EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

LİNEER OLMAYAN BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Irmak KIZILDAN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 13.12.2023

Bornova-İZMİR
2023

Irmak KIZILDAN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "Lineer Olmayan Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine" başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 13.12.2023 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

	Jüri Üyeleri:	**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Emine MISIRLI**	**...............................**
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Seval ÇATAL**	**...............................**
Üye	**: Doç. Dr. Şerife Müge EGE**	**…………………...**

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " **Lineer Olmayan Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13 / 12 / 2023

İmzası

Irmak KIZILDAN

ÖZET

Lineer Olmayan Bazı Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri Üzerine

KIZILDAN, Irmak

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI

Aralık 2023, 45 sayfa

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler modern mühendislik, optik fiberler, fizik, biyofizik ve çeşitli bilim dallarında meydana gelen bazı problemler ve araştırmalar için oldukça önemli bir alanı oluşturmaktadır. Bu tür denklemler, gerçek yaşam koşulları ile var olan bazı olayların ya da problemlerin matematiksel olarak modellenmesi, incelenmesi ve yorumlanması ile ortaya çıkmaktadır. Bu tez çalışmasında bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin gezen dalga çözümlerinin (travelling wave solutions) bulunması ve çözümlerinin fiziksel davranışlarının incelenmesi amaçlanmıştır.

Bu tez çalışmasında giriş bölümü ile birlikte üç bölüm bulunmaktadır.

İkinci bölümde, evrim (evolution) denklemleri ile ilgili temel tanım, kavram ve bilgiler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde ise fonksiyonel değişken (functional variable) yöntemi ile ilgili temel tanım ve bilgilere yer verilmiştir. Ele alınan yöntem lineer olmayan bazı denklemlere uygulanmış ve bu denklemlerin yarı analitik çözümleri bulunmuştur. Ayrıca bu yöntemin uygulandığı bir denklemin, çeşitli yöntemler ile elde edilen çözümleri incelenip ve dalga tipleri karşılaştırılmıştır. Çözüm fonksiyonlarından bazılarının 3D grafikleri ve 2D grafikleri Mathematica ile çizdirilmiş ve elde edilen yeni çözümlerin doğruluğu sağlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fonksiyonel değişken yöntemi, evrim denklemleri, soliton çözümleri.

ABSTRACT

ON SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

KIZILDAN, Irmak

Master Thesis, Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Emine MISIRLI

December 2023, 45 page

Nonlinear partial differential equations with partial derivatives constitute a very important field for some problems and research occurring in modern engineering, optical fibers, physics, biophysics and various branches of science. Such equations arise by mathematically modeling, studying and interpreting some events or problems that exist with real life conditions. In this thesis, it is aimed to find out traveling wave solutions of some nonlinear partial differential equations and to examine the physical behavior of their solutions.There are three sections in this thesis study along with the introduction section.

In second section, the basic definitions, concepts and information about the equations of evolution are discussed.

In the third section, basic definitions and information about the functional variable method are included. The method under consideration has been applied to some nonlinear equations and semi-analytical solutions of these equations have been found. In addition, the solutions of an equation in which this method is applied, obtained by various methods, were examined and the wave types were compared. The 3D graphs of some of the solution functions have been plotted with Mathematica and the accuracy of the new solutions obtained has been ensured.

Keywords: Functional variable method, evolution equations, soliton solutions.

ÖNSÖZ

Lineer olmayan evrim denklemleri ve denklem sistemlerinin yarı analitik yöntemler kullanılarak elde edilen yeni çözümleri; plazma, akışkanlar mekaniği, optik fiberi ve mühendislik gibi uygulamalı pek çok alanda karşılaşılan çeşitli araştırmalara ve çalışmalara katkı sağlamaktadır.

Bu tez çalışmasında dalga dönüşümü kullanılarak lineer olmayan bazı evrim denklemlerinin çözümlerine ulaşmak amaçlanmıştır. Elde edilen sonuçların, matematik, mühendislik ve doğa bilimlerinin çözümlerinde ayrıca uygulamalı birçok alanda gelişmelere yol açacağı düşünülmektedir.

Eğitim sürecim boyunca bana tecrübesi, bilgisi ve yol göstericiliği ile destek veren değerli hocama teşekkür ve saygılarımı sunarım.

İZMİR

13/12/2023 Irmak KIZILDAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Matematik, katı hal fiziği, plazma dalgaları, akışkanlar mekaniği, optik ve mühendislik alanındaki bazı problemlerin çözümlenebilmesi için yapılan çalışmalarda matematiksel modellemeye ihtiyaç duyulmaktadır. Bu modellemeler bazen bir diferansiyel denklemin içerdiği fonksiyonlar ile bunların türevleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar. Diferansiyel denklemler, çözülmesi amaçlanan bir problem için bir temel oluşturmaktadır.

Diferansiyel denklemler (differential equations) ile ilgili yapılan ilk çalışmalar 17. yüzyılın ikinci yarısında, dönemin önde gelen matematik ve fizikçisi Issac Newton ve Alman bir filozof olan Leibniz'in çalışmalarından sonra ortaya çıkmıştır. Newton ve Leibniz, diferansiyel ve integral hesabı üzerine çeşitli araştırma ve çalışmalar yapmışlardır. Diferansiyel denklemler ile ilk kez açık biçimde Newton'un 1671'de yazdığı ''Flux metodu ve sonsuz seriler'' adlı çalışmasında karşılaşılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisi daha sonra yapılan çalışmalarla, matematiğin hızla gelişen bir alanı olmuştur. Diferansiyel denklem, bağımlı değişken (dependent variable) ile bir veya daha fazla bağımsız değişkene (independent variable) göre alınan türevlerini kapsayan denklemi ifade eder. Ele alınan $y = f(x)$ fonksiyonu, bunun dy/dx türevi, y nin x'e göre değişim hızı olarak ifade edilir. Gerçek hayatta meydana gelen olaylar, çözümlenmesi amaçlanan problemler ve bazı doğa olayları, değişkenler ve değişkenlerin değişim hızları gibi birbirlerine bazı temel yasalar ile bağlıdır. Örneğin 1865'te Maxwell, bir elektrik akımı ve ona karşılık gelen manyetik alan arasındaki ilişkiyi bir diferansiyel denklem yardımı ile ifade etmiştir (Sezer, M., Daşcıoğlu A.,2010).

Diferansiyel denklemin türevleri, bir veya daha çok bağımlı (dependent) değişkenin tek bağımsız (independent) değişkene göre adi türevlerini içerdiğinde, diferansiyel denklem adi (ordinary) diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Bir veya daha fazla bağımlı (dependent) değişkeninin en az tek bir bağımsız (independent) değişkenine göre kısmi türevlerini içerdiğinde bu denklem de kısmi türevli diferansiyel denklem (partial differential equation) olarak adlandırılır (Ross, S. L., 2004).

Diferansiyel denklemleri sınıflandırabilmenin çeşitli yolları bulunmaktadır. Bu tür denklemler içerdiği bağımsız değişken sayısına göre adi (ordinary) diferansiyel denklemler (ADD) ve kısmi türevli (partial) diferansiyel denklemler (KTDD) biçiminde tanımlanabilir.

Denklemlerde yer alan türev ve bağımlı değişkenler incelendiğinde lineerlik koşullarına göre lineer ve lineer olmayan (nonlinear) diferansiyel denklemler olmak üzere sınıflandırılabilir (Sezer, M., Daşcıoğlu, A.,2010).

Uzay ve / veya zaman değişkenlerine bağlı nicelikler, genellikle temel fiziksel ilkelere dayanan diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler sadece bu ilkeleri doğru bir şekilde ifade etmekle kalmaz, ayrıca bir sistemin davranışını ve sistemin başlangıç durumundan ve verilen dış etkilerini de tahmin etmeye yardımcı olur. Bu nedenle, kısmi türevli diferansiyel denklemlerden çeşitli bilim ve mühendislik alanlarında yararlanılır (Bleecker, D.,2018).

Kısmi türevli diferansiyel denklemin bir fonksiyon olan $u(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in genel formu;

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, \ldots) = 0,$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n$ bağımsız değişkenler, u bilinmeyen bir fonksiyonu, u_{x_i} ∂u $/\partial$x$_i$ in kısmi türevini temsil etmektedir. Kısmi türevli diferansiyel denklem , başlangıç koşulları veya sınır koşulları gibi ek koşullarla ifade edilir. Kısmi türevli diferansiyel denklemler ile elde edilen matematiksel sonuçlar ve gelişmeler uygulamalı bilim dallarındaki çeşitli alanlara yarar sağlamaktadır. Örneğin bu çalışmalar ve yenilikler fiziğin çeşitli alanlarındaki araştırmalara katkıda bulunmuştur. Hamilton tarafından bulunan karakteristikler yöntemi (method of characteristics), optikte ve analitik mekanikte büyük gelişmeler sağlamıştır. Fourier yöntemi, ısı transferi ve dalga yayılımının çözümünde, Green's yöntemi ise elektromanyetizma teorisinin gelişiminde etkili olmuştur.

Kısmi türevli diferansiyel denklemde, denklem ve onunla ilişkili ek koşullardan oluşan problemin iyi konumlandırılmış (well-posedness) olup olmadığı incelenmektedir. İyi konum kavramını ilk kez Fransız matematikçi Jacques Hadamard ortaya atmıştır. İyi konum tanımına göre çözüm üç koşulu sağlamalıdır; varlık (existence) koşulu ile problemin tek çözümü vardır, teklik (uniqueness) koşulu ile birden fazla çözümü yoktur ve kararlılık (stability) koşulu ile denklemdeki veya ek koşullardaki küçük bir değişiklik, çözümde de küçük bir değişikliğe yol açar. Çözüm, belirtilen koşullarının tümünü sağlıyorsa, bir probleme iyi konumlanmış denir (Pinchover, Y.,Rubinstein, J.,2005).

Sık karşılaşılan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin bazılarına ait örnekler aşağıda verilmiştir.

Bir boyutlu ısı denklemi,

$$u_t = ku_{xx}.$$

$u = (x, t)$ bağımlı değişkeni, x konum ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

Bir boyutlu dalga denklemi,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

$u = (x, t)$ bağımlı değişkeni, x konum ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

İki boyutlu dalga denklemi,

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}).$$

$u = (x, y, t)$ bağımlı değişkeni, x, y konum değişkenlerine ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

Üç boyutlu dalga denklemi,

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

$u = (x, y, z, t)$ bağımlı değişkeni, x, y, z konum değişkenlerine ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

Birinci mertebeden lineer olmayan bir dalga oluşum denklemi,

$$u_t + c(u)u_{xx} = 0.$$

$u = (x, t)$ bağımlı değişkeni, x konum ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

Lineer Schrödinger denklemi,

$$iu_t + u_{xx} = 0, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Bir boyutlu dalga denklemi olmak üzere; $u = (x, t)$ bağımlı değişkeni, x konum ve t zaman bağımsız değişkenine bağlıdır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemleri sınıflandırmanın yollarından biri, denklemleri lineer veya lineer olmayan denklemler olarak ifade etmektir. Kısmi türevli diferansiyel denklem, bağımlı değişkenin ve her kısmi türevli ifadenin herhangi bir kuvvetini ya da bağımlı değişken ve bu değişkenin türevlerinin birbirleri ile çarpımını içermiyor ise bu tür denklemlere lineer (linear) kısmi türevli diferansiyel denklemler, aksi halde ise nonlinear kısmi türevli (partial) diferansiyel denklemler denir. Bazı lineer olmayan (nonlinear) kısmi türevli diferansiyel denklemler aşağıda verilmiştir;

Sine-Gordon denklemi,

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha sinu.$$

Liouville denklemi,

$$u_{xx} - u_{tt} = e^{\pm \mathrm{u}}.$$

Korteweg de-Vries (KdV) denklemi,

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0.$$

Fisher denklemi ,

$$u_t = Du_{xx} + u(1 - u).$$

Burgers denklemi,

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx}.$$

Lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS),

$$iu_t + u_{xx} + \gamma|u|^2 u = 0.$$

Benjamin-Bona-Mahony denklemi,

$$u_x + u_t + uu_x - u_{xxt} = 0 .$$

Literatürde lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bu durumda, elde edilmesi amaçlanan çözümler için genelleştirilip tek bir biçimde bir sonuca ulaşılmasının mümkün olmadığı da aşikardır. Lineer olmayan (nonlinear) kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için değişken dönüşümü uygulanır ve denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir. İndirgenen adi formdaki diferansiyel denklemin çözümleri için birçok yöntem kullanılmaktadır. Literatüre katkı sağlayacak çalışmalar yapılması amacıyla yeni ve geliştirilmiş yöntemlere gereksinim duyulmaktadır.

Lineer olmayan (nonlinear) kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin farklı yapıdaki çözümlerinin elde edilebilmesi için çeşitli analitik ve sayısal teknikler geliştirilmiştir ; (G'/G) açılım yöntemi (Mirzazadeh et al., 2015; Mirzazadeh et al., 2017), modifiye edilmiş basit denklem (simple equation) (Mirzazadeh, M.,2014), deneme denklemi yöntemi (trial equation method) (Biswas et al., 2018), sinüs Gordon genişletme yöntemi (Ekici, M.,2018), Darboux dönüşüm yöntemi (Chatterjee, P., Saha, D., Wazwaz, A. M., & Raut, S., 2023), $(-\varphi(\xi))$ açılım yöntemi ($(-\varphi(\xi))$ expansion method) (Kadkhoda, N., & Jafari, H.,2017), tanh fonksiyon yöntemi (Wazwaz, A. M.,2005), tanh/sech yöntemi (Wazwaz, A. M., 2017), Hirota'nın bilinear yöntemi (Hirota, R.,1971), değiştirilmiş Kudryashov yöntemi (Tandogan et al., 2013), … gibi pek çok yöntem vardır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler fizik, kuantum mekaniği, jeokimya, biyogenetik ve mühendislik alanlarındaki çeşitli olayları tanımlamak için kullanılır. Bazı problemlerin çözülebilmesi için faydalanılan çeşitli yöntemler mevcuttur. Doğadaki herhangi bir olayın matematiksel olarak modellenmesi ile oluşturulan bir denklem ya da denklem sisteminin çeşitli yöntemler kullanılarak çözümlenebilmesi, fiziksel olarak yorumlanabilmesi önem taşımaktadır. Birçok bilim alanında bu matematiksel modeller ve bazı evrim denklemlerinden yararlanılarak çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalarda, lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri biyoloji bilimlerinde, Navier-Stokes ve Euler denklemleri akışkanlar mekaniğinde, nonlinear Klein-Gordon denklemleri ile nonlinear Schrödinger denklemleri kuantum mekaniği alanında, Cahn-Hilliard denklemleri ise malzeme bilimlerinde karşılaşılan bazı evrim denklemleridir (Zheng, S.,2004). Bu çalışmalar aşağıda verilen örneklerle çeşitlendirilebilir.

(2+1) boyutlu Date–Jimbo–Kashiwara–Miwa denklemi (DJKM),

$$u_{xxxxy} + 4u_{xxy}u_x + 2u_{xxx}u_y + 6u_{xy}u_{xx} - \alpha u_{yyy} - 2\beta u_{xxt} = 0,$$

uygulamalı matematikte, düşük yüzey gerilimine ve uzun dalga boylarına sahip su dalgalarını modellemek için kullanılabilir.

Genelleştirilmiş (3+1) boyutlu bir Kadomtsev-Petviashvili (gKP) denklemi,

$$u_{xt} + u_{yt} + u_{zt} - u_{zz} + 3(u_x u_y)_x + u_{xxx} = 0,$$

akışkanlar mekaniği ve plazma fiziğinde ortaya çıkar.

Korteweg-de Vries denklemi (KdV),

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0,$$

sığ su yüzeylerindeki dalgaların matematiksel bir modelidir.

(2+1) Boyutlu Bogoyavlenskii-Schieff denklemi (CBS),

$$u_{xxxy} + 2u_y u_{xx} + 4u_x u_{xy} + u_{xt} = 0,$$

plazma fiziğinde ortaya çıkar (Ismael, H. F.; Seadawy, A.; Bulut, H.,2021).

Bu tez çalışmasında bazı fiziksel denklemlerin yarı analitik (semi-analytical) çözümlerini elde edebilmek için fonksiyonel değişken (functional variable) yöntemi ele alınmıştır. Ayrıca lineer olmayan genelleştirilmiş bazı denklemlerin ve bu denklemlerin modifiye edilmiş bazı formları üzerinde, yöntem kullanılarak uygun çözümler ve yaklaşımlar elde edilmiştir. Bununla birlikte elde edilen yeni çözümlerin fiziksel biçimlerinin ve davranışlarının değerlendirilmesi de amaçlanmıştır.

İkinci bölümde ise evrim denklemleri (evolution equations) ile ilgili temel tanımlar, kavramlar ve bilgiler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, fonksiyonel değişken yöntemi ile ilgili temel tanım ve bilgilere yer verilmiştir. Ele alınan yöntem bazı lineer olmayan denklemler ve denklemlere uygulanarak yarı analitik çözümler elde edilmiştir. Ek olarak bu bölümde fonksiyonel değişken yöntemi uygulanan bir denklemin, çeşitli yöntemler uygulanarak da elde edilen farklı çözüm fonksiyonları incelenmiştir ve çözümlerin dalga tipleri karşılaştırılmıştır. Ayrıca bulunan yeni çözüm fonksiyonlarının, Mathematica yardımıyla doğruluğu sağlanmış ve 3D grafikleri ile 2D grafikleri incelenip sunulmuştur.

2. EVRİM (EVOLUTION) DENKLEMLERİ HAKKINDA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer olmayan evrim (evolution) denklemleri hakkında temel bilgiler, kavramlar ve yöntemler ele alınmıştır.

Lineer olmayan evrim denklemleri akışkanlar dinamiğindeki dalga olaylarında, soğuk plazmadaki hidromanyetik dalgalarda, kristallerdeki akustik dalgalarda, elastik ortamda, optik fiberde, mühendislik ve uygulamalı bilim alanlarında karşılaşılan gerçek yaşam problemlerini tanımlamak için kullanılmaktadır (Noor, M. A., Noor, K. I., Waheed, A., & Al-Said, E. A.,2011).

Matematiksel fizik, enerji problemleri ve diğer alanlardaki güncel çalışmalar ve gelişmeler, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ve lineerleştirme teknikleri üzerine araştırmalara ivme kazandırmıştır. Lineer olmayan bir sistemin "neredeyse lineer" olduğunu varsayan çeşitli tekniklerin, genellikle çok az fiziksel gerekçesi vardır. Sadece matematik alanı için değil, farklı uygulama alanları için de daha fazla ilerleme kaydedilmesi büyük öneme sahiptir. Akışkanlar mekaniği, soliton fiziği, kuantum alan teorisi ve lineer olmayan evrim denklemlerinin tümü bu tür gelişmelerden yararlanabilecek alanlardır (Roubíček, T., 2013).

Tarihte ilk kez 'dalga' kavramından bahseden matematikçi Euler'dir. Daha sonra 1834 yılında John Scott Russell, durgun suda aniden hareket eden bir cismin yarattığı dalgaları incelemiştir. Dalgaların hızında bir azalma olmadığını ve herhangi bir biçim değişikliğine uğramadığını fark etmiştir. Dalgaların deniz kıyısına kadar azalmadan, yüzeyde devam ettiğini gözlemlemiştir. Russel gözlemlerinden sonra bir deney yapmaya karar vererek şu sonuçlara ulaşmıştır:

1) Bu tek dalgalar (solitary waves) kararlıdır ve şekillerini değiştirmeden çok büyük mesafeler kat edebilirler, sudaki dalgaların sıklıkla yaptığı gibi genlikleri azalmaz veya kırılmazlar.

2) Dalganın hızı, dalganın yüksekliğine bağlıdır.

3) Bu dalgalar süperpozisyona (superposition) uymuyor. Daha uzun (hızlı) bir dalga, daha kısa (yavaş) bir dalgayı geçtiğinde bunlar birleşip toplanmazlar.

Russel çeşitli çalışma ve deneyler sonucunda g yerçekimi ivmesi , h sonlu derinlik, d dalganın genliği ve v ise dalganın yayılım hızı olmak üzere;

$$v = \sqrt{g(h+d)}$$

bağıntısını öne sürmüştür. Russell, tüm su dalgalarını 'büyük birincil çeviri dalgası' (tek dalga şeklinde adlandırılan dalgalar) ve ikinci veya salınım sırasına ait olan dalgalar' olmak üzere iki sınıfa ayırmıştır ve tek dalgalara daha büyük önem vererek araştırmaya değer bulmuştur (Helal, MA ,2002).

1871'de Boussinesq ve 1876'da Rayleigh tarafından ilk kez tek su yığınlarının varlığını belirten matematiksel teori sunulmuştur. Bu teori, Diederik Johannes Korteweg ve doktora öğrencisi olan Gustav de Vries tarafından 1985'te "solitonlar" (solitons) denilen dalgaları tanımlamak için kullanılan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin ve çözümlerinin bir ifadesidir. Bu denklem, sığ suyun serbest yüzeyinde dalgaların bir yönde yayılması için türetilen, günümüzde de oldukça önemli evrim denklemlerinden biri olan Korteweg-de Vries (Kdv) denklemidir (Russell, D. A.,2014) .

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

şeklinde verilen denklem, Korteweg-de Vries (Kdv) denklemidir. Korteweg-de Vries denklemi zayıf nonlinear dalgalar ile ilgili çalışmalarda oldukça önemli bir denklem olmuştur.

Optik soliton teorisi, soliton yayılımının araştırılması ve incelenmesi için lineer olmayan optik fiberler yardımıyla üzerinde çalışılan ve oldukça önemli bir yere sahip bir teoridir.

Solitonların optik fiberler yoluyla yayılması, araştırmacılar için önemli bir araştırma alanı olmuştur. Optik solitonlar ile ilgili yapılan çalışmalarda sürekli olarak yeni sonuçlar elde edilmektedir. Optik solitonlar teorisi ile ilgili en önemli konulardan biri, üzerinde çalışılan denklemin bütünleştirilebilirliğidir. Bu denklemi sayısal olarak çözebilecek birkaç sayısal şema vardır, ancak solitonların özelliklerinin analitik çalışması için kapalı formda kesin bir çözüme gereksinim duyulmaktadır. Solitonların dinamiklerini tanımlayan denklemlerin, bütünleştirilebilirliği için faydalanılan birçok yöntem vardır (Biswas, A. 2009).

Son yıllarda optik soliter dalgalar, (zamansal ve uzaysal solitonlar) yoğun çalışma ve araştırmalara konu olmuştur. Solitonlar, ışık yoğunluğu dağılımının neden olduğu bir malzemenin kırılma indisindeki lineer olmayan bir değişikliğinden meydana gelir. Buradaki kırılmanın lineer olmayışı ve darbe dağılımının (zamansal solitonlar durumunda) veya ışın kırınımının (uzaysal solitonlar durumunda) birleşik etkileri birbirini tam olarak telafi ettiğinde, darbe veya ışın şekil değişikliği olmadan yayılır ve kendi kendine hapsolur. Genellikle, optik fiberlerde soliton oluşumundan sorumlu lineer olmayan etkiler ışık yoğunluğuyla doğru orantılı olarak yerel bir indeks değişikliğine neden olur (Optik Kerr) . Burada, darbe evrimini yöneten parlak solitonlar ve koyu solitonlar olmak üzere iki farklı türü olan temel lineer olmayan denklem olan kübik lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi önemlidir. Bu iki dalga türü, genel bir yerelleştirilmiş çözümler ailesinin iki üyesi olarak ifade edilir. İki tür yalnız dalga birbirlerinden oldukça farklıdır. Optik fiberlerde gözlenen zamansal solitonlar, grup hız dağılımının yaklaşık 1,3 μm dalga uzunluğunda kaybolmaktadır ve daha büyük dalga uzunluklarında pozitif ve daha kısa olanlarda ise negatiftir. Sonuç olarak, silika optik fiberler her zaman pozitif bir Kerr katsayısına sahiptir. Silica optik fiberler ilk durumda karanlık ve ikinci durumda parlak olmak üzere iki farklı soliton türünü destekler. Benzer durum kendinden kılavuzlu kirişler veya uzamsal optik solitonlar için de ortaya çıkar. Burada kırınım, zamansal alandaki dağılmaya benzer bir etki verir, ancak lineer olmayanlık, kendi kendine odaklanan lineer olmayan ortam için pozitif veya kendi kendine odaklanan ortam için ise negatif olabilir. Bu yine sırasıyla parlak ve karanlık olmak üzere iki farklı soliton türüne yol açar (Kivshar, YS ve Luther-Davies, B.,1998).

Literatürde dalga hareketleri ile ilgili birçok veri ve çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların, lineer olmayan sistemler ile birlikte çözülmesi daha karmaşık problemler ortaya çıkarmıştır. Bu alanda ilk çalışmalar Riemann ve Stokes tarafından ele alınmıştır. Son yıllarda hiperbolik ve dağıtıcı dalgalar (non hyperbolic waves) olan iki tür dalga davranışı üzerine çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalarda matematiksel olarak, hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hiperbolik dalga davranışı ifade edilmiştir. Klein-Gordon denklemi, hiperbolik dalga denkleminin temel dayanağı olarak gösterilmiştir (Kurt,2019).

Bazı problemlerin çözümlerini elde edebilmek ve bu çözümleri yorumlayabilmek için bazı yaklaşım ve matematiksel modellerden yararlanılmaktadır. Örneğin; Haydut dalgalar da denilen topak–soliton çözeltilerinin elde edilmesi için Kundu Mukherjee-Naskar (KMN) modelinden yararlanılır (Rezazadeh, H., Kurt, A., Tozar, A., Tasbozan, O., Mirhosseini-Alizamini, S. M.,2021).

3. FONKSİYONEL DEĞİŞKEN (FUNCTIONAL VARIABLE) YÖNTEMİ

Klasik yöntemler ile yapılan çalışmalardan yararlanılarak, lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümlerine ulaşmak her zaman için etkin ve kolay bir yol olmayabilir. Bu nedenle birçok araştırmacı tarafından lineer olmayan evrim denklemlerinin analitik veya yarı analitik çözümlerini elde edebilmek için çeşitli yöntem ve teknikler geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında lineer olmayan (nonlinear) kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden biri olan fonksiyonel değişken yöntemi (functional variable method) ele alınmıştır. Fonksiyonel değişken yöntemi, (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denkleminlerinin birinci formuna ve yarı lineer Klein-Gordon denklemine (quasilinear Klein-Gordon equation) uygulanmıştır. Ayrıca lineer olmayan bazı evrim denklemlerinden elde edilen yeni çözüm fonksiyonlarının 3D grafikleri ve 2D grafikleri Mathematica ile çizdirilmiş, elde edilen çözümlerin doğruluğu sağlanmıştır. Ek olarak bu bölümde fonksiyonel değişken yöntemi uygulanan WBBM denkleminin, çeşitli yöntemler uygulanarak da elde edilen farklı çözüm fonksiyonları incelenmiştir ve çözümlerin dalga tipleri karşılaştırılmıştır.

Fonksiyonel değişken (functional variable) yöntemi ilk kez (A. Zerarka et al., 2010) ile arkadaşlarının ele aldığı, lineer veya lineer olmayan dalga denklem sınıflarını çözmek için önerilen bir yöntemdir. Bu yöntem ile, lineer olmayan problemlerin lineer yöntemler ile çözülmesi amaçlanır. Fonksiyonel değişken yöntemi; soliton benzeri dalgalar (soliton-like waves), siyah solitonlar (black solitons) veya bükülme çözeltileri (kink solutions), kompaktonlar (compactons) ve kompaktonlar olmayan (noncompactons) çözeltiler gibi kesin çözümler elde etmek için yararlanılan bir yöntemdir.

Nonlinear evrim (evolution) denklemlerine ait yarı analitik (semi-analytical) çözümleri araştırmak amacıyla aşağıda verilen üç adım uygulanır.

Lineer olmayan bilinen bir evrim denklemi, bağımsız değişkenler yardımı ile ele alındığında;

$$G(u,\ u_x, u_y\ , u_t, u_{xx}\ , u_{yy}, u_{tt,} u_{xy}, u_{xt}\ \ , \ldots) = 0, \tag{3.1}$$

biçimindedir. (3.1) denkleminde G bazı fonksiyonlar olmak üzere $u(x,\ y,\ t)$ alt simgesi kendisi ve kısmi türevlerini ifade etmektedir. Fonksiyonel değişken yönteminin başlıca adımları aşağıda sunulmaktadır (Bekir and San, 2012).

Adım 1. Öncelikle c sabiti sıfırdan farklı bir sabit olacak şekilde,

$$u(\ x, y, t\ ) = u(\xi\ ) \quad \text{ve} \quad \xi = x + \mathrm{y} - ct, \tag{3.2}$$

(3.2)'de verilen dalga dönüşümü ile (3.1) denkleminde verilen lineer olmayan evrim denklemi;

$$P\ (u\ , u_\xi,\ \ u_{\xi\xi}\ \ , u_{\xi\xi\xi}\ , u_{\xi\xi\xi\xi} \ldots) = 0. \tag{3.3}$$

şeklinde adi diferansiyel denklemine indirgenir. Burada P, u(ξ) nin ardışık türevlerini içeren bir polinomdur. Bu ifade;

$$\mathrm{u}_\xi\ = \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\xi}, \mathrm{u}_{\xi\xi}\ \ = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{d}\xi^{\ 2}}, \ldots$$

şeklinde devam etmektedir.

Adım 2. Fonksiyonel bir değişken olarak, bilinmeyen bir fonksiyon $u(\xi\ )$ yi bir dönüşüm olarak kabul edelim:

$$u_\xi\ = F(u). \tag{3.4}$$

u_ξ nin türevleri sırasıyla aşağıda verilmektedir;

$$u_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)',$$

$$u_{\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}(F^2)''\sqrt{F^2}, \tag{3.5}$$

$$u_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{2}[(F^2)''' F^2 + \frac{1}{2}(F^2)''(F^2)'],$$

biçiminde devam etmektedir. Ayrıca ' = d / du şeklinde tanımlanmaktadır.

Adım 3. (3.4) ve (3.5)'de verilen türevli ifadelerden uygun olan (3.3) denkleminde yerine konulduğunda, (3.3) denklemi aşağıdaki verilen adi (ordinary) diferansiyel denklem tipine indirgenir;

$$Q\,(u, F, F', F'', \mathrm{F}''', \ldots) = 0. \tag{3.6}$$

ξ_0 integral sabiti olmak üzere ve (3.6) denklemi, uygulanan integral işlemleri sonrasında F ifadesini sağlar. (3.6) denklemi (3.4) ve (3.5) denklemleri kullanılarak, (3.1) ile verilen denklemin uygun yeni çözümlerinin bulunmasını sağlar.

Fonksiyonel Değişken (Functional Variable) Yönteminin Uygulamaları

Bu bölümde, fonksiyonel değişken (functional variable) yöntemi lineer olmayan evrim denklemlerinden (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) olan denklemlerinin birinci formu ile yarı lineer Klein-Gordon denklemine (quasilinear Klein-Gordon equation) uygulanmış ve yarı analitik çözümler elde edilmiştir. Bu denklemlerden elde edilen yeni çözüm fonksiyonlarının sonuçları değerlendirilmiştir.

3.1 (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) Birinci Denklemine Uygulaması

Fonksiyonel değişken yönteminin uygulanacağı (3+1)-Boyutlu Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin literatürde mevcut modifiye edilmiş Wazwaz-Benjamin -Bona-Mahony (WBBM) denkleminin formları (Wazwaz, A. M., 2017) ve bu denklemler ile ilgili açıklamalar verilmiştir.

Benjamin-Bona- Mahony denklemi (BBM) 1972'de ilk kez Benjamin ve arkadaşları ile birlikte bulduğu bir denklemdir. Korteweg-de Vries denkleminin (KdV) geliştirilmesi ile oluşan BBM denklemi, sıvılarda uzun dalga boylu yüzey dalgalarını, sıkıştırılabilir sıvılarda akustik yerçekimi dalgalarını, soğuk plazmada hidromanyetik dalgaları ve harmonik olmayan kristallerde (anharmonic crystals) ise akustik dalgaları modellemek için kullanılmaktadır (Khorshidi, M., Nadjafikhah, M., Jafari, H., Al Qurashi, M. ,2016). Benjamin-Bona-Mahony denklemi (BBM):

$$u_x + u_t + uu_x - u_{xxt} = 0,$$

olarak ifade edilir. Ayrıca Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin modifikasyonu ile elde edilen modifiye edilmiş Benjamin-Bono-Mahony denklemi (mBBM):

$$u_t + u_x + u^2 u_x + u_{xxt} = 0,$$

olarak yazılabilir. Literatürde bilindiği üzere Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemi ile ilgili modifiye edilmiş farklı denklemleri de mevcuttur. Bu çalışmalara ek olarak BBM denklemleri için üç boyutlu formda yeni bir yapı geliştirilmiştir (Mamun, A. A., An, T., Shahen, N. H. M., Ananna, S. N., Hossain, M. F., & Muazu, T., 2020).

Benjamin-Bona- Mahony denkleminin modifiye edilmiş yeni WBBM denklemleri;

$$u_x + u_t + u^2 u_y - u_{xzt} = 0$$

$$u_y + u_t + u^2 u_x - u_{xyt} = 0 \qquad (3.7)$$

$$u_z + u_t + u^2 u_z - u_{xxt} = 0$$

biçimininde yazılabilir.

Fonksiyonel değişken yöntemi (3.7)'de verilen denklemlerden öncelikle t zamana ve x konuma bağlı değişken olmak üzere (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin -Bona-Mahony (WBBM) denklemi,

$$u_x + u_t + u^2 u_y - u_{xzt} = 0, \qquad (3.8)$$

biçimindeki formuna uygulanacaktır. Burada c_1, c_2 ve ω sıfırdan farklı sabitler olmak üzere, denklem $u^2 u_y$ lineer olmayan değişkeni kapsamaktadır. (3.8) denklemine;

$$u(x, y, z, t) = u(\xi), \quad \xi = kx + c_1 y + c_2 z - \omega t, \qquad (3.9)$$

dalga dönüşümü uygulandığında (3.8);

$$u'(k - \omega) + c_1 u^2 u' - k c_2 \omega u''' = 0, \qquad (3.10)$$

olarak yazılabilir. (3.10) denklemi ξ 'a göre integre edildiğinde;

$$u(k - \omega) + c_1 \frac{u^3}{3} - k c_2 \omega u'' + \xi_0 = 0, \qquad (3.11)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada ξ_0 integral sabitidir.

$$u_\xi = F(u),$$

dönüşümü (3.11) denklemine uygulandığında,

$$(F^2)' = \frac{2(k-\omega)}{kc_2\omega}u + \frac{2c_1}{3kc_2\omega}u^{3,} \tag{3.12}$$

olarak yazılabilir. (3.12) denklemi ise u değişkenine göre integre edilip düzenlendiğinde;

$$F(u) = \sqrt{\frac{c_1}{6kc_2\omega}}u\sqrt{u^2 + \frac{6(k-\omega)}{c_1}}, \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. (3.4) ve (3.13) denklemlerinden ise;

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+\frac{6(k-\omega)}{c_1}}} = \sqrt{\frac{c_1}{6kc_2\omega}}(\xi + \xi_0), \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. (3.14) denkleminde ξ_0 integral sabiti ihmal edilir ve bu denklem integre edilirse aşağıda verilen durum analizleri incelenir:

Durum 1. $\frac{6(k-\omega)}{c_1} = 0$ olması koşulunda $c_1 \neq 0$ ve $\omega = k$ için;

$$u(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{c_1}{6kc_2\omega}}\ (\xi + \xi_0)}, \tag{3.15}$$

olarak yazılabilir. $\xi = kx + c_1y + c_2z - \omega t$ dönüşümü ile (3.15) ile verilen denkleminden elde edilen dalga çözümü;

$$u_{11}(x, y, z, t) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{c_1}{6kc_2\omega}}(kx + c_1y + c_2z - \omega t + \xi_0)}, \tag{3.16}$$

biçimindedir.

(3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denklemine fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında birinci durumda elde edilen çözüm fonksiyonu bir dalga yapısı oluşturmaz.

Durum 2. $\frac{6(k-\omega)}{c_1} > 0$ olması koşulunda $c_1 > 0$ ve $\omega < k$ incelendiğinde;

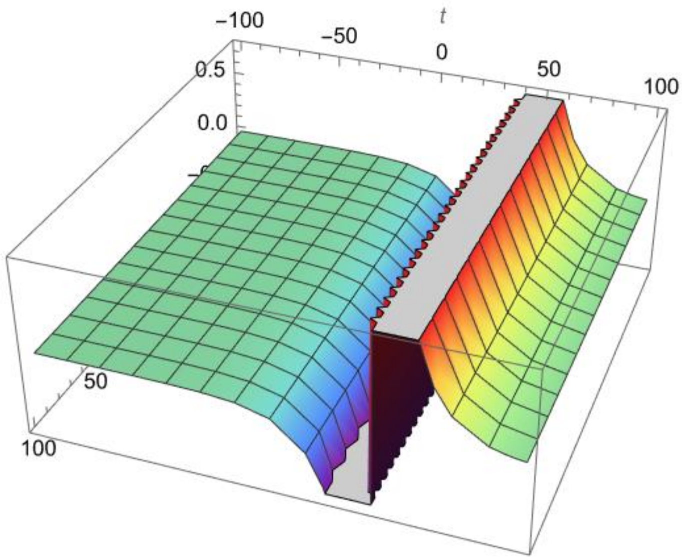
$$u\,(\,\xi\,) = \sqrt{6}\sqrt{\frac{k-\omega}{c_1}}csch\left[-\sqrt{\frac{k-\omega}{kc_2\omega}}(\xi+\xi_0)\right], \tag{3.17}$$

denklemi elde edilir. $\xi = kx + c_1y + c_2z - \omega t$ dönüşümü ile (3.17) denkleminin dalga çözümü;

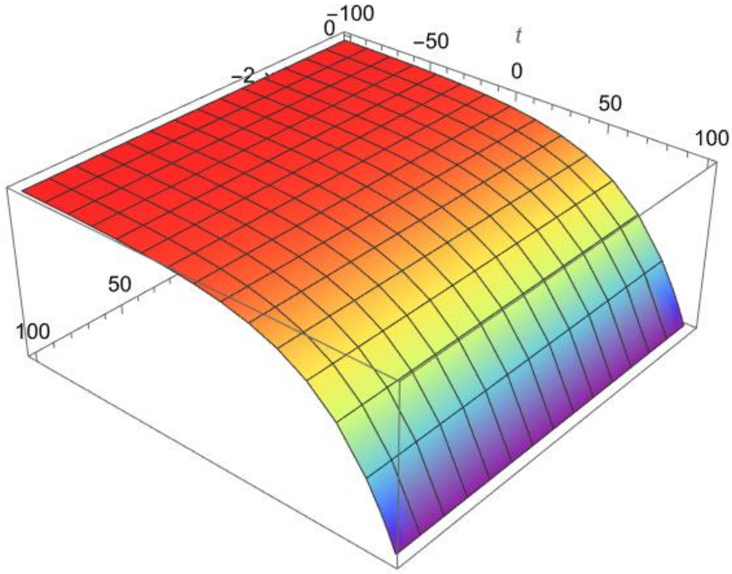
$$u_{12}(x,y,z,t) = \sqrt{6}\sqrt{\frac{k-\omega}{c_1}}csch\left[-\sqrt{\frac{k-\omega}{kc_2\omega}}(kx + c_1y + c_2z - \omega t + \xi_0)\right], \tag{3.18}$$

olarak yazılabilir.

(3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denklemine fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında ikinci durum için elde edilen yeni çözümlerin üç boyutlu grafikleri Mathematica yardımıyla çizdirilmiştir.



Şekil 3.1 (3.18) çözümünde $c_1 = 1.58, c_2 = -0.11, \omega = -0.08, k = 0.41$ için 3D grafik



Şekil 3.2 (3.18) çözümünde $c_1 = 1.1, c_2 = -0.11, \omega = -0.03, k = 1.53$ için 3D grafik

Şekil 3.1 (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denkleminin u_{12} çözümünün dalga yapısını ifade etmektedir. (3.18) çözümünün grafiği incelendiğinde, hiperbolik dalga çözümü biçiminde olduğu görülür.

Durum 3. $\frac{6(k-\omega)}{c_1} < 0$ olması koşulunda $c_1 > 0$ ve k $< \omega$ için;

$$u(\xi) = \sqrt{6}\sqrt{\frac{k-\omega}{c_1}} sec\left[\sqrt{\frac{k-\omega}{kc_2\omega}}(\xi + \xi_0)\right], \tag{3.19}$$

çözümü elde edilir. $\xi = kx + c_1y + c_2z - \omega t$ dönüşümü için (3.19) denkleminin dalga çözümü;

$$u_{13}(x,y,z,t) = \sqrt{6}\sqrt{\frac{k-\omega}{c_1}} sec\left[\sqrt{\frac{k-\omega}{kc_2\omega}}(kx + c_1y + c_2z - \omega t + \xi_0)\right], \tag{3.20}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denklemine fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında üçüncü durumda elde edilen çözüm fonksiyonu bir dalga yapısı oluşturmaz.

3.1.1 Fonksiyonel Değişken Yöntemi ve Farklı Yöntemler ile Elde Edilen Çözümlerin Karşılaştırılması

(3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin -Bona-Mahony (WBBM) denklemlerinin birinci formu olan;

$$u_x + u_t + u^2 u_y - u_{xzt} = 0\,, \tag{3.21}$$

denklemine fonksiyonel değişken yöntemi uygulanarak farklı yeni çözümler elde edilmiştir. Ayrıca modifiye edilmiş Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony denkleminin (3.21) ile verilen formuna farklı yöntemler de uygulanarak, bu denklemin uygun yeni çözümleri elde edilmiştir.

Burada (3.21) denklemine uygulanan fonksiyonel değişken yönteminden elde edilen yeni çözümler ile çeşitli yöntemlerden elde edilen farklı çözümlerin dalga tipleri ifade edilecek ve karşılaştırılacaktır.

3.1.1.1 Sech/csch Yöntemi, Sec/csc Yöntemi, Tanh/coth Yöntemi, Tan/cot Yöntemi ile Elde Edilen Çözümlerin Karşılaştırılması

Öncelikle (3.21) ile verilen denklem formuna; sech/csch yöntemi, tanh/coth yöntemi, sec/csc yöntemi ve tan/cot yöntemleri Wazwaz tarafından uygulanarak, elde edilen farklı yeni çözümler aşağıda verilmektedir (Wazwaz, A. M.,2017).

(3+1)-boyutlu WBBM denklemlerinden;

$$u_x + u_t + u^2 u_y - u_{xzt} = 0$$

denklemi ele alınmıştır. Burada k,s,r ve ω sıfırdan farklı sabitler olmak üzere;

$$\xi = kx + ry + sz - \omega t, \tag{3.22}$$

dönüşümü (3.21) denklemine aşağıda verilen yöntemler ile uygulanmıştır.

Sech/csch yöntemi uygulandığında;

(3.23) ile verilen denklemde R ve M parametreler olmak üzere;

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, sech^{M}(kx + ry + sz - \omega t), \tag{3.23}$$

şeklinde bir çözüm kabul edilir. Denge yöntemi (balance method) kullanılarak, çözümlerin yalnızca $M = 1$ için olduğu ifade edilir. Buradan;

$$\omega = \frac{k}{1-ks}, ks \neq 1,$$

$$R = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{6rs}{1-ks}},$$

sabitleri elde edilir ve (3.23)'de yerine yazılır ise;

$$u_{14}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{6rs}{1-ks}}\, sech\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1-ks}t\right), \frac{rs}{1-ks} > 0, \tag{3.24}$$

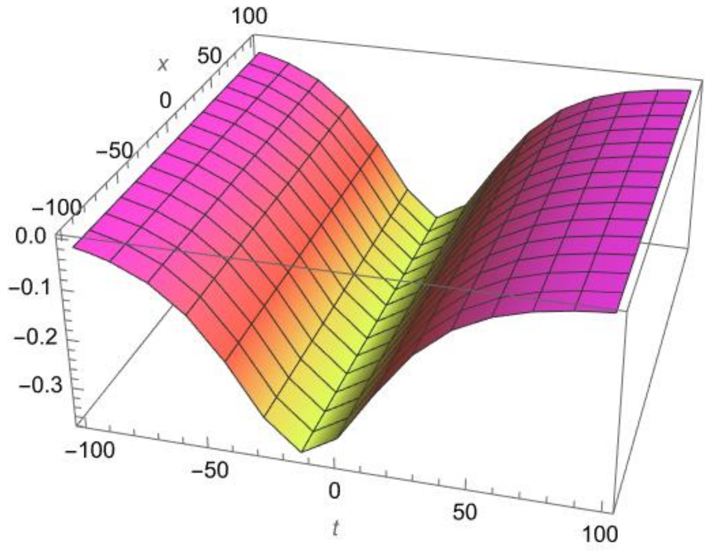
çözümü elde edilir. Ayrıca,

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, csch(kx + ry + sz - \omega t),$$

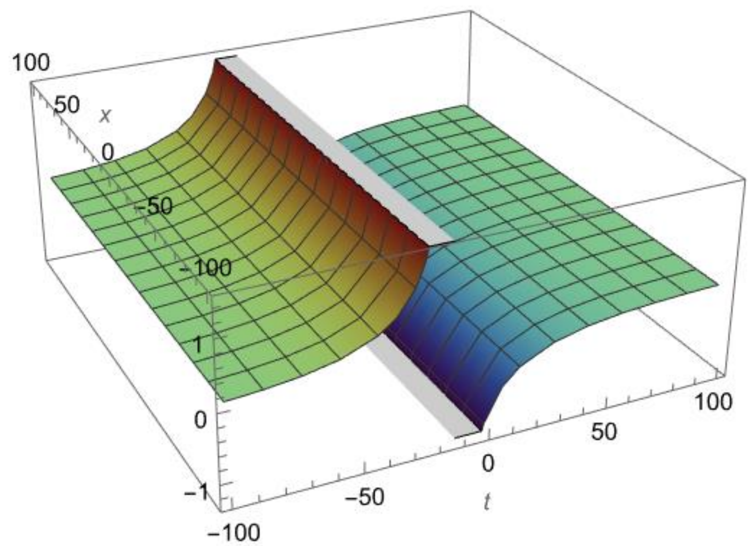
şeklinde bir çözüm olduğu kabul edilirse;

$$u_{15}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{6rs}{ks-1}}\, csch\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1-ks}t\right), \frac{rs}{ks-1} > 0, \tag{3.25}$$

çözümü elde edilir.



Şekil 3.3 (3.24) çözümünde $k = 0.04,\ r = -0.04,\ s = -0.5$ için 3D grafik



Şekil 3.4 (3.25) çözümünde $k = 0.04, r = 0.61,\ s = -1.14$ için 3D grafik

(3.24)'de verilen çözüm bell shaped (çan seklinde) bir soliton çözeltisidir, (3.25)'deki çözüm ise tekil çözüm (singular solution) dür.

Tanh/coth yöntemi uygulandığında;

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, tanh\,(kx + ry + sz - \omega t),$$

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, coth\,(kx + ry + sz - \omega t),$$

şeklinde çözümler kabul edilir ve;

$$\omega = \frac{k}{1+2ks},$$

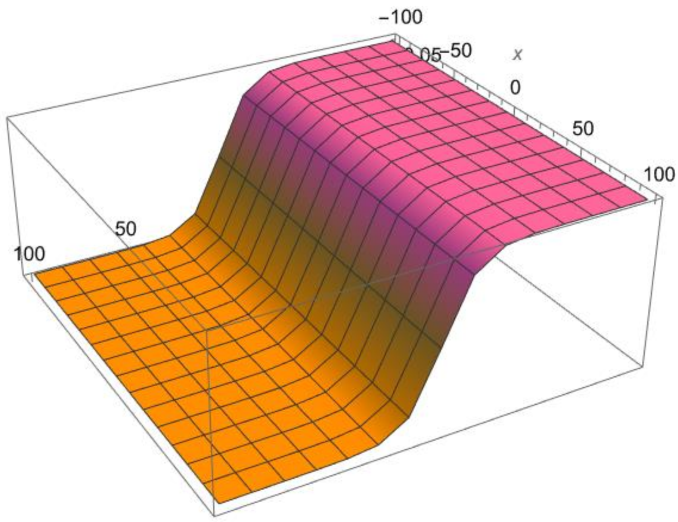
$$R = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}, \frac{-6rs}{1+2ks} < 0,$$

sabitleri bulunur. Buradan elde edilen çözümler;

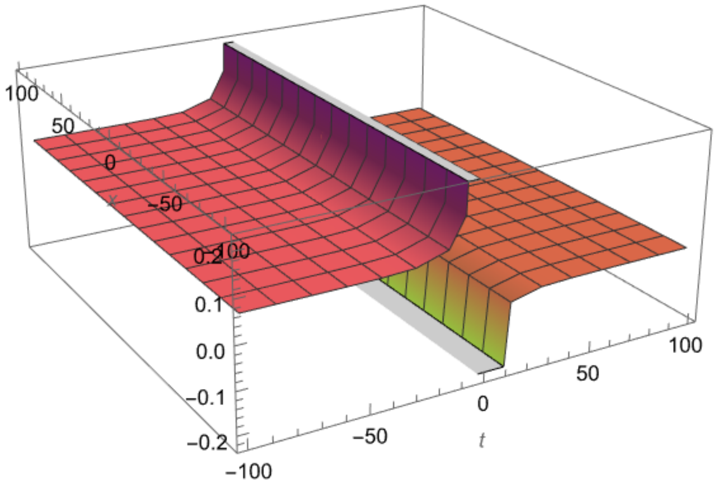
$$u_{16}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}\ tanh\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1+2ks}t\right), \qquad (3.26)$$

$$u_{17}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}\ coth\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1+2ks}t\right), \frac{k}{1+2ks} < 0, \quad (3.27)$$

biçimindedir.



Şekil 3.5 (3.26) çözümünde $k = -0.065,\ r = 0.115,\ s = -0.02$ için 3D grafik



Şekil 3.6 (3.27) çözümünde $k = -0.06,\ r = 0.125,\ s = -0.015$ için 3D grafik

(3.26)’de bulunan çözümün dalga tipi kink (bükülme) dalga yapısındadır, (3.27)’de ise çözüm tekil çözüm (singular solution) biçimindedir.

Sec/csc yöntemi uygulandığında;

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, sec\, (kx + ry + sz - \omega t),$$

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, csc\, (kx + ry + sz - \omega t)$$

biçiminde çözümler kabul edilir ve;

$$\omega = \frac{k}{1+2ks},$$

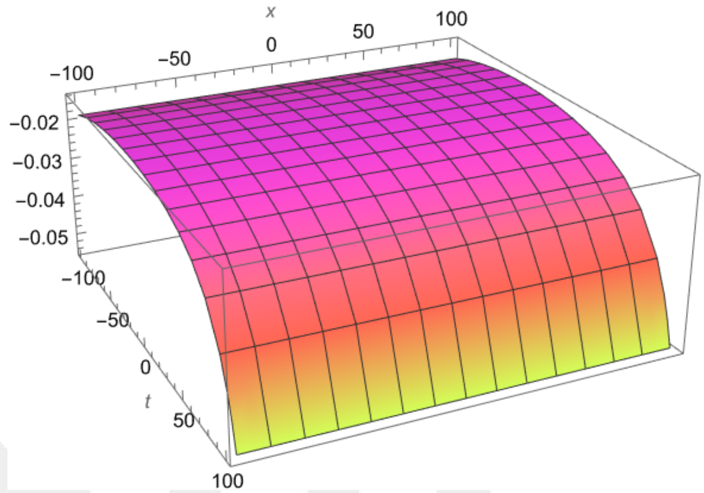
$$R = \pm \frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}, \frac{-6rs}{1+2ks} < 0,$$

sabitleri bulunur. Buradan elde edilen çözümler;

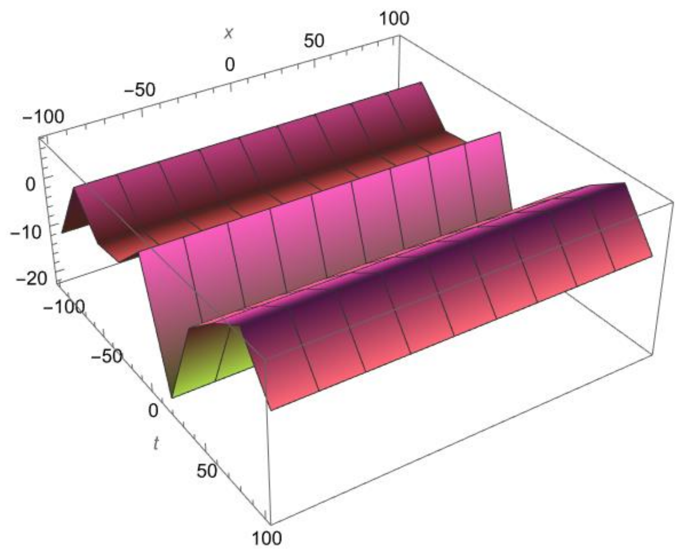
$$u_{18}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm \frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}\ sec\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1+2ks}t\right), \frac{6rs}{1+2ks} < 0, \quad (3.28)$$

$$u_{19}(x,\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1+2ks}}\,csc\left(kx+ry+sz-\frac{k}{1+2ks}t\right), \frac{rs}{1+2ks}<0, \quad (3.29)$$

şeklindedir.



Şekil 3.7 (3.28) çözümünde $k = 0.01,\ r = -0.485,\ s = 0.165$ için 3D grafik



Şekil 3.8 (3.29) çözümünde $k = 0.72,\ r = -0.51,\ s = 0.665$ için 3D grafik

(3.29)’de elde edilen çözüm tekil çözüm (singular solution) biçimindedir.

Tan/cot yöntemi uygulandığında;

$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, tan\,(kx + ry + sz - \omega t),$$

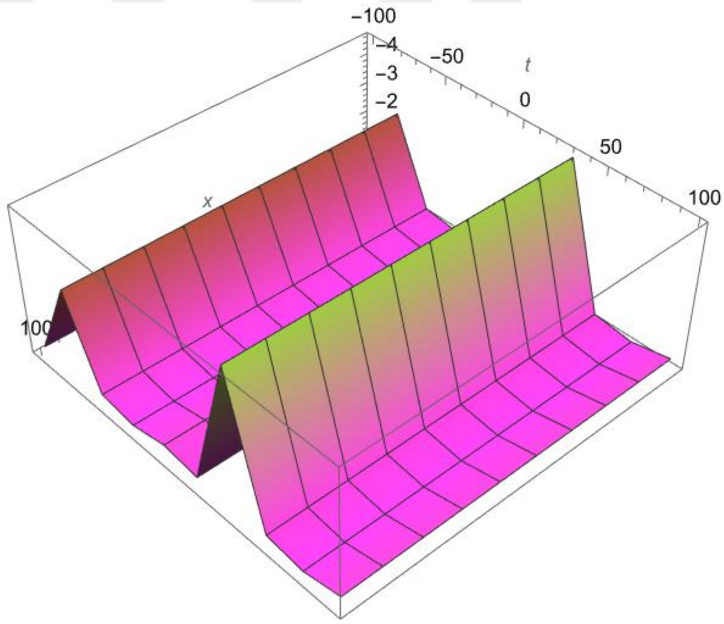
$$u(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \mathrm{R}\, cot\,(kx + ry + sz - \omega t)$$

biçiminde çözümler olduğu kabul edilir. Buradan elde edilen çözümler;

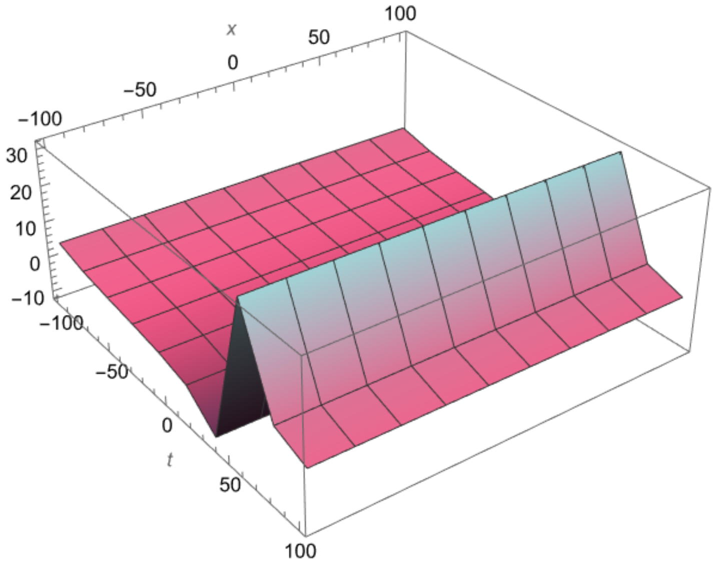
$$u_{1_{10}}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1-2ks}}\, tan\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1-2ks}t\right), \frac{rs}{1-2ks} < 0, \quad (3.30)$$

$$u_{1_{11}}(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \pm\frac{k}{r}\sqrt{\frac{-6rs}{1-2ks}}\, cot\left(kx + ry + sz - \frac{k}{1-2ks}t\right), \frac{rs}{1-2ks} < 0, \quad (3.31)$$

şeklindedir.



Şekil 3.9 (3.30) çözümünde $k = -0.055$, $r = -0465$, $s = 0.23$ için 3D grafik



Şekil 3.10 (3.31) çözümünde $k = 0.435,\ r = -0.125,\ s = 0.52$ için 3D grafik

(3.30)'de elde edilen çözüm periyodik çözüm, (3.31)'de ise çözüm tam çözüm (exact solution) biçimindedir.

3.1.1.2 Sardar-subequation Yöntemi ile Elde Edilen Çözümlerin Karşılaştırılması

Bu kısımda ise Sardar-subequation yöntemi ve (3+1)-boyutlu WBBM denklemlerinden;

$$u_x + u_t + u^2 u_y - u_{xzt} = 0,$$

denklemine uygulanması ile elde edilen yeni çözümler gösterilecektir (Rezazadeh, H., Inc, M., & Baleanu, D., 2020).

Sardar-subequation yöntemi için lineer olmayan bir evrim denklemi, bağımsız değişkenler yardımı ile ele alındığında;

$$G(u,\ u_t, u_x\ , u_t, u_{tt,} u_{xx}, \ldots) = 0, \tag{3.32}$$

biçimindedir. $u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere G, u ve u'nun kısmi türevlerini ifade eden bir polinom olsun. $c \neq 0$ olmak üzere;

$$u(x,t) = u(\xi) \text{ ve } \xi = k - ct,$$

şeklinde bir dalga dönüşümü ile (3.30) denklemi;

$$P\,(u, u_{\xi}, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \ldots) = 0, \tag{3.33}$$

şeklinde adi diferansiyel denklemine indirgenir. Burada P, u(ξ) nin ardışık türevlerini içeren bir polinomdur. (3.33) denkleminin çözümü;

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{s} \varpi_i \beta^i(\xi), \tag{3.34}$$

şeklinde ϖ_i' ler $(i = 0,1,\ldots,s)$ ve $\varpi_i \neq 0$ olmak üzere $\beta(\xi)$ sabitleri ile tanımlanan bir seri toplamıdır.

$$\left(\beta'(\xi)\right)^2 = \rho + a\beta^2(\xi) + \beta^4(\xi), \tag{3.35}$$

a ve ρ gerçel sabitler olacak şekilde adi diferansiyel denkleme indirgenir. Adi diferansiyel denklemin çözümleri;

Durum 1. $a > 0$ ve $\rho = 0$ ise;

$$\beta_1(\xi) = \pm\sqrt{-\rho q a}\, sech_{\rho q}\left(\sqrt{a}\,\xi\right),$$

$$\beta_2(\xi) = \pm\sqrt{\rho q a}\, csch_{\rho q}\left(\sqrt{a}\,\xi\right),$$

$$sech_{\rho q}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{\xi} + q e^{-\xi}},\ csch_{\rho q}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{\xi} - q e^{-\xi}}.$$

Durum 2. $a < 0$ ve $\rho = 0$ ise;

$$\beta_3(\xi) = \pm\sqrt{-\rho q a}\, sec_{\rho q}\left(\sqrt{-a}\,\xi\right),$$

$$\beta_4(\xi) = \pm\sqrt{\rho q a}\, csc_{\rho q}\left(\sqrt{-a}\,\xi\right),$$

$$sec_{\rho q}(\xi) = \frac{2}{\rho e^{i\xi}+qe^{-i\xi}},\ csc_{\rho q}(\xi) = \frac{2i}{\rho e^{i\xi}-qe^{-i\xi}}.$$

biçiminde ifade edilir. Sardar-subequation yönteminde adi diferansiyel denklemin çözümleri dört durumda incelenir ancak bu tez çalışmasında çözümlerin karşılaştırması amacıyla iki durum ele alınır.

Öncelikle k, λ, μ ve c sabitleri sıfırdan farklı olacak şekilde,

$$u(x,y,z,t) = u(\xi)\ \text{ ve }\ \xi = kx + \lambda y + \mu z - ct, \tag{3.36}$$

(3.36)'de verilen dalga dönüşümü (3.21)'de verilen WBBM denklemine uygulandığında;

$$u'(k-c) + \lambda u^2 u' + k\mu c u''' = 0, \tag{3.37}$$

olarak yazılabilir. (3.37) denklemi ξ 'a göre integre edildiğinde;

$$u(k-c) + \frac{\lambda}{3}u^3 + k\mu c u'' + \xi_0 = 0, \tag{3.38}$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada ξ_0 integral sabitidir. (3.39) denklemi;

$$u\alpha_1 + \alpha_2 u^3 + u'' = 0, \tag{3.39}$$

biçiminde ifade edilir. Buradan;

$$\alpha_1 = \frac{k-c}{k\mu c}\ \text{ ve }\ \alpha_2 = \frac{\lambda}{3k\mu c}\ , \tag{3.40}$$

elde edilir. Daha sonra (3.39) denkleminde u ile u'' dengelenerek $s = 1$ alındığında;

$$u(\xi) = \varpi_0 + \varpi_1 \beta(\xi), \tag{3.41}$$

$$\varpi_0 = 0, \varpi_1 = \pm\sqrt{-\frac{2}{\alpha}}, a = -\alpha_1, \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.40) değerleri (3.42)'da yerine yazıldığında;

$$\varpi_0 = 0, \varpi_1 = \pm\sqrt{-\frac{6k\mu c}{\alpha}}, a = \frac{c-k}{k\mu c}, \tag{3.43}$$

değerleri bulunur. Burada iki durumda çözümleri inceleyeceğiz;

Durum 1. $\frac{c-k}{k\mu c} > 0$ ve $\rho = 0$ ise;

$$u_{1_{12}} = \pm\sqrt{\frac{6\rho k(c-k)}{\lambda}} sech_{\rho k}\left(\sqrt{\frac{c-k}{k\mu c}}(kx + \lambda y + \mu z - ct)\right), \tag{3.44}$$

$$u_{1_{13}} = \pm\sqrt{-\frac{6\rho k(c-k)}{\lambda}} csch_{\rho k}\left(\sqrt{\frac{c-k}{k\mu c}}(kx + \lambda y + \mu z - ct)\right), \tag{3.45}$$

çözümleri ifade edilir.

Durum 2. $\frac{c-k}{k\mu c} < 0$ ve $\rho = 0$ ise;

$$u_{1_{14}} = \pm\sqrt{\frac{6\rho k(c-k)}{\lambda}} sec_{\rho k}\left(\sqrt{\frac{c-k}{k\mu c}}(kx + \lambda y + \mu z - ct)\right), \tag{3.46}$$

$$u_{1_{15}} = \pm\sqrt{\frac{6\rho k(c-k)}{\lambda}} csc_{\rho k}\left(\sqrt{\frac{c-k}{k\mu c}}(kx + \lambda y + \mu z - ct)\right), \tag{3.47}$$

çözümleri ifade edilir.

3.2 Fonksiyonel Değişken Yöntemi Yarı Lineer Klein-Gordon Denklemine (Quasilinear Klein-Gordon Equation) Uygulaması

Bu bölümde fonksiyonel değişken yönteminin uygulanacağı bir diğer denklemin, literatürde yer alan bazı formları ve ilgili açıklamaları verilmiştir. 1926'da Fock, Schrödinger, Klein ve de Broglie'nin yer aldığı fizik alanının bazı araştırmacıları, Schrödinger denkleminin göreli bir genelleştirilmiş bir formu olarak Klein-Gordon denklemini ifade etmişlerdir. İlk versiyonların çoğunda, Klein-Gordon denklemi genel görelilik teorisi (general theory of relativity) ile bağlantılıdır (Kragh, H.,1984).

Klein-Gordon denkleminden, matematiksel fizik ve çeşitli uygulamalı bilimlerde sıklıkla yararlanılır. Klein-Gordon denklemi solitonların ve yoğun madde fiziğinin incelenmesinde (Caudrey, PJ, Eilbeck, JC ve Gibbon, JD,1975) , çarpışmasız (collisionless) bir plazmada solitonların etkileşiminin araştırılmasında ve lineer olmayan dalga denklemlerinin incelenmesi gibi pek çok durumda kullanılan bir denklemdir. Klein-Gordon denklemi;

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma u - \beta u^2 = 0$$

ve lineer olmayan Klein-Gordon denklemi;

$$u_{tt} - au_{xx} + bu - ku^n = 0$$

biçiminde ifade edilmektedir. t zamana ve x konuma bağlı değişken olmak üzere yarı lineer Klein-Gordon denklemi;

$$u_{tt} - au_{xx} + bu - ku^3 = 0, \tag{3.48}$$

şeklindedir. Bu denkleme $c \neq 0$ olmak üzere;

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - ct, \tag{3.49}$$

dalga dönüşümü uygulanır ise (3.49) denkleminden;

$$u''(c^2 - a) + bu - ku^3 = 0, \tag{3.50}$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir.

$$u_\xi = F(u),$$

dönüşümü elde edilen (3.50) denklemine uygulandığında;

$$(F^2)' = \frac{k}{2(c^2-a)}u^3 - \frac{b}{2(c^2-a)}u, \tag{3.51}$$

olarak yazılabilir. (3.51) denklemi u değişkenine göre düzenlenirse;

$$F(u) = \sqrt{\frac{k}{2(c^2-a)}}\, u \sqrt{u^2 - \frac{2b}{k}}, \tag{3.52}$$

denklemi yazılabilir. (3.4) ve (3.52) denklemlerinden ise;

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - \frac{2b}{k}}} = \sqrt{\frac{k}{2(c^2-a)}}(\xi + \xi_0), \tag{3.53}$$

denklemi elde edilir. Burada ξ_0 integral sabiti olmak üzere ihmal edilir ve (3.53) denklemi integre edilirse aşağıda verilen durum analizleri incelenir:

Durum 1. $\frac{2b}{k} = 0$ olması koşulunda ve $b = 0, k \neq 0$ için;

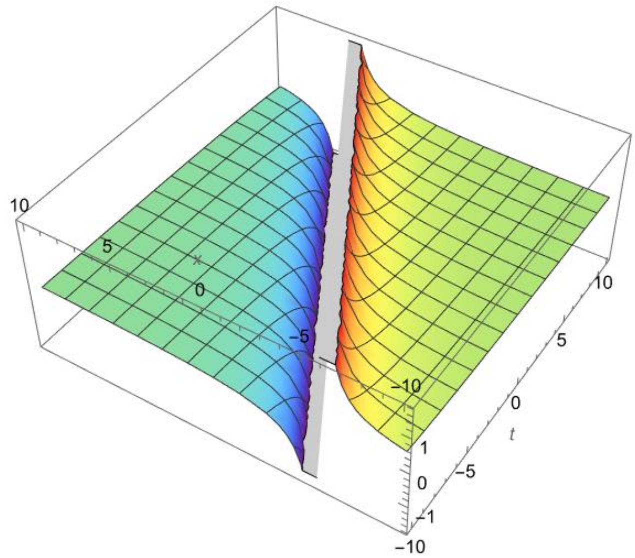
$$u(\xi) = -\sqrt{\frac{2(c^2-a)}{k}} \frac{1}{(\xi + \xi_0)}, \tag{3.54}$$

şeklinde elde edilir. $\xi = x - ct$ dönüşümü için (3.54) denklemi için dalga çözümü;

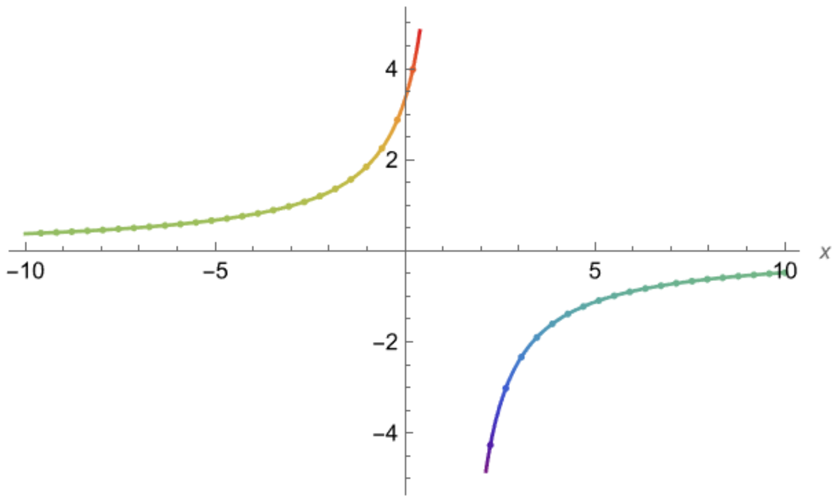
$$u_{21}(x, t) = -\sqrt{\frac{2(c^2-a)}{k}} \frac{1}{(x - ct + \xi_0)}, \tag{3.55}$$

olarak yazılabilir.

Yarı doğrusal Klein-Gordon denklemine (quasilinear Klein-Gordon equation) fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında birinci durum için elde edilen yeni çözümlerin üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yardımıyla çizdirilmiştir.



Şekil 3.11 (3.55) çözümünde $a = 4.24, k = -0.3, c = 1.26$ için 3D grafik



Şekil 3.12 (3.55) çözümünde $a = 4.24, k = -0.3, c = 1.26, t = 1$ için 2D grafik

Şekil 3.13 yarı lineer Klein-Gordon denkleminin u_{21} çözümünün dalga yapısını ifade etmektedir ve (3.55) çözümünün grafiği incelendiğinde, rasyonel dalga çözümü biçiminde olduğu görülür. Şekil 3.14, u_{21} çözümünün iki boyutlu grafiğini göstermektedir.

Durum 2. $\frac{2b}{k} > 0$ olması koşulunda $b > 0, k \neq 0, k > 0$ için;

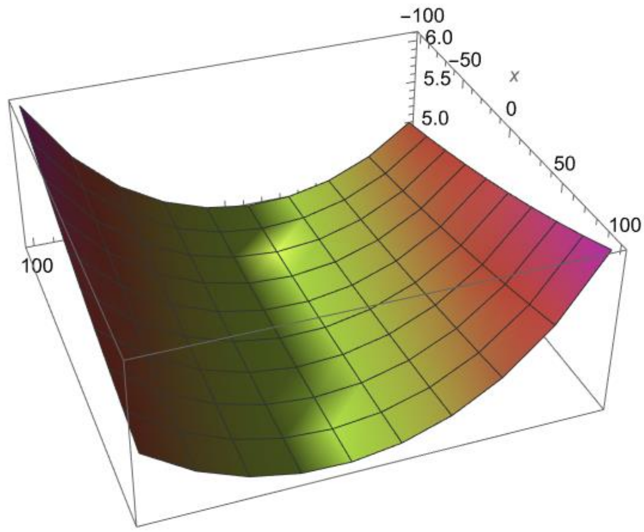
$$u\,(\xi) = -\sqrt{\frac{2b}{k}}\, sec\left[\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}\ (\xi + \xi_0)\right], \tag{3.56}$$

şeklinde çözüm yazılabilir. $\xi = x - ct$ dönüşümü için (3.56) denkleminin dalga çözümü;

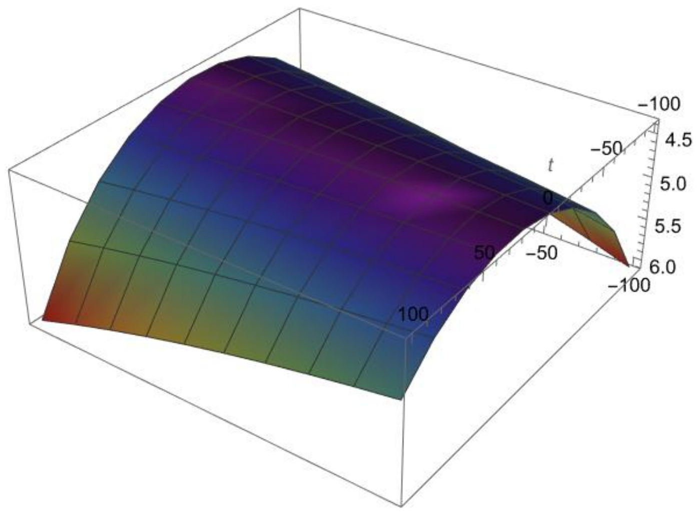
$$u_{22}(x, \mathrm{t}) = -\sqrt{\frac{2b}{k}}\, sec\left[\sqrt{\frac{b}{c^2-a}}\ (x - ct + \xi_0)\right], \tag{3.57}$$

olarak elde edilebilir.

Yarı doğrusal Klein-Gordon denklemine (quasilinear Klein-Gordon equation) fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında ikinci durum için elde edilen yeni çözümlerin üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yardımıyla çizdirilmiştir.



Şekil 3.13 (3.57) çözümünde $a = -0.74, b = 2.58, c = 1.69, k = 0.27$ için 3D için grafik



Şekil 3.14 (3.57) çözümünde $a = -0.74, b = 2.58, c = -1.69, k = 0.27$ için 3D grafik

Şekil 3.15 ile Şekil 3.16 grafikleri incelendiğinde yarı lineer Klein-Gordon denkleminin u_{22} çözümünün dalga yapılarını ifade etmektedir. (3.57) çözümünün grafikleri incelendiğinde, trigonometrik dalga çözümü biçiminde olduğu görülür.

Durum 3. $\frac{2b}{k} < 0$ olması koşulunda $b < 0, k \neq 0$ için;

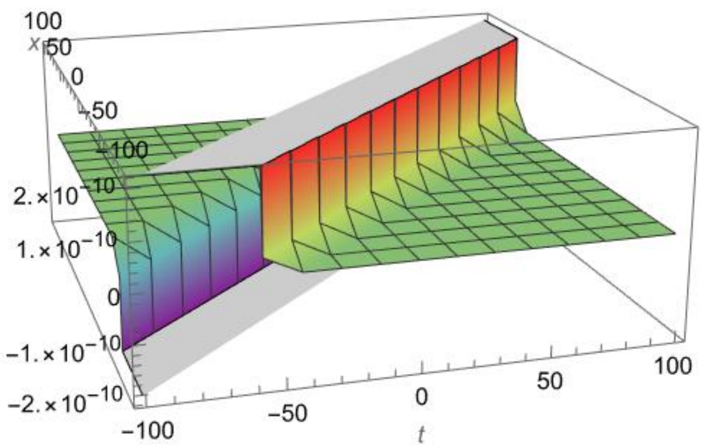
$$u(\xi) = \sqrt{-\frac{2b}{k}}\, csch\left[-\sqrt{-\frac{b}{c^2-a}}\ (\xi + \xi_0)\right], \tag{3.58}$$

elde edilir. $\xi = x - ct$ dönüşümü ile (3.58) denkleminin dalga çözümü;

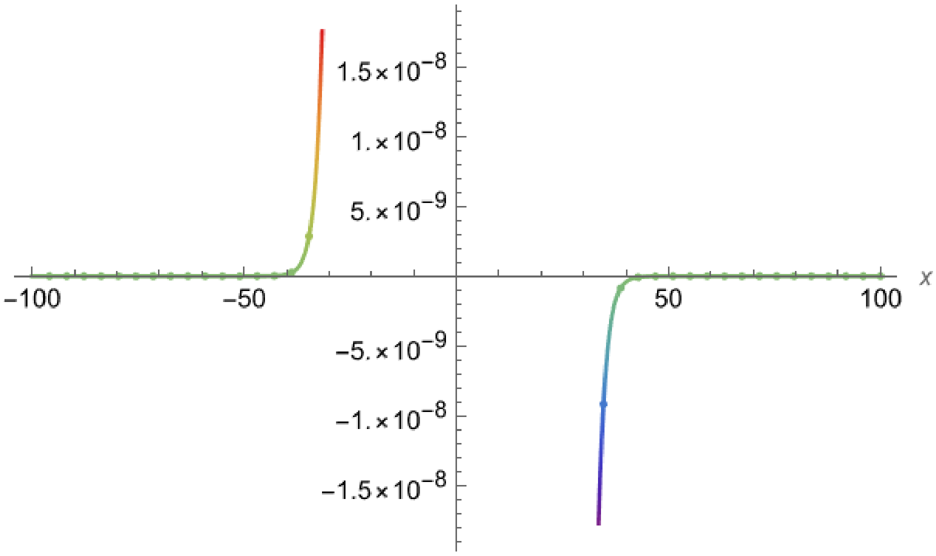
$$u_{23}(x,\mathrm{t}) = \sqrt{-\frac{2b}{k}}\, csch\left[-\sqrt{-\frac{b}{c^2-a}}\ (x - ct + \xi_0)\right], \tag{3.59}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Yarı doğrusal Klein-Gordon denklemine (quasilinear Klein-Gordon equation) fonksiyonel değişken yöntemi uygulandığında üçüncü durum için elde edilen yeni çözümlerin üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yardımıyla çizdirilmiştir.



Şekil 3.15 (3.59) çözümünde $a = -3.38, b = -1.264$ $c = -0.58, k = 1.024$ için 3D grafik



Şekil 3.16 (3.59) çözümünde $a = -3.38, b = -1.264\ c = -0.58, k = 1.024, \mathrm{t} = 1$ için 2D grafik

Şekil 3.17 yarı lineer Klein-Gordon denkleminin u_{23} çözümünün dalga yapısını ifade etmektedir ve (3.59) çözümünün grafiği incelendiğinde, hiperbolik dalga çözümü biçiminde olduğu görülür. Şekil 3.18, u_{23} çözümünün iki boyutlu grafiğini göstermektedir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında fonksiyonel değişken yöntemi lineer olmayan bazı evrim denklemlerine uygulanarak yeni çözümler elde edilmiş ve sonuçlar değerlendirilmiştir. Fonksiyonel değişken yöntemi optik, biyofizik, plazma fiziği, mekanik, kimyasal fizik ve pek çok alanda karşılaşılan gerçek hayat problemleri için kullanılan etkin bir yöntemdir.

Bu tez çalışmasında fonksiyonel değişken yöntemi, (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denkleminin birinci formuna ve yarı lineer Klein-Gordon denklemine uygulanmıştır. Elde edilen yeni çözüm fonksiyonlarının, Mathematica yardımıyla üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri çizdirilmiştir. Bulunan çözümlerin denklemlerin gerçekten bir çözümü olup olmadığı incelenmiş ve elde edilen yeni çözümlerin doğruluğu orijinal denklemde yerine konularak sağlanmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında (3+1)-Boyutlu Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony (WBBM) denkleminin birinci formuna uygulanan çeşitli yöntemler araştırılmış ve bulunan çözüm fonksiyonları ile dalga tipleri incelenip karşılaştırılmıştır.

Bazı lineer olmayan evrim denklemlerin çözümlerinin bulunması için uygulanan fonksiyonel değişken yöntemi, çözüm fonksiyonlarının dalga tipleri hakkında bilgi veren etkin yöntemdir. Lineer olmayan evrim denklemleri ile ilgili geliştirilen yöntemler yarı analitik çözümlere ulaşmak açısından önemli bir etkiye sahiptir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Plastino, A., 2017, Entropic aspects of nonlinear partial differential equations: Classical and Quantum mechanical perspectives. Entropy , 19(4), 166.

Noor, M. A., Noor, K. I., Waheed, A., & Al-Said, E. A., 2011 , Some new solitonary solutions of the Modified Benjamin–Bona–Mahony equation. Computers & Mathematics with Applications, 62(4), 2126-2131.

Kragh, H., 1984 , Equation with the many fathers. The Klein–Gordon equation in 1926. *American Journal of Physics*, *52* (11), 1024-1033.

Roubíček, T., 2013, *Nonlinear partial differential equations with applications* (Vol. 153). Springer Science & Business Media.

Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A., 1991, Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University Press, Cambridge.

Wazwaz, A. M., 2017, Exact soliton and kink solutions for new (3+ 1)-dimensional nonlinear modified equations of wave propagation. Open Engineering, 7(1), 169-174.

Pinchover, Y., Rubinstein, J., 2005, An Intoduction to Partial Differential Equations.

Zerarka, A., Ouamane, S., & Attaf, A., 2010, On the functional variable method for finding exact solutions to a class of wave equations. *Applied Mathematics and Computation*, *217*(7), 2897-2904.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rezazadeh, H., Kurt, A., Tozar, A., Tasbozan, O., Mirhosseini-Alizamini, S. M., 2021, Wave behaviors of Kundu–Mukherjee–Naskar model arising in optical fiber communication systems with complex structure. Optical and Quantum Electronics, 53, 1-11.

Russell, D. A., 2014, Acoustics and vibration animations. Graduate Program in Acoustics, The Pennysylvania State University.

Biswas, A., 2009, 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation. *Physics Letters A*, *373*(30), 2546-2548.

Ross, S. L., 2004, Differential Equations, John Wiley and Sons, Canada, 808p.

Sezer, M., & Daşcıoğlu, A., 2010, Diferansiyel denklemler I. *Bursa: Dora Yayınları*.

Mirzazadeh, M., Eslami, M., & Biswas, A., 2014, Soliton solutions of the generalized Klein–Gordon equation by using\left (G^ ′ G\right) G′ G-expansion method. *Computational and Applied Mathematics*, *33*, 831-839.

Chatterjee, P., Saha, D., Wazwaz, A. M., & Raut, S., 2023, Explicit solutions of the Schamel–KdV equation employing Darboux transformation. *Pramana*, *97*(4), 172

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Güner, Ö., Bekir, A., & Cevikel, A. C., 2013, Dark soliton and periodic wave solutions of nonlinear evolution equations. *Advances in Difference Equations*, *2013*(1), 1-11.

Mirzazadeh, M., 2014, Modified simple equation method and its applications to nonlinear partial differential equations. *Information Sciences Letters*, *3*(1), 1.

Tandogan, Y. A., Pandir, Y., & Gurefe, Y., 2013, Solutions of the nonlinear differential equations by use of modified Kudryashov method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, *2013*.

Khorshidi, M., Nadjafikhah, M., Jafari, H., & Al Qurashi, M., 2016, Reductions and conservation laws for BBM and modified BBM equations. *Open Mathematics*, *14*(1), 1138-1148.

El-Sayed, S. M., 2003, The decomposition method for studying the Klein–Gordon equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, *18*(5), 1025-1030.

Helal, M. A., 2002, Soliton solution of some nonlinear partial differential equations and its applications in fluid mechanics. *Chaos, Solitons & Fractals*, *13*(9), 1917-1929.

Kivshar, Y. S., & Luther-Davies, B., 1998, Dark optical solitons: physics and applications. *Physics reports*, *298*(2-3), 81-197.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Mamun, A. A., An, T., Shahen, N. H. M., Ananna, S. N., Hossain, M. F., & Muazu, T., 2020, Exact and explicit travelling-wave solutions to the family of new 3D fractional WBBM equations in mathematical physics. *Results in Physics*, *19*, 103517.

Hirota, R., 1971, Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons. *Physical Review Letters*, *27*(18), 1192.

Bleecker, D., 2018, *Basic partial differential equations*. Chapman and Hall/CRC.

Bekir, A., and San, S., 2012, The Functional Variable Method to Some Complex Nonlinear Evolution Equations, *Journal of Modern Mathematics Frontier*, Vol. 1, Iss. 3, 5-9 pp

Caudrey, P. J., Eilbeck, J. C., & Gibbon, J. D., 1975, The sine-Gordon equation as a model classical field theory. *Il Nuovo Cimento B*, *25*(2), 497-512.

Rezazadeh, H., Inc, M., & Baleanu, D., 2020, New solitary wave solutions for variants of (3+ 1)-dimensional Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony equations. *Frontiers in Physics*, *8*, 332.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma sürecinde bilgisi, tecrübesi ve desteği ile her zaman yanımda olan, öğrencisi olduğum için onur duyduğum değerli hocam Prof. Dr. Emine MISIRLI’ ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Ayrıca hayatımın her noktasında daima desteği ile yanımda olan kıymetli annem Berrin KIZILDAN’a ve beni cesaretlendirip başarılarımda payı olan canım babam Pınar KIZILDAN’a sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

13 / 12 / 2023

İmzası

Irmak KIZILDAN

ÖZGEÇMİŞ

Irmak KIZILDAN, lise öğrenimini Edirne Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lise öğreniminin ardından 2015 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi'nde Matematik Bölümü'ne başladı. 2020 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı'ndan mezun oldu. 2020 yılında ise Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı.