_1)\} + {}^{AB}I_\omega^\varsigma \{\varphi(\omega_2)\}] \\
& \quad \left. + \frac{1 - \varsigma}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)} [\varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2)] \right| \\
& \leq \frac{(\omega - \omega_1)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{q - 1}{\varsigma(q - p) + q - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\varsigma + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_1}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\omega_2 - \omega)^{\varsigma+1}}{(\omega_2 - \omega_1)B(\varsigma)\Gamma(\varsigma)} \left(\frac{q - 1}{\varsigma(q - p) + q - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\varsigma p + \alpha_1 + 1} |\varphi'(\omega)|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha_1}{(\varsigma p + 1)(\varsigma + \alpha_1 + 1)} \left| \varphi' \left(\frac{\omega_2}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle konveks fonksiyonlar ve çeşitleri, temel bazı eşitsizlikler ve kesirli analizin temel kavramları tanıtılmıştır. Çalışmanın ana bölümünü oluşturan dördüncü kısımda literatürde var olan lemmaları göz önüne alarak, Hölder, Power- Mean ve Young eşitsizliği gibi çeşitli klasik eşitsizlikler yardımıyla (α_1, m) -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri bulunmuştur.

Araştırma bulgularının elde edilmesi sürecinde türevlenebilir (α_1, m) -konveks fonksiyonlar odak noktasında yer almakla birlikte Atangana-Baleanu ve Caputo hibrit kesirli integral operatörler yardımıyla sonuçlar ispat edilmiştir. Bu iki operatör kesirli analizde son yıllarda ortaya konmuş olan çeşitli alanlarda uygulamaları ile efektif sonuçlara kapı açan önemli kesirli integral operatörlerdir. Tez çalışmasına özgünlük katan yönü oluşturan bu iki operatör ile yeni ve genel integral eşitsizliklere ulaşılmıştır.

Konuyu araştırmaya merakı olan araştırmacılar çeşitli sınıfları olan konveks fonksiyonlar için ve farklı kesirli integral operatörler kullanarak yeni eşitsizlikler oluşturabilirler. Nitekim bu çalışmada özel olarak $\alpha_1 = 1$ ve $m = 1$ alınırsa konveks fonksiyon sınıfına indirgenmiş eşitsizlikler elde edilir.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., (2010). Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. and Sevinç, F., (2018). Some inequalities for GG-convex functions. Turkish Journal of Ineq. 2(2), 78-86.
- Akdemir, A.O., Set, E., Özdemir, M.E. and Yalçın, A., (2015). New generalizations for functions whose second derivatives are GG-convex. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 102.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (2007). Generalized convexity and Inequalities, J. Math. Anal. Appl. 335, 1294-1308.
- Anton, H., (1994). Elementary Linear Algebra, Wiley & Sons, Inc.
- Atangana, A., Baleanu, D., (2016). New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, Thermal Science, 20, 2, pp. 757-763
- Avcı, M.A, Akdemir, A.O, and Kavurmacı, H.Ö., (2021). Integral inequalities for differentiable s-convex functions in the second sense via Atangana-Baleanu integral operators, 4th International Conference on Mathematical and Related Sciences Book of Proceedings. 2021.
- Avcı, M.A., Akdemir, A.O. and Set, E., (2015). New integral via GA-convex functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 103.
- Azpeitia, A.G., (1994). Convex functions and the Hadamard inequality, Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.
- Baleanu, D., Fernandez, A., & Akgül, A. (2020). On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals. Mathematics, 8(3), 360.
- Bayraktar, M., (2000). Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Bayraktar, M., (2010). Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Carter, M. and van Brunt, B., (2000). The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction. Springer-Verlag, 228, New York.
- Dragomir, S.S., (2015). Inequalities of Hermite – Hadamard type for GA-convex functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 30.
- Dragomir, S.S., (2015). Some new inequalities of Hermite – Hadamard type for GA-convex functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 18, article 33.

- Ekinci, A., (2014). Klasik Eşitsizlikler Yoluyla Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Gürbüz, M., Akdemir, A.O. and Dokuyucu, M.A. (2022). Novel approaches for differentiable convex functions via the proportional Caputo-hybrid operators. *Fractal and Fractional* 6(5): 258.
- İşcan, İ., (2013). New general integral inequalities for some GA-convex and quasi-geometrically convex functions via fractional integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013, 491.
- İşcan, İ., (2014). Hermite – Hadamard type inequalities for GA-s convex functions. *Le Matematiche*, vol. LXIX- Fasc.II pp.129-146.
- Ji, A.P., Zhang, T.Y. and Qi, F., (2013). Integral inequalities of Hermite – Hadamard type for (α, m) – GA – convex functions. arXiv:1306.0852v1 [math.CA].
- Kavurmacı, H., (2012). Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite – Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Kavurmacı Önalın, H. and Tunç, M., (2014). Some Simpson type integral inequalities for s-geometrically convex functions with applications. *Le Matematiche*, vol. LXIX – Fasc.II pp.193-204.
- Kunt, M. and İşcan, İ., (2015). On new inequalities of Hermite – Hadamard – Fejer type for GA-convex functions via fractional integrals. *RGMIA Research Report Collection*, vol. 18, article 108.
- Latif, M.A., (2014). New Hermite – Hadamard type inequalities for GA-convex with applications. *RGMIA Research Report Collection*, vol. 17, article 124.
- Latif, M.A., (2015). Hermite – Hadamard type inequalities for GA-convex functions on the co-ordinates with applications. *Pakistan Academy of Sciences* 52 (4):367-379.
- Mitrinović, D.S., (1970). *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., (1993). *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Niculescu, C.P., (2000). Convexity according to the geometric mean, *Math. Inequal. Appl.* 3(2),155-167. Available online at <http://dx.doi.org/10.7153/mia-03-19>.

- Özdemir, M.E., Yıldız, Ç. and Gürbüz, M., (2014). A note on geometrically convex functions. RGMIA Research Report Collection, vol. 17, article 180.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., (1992). Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., (1973). Convex Functions. Academic Press, 300 pp, New York.
- Tunç, M., (2011). Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin Hermite – Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Turhan, S., (2016). GA-konveks ve Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu Üniversitesi, Ordu.
- Yaldız, H., (2016). Kesirli İntegraller ile İlgili Bazı Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Düzce Üniversitesi, Düzce.
- Zhang, T.Y., Ping, A. and Qi, F., (2013). Some inequalities of Hermite – Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, Le Matematiche, vol:68, no 1, pp. 229-239.