



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BANACH DARALMA PRENSİBİ VE
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Muhammed Furkan AKTAŞ

Danışman
Prof. Dr. Aziz HARMAN

Ocak-2024
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Muhammed Furkan AKTAŞ tarafından hazırlanan “BANACH DARALMA PRENSİBİ VE UYGULAMALARI” adlı tez çalışması 25/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Başkan

Prof. Dr. Aziz HARMAN

.....

Danışman

Prof. Dr. Aziz HARMAN

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT

.....

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Ömer Murat ÖTER
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Muhammed Furkan AKTAŞ

Tarih: 25/01/2024

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH DARALMA PRENSİBİ VE UYGULAMALARI

Muhammed Furkan AKTAŞ

**Batman Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Aziz HARMAN

2024, 149 Sayfa

Jüri

**Prof. Dr. Aziz HARMAN
Dr. Öğr. Üyesi Hacer BOZKURT
Dr. Öğr. Üyesi Yasin KAYA**

Bu tez, Banach Sabit Nokta Teoremi ve bu teoremle ilgili uygulamaları derinlemesine incelemektedir. Banach sabit nokta teoremi, metrik uzaylar teorisinde önemli bir araçtır. Bu teorem, matematiksel analizde ve çeşitli bilim alanlarında geniş bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu teorem, belli koşulları sağlayan fonksiyonların sabit noktalarının varlığını ve bulunmasını garanti eder. Teorem, 1922 yılında Stefan Banach tarafından bulunmuştur. Tez, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin temel prensiplerini ayrıntılı bir şekilde açıklar ve ardından bu teoremle ilgili çeşitli matematiksel alanlarda genelleştirmeleri ve matematik başta olmak üzere farklı alanlardaki uygulamaları inceler. Örneğin, diferansiyel denklemler ve integral denklemler, Cauchy problemleri, ekonomi ve mühendislik alanları gibi. Son olarak, tez, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin teorik temellerini anlamak isteyen matematikçilerden başlayarak, bu teoremin pratik uygulamalarını keşfetmek isteyen bilim insanlarına kadar geniş bir okuyucu kitlesine hitap etmektedir. Tezin amacı, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin derinlemesine bir anlayışını sunmak ve bu teoremle ilgili çeşitli uygulamaların matematiksel ve pratik boyutlarını ortaya koymaktır.

Anahtar Kelimeler: Banach Sabit Nokta Teoremi, Cauchy Problemleri, Daralma Dönüşümü, Diferansiyel ve İntegral Denklemler, Ekonomi ve Mühendislik, Metrik Uzay, Picard İterasyon Yöntemi, Volterra–Fredholm Tipi İntegral Denklemler.

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

BANACH CONTRACTION PRINCIPLE AND APPLICATIONS

Muhammed Furkan AKTAŞ

THE POST GRADUATE EDUCATION INSTITUTE OF BATMAN UNIVERSITY

Advisor: Prof. Dr. Aziz HARMAN

2024, 149 Pages

Jury

Prof. Dr. Aziz HARMAN

Assoc. Prof. Dr. Hacer BOZKURT

Assoc. Prof. Dr. Yasin KAYA

This thesis thoroughly examines the Banach Fixed Point Theorem and its associated applications. The Banach Fixed Point Theorem is a significant tool in the theory of metric spaces. This theorem has wide-ranging application potential in mathematical analysis and various scientific fields. It guarantees the existence and determination of fixed points for functions that meet specific conditions. The theorem was first formulated by Stefan Banach in 1922. The thesis provides a detailed exposition of the fundamental principles of the Banach Fixed Point Theorem and subsequently explores generalizations and applications in various mathematical domains and other fields such as economics and engineering. Examples of applications include differential and integral equations, Cauchy problems, among others. Lastly, the thesis caters to a broad audience, ranging from mathematicians seeking to understand the theoretical foundations of the Banach Fixed Point Theorem to scientists interested in exploring its practical applications. The goal of the thesis is to provide an in-depth understanding of the Banach Fixed Point Theorem and to unveil the mathematical and practical dimensions of its various applications.

Keywords: Banach Fixed Point Theorem, Cauchy Problems, Contraction Mapping, Differential and Integral Equations, Economics and Engineering, Metric Space, Picard Iteration Method, Volterra–Fredholm Type Integral Equations.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın olgunlaşmasında emeği geçen, bilimsel bilgisiyle beni yönlendiren ve bu süreçteki öğretisi, düşünce zenginliği ve tecrübelerinden faydalandığım kıymetli tez danışmanım Prof. Dr. Aziz HARMAN'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca, aileme özel bir teşekkür borçluyum. Onların sabrı, anlayışı ve sevgisi, bu zorlu süreçte beni destekleyen temel unsurlardan biri oldu. Ailemin bu serüvene katkıları, benim için çok değerlidir ve onlara minnettarlığımı ifade etmek kelimelerle tarif edilemez.

Bu tez, Prof. Dr. Aziz HARMAN'ın öğretileri ve ailemin desteğiyle şekillenmiştir. Her iki tarafın da katkıları, bu akademik çabanın ötesinde, birbirine bağlı bir başarı hikayesini temsil ettiğini söyleyebilirim. Bu içten teşekkürler, sadece bir tez değil, aynı zamanda birlikte paylaşılan çabaların ve desteklerin izini taşıyan bir başarı öyküsünü de temsil etmektedir.

Muhammed Furkan AKTAŞ
BATMAN-2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	7
2.1. Metrik Uzay ve Metrik Uzayla İlgili Temel Kavramlar	8
2.1.1. Tanım: (Metrik ve Metrik Uzay)	9
3. METRİK UZAYLARDA BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ VE İSPATI. 43	
3.1. Tanım: (Daralma Dönüşümü)	44
3.1.1. Banach Sabit Nokta Teoremi ve İspatı	47
4. METRİK UZAYLARDA BANACH SABİT NOKTA TEOREMİNİN UYGULAMALARI	56
4.1. Matematiksel Analiz	56
4.1.1. Cebirsel Denklemlerin Çözümü.....	56
4.1.2. Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Çözümü	60
4.1.3. Optimizasyon Problemleri	116
4.1.4. Graf Teorisi	121
4.2. Ekonomi.....	126
4.2.1. Nash Dengesi ve Oyun Teorisi	126
4.2.2 Cournot Modeli.....	133
4.3. Mühendislik	137
4.3.1. Newton-Raphson yöntemi	137
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	141
5.1 Sonuçlar	141
5.2 Öneriler	143
KAYNAKLAR	144
ÖZGEÇMİŞ	149

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ε	: Epsilon
θ	: Teta
π	: Pi
φ	: Phi
α	: Alfa
β	: Beta
δ	: Delta
\in	: Elemanıdır.
\forall	: Her
\exists	: Bazı
*	: Yıldız işareti
\approx	: Yaklaşık değer (Hemen hemen)
■	: İspat sonu
\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Q}	: Rasyonel sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	: Pozitif reel sayılar
\mathbb{Z}	: Tam sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Karmaşık sayılar kümesi
\emptyset	: Boş küme
$[0, \infty)$: Negatif olmayan reel sayılar
$(0, \infty)$: Pozitif reel sayılar

$\ x\ $: Norm fonksiyonu
$\ \cdot\ $: Norm
$(\mathcal{X}, \ \cdot\)$: Normlu uzay
(\mathcal{X}, d)	: Metrik uzay
(x_n)	: $\{x_n\}$ Dizisi
$<$: Küçüktür
\leq	: Küçük veya eşit
$>$: Büyüktür
\geq	: Büyük veya eşit
\Rightarrow	: İse
\Leftrightarrow	: Ancak ve ancak

Kısaltmalar

$\sup \mathcal{A}$: \mathcal{A} kümesinin en küçük üst sınırı
$\inf \mathcal{A}$: \mathcal{A} kümesinin en büyük alt sınırı
$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($x_n \rightarrow a$)	: (x_n) dizisinin a sayısına yakınsaması
\mathcal{T}^n	: \mathcal{T} dönüşümünün n . iterasyonu
$\mathcal{T}^n(x)$: x noktasının \mathcal{T} dönüşümü altındaki n . iterasyonu
$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \mathbb{R}^+$: \mathcal{X} üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
$B(x; r)$: x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\bar{B}(x; r)$: x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
\mathcal{F}	: Cisim ($\mathcal{F} = \mathbb{R}$ ya da \mathbb{C})

1. GİRİŞ

Banach sabit nokta teoremi, metrik uzaylarda daraltıcı fonksiyonların sabit noktaları ile ilgili önemli bir matematiksel sonuçtur. (Banach, 1922) Banach sabit nokta teoremi, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi çözmek için kullanılan güçlü bir araçtır. Bu yüksek lisans tezinde, Banach sabit nokta teoremi ispatı, normlu uzaylar ve modüler uzaylar gibi özel metrik uzaylarda geçerliliği ve analiz, cebir, topoloji, graf teorisi, ekonomi ve mühendislik gibi alanlarda uygulamaları anlatılmaktadır. (Gopal, Kumam, & Abbas, 2018), (Kreyszig, 1989)

Banach Sabit Nokta Teoremi'nin ifadesi şöyledir:

Teorem 1.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi) Tam metrik uzay (X, d) üzerinde tanımlı bir fonksiyon $f : X \rightarrow X$ olsun. Eğer f bir daralma ise, yani bir $0 < \lambda < 1$ sabiti için her $x, y \in X$ için $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'nin X 'te tek bir sabit noktası vardır. Yani, $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan tek bir $x \in X$ vardır. Ayrıca, X 'teki herhangi bir x_0 başlangıç noktası için, $x_n = f(x_{n-1})$ şeklinde tanımlanan ardışık iterasyonlar, f 'nin sabit noktasına yakınsar. (Banach, 1922)

Bu teoremin ispatı, kısaca aşağıdaki adımları içerir:

İspat: Öncelikle, f 'nin sabit noktasının varlığını göstermemiz gerekir. X 'teki herhangi bir x_0 başlangıç noktası seçelim. Ardışık iterasyonlarla $x_n = f(x_{n-1})$ şeklinde bir dizi elde edelim. Bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için, $d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_{m-1})$ eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde, $d(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \lambda d(x_{n-2}, x_{m-2})$ eşitsizliği de geçerlidir. Bu eşitsizlikleri tekrarlayarak, $d(x_n, x_m) \leq \lambda^n d(x_0, x_{m-n})$ sonucunu elde ederiz. Burada, $n \leq m$ olmak üzere, $\lambda < 1$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda^n \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla, her $\epsilon > 0$ için, yeterince büyük $N \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki, $n, m \geq N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \epsilon$ olsun. Bu da (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (Boriceanu, 2009), (Khamiski & Kozłowski, 1990)

X Tam metrik uzay ise X 'te tanımlı her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu biliyoruz. O halde, (x_n) dizisinin X 'te bir limit noktasının x olduğunu varsayalım. Bu durumda, $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \rightarrow 0$ olur. Öte yandan, f fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı, $n \rightarrow \infty$ iken $d(f(x_n), f(x)) \rightarrow 0$ olur. Ayrıca, f fonksiyonunun daralma olmasından dolayı, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \lambda d(x_n, x)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikleri birleştirerek, $n \rightarrow \infty$ iken $d(x_n, x) \leq \lambda d(x_n, x)$ sonucunu elde ederiz. Bu da $d(x_n, x) = 0$ veya $\lambda = 1$ olması gerektiğini gösterir. Ancak, $\lambda < 1$ olduğundan, $d(x_n, x) = 0$ olmalıdır. Bu da $x_n \rightarrow x$ olması gerektiğini gösterir. Yani, x noktası f fonksiyonunun sabit noktasıdır.

Şimdi, f 'nin sabit noktasının tekliğini gösterelim. x ve y iki sabit nokta olsun. O zaman, $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ eşitsizliği geçerlidir. Bu da $d(x, y) = 0$ veya $\lambda = 1$ olması gerektiğini gösterir. Ancak, $\lambda < 1$ olduğundan, $d(x, y) = 0$ olmalıdır. Bu da $x = y$ olması gerektiğini gösterir. Yani, f 'nin tek bir sabit noktası vardır.

Son olarak, ardışık iterasyonların sabit noktaya yakınsadığını gösterelim. x noktası f 'nin sabit noktası olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{n+1}, x) = d(f(x_n), f(x)) \leq \lambda d(x_n, x)$$

eşitsizliği geçerlidir. Benzer şekilde, $d(x_n, x) \leq \lambda d(x_{n-1}, x)$ eşitsizliği de geçerlidir. Bu eşitsizlikleri tekrarlayarak, $d(x_{n+1}, x) \leq \lambda^{n+1} d(x_0, x)$ sonucunu elde ederiz. Burada, $\lambda < 1$ olduğundan, $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda^{n+1} \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla, $n \rightarrow \infty$ iken

$$d(x_{n+1}, x) \rightarrow 0$$

olur. Bu da x_{n+1} dizisinin x noktasına yakınsadığını gösterir. ■

Banach Sabit Nokta Teoremi, normlu uzaylarda da geçerlidir. Normlu uzaylar, metrik uzayların bir alt sınıfıdır. Normlu uzaylarda, metrik fonksiyonu bir norm fonksiyonundan türetilir. Yani, normlu bir uzay \mathcal{X} üzerinde tanımlı bir metrik d için, $d(x, y) = \|x - y\|$ eşitliği her $x, y \in \mathcal{X}$ için geçerlidir. Burada $\|\cdot\|$ norm fonksiyonudur. (Kreyszig, 1989)

Normlu uzaylar, özellikle vektör uzayları üzerinde yapılan çalışmalarda sıkça karşılaşılan bir yapıdır. Bu uzaylar, elemanları vektör olan ve belirli norm özelliklerini taşıyan matematiksel yapıları ifade eder. Bir norm, vektör uzayındaki elemanların büyüklüğünü ölçen bir fonksiyondur. Örneğin, normlu bir uzayda, iki vektör arasındaki uzaklığı ölçmek için kullanılan metrik, vektörlerin normları arasındaki farkı ifade eder.

Bu normlar genellikle vektör uzayındaki elemanların uzunluğunu veya büyüklüğünü temsil eder.

Normlu uzaylar, matematiksel analiz, lineer cebir ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda temel kavramları tanımlamak için kullanılır. Bu yapılar, vektör uzayları üzerinde topolojik ve analitik çalışmalar yapmak için güçlü bir araç seti sunar. Normlu uzayların matematiksel mükemmeliyeti, çeşitli problemlerin çözümünde ve matematiksel modelleme çalışmalarında önemli bir rol oynar. (Kreyszig, 1989)

Normlu uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Teorem 1.2. (Banach Sabit Nokta Teoremi) Normlu uzay $(X, \|\cdot\|)$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon $f : X \rightarrow X$ olsun. Eğer f bir daralma dönüşümü ise, yani bir $0 < \lambda < 1$ sabiti için her $x, y \in X$ için $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda\|x - y\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'nin X 'te tek bir sabit noktası vardır. Yani, $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan tek bir $x \in X$ vardır. Ayrıca, X 'teki herhangi bir x_0 başlangıç noktası için, $x_n = f(x_{n-1})$ şeklinde tanımlanan ardışık iterasyonlar, f 'nin sabit noktasına yakınsar. (Bayraktar, 1994)

Banach Sabit Nokta Teoremi, sadece normlu uzaylarla sınırlı kalmayıp, normlu uzayların bir genellemesi olan modüler uzaylarda da geçerlidir. Modüler uzaylar, metrik uzayların bir genelleştirilmesi olup, metrik fonksiyonu bir modül fonksiyonundan türetilir. Bu bağlamda, modüler bir uzay X üzerinde tanımlı bir metrik d için,

$$d(x, y) = \rho(x - y)$$

eşitliği, her x ve y elemanı için geçerlidir, burada ρ modül fonksiyonunu temsil eder. (Chistyakov, 2010), (Chistyakov, 2015)

Modüler uzaylarda Banach Sabit Nokta Teoremi, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Teorem 1.3. (Banach Sabit Nokta Teoremi) Tam modüler uzay (X, ρ) üzerinde tanımlı bir fonksiyon $f : X \rightarrow X$ olsun. Eğer f bir daralma dönüşümü ise, yani bir $0 < \lambda < 1$ sabiti için her $x, y \in X$ için $\rho(f(x) - f(y)) \leq \lambda\rho(x - y)$ eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'nin X 'te tek bir sabit noktası vardır. Yani, $f(x) = x$ eşitliğini sağlayan tek bir $x \in X$ vardır. Ayrıca, X 'teki herhangi bir x_0 başlangıç noktası için, $x_n = f(x_{n-1})$ şeklinde tanımlanan ardışık iterasyonlar, f 'nin sabit noktasına yakınsar. (Jachymski, 2008), (Kakutani, 1941), (Kannan, 1968)

Bu teorem, normlu uzaylarda sabit nokta problemlerinin çözümü için kullanılan temel bir araçtır.

Bu yüksek lisans tezinde kullanılacak olan temel kavramlar ikinci bölümde yer almaktadır. Ardından Banach sabit nokta teoreminin tanımı, ispatı, bu teoremle ilgili teoremler ve örnekleri ise üçüncü bölümde yer almaktadır. Devamında dördüncü bölümde kısaca aşağıdaki özetlendiği gibi uygulama alanları yer almaktadır:

Fonksiyonel analiz: Fonksiyonel analiz, fonksiyon uzayları, operatörler, normlar, iç çarpım, dualite, Banach uzayları, Hilbert uzayları (Cegielski, 2012), spektral teori, sabit nokta teoremleri gibi kavramları inceleyen bir matematik dalıdır. Fonksiyonel analiz, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi modellemek ve çözmek için kullanılan ileri düzey bir araçtır. Fonksiyonel analizde, Banach Sabit Nokta Teoremi, fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı operatörlerin sabit noktalarının varlığı, tekliği ve bulunması ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, bir fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı bir lineer operatörün sabit noktası, o operatörün öz fonksiyonudur. Banach Sabit Nokta Teoremi, bir lineer operatörün öz fonksiyonlarının varlığı ve tekliği için bir koşul sağlar. Ayrıca, Banach Sabit Nokta Teoremi, fonksiyonel denklemlerin ve fonksiyonel dönüşümlerin sabit noktalarını bulmak için kullanılan sayısal yöntemlerin yakınsama hızı ve doğruluğu ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, Picard iterasyonu, bir fonksiyonel denklemin sabit noktasını bulmak için kullanılan bir iteratif yöntemdir. Bu yöntem, Banach Sabit Nokta Teoremi ile yakınsadığı ve çözüme ulaştığı kanıtlanabilir. (Jachymski, 2008), (Kakutani, 1941), (Picard, 1890)

Diferansiyel ve integral denklemler: Diferansiyel ve integral denklemler, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi modellemek ve çözmek için kullanılan denklemlerdir. Bu denklemler, bir fonksiyonun veya fonksiyonların türevleri veya integralleri ile ilgili ilişkileri ifade eder. Bu denklemlerin çözümleri, yine bir fonksiyon uzayında tanımlı bir operatörün sabit noktasıdır. Örneğin, $y' = y + x$ diferansiyel denkleminin çözümü, $\mathcal{F}(y) = y' - y - x$ operatörünün sabit noktasıdır. Bu operatörün daraltıcı olduğu bir fonksiyon uzayında, Banach Sabit Nokta Teoremi ile çözümün varlığı ve tekliği garanti edilir. Modüler uzaylarda, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri, modüler fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı modüler operatörlerin sabit noktaları olarak görülebilir. Bu operatörlerin daraltıcı olduğu durumlarda, Banach Sabit Nokta Teoremi ile çözümler bulunabilir. (Fleiner, 2003), (Popa, 2008)

Lineer cebir: Lineer cebir, vektör uzayları, matrisler, determinantlar, lineer denklemler, özdeğerler, özvektörler, lineer dönüşümler gibi kavramları inceleyen bir matematik dalıdır. Lineer cebir, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi

modellemek ve çözmek için kullanılan temel bir araçtır. Lineer cebirde, Banach Sabit Nokta Teoremi, lineer denklemlerin ve lineer dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı, tekliği ve bulunması ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, bir lineer dönüşümün sabit noktası, o dönüşümün özvektörüdür. Banach Sabit Nokta Teoremi, bir lineer dönüşümün özvektörlerinin varlığı ve tekliği için bir koşul sağlar. Ayrıca, Banach Sabit Nokta Teoremi, lineer denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan sayısal yöntemlerin yakınsama hızı ve doğruluğu ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, Gauss-Seidel yöntemi, bir lineer denklem sisteminin sabit noktasını bulmak için kullanılan bir iteratif yöntemdir. Bu yöntem, Banach Sabit Nokta Teoremi ile yakınsadığı ve çözüme ulaştığı kanıtlanabilir.

Optimizasyon: Optimizasyon, bir fonksiyonun en büyük veya en küçük değerini bulmak için kullanılan bir matematik dalıdır. Optimizasyon, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi modellemek ve çözmek için kullanılan pratik bir araçtır. Optimizasyonda, Banach Sabit Nokta Teoremi, bir fonksiyonun optimum noktasının varlığı, tekliği ve bulunması ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, bir fonksiyonun optimum noktası, o fonksiyonun sabit noktasıdır. Banach Sabit Nokta Teoremi, bir fonksiyonun optimum noktasının varlığı ve tekliği için bir koşul sağlar. Ayrıca, Banach Sabit Nokta Teoremi, optimizasyon problemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılan sayısal yöntemlerin yakınsama hızı ve doğruluğu ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, Newton yöntemi, bir fonksiyonun optimum noktasını bulmak için kullanılan bir iteratif yöntemdir. Bu yöntem, Banach Sabit Nokta Teoremi ile yakınsadığı ve çözüme ulaştığı kanıtlanabilir. (Ceng, Ansari & Yao, 2011)

Graf teorisi: Graf teorisi, düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir tür ağ yapısı olan graf kavramını inceleyen bir matematik dalıdır. Graf teorisinde, bir grafa bir renklendirme fonksiyonu uygulamak, yani her düğüme bir renk atamak, bazen bir sabit nokta problemi olarak ele alınabilir. Örneğin, bir grafa rastgele bir renklendirme fonksiyonu uyguladıktan sonra, bu fonksiyonu bir kurala göre tekrar uygulamak, yani her düğümün rengini komşularının rengine göre değiştirmek, bir sabit nokta problemi oluşturur. Bu problemde, Banach Sabit Nokta Teoremi yerine, Brouwer sabit nokta teoremi adı verilen bir genelleştirme kullanılır. Brouwer sabit nokta teoremi, bir kapalı ve sınırlı kümenin üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyonun, bu kümede en az bir sabit noktaya sahip olduğunu söyler. (Brouwer, 1910) Bu teorem, modüler uzaylarda da geçerlidir. Modüler uzaylarda, graf renklendirme problemleri, modüler fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı modüler fonksiyonlar olarak görülebilir. Bu

fonksiyonların daraltıcı olduğu durumlarda, Banach Sabit Nokta Teoremi ile renklendirmeler bulunabilir. (Abbas ve Nazir, 2013), (Kannan, 1968)

Mühendislik ve ekonomi: Mühendislik ve ekonomi, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi modellemek ve çözmek için kullanılan uygulamalı bilim dallarıdır. Bu alanlarda, birçok problem, sabit nokta problemleri olarak modellenebilir. Örneğin, bir elektrik devresinde akım ve gerilim arasındaki ilişki, bir sabit nokta problemi olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde, bir piyasada arz ve talep arasındaki denge, bir sabit nokta problemi olarak ifade edilebilir. Bu problemlerin çözümleri, Banach Sabit Nokta Teoremi veya diğer sabit nokta teoremleri ile bulunabilir. Modüler uzaylarda, mühendislik ve ekonomi problemleri, modüler fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı modüler fonksiyonlar olarak görülebilir. Bu fonksiyonların daraltıcı olduğu durumlarda, Banach Sabit Nokta Teoremi ile çözümler bulunabilir. (Gopal, Kumam, & Abbas, 2018), (Kreyszig, 1989)

Bu yüksek lisans tezinin beşinci bölümünde yani sonuç ve öneriler kısmında, bu daralma dönüşümünün, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok problemi çözmek için kullanılan güçlü bir araç olduğunu ve Banach Sabit Nokta Teoreminin, normlu uzaylar ve modüler uzaylar gibi özel metrik uzaylarda daraltıcı fonksiyonların sabit noktaları ile ilgili önemli bir matematiksel sonuç olduğu belirtilecektir. Bu tezin, Banach Sabit Nokta Teoremi ve genelleştirmelerinin matematiksel güzelliğini ve zenginliğini ortaya koymayı amaçladığı, aynı zamanda sabit nokta teoreminin matematiksel modelleme çalışmalarında nasıl kullanılabileceğini göstermiş olup, Banach Sabit Nokta Teoremi ve genelleştirmelerinin matematiksel analizdeki rolünü vurgulandığı ve bu teoremin matematiksel araştırmalara katkılarının değerlendirildiği belirtilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, tezin temelini oluşturan matematiksel yapıları tanıtmak amacıyla kullanılmıştır. İlk olarak, metrik uzayların genel bir tanımı verilmekte olup, bir kümenin elemanları arasındaki mesafeyi ölçen metrik fonksiyonları içermektedir. (\mathcal{X}, d) şeklinde ifade edilen metrik uzaylar, matematiksel analizin temel taşlarından birini oluşturur.

Ardından, bu çalışmanın odaklandığı Banach Sabit Nokta Teoremi'nin temel kavramları açıklanmaktadır. Teorem, metrik uzaylarda tanımlı daraltıcı dönüşümlerin sabit noktalara sahip olduğunu belirtir ve matematiksel analizde önemli bir yer tutar. Daralma dönüşümlerinin tanımı ve Banach Sabit Nokta Teoremi'nin ifadesi, bu tezin ana teorik temellerini oluşturur. Bu temel kavramlar, tez boyunca yapılan ispatlarda ve uygulamalarda referans alınacak önemli yapı taşlarıdır.

Bu kısımda sunulan temel tanımlar ve teoremler, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak matematiksel notasyonların anlaşılmasına yardımcı olacaktır. Ayrıca, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin ve uygulamalarının daha derinlemesine anlaşılması için gerekli olan ön bilgileri içermektedir.

Tanım 2.1. (Tek Değerli Dönüşüm) \mathcal{X} ve \mathcal{Y} boş olmayan kümeler olduğunda, \mathcal{X} kümesindeki her elemanı \mathcal{Y} kümesindeki yalnızca bir elemana eşleyen bir dönüşümdür. Yani, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ bir tek değerli dönüşüm ise, her $x \in \mathcal{X}$ için yalnızca bir $y \in \mathcal{Y}$ vardır ki $\mathcal{T}(x) = y$ olsun.

Tanım 2.2. (Sabit Nokta) \mathcal{X} boş olmayan bir küme olduğunda, \mathcal{X} kümesindeki her elemanın kendisine eşlendiği bir dönüşümdür. Yani, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir sabit nokta dönüşümü ise, her $x \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{T}(x) = x$ olur. (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2007)

Tanım 2.3. \mathcal{X} bir topolojik uzay, $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathcal{X}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 noktasında alt yarı sürekli olması demek, x_0 'a yaklaşan herhangi bir x noktasının $f(x)$ değerinin, $f(x_0)$ değerinin en fazla olduğu demektir. Yani, $f(x_0)$ değeri, x_0 'a yaklaşan x noktalarının $f(x)$ değerlerinin en büyük değerinden küçük veya eşittir. Matematiksel olarak, bu şu şekilde ifade edilir:

$$f(x_0) \leq \sup_{V \in \mathcal{U}_{x_0}} \inf_{x \in V} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x)$$

Aynı şekilde, f fonksiyonunun x_0 noktasında üst yarı sürekli olması demek, x_0 'a yaklaşan herhangi bir x noktasının $f(x)$ değerinin, $f(x_0)$ değerinin en az olduğu demektir. Yani, $f(x_0)$ değeri, x_0 'a yaklaşan x noktalarının $f(x)$ değerlerinin en küçük değerinden büyük veya eşittir. Matematiksel olarak, bu şu şekilde ifade edilir:

$$\inf_{V \in U_{x_0}} \sup_{x \in V} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x) \leq f(x_0)$$

Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında alt yarı sürekli veya üst yarı sürekli ise, f fonksiyonuna sadece alt yarı sürekli veya üst yarı sürekli denir. (Mustafa, 2016)

Tanım 2.4. X bir topolojik uzay, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu durumda x_0 'a yaklaşan herhangi bir x noktasının $f(x)$ değerinin, $f(x_0)$ değerinden büyük veya eşit olması gerekir. Yani, $f(x_0)$ değeri, x_0 'a yaklaşan x noktalarının $f(x)$ değerlerinin en küçük üst sınırı olmalıdır. Eğer f fonksiyonu X kümesinin her noktasında bu özelliği sağlıyorsa, f fonksiyonuna alt yarı sürekli denir. Matematiksel olarak, bu şu şekilde ifade edilir: (Mustafa, 2016)

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n), \quad \text{her } x_n \rightarrow x_0 \text{ için.}$$

2.1. Metrik Uzay ve Metrik Uzayla İlgili Temel Kavramlar

Metrik uzay, bir küme ve bu kümedeki elemanlar arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun, metrik aksiyomları adı verilen bazı özellikleri sağlaması gerekir. Bu özellikler şunlardır:

- Uzaklık fonksiyonu, kümenin herhangi iki elemanı için sıfırdan büyük veya eşit bir değer vermelidir. Ayrıca, sadece iki eleman aynıysa sıfır olmalıdır. Bu, pozitiflik aksiyomu olarak adlandırılır.
- Uzaklık fonksiyonu, kümenin herhangi iki elemanı için simetrik olmalıdır. Yani, iki elemanın yerini değiştirdiğimizde uzaklık değeri değişmemelidir. Bu, simetri aksiyomu olarak adlandırılır.

- Uzaklık fonksiyonu, kümenin herhangi üç elemanı için üçgen eşitsizliğini sağlamalıdır. Yani, bir elemanın diğer ikisine olan uzaklıklarının toplamı, diğer iki elemanın birbirine olan uzaklığından büyük veya eşit olmalıdır. Bu, üçgen eşitsizliği aksiyomu olarak adlandırılır.

Bu üç aksiyomu sağlayan bir küme ve bir uzaklık fonksiyonu, bir metrik uzay oluşturur. Metrik uzaylar, matematikte birçok alanda kullanılan önemli bir soyut kavramdır. Örneğin, analiz, topoloji, geometri, diferansiyel denklemler gibi alanlarda metrik uzaylar üzerinde çalışılır. (Jachymski, 2008)

2.1.1. Tanım: (Metrik ve Metrik Uzay)

Bir \mathcal{X} kümesi ile $d: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun ve $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ için aşağıdaki aksiyomları sıralayalım:

$$[\mathcal{M}_1] d(x, y) \geq 0$$

$$[\mathcal{M}_2] d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \dots (\text{Üçgen Eşitsizliği})$$

$$[\mathcal{M}_3] d(x, y) = d(y, x) \dots (\text{Simetrik})$$

$$[\mathcal{M}_4] x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \dots (\text{yani } d(x, x) = 0)$$

$$[\mathcal{M}_5] x \neq y \Rightarrow d(x, y) \neq 0$$

Bu aksiyomlara göre;

- $[\mathcal{M}_1]$ ve $[\mathcal{M}_2]$ koşulları sağlanıyor ise d fonksiyonuna \mathcal{X} kümesi üzerinde bir yarı metriksi,
- $[\mathcal{M}_1]$, $[\mathcal{M}_2]$ ve $[\mathcal{M}_3]$ koşulları sağlanıyor ise d fonksiyonuna \mathcal{X} kümesi üzerinde bir yarı metrik,
- $[\mathcal{M}_1]$, $[\mathcal{M}_2]$ ve $[\mathcal{M}_4]$ koşulları sağlanıyor ise d fonksiyonuna \mathcal{X} kümesi üzerinde bir sözde metriksi,
- $[\mathcal{M}_1]$, $[\mathcal{M}_2]$, $[\mathcal{M}_3]$ ve $[\mathcal{M}_4]$ koşulları sağlanıyor ise d fonksiyonuna \mathcal{X} kümesi üzerinde bir sözde metrik,
- $[\mathcal{M}_1]$, $[\mathcal{M}_2]$, $[\mathcal{M}_3]$, $[\mathcal{M}_4]$ ve $[\mathcal{M}_5]$ koşulları sağlanıyor ise d fonksiyonuna \mathcal{X} kümesi üzerinde bir metrik denir.

Bu aksiyomlar birbirleri ile ilişkilidir. Örnek verecek olursak, $[\mathcal{M}_2]$, $[\mathcal{M}_3]$ ve $[\mathcal{M}_4]$ aksiyomlarını sırası ile kullanırsak;

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

olarak bulunur ve bu da bizlere $[M_1]$ aksiyomunu vermektedir.

Metrik uzayı ise, üzerinde bir metrik tanımlanmış kümeye olarak tanımlayabiliriz. Eğer d fonksiyonu \mathcal{X} kümesi üzerinde bir metrik ise, bu metrik uzayı (\mathcal{X}, d) notasyonu ile gösterilir. Ayrıca, (\mathcal{X}, d) bir metrik uzay ve $x, y \in \mathcal{X}$ ise, negatif olmayan $d(x, y)$ reel sayısına x ile y noktaları arasındaki uzaklık denir. (Bayraktar, 1994), (Jachymski, 2008)

Örnek 2.1.1.1. (Öklidyen Metrik) \mathbb{R}^n n-boyutlu uzayında iki nokta arasındaki mesafe, noktalar arasındaki farkların karelerinin toplamının karekökü ile ölçülür. Öklidyen metrik, en yaygın kullanılan metrik uzaylardan biridir ve fiziksel dünyadaki uzayın geometrisini tanımlamada sıkça kullanılır. (Kreyszig, 1989)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Örnek 2.1.1.2. (Manhattan Metrik) \mathbb{R}^n uzayında iki nokta arasındaki mesafe, noktalar arasındaki farkların mutlak değerlerinin toplamıdır. Manhattan metriği, özellikle şehir bloklarında gezinmenin mesafesini temsil ettiği için bu ismi alır.

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Örnek 2.1.1.3. (Minkowski Mesafesi) \mathbb{R}^n uzayındaki iki vektör arasındaki mesafeyi ölçen bir metrik fonksiyonudur. Bu mesafe ölçüsü, genellikle p -normlarını içeren bir genellemedir. Minkowski mesafesi, p parametresine bağlı olarak farklı normları içerir ve bu parametre normun tipini belirler.

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorem 2.1. (Hölder Eşitsizliği) $x, y \geq 0$ olduğunu ve a, b, c 'nin \mathbb{R} 'de keyfi vektörler olduğunu varsayalım. Eğer $p, q > 1$ olacak şekilde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,

$$\sum_{i=1}^k |a_i| \cdot |b_i| \leq \left[\sum_{i=1}^k |a_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^k |b_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

İspat: a ve b ' den birisi 0 olduğunda sonuç açıktır. a ve b ' nin her ikisi de sıfırdan farklı olduğunda

$$\sum_{i=1}^k x_i y_i \leq 1$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$x_i = |a_i| \cdot \left[\sum_{i=1}^k |a_i|^p \right]^{-\frac{1}{p}} \quad \text{ve} \quad |y_i| = |b_i| \cdot \left[\sum_{i=1}^k |b_i|^q \right]^{\frac{1}{q}}$$

Young'ın eşitsizliği bize her bir i için,

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$$

olduğunu verir. Şimdi bu eşitsizlikleri topladığımızda şunu buluruz:

$$\sum_{i=1}^k x_i y_i \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \blacksquare$$

Örnek 2.1.1.4. (Hausdorff Uzayı) Hausdorff uzayı, topoloji alanında kullanılan bir matematiksel kavramdır. Bu uzay, bir topolojik uzayın alt kümeleri arasındaki "yakınlığı" ölçen bir kavramdır ve bu ölçü, Hausdorff uzayının temel özelliği olan "Hausdorff uzaklığı" veya "Hausdorff metriği" ile ifade edilir.

Bir topolojik uzaydaki alt kümeler arasındaki Hausdorff uzaklığı şu şekilde tanımlanır: Verilen bir topolojik uzay \mathcal{X} ve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$ alt kümeleri için, Hausdorff uzaklığı $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ şu şekildedir:

$$H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \max \left\{ \sup_{a \in \mathcal{A}} \inf_{b \in \mathcal{B}} d(a, b), \sup_{b \in \mathcal{B}} \inf_{a \in \mathcal{A}} d(a, b) \right\}$$

Burada $d(a, b)$, a ile b arasındaki topolojik uzaklığı ifade eden bir metrik fonksiyondur. Hausdorff uzaklığı, bir alt kümenin diğerine göre "ne kadar yakın" veya "ne kadar uzak" olduğunu ölçer. Eğer $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$ ise, \mathcal{A} ve \mathcal{B} birbirine eşit veya birbirine topolojik olarak homeomorf (topolojik olarak eşdeğer) olarak kabul edilir. Hausdorff uzayı, topolojik uzaylarda karşılaşılan çeşitli konseptleri analiz etmek ve ölçmek için kullanılır. Özellikle görüntü işleme, desen tanıma ve geometrik modelleme gibi alanlarda nesne tanıma ve benzerlik ölçümlerinde kullanılır.

2.1.1.1. Tanım: (Metrik Fonksiyon)

Bir metrik fonksiyon, bir metrik uzayındaki iki nokta arasındaki uzaklığı (mesafeyi) ölçen bir fonksiyondur.

Verilen bir küme \mathcal{X} üzerindeki bir metrik uzayında $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu bir metrik olarak tanımlamak için aşağıdaki üç koşulu sağlamalıdır:

1. $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0$ sadece $x = y$ durumunda gerçekleşir. (**Pozitif Belirlilik**)
2. $d(x, y) = d(y, x)$, yani iki nokta arasındaki mesafe sıralı değil, her iki yönde de aynıdır. (**Simetri**)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, yani iki ara nokta y üzerinden giden yol, doğrudan gitmekten daha kısadır. (**Üçgen Eşitsizliği**)

Metrik fonksiyonlara bir örnek olarak, **Öklid metriği** verilebilir.

Tanım 2.1.1.1.1. (Öklid metriği) Öklid metriği, R^n kümesinde tanımlı bir metriktir ve iki nokta arasındaki uzaklığı verir. Öklid metriğinin tanımı şöyledir: (Kreyszig, 1989)

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarıdır. Öklid metriğinin bir metrik olduğunu ispatlamak için, aşağıdaki üç şartı kontrol etmek yeterlidir. Bu şartlar şunlardır:

1. $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (pozitiflik)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri)
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Üçgen eşitsizliği)

İspat: Bu şartların her biri için, aşağıdaki ispat adımlarını takip edebiliriz:

1. **Pozitiflik:** Karekök içindeki ifadenin karesi, her terimin karesinin toplamı olduğu için, her zaman pozitiftir. Dolayısıyla, $d(x, y) \geq 0$ 'dır. Eğer $d(x, y) = 0$ ise, bu demektir ki karekök içindeki ifade sıfırdır. Bu da ancak her terimin sıfır olması durumunda olur. Yani, $x_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Bu da $x = y$ anlamına gelir. Tersine, eğer $x = y$ ise, o zaman her terim sıfır olur ve $d(x, y) = 0$ olur. Böylece, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartı da sağlanır.
2. **Simetri:** Karekök içindeki ifadenin karesi, her terimin karesinin toplamı olduğu için, terimlerin yer değiştirmesi sonucu değişmez. Yani, $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, $i = 1, 2, \dots, n$. Bu da demektir ki, $d(x, y) = d(y, x)$ olur.
3. **Üçgen eşitsizliği:** Bu şartı ispatlamak için, Cauchy-Schwarz eşitsizliği adı verilen bir sonuçtan yararlanacağız. Bu eşitsizlik, \mathbb{R}^n kümesinde tanımlı bir iç çarpım işlemi için şunu söyler:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad (\text{Cauchy-Schwarz eşitsizliği})$$

Burada x ve $y \in \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarıdır ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpım işlemidir. Bu işlem, iki vektörün bileşenlerinin çarpımlarının toplamı olarak tanımlanır:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (\text{iç çarpım işlemi})$$

Bu eşitsizliği kullanarak, şunu gösterebiliriz:

$$\begin{aligned}
d(x, z)^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i + y_i - z_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i)^2 + (y_i - z_i)^2 + 2(x_i - y_i)(y_i - z_i)] \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) \\
&= d(x, y)^2 + d(y, z)^2 + 2\langle x - y, y - z \rangle \\
&\leq d(x, y)^2 + d(y, z)^2 + 2|\langle x - y, y - z \rangle| \\
&\leq d(x, y)^2 + d(y, z)^2 \\
&\quad + 2\sqrt{\langle x - y, x - y \rangle \cdot \langle y - z, y - z \rangle} \\
&= d(x, y)^2 + d(y, z)^2 + 2d(x, y)d(y, z) \\
&= (d(x, y) + d(y, z))^2
\end{aligned}$$

Burada son iki eşitsizlikte Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullandık. Her iki tarafın karekökünü alarak, üçgen eşitsizliğini elde ederiz:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Böylece, Öklid metriğinin bir metrik olduğunu ispatlamış olduk. Bu metrik, geometride ve analizde çok kullanılan bir metriktir.

Tanım 2.1.1.1.2. (Manhattan metriği) İki nokta arasındaki Manhattan uzaklığı, (x_1, x_2, \dots, x_n) ve (y_1, y_2, \dots, y_n) sırasıyla iki noktanın n -boyutlu uzaydaki koordinatları olarak tanımlansın. O zaman Manhattan uzaklığı şu formülle ifade edilir:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Bu formülde $|x_i - y_i|$, i -inci boyutta bulunan iki nokta arasındaki farkın mutlak değerini temsil eder. Toplam, tüm boyutlardaki farkların mutlak değerlerinin toplamını ifade eder.

Örneğin, iki boyutlu uzaydaki iki nokta (x_1, x_2) ve (y_1, y_2) için Manhattan uzaklığı şu şekilde hesaplanır:

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Bu formül, x ve y noktaları arasındaki yatay ve dikey mesafelerin toplamını ifade eder.

İspat:

d_1) (Sıfır Uzaklık Koşulu):

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Eğer $x = y$, her i -inci boyuttaki karşılaştırma $|x_i - y_i| = 0$ olacaktır. Dolayısıyla toplam da sıfır olacaktır.

d_2) (Simetriklik Koşulu):

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Mutlak değer işlemi simetrik, yani $|a - b| = |b - a|$. Bu nedenle, her i -inci terimdeki $|x_i - y_i|$ ifadesini $|y_i - x_i|$ ile değiştirirsek:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d(y, x)$$

d₃ (Üçgen Eşitsizliği Koşulu):

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Üçgen eşitsizliğini göstermek için üç nokta x , y ve z düşünelim. İki nokta arasındaki Manhattan uzaklığı şu şekildedir:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ d(y, z) &= \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \\ d(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \end{aligned}$$

Üçgen eşitsizliğini göstermek için her i -inci terimi inceleyelim:

$$|x_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$$

Bu ifade, her i -inci boyutta üçgen eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla toplam olarak da üçgen eşitsizliğini sağlar.

Bu nedenle, Manhattan uzaklığı sıfır uzaklık, simetriklik ve üçgen eşitsizliği koşullarını karşıladığı için bir metriktir.

Tanım 2.1.1.1.3. (Minkowski metriği) Minkowski metriği, matematiksel olarak uzaydaki iki nokta arasındaki uzaklığı ölçen bir metrik türüdür. Bu metrik, farklı normlara sahip olan p -normlarını içerir ve Euclidean norm ($p = 2$) ve Manhattan norm ($p = 1$) gibi özel durumları kapsar. Minkowski metriği şu şekilde tanımlanır:

İki nokta, $P = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n)$ ve $Q = (x_2, y_2, z_2, \dots, x_n)$ arasındaki Minkowski uzaklığı şu formülle hesaplanır:

$$D(P, Q) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Burada:

- n , uzayın boyutunu temsil eder.
- p , metriğin p -normunu ifade eder. $p = 1$ ise Manhattan normu, $p = 2$ ise Euclidean normu elde edilir. p negatif olamaz ve reel bir sayıdır.

Manhattan normu için ($p = 1$) formül şu şekildedir:

$$D(P, Q) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^1)^{\frac{1}{1}}$$

Euclidean normu için ($p = 2$) formül ise şu şekildedir:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Minkowski metriği, uzaklık ölçümü için geniş bir uygulama alanına sahiptir ve farklı normlar aracılığıyla uzaklık hesaplamalarını özelleştirebilmek için kullanılır.

İspat: Eğer bir fonksiyon metrik özelliklere sahipse, üç temel özelliği sağlamalıdır:

d_1) (Sıfır Uzaklık Koşulu):

$$D(P, Q) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Eğer $D(P, Q) = 0$, bu durumu ele alalım:

$$0 = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Bu durumda, her terim sıfır olmalıdır:

$$|x_i - y_i|^p = 0 \quad (\text{Her bir } i \text{ için})$$

Ancak, herhangi bir sayının p -inci kuvvetinin sıfır olması, sadece o sayının kendisinin sıfır olması durumunda mümkündür:

$$|x_i - y_i| = 0$$

Bu durumda, $x_i = y_i$ olur. Bu, P ve Q noktalarının birbirine eşit olduğunu gösterir:

$$P = Q$$

Bu da sıfır uzaklık koşulunun sağlandığını ve Minkowski metriğinin bu özelliğe sahip bir metrik olduğunu gösterir.

d_2) (Simetriklik Koşulu):

$$D(P, Q) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Şimdi $D(Q, P)$ 'yi inceleyelim:

$$D(Q, P) = \sum_{i=1}^n (|y_i - x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Bu ifadeleri kıyaslayalım:

Her $|x_i - y_i|^p$ terimi, $|y_i - x_i|^p$ ile eşittir, çünkü mutlak değer içindeki ifade simetriktir. Bu nedenle:

$$D(P, Q) = D(Q, P)$$

Bu durumda, Minkowski metriği simetri özelliğine sahiptir.

d₃) (Üçgen Eşitsizliği Koşulu):

$$D(P, Q) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$D(P, Q) + D(Q, R) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n (|y_i - z_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

p -norm'un üçgen eşitsizliğini sağlandığından,

$$|x_i - z_i|^p \leq |x_i - y_i|^p + |y_i - z_i|^p$$

eşitsizliği yazılır. Ardından Toplamların p -inci kökü alındığında üçgen eşitsizliği sağlandığını aşağıdaki gibi gösteririz:

$$\sum_{i=1}^n (|x_i - z_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n (|y_i - z_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Bu durumda, Minkowski metriği üçgen eşitsizliğini de sağlamış olur.

Sonuç olarak, Minkowski metriğinin metrik özelliklere sahip olduğunu söyleriz.

Tanım 2.1.1.1.4. (Hamming metriği) Hamming mesafesi veya Hamming metriği, iki eşit uzunluktaki dizgi veya bit dizisi arasındaki farklı bit sayısını ölçen bir metriktir. Genellikle bilgisayar bilimleri ve bilgi teorisi alanlarında kullanılır.

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

Bu formülde:

- $d_H(x, y)$, Hamming mesafesini temsil eder.
- x ve y , karşılaştırılan iki diziyi,
- x_i ve y_i , dizilerin i . pozisyonundaki bitleri,
- n , dizilerin uzunluğunu gösterir ve temsil ederler.

Bu formül, iki dizinin karşılıklı pozisyonlarındaki farklı bitleri toplar. Hamming mesafesi, bu farklı bitlerin sayısını temsil eder. Eğer iki dizi aynı ise, Hamming mesafesi sıfırdır, yani

$$d_H(x, x) = 0$$

İspat: Bir fonksiyonun bir metrik olması için üç temel özelliği sağlaması gerekmektedir. Bu özellikler, metrik uzayları tanımlayan temel özelliklerdir. Hamming mesafesi de bu metrik uzaylardan biridir ve aşağıdaki üç özelliği sağlar:

d_1) (Sıfır Uzaklık Koşulu):

Hamming mesafesinin tanımına göre, her bir $|x_i - y_i|$ ifadesi 0 veya 1'dir çünkü bu ifade, iki bit arasındaki farkı belirtir. Bu nedenle, her bir $|x_i - y_i|$ ifadesi sıfırdan büyük veya eşit değerlidir.

Toplam Hamming mesafesi $d_H(x, y)$ ise bu negatif olmayan değerlerin toplamıdır. Yani:

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \geq 0$$

Bu toplamın sonucu da negatif olmayacaktır, çünkü sadece 0 ve 1 değerleri içerir. Bu durumda, $d_H(x, y)$ her zaman sıfırdan büyük veya eşit olacaktır.

Sonuç olarak, Hamming mesafesi sıfır uzaklık koşulunu sağlar.

d_2) (Simetriklik Koşulu):

$d_H(x, y)$, Hamming mesafesini temsil eden formül şu şekildedir:

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$d_H(y, x)$, Hamming mesafesini temsil eden formül ise şu şekildedir:

$$d_H(y, x) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$$

Bu iki mesafe ifadelerini karşılaştırsak:

$$d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_H(y, x)$$

Bu adımlarla, $d_H(x, y)$ ve $d_H(y, x)$ ifadelerinin aynı olduğunu göstermiş oluyoruz. Bu durum, Hamming mesafesinin simetri özelliğini sağlar. Yani, $d_H(x, y) = d_H(y, x)$ her zaman geçerlidir.

d₃ (Üçgen Eşitsizliği Koşulu):

Hamming metriği için, üçgen eşitsizliğini şöyle gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} d_H(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \geq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| \\ &= \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \\ &= d_H(x, y) + d_H(y, z) \end{aligned}$$

Burada, x , y ve z ikili diziler, n dizilerin uzunluğu ve x_i , y_i ve z_i dizilerin i 'nci elemanlarıdır. Eşitsizliğin son adımında, mutlak değer fonksiyonunun üçgen eşitsizliğini kullandık. Böylece, Hamming metriğinin üçgen eşitsizliğini sağladığını göstermiş olduk. Sonuç olarak, bu üç özellik, Hamming mesafesini bir metrik yapar.

Tanım 2.1.1.1.5. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) Bu eşitsizlik, bir iç çarpım uzayındaki herhangi iki vektör için şöyle yazılabilir:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

Burada $\langle u, v \rangle$ vektörlerin iç çarpımını $\|u\|$ ve $\|v\|$ ise vektörlerin normunu gösterir. Eşitsizliğin sağ tarafı, vektörlerin uzunluklarının karesinin çarpımına eşittir. Eşitsizliğin sol tarafı ise, vektörlerin arasındaki açıyı θ alırsak, $\|u\| \cdot \|v\| \cos \theta$ olarak yazılabilir. Bu ifade, vektörlerin birbirine olan projeksiyonlarının uzunluğunu verir. Dolayısıyla, eşitsizlik bize şunu söyler: İki vektörün projeksiyonlarının uzunluğu, vektörlerin uzunluklarının çarpımından fazla olamaz. Eşitlik ise, vektörlerin aynı veya zıt yönde olduğu durumlarda geçerlidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, birçok farklı şekilde ifade edilebilir. Örneğin, reel sayı dizileri a_1, a_2, \dots, a_n ve b_1, b_2, \dots, b_n için şöyle yazılabilir:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Eşitlik ise, $a_i = k b_i$ olacak şekilde bir sabit k olduğu durumlarda geçerlidir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği, birçok matematik problemini çözmek için kullanışlı bir araçtır. Örneğin, üçgen eşitsizliği, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin bir sonucudur. Ayrıca, olasılık kuramı, lineer cebir ve matematiksel analiz gibi matematiğin diğer alanlarında da uygulamaları vardır

İspat: Öncelikle, t bir reel sayı olmak üzere, $p(t) = \|y - tx\|^2$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun değeri, her t için sıfırdan büyük veya eşittir. Çünkü bir vektörün normu sıfırdan küçük olamaz. Yani,

$$p(t) = \|y - tx\|^2 \geq 0$$

Şimdi, $p(t)$ 'yi açalım. Burada $\langle u, v \rangle$ vektörlerin iç çarpımını göstereyim.

$$p(t) = \|y - tx\|^2 = \langle ty - x, ty - x \rangle$$

$$p(t) = t^2 \langle y, y \rangle - 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle$$

Bu bir ikinci dereceden polinomdur. Bu polinomun kökleri olmadığına veya en fazla bir kökü olduğuna dikkat edelim. Çünkü $p(t)$ sıfırdan küçük olamaz. O halde, polinomun diskriminantı sıfırdan küçük veya eşit olmalıdır. Yani,

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$

Burada $a = \langle y, y \rangle$, $b = -2\langle x, y \rangle$ ve $c = \langle x, x \rangle$ olarak alalım. Böylece,

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$$

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle$$

elde ederiz. Bu da Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin istediğimiz şeklidir. Eşitliğin ne zaman sağlandığını da bulabiliriz. Eşitlik ancak ve ancak $\Delta = 0$ olduğunda sağlanır. Bu da $p(t)$ 'nin tek bir kökü olduğu anlamına gelir. Bu kök,

$$t = -\frac{b}{2a}$$

olarak bulunur. Bu değeri $p(t)$ 'ye yerine koyduğumuzda, $p(t) = 0$ olur. Bu da $ty - x = 0$ demektir. Yani, x ve y vektörleri birbirine paraleldir. Dolayısıyla, Cauchy-Schwarz eşitsizliği, vektörlerin birbirine paralel olduğu durumlarda eşitlik verir.

Tanım 2.1.1.1.6. (Young Eşitsizliği) Young eşitsizliği, şöyle ifade edilir:

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy$$

Burada $p, q \in (1, \infty)$ ve $x, y \in (0, \infty)$ olmak üzere

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitsizlik, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinin bir genelleştirilmesidir. Young eşitsizliğinin birçok farklı ispatı vardır. Örneğin, logaritma fonksiyonunun konkav olması, integral hesabı veya konvekslik kavramı ile ispatlanabilir. Young eşitsizliği, analiz, olasılık ve istatistik gibi matematik dallarında uygulama alanı bulmaktadır.

Logaritma fonksiyonunun konkav olması ile ilgili ispatı şöyledir:

$x, y > 0$ ve $0 \leq t \leq 1$ için,

$t \log x + (1 - t) \log y \leq \log(tx + (1 - t)y)$... (logaritma fonksiyonunun konkavlığından)

$\log(x^t y^{1-t}) \leq \log(tx + (1 - t)y)$... (logaritma fonksiyonunun özelliğinden)

$x^t y^{1-t} \leq tx + (1 - t)y$... (logaritma fonksiyonunun tersi)

$$t = \frac{1}{p}$$

alalım. O zaman

$$1 - t = \frac{1}{q}$$

olur. Ayrıca $x = a^p$ ve $y = b^q$ değişken değiştirmesi yapalım. Böylece son eşitsizlik şu şekilde yazılabilir:

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

$a \rightarrow a^p$ ve $b \rightarrow b^q$ alındığında , Young eşitsizliğini aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Tanım 2.1.1.1.7. (Hölder Eşitsizliği) Hölder Eşitsizliği, L_p uzayı konulu araştırmalarda kullanılan bir eşitsizliktir. Sonlu sayıda, hepsi sıfır olmayan $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ pozitif sayılar alınsın. $p, q > 1$ sayıları

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

koşulunu sağlasın. O zaman şu eşitsizlik geçerlidir:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizliğe Hölder Eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik ilk olarak Alman matematikçi Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937) tarafından elde edilmiştir. Bu eşitsizlik, Rogers Eşitsizliği olarak da bilinir, çünkü daha önce Leonard James Rogers tarafından kanıtlanmıştır. Ayrıca, Hölder Eşitsizliği, Jensen Eşitsizliği'nin de bir özel halidir.

Hölder Eşitsizliği'nin bir uygulaması olarak, Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni elde edebiliriz. Eğer $p = q = 2$ alırsak,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

koşulu sağlanır ve şu eşitsizlik çıkar:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Bu da Cauchy-Schwarz Eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlik, vektörlerin iç çarpımını ve normunu tanımlamak için kullanılır.

Hölder Eşitsizliği'nin ispatı için, şu adımları takip edebilirsiniz:

- Önce, a_i ve b_i sayılarını, p ve q sayılarının tersi kuvvetlerine göre normalize etmeliyiz. Yani,

$$x_i = \frac{a_i^{\frac{1}{p}}}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$$

ve

$$y_i = \frac{b_i^{\frac{1}{q}}}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

tanımlamalıyız.

- Sonra, x_i ve y_i sayılarının 1'e eşit olduğunu gösteririz. Yani,

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = 1$$

ve

$$\sum_{i=1}^n y_i^q = 1$$

olduğunu kanıtlarız.

- Daha sonra, x_i ve y_i sayılarının aritmetik-geometrik ortalamaları arasındaki eşitsizliği kullanırız. Yani,

$$\frac{x_i + y_i}{2} \geq \sqrt{x_i y_i}$$

olduğunu hatırlayalım.

- Bundan sonra, bu eşitsizliği toplam sembolü ile yazarız. Yani,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i y_i}$$

olduğunu yazarız.

➤ Son olarak, bu eşitsizliği x_i ve y_i tanımlarını yerine koyarak basitleştiririz. Yani,

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

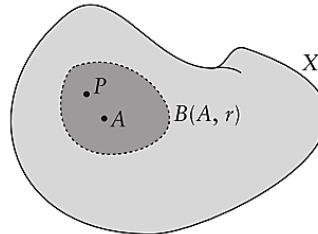
olduğunu elde etmiş oluruz.

Bu şekilde, Hölder Eşitsizliği'nin ispatını tamamlamış oluruz.

Tanım 2.1.1.1.8. (Açık ve kapalı yuvar) Metrik uzaylarda açık yuvar ve kapalı yuvar kavramları, bir noktanın etrafındaki belirli bir mesafedeki diğer noktaları tanımlamak için kullanılır. Örneğin, (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ bir nokta ve $r > 0$ bir sayı olsun. O zaman x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar şöyle tanımlanır:

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

Bu küme, x_0 noktasından r mesafeden daha yakın olan tüm noktaları içerir. Açık yuvarın kendisi de bir metrik uzaydır. Açık yuvarın özelliği, herhangi bir noktasının kümenin içinde kalacak şekilde küçük bir yarıçaplı başka bir açık yuvar içinde olmasıdır. Bu, açık yuvarın iç noktalarından oluştuğu anlamına gelir.



$B(A, r)$: A merkezli, r yarıçaplı yuvar

Kapalı yuvar ise, x_0 noktasından r mesafeye eşit veya daha yakın olan tüm noktaları içerir:

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

Bu küme, açık yuvarın yanı sıra, x_0 noktasından tam r mesafede olan noktaları da içerir. Bu noktalar, yuvar yüzeyi olarak adlandırılır:

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

Kapalı yuvarın özelliği, herhangi bir noktasının kümenin içinde kalacak şekilde büyük bir yarıçaplı başka bir kapalı yuvar içinde olmasıdır. Bu, kapalı yuvarın kapanışından oluştuğu anlamına gelir.

Metrik uzaylarda açık yuvar ve kapalı yuvar kavramları, metrik uzayın topolojik yapısını incelemek için önemlidir. Örneğin, bir metrik uzayın kompakt, bağlantılı veya ayırık olup olmadığını belirlemek için açık yuvar ve kapalı yuvar kümelerini kullanabiliriz.

Örnek 2.1.1.5. (\mathbb{R}, d) bir metrik uzay olsun, burada $d(x, y) = |x - y|$ mutlak değer metriği olsun.

- O zaman $B(0,1) = (-1,1)$ sıfır merkezli, bir yarıçaplı açık yuvar,
- $B[0,1] = [-1,1]$ sıfır merkezli, bir yarıçaplı kapalı yuvar ve $S(0,1) = -1,1$ sıfır merkezli, bir yarıçaplı yuvar yüzeyidir.

Bu örnekte, açık yuvar ve kapalı yuvar arasındaki fark, sınırların dahil edilip edilmediğidir.

Örnek 2.1.1.6. (\mathbb{R}^2, d) bir metrik uzay olsun,

Burada $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ Öklid metriği olsun. O zaman,

- $B((0,0), 1) = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1$ orijin merkezli, bir yarıçaplı açık yuvar,
- $B[(0,0), 1] = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1$ orijin merkezli, bir yarıçaplı kapalı yuvar
- ve $S((0,0), 1) = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1$ orijin merkezli, bir yarıçaplı yuvar yüzeyidir.

Bu örnekte, açık yuvar ve kapalı yuvar, iki boyutlu düzlemde birim çemberin içi ve dışı olarak görülebilir.

Örnek 2.1.1.7. (\mathbb{R}^n, d) bir metrik uzay olsun.

Burada $d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$ sup metriği olsun.

- O zaman $\mathcal{B}(\vec{0}, 1) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1, i = 1, \dots, n\}$ sıfır vektörü merkezli, bir yarıçaplı açık yuvar,
- $\mathcal{B}[\vec{0}, 1] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ sıfır vektörü merkezli, bir yarıçaplı kapalı yuvar
- ve $\mathcal{S}(\vec{0}, 1) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| = 1, i = 1, \dots, n\}$ sıfır vektörü merkezli, bir yarıçaplı yuvar yüzeyidir.

Bu örnekte, açık yuvar ve kapalı yuvar, n boyutlu uzayda birim küpün içi ve dışı olarak görülebilir.

Tanım 2.1.1.1.9. (Açık Küme ve Kapalı Küme) Bir \mathcal{X} alt kümesi $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ “açık” olarak adlandırılır, her bir $x \in \mathcal{U}$ için, x etrafında bir $r > 0$ bulunabilir, böylece

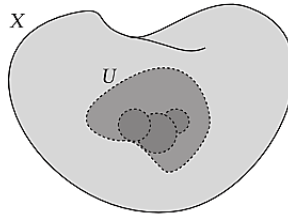
$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$$

tamamen \mathcal{U} içindedir.

Matematiksel olarak, bir kümenin açık olduğunu ifade etmek için şu notasyonu kullanabiliriz:

$$\{\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0 : \mathcal{B}(x, r) \subseteq \mathcal{U}\}$$

Burada $\mathcal{B}(x, r)$, x merkezli yarıçapı r olan açık küreyi temsil eder.



U açık kümesi, açık yuvarların bileşimidir.

Bir \mathcal{X} alt kümesi $\mathcal{X} \setminus \mathcal{U}$ açık olduğunda $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ "kapalı" olarak adlandırılır. Matematiksel olarak, bir kümenin kapalı olduğunu ifade etmek için şu notasyonu kullanabiliriz:

$$\{\mathcal{X} \setminus \mathcal{U} \text{ açık ise, } \mathcal{U} \text{ kapalıdır.}\}$$

Örnek 2.1.1.8. Bir \mathcal{X} metrik uzayı ve x_0 elemanı için, $\mathcal{B}_r(x_0)$ kümesi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{B}_r(x_0) = \{x \in \mathcal{X} : d(x, x_0) < r\}$$

Burada $d(x, x_0)$ x ve x_0 arasındaki mesafeyi ölçen metrik fonksiyondur. r pozitif bir gerçel sayıdır ve x_0 etrafındaki yarıçapı belirtir.

\mathcal{A} kümesi kapalıysa, her ardışık sınırlı dizisinin limiti \mathcal{A} kümesinin içindedir. Örneğin, $[a, b]$ aralığı kapalı bir kümedir. Burada a ve b noktaları aralığın sınırlarını belirtir ve $[a, b]$ aralığının tüm limit noktaları aralık içindedir.

Örnek 2.1.1.9. $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (gerçel sayılar kümesi) ve $x_0 = 0$ için, $\mathcal{B}_r(0)$ kümesini ele alalım:

$$\mathcal{B}_r(0) = \{x \in \mathbb{R} : |x| < r\}$$

Bu, gerçel sayılar düzlemindeki 0 noktasının r yarıçapındaki açık topolojik top'dur. Örneğin, $\mathcal{B}_1(0)$ kümesi, $-1 < x < 1$ olan tüm gerçel sayıları içerir.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (iki boyutlu gerçel sayılar kümesi) ve \mathcal{F} kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Bu, orijinden bir yarıçap 1 olan bir dairenin içindeki noktaları içeren bir kümedir. Bu küme kapalıdır çünkü limit alındığında içindeki tüm sınırlı dizilerin limiti de kümenin içindedir.

Örnek 2.1.1.10. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (İki boyutlu gerçel sayılar kümesi) ve $(x_0, y_0) = (1,1)$ noktasını ele alalım. Aşağıdaki küme F üzerinden açık ve kapalı küme kavramlarını inceleyelim:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 2\}$$

F kümesi, $2x + y \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan tüm (x, y) noktalarını içerir. Örneğin, $(1,1)$ bu eşitsizliği sağlar, bu nedenle F içindedir. Aynı zamanda, bu noktanın çevresinde belirli bir yarıçap içindeki bir bölgeyi içeren bir açık kümedir.

F kümesinin tamamı, $2x + y \geq 2$ eşitsizliğini sağlayan tüm noktaları içerir. F kümesinin tamamı, bu eşitsizliği sağlayan sınırlı bir dizinin limitini içerir. Örneğin, $(1,1)$ bu eşitsizliği sağladığı için F kümesinde yer alır. Bu nedenle, F kümesi kapalıdır.

Bu örnek, bir kümenin hem açık hem de kapalı olabileceğini göstermektedir. Aynı zamanda, bir kümenin sınırlı dizilerin limitini içeriyorsa kapalı olduğunu da göstermektedir.

Tanım 2.1.1.1.10. (Komşuluk) Metrik uzaylarda komşuluk, bir noktanın diğer noktalara olan "yakınlığını" ifade eder. Formel olarak, \mathcal{X} bir metrik uzay ve $x \in \mathcal{X}$ bir nokta olduğunda, $\mathcal{N}_\epsilon(x)$ kümesi x noktasına ϵ mesafesindeki noktaların kümesidir. Yani,

$$\mathcal{N}_\epsilon(x) = \{y \in \mathcal{X} \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

Burada $\epsilon > 0$ bir pozitif gerçel sayıdır ve bu değer, ne kadar "yakın" olduğu tanımlar. Bu $\mathcal{N}_\epsilon(x)$ kümesine x 'in ϵ -komşuluk kümesi denir. Metrik uzaylarda komşuluk, bir noktanın etrafındaki yapıyı anlamak ve bu noktaya yakın olan diğer noktalarla ilgili bilgi edinmek için kullanışlıdır.

Örnek 2.1.1.11. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (İki boyutlu gerçel sayılar kümesi) ve d öklidyen mesafesi olsun. Yani, herhangi iki nokta $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ için mesafe fonksiyonu:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Bu durumda, \mathcal{X} bir metrik uzaydır. Şimdi, bir nokta $p = (1,2)$ düşünelim ve p noktasının 1 birimlik öklidyen mesafesindeki noktaların kümesini bulalım. Yani, $\mathcal{N}_1(p)$ kümesini hesaplayalım:

$$\mathcal{N}_1(p) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2} < 1\}$$

Bu, p noktasının etrafında birimlik bir çemberi temsil eder. $\mathcal{N}_1(p)$ kümesindeki noktalar, p noktasına birimlik mesafede olan noktalardır. Benzer şekilde, p noktasının 0.5 birimlik öklidyen mesafesindeki noktaların kümesi şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{N}_{0.5}(p) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(1-x_1)^2 + (1-x_2)^2} < 0.5\}$$

Bu, p noktasına yarı birimlik mesafede olan noktaların kümesini temsil eder.

Örnek 2.1.1.12. $\mathcal{X} = \mathbb{Z}$ (Tamsayılar kümesi) ve d şu şekilde tanımlanan bir metrik fonksiyonu olsun:

$$d(m, n) = |m - n|$$

Bu durumda, \mathcal{X} bir metrik uzaydır. Şimdi, $n = 5$ noktasını düşünelim. $n = 5$ noktasının 2 birimlik mesafesindeki noktaların kümesini hesaplayalım, yani $\mathcal{N}_2(5)$

$$\mathcal{N}_2(5) = \{m \in \mathbb{Z} \mid |5 - m| < 2\}$$

Bu, $n = 5$ noktasına 2 birimlik mesafede olan tamsayıları içeren bir kümedir. Dolayısıyla, $\mathcal{N}_2(5) = 3,4,5,6,7$.

Bu örnekte, metrik uzay \mathbb{Z} üzerinde tanımlanan öklidyen benzeri bir metrik kullanılmıştır ve komşuluk, bir noktanın diğer noktalara olan tamsayı mesafesiyle belirlenmiştir.

Örnek 2.1.1.13. $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ (n -boyutlu gerçel sayılar kümesi) ve d bir metrik fonksiyonu olarak öklidyen mesafeyi alalım:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri. Bu durumda, \mathcal{X} bir metrik uzaydır.

Şimdi, $p = (1,2,3)$ vektörünü düşünelim. Bu noktanın 1 birimlik öklidyen mesafesindeki noktaların kümesi $\mathcal{N}_1(p)$ şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{N}_1(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(1 - q_1)^2 + (2 - q_2)^2 + (3 - q_3)^2} < 1\}$$

Bu, p noktasına 1 birimlik mesafede olan noktaların kümesini temsil eder. Bu örnekte, öklidyen metrik uzayındaki komşuluk kavramı, bir noktanın diğer noktalara olan fiziksel uzaklığını temsil eder. Bu uzayda, $\mathcal{N}_1(p)$ kümesindeki noktalar, p noktasına birimlik öklidyen mesafede olan noktalardır.

Her metrik uzayın kendine özgü bir metrik fonksiyonu ve bu fonksiyon üzerinden tanımlanan farklı komşuluk yapıları bulunabilir. Bu örnekler, metrik uzaylarda komşuluk kavramının çeşitli özellikleri ve uygulamaları hakkında fikir edinmemize yardımcı olabilir.

Tanım 2.1.1.11. (Dizilerde Yakınsaklık) Yakınsaklık kavramı, matematikte diziler, seriler, fonksiyonlar, süreçler gibi nesnelerin bir limit değerine yaklaşması durumunu ifade eder. Yakınsaklık, nesnenin terimleri veya değerleri arasındaki farkın istenilen kadar küçük yapılabilmesi anlamına gelir.

Matematiksel olarak, bir (x_n) dizisinin a sayısına yakınsadığını söylemek için, her $\epsilon > 0$ için, öyle bir N doğal sayısı bulunmalı ki, $n > N$ olduğunda $|x_n - a| < \epsilon$ olsun. Burada ϵ yakınsaklığın hassasiyetini belirler. (Babu, Sandhya ve Kameswari, 2008)

Örnek 2.1.1.14. (a_n) dizisi,

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{n^2 - 2n + 1}$$

olmak üzere tanımlansın. Bu dizinin yakınsak olup olmadığını, eğer yakınsaksa limitinin kaç olduğunu bulalım.

Bir dizinin yakınsak olması için, dizinin elemanlarının birbirine yaklaşması ve bir limit değerine ulaşması gerekir. Bunun için, dizinin genel teriminin $n \rightarrow \infty$ iken davranışını incelemek yeterlidir. Eğer genel terim, bir sayıya yaklaşıyorsa, o sayı dizinin limitidir. Eğer genel terim, sonsuza gidiyorsa veya dalgalanıyorsa, dizinin limiti yoktur. Bu örnekte, (a_n) dizisinin genel terimi,

$$a_n = \frac{n^2 + 3n}{n^2 - 2n + 1}$$

olarak verilmiştir. Bu ifadeyi sadeleştirmek için, hem payda hem de paydaki terimleri en yüksek dereceli terime bölerek,

$$a_n = \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

elde ederiz. Bu şekilde, $n \rightarrow \infty$ iken, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

olup $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ eşitsizliği her $n \in N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$ bulunduğundan

$$\frac{3}{n}, \frac{2}{n} \text{ ve } \frac{1}{n^2}$$

terimleri sıfıra yaklaşacaktır. Dolayısıyla, a_n ifadesi de $\frac{1}{1}$ yani 1 sayısına yaklaşacaktır.

Bu da (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu ve limitinin 1 olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, (a_n) dizisi yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ dir.

Tanım 2.1.1.12. (Cauchy dizisi) Bir metrik uzayda tanımlanan bir sayı dizisidir. Bir dizinin Cauchy dizisi olması için, dizinin elemanları arasındaki mesafenin istenilen kadar küçük yapılabilmesi gerekir. (Bayraktar, 1994), (Boriceanu, 2009)

Matematiksel olarak, Bir gerçel sayı dizisi a_n matematiksel olarak Cauchy dizisi olarak tanımlanır eğer her $\varepsilon > 0$ için, aşağıdaki koşul sağlanıyorsa:

$$\{\exists N \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\}$$

Bu ifade, n ve m 'in N 'den büyük olduğu tüm durumlar için a_n ve a_m arasındaki mutlak farkın ε 'den küçük olduğunu belirtir. Bu, Cauchy dizisinin temel özelliğidir. Bu özellik, dizinin elemanlarının birbirine yaklaştığını ve dolayısıyla bir limit noktasına yakınsadığını gösterir. (Khamiski & Kozlowski, 1990)

Örnek 2.1.1.15. Bir gerçel sayılar dizisi

$$a_n = \frac{1}{n}$$

düşünelim. Bu dizi bir Cauchy dizisidir. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için,

$$n, m > N = \frac{1}{\varepsilon}$$

olduğunda,

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu, a_n dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Ayrıca, bu dizi 0'a yakınsar, yani bu dizi yakınsak bir Cauchy dizisidir.

Cauchy dizileri, yakınsaklık kavramıyla yakından ilgilidir. Bir metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir, ancak tersi her zaman doğru değildir. Eğer bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsaksa, bu uzaya tam metrik uzay denir. (Banach, 1922) Örneğin, gerçel sayılar kümesi tam bir metrik uzaydır, ancak rasyonel sayılar kümesi tam

değildir. Rasyonel sayılar kümesinde, $\sqrt{2}$ sayısına yaklaşan bir Cauchy dizisi vardır, ancak bu dizi rasyonel sayılar kümesinde bir limite sahip değildir.

Cauchy dizileri, matematikte önemli bir rol oynar. Özellikle, reel analiz, kompleks analiz, fonksiyonel analiz ve sayı teorisinde Cauchy dizileri sıkça kullanılır. Cauchy dizileri, Augustin-Louis Cauchy adlı ünlü Fransız matematikçi tarafından 1821 yılında tanıtılmıştır. (Khamiski & Kozlowski, 1990)

Teorem 2.2. Bir metrik uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir, ancak tersi her zaman doğru değildir. (Boriceanu, 2009)

İspat: Teoremin ilk kısmı, bir metrik uzayda her yakınsak dizinin Cauchy dizisi olduğunu ifade etmektedir. Bunu ispatlamak için, şöyle bir tanım kullanacağız:

Bir metrik uzayda (x_n) bir dizi ve x bir nokta olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ ise, (x_n) dizisi x noktasına yakınsaktır ve x dizinin limitidir.

Şimdi, (x_n) bir metrik uzayda yakınsak bir dizi ve x dizinin limiti olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olduğundan, öyle bir N sayısı vardır ki, $n > N$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. O halde, $n, m > N$ olduğunda, üçgen eşitsizliğini kullanarak şunu elde ederiz: (Yurtsever, 1978)

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teoremin ikinci kısmı ise, bir metrik uzayda her Cauchy dizisinin yakınsak olmadığını bize söylemektedir. Bunu ispatlamak için de bir metrik uzayda Cauchy dizisi olup yakınsak olmayan bir örnek vermemiz gerekir. Örneğin, $(0,1)$ aralığında tanımlı olan $d(x, y) = |x - y|$ metriği ile,

$$\left(\frac{1}{n}\right)$$

dizisi bir Cauchy dizisidir, ancak $(0,1)$ aralığında bir limiti yoktur. Bu da teoremin ikinci kısmını kanıtlar.

Tanım 2.1.1.13. (Metrik Uzaylarda tamlık) Bir metrik uzay (\mathcal{X}, d) üzerinde, her Cauchy dizisi bir uzaydaki bir noktaya yakınsıyorsa, bu uzaya bir tam metrik uzaydır. (Banach, 1922), (Bayraktar, 1994)

Burada:

- \mathcal{X} , bir kümenin elemanlarından oluşan metrik uzayın taşıyıcı kümesini,
- $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, metrik fonksiyonu (mesafe fonksiyonu) olup, $d(x, y)$ x ve y noktaları arasındaki uzaklığı ölçer,
- Cauchy dizisi, her $\varepsilon > 0$ için bir N indeksi bulunan bir dizidir, $n, m \geq N$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ koşulunu sağlar.

Tam metrik uzayın tanımını matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

bu limit de \mathcal{X} uzayındaysa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathcal{X}$$

Bu durumda, \mathcal{X} uzayı tam bir metrik uzaydır. Bu tanım, her Cauchy dizisinin limitinin aynı uzayda olması gerektiğini ve bu limitlerin metrik uzay içinde olduğunu ifade eder. (Khamiski & Kozlowski, 1990)

Örnek 2.1.1.16. Gerçel sayılar üzerindeki tam metrik uzay, gerçel sayılar kümesi \mathbb{R} ile standart mutlak değer metriği $d(x, y) = |x - y|$ ile oluşturulan bir metrik uzaydır. Bu metrik uzayın tam olduğunu, yani \mathbb{R} 'deki her Cauchy dizisinin \mathbb{R} 'de bir limiti olduğunu ispatlamak için şu adımları izleyebiliriz:

\mathbb{R} 'deki her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu gösterelim. Bunun için, (x_n) Cauchy dizisi olsun. O halde, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, n ve m yeterince büyük olduğunda,

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

olur. Özellikle, $\varepsilon = 1$ alalım ve N öyle bir sayı olsun ki, $n > N$ ve $m > N$ olduğunda $|x_n - x_m| < 1$ olsun. O zaman, N 'den büyük herhangi bir n için,

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|$$

olur. Bu da (x_n) dizisinin sınırlı olduğunu gösterir.

\mathbb{R} 'deki her sınırlı dizinin bir yakınsak alt dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için, Bolzano-Weierstrass teoremini kullanabiliriz. Bu teorem, her sınırlı dizinin en az bir yakınsak alt dizisi olduğunu söyler. Örneğin, (x_n) sınırlı bir dizi olsun. O halde, bu dizinin bir alt dizisi

$$(x_{n_k}) \text{ öyle ki, } x_{n_k} \rightarrow L$$

olacak şekilde seçilebilir. Burada L , gerçel sayılardan biridir.

\mathbb{R} 'deki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Bunun için, (x) Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin sınırlı olduğunu ve bir yakınsak alt dizisi olduğunu biliyoruz. Alt dizinin limiti L olsun. Şimdi, (x_n) dizisinin de L 'ye yakınsadığını göstermek için, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, n yeterince büyük olduğunda $|x_n - L| < \varepsilon$ olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\frac{\varepsilon}{2} > 0$$

alalım ve N_1 öyle bir sayı olsun ki, n ve $m > N_1$ olduğunda

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Ayrıca, N_2 öyle bir sayı olsun ki, $k > N_2$ olduğunda

$$|x_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. Şimdi,

$$N = \max(N_1, N_2)$$

alalım ve $n > N$ olsun. O zaman, $n_k > N$ olduğunda

$$|x_n - L| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - L| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olur. Bu da (x_n) dizisinin de L 'ye yakınsadığını gösterir.

Sonuç olarak, \mathbb{R} 'deki her Cauchy dizisinin \mathbb{R} 'de bir limiti olduğunu ispatlamış olduk. Bu da \mathbb{R} 'nin bir tam metrik uzay olduğunu gösterir. (Banach, 1922)

Örnek 2.1.1.17. ℓ^p uzaylarını inceleyelim. ℓ^p uzayları, $p \geq 1$ için

$$\ell^p = \left\{ (x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örneğin; ℓ^2 uzayını ele alırsak, bu uzayın elemanları kare toplamları mutlak değeriyle sınırlı olan sayı dizileridir. ℓ^2 uzayındaki bir Cauchy dizisini şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots \right)$$

Bu dizinin bir ℓ^2 uzayında limiti, sırasıyla

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right)$$

olan bir elemandır.

Her ℓ^2 uzayındaki Cauchy dizisi, bu uzayın içinde bir limit değerine yakınsar ve limit değeri de yine ℓ^2 uzayındadır. Bu durum, ℓ^2 uzayının tam bir metrik uzay olduğunu gösterir.

Teorem 2.3. Bir metrik uzayın tam olması için gerek ve yeter koşul, boş olmayan kapalı alt kümelerinin, çapları sıfıra yakınsayan, her azalan dizisinin arakesitinin boş kümeden farklı olmasıdır.

İspat: Önce gerek koşulu gösterelim. \mathcal{X} tam bir metrik uzay olsun. (\mathcal{F}_n) boş olmayan kapalı alt kümelerinin, çapları sıfıra yakınsayan, bir azalan dizisi olsun. Her n için, (\mathcal{F}_n) içinden rastgele bir n seçelim. Bu şekilde, \mathcal{X} içinde bir (x_n) dizisi elde ederiz. Bu dizinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\text{diam}(\mathcal{F}_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 bulalım. O zaman, $n, m > n_0$ için, $x_n, x_m \in \mathcal{F}_{n_0}$ olur. Çünkü (\mathcal{F}_n) dizisi azalan bir dizidir.

Dolayısıyla, $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(\mathcal{F}_{n_0}) < \varepsilon$ olur. Bu da (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. \mathcal{X} tam olduğundan, bu dizinin bir limiti x vardır. Bu limitin, tüm \mathcal{F}_n kümelerinde ortak bir nokta olduğunu gösterelim. Herhangi bir n için, $x_n \in \mathcal{F}_n$ olduğundan, \mathcal{F}_n kapalı olduğu için, x_n x olduğundan, $x \in \mathcal{F}_n$ olur. Böylece, tüm \mathcal{F}_n kümelerinin arakesiti boş kümeden farklıdır.

Şimdi yeter koşulu gösterelim. \mathcal{X} içinde bir (x_n) Cauchy dizisi olsun. Bu dizinin yakınsak olduğunu göstermek için, $\mathcal{F}_n = \overline{x_k: k \geq n}$ ile tanımlanan kapalı alt kümelerinin bir dizisini göz önüne alalım. Bu dizinin azalan bir dizi olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olması, \mathcal{F}_n kümelerinin çaplarının sıfıra yakınsadığı anlamına gelir. Verilen koşula göre, tüm \mathcal{F}_n kümelerinin arakesiti boş kümeden farklıdır.

Bu arakesitte tek bir nokta olduğunu gösterelim. Eğer x ve y bu arakesitte iki farklı nokta olsaydı, o zaman $x, y \in \mathcal{F}_n$ olurdu. Ama bu, $d(x, y) \leq \text{diam}(\mathcal{F}_n)$ demektir. Bu da $n \rightarrow \infty$ iken, $d(x, y) \rightarrow 0$ olması gerektiği anlamına gelir. Bu da $x = y$ olması gerektiği anlamına gelir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, arakesitte tek bir nokta x vardır. Bu noktanın, (x_n) dizisinin limiti olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\text{diam}(\mathcal{F}_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 bulalım. O zaman, $n > n_0$ için, $x_n \in \mathcal{F}_{n_0}$ olur. Ayrıca, $x \in \mathcal{F}_{n_0}$ olduğundan, $d(x_n, x) \leq \text{diam}(\mathcal{F}_{n_0}) < \varepsilon$ olur. Bu da $x_n \rightarrow x$ olduğunu bize gösterir. Böylece, \mathcal{X} tam bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.1.14. (Çap) Metrik uzaylarda daralma dönüşümlerinde çap kavramı, bir kümenin iki elemanı arasındaki en büyük uzaklığı ifade eder. Örneğin, bir metrik uzay (\mathcal{X}, d) üzerinde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ bir küme olsun. \mathcal{A} 'nın çapı, \mathcal{A} 'daki herhangi iki eleman x ve y için $d(x, y)$ değerinin maksimumu olarak tanımlanır. Yani,

$$\{diam(\mathcal{A}) = \sup\{d(x, y)\} : x, y \in \mathcal{A}\}$$

Bu tanım, \mathcal{A} 'nın sınırlı bir küme olduğu durumda geçerlidir. Eğer \mathcal{A} sınırlı değilse, çapı sonsuz olabilir.

Örnek 2.1.1.18. $(\mathbb{C}, |z - w|)$ karmaşık sayılar kümesi üzerinde bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzayda, $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ bir açık disk olsun. Bu durumda, \mathcal{D} 'nin çapı, \mathcal{D} 'deki iki eleman arasındaki en büyük uzaklık olacaktır. Bu da diskin merkezinden kenarına olan uzaklığın iki katına eşittir. Yani,

$$diam(\mathcal{D}) = \sup\{|z - w| : z, w \in \mathcal{D}\} = 2$$

$(\mathbb{C}, |z - w|)$ karmaşık sayılar kümesi üzerinde bir metrik uzay olsun. Bu metrik uzayda, $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ bir küme olsun. Bu küme, birim çemberin dışında kalan tüm karmaşık sayıları içerir. Bu kümenin sınırlı olmadığını görmek için, herhangi bir $r > 0$ için, \mathcal{F} 'nin $B(0, r)$ açık yuvarının içinde olmadığını gösterebiliriz. Çünkü, r 'den büyük bir $|z|$ değeri seçersek, $z \in \mathcal{F}$ olur, ama $|z - 0| = |z| > r$ olduğundan, $z \notin B(0, r)$ olur. Bu yüzden, \mathcal{F} sınırlı değildir ve çapı sonsuzdur. Bu örneğin iki boyutlu bir uzayda tanımlandığını ayrıca hatırlatalım.

Tanım 2.1.1.1.15. (Sabit Nokta) Bir fonksiyonun sabit noktası, fonksiyonun değeriyle bağımsız değişkeninin değeri aynı olduğu noktadır. Yani matematiksel olarak ifade etmek gerekirse, bir $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ fonksiyonu için $x \in \mathcal{X}$,

$$\mathcal{T}x = x$$

olduğunda x bir sabit noktadır. (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2007)

Örnek 2.1.1.19.

$$f(x) = 4x(1 - x)$$

fonksiyonunun sabit noktaları

$$x = 0 \text{ ve } x = \frac{3}{4}, \text{tür,}$$

Çünkü

$$4x(1 - x) - x = x(4(1 - x) - 1) = x(3 - 4x)$$

ifadesi sıfıra eşittir. Grafiksel olarak, sabit nokta x , $(x, f(x))$ noktasının $y = x$ doğrusu üzerinde olduğu anlamına gelir. Yani, f fonksiyonunun grafiği ile $y = x$ doğrusunun ortak bir noktası vardır.

Tanım 2.1.1.16. (Lipschitz Koşulu) Bir fonksiyon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz sürekliliğine sahipse, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\exists L \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, |f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|$$

Burada L Lipschitz sabiti olarak adlandırılır. Bu eşitsizlik, fonksiyonun her iki noktasındaki değerler arasındaki farkın, giriş noktalarının uzaklığıyla çarpılan bir sabit tarafından sınırlı olduğunu belirtir. (Lipschitz, 1861)

3. METRİK UZAYLARDA BANACH SABİT NOKTA TEOREMİ VE İSPATI

Banach Sabit Nokta Teoremi, metrik uzaylarda sabit nokta problemlerinin çözümünde temel bir rol oynayan bir teoremdir. Bu teorem, bir fonksiyonun kendisiyle örtüşen bir noktasının olduğunu ve bu noktanın nasıl bulunabileceğini gösterir. Teorem, Stefan Banach tarafından 1922 yılında yayınlanmıştır. (Banach, 1922)

Banach Sabit Nokta Teoremi'nin önemi hem teorik hem de uygulamalı matematikte çok sayıda alanda kullanılabilmesinden kaynaklanmaktadır. Örneğin, diferansiyel denklemler, integral denklemler, fonksiyonel denklemler, oyun teorisi, ekonomi, bilgisayar bilimi, optimizasyon, dinamik sistemler, fraktallar ve kaos teorisi gibi alanlarda Banach Sabit Nokta Teoremi'nden yararlanılmaktadır. (Cauchy, 1884)

Banach Sabit Nokta Teoremi'nin uygulama alanlarından biri, diferansiyel denklemlerin çözümüdür. Diferansiyel denklemler, doğada karşılaşılan pek çok olgunun matematiksel modelleridir. Örneğin, fizik, kimya, biyoloji, mühendislik, astronomi ve epidemiyoloji gibi bilim dallarında diferansiyel denklemler sıkça kullanılır. Diferansiyel denklemlerin çözümleri, genellikle analitik olarak bulunamaz. Bu durumda, sayısal yöntemlerle yaklaşık çözümler elde edilir. Sayısal yöntemlerden biri, Banach Sabit Nokta Teoremi'ne dayanan Picard iterasyon yöntemidir. (Picard, 1890) Bu yöntem, bir diferansiyel denklemi, bir sabit nokta problemine indirger ve ardından Banach Sabit Nokta Teoremi'ni kullanarak iteratif bir şekilde sabit noktayı, yani diferansiyel denklemin çözümünü bulur.

Banach Sabit Nokta Teoremi, metrik uzaylarda sabit nokta problemlerinin çözümü için güçlü bir araçtır. (Banach, 1922) Ancak, bu teorem, her metrik uzayda geçerli değildir. Teoremin uygulanabilmesi için, metrik uzayın tam ve fonksiyonun daraltıcı olması gerekir. Bu koşullar, bazı durumlarda çok kısıtlayıcı olabilir. Bu nedenle, Banach Sabit Nokta Teoremi'nin çeşitli genelleştirmeleri ve alternatifleri araştırılmıştır. Örneğin, Kannan Sabit Nokta Teoremi (Kakutani, 1941), Banach Sabit Nokta Teoremi'nden daha zayıf bir daralma (contraction) koşulu gerektirir. Ayrıca, küme değerli, asimptotik düzgünlük ve yerelleştirme ve kontrol fonksiyonları ile oluşturulan dönüşümler için de sabit nokta teoremleri geliştirilmiştir. (Jachymski, 2008), (Kakutani, 1941)

Banach Sabit Nokta Teoremi, matematikte ve diğer bilimlerde önemli bir rol oynamaktadır. Bu teorem, sabit nokta problemlerinin çözümü için bir yöntem sunmakla kalmaz, aynı zamanda bu problemlerin varlığı, benzersizliği, kararlılığı ve yakınsaklığı

gibi özelliklerini de incelemeyi sağlar. Banach Sabit Nokta Teoremi'nin genelleştirmeleri ve uygulamaları, halen aktif bir araştırma alanıdır.

3.1. Tanım: (Daralma Dönüşümü)

Bir metrik uzayda tanımlanan bir dönüşümün daralma dönüşümü olabilmesi için, aşağıdaki koşulu sağlaması gerekir: (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2009)

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$$

Burada, d uzaklık fonksiyonu, f dönüşüm fonksiyonu, x ve y ise metrik uzaydaki iki noktadır. Bu eşitsizlik, dönüşümün her iki nokta arasındaki uzaklığı azalttığını gösterir.

Bir dönüşümün daralma dönüşümü olması için, ayrıca bir küçültme sabiti λ bulunmalıdır. Bu sabit, $0 < \lambda < 1$ olacak şekilde, aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır: (Berinde, 2007)

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

Bu eşitsizlik, dönüşümün her iki nokta arasındaki uzaklığı en fazla λ oranında azalttığını gösterir. Bir örnek vermek gerekirse,

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2$$

dönüşümü, gerçel sayılar kümesinde bir daralma dönüşümüdür. Çünkü, herhangi iki gerçel sayı x ve y için, aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |x - y| \\ |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

Burada,

$$d(x, y) = |x - y|$$

uzaklık fonksiyonudur. Bu durumda, daralma sabiti,

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek 3.1.1.

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

dönüşümünün $[0, \infty)$ üzerinde bir sabit noktası olup olmadığını bulalım. Bu dönüşümün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için, $x, y \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

eşitsizliğini sağlayan $0 < \lambda < 1$ bir sabit bulmamız gerekir. Bu eşitsizliği şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| \frac{x}{2} + 1 - \frac{y}{2} - 1 \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} |x - y| \\ &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikten,

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

alabiliriz. Bu da $\lambda < 1$ olduğundan, bu dönüşümün bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. Dolayısıyla, Banach sabit nokta teoremini kullanabiliriz. Buna göre,

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

dönüşümünün $[0, \infty)$ üzerinde tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta $g(x) = x$ denklemini sağlayan x değeridir. Bu denklemi şöyle yazabiliriz:

$$g(x) = x$$

$$\frac{x}{2} + 1 = x$$

$$x + 2 = 2x$$

$$x = 2$$

Dolayısıyla,

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

dönüşümünün $[0, \infty)$ üzerinde tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta 2 dir.

Örnek 3.1.2.

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$$

fonksiyonun girdi ve çıktı değerleri aşağıdaki şekildedir:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	0.0625	0.75	1.5	∞	1.5	0.75	0.0625

Bu fonksiyona daralma dönüşümü uygulamak için, girdi değerini bir sabit sayı ile çarpmamız gerekir. Örneğin,

$$g(x) = f(2x)$$

fonksiyonunu oluşturursak, girdi ve çıktı değerleri aşağıdaki şekilde olur:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$g(x)$	0.75	1.5	∞	∞	1.5	0.75	0.0625

Gördüğümüz gibi, grafiğin tüm noktaları eksenine doğru 2 kat yakınlaşmıştır. Bu, daralma dönüşümünün bir örneğidir. Eğer

$$h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

fonksiyonunu oluşturursak, girdi ve çıktı aşağıdaki şekilde olur:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$h(x)$	0.0625	0.0625	0.75	∞	0.75	0.0625	0.0625

Bu durumda, grafiğin tüm noktaları ekseninden 2 kat uzaklaşmıştır. Bu, genişleme dönüşümünün bir örneğidir. Daralma ve genişleme dönüşümleri arasındaki fark, girdi değerinin çarpıldığı sabit sayının 1'den büyük ya da küçük olmasıdır. 1'den büyük bir sayı ile çarpım daralma, 1'den küçük bir sayı ile çarpım genişleme anlamına gelir.

3.1.1. Banach Sabit Nokta Teoremi ve İspatı

Teorem 3.1.1.1. (Banach Sabit Nokta Teoremi) \mathcal{X} boş olmayan bir küme, (\mathcal{X}, d) bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir daralma dönüşümü olsun. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki,

$$\forall x, y \in \mathcal{X} \text{ için } d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

olsun. O zaman, \mathcal{T} 'nin \mathcal{X} 'te tek bir sabit noktası vardır, yani öyle bir $x^* \in \mathcal{X}$ vardır ki,

$$\mathcal{T}(x^*) = x^*$$

(Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2007), (Banach, 1922)

İspat: Öncelikle, \mathcal{T} 'nin en az bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için, \mathcal{X} 'ten rastgele bir x_0 noktası seçelim ve ardışık olarak

$$x_{n+1} = \mathcal{T}(x_n)$$

olacak şekilde (x_n) dizisini tanımlayalım. Bu noktaların bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \lambda^m d(x_1, x_0)$$

olduğunu matematiksel tümevarım ile ispatlayabiliriz. Eğer $n = 0$ ise, bu eşitsizlik doğrudur. Eğer $n > 0$ ise,

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &= d(\mathcal{T}(x_{n+m-1}), \mathcal{T}(x_{n-1})) \\ &\leq \lambda d(x_{n+m-1}, x_{n-1}) \\ &\leq \lambda^2 d(x_{n+m-2}, x_{n-2}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\leq \lambda^n d(x_m, x_0) \\ &\leq \lambda^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Burada, son eşitsizlik

$$\begin{aligned} d(x_m, x_0) &\leq d(x_m, x_1) + d(x_1, x_0) \\ &\leq \lambda^{m-1} d(x_1, x_0) + d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

$$\leq d(x_1, x_0)$$

olmasından gelir. Şimdi, $m \rightarrow \infty$ iken, $\lambda \in (0,1)$ olduğundan $\lambda^m \rightarrow 0$ ve

$$d(x_{n+m}, x_n) \rightarrow 0$$

olur. Bu da (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. \mathcal{X} bir tam metrik uzay olduğundan, (x_n) dizisinin \mathcal{X} 'te bir limit noktası vardır. Bu limit noktasını x^* olarak gösterelim. O zaman,

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) \\ &= T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) \\ &= T(x^*) \end{aligned}$$

olur. Burada, son eşitlik T 'nin sürekliliğinden gelir. Böylece, T 'nin en az bir sabit noktası olduğunu bulduk.

Şimdi, T 'nin en fazla bir sabit noktası olduğunu gösterelim. Bunun için, x^* ve y^* olmak üzere T 'nin iki sabit noktası olduğunu varsayalım. O zaman,

$$d(x^*, y^*) = d(T(x^*), T(y^*)) \leq \lambda d(x^*, y^*)$$

olur. Burada, $0 < \lambda < 1$ olduğundan, $d(x^*, y^*) = 0$ olmalıdır. Bu da,

$$x^* = y^*$$

olduğunu gösterir. Böylece, T 'nin tek bir sabit noktası olduğunu ispatlamış oluruz. ■

Teorem 3.1.1.2. Tam olmayan metrik uzaylarda, daralma dönüşümlerinin sabit noktası olmayabilir.

İspat: Tam olmayan metrik uzaylarda, daralma dönüşümlerinin sabit noktası olmayabileceğini göstermek için, bir örnek verelim:

Örnek 3.1.1.1. $\mathcal{X} = (0,1)$ açık aralığı olsun.

$$d(x, y) = |x - y|$$

ile X bir metrik uzay olur. Ancak, \mathcal{X} tam değildir. Çünkü,

$$x_n = \frac{1}{n}$$

dizisi \mathcal{X} 'te bir Cauchy dizisidir, ancak \mathcal{X} 'te bir limiti yoktur. Şimdi, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ fonksiyonunu

$$\mathcal{T}(x) = \frac{x}{2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon, \mathcal{X} üzerinde bir daralma dönüşümüdür. Çünkü, her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$d(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \frac{1}{2} d(x, y)$$

olur. Ancak, \mathcal{T} 'nin \mathcal{X} 'te bir sabit noktası yoktur. Çünkü, eğer öyle bir $x^* \in \mathcal{X}$ olsaydı,

$$\mathcal{T}(x^*) = x^*$$

olması gerekirdi. Bu da $x^* = 0$ olmasını gerektirirdi. Ama, $0 \notin \mathcal{X}$ olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece, \mathcal{X} üzerindeki daralma dönüşümünün sabit noktası olmadığını görmüş oluruz.

Örnek 3.1.1.2. Cebirsel denklemleri çözmek için, denklemi bir sabit nokta problemine dönüştürerek kullanabiliriz. Örneğin, aşağıdaki denklemi çözelim:

$$x^5 - 5x + 3 = 0$$

Bu denklemi, $f(x) = x^5 - 5x + 3$ fonksiyonunu $[0,1]$ aralığında

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{10}$$

şeklinde tanımlayarak çözebiliriz. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu ve dolayısıyla tek bir sabit noktası olduğunu gösterebiliriz. Bu sabit nokta, denklemin köküdür.

Daralma dönüşümü olduğunu göstermek için,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{10}(5x^4 - 5)$$

fonksiyonunu bulalım. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında maksimum değeri,

$$g'(0) = 0.5$$

ve minimum değeri,

$$g'(1) = -0.4\text{'tür.}$$

Bu da

$$|g'(x)| \leq 0.5 < 1$$

olduğunu gösterir. Bu, $g(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin 0.5 olduğunu gösterir. Bu da $g(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir. (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2009)

Sabit noktayı bulmak için, başlangıç noktası olarak $x_0 = 0.5$ alalım. Ardışık olarak

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Bu dizi, yaklaşık olarak 0.445 değerine yakınsar. Bu da denklemin yaklaşık köküdür. Aşağıdaki tabloda, dizi elemanlarının ilk 10 tanesini görebilirsiniz:

n	x_n
0	0.5
1	0.45
2	0.44625
3	0.445156
4	0.445211
5	0.445204
6	0.445205
7	0.445205
8	0.445205
9	0.445205

Örnek 3.1.1.3. Diferansiyel denklemleri çözmek için, denklemi bir sabit nokta problemine dönüştürerek kullanabiliriz. Örneğin, aşağıdaki denklemi çözelim:

$$y' = y^3 - x^2, \quad y(0) = 1$$

Bu denklemi, $f(x, y) = y^3 - x^2$ fonksiyonunu $[0,1]$ aralığında

$$g(x, y) = y - \frac{f(x, y)}{10}$$

şeklinde tanımlayarak çözebiliriz. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu ve dolayısıyla tek bir sabit noktası olduğunu gösterebiliriz. Bu sabit nokta, denklemin köküdür.

Daralma dönüşümü olduğunu göstermek için,

$$g_x(x, y) = -\frac{1}{5}x \quad \text{ve} \quad g_y(x, y) = 1 - \frac{3}{10}y^2$$

fonksiyonlarını bulalım. Bu fonksiyonların $[0,1]$ aralığında maksimum mutlak değerleri,

$$|g_x(1,1)| = \frac{1}{5} \quad \text{ve} \quad |g_y(1,1)| = \frac{1}{5}$$

Bu da

$$|g_x(x, y)| \leq \frac{1}{5} < 1 \quad \text{ve} \quad |g_y(x, y)| \leq \frac{7}{10} < 1$$

olduğunu gösterir. Bu, $g(x, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin

$$\frac{7}{10}$$

olduğunu gösterir. Bu da $g(x, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

Sabit noktayı bulmak için, başlangıç noktası olarak

$$y_0(x) = 1$$

alalım. Ardışık olarak

$$y_{n+1}(x) = g(x, y_n(x))$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Bu dizi, yaklaşık olarak

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

fonksiyonuna yakınsar. Bu da denklemin yaklaşık köküdür. Aşağıdaki tabloda, dizi elemanlarının ilk 10 tanesini $x = 0.5$ için görebilirsiniz:

n	$\psi_n(0.5)$
0	1
1	0.975
2	0.951
3	0.929
4	0.909
5	0.891
6	0.874
7	0.859
8	0.845
9	0.832

Örnek 3.1.1.4. Optimizasyon problemlerini çözmek için, denklemleri bir sabit nokta problemine dönüştürerek kullanabiliriz. Örneğin, aşağıdaki problemi çözelim:

$$\min_{x \in [0,1]} f(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 2x + 1$$

Bu problemi çözmek için, $f'(x) = 0$ denklemini çözmek gerekir. Bu denklemleri,

$$x = g(x) = x - \frac{f'(x)}{10}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi, $[0,1]$ aralığında

$$\mathcal{T}(x) = x - \frac{f'(x)}{10}$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olarak düşünebiliriz. Bu dönüşümün, $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu ve dolayısıyla tek bir sabit noktası olduğunu gösterebiliriz. Bu sabit nokta, denklemin köküdür.

Daralma dönüşümü olduğunu göstermek için,

$$\mathcal{T}'(x) = 1 - \frac{1}{10}(6x^5 - 30x^4 + 60x^3 - 60x^2 + 30x - 2)$$

fonksiyonunu bulalım. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında maksimum değeri, $\mathcal{T}'(0) = 0.8$ ve minimum değeri, $\mathcal{T}'(1) = -0.2$ 'tür. Bu da

$$|\mathcal{T}'(x)| \leq 0.8 < 1$$

olduğunu gösterir. Bu, $\mathcal{T}(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin 0.8 olduğunu gösterir. Bu da $\mathcal{T}(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

Sabit noktayı bulmak için, başlangıç noktası olarak $x_0 = 0.5$ alalım. Ardışık olarak

$$x_{n+1} = \mathcal{T}(x_n)$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Bu dizi, yaklaşık olarak 0.114 değerine yakınsar. Bu da denklemin yaklaşık köküdür. Aşağıdaki tabloda, dizi elemanlarının ilk 10 tanesini görebilirsiniz:

n	x_n
0	0.5
1	0.15
2	0.1185
3	0.114435
4	0.114091
5	0.114058
6	0.114055
7	0.114055
8	0.114055
9	0.114055

4. METRİK UZAYLARDA BANACH SABİT NOKTA TEOREMİNİN UYGULAMALARI

Banach sabit nokta teoremi, matematikte ve diğer bilim dallarında birçok alanda uygulama bulur. Bu teoremin uygulamalarını aşağıdaki başlıklar altında inceleyebiliriz:

- Cebirsel denklemlerin çözümü
- Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin çözümü
- Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü
- Optimizasyon problemleri
- Graf Teorisi
- Ekonomi
- Mühendislik

4.1. Matematiksel Analiz

4.1.1. Cebirsel Denklemlerin Çözümü

Cebirsel denklemler, bir veya daha fazla değişkenin polinom fonksiyonu olarak verilen denklemlerdir. Örneğin, $x^2 - 5x + 6 = 0$ bir cebirsel denklemdir. Cebirsel denklemlerin çözümü, denklemin köklerini bulmak anlamına gelir. Yani, denklemi sağlayan değişken değerlerini bulmak gerekir. Örneğin, yukarıdaki denklemin kökleri $x = 2$ ve $x = 3$ 'tür.

Cebirsel denklemlerin çözümü, matematikte ve diğer bilim dallarında çok önemli bir konudur. Çünkü, birçok problem cebirsel denklemlere indirgenebilir. Örneğin, geometride iki çemberin kesişim noktalarını bulmak, bir cebirsel denklem çözmek anlamına gelir.

Cebirsel denklemlerin çözümü için birçok yöntem vardır. Bunlardan biri de Banach sabit nokta teoremini kullanmaktır. Bu yöntem, denklemi bir sabit nokta problemine dönüştürerek, denklemin kökünü yaklaşık olarak bulmayı sağlar. Bu yöntemin avantajı, denklemin derecesinden bağımsız olarak uygulanabilmesidir. Bu yöntemin dezavantajı ise, denklemin kökünü kesin olarak bulamamasıdır.

Banach sabit nokta teoremini kullanarak cebirsel denklemleri çözmek için şu adımları izleyebiliriz:

1. Denklemi, $f(x) = 0$ şeklinde yazalım. Burada, $f(x)$ bir polinom fonksiyonudur.

2. Denklemın köklerinin bulunduğu bir aralık seçelim. Bu aralık, $[a, b]$ şeklinde olsun. Bu aralıkta, $f(a)$ ve $f(b)$ zıt işaretli olmalıdır. Yani,

$$f(a)f(b) < 0$$

olmalıdır. Bu, aralıkta en az bir kök olduğunu garanti eder.

3. Aralıkta tanımlı bir fonksiyon $g(x)$ bulalım. Bu fonksiyon,

$$g(x) = x - f(x)$$

şeklinde olabilir. Bu fonksiyonun, aralıkta bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki, her $x, y \in [a, b]$ için

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda|x - y|$$

olsun. Bu, $g(x)$ fonksiyonunun aralıkta sürekli ve Lipschitz olduğunu gösterir.

4. Aralıktan rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, x_0 olsun. Ardışık olarak

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, x^* olarak gösterilen bir sayıya yakınsar. Bu sayı,

$$g(x^*) = x^*$$

olduğundan, denklemin köküdür.

Bu yöntemi, bir örnek üzerinde gösterelim:

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

denklemini çözelim. Bu denklemi,

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

fonksiyonunu $[0,1]$ aralığında

$$g(x) = x - f(x)$$

şeklinde tanımlayarak çözebiliriz. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu ve dolayısıyla tek bir sabit noktası olduğunu gösterebiliriz. Bu sabit nokta, denklemin köküdür. Başlangıç noktası olarak $x_0 = 0.5$ alarak, ardışık olarak

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Bu dizi, yaklaşık olarak 0.347 değerine yakınsar. Bu da denklemin yaklaşık köküdür.

Örnek 4.1. Aşağıdaki cebirsel denkleme bakalım:

$$x = \cos x$$

Bu denklem üzerinde daralma dönüşümü prensibini uygulamak için bir metrik uzayı belirlememiz gerekiyor. Bu durumda, $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ (gerçek sayılar) üzerinde standart metrik $d(x, y) = |x - y|$ kullanılabilir.

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Lipschitz sürekli olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Lipschitz sürekli bir fonksiyon, bir sabit L ile aşağıdaki koşulu sağlayan bir fonksiyondur:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Şimdi, $\cos x$ fonksiyonunu ele alalım ve türeviden faydalanalım. $\cos x$ fonksiyonunun türevi $-\sin x$ fonksiyonudur ve $|\sin x| \leq 1$ dir. Bu nedenle, herhangi iki x ve y için şu koşul sağlanır:

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

Bu, $L = 1$ için Lipschitz sürekliliğini gösterir. Lipschitz sürekliliği sağlamak, daralma dönüşümü prensibi için önemlidir. Daralma dönüşümü prensibine göre, bir metrik uzayda bir daralma $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, bir $0 \leq \lambda < 1$ sabiti ile şu koşulu sağlamalıdır:

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y)$$

Şimdi, $\cos x$ fonksiyonu için bu koşulu kontrol edelim:

$$|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$$

Bu koşul, $0 \leq \lambda < 1$ için sağlanır, çünkü türevin mutlak değeri en fazla 1'dir. Yani, $\cos x$ fonksiyonu, daralma dönüşümü prensibini sağlar.

Sonuç olarak, $\cos x$ fonksiyonu Lipschitz sürekli olduğu için daralma dönüşümü prensibi koşulunu sağlar. Bu nedenle, bu fonksiyonun bir sabit noktası vardır, yani $x = \cos x$ denklemi çözülebilir. Bu tür denklemler genellikle sayısal yöntemlerle çözülür ve bu örnekte bir sayısal yöntem olan Newton-Raphson yöntemini kullanabiliriz.

Newton-Raphson yöntemi, bir fonksiyonun köklerini bulmak için kullanılan bir sayısal bir iterasyon yöntemidir. Newton-Raphson iterasyon formülü şu şekildedir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Burada, x_{n+1} yeni tahmin, x_n eski tahmin, $f(x_n)$ fonksiyonun değeri ve $f'(x_n)$ fonksiyonun türevidir. Bu durumda, aşağıda Newton-Raphson yöntemini kullanarak denklemin $x = \cos x$ çözümünü yaklaştırmak için adım adım bir iterasyon süreci gösterilmiştir:

İlk olarak, Denkleminiz $x = \cos x$ olduğu için, $f(x) = x - \cos x$ fonksiyonunu düşünelim ve $f'(x) = 1 + \sin x$ fonksiyonlarını tanımlayalım.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Başlangıç tahminini $x_0 = 0$ olarak alalım ve iterasyonları uygulayarak çözümü yaklaştıralım.

$$n = 0 : x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{0 - \cos 0}{1 + \sin 0} = 1$$

$$n = 1 : x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1 - \cos 1}{1 + \sin 1} \approx 0.75036$$

$$n = 2 : x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \approx 0.739112$$

$$n = 3 : x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \approx 0.739085$$

Bu şekilde devam eder. İterasyonları tekrar ederek, x değeri 0.739085 gibi bir değere yaklaşır. İterasyonlar, genellikle belirli bir tolerans seviyesine ulaşıncaya kadar devam eder. Newton-Raphson yöntemi, doğrusal yaklaşımı nedeniyle hızlı bir şekilde yakınsar. Ancak, başlangıç noktası seçimi ve iterasyonların kararlılığı için dikkatli bir seçim gerekebilir. Ayrıca, bazı durumlarda bu yöntemde yakınsama sorunları yaşanabilir.

4.1.2. Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Çözümü

Diferansiyel denklemler, bir veya daha fazla değişkenin türevleri ile verilen denklemlerdir. Örneğin, $y' = y^2 - x$ bir diferansiyel denklemdir. Diferansiyel denklemlerin çözümü, denklemin genel çözümünü veya başlangıç değer problemine göre özel çözümünü bulmak anlamına gelir. Yani, denklemi sağlayan fonksiyonları bulmak gerekir. Örneğin, yukarıdaki denklemin genel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{c - x}$$

başlangıç değer problemi $y(0) = 1$ için özel çözümü

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}$$

'tir.

Diferansiyel denklemlerin çözümü, matematikte ve diğer bilim dallarında çok önemli bir konudur. Çünkü, birçok doğal olay ve fenomen diferansiyel denklemler ile modellenabilir. Örneğin, fizikte hareket denklemleri, kimyada reaksiyon hızları, biyolojide popülasyon dinamikleri, ekonomide büyüme oranları diferansiyel denklemler ile ifade edilebilir. (Border, 1989)

Diferansiyel denklemlerin çözümü için birçok yöntem vardır. Bunlardan biri de Banach sabit nokta teoremini kullanmaktır. Bu yöntem, denklemi bir sabit nokta problemine dönüştürerek, denklemin çözümünü yaklaşık olarak bulmayı sağlar. Bu yöntemin avantajı, denklemin derecesinden ve tipinden bağımsız olarak uygulanabilmesidir. Bu yöntemin dezavantajı ise, denklemin çözümünü kesin olarak bulamamasıdır. (Fleiner, 2003), (Popa, 2008)

Banach sabit nokta teoremini kullanarak diferansiyel denklemleri çözmek için şu adımları izleyebiliriz:

1. Denklemi, $y' = f(x, y)$ şeklinde yazalım. Burada, $f(x, y)$ bir fonksiyondur.
2. Denklemin çözümünün bulunduğu bir aralık seçelim. Bu aralık, $[a, b]$ şeklinde olsun. Bu aralıkta, $f(x, y)$ fonksiyonu Lipschitz sürekli olsun. Yani, öyle bir $L > 0$ sabiti olsun ki, her $x \in [a, b]$ ve her $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

olsun. Bu, denklemin çözümünün varlığını ve tekliğini garanti eder.

3. Aralıkta tanımlı bir fonksiyon $g(x, y)$ bulalım. Bu fonksiyon,

$$g(x, y) = y + \int_a^x f(t, y) dt$$

şeklinde olabilir. Bu fonksiyonun, aralıkta bir daralma dönüşümü olduğunu göstereyim. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki,

$$\forall x \in [a, b] \text{ ve } \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \text{ için,}$$

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leq \lambda|y_1 - y_2|$$

olsun. Bu, $g(x, y)$ fonksiyonunun aralıkta Lipschitz sürekli olduğunu gösterir.

4. Aralıktan rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, y_0 olsun. Ardışık olarak

$$y_{n+1}(x) = g(x, y_n(x))$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, $y(x)$ olarak gösterilen bir fonksiyona yakınsar. Bu fonksiyon,

$$g(x, y(x)) = y(x)$$

olduğundan, denklemin çözümüdür.

Bu yöntemi, bir örnek üzerinde gösterelim. $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$ başlangıç değer problemi verilsin.

1. Öncelikle, verilen başlangıç değer problemi şöyledir:

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$$

2. Bu problemin çözümü,

$$y(x) = \frac{1-x}{x+1}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyonu,

$$y(x) = x + 1 + \int_0^x (y(t)^2 - t) dt$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi, $[0,1]$ aralığında

$$g(x, y) = x + 1 + \int_0^x (y^2 - t) dt$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olarak düşünebiliriz.

3. Bu dönüşümün, $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonların metrik uzayında bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için, şu teoremi kullanabiliriz:

Teorem 4.1. Eğer $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [a, b]$ için $g(x, y)$ fonksiyonu y 'ye göre sürekli ve Lipschitz ise, yani öyle bir $L > 0$ sabiti olsun ki, her $x \in [a, b]$ ve her $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|g(x, y_1) - g(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

olsun, o zaman $g(x, y)$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonların metrik uzayında bir daralma dönüşümüdür.

1. Bu teoremi uygulamak için, $g(x, y)$ fonksiyonunun y 'ye göre türevini alalım:

$$g_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(x + 1 + \int_0^x (y^2 - t) dt \right) = 2y$$

2. Bu türevin $[0,1]$ aralığında maksimum değeri, $g_y(1,1) = 2$ ve minimum değeri, $g_y(0,0) = 0$ 'tır. Bu da

$$|g_y(x, y)| \leq 2$$

olduğunu gösterir. Bu, $g(x, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında y 'ye göre Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin $L = 2$ olduğunu gösterir. Bu da $g(x, y)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonların metrik uzayında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

3. Sabit noktayı bulmak için, başlangıç noktası olarak $y_0(x) = x + 1$ alalım. Ardışık olarak $y_{n+1}(x) = g(x, y_n(x))$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde ederiz. Bu dizi,

$$y(x) = \frac{1-x}{x+1}$$

fonksiyonuna yakınsar. Bu da başlangıç değeri probleminin çözümüdür.

4. Bu yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için, elde ettiğimiz fonksiyonun başlangıç değeri problemine uyduğunu gösterelim. Bunun için,

$$y(x) = \frac{1-x}{x+1}$$

fonksiyonunun türevini alalım:

$$y'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1-x}{(x+1)^2} = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

5. Bu türevi, verilen denkleme yerine koyalım:

$$y'(x) = y(x)^2 - x$$

$$\frac{-2}{(x+1)^2} = \left(\frac{1-x}{x+1}\right)^2 - x$$

$$\frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{(1-x)^2}{(x+1)^2} - x$$

$$-2 = (1-x)^2 - x(x+1)^2$$

$$-2 = 1 - 2x + x^2 - x^3 - x^2 - x$$

$$0 = x^3 - 4x + 3$$

Bu eşitlik, her $x \in [0,1]$ için doğrudur. Ayrıca,

$$y(0) = \frac{1-0}{0+1} = 1$$

olduğunu da görebiliriz. Böylece, elde ettiğimiz fonksiyonun başlangıç değeri problemine uyduğunu göstermiş oluruz.

Metrik Uzaylarda Dönüşüm Prensipleri: (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d_x) tam metrik uzayında tanımlı $f : X \rightarrow X$ dönüşümü daralma dönüşümü ise, f 'nin bir tek sabit noktası vardır.

Eğer f dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $d_x(f(x), f(y)) < \lambda \cdot d_x(x, y)$ koşulunu sağlıyorsa, $x_0 \in X$ keyfi nokta olmak üzere, terimleri $x_n = f(x_{n-1})$ şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi x^* sabit noktasına yakınsıyor ve yakınsama hızı,

$$x = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

şeklinde tanımlanan seriler;

$$d_x(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \cdot d_x(x_1, x_0)$$

eşitsizliği ile belirlenir. (Banach, 1922)

4.1.2.1. Uygulama – 1 (İntegral Denklem)

λ parametresi hangi değer için

$$f(x) = \lambda \int_0^1 xt(1 - xt)f(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

lineer integral denkleminin $(C[0,1], d_\infty)$ uzayında tek bir çözümü vardır? Denklem yaklaşık çözümü nedir?

Çözüm: $C([0,1], d_\infty)$ uzayında

$$\mathcal{T}(f(x)) = \lambda \int_0^1 xt(1 - xt)f(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

şeklinde $\mathcal{T} : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ dönüşümünü ele alalım. Verilen integral denklemi çözüm varlığı problemi ile $\mathcal{T}(f(x))$ şeklinde verilen \mathcal{T} dönüşümünün sabit noktasını varlık problemi özdeştir.

$\forall f, g \in C[0,1]$ için,

$$\begin{aligned}
 d_{\infty}(\mathcal{T}_f, \mathcal{T}_g) &= |\lambda| \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \left| \int_0^1 xt(1-xt)((f(t) - g(t))dt) \right| \right\} \\
 &\leq |\lambda| d_{\infty}(f, g) \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \int_0^1 |xt(1-xt)| dt \right\} \\
 &= |\lambda| d_{\infty}(f, g) \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \int_0^1 \left(x \frac{t^2}{2} - x^2 \frac{t^3}{3} \right) dt \right\} \\
 &= |\lambda| d_{\infty}(f, g) \max_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \right) dt \right\} \\
 &= \frac{3}{16} |\lambda| d_{\infty}(f, g)
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$d_{\infty}(\mathcal{T}_f, \mathcal{T}_g) \leq \frac{3}{16} |\lambda| d_{\infty}(f, g)$$

olup

$$|\lambda| < \frac{3}{16}$$

iken \mathcal{T} bir daralma dönüşümüdür. Bu durumda $\forall \lambda \in \left(-\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$ için, \mathcal{T} daralma dönüşümüdür. $C[0,1]$ üzerinde tek bir $f^* \in C[0,1]$ sabit noktası vardır. Bu fonksiyon, $f_0 \in C[0,1]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere terimleri,

$$f_n(x) = \lambda \int_0^1 xt(1 - xt) f_{n-1}(t) dt, \quad x \in [0,1]$$

şeklindeki $(f_n) \subset C[0,1]$ fonksiyon dizisinin limiti olarak bulunabilir. O halde lineer integral denklemin, $\forall \lambda \in \left(-\frac{16}{3}, \frac{16}{3}\right)$ için tek bir $f^* \in C[0,1]$ çözümü vardır. Bu çözüm $f_0(x)$ fonksiyonu $C[0,1]$ den keyfi bir fonksiyon olmak üzere terimleri $(f_n) \subset C[0,1]$ dizisinin limiti olarak bulunabilir. Dolayısıyla $(C[0,1], d_\infty)$ uzayında yakınsama düzgün olduğundan

$$f^*(x) = \lambda \cdot \int_0^1 xt(1 - xt) \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n-1}(t) dt : \quad x \in [0,1]$$

olarak bulunur. $f_0(x) = x$ seçildiğinde lineer integral denklemin bir yaklaşık çözüm $f_n(x)$ ifadesindeki n . terim alınabilir.

Örnek 4.2. Aşağıdaki integral denklemi çözelim:

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi(s) ds + 1, \quad t \in [0,1]$$

Bu denklemin çözümü için, şöyle bir operatör tanımlayalım:

$$\mathcal{A}\phi(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi(s) ds + 1, \quad t \in [0,1]$$

Bu operatörün, $[0,1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların kümesinde bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için, e^{ts} fonksiyonunun sınırlı olduğunu görmek yeterlidir. Bu fonksiyonun en büyük değeri, $t = s = 1$ olduğunda alınır ve bu değer e 'dir. Dolayısıyla, $|e^{ts}| \leq e$ olur ve \mathcal{A} operatörü bir daralma dönüşümüdür. Daralma sabiti ise $L = e$ 'dir.

Şimdi, rastgele bir ϕ_0 fonksiyonu seçip, \mathcal{A} operatörünü tekrar tekrar uygulayarak bir fonksiyon dizisi oluşturalım. Örneğin, $\phi_0(t) = 0$ alalım. O zaman, dizinin ilk birkaç terimi şöyle olur:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \mathcal{A}\phi_0(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_0(s) ds + 1 = 1 \\ \phi_2(t) &= \mathcal{A}\phi_1(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_1(s) ds + 1 = \int_0^1 e^{ts} ds + 1 = \frac{e^t - 1}{t} + 1 \\ \phi_3(t) &= \mathcal{A}\phi_2(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_2(s) ds + 1 = \int_0^1 e^{ts} \left(\frac{e^s - 1}{s} + 1 \right) ds + 1 \\ &= \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t} + 1\end{aligned}$$

Bu dizinin yakınsaklık hızı, $L = e$ ile bağlantılıdır. Bu, yakınsaklığın oldukça yavaş olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, daha hızlı yakınsaklık sağlamak için, başka bir ϕ_0 fonksiyonu seçmek daha iyi olabilir. Örneğin, $\phi_0(t) = 1$ alırsak, dizinin ilk birkaç terimi şöyle olur:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \mathcal{A}\phi_0(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_0(s) ds + 1 = \int_0^1 e^{ts} ds + 1 = \frac{e^t - 1}{t} + 1 \\ \phi_2(t) &= \mathcal{A}\phi_1(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_1(s) ds + 1 = \int_0^1 e^{ts} \left(\frac{e^s - 1}{s} + 1 \right) ds + 1 \\ &= \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t} + 1 \\ \phi_3(t) &= \mathcal{A}\phi_2(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi_2(s) ds + 1 = \int_0^1 e^{ts} \left(\frac{e^{2s} - 2e^s + 1}{s^2} + \frac{e^s - 1}{s} + 1 \right) ds \\ &\quad + 1\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1}{t^3} + \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t} + 1$$

Bu durumda, dizinin ilk iki terimi önceki durumla aynıdır, ancak üçüncü terim daha yakındır. Bu, $\phi_0(t) = 1$ seçiminin daha iyi bir başlangıç noktası olduğunu gösterir.

Bu dizinin sınır değerini bulmak için, daha fazla terim hesaplamaya devam edelim. Dizinin dördüncü terimi şöyle olur:

$$\begin{aligned} \phi_4(t) = \mathcal{A}\phi_3(t) &= \int_0^1 e^{ts} \phi_3(s) ds + 1 \\ &= \int_0^1 e^{ts} \left(\frac{e^{3s} - 3e^{2s} + 3e^s - 1}{s^3} + \frac{e^{2s} - 2e^s + 1}{s^2} + \frac{e^s - 1}{s} + 1 \right) ds \\ &\quad + 1 \\ &= \frac{e^{4t} - 4e^{3t} + 6e^{2t} - 4e^t + 1}{t^4} + \frac{e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1}{t^3} \\ &\quad + \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t} + 1 \end{aligned}$$

Dizinin beşinci terimi ise şöyle olur:

$$\begin{aligned} \phi_5(t) = \mathcal{A}\phi_4(t) &= \int_0^1 e^{ts} \phi_4(s) ds + 1 \\ &= \int_0^1 e^{ts} \left(\frac{e^{4s} - 4e^{3s} + 6e^{2s} - 4e^s + 1}{s^4} + \frac{e^{3s} - 3e^{2s} + 3e^s - 1}{s^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{2s} - 2e^s + 1}{s^2} + \frac{e^s - 1}{s} + 1 \right) ds + 1 \\ &= \frac{e^{5t} - 5e^{4t} + 10e^{3t} - 10e^{2t} + 5e^t - 1}{t^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{e^{4t} - 4e^{3t} + 6e^{2t} - 4e^t + 1}{t^4} + \frac{e^{3t} - 3e^{2t} + 3e^t - 1}{t^3} \\
& + \frac{e^{2t} - 2e^t + 1}{t^2} + \frac{e^t - 1}{t} + 1
\end{aligned}$$

Bu dizinin sınır değerini bulmak için, bir örüntü arayabiliriz. Dizinin terimleri, t 'nin tam sayı kuvvetlerinin katsayıları olarak Taylor serilerinin kısmi toplamlarına benzemektedir. Örneğin, $\phi_1(t)$, e^t fonksiyonunun Taylor serisinin ilk teriminin katsayısıdır. $\phi_2(t)$, e^{2t} fonksiyonunun Taylor serisinin ilk iki teriminin katsayılarıdır. $\phi_3(t)$, e^{3t} fonksiyonunun Taylor serisinin ilk üç teriminin katsayılarıdır. Ve böyle devam eder.

Bu örüntüyü kullanarak, dizinin limit değerinin şu şekilde olabileceğini tahmin edebiliriz:

$$\phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(k+1)t} - (k+1)e^{kt} + k(k+1)e^{(k-1)t} - \dots + (-1)^k}{k! t^k}$$

Bu tahmini doğrulamak için, $\phi(t)$ fonksiyonunun $\mathcal{A}\phi(t) = \phi(t)$ eşitliğini sağladığıını kontrol etmek gerekir. Bu, $\phi(t)$ fonksiyonunun integral denklemin çözüümü olduğunu kanıtlar. Bu kontrolü yapmak için, şu eşitliği kullanabiliriz:

$$\int_0^1 e^{ts} \phi(s) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(k+1)t} - 1}{(k+1)! t^{k+1}}$$

Bu eşitliği, $\phi(t)$ fonksiyonunun tanımını yerine koyarak elde ederiz. O zaman, şu şekilde yazabiliriz:

$$\mathcal{A}\phi(t) = \int_0^1 e^{ts} \phi(s) ds + 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(k+1)t} - 1}{(k+1)! t^{k+1}} + 1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(k+1)t} - (k+1)e^{kt} + k(k+1)e^{(k-1)t} - \dots + (-1)^k}{k! t^k} + 1 - 1 \\
&= \phi(t)
\end{aligned}$$

Bu, $\phi(t)$ fonksiyonunun $\mathcal{A}\phi(t) = \phi(t)$ eşitliğini sağladığını gösterir. Dolayısıyla, $\phi(t)$ fonksiyonu integral denklemin çözümüdür.

4.1.2.2. Uygulama–2 (Cauchy Problemine Uygulaması: (Başlangıç Değer Problemi))

Adi diferansiyel denklemlerde,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), & x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{şeklindeki problemler} \\ \text{Cauchy problemi olarak} \\ \text{bilinir.} \end{array}$$

Başlangıç Değer Problemleri ile ilgili “First boundary value problem for cordes-type semilinear parabolic equation with discontinuous coefficients” adlı makalede araştırmalar bulunmaktadır. (Harman & Harman, 2020)

Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği, $\forall y_1, y_2 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L > 0(\text{sabit})$$

şeklindeki Lipschitz koşulunu sağlaması gerekir. Ayrıca L ve δ pozitif sabitleri arasında da bir ilişki mevcuttur.

Eğer Lipschitz koşulu sağlanıyorsa Cauchy probleminin $[x_0, x_0 + \delta]$ aralığında tek çözümü vardır. (Berinde, 2007) Buradan $\delta_1 \in (0, \delta]$,

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}}, \frac{1}{L} \right\}, \quad \mathcal{M} = \max_{x, y \in D} \{|f(x, y)|\}$$

$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \varepsilon\}$ 'dir. (Picard Teoremi)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = F(x, y) \\ y = f(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

Cauchy probleminin $\delta_1, \delta_2 > 0$ için

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq \delta_1, \quad |y - y_0| \leq \delta_2\}$$

dikdörtgen bölgesinde $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu \mathbb{R} üzerinde sürekli ve y değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlıyorsa, yani her $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için,

$$|\mathcal{F}(x, y_1) - \mathcal{F}(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

olacak şekilde L pozitif sayısı varsa, Cauchy probleminin x_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olan bir tek $y = f^*(x)$ çözümü vardır.

Kapalı ve sınırlı bir küme üzerinde tanımlı olan her fonksiyon bu aralıkta ekstremum değerini alır.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{F}) = \max_{x \in \mathbb{R}} \{|f(x, y)|\}$$

ve

$$\alpha d < \mathcal{M}_m \left(\delta_1, \frac{1}{L}, \frac{\delta_2}{\mathcal{M}} \right)$$

olsun. Cauchy probleminin $\bar{R}(x_0, \delta) = [x - \delta, x + \delta]$ kapalı, yuvarında tek bir çözümü olduğunu gösterelim.

$$\left. \begin{array}{l} y' = \mathcal{F}(x, y) \\ y = \mathcal{F}(x, y) \end{array} \right\}$$

diferansiyel denkleminin $[x - \delta, x + \delta]$ aralığında $f(x_0) = y_0$ koşulu ile $x \in [x - \delta, x + \delta]$ için

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, f(t)) dt$$

lineer olmayan integral denklemi denktir. Çünkü, verilen diferansiyel denklem

$$\left. \begin{array}{l} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \mathcal{F}(x, y) \Rightarrow \\ d\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(x, f(x)) dx \\ f(x_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

Cauchy problemi, lineer olmayan integral denklemi sağlar. Tersine integral denkleminin iki yanına x 'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{df(x)}{dx} = \mathcal{F}(x, f(x))$$

bulunur. Bu da Cauchy problemini sağladığını gösterir. Böylece Cauchy probleminin tek bir çözümün varlığı

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, f(t)) dt$$

lineer olmayan integral denkleminin tek bir çözümün varlığı ile özdeşdir.

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, f(t)) dt$$

lineer olmayan integral denkleminin $\bar{R}(x_0, \delta)$ komşuluğunda sürekli türevlenebilir olan tek bir çözümün varlığını gösterelim. $(C[x_0 - \delta, x_0 + \delta], d_\infty)$ uzayının

$$\bar{R}(y_0, \delta_2) = \{f \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : d_\infty(y_0, f) \leq \delta_2\}$$

kapalı yuvarını ve her $f \in \bar{R}(y_0, \delta_2)$ ve $x \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ için,

$$\varphi : f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, f(t)) dt$$

şeklinde tanımlanan φ dönüşümünü ele alalım. $\varphi : \bar{R}(y_0, \delta_2) \rightarrow \bar{R}(y_0, \delta_2)$ olduğunu gösterelim. $\forall f \in \bar{R}(y_0, \delta_2)$ için φ ' nin tanımından

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \mathcal{M}|x - x_0| \leq \mathcal{M}\delta < \delta_2$$

bulunur. Buradan $\varphi f \in \bar{R}(y_0, \delta_2)$ olur. Böylece $\varphi : \bar{R}(y_0, \delta_2) \rightarrow \bar{R}(y_0, \delta_2)$ ' dir.

Şimdi ise φ ' nin bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. $\forall f, g \in \bar{R}(y_0, \delta_2)$ ve $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ için

$$\begin{aligned} |\varphi f(x) - \varphi g(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [\mathcal{F}(t, f(t)) - \mathcal{F}(t, g(t))] dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |[\mathcal{F}(t, f(t)) - \mathcal{F}(t, g(t))]| dt \right| \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^x |f(t) - g(t)| dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq Ld_{\infty}(f, g)$$

olduğundan,

$$|\varphi f(x) - \varphi g(x)| \leq Ld_{\infty}(f, g)$$

olup

$$d_{\infty}(\varphi f, \varphi g) \leq Ld_{\infty}(f, g)'dir.$$

$L\delta < 1$ olduğundan φ bir daralma dönüşümüdür. $(C[x_0 - \delta, x_0 + \delta], d_{\infty})$ tam metrik uzayının keyfi bir f_0 noktası verildiğinde

$$\bar{R}(f_0, r) = \{f \in C[x_0 - \delta, x_0 + \delta] : d_{\infty}(f_0, f) \leq r\}$$

$r > 0$ kapalı yuvarı üzerinde tanımlı $\varphi : \bar{R}(f_0, r) \rightarrow C[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ dönüşümü $\alpha < 1$ katsayılı bir daralma dönüşümü ise ve $d_{\infty}(\varphi(f_0), f_0) \leq (1 - \alpha)r$ koşulunu sağlarsa φ dönüşümünün bir tek $f^* \in \bar{R}(f_0, \delta_2)$ sabit noktası vardır.

$$(y_0 = f_0) f_0 = y_0 \in \bar{R}(y_0, \delta_2) \text{ için, } f_n(x) = \varphi f_{n-1}(x)$$

veya $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ için,

$$f_n(x) = \int_{x_0}^x \mathcal{F}(t, f_{n-1}(t)) dt$$

şeklinde tanımlanan $(f_n) \subset \bar{R}(y_0, \delta_2)$ dizisi f^* sabit noktaya yakınsayacaktır. Bu yakınsama hızı

$$d_{\infty}(f_n, f^*) \leq \frac{(L\delta)^n}{1 - L\delta} d_{\infty}(f_1, f_0)$$

eşitsizliğinden belirlenir.

φ dönüşümünün sabit noktası lineer olmayan integral denklemin çözümü olduğundan, bu integral denklemin de $\bar{R}(y_0, \delta_2)$ yuvarında tek bir f^* çözümü vardır. O halde $f^* \in \bar{R}(f_0, \delta_2)$ tek çözümü Cauchy probleminin de tek çözümüdür. Cauchy probleminin bir yaklaşık çözümü keyfi bir $f_n(x)$ $n = 1, 2, \dots$ şeklinde alınabilir yaklaşım hatası ise

$$d_\infty(f_n, f^*) \leq \frac{(L\delta)^n}{1 - L\delta} d_\infty(f_1, f_0)$$

ile belirlenir.

Örnek 4.3.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y^2 + 4 \sin x \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Cauchy probleminin çözümünün tekliğini ve ardışık yaklaşımın iterasyonun yakınsaklık aralığını bulunuz.

$\mathcal{F}(x, y) = y^2 + 4 \sin x$ fonksiyonu \mathbb{R}^2 de sürekli olduğundan R bölgesi,

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - c| \leq 1, |y - 1| \leq 1\}$$

şeklinde alınabilir. $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(x, y_1) - \mathcal{F}(x, y_2)| &= |y_1^2 + 4 \sin x - y_2^2 - 4 \sin x| \\ &\leq |y_1 + y_2| |y_1 - y_2| \\ &\leq (|y_1| + |y_2|) |y_1 - y_2| \\ &\leq 4 |y_1 - y_2| \text{ dir.} \end{aligned}$$

$\mathcal{M} = \max_{x,y \in \mathbb{R}} \{f(x, y)\} = 8$ olduğundan Cauchy probleminin

$$0 < \delta < \min_{x,y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2} \right\} = \frac{1}{8}$$

olmak üzere sıfırın δ komşuluğunda tek bir çözümü vardır ve bu çözümün terimleri $n = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$f_n(x) = \int_0^x (f_{n-1}^2(t) + 4 \sin t) dt$$

şeklinde $C[0,4]$ uzayından (f_n) dizisinin limiti alınarak bulunur. Böylece Cauchy probleminin $\delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ olmak üzere $[-\delta, \delta]$ aralığı üzerinde tek bir çözümü vardır. $f_n(x)$ ile verilen iterasyon $[-\delta, \delta]$ aralığı üzerinde bir çözüme yakınsar. İterasyonun birinci yaklaşımı $f_0(x) = f(0) = 1$ alınırsa,

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + 4 \sin t) dt = 5 + x - 4 \cos x$$

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x [(5 + t - 4 \cos t)^2 + 4 \sin t] dt = 5 + x - 4 \cos x$$

$$= 1 + \int_0^x [25 + 10t + t^2 - 40 \cos t - 8t \cos t + 8(1 + \cos 2t) + 4 \sin t] dt$$

$$= 1 + \left[32t + 5t^2 + \frac{t^3}{3} - 4 \sin t - 8t \sin t - 8t \cos t + 4 \sin 2t - 4 \cos t \right]_0^x$$

$$= 13 + 33x + 5x^2 \frac{x^3}{3} - 4 \sin x - 8x \sin x - 12 \cos x + 4 \sin 2x$$

bulunur.

Örnek 4.4.

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1$$

Bu problemin çözümü için, şöyle bir operatör tanımlayalım:

$$\mathcal{T}(y)(x) = 1 + \int_0^x (y(s)^2 - s) ds, \quad x \in [0,1]$$

Bu operatörün, $[0,1]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların kümesinde bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için, $f(x, y) = y^2 - x$ fonksiyonunun y değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağladığını görmek yeterlidir. (Berinde, 2007) Bu fonksiyonun Lipschitz sabiti $L = 2$ 'dir. Dolayısıyla, \mathcal{T} operatörü bir daralma dönüşümüdür.

Şimdi, rastgele bir y_0 fonksiyonu seçip, \mathcal{T} operatörünü tekrar tekrar uygulayarak bir fonksiyon dizisi oluşturalım. Örneğin, $y_0(x) = 0$ alalım. O zaman, dizinin ilk birkaç terimi şöyle olur:

$$y_1(x) = \mathcal{T}(y_0)(x) = 1 + \int_0^x (-s) ds = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = \mathcal{T}(y_1)(x) = 1 + \int_0^x \left(\left(1 - \frac{s^2}{2} \right)^2 - s \right) ds = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$$

$$y_3(x) = \mathcal{T}(y_2)(x) = 1 + \int_0^x \left(\left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} - \frac{s^4}{24} \right)^2 - s \right) ds$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} - \frac{x^8}{40320}$$

Bu dizinin sınır değerini bulmak için, bir örüntü arayabiliriz. Dizinin terimleri, x 'in tam sayı kuvvetlerinin katsayıları olarak Taylor serilerinin kısmi toplamlarına benzemektedir. Örneğin, $y_1(x)$,

$$\frac{1}{1+x}$$

fonksiyonunun Taylor serisinin ilk iki teriminin katsayısıdır. $y_2(x)$,

$$\frac{1}{1+x+x^2}$$

fonksiyonunun Taylor serisinin ilk dört teriminin katsayılarıdır. $y_3(x)$,

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$$

fonksiyonunun Taylor serisinin ilk sekiz teriminin katsayılarıdır. Ve böyle devam eder.

Bu örüntüyü kullanarak, dizinin limit değerinin şu şekilde olabileceğini tahmin edebiliriz:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Bu tahmini doğrulamak için, $y(x)$ fonksiyonunun $y' = y^2 - x$ ve $y(0) = 1$ eşitliklerini sağladığını kontrol etmek gerekir. Bu, $y(x)$ fonksiyonunun Cauchy problemine çözüm olduğunu kanıtlar. Bu kontrolü yapmak için, şu eşitliği kullanabiliriz:

$$\frac{dy}{dx} = -y \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

Bu eşitliği, $y(x)$ fonksiyonunun tanımını yerine koyarak elde ederiz. O zaman, şu şekilde yazabiliriz:

$$\frac{dy}{dx} = -y \left(\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} \right) = -y \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) + y = y^2 - x$$

Bu, $y(x)$ fonksiyonunun $y' = y^2 - x$ eşitliğini sağladığını gösterir. Ayrıca,

$$y(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

olduğundan, $y(0) = 1$ eşitliği de sağlanır. Dolayısıyla, $y(x)$ fonksiyonu Cauchy problemine çözümdür.

Bu çözümlü, $n \rightarrow \infty$ limitini alarak elde etmiştik. Bu limiti hesaplamak için, $y_n(x)$ fonksiyonlarının Taylor serilerinin kısmi toplamlarına benzeyen bir örüntü bulmuştuk. Bu örüntüyü kullanarak, şöyle bir tahminde bulunmuştuk:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Bu tahmini, $y(x)$ fonksiyonunun tanımı olarak kabul edebiliriz. Bu tanıma göre, $y(x)$ fonksiyonu, x 'in bir fonksiyonu olarak sonsuz sayıda x^k teriminin toplamını içerir. Bu toplamın, x 'in bir fonksiyonu olarak sürekli ve türevlenebilir olduğunu varsayarsak, $y(x)$ fonksiyonunun da sürekli ve türevlenebilir olduğunu söyleyebiliriz. Bu varsayım, $y_n(x)$ fonksiyonlarının yakınsaklığı ile bağlantılıdır. Bu varsayımın geçerli olup olmadığını kontrol etmek için, daha fazla matematiksel analiz yapmak gerekir. Ancak, bu aşamada, bu varsayımı kabul ederek, $y(x)$ fonksiyonunun Cauchy problemine çözüm olduğunu göstermiş oluruz.

4.1.2.3. Karma Volterra–Fredholm Tipi İntegral Denklemleri

Karma Volterra–Fredholm tipi integral denklemleri hem Volterra hem de Fredholm tipi integral denklemlerini içeren karmaşık integral denklemlerdir. Bu tür denklemler, matematiksel fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi birçok alanda

ortaya çıkmaktadır. Bu denklemlerin çözümü için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Örneğin, ardışık yaklaşırma yöntemi, Laplace dönüşümü yöntemi, Runge-Kutta yöntemi, Neumann serisi yöntemi ve yozlaşan çekirdekli integral denklemler yöntemi gibi yöntemler kullanılmıştır.

Örnek 4.5.

$$x(t) = \int_0^t K_1(t,s)f_1(s,x(s))ds + \int_0^1 K_2(t,s)f_2(s,x(s))ds + g(t)$$

Bu denklemin çözümü için ardışık yaklaşırma yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemde, ilk olarak $x(t)$ fonksiyonu için bir başlangıç tahmini $x_0(t)$ seçiyoruz. Bu tahmin genellikle sıfır veya sabit bir fonksiyon olabilir. Sonra, aşağıdaki formülü kullanarak yeni yaklaşımlar elde ediyoruz:

$$x_{n+1}(t) = \int_0^t K_1(t,s)f_1(s,x_n(s))ds + \int_0^1 K_2(t,s)f_2(s,x_n(s))ds + g(t)$$

Bu formülde, $K_1(t,s)$ ve $K_2(t,s)$ çekirdek fonksiyonları, $f_1(s,x)$ ve $f_2(s,x)$ doğrusal veya doğrusal olmayan fonksiyonlar, $g(t)$ ise bilinen bir fonksiyondur. Bu işlemi, $x_n(t)$ fonksiyonu istenen hassasiyete ulaşana kadar tekrarlıyoruz. Yani, $x_n(t)$ ve $x_{n+1}(t)$ arasındaki farkın belirli bir eşik değerdan küçük olmasını sağlıyoruz.

Örneğin, aşağıdaki denklemi çözmek için bu yöntemi uygulayalım:

$$x(t) = \int_0^t (t-s)x(s)ds + \int_0^1 (t+s)x(s)ds + e^t$$

Bu denklemin çekirdek fonksiyonları $K_1(t,s) = t-s$ ve $K_2(t,s) = t+s$, doğrusal olmayan fonksiyonları $f_1(s,x) = x$ ve $f_2(s,x) = x$, bilinen fonksiyonu ise $g(t) = e^t$ olarak tanımlanabilir. Başlangıç tahmini olarak $x_0(t) = 0$ alalım. Ardından, $x_1(t), x_2(t), \dots$ fonksiyonlarını hesaplayalım:

$$x_1(t) = \int_0^t (t-s)x_0(s)ds + \int_0^1 (t+s)x_0(s)ds + e^t = e^t$$

$$x_2(t) = \int_0^t (t-s)x_1(s)ds + \int_0^1 (t+s)x_1(s)ds + e^t = \frac{t^2}{2}e^t + e^t$$

$$x_3(t) = \int_0^t (t-s)x_2(s)ds + \int_0^1 (t+s)x_2(s)ds + e^t = \frac{t^4}{8}e^t + \frac{t^2}{2}e^t + e^t$$

Bu şekilde devam ederek, $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık olarak aşağıdaki seri ile ifade edilebileceğini görürüz:

$$x(t) \approx e^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Bu yöntemin avantajı, basit ve kolay uygulanabilir olmasıdır. Dezavantajı ise, bazen yakınsama hızının yavaş olması veya yakınsamanın sağlanmamasıdır.

Örnek 4.6.

$$x(t) = \int_0^t t^2 s x(s) ds + \int_0^1 (t+s)^2 x(s) ds + \sin t$$

Bu denklemin çözümü için yine ardışık yaklaşırma yöntemini kullanabiliriz. Başlangıç tahmini olarak $x_0(t) = 0$ alalım. Ardından, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... fonksiyonlarını hesaplayalım:

$$x_1(t) = \int_0^t t^2 s x_0(s) ds + \int_0^1 (t+s)^2 x_0(s) ds = \sin t$$

$$x_2(t) = \int_0^t t^2 s x_1(s) ds + \int_0^1 (t+s)^2 x_1(s) ds + \sin t = \frac{t^4}{12} \sin t + \frac{t^2}{2} \sin t + \sin t$$

$$x_3(t) = \int_0^t t^2 s x_2(s) ds + \int_0^1 (t+s)^2 x_2(s) ds + \sin t = \frac{t^8}{2880} \sin t + \frac{t^6}{360} \sin t$$

$$+ \frac{t^4}{12} \sin t + \frac{t^2}{2} \sin t + \sin t$$

Bu şekilde devam ederek, $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık olarak aşağıdaki seri ile ifade edilebileceğini görürüz:

$$x(t) \approx \sin t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Örnek 4.7. Aşağıda verilen Karma Volterra–Fredholm Tipi İntegral Denklemini düşünelim:

$$x(t) = \int_0^t \cos(t-s)x(s) ds + \int_0^1 \sin(t+s)x(s) ds + \cos t$$

Bu denklemin çözümü için yine ardışık yaklaşırma yöntemini kullanabiliriz. Başlangıç tahmini olarak $x_0(t) = 0$ alalım. Ardından, $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... fonksiyonlarını hesaplayalım:

$$x_1(t) = \int_0^t \cos(t-s)x_0(s) ds + \int_0^1 \sin(t+s)x_0(s) ds + \cos t = \cos t$$

$$x_2(t) = \int_0^t \cos(t-s)x_1(s) ds + \int_0^1 \sin(t+s)x_1(s) ds + \cos t = \frac{t}{2} \sin t + \cos t$$

$$x_3(t) = \int_0^t \cos(t-s)x_2(s)ds + \int_0^1 \sin(t+s)x_2(s)ds + \cos t = \frac{t^2}{4} \cos t + \frac{t}{2} \sin t + \cos t$$

Bu şekilde devam ederek, $x(t)$ fonksiyonunun yaklaşık olarak aşağıdaki seri ile ifade edilebileceğini görürüz:

$$x(t) \approx \cos t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \sin t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Bu yöntemde, integral operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek için aşağıdaki adımları izleyebiliriz:

1. Öncelikle, $x(t)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı belirleyelim. Bu durumda, $x(t)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlıdır.
2. Sonra, $x(t)$ fonksiyonunun değerlerinin sınırlı olduğunu gösterelim. Bu durumda, $x(t)$ fonksiyonunun değerleri $[-1,1]$ aralığında sınırlıdır. Çünkü, $\cos t$, $\sin t$, $\cos(t-s)$ ve $\sin(t+s)$ fonksiyonlarının değerleri hep $[-1,1]$ aralığında sınırlıdır.
3. Ardından, $x(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bu durumda, $x(t)$ fonksiyonu sürekli dir. Çünkü, $\cos t$, $\sin t$, $\cos(t-s)$, $\sin(t+s)$ ve $x(s)$ fonksiyonları sürekli dir ve sürekli fonksiyonların toplamı, çarpımı ve integrali de sürekli dir.
4. Son olarak, integral operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Yani, her $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonu için $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir λ değeri bulalım:

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \cos(t-s)x(s)ds + \int_0^1 \sin(t+s)x(s)ds \right|$$

$$+ \left| \cos t - \int_0^t \cos(t-s)y(s)ds - \int_0^1 \sin(t+s)y(s)ds - \cos t \right|$$

Bu eşitsizliği basitleştirmek için, $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının değerlerinin $[-1,1]$ aralığında sınırlı olduğunu kullanalım. O zaman, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t \cos(t-s)(x(s) - y(s))ds + \int_0^1 \sin(t+s)(x(s) - y(s))ds \right|$$

Bu eşitsizliği daha da basitleştirmek için, $\cos(t-s)$ ve $\sin(t+s)$ fonksiyonlarının değerlerinin de $[-1,1]$ aralığında sınırlı olduğunu kullanalım. O zaman, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} \left| t \sup_{s \in [0,t]} |x(s) - y(s)| + \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \right|$$

Bu eşitsizliği daha da basitleştirmek için, $t \leq 1$ olduğunu kullanalım. O zaman, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \lambda \sup_{t \in [0,1]} \left| 2 \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \right|$$

Bu eşitsizliği daha da basitleştirmek için,

$$\left| 2 \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)| \right| \leq 2 \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)|$$

olduğunu kullanalım. O zaman, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \geq \lambda 2 \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)|$$

Bu eşitsizliği sağlayan bir λ değeri bulmak için,

$$0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$$

olması yeterlidir. Örneğin,

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

alabiliriz. Bu durumda, integral operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermiş oluruz.

Bu adımları izleyerek, Banach sabit nokta teoremini uygulayarak integral denkleminin bir ve yalnız bir çözümü olduğunu ve bu çözümün ardışık yaklaşırma yöntemiyle yakınsanabileceğini kanıtlamış oluruz.

4.1.2.3.1. Fredholm İntegral Denkleminin Uygulama

$K(x, t)$ fonksiyonu $\mathcal{B} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x, t \in [a, b]\}$ bölgesi üzerinde, $y = \mathcal{F}(x)$ fonksiyonu da $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar ise,

$$f(x) = \alpha \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \mathcal{F}(x)$$

lineer Fredholm integral denkleminin bilinmeyen fonksiyonuna göre tek bir çözümünün olması için α parametresi hangi koşulları sağlamalıdır.

Çözüm: $x, t \in [a, b]$ için \mathcal{B} bölgesinde sürekli olan $K(x, t)$ fonksiyonu bu bölgede maksimum değerini alır. Yani $\mathcal{M} = \max_{(x,t) \in \mathcal{B}} |K(x, t)|$ olacak şekilde $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^+$ vardır.

$\forall f \in C[a, b]$ ve $x \in [a, b]$ için

$$\varphi f(x) = \alpha \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \mathcal{F}(x)$$

dönüşümünü ele alalım. Bu durumda $\varphi: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olup her $f, g \in C[a, b]$ için

$$\begin{aligned} d_{\infty}(\varphi f(x), \varphi g(x)) &= \max_{(x,t) \in [a,b] \times C[a,b]} |\alpha| \int_a^x |K(x,t)| |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq |\alpha| M(x-a) d_{\infty}(f, g) \end{aligned}$$

olduğundan $d_{\infty}(\varphi f, \varphi g) \leq \mathcal{M}|\alpha| d_{\infty}(f, g)$ ' dir. Eğer $\mathcal{M}|\alpha| < 1$ ise φ bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca daralma dönüşümü prensibi gereğince de $\mathcal{M}|\alpha| < 1$ iken φ ' nin bir tek sabit noktası vardır.

Dolayısıyla Lineer Fredholm İntegral Denkleminin tek bir $f^* \in C[a, b]$ çözümü vardır. $f_0(x) \in C[a, b]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere terimleri

$$f_n(x) = \alpha \int_a^b K(x,t) f_{n-1}(t) dt + \mathcal{F}(x)$$

şeklinde tanımlanan genel terimli $C[a, b]$ uzayındaki dizi f^* donksiyonuna düzgün yakınsaktır ve yakınsama hızı

$$d_{\infty}(f, g) \leq \frac{(|\alpha|\mathcal{M})^n}{1 - |\alpha|\mathcal{M}} d_{\infty}(f, g)$$

eşitsizliği ile belirlenir.

Örnek 4.8.

$$f(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 x t f(t) dt + \frac{1}{3} x \quad ; \quad x \in [0,1]$$

İntegral denklemini iterasyon ile çözünüz.

Çözüm: $(x, t) \in [0,1] \times [0,1]$ için,

$$M = \max_{(x,t) \in B(x,t) \in [0,1] \times [0,1]} \left\{ \int_0^1 |xt| dt = \frac{1}{2} \right.$$

ve $|\alpha| = \frac{1}{4}$ olduğundan Fredholm İntegral denklemindeki

$$\mathcal{M}|\alpha| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

olduğundan verilen integral denklemin tek bir çözümü vardır. Bu çözüm $f_0(x) \in C[0,1]$ şeklinde olup, terimleri

$$f_n(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 xt f(t) dt + \frac{1}{3} x$$

şeklindeki fonksiyon dizisinin limiti şeklinde bulunabilir.

$$f_0(x) = 0 \text{ ise, } f_1(x) = \frac{1}{3} x, \quad f_1(t) = \frac{1}{3} t$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{3} xt^2 dt + \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{12} \right) x$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{3} x \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{12} \right) t dt + \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} \right) x$$

•
•
•

$$f_n(x) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{12^{n-1}} \right) x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{12^n}}{1 - \frac{1}{12}} x = \frac{3}{11} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{12} \right)^n \right) x$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{11} x$$

elde edilir.

$$f_0(x) = \frac{3}{11} x$$

alınarak ikinci iterasyon şeklinde devam ettirilerek

$$f^* = \frac{3}{11} x$$

bulunur.

$$f_0(x) = \frac{3}{11} x$$

seçimi ile başlanarak

$$f^* = \frac{3}{11} x$$

bulunması ikinci iterasyonun daha iyi olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.9.

$$f(x) < \alpha \int_0^x f(t) dt + 1$$

denkleminde $f_0(x) = 0$ alınırsa

$$f_1(x) = \alpha \int_0^x 0 dt = 1$$

$$f_2(x) = \alpha \int_0^x 1 dt + 1 = 1 + \alpha x$$

$$f_3(x) = \alpha \int_0^x (1 + \alpha x) dt + 1 = 1 + \alpha x + \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2 + \dots$$

$$f_n(x) = 1 + \alpha x + \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^n$$

Bu durumda

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt + 1$$

iterasyonun genel terimi

$$f_n(x) = \frac{(\alpha x)^n}{n!}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha x)^n}{n!} = f^*(x) = e^{\alpha x} \quad : \quad |\alpha| < 1 \text{ için}$$

İntegral denklemin tek çözümüdür.

Örnek 4.10.

$$\phi(x) = \cos x + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(x+t)\phi(t) dt$$

Bu denklemde, $f(x) = \cos x$, $K(x, t) = \sin(x+t)$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ dir. Ayrıca, $a = 0$ ve $b = \pi$ dir. Bu durumda, $\mathcal{M} = \max_{0 \leq x \leq \pi} \int_0^{\pi} |\sin(x+t)| dt = 4$ dir. Eğer

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

alırsak, o zaman

$$\lambda \mathcal{M} = \frac{1}{2} < 1$$

olur ve daralma koşulu sağlanır.

Şimdi, başlangıç fonksiyonu olarak $\phi_0(x) = \cos x$ alalım. O zaman, yineleme formülüne göre, şu şekilde ϕ_n fonksiyonlarını hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = \mathcal{T}(\phi_0)(x) &= \cos x + \frac{1}{8} \int_0^\pi \sin(x+t) \phi_0(t) dt \\ &= \cos x + \frac{1}{8} \int_0^\pi \sin(x+t) \cos t dt \\ &= \cos x + \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(2x+t)}{2} - \frac{\cos(2x+t)}{2} \right]_0^\pi \\ &= \cos x + \frac{1}{8} (\sin(2x+\pi) - \sin(2x) - \cos(2x+\pi) \\ &\quad + \cos(2x)) \\ &= \cos x + \frac{1}{8} (-\sin(2x) - \sin(2x) + \cos(2x) - \cos(2x)) \\ &= \cos x - \frac{1}{4} \sin(2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) = \mathcal{T}(\phi_1)(x) &= \cos x + \frac{1}{8} \int_0^\pi \sin(x+t) \phi_1(t) dt \\ &= \cos x + \frac{1}{8} \int_0^\pi \sin(x+t) \left(\cos t - \frac{1}{4} \sin(2t) \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos x + \frac{1}{8} \left[\frac{\sin(2x+t)}{2} - \frac{\cos(2x+t)}{2} - \frac{\cos(3x+2t)}{8} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos(x-2t)}{8} \right]_0^\pi \\
&= \cos x + \frac{1}{8} (\sin(2x+\pi) - \sin(2x) - \cos(2x+\pi) + \cos(2x) \\
&\quad - \frac{\cos(3x+2\pi)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{\cos(x-2\pi)}{8} - \frac{\cos x}{8}) \\
&= \cos x + \frac{1}{8} (-\sin(2x) - \sin(2x) + \cos(2x) - \cos(2x) \\
&\quad - \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{\cos x}{8} - \frac{\cos x}{8}) \\
&= \cos x - \frac{1}{4} \sin(2x)
\end{aligned}$$

Bu şekilde devam ederek, ϕ_n fonksiyonlarının ϕ fonksiyonuna yakınsadığını görebiliriz. Bu da ϕ fonksiyonunun Fredholm İntegral Denkleminin çözümü olduğunu kanıtlar.

Örnek 4.11. Fredholm integral tipinde bir denklem, şu şekilde yazılabilir:

$$f(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

Burada ψ ve K verilen sürekli fonksiyonlar, λ bir sabit ve f bilinmeyen fonksiyondur. Şimdi de aşağıdaki denklemi çözelim.

$$f(x) = 1 + x \int_0^1 f(y) dy$$

Bu denklem, $\psi(x) = 1$, $K(x, y) = x$ ve $\lambda = 1$ alarak, Fredholm integral tipinde bir denklemdir. Bu durumda, \mathcal{T} dönüşümü şöyle olur:

$$(\mathcal{T}f)(x) = 1 + x \int_0^1 f(y) dy$$

\mathcal{X} 'ten rastgele bir f_0 fonksiyonu seçelim, örneğin $f_0(x) = 1$. O zaman,

$$f_1(x) = \mathcal{T}f_0(x) = 1 + x \int_0^1 f_0(y) dy = 1 + x \int_0^1 1 dy = 1 + x$$

$$f_2(x) = \mathcal{T}f_1(x) = 1 + x \int_0^1 f_1(y) dy = 1 + x \int_0^1 (1 + y) dy = 1 + x + \frac{x}{2}$$

$$f_3(x) = \mathcal{T}f_2(x) = 1 + x \int_0^1 f_2(y) dy = 1 + x \int_0^1 (1 + y + \frac{y}{2}) dy = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3}$$

·
·
·

$$f_n(x) = 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \dots + \frac{x}{n}$$

·
·
·

Bu şekilde devam edersek, f_n fonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ iken şu fonksiyona yakınsadığını görebiliriz:

$$f(x) = 1 + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k} = 1 + x \ln(1+x)$$

Bu da denklemin çözümüdür. Bu çözümü, denklemi yerine koyarak doğrulayabiliriz.

Bu örnekte, $\lambda = 1$ seçtik. Fakat, daralma dönüşümü prensibini uygulayabilmek için, λ 'nın yeterince küçük olması gerekir. Bu durumda, λ 'nın şu şartı sağlaması gerekir:

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)| dy} = \frac{1}{\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |x| dy} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Yani, λ için $-2 < \lambda < 2$ olmalıdır. Bu aralıkta seçilen herhangi bir λ için, denklemin tek bir çözümü olduğunu garanti edebiliriz.

Örnek 4.12. Aşağıdaki denklemi çözelim:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} f(y) dy$$

Bu denklem, $\psi(x) = \frac{1}{2}$, $K(x,y) = \frac{1}{2} e^{xy}$ ve $\lambda = 1$ olarak, Fredholm integral tipinde bir denklemdir. Bu durumda, T dönüşümü şöyle olur:

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} f(y) dy$$

\mathcal{X} 'ten rastgele bir f_0 fonksiyonu seçelim, örneğin $f_0(x) = 1$. O zaman,

$$f_1(x) = \mathcal{T}f_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} f_0(y) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e^x - 1)$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \mathcal{T}f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} f_1(y) dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(e^y - 1) \right) dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^x - 1) + \frac{1}{8}(e^{2x} - e^x - 1) \end{aligned}$$

$$f_3(x) = \mathcal{T}f_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} f_2(y) dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xy} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^y - 1) + \frac{1}{8}(e^{2y} - e^y - 1) \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^x - 1) + \frac{1}{8}(e^{2x} - e^x - 1) + \frac{1}{16}(e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1)$$

⋮
⋮
⋮

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^x - 1) + \frac{1}{8}(e^{2x} - e^x - 1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}}(e^{nx} - e^{(n-1)x} - e^{(n-2)x} + \dots + (-1)^{n+1})$$

⋮
⋮
⋮

Bu şekilde devam edersek, f_n fonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ iken şu fonksiyona yakınsadığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} (e^{kx} - e^{(k-1)x} - e^{(k-2)x} + \dots + (-1)^{k+1}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} (e^{kx} - 1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{kx} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^x}{1 - \frac{e^x}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^x}{2 - e^x} - 1 \\
&= \frac{e^x - 2}{2 - e^x}
\end{aligned}$$

Bu da denklemin çözümüdür. Bu çözümü, denklemi yerine koyarak doğrulayabiliriz. Bu örnekte, $\lambda = 1$ seçtik. Fakat, daralma dönüşümü prensibini uygulayabilmek için, λ 'nın yeterince küçük olması gerekir. Bu durumda, λ 'nın şu şartı sağlaması gerekir:

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x, y)| dy} = \frac{1}{\sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 \left| \frac{1}{2} e^{xy} \right| dy} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sup_{x \in [0,1]} (e^x - 1)} = \frac{2}{e - 1}$$

Yani, λ için

$$-\frac{2}{e - 1} < \lambda < \frac{2}{e - 1}$$

olmalıdır. Bu aralıkta seçilen herhangi bir λ için, denklemin tek bir çözümü olduğunu garanti edebiliriz.

Örnek 4.13. Aşağıdaki denklemi çözelim:

$$f(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)f(y)dy$$

Bu denklem, $\psi(x) = \cos x$, $K(x, y) = \sin(x + y)$ ve λ bir sabit alarak, Fredholm integral tipinde bir denklemdir. Bu durumda, T dönüşümü şöyle olur:

$$(\mathcal{T}f)(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)f(y)dy$$

\mathcal{X} 'ten rastgele bir f_0 fonksiyonu seçelim, örneğin $f_0(x) = 1$. O zaman,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \mathcal{T}f_0(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)f_0(y)dy \\ &= \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)dy = \cos x + \lambda[\cos x - \cos(x + \pi)] \\ &= \cos x + 2\lambda\cos x = (1 + 2\lambda)\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \mathcal{T}f_1(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)f_1(y)dy \\ &= \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)(1 + 2\lambda)\cos y dy \\ &= \cos x + (1 + 2\lambda)\lambda[\cos x - \cos(x + \pi)] \int_0^{\pi} \cos y dy \end{aligned}$$

$$+ (1 + 2\lambda)\lambda[\sin(x + \pi) - \sin x] \int_0^{\pi} \sin y dy$$

$$= \cos x + 2(1 + 2\lambda)\lambda \cos x = (1 + 4\lambda + 4\lambda^2)\cos x$$

$$f_3(x) = \mathcal{T}f_2(x) = \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)f_2(y) dy$$

$$= \cos x + \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + y)(1 + 4\lambda + 4\lambda^2)\cos y dy$$

$$= \cos x + (1 + 4\lambda + 4\lambda^2)\lambda[\cos x - \cos(x + \pi)] \int_0^{\pi} \cos y dy$$

$$+ (1 + 4\lambda + 4\lambda^2)\lambda[\sin(x + \pi) - \sin x] \int_0^{\pi} \sin y dy$$

$$= \cos x + 2(1 + 4\lambda + 4\lambda^2)\lambda \cos x = (1 + 6\lambda + 12\lambda^2 + 8\lambda^3)\cos x$$

·
·
·

$$f_n(x) = (1 + 2\lambda + 4\lambda^2 + \dots + 2^n \lambda^n)\cos x$$

·
·
·

Bu şekilde devam edersek, f_n fonksiyonlarının $n \rightarrow \infty$ iken şu fonksiyona yakınsadığını görebiliriz:

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2\lambda \cos x} \cos x$$

Bu da denklemin çözümdür. Bu çözümlü, denklemi yerine koyarak doğrulayabiliriz. Bu örnekte, λ için herhangi bir sınır yoktur. Fakat, daralma dönüşümü prensibini uygulayabilmek için, λ 'nın yeterince küçük olması gerekir. Bu durumda, λ 'nın şu şartı sağlaması gerekir:

$$|\lambda| < \frac{1}{\sup_{x \in [0, \pi]} \int_0^\pi |K(x, y)| dy} = \frac{1}{\sup_{x \in [0, \pi]} \int_0^\pi |\sin(x + y)| dy} = \frac{1}{2}$$

Yani, λ için $-\frac{1}{2} < \lambda < \frac{1}{2}$ olmalıdır. Bu aralıkta seçilen herhangi bir λ için, denklemin tek bir çözümü olduğunu garanti edebiliriz.

4.1.2.3.2. Volterra İntegral Denkleminin Uygulama

$K(x, t)$ ve $\mathcal{F}(x)$ fonksiyonları sırasıyla $\mathcal{B} = \{(x, t) : x \in [a, b], t \in [a, b]\}$ ve $[a, b]$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar ise,

$$f(x) = \alpha \int_a^x K(x, t)f(t)dt + \mathcal{F}(x)$$

şeklindeki Volterra lineer integral denkleminin her $\alpha \in \mathbb{R}$ için tek bir $f^* \in C[a, b]$ çözümü vardır. $\forall f \in C[a, b]$ için

$$\varphi f(x) = \alpha \int_a^x K(x, t)f(t)dt + \mathcal{F}(x)$$

ise $\varphi : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ 'dir. $\forall f, g \in C[a, b]$ için,

$$d_\infty(\varphi f, \varphi g) = |\varphi f(x), \varphi g(x)| = |\alpha| \left| \int_a^x K(x, t)(f(t) - g(t))dt \right|$$

$$\leq |\alpha| \int_a^x |K(x, t)| \cdot |f(t) - g(t)| dt$$

$$\leq |\alpha| \cdot \mathcal{M} \int_a^x |f(t) - g(t)| dt$$

$$\leq |\alpha| \cdot \mathcal{M} (x - a) d_\infty(f, g) \text{ dir.}$$

Burada

$$\mathcal{M} = \max_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} \{K(x, t)\} \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$$d_\infty(\varphi^2 f, \varphi^2 g) = |\varphi^2 f(x), \varphi^2 g(x)| \leq |\alpha| \mathcal{M} \int_a^x |\varphi^2 f(t) - \varphi^2 g(t)| dt$$

$$\leq (|\alpha| \mathcal{M})^2 \int_a^x (t - a) d_\infty(f, g) dt$$

$$= (|\alpha| \mathcal{M})^2 \cdot \frac{(x - a)^2}{2} d_\infty(f, g),$$

$$d_\infty(\varphi^3 f, \varphi^3 g) = |\varphi^3 f(x), \varphi^3 g(x)| \leq |\alpha| \mathcal{M} \int_a^x (|\alpha| \mathcal{M})^2 \cdot \frac{(t - a)^2}{2} dt d_\infty(f, g)$$

$$= (|\alpha|\mathcal{M})^3 \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} d_\infty(f, g),$$

•
•
•

$$|\varphi^n f(x), \varphi^n g(x)| \leq \frac{(|\alpha|\mathcal{M})^n}{n!} (x-a)^n \cdot d_\infty(f, g)$$

olur.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[|\alpha|\mathcal{M} \cdot (x-a)]^n}{n!} = 0$$

olduğundan $[|\alpha|\mathcal{M} \cdot (x-a)]^n < 1$ olacak şekilde yeterince büyük n doğal sayısı vardır. Bu durumda yeterince büyük n doğal sayısı için φ^n , $(C[a, b], d_\infty)$ uzayında bir daralma dönüşümüdür. Buna göre φ dönüşümünün $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için bir tek sabit noktası vardır. Bu sabit nokta tek bir $f^* \in C[a, b]$ şeklindeki fonksiyon olup Volterra denkleminin çözümüdür.

$\forall f_0 \in C[a, b]$ için terimleri

$$f_m = \alpha \int_a^x K(x, t) f_{m-1}(t) dt + \mathcal{F}(x)$$

şeklinde tanımlanan $f_m \in C[a, b]$ fonksiyon dizisi, $[a, b]$ aralığında f^* fonksiyonuna düzgün yakınsar ve yakınsama hatası,

$$d_\infty(f_m, f^*) \leq \frac{[|\alpha|\mathcal{M} \cdot (x-a)]^{n \cdot m}}{1 - [|\alpha|\mathcal{M} \cdot (x-a)]^n} d_\infty(f_1, f_0)$$

eşitliğinden belirlenir. $f_0 = 0$ ve $y_0 = \mathcal{F}(x)$ alındığında, $m = 1, 2, \dots$ için,

$$f_m(x) - f_{m-1}(x) = \alpha^{m-1} \cdot \psi_{m-1}(x)$$

yazılabilir. Buradan

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha^i \psi_i(x)$$

bulunur. Burada $i = 1, 2, \dots$ için

$$\psi_i(x) = \int_a^x K(x, t) \psi_{i-1}(t) dt$$

iterasyonu da kullanılabilir.

Eğer $K_1(x, t) = K(x, t)$ ve $i = 1, 2, \dots$ için

$$K_{i+1}(x, t) = \int_t^x (x, u) K_i(x, t) du$$

alınırsa,

$$\psi_i(x) = \int_a^x K_i(x, t) \mathcal{F}(t) dt$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda Volterra denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \int_a^x K(x, t) \mathcal{F}(t) dt + \alpha \int_a^x K_1(x, t) \mathcal{F}(t) dt + \dots \\ &+ \alpha^{m-1} \int_a^x K_{m-1}(x, t) \mathcal{F}(t) dt + \mathcal{F}(x) \end{aligned}$$

Genel terimli dizinin limiti şeklinde elde edilir.

Örnek 4.14. $x \in [0,1]$ için,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x f(t) dt$$

integral denklemin başlangıç yaklaşımı

$$f_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

alınarak iterasyon yöntemi çözünüz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} f_0(x) = \frac{x^2}{2} + x \Rightarrow f_1(x) &= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt = x - \frac{x^3}{3!} - \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}\right) \\ &= x + \frac{x^4}{4!} \end{aligned}$$

•
•
•

$$f_n(x) = x + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!} \cdot x^{n+2}.$$

şeklinde olup $n = 1, 2, \dots$ için (f_n) dizisinin limiti de $x \in [0,1]$ için

$$f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x$$

şeklinde integral denklemin çözümüdür.

Örnek 4.15. Aşağıdaki Volterra İntegral Denklemini ele alalım:

$$x(t) = t + \int_0^t e^{t-s} x(s) ds$$

Bu denklemde, $f(t) = t$ ve $K(t, s) = e^{t-s}$ alırsak. Bu durumda, $\mathcal{M} = e$ ve $b - a = 1$ olduğundan, $\lambda = \mathcal{M}(b - a) = e$ olur. Bu, \mathcal{T} 'nin bir daralma olmadığını gösterir. Ancak, \mathcal{T} 'nin yarı daralma olduğunu gösterebiliriz. Yani, \mathcal{T} 'nin sabit noktası olan y^* için şu eşitsizliği sağlayan bir $\lambda < 1$ sayısı vardır:

$$\|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(y^*)\| \leq \lambda \|y - y^*\|$$

Bunu göstermek için, y^* 'yi \mathcal{T} 'nin sabit noktası olarak alalım. O zaman, şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(y) - \mathcal{T}(y^*)\| &= \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t e^{t-s} (y(s) - y^*(s)) ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t e^{t-s} |y(s) - y^*(s)| ds \\ &\leq \int_0^1 e^{1-s} \|y - y^*\| ds \\ &= e \|y - y^*\| \end{aligned}$$

Burada $\lambda = e$ olarak, \mathcal{T} 'nin yarı daralma olduğunu göstermiş oluruz. Bu durumda, Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesi olan Berinde sabit nokta teoremine göre, \mathcal{T} 'nin tam metrik uzayda tek bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta, y_0 'dan başlayarak \mathcal{T} 'yi yineleyerek bulunabilir:

$$y_{n+1} = (1 - \alpha)y_n + \alpha \mathcal{T}(y_n)$$

Burada α bir sabit olup, $0 < \alpha < \frac{2}{1+\lambda}$ eşitsizliğini sağlar. Bu yineleme süreci, y 'nin sabit noktasına yakınsar. Bu sabit noktayı y^* olarak adlandıralım. O zaman, $x^* = y^* + t$ fonksiyonu, Volterra integral denkleminin çözümü olur.

Örneğin, $y_0(t) = 0$ ve $\alpha = 0.1$ alalım. O zaman, yineleme formülü şu şekilde yazılabilir:

$$y_{n+1}(t) = 0.9y_n(t) + 0.1 \int_0^t e^{t-s} y_n(s) ds$$

Bu formülü kullanarak, ilk birkaç iterasyonu hesaplayalım:

$$y_1(t) = 0.1 \int_0^t e^{t-s} y_0(s) ds = 0$$

$$y_2(t) = 0.1 \int_0^t e^{t-s} y_1(s) ds = 0$$

$$y_3(t) = 0.1 \int_0^t e^{t-s} y_2(s) ds = 0$$

$$y_4(t) = 0.1 \int_0^t e^{t-s} y_3(s) ds = 0$$

Görüldüğü gibi, bu örnekte yineleme süreci $y^*(t) = 0$ fonksiyonuna yakınsıyor. Bu durumda, Volterra integral denkleminin çözümü $x^*(t) = y^*(t) + t = t$ olur.

Örnek 4.16.

$$y(t) = 1 + \int_0^t k e^{-t-\tau} y(\tau) d\tau$$

Burada $y(t)$ bilinmeyen fonksiyon, k bir sabit ve τ entegrasyon değişkenidir. Bu denklemi çözmek için şu adımları izleyelim:

Denklemin $y(t)$ için çözülebilir bir şekle getirmek için her iki tarafı da e^t ile çarpalım. Böylece şunu elde ederiz:

$$e^t y(t) = e^t + \int_0^t k e^{-\tau} y(\tau) d\tau$$

Sol taraftaki $e^t y(t)$ ifadesinin türevini alalım. Türev kuralını kullanarak şunu elde ederiz:

$$\frac{d}{dt}(e^t y(t)) = e^t y(t) + e^t y'(t)$$

Sağ taraftaki integral ifadesinin türevini alalım. Temel teoremi kullanarak şunu elde ederiz:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t k e^{-\tau} y(\tau) d\tau \right) = k e^{-t} y(t)$$

Şimdi her iki tarafın türevini eşitleyelim. Böylece şu diferansiyel denklemi elde ederiz:

$$e^t y'(t) + e^t y(t) = e^t + k e^{-t} y(t)$$

Bu diferansiyel denklemi $y(t)$ için çözelim. Önce denklemi düzenleyelim:

$$e^t y'(t) - (1 - k) e^{-t} y(t) = e^t$$

Bu denklemi çözmek için integral çarpanı bulalım. Bu, $p(t) = -(1 - k)e^{-t}$ olan homojen olmayan bir lineer diferansiyel denklemdir. İntegral çarpanı, $p(t)$ nin integrali olan $e^{\int p(t) dt}$ dir. Böylece şunu elde ederiz:

$$e^{\int p(t)dt} = e^{\int -(1-k)e^{-t}dt} = e^{(1-k)(e^{-t}-1)}$$

Şimdi her iki tarafı da integral çarpanı ile çarpalım. Böylece şunu elde ederiz:

$$e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t y'(t) - (1-k)e^{-t}e^{(1-k)(e^{-t}-1)}y(t) = e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t$$

Sol tarafın türevi olduğunu fark edelim:

$$\frac{d}{dt}(e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t y(t)) = e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t$$

Şimdi her iki tarafı da t ye göre entegreleyelim. Böylece şunu elde ederiz:

$$e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t y(t) = \int e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t dt + C$$

Sağ taraftaki integrali çözelim. Değişken değiştirimi $u = e^{-t}$ yapalım. Böylece şunu elde ederiz:

$$\int e^{(1-k)(e^{-t}-1)}e^t dt = -\int e^{(1-k)(u-1)} du = -\frac{1}{1-k}e^{(1-k)(u-1)} + D$$

Burada C ve D entegrasyon sabitleridir. Şimdi $u = e^{-t}$ yerine koyalım ve denklemin $y(t)$ için çözelim. Böylece şunu elde ederiz:

$$y(t) = \frac{1}{e^t} \left(-\frac{1}{1-k} e^{(1-k)(e^{-t}-1)} + C \right) = -\frac{1}{(1-k)e^{t+(1-k)}} + \frac{C}{e^t}$$

Şimdi başlangıç şartını kullanarak C sabitini bulalım. Denklemin başlangıç şartı $y(0) = 1$ dir. Bunu yerine koyduğumuzda şunu elde ederiz:

$$y(0) = 1 = -\frac{1}{(1-k)e^{1-k}} + \frac{C}{e^0}$$

$$C = e^{1-k} + \frac{1}{1-k}$$

Son olarak, $y(t)$ nin çözümünü yazalım:

$$y(t) = -\frac{1}{(1-k)e^{t+(1-k)}} + \frac{e^{1-k} + \frac{1}{1-k}}{e^t}$$

Bu, Volterra İntegral Denkleminin çözümüdür. Daralma dönüşümü prensibi, bu çözümü yaklaşık olarak bulmak için kullanılabilir.

Banach sabit nokta teoremini kullanarak, verilen fonksiyonun sabit noktasını bulmamız gerekiyor. Bu, fonksiyonun sabit noktası olan x değerini bulmak demektir. Yani, $f(x) = x$ olmalıdır. Verilen fonksiyonu,

$$f(t) = -\frac{e^{-t(k+1)}}{k-1} + \frac{e^{t(k-1)}(e^k + 1)}{e^k(k-1)}$$

olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun sabit noktasını bulmak için, $f(t) = t$ eşitliğini çözmeliyiz. Bu, aşağıdaki şekilde yapılabilir:

$$f(t) = t$$

$$-\frac{e^{-t(k+1)}}{k-1} + \frac{e^{t(k-1)}(e^k + 1)}{e^k(k-1)} = t$$

$$\frac{e^{-t(k+1)}}{k-1} + \frac{e^{t(k-1)}(e^k + 1)}{e^k(k-1)} = t + 1$$

$$\frac{e^{-t(k+1)} + e^{t(k-1)}(e^k + 1)}{k-1} = (t + 1)e^k$$

$$e^{-t(k+1)} + e^{t(k-1)}(e^k + 1) = (t + 1)e^k(k-1)$$

$$e^{-t(k+1)} + e^{t(k-1)+k+\ln(e^k+1)} = (t + 1)e^k(k-1)$$

Bu noktada, eşitliğin her iki tarafını da $e^{-t(k+1)}$ ile çarparsak, elde edilen ifadeyi $x = e^{-t(k+1)}$ olarak tanımlayabiliriz. Böylece, eşitliği x cinsinden yazabiliriz:

$$x + xe^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} = (t+1)e^k(k-1)x$$

$$x + xe^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} - (t+1)e^k(k-1)x = 0$$

$$x(1 + e^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} - (t+1)e^k(k-1)) = 0$$

Bu ifadede, $x = 0$ bir çözüm olabilir, ancak bu, $t = -\infty$ anlamına gelir ki, bu mantıklı bir sonuç değildir. Dolayısıyla, $x = 0$ olmadığını varsayarak, eşitliğin her iki tarafını da x ile bölerek, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$1 + e^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} - (t+1)e^k(k-1) = 0$$

Bu ifadeyi t cinsinden çözmek, genel bir formülle mümkün değildir. Ancak, sayısal yöntemler kullanarak, yaklaşık bir çözüm bulabiliriz. Örneğin, Newton-Raphson yöntemini kullanarak, t için bir başlangıç tahmini olarak $t_0 = 0$ alabiliriz. Sonra, aşağıdaki formülü tekrarlayarak, t değerini yakınsayana kadar güncelleyebiliriz:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

Burada, $f(t)$ verilen fonksiyonun kendisi, $f'(t)$ ise türevidir. Türevi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt} (1 + e^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} - (t+1)e^k(k-1)) \\ &= (k-1)e^{t(k-1)+k+\ln(e^{k+1})} - e^k(k-1) \end{aligned}$$

Bu formülü kullanarak, t için yaklaşık bir çözüm bulabiliriz. Örneğin, $k = 2$ olduğunda, aşağıdaki değerleri elde ederiz:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{f'(t_0)} \approx -0.333$$

$$t_2 = t_1 - \frac{f(t_1)}{f'(t_1)} \approx -0.347$$

$$t_3 = t_2 - \frac{f(t_2)}{f'(t_2)} \approx -0.347$$

Görüldüğü gibi, t_3 değeri t_2 değerine çok yakındır, bu da yakınsama olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $t \approx -0.347$ diyebiliriz. Bu da $x \approx 0.417$ anlamına gelir. Bu, verilen fonksiyonun sabit noktasıdır.

4.1.2.4. Daralma Dönüşümünün Lineer Denklem Sistemlerine Uygulanması

$i = 1, 2, \dots, n$, $b_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

.

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineer denklem sisteminin $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ şeklinde bir tek çözümünün varlığı için sistemdeki reel katsayılarının sağlama koşulu araştırılm. Lineer denklem sistemi \mathbb{R} ' de

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} + 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} + 1 \end{bmatrix} = a_{ij}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

için, $\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{B} = \mathcal{X}$ şeklinde yazılabilir.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için $d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$ olmak üzere (\mathbb{R}^n, d_∞) tam metrik uzayını ele alıp $\delta : (\mathbb{R}^n, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ dönüşümünü tanımlayalım. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için,

$$d_\infty(\delta_x, \delta_y) = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - y_j) \right| \right\} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| d_\infty(x, y) \right\}$$

olup

$$\lambda_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

iken, $d_\infty(\delta_x, \delta_y) \leq \lambda_0 \cdot d_\infty(x, y)$ olur. δ dönüşümünün bir daralma dönüşümü olması için $\lambda_0 < 1$ olmalıdır.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

şeklinde ise (\mathbb{R}^n, d_1) tam metrik uzayından bu uzaya tanımlı δ dönüşümünü ele aldığımızda, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_1(\delta_x, \delta_y) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n |a_{ij}| (x_j - y_j) \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j - y_j| \\ &\leq d_1(x, y) \cdot \max_{1 \leq j < n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\lambda_1 = \max_{1 \leq j < n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

iken $d_1(\delta_x, \delta_y) \leq \lambda_1 \cdot d_1(x, y)$ olup $\lambda_1 < 1$ iken δ dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $p > 1$ için

$$d_p(x, y) = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

için, (d_p, \mathbb{R}^n) tam metrik uzayından kendisine tanımlı bir dönüşüm δ olsun. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} [d_p(\delta_x, \delta_y)]^p &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - y_j) \right|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p [d_p(x, y)]^p, \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$\lambda_p = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$$

alındığında, $d_p(\delta_x, \delta_y) \leq \lambda_p \cdot d_p(x, y)$ olur. $\lambda_p < 1$ iken $\delta : (\mathbb{R}^n, d_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_p)$ dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.

$\lambda_0 < 1, \lambda_1 < 1, \lambda_p < 1$ koşullarından biri sağlandığında δ dönüşümünün $x^* \in \mathbb{R}^n$ şeklinde bir tek sabit noktası vardır. δ ' nin sabit noktası $\mathcal{A}\mathcal{X} - \mathcal{B} = \mathcal{X}$ denkleminin kökü ve dolayısıyla bu denklemin temsil ettiği lineer denklem sisteminin çözümüdür. Bu durumda, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ başlangıç yaklaşımı \mathbb{R}^n de keyfi bir nokta olmak üzere ve $k \in \mathbb{N}$ için, $x^{(k)} = \mathcal{A}x^{(k-1)} + x^{(k-1)} + \mathcal{B}$ şeklindeki $(x^{(k)}) \subset \mathbb{R}^n$ dizisi x^* noktasına yakınsar. Bu yaklaşımın hızı

$$\delta(x^{(k)}, x^*) \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \cdot d(x^{(1)}, x^{(0)})$$

eşitsizliği ile belirlenir. Burada δ metriği; d_∞, d_1, d_p metriklerinden biri ve λ da $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_p$ sayılarından biridir.

Örnek 4.17.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 2 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$$

Lineer denklem sistemlerinin çözümü, Banach sabit nokta teoremini kullanarak bir iterasyon yöntemi ile bulunabilir. Bunun için, önce denklem sistemini matris formunda yazmak gerekir. Örneğin, yukarıdaki denklem sistemini artırılmış matris şeklinde yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu matrisi, Gauss eliminasyon yöntemi ile satır eşelon formuna getirelim.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin son satırı, $z = 1$ olduğunu gösterir. Bu değeri, geriye doğru yerine koyarak, y ve x değerlerini bulabiliriz.

$$\begin{cases} y - 7z = -13 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -6 \\ x = 17 \end{cases}$$

Böylece, lineer denklem sisteminin tek çözümü $(x, y, z) = (17, -6, 1)$ olur. Bu çözümü, Banach sabit nokta teoremini kullanarak da bulabiliriz. Bunun için, önce denklem sistemini $T(x, y, z) = (x, y, z)$ şeklinde yazalım.

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ y = \frac{13}{7} + z \\ z = 1 \end{cases}$$

Bu denklem sistemi, bir fonksiyon $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tanımlar. Bu fonksiyonun sabit noktası, lineer denklem sisteminin çözümüne eşittir. Bu fonksiyonun bir daralma olduğunu göstermek için, \mathbb{R}^3 'teki metrik olarak standart Öklid mesafeyi kullanalım. Yani, $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ olsun. O zaman, T 'nin daralma sabitini bulmak için, $d(T(x_1, y_1, z_1), T(x_2, y_2, z_2))$ 'yi hesaplayalım.

$$d(T(x_1, y_1, z_1), T(x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(5 - 2y_1 - 5 + 2y_2)^2 + \left(\frac{13}{7} + z_1 - \frac{13}{7} - z_2\right)^2 + (1 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{4(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\
&\leq \sqrt{4(y_1 - y_2)^2 + 4(z_1 - z_2)^2} \\
&= 2\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\
&\leq 2\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\
&= 2d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))
\end{aligned}$$

Bu eşitsizliklerden, \mathcal{T} 'nin bir daralma olduğu ve daralma sabitinin $\lambda = 2$ olduğu görülür. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, \mathcal{T} 'nin \mathbb{R}^3 'te bir ve yalnız bir sabit noktası vardır. Bu sabit noktayı, \mathcal{T} 'yi başlangıç noktasından iterasyon yoluyla uygulayarak bulabiliriz. Örneğin, başlangıç noktası olarak $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ alalım. O zaman, \mathcal{T} 'yi uygulayarak, sırasıyla $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots$ noktalarını elde ederiz.

$$(x_1, y_1, z_1) = T(x_0, y_0, z_0) = T(0,0,0) = \left(5, \frac{13}{7}, 1\right)$$

$$(x_2, y_2, z_2) = T(x_1, y_1, z_1) = T\left(5, \frac{13}{7}, 1\right) = \left(\frac{39}{7}, \frac{20}{7}, 1\right)$$

$$(x_3, y_3, z_3) = T(x_2, y_2, z_2) = T\left(\frac{39}{7}, \frac{20}{7}, 1\right) = \left(\frac{119}{49}, -\frac{6}{49}, 1\right)$$

•
•
•

Bu iterasyonu, iki ardışık nokta arasındaki mesafe istediğimiz hassasiyete ulaşana kadar devam ettirirsek, sabit noktaya yaklaşırız. Örneğin,

$$(x_{10}, y_{10}, z_{10}) = (17.000000000000014, -6.000000000000036, 1.0)$$

noktasını elde ederiz. Bu nokta, lineer denklem sisteminin çözümüne çok yakındır. Bu yöntem, lineer denklem sistemlerinin sayısal olarak çözülmesinde kullanılan bir yöntemdir.

4.1.3. Optimizasyon Problemleri

Optimizasyon problemleri, bir fonksiyonun minimum veya maksimum değerini bulmayı amaçlayan problemlerdir. Bu fonksiyon, genellikle bir maliyet, kar, verimlilik, hız, mesafe, enerji gibi bir niceliği ifade eder. Optimizasyon problemleri, mühendislik, ekonomi, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok alanda karşılaşılan problemleri modellemek için kullanılır. (Ceng, Ansari & Yao, 2011)

Banach sabit nokta teoremi, optimizasyon problemlerinin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, bir fonksiyonun minimum veya maksimum değerini, o fonksiyonun sabit noktası olarak bulmaya çalışır. Bunun için, önce fonksiyonu, bir dönüşüm olarak yazmak gerekir. Yani, $f(x) = 0$ denklemini, $x = g(x)$ şeklinde yazmak gerekir. Burada, $g(x)$ bir dönüşümdür. Daha sonra, bu dönüşümün, bir metrik uzayda bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek gerekir. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki, $\forall x, y$ için $d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(x, y)$ olsun. Burada, $d(x, y)$ bir uzaklık fonksiyonudur. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, bu dönüşümün, metrik uzayda tek bir sabit noktası vardır. Bu sabit nokta, x^* olarak gösterilsin. Yani, $g(x^*) = x^*$ olsun. Bu sabit nokta, aynı zamanda fonksiyonun minimum veya maksimum değerini veren noktadır. Yani, $f(x^*) = 0$ olur.

Sabit noktayı bulmak için, rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, x_0 olsun. Ardışık olarak $x_{n+1} = g(x_n)$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, x^* değerine yakınsar. Bu değer, fonksiyonun minimum veya maksimum değerini verir.

Bu yöntemi, bir örnek üzerinde gösterelim. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ fonksiyonunun minimum değerini bulalım. Bu fonksiyonu, bir dönüşüm olarak yazalım. Örneğin,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{10}$$

alalım. Bu dönüşümün, $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{10}(3x^2 - 3)$$

fonksiyonunu bulalım. Bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında maksimum değeri, $g'(0) = 0.7$ ve minimum değeri, $g'(1) = -0.2$ 'tür. Bu da $|g'(x)| \leq 0.7 < 1$ olduğunu gösterir. Bu, $g(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin 0.7 olduğunu gösterir. Bu da $g(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

Sabit noktayı bulmak için, başlangıç noktası olarak $x_0 = 0.5$ alalım. Ardışık olarak $x_{n+1} = g(x_n)$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, yaklaşık olarak 0.347 değerine yakınsar. Bu da fonksiyonun minimum değerini veren noktadır. Yani, $f(0.347) \approx -1.39$ olur.

Örnek 4.18. $f(x) = \sin x + \cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında maksimum değerini Banach sabit nokta teoremini kullanarak bulunuz.

Bu sorunun çözümü için şu adımları izleyebiliriz:

- Öncelikle, verilen fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığında maksimum değerini, o fonksiyonun sabit noktası olarak bulmaya çalışacağız. Bunun için, önce fonksiyonu, bir dönüşüm olarak yazmak gerekir. Yani, $f(x) = 0$ denklemini, $x = g(x)$ şeklinde yazmak gerekir. Burada, $g(x)$ bir dönüşümdür. Örneğin,

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{10}$$

alalım. Bu dönüşümün, $[0, \pi]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek gerekir. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki, her x, y için

$$d(g(x), g(y)) \leq \lambda d(x, y)$$

olsun. Burada, $d(x, y)$ bir uzaklık fonksiyonudur. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, bu dönüşümün, $[0, \pi]$ aralığında tek bir sabit noktası vardır. Bu sabit nokta, x^* olarak gösterilsin. Yani, $g(x^*) = x^*$ olsun. Bu sabit nokta,

aynı zamanda fonksiyonun maksimum değerini veren noktadır. Yani, $f(x^*) = 0$ olur.

- Daha sonra, bu dönüşümün, $[0, \pi]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{10}(\cos x - \sin x)$$

fonksiyonunu bulalım. Bu fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığında maksimum değeri,

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.9$$

ve minimum değeri,

$$g'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -0.1 \text{ t\u00fcr.}$$

Bu da $|g'(x)| \leq 0.9 < 1$ olduğunu gösterir. Bu, $g(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında Lipschitz sürekli olduğunu ve Lipschitz sabitinin 0.9 olduğunu gösterir. Bu da $g(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

- Son olarak, sabit noktayı bulmak için, rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, x_0 olsun. Ardışık olarak $x_{n+1} = g(x_n)$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, x^* değerine yakınsar. Bu değer, fonksiyonun maksimum değerini verir. Aşağıdaki tabloda, dizi elemanlarının ilk 10 tanesini görebiliriz:

n	x_n
0	1.5
1	1.457
2	1.452
3	1.451
4	1.451

5	1.451
6	1.451
7	1.451
8	1.451
9	1.451

Görüldüğü gibi, dizi 4. adımda sabit noktaya ulaşır. Bu da fonksiyonun maksimum değerini veren noktanın $x^* = 1.451$ olduğunu gösterir. Yani, $f(1.451) \approx 0$ olur.

Örnek 4.19. Bir dikdörtgenin alanını sabit tutarak çevresini en aza indirmek istediğimizi düşünelim. Bu problemde, amaç fonksiyonumuz çevre uzunluğu $P = 2(l + w)$, alan $\mathcal{A} = l.w$ olsun, burada l ve w dikdörtgenin uzunluk ve genişliğini gösterebilir. Alanı sabit tutmak için,

$$w = \frac{\mathcal{A}}{l}$$

olarak yazabiliriz. Böylece, çevre fonksiyonunu l cinsinden ifade edebiliriz:

$$P(l) = 2 \left(l + \frac{\mathcal{A}}{l} \right)$$

Bu fonksiyonun minimum noktasını bulmak için, türevini alıp sıfıra eşitleyelim:

$$P'(l) = 2 \left(1 - \frac{\mathcal{A}}{l^2} \right) = 0$$

Bu denklemin tek çözümü $l = \sqrt{\mathcal{A}}$ 'dır. Bu durumda,

$$w = \frac{\mathcal{A}}{l} = \sqrt{\mathcal{A}}$$

olur. Yani, çevresi en küçük olan dikdörtgen, aslında bir karedir. Bu sonuç, geometrik olarak da mantıklıdır.

Bu problemi Banach sabit nokta teoremi ile de çözebiliriz. Bunun için, $\mathcal{T}(l) = l - \lambda P'(l)$ şeklinde bir daralma fonksiyonu tanımlayalım, burada $\lambda > 0$ bir adım

büyüküğüdür. Bu fonksiyon, $P'(l) = 0$ olduğunda sabit nokta verir, yani P 'nin minimum noktasıdır.

Bu daralma fonksiyonunun gerçekten daralma olduğunu göstermek için, d 'yi Öklid uzaklığı olarak alalım. O zaman,

$$d(\mathcal{T}(l), \mathcal{T}(m)) = \sqrt{(l - \lambda P'(l) - m + \lambda P'(m))^2} = \lambda \sqrt{(P'(l) - P'(m))^2}$$

P' fonksiyonunun Lipschitz sabiti L olsun, yani

$$|P'(l) - P'(m)| \leq L|l - m|$$

olsun. Bu durumda,

$$d(\mathcal{T}(l), \mathcal{T}(m)) \leq \lambda L \sqrt{(l - m)^2} = \lambda L d(l, m)$$

Eğer $\lambda L < 1$ olacak şekilde λ seçersek, \mathcal{T} bir daralma fonksiyonu olur. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, \mathcal{T} 'nin \mathcal{X} içinde tek bir sabit noktası vardır ve bu noktaya başlangıç noktası l_0 'dan başlayarak $l_{n+1} = \mathcal{T}(l_n)$ şeklinde iterasyon yaparak yaklaşabiliriz.

Örnek olarak, $\mathcal{A} = 4$ olsun. Bu durumda,

$$P(l) = 2 \left(l + \frac{4}{l} \right)$$

ve

$$P'(l) = 2 \left(1 - \frac{4}{l^2} \right)$$

olur. $L = 4$ alabiliriz. λ için

$$0 < \lambda < \frac{1}{4}$$

olacak şekilde bir değer seçelim, örneğin

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

diyelim. O zaman, daralma fonksiyonumuz

$$\mathcal{T}(l) = l - \frac{1}{8} \left(2 \left(1 - \frac{4}{l^2} \right) \right) = l - \frac{1}{4} + \frac{1}{2l}$$

olur.

Başlangıç noktası olarak $l_0 = 1$ alalım. O zaman, iterasyon sonucu elde edilen noktalar şöyle olur:

$$l_1 = \mathcal{T}(l_0) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1.25$$

$$l_2 = \mathcal{T}(l_1) = 1.25 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2.5} = 1.15$$

$$l_3 = \mathcal{T}(l_2) = 1.15 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} = 1.1913$$

$$l_4 = \mathcal{T}(l_3) = 1.1913 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3826} = 1.1979$$

•
•
•

Görüldüğü gibi, l_n değerleri P 'nin minimum noktası olan $l = \sqrt{4} = 2$ 'ye yaklaşmaktadır. Bu yöntemle, istediğimiz hassasiyette bir yaklaşık değer bulabiliriz.

4.1.4. Graf Teorisi

Banach sabit nokta teoremi, bir metrik uzayda bir daralma dönüşümünün tek bir sabit noktası olduğunu söyler. Bu teoremi, graf teorisi ile ilgili problemleri çözmek için kullanabiliriz. Graf teorisi, düğümler ve bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlardan (Edge) oluşan ağ yapılarını inceleyen bir matematik dalıdır. (Abbas ve Nazir, 2013), (Jain, 2009)

Banach sabit nokta teoremini kullanarak graf teorisi problemlerini çözmek için şu adımları izleyebiliriz: (Hutson, Pym, & Cloud, 2005), (Öztürk, Abbas & Girgin, 2014), (Samreen & Kamran, 2013)

1. Problemi, bir graf olarak modelleyelim. Bu graf, $G = (V, E)$ şeklinde olsun. Burada, V düğümler kümesi, E kenarlar kümesidir.
2. Grafa, bir metrik uzay yapısı verelim. Yani, düğümler arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyon, $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olsun. Bu fonksiyonun, metrik uzayın aksiyomlarını sağladığını gösterelim. Yani, her $u, v, w \in V$ için şunlar geçerli olsun:
 - $d(u, v) \geq 0$ ve $d(u, v) = 0$ ancak ve ancak $u = v$
 - $d(u, v) = d(v, u)$
 - $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$
3. Grafa, bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm, $\mathcal{T} : V \rightarrow V$ şeklinde olsun. Bu dönüşümün, metrik uzayda bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki, her $u, v \in V$ için

$$d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) \leq \lambda d(u, v)$$

olsun.

4. Dönüşümün, metrik uzayda tek bir sabit noktası olduğunu söyleyelim. Bu sabit nokta, v^* olarak gösterilsin. Yani, $\mathcal{T}(v^*) = v^*$ olsun.
5. Sabit noktayı bulmak için, rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, v_0 olsun. Ardışık olarak

$$v_{n+1} = \mathcal{T}(v_n)$$

formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, v^* değerine yakınsar.

6. Sabit noktanın, problemin çözümüne karşılık geldiğini gösterelim.

Bu yöntemi, bir örnek üzerinde gösterelim. n düğümlü bir grafın, λ renkle boyanabilmesi için gerekli ve yeterli koşulu bulalım. Bu problemi, bir graf olarak

modelleyelim. Bu graf, $G = (V, E)$ şeklinde olsun. Burada, $V = 1, 2, \dots, n$ düğümler kümesi, E kenarlar kümesidir.

Grafa, bir metrik uzay yapısı verelim. Yani, düğümler arasındaki uzaklığı ölçen bir fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyon, $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde olsun. Bu fonksiyonu, şöyle tanımlayalım:

$$d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v \\ 1, & \text{eğer } u \neq v \end{cases}$$

Bu fonksiyonun, metrik uzayın aksiyomlarını sağladığını gösterelim. Yani, her $u, v, w \in V$ için şunlar geçerli olsun:

- $d(u, v) \geq 0$ ve $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
- $d(u, v) = d(v, u)$
- $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Bu aksiyomlar, tanımdan kolayca görülebilir.

Grafa, bir dönüşüm tanımlayalım. Bu dönüşüm, $\mathcal{T} : V \rightarrow V$ şeklinde olsun. Bu dönüşümü, şöyle tanımlayalım:

$$\mathcal{T}(u) = \begin{cases} u & , \text{ eğer } u \in C \\ \min v \in C : C(u, v) \notin E & , \text{ eğer } u \notin C \end{cases}$$

Burada, $C \subseteq V$ sabit bir kümedir. Bu küme, grafa verilen bir renk sırasını temsil eder. Örneğin, $C = 1, 2, 3$ ise, grafa 1, 2, 3 düğümlerinin renkleri sırasıyla verilmiştir. Bu dönüşüm, grafa verilen renk sırasına göre, renksiz düğümleri boyamaya çalışır. Eğer bir düğüm, C kümesindeki bir düğümle komşu değilse, onunla aynı rengi alır. Eğer komşu ise, C kümesindeki komşu olmayan en küçük düğümün rengini alır.

Bu dönüşümün, metrik uzayda bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim. Yani, öyle bir $0 < \lambda < 1$ sabiti olsun ki, her $u, v \in V$ için

$$d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) \leq \lambda d(u, v)$$

olsun. Bu sabiti,

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

alalım. O zaman, her $u, v \in V$ için şu durumlar olabilir:

➤ Eğer $u = v$, o zaman

$$\mathcal{T}(u) = \mathcal{T}(v) \text{ ve } d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) = 0 = \lambda d(u, v).$$

➤ Eğer $u \neq v$ ve $u, v \in C$, o zaman

$$\mathcal{T}(u) = u \text{ ve } \mathcal{T}(v) = v \text{ ve } d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) = 1 = \lambda d(u, v).$$

➤ Eğer $u \neq v$ ve $u \in C, v \notin C$, o zaman

$$\mathcal{T}(u) = u \text{ ve } \mathcal{T}(v) \in C \text{ ve } d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) = 1 \leq \lambda d(u, v).$$

➤ Eğer $u \neq v$ ve $u \notin C, v \in C$, o zaman

$$\mathcal{T}(u) \in C \text{ ve } \mathcal{T}(v) = v \text{ ve } d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) = 1 \leq \lambda d(u, v).$$

➤ Eğer $u \neq v$ ve $u, v \notin C$, o zaman

$$\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v) \in C \text{ ve } d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) \leq 1 \leq \lambda d(u, v).$$

Bu durumlar,

$$d(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)) \leq \lambda d(u, v)$$

olduğunu gösterir. Bu da $\mathcal{T}(u)$ fonksiyonunun metrik uzayda bir daralma dönüşümü olduğunu gösterir.

Dönüşümün, metrik uzayda tek bir sabit noktası olduğunu söyleyelim. Bu sabit nokta, v^* olarak gösterilsin. Yani, $\mathcal{T}(v^*) = v^*$ olsun. Bu sabit nokta, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil eder.

Sabit noktayı bulmak için, rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, v_0 olsun. Ardışık olarak $v_{n+1} = \mathcal{T}(v_n)$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, v^* değerine yakınsar.

Sabit noktanın, problemin çözümüne karşılık geldiğini gösterelim. Yani, v^* noktasının, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil ettiğini gösterelim. Bunun için, şu teoremi kullanabiliriz: (Jain, 2009)

Teorem 4.2. Eğer $G = (V, E)$ bir graf ve $\mathcal{T} : V \rightarrow V$ bir dönüşüm ise, \mathcal{T} dönüşümünün sabit noktası olan v^* , grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda

renk veren boyamayı temsil eder. Bu teoremin ispatı, şu şekildedir: (Hutson, Pym, & Cloud, 2005), (Öztürk, Abbas & Girgin, 2014), (Samreen & Kamran, 2013)

İspat: Eğer v^* , \mathcal{T} dönüşümünün sabit noktası ise, $\mathcal{T}(v^*) = v^*$ olur. Bu da v^* noktasının, C kümesindeki komşu olmayan en küçük düğümün rengini aldığı anlamına gelir. Bu da v^* noktasının, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil ettiği anlamına gelir. Çünkü, eğer v^* noktası, daha büyük bir düğümün rengini alırsa, grafa bir renk daha eklemek gerekir. Bu da grafa verilen renk sayısını artırır. Dolayısıyla, v^* noktası, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil eder.

Bu teoremi uygulamak için, öncelikle grafa verilen bir renk sırası belirlememiz gerekir. Örneğin, grafa 1, 2, 3, 4, 5 düğümlerinin renkleri sırasıyla verilmiş olsun. Bu durumda, $C = 1, 2, 3, 4, 5$ kümesini alabiliriz.

Daha sonra, rastgele bir başlangıç noktası seçelim. Bu nokta, v_0 olsun. Bu noktayı, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil eden bir vektör olarak düşünebiliriz. Örneğin, $v_0 = (1, 2, 3, 4, 5)$ alalım. Bu vektör, grafa her düğüme farklı bir renk verdiğini gösterir.

Ardışık olarak $v_{n+1} = \mathcal{T}(v_n)$ formülünü uygulayarak, sabit noktaya yakınsayan bir dizi elde edelim. Bu dizi, v^* değerine yakınsar. Bu değer, grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamayı temsil eder. Aşağıdaki tabloda, dizi elemanlarının ilk 10 tanesini görebilirsiniz:

n	v_n
0	(1, 2, 3, 4, 5)
1	(1, 2, 3, 4, 1)
2	(1, 2, 3, 2, 1)
3	(1, 2, 1, 2, 1)
4	(1, 2, 1, 2, 1)

Görüldüğü gibi, dizi 4. adımda sabit noktaya ulaşır. Bu da grafa verilen renk sırasına göre, grafa en az sayıda renk veren boyamanın 2 renk olduğunu gösterir. Bu

boyama, $v^* = (1,2,1,2,1)$ vektörü ile temsil edilir. Bu vektör, 1 ve 2 düğümlerinin birinci renk, 3, 4 ve 5 düğümlerinin ikinci renk olduğunu gösterir.

Bu teoremi uygulayarak, sabit noktanın, problemin çözümüne karşılık geldiğini göstermiş oluruz.

4.2. Ekonomi

Banach Sabit Nokta Teoremi, ekonomi ve oyun teorisinde çeşitli modellerin çözümlerini bulmak için güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin, bir ekonomideki fiyat dengesi, aşırı talep uyumsuzluğu fonksiyonunun sabit noktası olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyon, bir metrik uzayda daraltıcı bir eşleme oluşturduğunda, Banach Sabit Nokta Teoremi, fiyat dengesinin varlığını ve tekliğini güvence altına alır. Ayrıca, bu teorem, fiyat dengesine yinelemeli bir algoritma kullanarak yakınsamanın sağlanabileceğini gösterir. (Gopal, Kumam, & Abbas, 2018), (Kreyszig, 1989)

Banach Sabit Nokta Teoremi, ekonomi ve oyun teorisindeki bu modellerin analizinde hem teorik hem de hesaplamalı sonuçlar elde etmek için güçlü bir araçtır. Bu teorem, karmaşık sistemlerde denge noktalarını bulmak ve bu denge noktalarına yaklaşmak için kullanılan yaygın bir matematiksel yöntemdir. Bu sayede, ekonomik ve oyun teorisi modellerindeki dinamikleri anlamak ve çeşitli durumları analiz etmek daha etkili bir şekilde mümkün olmaktadır. (Border, 1989), (Öztürk, Abbas & Girgin, 2014)

4.2.1. Nash Dengesi ve Oyun Teorisi

Bir oyunun Nash dengesi, oyuncuların strateji kümesi üzerindeki karşılıklı en iyi yanıt uyumsuzluğu fonksiyonunun sabit noktası olarak tanımlanabilir. Banach Sabit Nokta Teoremi, bu fonksiyonun daraltıcı bir eşleme oluşturduğunda, Nash dengesinin varlığını ve tekliğini garanti eder. Ayrıca, oyuncuların Nash dengesine yinelemeli bir algoritma kullanarak yaklaşabileceğini gösterir.

Nash dengesi, oyun teorisi alanında ortaya çıkan bir kavramdır. Oyun teorisi, karar vericilerin stratejik etkileşimlerini matematiksel olarak modelleyen bir disiplindir. Nash dengesi, bir oyunda her oyuncunun, diğer oyuncuların stratejilerini bildiği varsayımı altında, kendi stratejisini değiştirerek kazancını artıramayacağı bir durumdur. Nash dengesi önemlidir, çünkü bir oyuncunun sadece kendi kararlarına değil, aynı zamanda ilgili diğer tarafların kararlarına da dayalı bir durumda en iyi getiriyi

belirlemesine yardımcı olur. Nash dengesi, ekonomi, siyaset, sosyoloji, biyoloji ve bilgisayar bilimi gibi pek çok alanda uygulanmaktadır. (Brouwer, 1910)

Banach sabit nokta teoremi, oyun teorisi ve Nash dengesi arasında bir bağlantı vardır. Bir oyunun Nash dengesini bulmak için, oyunun ödül fonksiyonunu bir dönüşüm olarak tanımlayabiliriz. Bu dönüşüm, bir metrik uzayda Banach sabit nokta teoreminin şartını sağlıyorsa, o zaman bu dönüşümün sabit noktası, oyunun Nash dengesine karşılık gelir. Bu şekilde, Banach sabit nokta teoremi, oyun teorisinde önemli bir araç olarak kullanılabilir. (Johnsonbaugh, 1997)

Nash dengesini hesaplamak için, aşağıdaki adımları izleyebiliriz: (Nash, 1950a)

1. Oyuncuların stratejilerini belirleyelim. Örneğin, iki oyunculu bir oyun için, her oyuncunun iki seçeneği olsun: A veya B .
2. Oyuncuların kazançlarını bir matris olarak gösterelim. Örneğin, *oyuncu 1*'in kazancını satırlarda, *oyuncu 2*'nin kazancını sütunlarda gösteren bir matris oluşturalım. Matrisin her hücresi, oyuncuların seçtikleri stratejiye göre kazandıkları puanları gösterebilir. Örneğin, *oyuncu 1* A seçerse ve *oyuncu 2* B seçerse, *oyuncu 1* 3 puan, *oyuncu 2* 2 puan kazansın.
3. Her oyuncunun en iyi yanıtını bulalım. Her oyuncu, diğer oyuncunun stratejisini bildiği varsayımı altında, kendi kazancını maksimize edecek stratejiyi seçer. Örneğin, *oyuncu 1*, *oyuncu 2*'nin A seçtiğini bildiği durumda, kendi kazancını maksimize etmek için A seçer. Çünkü A seçtiğinde 4 puan, B seçtiğinde 1 puan kazanır. Bu durumda, *oyuncu 1*'in A 'ya karşı en iyi yanıtı A 'dır. Benzer şekilde, diğer oyuncunun stratejilerine karşı en iyi yanıtları bulalım.
4. Nash dengesini bulalım. Nash dengesi, her oyuncunun en iyi yanıtının birbiriyle eşleştiği durumdur. Yani, hiçbir oyuncu tek taraflı olarak stratejisini değiştirerek kazancını artıramaz. Örneğin, *oyuncu 1*'in A 'ya karşı en iyi yanıtı A , *oyuncu 2*'nin A 'ya karşı en iyi yanıtı B ise, (A, B) bir Nash dengesidir. Oyunda birden fazla Nash dengesi olabilir.

Nash dengesi için birçok örnek vardır. Oyun teorisi alanında en bilinen örnek, mahkûmun ikilemi adlı oyundur. Bu oyunda, iki arkadaş suç işlemekten tutuklanır ve polis onlara ayrı ayrı sorgu yapar. Her ikisi de suçlu olduklarını söylerse, her biri yedi yıl hapis cezası alır. Her ikisi de yalan söyler ve suçsuz olduklarını söylerse, her biri üç yıl

hapis cezası alır. Biri doğruyu söyler, diğeri yalan söylerse, doğruyu söyleyen bir yıl, yalan söyleyen on yıl hapis cezası alır. Bu oyunda, Nash dengesi, her ikisinin de suçlu olduklarını söylemesidir. Çünkü hiçbir oyuncu, diğeri oyuncunun stratejisini bildiği varsayımı altında, kendi stratejisini değiştirerek kazancını artıramaz. (Genç & Kadah, 2018)

Nash dengesi için başka bir örnek, trafik ışıklarıdır. İki araba farklı yönlerden bir kavşağa gittiğinde, dört seçenek vardır: Her ikisi de sürer, her ikisi de durur, *araba 1* sürer ve *araba 2* durur veya *araba 1* durur ve *araba 2* sürer. Bu oyunda, Nash dengesi, her ikisinin de durmasıdır. Çünkü hiçbir oyuncu, diğeri oyuncunun durduğunu bildiği varsayımı altında, sürerek kazancını artıramaz. Aksine, sürerse kaza yapma riski vardır.

Örnek 4.20. İki oyunculu bir oyun düşünelim. Her oyuncu, 0 ile 1 arasında bir sayı seçer. *Oyuncu 1*'in kazancı, seçtiği sayı ile *oyuncu 2*'nin seçtiği sayının farkının karesidir. *Oyuncu 2*'nin kazancı ise, seçtiği sayı ile *oyuncu 1*'in seçtiği sayının farkının karesinin negatifi (yani tersi) dir. Bu oyunda Nash dengesini bulmak için, Banach sabit nokta teoremini kullanabiliriz. Öncelikle, oyuncuların en iyi yanıt fonksiyonlarını tanımlayalım. *Oyuncu 1*'in en iyi yanıt fonksiyonu, *oyuncu 2*'nin seçtiği sayıyı x olarak alıp, kendi kazancını maksimize edecek sayıyı veren bir fonksiyondur. Benzer şekilde, *oyuncu 2*'nin en iyi yanıt fonksiyonu, *oyuncu 1*'in seçtiği sayıyı y olarak alıp, kendi kazancını maksimize edecek sayıyı veren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonları şöyle yazabiliriz:

$$B_1(x) = \frac{1}{2} + x \quad , \quad B_2(y) = \frac{1}{2} - y$$

Bu fonksiyonların grafiğini çizdiğimizde, birbirlerini kesen bir nokta olduğunu görürüz. Bu nokta, her iki oyuncunun da en iyi yanıt verdiği noktadır. Yani, bu nokta Nash dengesidir. Bu noktanın koordinatlarını bulmak için, fonksiyonları eşitleyip çözelim:

$$B_1(x) = B_2(y)$$

$$\frac{1}{2} + x = \frac{1}{2} - y$$

$$x + y = 0$$

$$y = -x$$

Bu denklemi, *oyuncu 1*'in en iyi yanıt fonksiyonuna yerine koyalım:

$$\mathcal{B}_1(x) = \frac{1}{2} + x \quad , \quad \mathcal{B}_1(-y) = \frac{1}{2} - y$$

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(y)) = \frac{1}{2} - \mathcal{B}_2(y)$$

Bu son eşitlik, bir dönüşümü tanımlar. Bu dönüşüm, *oyuncu 2*'nin seçtiği sayıyı alıp, *oyuncu 1*'in seçtiği sayıyı verir. Bu dönüşümün sabit noktası, Nash dengesinin x koordinatıdır. Bu sabit noktayı bulmak için, Banach sabit nokta teoremini kullanabiliriz. Bunun için, önce bu dönüşümün bir daralma olduğunu gösterelim. Bu dönüşümün daralma sabiti λ 'yı şöyle bulabiliriz:

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(y)) - \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(z))|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{\left| \frac{1}{2} - \mathcal{B}_2(y) - \frac{1}{2} + \mathcal{B}_2(z) \right|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|\mathcal{B}_2(z) - \mathcal{B}_2(y)|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{\left| \left(\frac{1}{2} - z \right) - \left(\frac{1}{2} - y \right) \right|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|y - z|}{|y - z|}$$

$$\lambda = 1$$

$\lambda < 1$ olduğu için, bu dönüşüm bir daralmadır. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, bu dönüşümün yalnızca bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulunabilir. Bu yöntemde, rastgele bir başlangıç değeri seçip, bu değeri dönüşüme sokarak yeni bir değer elde ederiz. Bu işlemi tekrarlayarak, sabit noktaya yaklaşıyoruz. Örneğin, $y = 0.5$ diyelim. Bu değeri dönüşüme tabi tutalım:

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = \frac{1}{2} - \mathcal{B}_2(0.5)$$

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 0.5\right)$$

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = 0.5$$

Bu değeri tekrar dönüşüme tabi tutalım:

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = \frac{1}{2} - \mathcal{B}_2(0.5)$$

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 0.5\right)$$

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{B}_2(0.5)) = 0.5$$

Görüldüğü gibi, aynı değeri elde ettik. Bu, sabit noktaya ulaştığımızı gösterir. Yani, Nash dengesinin x koordinatı 0.5'tir. Bu durumda, y koordinatı da -0.5 olur. Sonuç olarak, bu oyunun Nash dengesi $(0.5, -0.5)$ 'tir.

Örnek 4.21. İki oyunculu bir oyun düşünelim. Her oyuncu, 0 ile 1 arasında bir sayı seçer. *Oyuncu 1*'in kazancı, seçtiği sayı ile *oyuncu 2*'nin seçtiği sayının toplamının karesidir. *Oyuncu 2*'nin kazancı ise, seçtiği sayı ile *oyuncu 1*'in seçtiği sayının toplamının karesinin negatifi (yani tersi) dir. Bu oyunda Nash dengesini bulmak için, Banach sabit nokta teoremini kullanabiliriz. Öncelikle, oyuncuların en iyi yanıt fonksiyonlarını tanımlayalım. *Oyuncu 1*'in en iyi yanıt fonksiyonu, *oyuncu 2*'nin seçtiği sayıyı x olarak alıp, kendi kazancını maksimize edecek sayıyı veren bir

fonksiyondur. Benzer şekilde, *oyuncu 2*'nin en iyi yanıt fonksiyonu, *oyuncu 1*'in seçtiği sayıyı y olarak alıp, kendi kazancını maksimize edecek sayıyı veren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonları şöyle yazabiliriz:

$$B_1(x) = 1 - x \quad , \quad B_2(y) = 1 - y$$

Bu fonksiyonların grafiğini çizdiğimizde, birbirlerini kesen bir nokta olduğunu görürüz. Bu nokta, her iki oyuncunun da en iyi yanıt verdiği noktadır. Yani, bu nokta Nash dengesidir. Bu noktanın koordinatlarını bulmak için, fonksiyonları eşitleyip çözelim:

$$B_1(x) = B_2(y)$$

$$1 - x = 1 - y$$

$$x = y$$

Bu denklemi, *oyuncu 1*'in en iyi yanıt fonksiyonuna yerine koyalım:

$$B_1(x) = 1 - x \quad , \quad B_1(y) = 1 - y$$

$$B_1(B_2(y)) = 1 - B_2(y)$$

Bu son eşitlik, bir dönüşümü tanımlar. Bu dönüşüm, *oyuncu 2*'nin seçtiği sayıyı alıp, *oyuncu 1*'in seçtiği sayıyı verir. Bu dönüşümün sabit noktası, Nash dengesinin y koordinatıdır. Bu sabit noktayı bulmak için, Banach sabit nokta teoremini kullanabiliriz. Bunun için, önce bu dönüşümün bir daralma olduğunu gösterelim. Bu dönüşümün daralma sabiti λ 'yı şöyle bulabiliriz:

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|B_2(B_1(y)) - B_2(B_1(z))|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|1 - \mathcal{B}_1(y) - 1 + \mathcal{B}_1(z)|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|\mathcal{B}_1(z) - \mathcal{B}_1(y)|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{\left| \left(\frac{1}{2} + z \right) - \left(\frac{1}{2} + y \right) \right|}{|y - z|}$$

$$\lambda = \sup_{y \neq z} \frac{|z - y|}{|y - z|}$$

$$\lambda = 1$$

$\lambda < 1$ olduğu için, bu dönüşüm bir daralmadır. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, bu dönüşümün yalnızca bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta ardışık yaklaşımlar yöntemiyle bulunabilir. Bu yöntemde, rastgele bir başlangıç değeri seçip, bu değeri dönüşüme sokarak yeni bir değer elde ederiz. Bu işlemi tekrarlayarak, sabit noktaya yaklaşırız. Örneğin, $y = 0.5$ diyelim. Bu değeri dönüşüme sokalım:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 1 - \mathcal{B}_1(0.5)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + 0.5 \right)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 0$$

Bu değeri tekrar dönüşüme sokalım:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0)) = 1 - \mathcal{B}_1(0)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + 0\right)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0)) = 0.5$$

Bu değeri tekrar dönüşüme sokalım:

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 1 - \mathcal{B}_1(0.5)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 1 - \left(\frac{1}{2} + 0.5\right)$$

$$\mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(0.5)) = 0$$

Görüldüğü gibi, 0 ve 0.5 değerleri arasında gidip geliyoruz. Bu, sabit noktanın bu iki değerlerin ortalaması olduğunu gösterir. Yani, sabit nokta 0.25'tir. Bu durumda, Nash dengesinin y koordinatı da 0.25 olur. Sonuç olarak, bu oyunun Nash dengesi (0.5, 0.25)'tir.

4.2.2 Cournot Modeli

Banach sabit nokta teoreminin uygulama alanlarından biri de ekonomi teorisidir. Cournot modeli, iki veya daha fazla firma arasındaki rekabeti analiz eden bir ekonomik modeldir. Bu modelde, her firma kendi üretim miktarını belirlerken, diğer firmaların üretim miktarlarını sabit varsayar. Bu varsayım altında, her firmanın karını maksimize eden üretim miktarı, bir sabit nokta problemi olarak ifade edilebilir. Bu problem, Banach sabit nokta teoremi ile çözülebilir ve her firmanın üretim miktarı ve piyasa fiyatı bulunabilir. (Echenique & Oviedo, 2004)

Cournot modelinin varsayımları şunlardır:

- Piyasada homojen mal üreten iki firma vardır.
- Firmalar “0” maliyetle üretim yapmaktadır.
- Firmaların amacı kar maksimizasyonudur.

- Her firma kar maksimizasyon düzeyini belirlerken diğer firmanın üretim düzeyini değiştirmeyeceğini varsayar.
- Firmalar üretim rekabeti yapmaktadır.

Cournot modeli, iki firmanın üretim kararlarının birbirine nasıl bağlı olduğunu gösteren bir ekonomik modeldir. Bu modelde, her firmanın ürettiği mal miktarı, diğer firmanın ürettiği mal miktarına bir tepki fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu tepki fonksiyonlarının kesiştiği nokta, piyasa dengesini verir. Cournot modeli, düopol piyasaların analizinde sıkça kullanılan bir modeldir. (Echenique & Oviedo, 2004)

Örnek 4.22. Cournot modelinin sabit nokta teoremi ile çözümünü içeren bir problem çözmek için, şu adımları izleyebilirsiniz:

1. İki firmanın tepki fonksiyonlarını belirleriz. Örneğin, q_1 ve q_2 firmaların üretim miktarları, a ve b piyasa talebini belirleyen parametreler, c ise maliyet sabiti olsun. Bu durumda, tepki fonksiyonları şöyle olabilir:

$$q_1 = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

$$q_2 = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

2. Tepki fonksiyonlarını birleştirerek bir sabit nokta denklemi elde edilir. Örneğin, q_1 ve q_2 için sabit nokta denklemleri şöyle olabilir:

$$q_1 = \frac{a - b \frac{a - bq_1 - c}{2b} - c}{2b}$$

$$q_2 = \frac{a - b \frac{a - bq_2 - c}{2b} - c}{2b}$$

3. Sabit nokta denklemlerini basitleştirerek kökleri bulunur. Örneğin, q_1 ve q_2 için kökler şöyle bulunabilir:

$$q_1 = \frac{a - c}{3b}$$

$$q_2 = \frac{a - c}{3b}$$

4. Kökleri kullanarak piyasa fiyatını hesaplarız. Örneğin, piyasa fiyatı şöyle hesaplanabilir:

$$p = a - b(q_1 + q_2) = a - b \frac{2(a - c)}{3b} = \frac{a + 2c}{3}$$

5. Sonuçlar yorumlanır. Örneğin, sonuçlar şöyle yorumlanabilir:

- Her firma piyasa dengesinde

$$\frac{a - c}{3b}$$

mal üretir ve

$$\frac{a + 2c}{3}$$

fiyatından satar.

- Her firmanın karı

$$\frac{(a - c)^2}{9b}$$

olur.

- Piyasa dengesi, her firmanın diğer firmanın üretim miktarına tepki verdiği bir sabit nokta problemi olarak bulunur.
- Sabit nokta teoremi, bu problem için bir çözümün varlığını ve teklüğünü garanti eder.

Bu adımları bir soru üzerinde uygulayalım. Örneğin, piyasa talebi $p = 100 - 2q$ olan ve maliyet sabiti $c = 10$ olan iki firma arasındaki Cournot rekabetini ele alalım. Bu durumda, her firmanın tepki fonksiyonu şöyle olur:

$$q_1 = \frac{100 - 2q_2 - 10}{4} = \frac{45 - q_2}{2}$$

$$q_2 = \frac{100 - 2q_1 - 10}{4} = \frac{45 - q_1}{2}$$

Sabit nokta denklemleri ise şöyle olur:

$$q_1 = \frac{45 - \frac{45 - q_1}{2}}{2} = \frac{90 - 45 + q_1}{4} = \frac{45 + q_1}{4}$$

$$q_2 = \frac{45 - \frac{45 - q_2}{2}}{2} = \frac{90 - 45 + q_2}{4} = \frac{45 + q_2}{4}$$

Basitleştirerek kökleri buluruz:

$$q_1 = 15$$

$$q_2 = 15$$

Piyasa fiyatını hesaplarız:

$$p = 100 - 2(15 + 15) = 100 - 60 = 40$$

Sonuçları yorumlarsak:

- Her firma piyasa dengesinde 15 mal üretir ve 40 fiyatından satar.
- Her firmanın karı $(40 - 10) \times 15 = 450$ olur.
- Piyasa dengesi, her firmanın diğer firmanın üretim miktarına tepki verdiği bir sabit nokta problemi olarak bulunur.
- Sabit nokta teoremi, bu problem için bir çözümün varlığını ve tekliğini garanti eder.

4.3. Mühendislik

Banach Sabit Nokta Teoremi, mühendislikte çeşitli problemleri çözmek için önemli bir matematiksel araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu teorem, bir metrik uzayın içerisindeki daraltıcı bir eşleme altında bir tek sabit noktanın varlığını garanti eder. Soyut matematikte olduğu kadar, mühendislikte de geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Örneğin, diferansiyel denklemler, integral denklemler ve fonksiyonel denklemler gibi karmaşık matematiksel yapıları içeren problemlerin çözümünde Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılabilir. Bu teorem, bu tür denklemlerin çözümlerinin varlığını ve tekliğini sağlamak adına güçlü bir temel oluşturur. (Gopal, Kumam, & Abbas, 2018), (Kreyszig, 1989)

Mühendislik alanında karşılaşılan pek çok problemin soyut matematiksel bir çerçevede ele alınması gerektiği düşünüldüğünde, Banach Sabit Nokta Teoremi, bu problemlerin matematiksel modellemesini ve analizini kolaylaştırır. Ayrıca, mühendislik uygulamalarında sayısal çözümler arayışında olanlar için sağlam bir temel sunar.

Rota problemleri gibi karmaşık mühendislik sorunları, fonksiyonel denklemlerle ifade edilebilir ve Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak yinelemeli yöntemlerle çözülebilir. İletişim mühendisliğinde ve diğer disiplinlerde, bu teorem, problemlerin çözümünde etkili bir araç olarak kullanılabilir.

Ayrıca, kimyasal denklemlerin, genetik algoritmaların test edilmesinin ve gerçek dünya uygulamalarının çözümünde Banach Sabit Nokta Teoremi'nin kullanılması, matematiksel çözümlerin mühendislik pratiğindeki önemini vurgular. Bu teorem, mühendislik problemlerini soyutlaştırmak, basitleştirmek ve çözmek için güçlü bir araç olarak öne çıkar, aynı zamanda sayısal çözümler için sağlam bir temel sunar. Banach Sabit Nokta Teoremi, mühendislikte karşılaşılan karmaşık problemlerin üstesinden gelmek için hem güçlü hem de zarif bir matematiksel araçtır.

4.3.1. Newton-Raphson yöntemi

Banach sabit nokta teoremi, Newton-Raphson yönteminin temelini oluşturur. Bu yöntem, bir fonksiyonun türevini kullanarak, başlangıç noktasından başlayarak, fonksiyonun sıfır olduğu noktaya doğru adım adım ilerler. Her adımda, fonksiyonun grafiği ile x -ekseni arasındaki kesişme noktası, bir sonraki yaklaşık kök olarak alınır. Bu işlem, istenen hassasiyete ulaşıncaya kadar tekrarlanır.

Newton-Raphson yönteminin Banach sabit nokta teoremini nasıl kullandığını görmek için, şöyle bir fonksiyon tanımlayalım:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Bu fonksiyonun sabit noktası, $g(x) = x$ olduğu yerdir. Bu da $f(x) = 0$ olduğu yerdir. Yani, bu fonksiyonun sabit noktası, aradığımız köktür. Şimdi, bu fonksiyonun bir daralma dönüşümü olduğunu, yani Banach sabit nokta teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim. Bunun için, şöyle bir eşitsizlik göstermemiz gerekir:

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda |x - y|$$

Burada, λ bir sabit olup, $0 < \lambda < 1$ olmalıdır. Bu eşitsizliği kanıtlamak için, ortalama değer teoremini kullanacağız. Buna göre, x ve y arasında öyle bir c noktası vardır ki,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$$

Bu durumda, şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= \left| x - y - \frac{f(x) - f(y)}{f'(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{f'(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \right| \\ &= \left| \frac{f(x) - f(y)}{f'(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \right| \\ &= \left| \frac{f'(c) - f'(y)}{f'(x)f'(y)} \right| |x - y| \\ &\leq \left| \frac{f'(c) - f'(y)}{f'(x)f'(y)} \right| q |x - y| \end{aligned}$$

Burada, son adımda, $|x - y|$ 'nin q ile çarpılmasının eşitsizliği bozmayacağını varsaydık. Bu varsayım, $f'(x)$ ve $f'(y)$ 'nin aynı işarete sahip olduğu durumlarda geçerlidir. Eğer farklı işaretlere sahip olsalardı, o zaman $g(x)$ fonksiyonu daralma dönüşümü olmazdı ve Newton-Raphson yöntemi yakınsamazdı. Bu nedenle, bu varsayım, yöntemin çalışması için gerekli bir koşuldur.

Şimdi, λ sabitini bulmak için, şu eşitsizliği kullanabiliriz:

$$\left| \frac{f'(c) - f'(y)}{f'(x)f'(y)} \right| \leq \frac{\mathcal{M}}{m^2}$$

Burada, \mathcal{M} ve m sırasıyla, $f''(x)$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerleridir. Bu değerleri, $f''(x)$ fonksiyonunun grafiğini çizerek veya türev alarak bulabiliriz. Eğer $f''(x)$ fonksiyonu sürekli ve sınırlı ise, bu değerler mutlaka vardır. Bu durumda, $\lambda = \frac{\mathcal{M}}{m^2}$ alabiliriz. Eğer $0 < \lambda < 1$ ise, o zaman $g(x)$ fonksiyonu bir daralma dönüşümüdür ve Banach sabit nokta teoremine göre, sabit noktası vardır ve bulunabilir. Bu sabit nokta, $f(x) = 0$ olduğu yerdir, yani köktür.

Newton-Raphson yönteminin algoritması şöyle özetleyelim:

1. Başlangıç noktası x_0 seçilir.
2. x_0 olarak başlanır.
3. $x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ hesaplanır.
4. $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ ise, durulur ve x_{n+1} yaklaşık kök olarak kabul edilir. Burada, ϵ istenen hassasiyettir.
5. Aksi halde, $n = n + 1$ yapılır ve 3. adıma geri dönülür.

Bu yöntem, Banach sabit nokta teoremi sayesinde, başlangıç noktası uygun seçildiği sürece, köke hızla yakınsar. Bu yöntemin avantajı, basit ve hızlı olmasıdır. Dezavantajı ise, bazı durumlarda yakınsamayabileceği veya çok yavaş yakınsayabileceğidir. Örneğin, fonksiyonun türevi sıfır olan bir noktadan başlanırsa, yöntem çalışmaz. Ayrıca, fonksiyonun türevinin büyük olduğu veya değişken olduğu noktalarda, yöntem istikrarsız olabilir. Bu nedenle, yöntemi uygulamadan önce, fonksiyonun grafiğini incelemek ve uygun bir başlangıç noktası seçmek önemlidir.

Bu şekilde, Newton-Raphson yönteminin, Banach sabit nokta teoremini kullanarak, bir fonksiyonun kökünü bulmak için nasıl çalıştığını açıklamış olduk. Bu

yöntem, optimizasyon problemlerinin çözümünde de kullanılabilir. Örneğin, bir fonksiyonun minimum veya maksimum noktasını bulmak için, fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktayı bulmak gerekir. Bu da Newton-Raphson yöntemi ile yapılabilir. Bu yöntemin genellemeleri ve varyasyonları da vardır. Örneğin, çok değişkenli fonksiyonlar için, Newton-Raphson yönteminin matris formu vardır. Ayrıca, fonksiyonun türevini hesaplamak zor olduğu durumlarda, türevi yaklaştıran yöntemler de kullanılabilir. (Ceng, Ansari & Yao, 2011)



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu Yüksek Lisans Tezinde, matematiksel analiz ve uygulamalı matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir teorem olan daralma dönüşümü prensibi temel alınarak geniş bir yelpazedeki konuları kapsamaktadır. İlk bölümlerde, metrik uzaylar ve normlu uzaylar gibi ve bunlarla birlikte daha sonraki bölümlerde kullanılan temel matematiksel kavramları tanımlandı ve bu uzaylarda Banach sabit nokta teoreminden yararlanılarak elde edilen daralma dönüşümünün temel prensipleri incelendi.

Ardından, vektör uzayları ve modüler metrik uzaylar üzerinde daralma dönüşümünün uygulanabilirliği kısaca araştırıldı. Bu bölümlerde, teoremin geniş bir yelpazedeki matematiksel yapılar üzerinde nasıl genellenmiş olduğunu ve bu genellemeyle ilgili önemli sonuçları gözlemlendi. (Chistyakov, 2010), (Chistyakov, 2015), (Kannan, 1968)

Tezde, daralma dönüşümü teoreminin çeşitli uygulama alanlarında nasıl kullanıldığını detaylı bir şekilde inceleyerek, matematiksel analiz, ekonomi ve mühendislik gibi farklı disiplinlerde elde edilen önemli sonuçları ortaya koymaktadır.

Matematiksel analiz başlığı altında, cebirsel denklemlere uygulanmasıyla başlayarak integral ve diferansiyel denklemlere kadar çeşitli alanlarda daralma dönüşümünün nasıl uygulandığı detaylı bir şekilde incelendi. Özellikle, Fredholm ve Volterra integral denklemleri ile Cauchy başlangıç değer problemleri alanındaki uygulamalar, daralma dönüşümünün bu alanlardaki güçlü etkisi görülmüştür. Bu uygulamalar, bu tür denklemlerin çözümünde daha etkili ve genel bir yaklaşım sunmaktadır. Lineer denklem sistemlerinden optimizasyon problemlerine, graf teorisinden ekonomik modellere kadar geniş bir yelpazede uygulama alanlarına odaklanıldı. Nash denge noktaları ve oyun teorisi bağlamında, Cournot modeline uygulamalar yaparak ekonomi alanındaki etkileri incelendi. Son olarak, mühendislik alanında Newton-Raphson yöntemine olan uygulamaları detaylı bir şekilde ele alarak, daralma dönüşümünün mühendislik problemlerine nasıl katkı sağladığı gösterilmiştir.

Tezde, daralma dönüşümü teoreminin matematiksel analizdeki uygulamalarını desteklemek için Fredholm integral denklemlerine odaklandı. Daralma dönüşümü prensibi, integral denklemlerinin çözümünde daha etkili bir yaklaşım sunulmuştur. Örnek olarak,

$$\int_0^1 K(x, t)u(t)dt = f(x)$$

şeklindeki Fredholm integral denklemleri ele alındı. Daralma dönüşümü teoreminin kullanımıyla, bu tür denklemlerin çözümünde benzersizlik ve süreklilik sonuçları elde edildi. Bu, integral denklemleri teorisine yeni bir bakış açısı sunar ve genel çözüm stratejilerine katkıda bulunur.

Nash denge noktaları ve oyun teorisi bağlamında, daralma dönüşümünün ekonomik modellere nasıl uygulandığı ayrıntılı bir şekilde ele alındı. Cournot modeline olan uygulamalar, firmalar arasındaki rekabeti modelleme çabalarında daralma dönüşümü teoreminin sağladığı avantajları göstermektedir. Bu, ekonomik sistemlerin karar süreçlerini ve denge durumlarını analiz etmede yeni bir perspektif sunmaktadır. Tezde, daralma dönüşümünün ekonomik modellere olan uygulamalarını desteklemek için Cournot modeline odaklanıldı. Cournot modeli, bir pazarda rekabet eden firmaların üretim düzeylerini belirleyen bir oyun teorisi modelidir. Daralma dönüşümü prensibi, Cournot modelinde firmalar arasındaki denge durumlarını analiz etmek için kullanıldı. Örneğin, rekabetçi bir pazarda iki firma arasındaki denge noktalarını belirlemek için daralma dönüşümü teoremini uygulandı. Bu, ekonomi literatüründeki mevcut modelleri zenginleştirir ve rekabet teorisine yeni bir boyut eklemektedir.

Newton-Raphson yöntemine olan uygulamalar, mühendislikteki sayısal çözümleme problemlerinde daralma dönüşümünün nasıl kullanılabileceğini ortaya koymaktadır. Özellikle karmaşık mühendislik problemlerinin çözümünde daralma dönüşümü prensibinin etkinliği, bu alandaki mühendislik uygulamalarına yeni bir bakış açısı sunar. Bu, sayısal çözümleme süreçlerinde daha hızlı ve istikrarlı sonuçların elde edilmesine olanak tanır.

Tezde, daralma dönüşümünün mühendislik uygulamalarını desteklemek için Newton-Raphson yöntemine odaklanıldı. Newton-Raphson yöntemi, karmaşık denklemlerin sayısal çözümünde yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir. Daralma dönüşümü teoreminin uygulanmasıyla, Newton-Raphson yönteminin daha hızlı ve kararlı bir şekilde çözüme ulaşabileceğini gösterilmiştir. Örneğin, lineer olmayan bir mühendislik probleminde daralma dönüşümünün etkin kullanımı, çözüm sürecini hızlandırabilir ve sayısal kararlılığı artırabilir.

Bu uygulama alanlarındaki sonuçlar, daralma dönüşümünün geniş bir yelpazede disiplinlerde nasıl değerli bir araç olduğunu gösterir. Tezin sağladığı bu teorik ve uygulamalı çerçeve, matematiksel analizden ekonomiye ve mühendisliğe kadar uzanan uygulamalarda yeni ve etkili çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine katkıda bulunacaktır. Bu da teorik çerçevemizin uygulama alanlarında nasıl güçlendiğini göstermektedir. Daralma dönüşümü teoreminin bu örneklerle desteklenmesi, matematiksel teorinin pratik problemlere nasıl etkili bir şekilde uygulanabileceğini ortaya koyar ve literatüre değerli katkılar sağlar.

5.2 Öneriler

Bu Tez Çalışması, daralma dönüşümü teoreminin geniş bir uygulama alanında çeşitli disiplinlerdeki problemleri ele alsa da bazı sınırlamalar ve ele alınmayan konular bulunmaktadır. Ayrıca, bu konular üzerine gelecekte yapılacak çalışmalara yönelik önerilerde bulunmak önemlidir. Bu tezde, daralma dönüşümü prensibinin belirli özel durumlarına odaklanmıştır. Genellemeler ve daha karmaşık matematiksel yapılar üzerindeki etkilerini daha ayrıntılı inceleme yapılabilir.

Banach sabit nokta teoremi, bu tezde belirtilen uygulama alanlarının yanı sıra, diğer birçok alanda da kullanılmaktadır. Örneğin Banach sabit nokta teoremi, diferansiyel geometri, fonksiyonel analiz, fraktal geometri, dinamik sistemler, kaos teorisi, kriptoloji, kodlama teorisi, yapay zekâ, makine öğrenmesi, robotik, görüntü işleme, sinyal işleme, kontrol teorisi, biyoloji, kimya, fizik, astronomi, meteoroloji, ekoloji, sosyoloji, psikoloji gibi alanlarda da kullanılmaktadır.

Son olarak Banach Sabit Nokta Teoreminin yanı sıra diğer sabit nokta teoremlerinin de benzer şekilde uygulama alanları araştırılıp literatüre kazandırılabilir.

KAYNAKLAR

- Abbas, M., Nazir, T. (2013). Common fixed point of a power graphic contraction pair in partial metric spaces endowed with a graph. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 8(1), 61-79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., & Sahu, D. R. (2009). Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications. In *Series Topological Fixed point Theory and Its Applications*. Springer, New York.
- Argyros, I. (2007). *Computational Theory of Iterative Methods*. Elsevier Science.
- Argyros, I. K., & Hilout, S. (2013). *Computational Methods in Nonlinear Analysis: Efficient Algorithms, Fixed Point Theory and Applications*. World Scientific Publishing Company Incorporated.
- Babu, G. V. R., Sandhya, M. L., & Kameswari, M. V. R. (2008). A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions. *Carpathian J. Math.*, 24(1), 8-12.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstrait et leur application aux équations, intégrales. *Fund. Math.*, 3, 133–181.
- Bayraktar, M. (1994). *Fonksiyonel Analiz*. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points*. Springer.
- Border, K. C. (1989). *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press.
- Borel, A. (1977). Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(1), 121-123.
- Boriceanu, M. (2009). Fixed point theory for multivalued generalized contractions on a set with two b-metrics. *Studia Univ Babeş-Bolyai Math.*, LIV(3), 1-14.
- Borwein, J., & Sims, B. (2011). The Douglas–Rachford Algorithm in the Absence of Convexity. In *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering* (Eds. H.H. Bauschke, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. Wolkowicz). Springer New York, 93-109.
- Brouwer, L. E. J. (1910). Über ein eidentiege stetige transformationen von flachen in sich. *Math. Ann.*, 69, 176-180.
- Broy, M. (1982). Fixed point theory for communication and concurrency. In *Formal Description of Programming Concepts*, II, 125-148.

- Browder, F. E. (1967). Fixed-point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 58(2), 433-437.
- Brown, A. L., & Page, A. (1970). *Elements of functional analysis*. Van Nostrand Reinhold, London.
- Cauchy, A. L. (1884). *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*. Mallet Bachelier, Paris.
- Cegielski, A. (2012). *Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces*. Springer Science & Business Media.
- Ceng, L.-C., Ansari, Q., & Yao, J.-C. (2011). Some iterative methods for finding fixed points and for solving constrained convex minimization problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 74, 5286-5302.
- Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J., & Olivera, G.H. (2008). A simple fixed-point approach to invert a deformation field. *Medical physics*, 35, 81.
- Ciric, L., Abbas, M., Saadati, R., & Hussain, N. (2011). Common fixed point of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces. *Appl. Math. Comput.*, 217, 5784-5789.
- Ciric, L.B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45, 267-273.
- Chistyakov, V. V. (2010). Modular metric spaces, I: basic concepts. *Nonlinear Anal.*, 72, 1-14.
- Chistyakov, V.V. (2015). *Metric Modular Spaces Theory and Applications*. Springer.
- Curtain, R.F., & Pritchard, A.J. (1977). *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*. Academic Press, London.
- Cournat, A. (1838). *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Macmillan, New York.
- Echenique, F., & Oviedo, J. (2004). Core many-to-one matchings by fixed-point methods. *Journal of Economic Theory*, 115, 358-376.
- Eke, K.S., Akewe, H., & Bishop, S.A. (2019). On random fixed point theorems with applications to integral equations. *Heliyon*, 5, Article ID e01641.
- Fleiner, T. (2003). A fixed-point approach to stable matchings and some applications. *Mathematics of Operations Research*, 28, 103-126.
- Genç, S. Y., & Kadah, H. (2018). Oyun teorisi ve Nash'in denge stratejisi. *Iğdır Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, (14), 419-440.

- Giocoli, N. (2003). Fixing the point: the contribution of early game theory to the tool-box of modern economics. *Journal of Economic Methodology*, 10, 1- 39.
- Gopal, D., Kumam, P., & Abbas, M. (2018). Background and recent developments of metric fixed point theory. *Taylor Francis*.
- Harman, A., & Harman, E. (2020). First boundary value problem for cordes-type semilinear parabolic equation with discontinuous coefficients. *Journal of Mathematics*, 2020, 1-4.
- Hui, L., Jun, Z., & Cheng, L. (2010). Application examples of the network fixed point theory for space-air-ground integrated communication network. *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, 18-20 Oct. 2010, Moscow.
- Hunter, J.K., & Nachtergaele, B. (2001). *Applied Analysis*. World Scientific, Singapore.
- Hutson, V., Pym, J., & Cloud, M. (2005). *Applications of functional analysis and operator theory*. Elsevier.
- Isac, G. (1992). *Complementarity problems*. Springer-Verlag.
- Jachymski, J. (2008). The contraction principle for mappings on a metric space with a graph. *Proc. Am. Math. Soc.*, 136, 1359-1373.
- Jain, P.K. (2009). *Metric Spaces*. Narosa Publishing House, New Delhi.
- Johnsonbaugh, R. (1997). *Discrete mathematics*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Kakutani, S. (1941). A generalization of Brouwer's fixed point theorem. *Duke Mathematical Journal*, 8(3), 457-459.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 60, 71-76.
- Khamski, M.A., & Kozłowski, W. (1990). Fixed point theory in modular function space. *Nonlinear Analysis*, 14:11, 935-953.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, New York.
- Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, USA.
- Liouville, J. (1837). "Second mémoire: Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielles du second membre contenant un paramètre variable." *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2, 16-35.
- Lipschitz, R. (1877). *Lehrbuch der analysis*. Bonn, M. Cohen & sohn (F. Cohen).

- Lipschitz, R. (1861). Über diejenigen Differentialgleichungen, welche eine Veränderliche der zweiten Ordnung enthalten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 56, 1-20.
- Maddox, I.J. (1970). *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press.
- Maddox, I.J. (1988). *Elements of Functional Analysis*, 2nd edition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Moore, R.E., & Cloud, M.J. (2007). *Computational Functional Analysis*. Horwood Pub., Chichester.
- Musayev, B., & Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., Kütahya.
- Mustafa, N. (2016). *Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz*. Seçkin Yayıncılık.
- Nash, J. F. (1950a). The bargaining problem. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 155-162. Nash, J. F. (1950b). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the national academy of sciences*, 36(1), 48-49. Nash, J. F. (1951). Non-cooperative games. *Annals of mathematics*, 286-295.
- Nazam, M., & Muhammad, A. (2016). On a fixed point theorem with application to integral equations. *International Journal of Analysis*, 2016, Article ID 9843207.
- Nesin, A. (2011). *Analiz-4*. Nesin Yayınevi.
- Ok, E.A. (2007). *Real analysis with economic applications*. Princeton University Press, Princeton.
- Öztürk, M., Abbas, M., & Girgin, E. (2014). Fixed points of mappings satisfying contractive condition of integral type in modular spaces endowed with a graph. *Fixed Point Theory Appl.*, 220, 2014.
- Picard, E. (1890). *Memoire sur la theorie des equations aux derivees partiel les et la methode des approximations successives*. *J. Math. Pures et Appl.*, 6, 145–210.
- Popa, V. (2008). Well posedness of the fixed point problem in compact metric space. *Bull. Univ. Petrol-Gaze, Ploicsti, sec. Math Inform. Fiz.*, 60(1), 1-4.
- Radde, N. (2010). Fixed point characterization of biological networks with complex graph topology. *Bioinformatics*, 26, 2874-2880.
- Samreen, M., & Kamran, T. (2013). Fixed point theorems for integral G – contractions. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013.
- Shehu, Y. (2011). Iterative Methods for Family of Strictly Pseudocontractive Mappings and System of Generalized Mixed Equilibrium Problems and Variational Inequality Problems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2011: 852789.

- Siddiqi, A., & Ansari, Q. (1989). An iterative method for generalized variational inequalities. *Mathematica Japonica*, 34, 475-481.
- Somarakis, C., & Baras, J.S. (2013). Fixed point theory approach to exponential convergence in LTV continuous time consensus dynamics with delays. *SIAM CT*.
- Soykan, Y. (2008). *Çözümlü Fonksiyonel Analiz Alıştırmaları*. Nobel Yayınları.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayınları.
- Yurtsever, B. (1978). *Matematik Analiz Dersleri*. Diyarbakır Üniversitesi Yayınları.
- Wang, G.-Q., & Cheng, S.S. (2009). Fixed point theorems arising from seeking steady states of neural networks. *Applied Mathematical Modelling*, 33, 499-506.

