

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

Mürüvvet Tuva ERBAŞ

Danışman: Doç. Dr. Erbil ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Yüksek Lisans Programı

Bornova-İzmir
2023

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E  Lisansüstü Eğitim ve  đretim Yönetmeliđinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIğI ÜZERİNE” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığımı, bu tezin herhangi bir bölümünü bu  niversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

29/12/2023

 mzası

Mürüvvet Tuva ERBAş

ÖZET

KESİRLİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

ERBAŞ, Mürüvvet Tuva

YÜKSEK LİSANS TEZİ, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Erbil ÇETİN

Tarih, 39 sayfa

Bu tez, esas olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde, tez konusu hakkında daha önce yapılan araştırma ve çalışmalarla ilgili kısaca bilgi verilmiştir. Bu çalışmalar ışığında tezin konusu tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, tezin devamında kullanılacak olan temel tanım, lemma ve teoremler hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, p -Laplasyen ψ -Caputo kesirli türevli diferansiyel denklem, çok noktalı sınır koşullarıyla birlikte ele alınmış, çözümün genel yapısı incelemeye integral denklem olarak ifade edilmiş ve Banach ve Schaefer sabit nokta teoremleri kullanılarak p -Laplasyen ψ -Caputo kesirli sınır değer probleminin varlık ve teklik sonuçları gösterilmiştir. Daha sonra bulduğumuz sonuçları destekleyen birer örnek verilmiştir.

Son bölümde ise, bu çalışmada elde edilen bilgilere ait bir sonuç verilmiştir.

Anahtar sözcükler: ψ -Caputo kesirli türev, sınır değer problemi, p -Laplasyen operatörü, Banach sabit nokta teoremi, Schaefer sabit nokta teoremi.

ABSTRACT

ON EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR FRACTIONAL
DERIVATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

ERBAŞ, Mürüvvet Tuva

MSc. in Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Erbil ÇETİN

Tarih, 39 pages

This thesis mainly consists of four chapters. In the first chapter, information about the detailed investigations and studies carried out on the subject of the thesis study is given and the results of these are introduced.

In the second chapter, the basic definitions, lemmas and theorems that will be used in the rest of the thesis are given.

In the third section, the p -Laplacian ψ -Caputo fractional derivative differential equation is considered together with multipoint boundary conditions, the general structure of the solution is examined. Then using the Banach and Schaefer fixed point theorems, uniqueness and the existence of the p -Laplacian ψ -Caputo fractional boundary value problem is shown. Then, two examples are given to support the results we found.

The last section includes the conclusion section.

Keywords: ψ -Caputo fractional derivative, boundary value problem, p -Laplacian operator, Banach fixed point theorem, Schaefer fixed point theorem.

ÖNSÖZ

“Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı Üzerine” adlı çalışmamda tez konusunu belirlerken, Yüksek Lisans ders döneminde aldığım bazı dersler, Doç. Dr. Erbil ÇETİN hocamla incelediğimiz ve üzerinde çalışmalar yaptığımız kesirli türevli diferansiyel denklemleri içeren çeşitli makaleler ve önceden çalışılmış olan kesirli türevli diferansiyel denklemlerdeki sınır değer problemleri üzerine yapılan bazı araştırmalar belirleyici olmuştur. Son zamanlarda yaygın olarak kullanılan tam sayı dereceden diferansiyel denklemler yerine, mühendislik ve fizik alanları başta olmak üzere eczacılık, psikoloji, ekonomi, jeoloji ve pek çok bilim dallarını çok daha iyi açıkladığı anlaşılan kesirli diferansiyel denklemlere önem verilmeye başlanmış ve ilgilenen araştırmacıların araştırmalarında geniş popülerlik kazanmıştır. Bu tez konusunu belirlerken hedefimiz bu alandaki çalışmalara katkı yapmak ve elde ettiğimiz sonuçları literatüre kazandırmaktır. Bu amaçla ψ -Caputo kesirli türev ve ψ -Riemann-Liouville kesirli integral tanımları göz önünde bulundurularak bu kavramlardaki kesirli operatörler üzerinde yapılan çalışmalar incelenmiştir. Ardından, p -Laplasyen operatörlü ψ -Caputo kesirli türevi içeren çok noktalı sınır değer problemi üzerinde çalışılarak integral denklem olarak ifade edilmiş daha sonra çözümün varlık ve teklik sonuçlarına ulaşılmıştır. Ulaşılan sonuçları destekleyen örnekler verilerek tez sonlandırılmıştır.

İZMİR

29/12/2023

Mürüvvet Tuva Erbaş

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK	ii
KABUL VE ONAY SAYFASI	iii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	v
ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
ÖNSÖZ	xi
İÇİNDEKİLER	xiii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
2.1 TANIM ve LEMMALAR	6
2.2 TEOREMLER	13
3 p -LAPLASYEN OPERATÖRÜLÜ ψ -CAPUTO KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ	14
3.1 SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	14
3.2 SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMASI	16
4 SONUÇ	32
KAYNAKLAR DİZİNİ	33
TEŞEKKÜR	38
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	0'ı içeren doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
Γ	Gamma fonksiyonu
ϕ_p	p -Laplasyen
$C(X, X)$	$X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonlar uzayı
$C([a, b])$	$[a, b]$ aralığındaki reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^n[a, b]$	n 'inci mertebeye kadar $[a, b]$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$D_{a^+}^{\alpha, \psi}$	α 'ncı mertebeden kesirli ψ -Riemann-Liouville türevi
${}^C D_{a^+}^{\alpha, \psi}$	α 'ncı mertebeden kesirli ψ -Caputo türevi
$I_{a^+}^{\alpha, \psi}$	α 'ncı mertebeden kesirli ψ -Riemann-Liouville integrali
$\ x\ $	x 'in normu
$\in$	Elemanıdır sembolü

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\notin$	Elemanı değildir sembolü
∞	Sonsuz
$\int$	İntegral sembolü



1 GİRİŞ

Kesirli analiz çalışmaları, 1695 yılında l'Hôpital'in yazdığı bir mektupta Leibniz'e; "Tam sayı mertebeli türevler, tam sayı olmayana genellenebilir mi?" sorusunu sormasıyla ve buna Leibniz'in; "Bu, bir gün yararlı sonuçların ortaya çıkacağı bir paradoksa yol açacak." cevabını vermesiyle başlamış, günümüzde de devam etmektedir. Aslında bu konu için "Keyfi Mertebeden Türev ve İntegral" ifadesi daha uygun olsa da, l'Hôpital'den günümüze kadar "Kesirli Analiz" olarak adlandırılmaya devam edilmektedir.

Kesirli analizle ilgili çalışmalar, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Heaviside, Laplace, Lagrange, Euler, Grünwald, Hardy, Sigmund, Courant ve Leitnikov gibi pek çok matematikçinin katkılarıyla büyük bir hız kazanmıştır. Ancak kesirli analiz, anlaşılması zor ve karmaşık bir konu olduğundan, modern matematikte anlamlı ve uygulanabilir bir başarının elde edilebilmesi, geçtiğimiz yüzyıl içinde gerçekleşebilmiştir.

Yaklaşık 300 yıldır araştırılmakta olan kesirli analiz için kesirli analizin temel tanım ve metotlarını içeren kitaplar, ilk olarak 1974 yılında Oldham ve Spanier, daha sonra 1993 yılında Miller-Ross ve Samko-Kilbas-Marichev, ardından da 1999 yılında Podlubny tarafından yazılmıştır. 1974 yılında Amerikadaki New Haven üniversitesinde Bernard-Ross tarafından verilen ilk uluslararası konferansla birlikte kesirli analiz çok büyük bir gelişme göstermiş ve günümüze kadar çeşitli ülkelerde belli aralıklarla verilen diğer konferanslarla gelişim göstermeye devam etmiştir. Bunlardan biri de 2004 yılında başlayan ve düzenli olarak iki yılda bir Automatic Control Federasyonu (IFAC) tarafından "Fractional Differentiation and Application" adıyla verilen konferanslardır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin gerçek dünyaya ait problemlerin doğasını, fizik ve mühendislik bilimleri gibi bir çok araştırma alanında yaygın olarak kullanılan tam sayılı dereceden diferansiyel denklemlere göre çok daha iyi açıkladığı anlaşıncaya, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüne ve uygulan-

masına yönelik daha güvenilir, etkin ve anlaşılır metotlar aranmıştır.

Kesirli diferansiyel denklemler, sadece fizik ve mühendislik alanlarında değil aynı zamanda finans ve sismoloji gibi bilim dallarında da çok fazla uygulama alanına sahiptir (Celik et al., 2012), (Gorial, 2011), (Jafari et al., 2006). Bu denklemler, çalışacağımız uzayın değişkenliğine ve zamana göre çözülebilir (Karatay et al., 2011), (Su et al., 2009), (Tadjeran et al., 2006). Ayrıca kesirli diferansiyel denklemler, malzeme teorisi, taşıma süreçleri, depremler, elektrokimyasal süreçler, dalga yayılımı, sinyal teorisi, elektromanyetik teori, termodinamik, mekanik, jeoloji, astrofizik, ekonomi, kontrol teorisi, fizik, aerodinamik, biyoloji, kimya vb. farklı alanlarda da sıkça kullanılır (Agarwal et al., 2011), (Baleanu et al., 2015), (Baleanu et al., 2015), (Caputo, 1967), (Diethelm, 2010), (Mainardi, 1997), (Podlubny, 1999), (Hilfer, 2001), (Oldham, 2010), (Sabatier et al., 2007), (Tarasov, 2010), (Vivek et al., 2022), (Verma et al., 2022), (Pskhu et al., 2023).

Kesirli analiz (Samko et al., 1993) ise tam sayılı olmayan türevleri ve integralleri dikkate alarak tam sayı dereceli analizi genelleştirir ve fizik, kimya, biyoloji, ekonomi, sinyal ve görüntü gibi uygulamalı bilimler ve mühendisliğin işleme, varyasyon hesabı, kontrol teorisi, elektrokimya, elektrik ağları gibi çeşitli alanlarında birçok uygulama bulmuştur. Kesirli türevle ilgili farklı tanımlar arasında en çok kullanılanları, Riemann-Liouville (Kilbas et al., 2006), Caputo (Agarwal et al., 2016), Hadamard (Agarwal et al., 2016), Erdelyi-Kober (Luchko et al., 2007) ve Hilfer (Hilfer, 2000)'a ait olanlardır. Son zamanlarda Almeida (Almeida, 2017), Caputo, Caputo-Hadamard gibi kesirli türevlerin diğer geniş bir sınıfını genelleştiren ψ -Caputo kesirli türevlerini ortaya koymuştur.

Kesirli diferansiyel denklemler, çeşitli alanlardaki uygulamaları sayesinde birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve çeşitli kesirli diferansiyel denklem sınıflarının çözümlerinin varlığı hakkında birçok ilginç sonuç elde edilmesine neden olmuştur. İki noktalı, üç noktalı ve m noktalı sınır değer problemlerinin

pozitif çözümleri incelenerek, birçok diferansiyel ve dinamik denklem için farklı sabit nokta teoremlerinden faydalanılır. Böylece, çok sayıda sınır koşullu kesirli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemleri için çözümlere veya pozitif çözümlerinin varlığına odaklanılır. Tüm bunlarla birlikte, fiziksel modelleri en doğru şekilde ifade etmesi ve en hatasız sonuçları vermesinden dolayı bilimsel çalışmalar arasında, p -Laplasyen operatörlü kesirli diferansiyel denklemlerden de sıkça yararlanılmaktadır. Bu tezde ortaya koyduğumuz gibi, p -Laplasyen operatörlü kesirli diferansiyel denklemler, çok noktalı sınır değer problem çalışmalarında varlık ve teklik sonuçlarını elde etmek için çok fazla kullanılır (Agarwal et al., 2007)(Chai, 2011)(Chen et al., 2012)(Chang et al., 2013)(Liang et al., 2012)(Wang et al., 2010).

2022 yılında Ali El Mfadel, Said Melliani ve M'hamed Elomari (Mfadel et al., 2022) tarafından yazılan makalede;

$$\begin{aligned} \left(\phi_p \left({}^C D_{0+}^{\varrho, \psi} \nu(m) \right) \right)' &= g(m, \nu(m)), \quad m \in [0, K], \\ \nu(0) &= \sigma_1 \nu(K), \\ \nu'(0) &= \sigma_2 \nu'(K), \end{aligned}$$

p -Laplasyen ψ -Caputo kesirli diferansiyel denklemi ele alınmıştır. Burada ${}^C D_{0+}^{\varrho, \psi}$, $\varrho \in (1, 2)$ mertebeli ψ -Caputo kesirli türev ve $K > 0$ 'dır. Ele alınan bu problemde ϕ_p , $p - 1 > 0$ için $\phi_p(m) = m^{p-1}$ olmak üzere p -Laplasyen operatörüdür. Banach sabit nokta teoremi kullanılarak p -Laplasyen kesirli diferansiyel denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini ispat etmişler, çalışmalarını bir örnek ile tamamlamışlardır.

Zindane Baitiche, Choukri Derbazi ve Mouffak Benchohra (Baitiche et al., 2020) tarafından yazılan makalede, aşağıdaki ψ -Caputo kesirli çok noktalı sınır

değer problemini incelemişlerdir.

$$\begin{aligned} {}^C D_{0+}^{\gamma, \psi} v(n) + g(n, v(n)) &= 0, \quad n \in [a, b], \\ v(a) &= v'(a) = 0, \\ v(b) &= \sum_{i=1}^j \delta_i v(\varepsilon_i), \quad a < \varepsilon_i < b, \end{aligned}$$

burada ${}^C D_{a+}^{\gamma, \psi}$, $2 < \gamma \leq 3$ mertebeli ψ -Caputo kesirli türev, $g : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı sürekli bir fonksiyon ve $a < \varepsilon_i < b$, $i = 1, 2, \dots, j$ dir. Ayrıca, δ_i , $i = 1, 2, \dots, j$ aşağıdaki Δ eşitliğini

$$\Delta = \sum_{i=1}^j \delta_i (\psi(\varepsilon_i) - \psi(a))^2 - (\psi(s) - \psi(a))^2 \neq 0$$

sağlayan gerçek sabitlerdir. Burada Banach sabit nokta teoremi uygulanarak çözümlerin varlık ve tekliği ispat edilmiş, çalışma iki örnekle tamamlanmıştır.

Bu tezde,

$$\left(\phi_p \left({}^C D_{T_0+}^{\alpha, \psi} \omega(m) \right) \right)' = \varphi(m, \omega(m)), \quad m \in J = [T_0, T], \quad (1.1)$$

$${}^C D_{T_0+}^{\alpha, \psi} \omega(T_0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\omega^{(k)}(T_0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2, \quad (1.3)$$

$$\omega(T) = \sum_{i=1}^l a_i \omega(\xi_i), \quad T_0 < \xi_i < T, \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (1.4)$$

p -Laplasyen operatörülü ψ -Caputo kesirli türevi içeren sınır değer problemi incelenmiştir (Erbaş et al., 2023). Burada $T > T_0$, ψ fonksiyonu her $m \in [T_0, T]$ için $\psi'(m) \neq 0$ olacak şekilde artan türevlenebilir bir fonksiyon ve ${}^C D_{T_0+}^{\alpha, \psi}$, $\alpha \in (n-1, n]$ mertebeli ψ -Caputo kesirli türevidir. $\varphi : [T_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $n = [\alpha] + 1$ ($[\alpha]$, α 'nın tam değeri) ve $T_0 < \xi_i < T$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ reel sabitlerdir. Ayrıca problemde verilen ϕ Laplasyen, $p > 1$ için $\phi_p(m) = |m|^{p-2}m$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\phi_p^{-1}(m) = \phi_q(m)$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur.

Yukarıda bahsedilen makaleler ışığında, p -Laplasyen ψ -Caputo kesirli türevli diferansiyel denklem (1.1), çok noktalı sınır koşulları (1.2), (1.3) ve (1.4) ile

birlikte ele alınmıştır. Bu tezde, Banach ve Schaefer sabit nokta teoremleri kullanılarak yukarıdaki (1.1)-(1.4) p -Laplasyen ψ -Caputo kesirli sınır değer problemine ait çözümün genel yapısı, varlık ve teklik sonuçları ortaya konulmuştur. Daha sonra bulunan sonuçları destekleyen iki örnek verilmiştir.



2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tezin devamında kullanılacak olan temel tanım, lemma ve teoremlerin ifadeleri verilmiştir.

2.1 TANIM ve LEMMALAR

Burada ψ -Riemann-Liouville kesirli integral, ψ -Caputo kesirli türev gibi kavramlar tanımlanmış ve bu tanımlarda kullanılan Gamma fonksiyonuyla birlikte bazı temel tanım ve özellikler verilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Kilbas et al., 2006) Euler integrali denilen $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$ integraline Gamma fonksiyonu adı verilir ve Γ simgesi ile gösterilir. Gamma fonksiyonu aşağıdaki üç özelliği sağlamaktadır.

- 1) $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$,
- 2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
- 3) $\Gamma(t+1) = t!$, $t \in \mathbb{N}_0$.

Tanım 2.1.2. (Kilbas et al., 2006), (Almeida, 2017) ψ fonksiyonu artan, türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere her $t \in [a, b]$ için $\psi'(t) \neq 0$ olsun. $\alpha > 0$ için integrallenebilir bir $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α 'ncı mertebeden ψ fonksiyonuna göre $I_{a+}^{\alpha, \psi} u$ soldan ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1} u(s) ds \quad (2.1)$$

ile tanımlanır. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur. (2.1) ψ -Riemann-Liouville kesirli integralde, sırasıyla $\psi(t) = t$ ve $\psi(t) = \ln t$ olduğunda Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerine indirgenir.

Bizim tezimizde kullandığımız ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali, Riemann-Liouville ve Hadamard tipi kesirli integralleri genelleyen bir integraldir.

Örnek 2.1.1. $u : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı $u(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden $\psi(t) = t^2 + 1$ fonksiyonuna göre her $t \in [1, 2]$ için ψ -Riemann-Liouville kesirli integralini bulalım.

Burada Tanım 2.1.2 gözüyle bakıldığında

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad u(t) = t^2 \quad \psi(t) = t^2 + 1, \quad \psi'(t) = 2t$$

olur. 2.1 eşitliğinden

$$\begin{aligned} I_{1+}^{\frac{1}{2}, t^2+1}(t^2) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^t 2s (t^2 + 1 - s^2 - 1)^{\frac{1}{2}-1} s^2 ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^t \frac{2s^3}{\sqrt{t^2 - s^2}} ds \end{aligned}$$

elde edilir. $t^2 - s^2 = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{u - t^2}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int \sqrt{u} du - t^2 \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2t^2 u^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

olur. Tekrar u 'nun eşiti yazılır ve integral sınırları uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_{1+}^{\frac{1}{2}, t^2+1}(t^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} \left(\sqrt{t^2 - s^2} \right)^3 - 2t^2 \sqrt{t^2 - s^2} \right) \Big|_1^t \\ &= \frac{2\sqrt{t^2 - 1} (2t^2 + 1)}{3\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.3. (Munkhammar, 2004) Her $t \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için integrallenebilir bir $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α 'ncı mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} u(s) ds$$

ile tanımlanır. Burada Γ , Gamma fonksiyonudur.

Örnek 2.1.2. $u : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı $u(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden her $t \in [1, 2]$ için Riemann-Liouville kesirli integralini bulalım.

Burada Tanım 2.1.3'den $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 2$, $u(t) = t^2$ olup

$$\begin{aligned} I_{1+}^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_1^t (t - s)^{\frac{1}{2}-1} s^2 ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^t \frac{s^2}{\sqrt{t - s}} ds \end{aligned}$$

dir. $t - s = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{-(t-u)^2}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\int \frac{t^2 - 2tu + u^2}{\sqrt{u}} du \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3} t u^{\frac{3}{2}} + 2t^2 u^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

olur. Tekrar u 'nun eşiti yazılır ve integral sınırları uygulanırsa

$$\begin{aligned} I_{1+}^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-2}{5} (t-s)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} t (t-s)^{\frac{3}{2}} - 2t^2 (t-s)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^t \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{t-1} (16t^2 + 8t + 6)}{15} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Yukarıda Örnek 2.1.1 ve Örnek 2.1.2'de gösterildiği üzere, $u(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali

$$\begin{aligned} I_{1+}^{\frac{1}{2}, t^2+1}(t^2) &= \frac{2\sqrt{t^2-1} (2t^2+1)}{3} \text{ iken Riemann-Liouville kesirli integrali} \\ I_{1+}^{\frac{1}{2}}(t^2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{t-1} (16t^2+8t+6)}{15} \right), \text{dir.} \end{aligned}$$

Tanım 2.1.4. (Almeida, 2017) Her $t \in [a, b]$ için $n \in \mathbb{N}$, ψ artan ve $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde $\psi, u \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ iki fonksiyon olsun. α 'ncı mertebeden u fonksiyonunun soldan ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) &= \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{n-\alpha; \psi} u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \psi'(s) (\psi(t) - \psi(s))^{n-\alpha-1} u(s) ds \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n = [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$ olup $[\alpha]$, α 'nın tam değerini ifade etmektedir.

Örnek 2.1.3. $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı $u(t) = t^6$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden $\psi(t) = \frac{t^3-1}{4}$ fonksiyonuna göre her $t \in [0, 1]$ için ψ -Riemann-Liouville kesirli türevini bulalım.

Burada Tanım 2.1.4 gözüyle bakıldığında

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad u(t) = t^6 \quad \psi(t) = \frac{t^3-1}{4}, \quad \psi'(t) = \frac{3t^2}{4}$$

olur. Tanım 2.1.4'den

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\frac{1}{2}, \frac{t^3-1}{4}}(t^6) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{\frac{3t^2}{4}} \frac{d}{dt} \right)^1 \int_0^t \frac{3s^2}{4} \left(\frac{t^3-s^3}{4} \right)^{1-\frac{1}{2}-1} s^6 ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \right)^1 \int_0^t \frac{3s^8}{4} \frac{2}{\sqrt{t^3-s^3}} ds \end{aligned}$$

olur. Burada $\sqrt{t^3-s^3} = u$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \int -(t^3-u^2)^2 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \int -t^6 + 2t^3u^2 - u^4 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \left(-t^6u + 2t^3 \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak, u 'nın eşiti yerine yazılır ve integral sınırları uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\frac{1}{2}, \frac{t^3-1}{4}}(t^6) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \left(-t^6\sqrt{t^3-s^3} + \frac{2}{3}t^3 \left(\sqrt{t^3-s^3} \right)^3 - \frac{\left(\sqrt{t^3-s^3} \right)^5}{5} \Big|_0^t \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \left(t^6\sqrt{t^3} - \frac{2}{3}t^3 \left(\sqrt{t^3} \right)^3 + \frac{\left(\sqrt{t^3} \right)^5}{5} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4}{3t^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{8t^7\sqrt{t}}{15} \right) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$D_{0+}^{\frac{1}{2}, \frac{t^3-1}{4}}(t^6) = \frac{16t^4\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.5. (Labade, 2021) Her $t \in [a, b]$ için $n \in \mathbb{N}$, $u \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ fonksiyon olsun. α 'ncı mertebeden u fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}_aD_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s) ds$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n = [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$ olup $[\alpha]$, α 'nın tam değerini ifade etmektedir.

Örnek 2.1.4. $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı $u(t) = t^6$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden her $t \in [0, 1]$ için Riemann-Liouville kesirli türevini bulalım.

Burada Tanım 2.1.5'den $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $b = 1$, $u(t) = t^6$ olup

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\frac{1}{2}}(t^6) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\frac{1}{2}-1} s^6 ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s^6}{\sqrt{t-s}} ds \end{aligned}$$

dir. Burada $t-s = x$ ve $u = \sqrt{x}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int -2(t-u^2)^6 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int -2(u^{12} - 6u^{10}t + 15u^8t^2 - 20u^6t^3 + 15u^4t^4 - 6u^2t^5 + t^6) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(-\frac{2}{13}u^{13} + \frac{12}{11}u^{11}t - \frac{30}{9}u^9t^2 + \frac{40}{7}u^7t^3 - \frac{30}{5}u^5t^4 + \frac{12}{3}u^3t^5 - 2ut^6 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. u 'nun eşiti yerine yazılırsa

$${}_0D_t^{\frac{1}{2}}(t^6) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(-\frac{2}{13}x^{\frac{13}{2}} + \frac{12}{11}x^{\frac{11}{2}}t - \frac{30}{9}x^{\frac{9}{2}}t^2 + \frac{40}{7}x^{\frac{7}{2}}t^3 - \frac{30}{5}x^{\frac{5}{2}}t^4 + \frac{12}{3}x^{\frac{3}{2}}t^5 - 2x^{\frac{1}{2}}t^6 \right)$$

dir. Son olarak x 'in eşiti yerine yazılır ve integral sınırları uygulanırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\frac{2048t^6 \sqrt{t}}{3003} \right) \\ &= \frac{1024t^5 \sqrt{t}}{231 \sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Böylelikle

$${}_0D_t^{\frac{1}{2}}(t^6) = \frac{1024t^5 \sqrt{t}}{231 \sqrt{\pi}}$$

dir.

Örnek 2.1.3 ve Örnek 2.1.4'de gösterildiği üzere, $u(t) = t^6$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ 'nci mertebeden ψ -Riemann-Liouville kesirli türevi $D_{0+}^{\frac{1}{2}, \frac{t^3-1}{4}}(t^6) = \frac{16t^4 \sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$ iken Riemann-Liouville kesirli integrali ${}_0D_t^{\frac{1}{2}}(t^6) = \frac{1024t^5 \sqrt{t}}{231 \sqrt{\pi}}$ dir.

Tanım 2.1.6. (Almeida, 2017) Her $t \in [a, b]$ için $n \in \mathbb{N}$, ψ artan ve $\psi'(t) \neq 0$ olacak şekilde $\psi, u \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ iki fonksiyon olsun. α 'nci mertebeden u fonksiyonunun soldan ψ -Caputo kesirli türevi

$${}^CD_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = I_{a+}^{n-\alpha, \psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n u(t)$$

ile tanımlanır. Burada $\alpha \notin \mathbb{N}$ için $n = [\alpha] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}$ için $n = \alpha$ olup $[\alpha]$, α 'nın tam değerini ifade etmektedir. Tanımdan açıkça görülüyor ki

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = \begin{cases} \int_a^t \frac{\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} u_{\psi}^{[n]}(s) ds, & , \alpha \notin \mathbb{N}, \\ u_{\psi}^{[n]}(t) & , \alpha \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.2)$$

dır. Burada gösterimi basitleştirmek için kısaltılmış sembol

$$u_{\psi}^{[n]}(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n u(t)$$

kullanılmaktadır. (2.2) eşitliğindeki bu genelleme, $\psi(t) = t$ olduğunda Caputo kesirli türev operatörünü verirken $\psi(t) = \ln t$ olduğunda da Caputo-Hadamard kesirli türevini vermektedir. Eğer $u \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ise u fonksiyonunun α 'ncı mertebeden ψ fonksiyonuna göre ψ -Caputo kesirli türevi

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = D_{a+}^{\alpha, \psi} \left[u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{\psi}^{[k]}(a)}{k!} (\psi(t) - \psi(a))^k \right]$$

ile tanımlanır.

Lemma 2.1.1. (Almeida et al., 2018) Her $t \in [a, b]$ ve $\alpha > 0$ için,

1) Eğer $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ ise

$${}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} I_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = u(t)$$

dir.

2) Eğer $u \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ ve $n - 1 < \alpha < n$ ise

$$I_{a+}^{\alpha, \psi} {}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_{\psi}^{[k]}(a)}{k!} [\psi(t) - \psi(a)]^k$$

dir.

3) Eğer $u \in C^{n-1}([a, b], \mathbb{R})$ ise $I_{a+}^{\alpha, \psi}$ doğrusaldır ve $C([a, b], \mathbb{R})$ den $C([a, b], \mathbb{R})$ ye sınırlıdır.

Lemma 2.1.2. (Chen et al., 2012) $\phi_p(t) = |t|^{p-2}t$ olmak üzere

$\phi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir p -Laplasyen operatörü olsun. Aşağıda bazı temel özellikler verilmiştir.

- 1) Eğer $1 < p < 2$ ve $t \neq 0$ ise $(\phi_p(t))' = (p-1) |t|^{p-2}$ dir.
- 2) Eğer $1 < p < 2$, $th > 0$ ve $|t|, |h| \geq l > 0$ ise

$$| \phi_p(t) - \phi_p(h) | \leq (p-1)l^{p-2} | t - h |$$

dir.

- 3) Eğer $p > 2$ ve $|t|, |h| \leq L$ ise

$$| \phi_p(t) - \phi_p(h) | \leq (p-1)L^{p-2} | t - h |$$

dir.

- 4) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere ϕ_p tersinirdir ve tersi $\phi_p^{-1}(t) = \phi_q(t)$ dir.

Lemma 2.1.3. (Abdo et al., 2019) $\alpha, \beta > 0$ ve $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olsun.

- 1) $I_{a+}^{\alpha, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\alpha+\beta-1}$ dir.
- 2) ${}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta)} [\psi(t) - \psi(a)]^{\beta-\alpha-1}$ dir.
- 3) ${}^C D_{a+}^{\alpha, \psi} [\psi(t) - \psi(a)]^k = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n \in \mathbb{N}$ dir.
- 4) $I_{a+}^{\alpha, \psi} I_{a+}^{\beta, \psi} u(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta, \psi} u(t)$ dir.

Tanım 2.1.7. (Kreyszing, 1978) M, U normlu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer M 'deki her yakınsak dizinin yakınsadığı limiti M içinde ise M 'ye U 'nun kapalı alt kümesi denir.

Tanım 2.1.8. (Conway, 1990) M, U normlu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall t \in M$ için $\|t\| \leq K$ olacak şekilde $\exists K > 0$ sayısı var ise M 'ye sınırlı alt küme denir.

Tanım 2.1.9. (Kreyszing, 1978) M, U normlu vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer M kümesinin elemanlarından oluşan her diziden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa ve yakınsadığı değer M kümesi içinde ise M 'ya kompakt alt küme denir.

Tanım 2.1.10. (Conway, 1990) Z ve T normlu uzaylar olsun. Eğer her $A \subset Z$ sınırlı kümesinin $M : Z \rightarrow T$ operatörü altındaki görüntüsünün kapanışı $\overline{M(A)}$ kompakt ise M operatörüne kompakt operatör denir.

Tanım 2.1.11. (Conway, 1990) Eğer bir operatör sürekli ve kompakt ise bu operatöre tamamen sürekli operatör denir.

Tanım 2.1.12. (Conway, 1990) $(U, ||.||)$ bir Banach uzay ve $P : U \rightarrow U$ bir dönüşüm olsun. $\forall t, s \in U$ için $||Pt - Ps|| \leq l||t - s||, 0 < l < 1$ ise P dönüşümüne daralma dönüşümü denir.

Tanım 2.1.13. (Conway, 1990) $U \subset C[a, b]$ olsun. $\epsilon > 0$ verilsin. $\forall h \in U, \forall t, s \in C[a, b]$ için $|t - s| < \delta \Rightarrow |h(t) - h(s)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunabiliyorsa U fonksiyonlar ailesine aynı dereceden süreklidir denir.

2.2 TEOREMLER

Bu bölümde, tezin 3.2 Sabit Nokta Teoremleri ve Uygulaması bölümünde kullanılacak olan Banach sabit nokta teoremi, Schaefer sabit nokta teoremi ve operatörün tamamen sürekli olduğuna dayandırdığımız Arzela-Ascoli teoremi ifadelerine yer verilmiştir.

Teorem 2.2.1. (Banach, 1922) (Banach Sabit Nokta Teoremi)

U bir Banach uzayı, X kümesi U 'nin boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olduğunu kabul edelim, yani $x, y \in X$ için $||Tx - Ty|| \leq \lambda||x - y||$ olacak şekilde bir λ ($0 < \lambda < 1$) vardır. O halde T, X kümesinde tek bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.2.2. (Schaefer, 1955) (Schaefer Sabit Nokta Teoremi)

U bir Banach uzayı olsun ve $T : U \rightarrow U$ sürekli ve kompakt operatör olsun. Ayrıca $\{u \in U : u = \lambda Tu, \lambda \in (0, 1)\}$ kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. O halde T operatörünün U da sabit bir noktası vardır.

Teorem 2.2.3. (Conway, 1990) (Arzela-Ascoli Teoremi)

Bir $M \subset C[a, b]$ olsun. M 'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul M 'nin kapalı, sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır.

3 p -LAPLASYEN OPERATÖRÜLÜ ψ -CAPUTO KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, Bölüm 2'deki tanım, lemma ve teoremler kullanılarak (1.1)-(1.4) kesirli sınır değer problemine ait çözümünün varlık ve teklik sonuçları Banach ve Schaefer sabit nokta teoremleri kullanılarak incelenmiştir. Aşağıda, bu tez boyunca kullanılacak koşullar verilmiştir:

(H_1) Her $m \in J$ ve $\omega, z \in \mathbb{R}$ için

$$| \varphi(m, \omega) - \varphi(m, z) | \leq t | \omega - z |$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir gerçektek sabit $t > 0$ vardır.

(H_2) Her $(m, \omega) \in J \times \mathbb{R}$ için

$$\varphi(m, \omega) \geq \beta \gamma (m - T_0)^{\gamma-1}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\beta > 0$ ve $0 < \gamma < \frac{2}{2-q}$ gerçektek sabitleri vardır.

(H_3) $\varphi : [T_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve her $(m, \omega) \in J \times \mathbb{R}$ için

$$|\varphi(m, w(m))| \leq t_1 |w|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir t_1 sabiti vardır.

3.1 SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (1.1)-(1.4) sınır değer problemimizin varlık ve teklik sonuçlarını verdiğimiz 3.2 Bölümündeki Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den önce bu teoremlerde kullanılacak olan (1.1)-(1.4) sınır değer problemimizi integral denklem olarak ifade ettiğimiz Lemma 3.1.1 kanıtlanacaktır.

Lemma 3.1.1. $\omega \in C(J, \mathbb{R})$ bir fonksiyon, $\alpha \in (n-1, n]$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ ve $T_0 < \xi_i < T$ olsun. Eğer $(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1} \neq 0$ ise

$\omega(m)$, (1.1)-(1.4) kesirli sınır değer probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \omega(m) = & \frac{\sum_{i=1}^l a_i I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right)}{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1}} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\ & + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m \psi'(\tau) (\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \end{aligned}$$

denkleminin bir çözümünün olmasıdır.

İspat. $\omega(m)$, (1.1) kesirli diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. (1.1) kesirli diferansiyel denklem, T_0 dan T ye integrallenirse

$$\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(m) \right) - \phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(T_0) \right) = \int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds$$

elde edilir. (1.2) sınır koşulundan

$$\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(m) \right) = \int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \quad (3.1)$$

olduğu görülür. p -Laplasyen ϕ_p fonksiyonunun ters fonksiyon ϕ_q koşulundan

$${}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(m) = \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \quad (3.2)$$

olur. (3.2) eşitliğine ψ -kesirli integral $I_{T_0^+}^{\alpha, \psi}$ uygulanırsa

$$I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} {}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(m) = I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right)$$

elde edilir. Lemma 2.1.1 kullanılarak $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \omega(m) = & c_0 + c_1 (\psi(m) - \psi(T_0)) + \dots + c_{n-1} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\ & + I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitliğine ulaşılır. (1.3) sınır koşulu uygulanırsa $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-2} = 0$ bulunur. (3.3) eşitliğinde bulunan $c_0, c_1, \dots, c_{n-2}$ yerine yazılırsa

$$\omega(m) = c_{n-1} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} + I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \quad (3.4)$$

elde edilir ve Tanım 2.1.2 kullanılarak

$$\omega(m) = c_{n-1}(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m \psi'(\tau)(\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir. (1.4) sınır koşulu (3.4) eşitliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l a_i \left(c_{n-1}(\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1} + I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) \\ &= c_{n-1}(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} + I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik tekrar düzenlenirse

$$c_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) - I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right)}{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1}}$$

bulunur. Bulduğumuz c_{n-1} , (3.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \omega(m) &= \frac{\sum_{i=1}^l a_i I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right)}{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1}} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m \psi'(\tau)(\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle ispat tamamlanır.

3.2 SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMASI

Temel sonuçları ele adlıığımız bu bölümde, (1.1)-(1.4) p -Laplasyen kesirli sınır değer probleminin J üzerinde tek çözümünün olduğunu Banach sabit nokta teoremi kullanılarak, en az bir çözümünün olduğunu ise Schaefer sabit nokta teoremi kullanılarak ispatlanmış ve bu sonuçları destekleyen iki tane örnek verilmiştir.

(1.1)-(1.4) p -Laplasyen kesirli sınır değer probleminin J üzerinde tek

çözümünün olduğunu göstermek için

$$w_1 = \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n+\alpha-1}}{|\kappa|\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \sum_{i=1}^l a_i \right) t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}),$$

$$w_2 = \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}).$$

sayılarından yararlanılacaktır.

Teorem 3.2.1. $(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i(\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1} \neq 0$, $p > 2$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ ve $T_0 < \xi_i < T$ olmak üzere (H_1) ve (H_2) koşulları doğru olsun. Eğer $(w_1 + w_2) < 1$ ise (1.1)-(1.4) p -Laplasyen kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat. (H_2) koşulundan her $(m, \omega) \in J \times \mathbb{R}$ için

$$\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \geq \int_{T_0}^m \beta \gamma (s - T_0)^{\gamma-1} ds = \beta(m - T_0)^\gamma$$

eşitsizliği elde edilir.

$\omega, z \in C(J, \mathbb{R})$ olsun. Lemma 2.1.2, (H_1) koşulu ve $0 \leq m^\gamma - T_0^\gamma \leq m^\gamma$ eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\ & \leq (q-1) (\beta(m^\gamma - T_0^\gamma))^{q-2} \left| \int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds - \int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right|, \\ & \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\ & \leq (q-1) (\beta m^\gamma)^{q-2} \int_{T_0}^m |\varphi(s, \omega(s)) - \varphi(s, z(s))| ds, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} & \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\ & \leq (q-1) (\beta m^\gamma)^{q-2} \int_{T_0}^m t \|\omega - z\| ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\
& \leq t(q-1)(\beta m^\gamma)^{q-2}(m - T_0) \|\omega - z\|, \\
& \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\
& \leq t(q-1)\beta^{q-2} (m^{\gamma(q-2)+1} - m^{\gamma(q-2)}T_0) \|\omega - z\|, \\
& \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| \\
& \leq t(q-1)\beta^{q-2} (m^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\|
\end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$A : C(J, \mathbb{R}) \rightarrow C(J, \mathbb{R})$, aşağıdaki gibi tanımlanan operatör olsun:

$$\begin{aligned}
A\omega(m) &= \frac{\sum_{i=1}^l a_i I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right)}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m \psi'(\tau) (\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^\tau \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Burada

$$\kappa = (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1}$$

dir.

Tanım 2.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
A\omega(m) &= \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{\xi_i} \psi'(\tau) (\psi(\xi_i) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^\tau \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right)}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
&- \frac{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^T \psi'(\tau) (\psi(T) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^\tau \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m \psi'(\tau) (\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1} \phi_q \left(\int_{T_0}^\tau \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau
\end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitliği yazılır.

Şimdi A operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu gösterelim.

$\omega, z \in C(J, \mathbb{R})$ olsun,

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
&= \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right. \\
&\quad + \frac{\int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\Gamma(\alpha)} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
&\quad \left. - \frac{\int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau}{\Gamma(\alpha)} \right|
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\psi'(\tau)(\psi(\xi_i) - \psi(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \\
F &= \frac{\psi'(\tau)(\psi(T) - \psi(\tau))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \\
H &= \psi'(\tau)(\psi(m) - \psi(\tau))^{\alpha-1}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
&\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right) - \sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau \right)}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) d\tau \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (H_2) koşulundan

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
& \leq \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) \right) d\tau \right)}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
& + \left| \frac{\int_{T_0}^T F \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
& + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m H \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) \right) d\tau \right|
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
& \leq \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \sum_{i=1}^l a_i \int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| d\tau \\
& + \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \int_{T_0}^T |F| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, z(s)) ds \right) \right| d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\beta > 0$, $0 < \gamma < \frac{2}{2-q}$ olduğundan ve (3.7) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
& \leq \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \sum_{i=1}^l a_i \int_{T_0}^{\xi_i} |D| t(q-1) \beta^{q-2} (\tau^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau \\
& + \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \int_{T_0}^T |F| t(q-1) \beta^{q-2} (\tau^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| t(q-1) \beta^{q-2} (\tau^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau \\
& \leq \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} t(q-1) \beta^{q-2}}{|\kappa|} \sum_{i=1}^l a_i \int_{T_0}^{\xi_i} |D| (T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau \\
& + \frac{(\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} t(q-1) \beta^{q-2}}{|\kappa|} \int_{T_0}^T |F| (T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau \\
& + \frac{t(q-1) \beta^{q-2}}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| (T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m) - Az(m)| \\
& \leq \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \sum_{i=1}^l \frac{a_i(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| \\
& + \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1}}{|\kappa|} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| \\
& + \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| \\
& = \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^{n+\alpha-1}}{|\kappa|\Gamma(\alpha + 1)} \left(1 + \sum_{i=1}^l a_i\right) t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\| \\
& + \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} t(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \|\omega - z\|
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Son olarak

$$\|A\omega - Az\| \leq (w_1 + w_2) \|\omega - z\|$$

elde edilir.

Hipotezden, $w_1 + w_2 < 1$ olduğundan A operatörü bir daralma operatörüdür. Böylece Banach sabit nokta teoremi kullanılarak A operatörümüzün tek bir sabit noktası olduğu söylenebilir ve bu da (1.1)-(1.4) kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü olduğunu gösterir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki ψ -Caputo sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} \left(\phi_{\frac{7}{3}} \left(D_{0+}^{\frac{5}{2}, m^3} \omega(m) \right) \right)' = 4m^3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi \omega(m)}{33} \right) \right), & m \in [0, 1] \\ \omega^{(k)}(0) = 0, & k = 0, 1, \dots, n-2 \\ {}^C D_{0+}^{\frac{5}{2}, m^3} \omega(0) = 0 \\ \omega(1) = \sum_{i=1}^3 \frac{2i-1}{3} \omega \left(\frac{1}{2^i} \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

(3.10) kesirli sınır değer problemine (1.1)-(1.4) gözüyle bakıldığında;

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{5}{2}, \quad T_0 = 0, \quad T = 1, \quad \psi(m) = m^3, \quad p = \frac{7}{3} > 2, \quad n - 1 < \alpha \leq n = 3, \\ a_1 &= \frac{1}{3}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{5}{3}, \quad \xi_1 = \frac{1}{2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{4}, \quad \xi_3 = \frac{1}{8}, \\ \varphi(m, \omega(m)) &= 4m^3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi \omega(m)}{33} \right) \right)\end{aligned}$$

olur. Açıkça görülüyor ki $T_0 < \xi_i < T$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$, $q = \frac{7}{4} < 2$ ve $\omega \in C(J \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ dir.

Problem (3.10)'de φ fonksiyonunun (H_1) koşulunu sağladığını gösterelim.

$m \in [0, 1]$ ve $\omega, z \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}|\varphi(m, \omega(m)) - \varphi(m, z(m))| &= \left| 4m^3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi \omega(m)}{33} \right) \right) - 4m^3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi z(m)}{33} \right) \right) \right| \\ &= \left| 4m^3 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi \omega(m)}{33} \right) \right) - 4m^3 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi z(m)}{33} \right) \right) \right| \\ |\varphi(m, \omega(m)) - \varphi(m, z(m))| &\leq \frac{4\pi m^3}{33} |\omega(m) - z(m)| \\ |\varphi(m, \omega) - \varphi(m, z)| &\leq \frac{4\pi}{33} |\omega - z|\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (H_1) koşulu $t = \frac{4\pi}{33}$ için sağlanır.

Problem (3.10)'de φ fonksiyonunun (H_2) koşulunu sağlandığını gösterelim.

$\beta = 1$, $\gamma = 4$ alırsak, $m \in [0, 1]$ ve $\omega \in \mathbb{R}$ için,

$$\beta \gamma m^3 = 4m^3 \leq 4m^3 \left(1 + \sin^2 \left(\frac{\pi \omega(m)}{33} \right) \right)$$

elde edilir. Böylelikle (H_2) koşulu sağlanır.

Son olarak

$$w_1 + w_2 = 0.4315725 < 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylelikle, Teorem 3.2.1 in tüm koşulları sağlanmıştır. Dolayısıyla (3.10)

p -Laplasien kesirli sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

Teorem 3.2.2. $p > 2$, $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ ve $T_0 < \xi_i < T$ olmak üzere (H_2) ve (H_3) koşulları doğru olsun. Eğer

$$(\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1} \neq 0$$

ise, o zaman (1.1)-(1.4) kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat.

$$P := \{\omega \in C^m[T_0, T] : \left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega \right) \right)' \in C[T_0, T]\} \quad (3.11)$$

kümesini tanımlayalım.

P kümesi (3.11)deki gibi olmak üzere, (3.8) ile tanımlanan $A : P \rightarrow P$ operatörünü ele alalım.

1.Adım: $\left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} (A\omega)(m) \right) \right)'$ sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & \left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} A\omega(m) \right) \right)' = \\ & \left(\phi_p \left(\frac{\sum_{i=1}^l a_i I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^{\xi_i} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^T \varphi(s, \omega(s)) ds \right)}{\kappa} {}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right) \right)' \\ & + \left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} I_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) \right)' . \end{aligned}$$

Lemma 2.1.1, Lemma 2.1.3 ve (3.1) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} A\omega(m) \right) \right)' &= \left(\phi_p \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^m \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) \right)' \\ &= \left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} \omega(m) \right) \right)' \end{aligned}$$

bulunur. Burada (1.1) eşitliği kullanılarak

$$\left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} A\omega(m) \right) \right)' = \varphi(m, \omega(m))$$

elde edilir. $\varphi(m, \omega(m))$ sürekli bir fonksiyon olduğundan,

$$\left(\phi_p \left({}^C D_{T_0^+}^{\alpha, \psi} (A\omega)(m) \right) \right)' \in C[T_0, T]$$

dir.

2.Adım: Bu adımda A operatörünün sürekli olduğunu gösterelim.

$\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $n \rightarrow \infty$ iken $\omega_n \rightarrow \omega$ olacak şekilde P de bir dizisi olsun. (3.8) ve

(3.9) eşitlikleri kullanılarak, her $m \in J$ için

$$\begin{aligned}
 & |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
 &= \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right. \\
 &+ \frac{\int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) d\tau}{\Gamma(\alpha)} \\
 &- \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
 &\left. - \frac{\int_{T_0}^m H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\Gamma(\alpha)} \right|
 \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$\begin{aligned}
 & |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
 &\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) d\tau \right)}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
 &+ \left| \frac{\int_{T_0}^T F \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \right| \\
 &+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m H \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right) d\tau \right|
 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
& \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left| \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| \left| \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| \left| \left(\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega_n(s)) ds \right) - \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (3.6) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
& \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left((q-1)(\beta\tau^\gamma)^{q-2} \int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| \left((q-1)(\beta\tau^\gamma)^{q-2} \int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| \left((q-1)(\beta\tau^\gamma)^{q-2} \int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\tau \leq T$ ve $m \leq T$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
& \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i (q-1) \beta^{q-2} T^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left(\int_{T_0}^T |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| (q-1) \beta^{q-2} (T)^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^T |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^m |H| (q-1) \beta^{q-2} T^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau \\
& \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i (q-1) \beta^{q-2} T^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| d\tau \right) (T - T_0) \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\|}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{(q-1) \beta^{q-2} T^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^T |F| d\tau \right) (T - T_0) \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\|}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (q-1) \beta^{q-2} T^{\gamma(q-2)} \left(\int_{T_0}^m |H| d\tau \right) (T - T_0) \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& |A\omega_n(m) - A\omega(m)| \\
& \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^l a_i\right) (q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \left(\frac{(\psi(T)-\psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)}{|\kappa|} \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\| \\
& + \frac{(q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \left(\frac{(\psi(T)-\psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)}{|\kappa|} \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\| \\
& + (q-1)\beta^{q-2}(T^{\gamma(q-2)+1} - T_0^{\gamma(q-2)+1}) \left(\frac{(\psi(T)-\psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\|
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylelikle

$$\|A\omega_n(m) - A\omega(m)\| \leq (\omega_1 + \omega_2) \|\varphi(s, \omega_n(s)) - \varphi(s, \omega(s))\|$$

elde edilir. φ fonksiyonunun sürekliliğini kullanarak, $n \rightarrow \infty$ iken

$\|A\omega_n(m) - A\omega(m)\| \rightarrow 0$ olduğu görülür. Böylelikle A sürekli operatördür.

3.Adım: A operatörünün, P de düzgün sınırlı olduğunu gösterelim.

Her $r_1 > 0$ ve her $z \in B_{r_1} := \{\omega \in P : \|\omega\| < r_1\}$ için $\|T\omega\| \leq r_2$ olacak

şekilde öyle bir $r_2 > 0$ vardır ki $\omega \in B_{r_1}$ ve her $m \in J$ için

$$\begin{aligned}
|A\omega(m)| & \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \int_{T_0}^m |H| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. ϕ_q artan olduğundan

$$\begin{aligned}
|A\omega(m)| & \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau}{|\kappa|} (\psi(m) - \psi(T_0))^{n-1} \\
& + \int_{T_0}^m |H| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} |\varphi(s, \omega(s))| ds \right) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. $\tau < T$, $m < T$ olduğundan ve (H_3) koşulu kullanılarak

$$|A\omega(m)| \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \phi_q \left(\int_{T_0}^T t_1 |\omega(s)| ds \right) d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\ + \frac{\int_{T_0}^T |F| \phi_q \left(\int_{T_0}^T t_1 |\omega(s)| ds \right) d\tau}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\ + \int_{T_0}^m |H| \phi_q \left(\int_{T_0}^T t_1 |\omega(s)| ds \right) d\tau$$

elde edilir. $|\omega| < r_1$ olduğundan

$$|A\omega(m)| \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) d\tau \right)}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\ + \frac{\int_{T_0}^T |F| \phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) d\tau}{|\kappa|} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} \\ + \int_{T_0}^m |H| \phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) d\tau \\ \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i (\phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1})}{|\kappa| \Gamma(\alpha + 1)} \\ + \frac{\phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha + 1)} \\ + \phi_q (t_1 r_1 (T - T_0)) \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece sabit olan

$$|A\omega(m)| \leq \frac{\left(1 + \sum_{i=1}^l a_i \right) (t_1 r_1 (T - T_0))^{q-1} (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha + 1)} \\ + (t_1 r_1 (T - T_0))^{q-1} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\|A\omega\| \leq r_2$ olacak şekilde

$$r_2 := \frac{\left(1 + \sum_{i=1}^l a_i \right) (t_1 r_1 (T - T_0))^{q-1} (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha + 1)} \\ + (t_1 r_1 (T - T_0))^{q-1} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

vardır. Dolayısıyla $\{A\omega\}$, P de düzgün sınırlı bir alt kümedir.

4.Adım: A operatörünün P de aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim.

B_{r_1} , P kümesinin sınırlı bir alt kümesi ve $\omega \in B_{r_1}$ olsun. O halde $m_1, m_2 \in J$

ve $m_1 < m_2$ için

$$\begin{aligned}
 & |A\omega(m_2) - A\omega(m_1)| \\
 &= \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m_2) - \psi(T_0))^{n-1} \right. \\
 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{m_2} H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \\
 &- \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right) - \int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{\kappa} (\psi(m_1) - \psi(T_0))^{n-1} \\
 &\left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{m_1} H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right|
 \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
 & |A\omega(m_2) - A\omega(m_1)| \\
 &\leq \left| \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} D\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right)}{|\kappa|} ((\psi(m_2) - \psi(T_0))^{n-1} - (\psi(m_1) - \psi(T_0))^{n-1}) \right| \\
 &+ \left| \frac{\int_{T_0}^T F\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau}{|\kappa|} ((\psi(m_2) - \psi(T_0))^{n-1} - (\psi(m_1) - \psi(T_0))^{n-1}) \right| \\
 &+ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{m_2} H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{T_0}^{m_1} H\phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) d\tau \right|
 \end{aligned}$$

elde edilir. $m_1 < m_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m_2) - A\omega(m_1)| \\
& \leq \frac{\sum_{i=1}^l a_i \left(\int_{T_0}^{\xi_i} |D| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau \right)}{|\kappa|} ((\psi(m_2) - \psi(T_0))^{n-1} - (\psi(m_1) - \psi(T_0))^{n-1}) \\
& + \frac{\int_{T_0}^T |F| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau}{|\kappa|} ((\psi(m_2) - \psi(T_0))^{n-1} - (\psi(m_1) - \psi(T_0))^{n-1}) \\
& + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{m_1}^{m_2} |H| \left| \phi_q \left(\int_{T_0}^{\tau} \varphi(s, \omega(s)) ds \right) \right| d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. $\psi(m)$ fonksiyonunun sürekliliğinden, $m_1 \rightarrow m_2$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra gider. O halde A operatörü P de aynı dereceden süreklidir. Dolayısıyla Arzela-Ascoli teoremine göre $A : P \rightarrow P$ 'nin tamamen sürekli bir operatör olduğu sonucu elde edilir.

5.Adım: $\lambda \in (0, 1)$ için

$$S = \{\omega \in P : \omega = \lambda A\omega\}$$

kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$\omega = \lambda A\omega$ olacak şekilde $\omega \in S$ ve $\lambda \in (0, 1)$ olsun. 3.Adım'a göre, tüm $m \in J$ için

$$\begin{aligned}
& |A\omega(m)| \\
& \leq \|\omega\|^{q-1} \left(\frac{\left(1 + \sum_{i=1}^l a_i \right) t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha+1)} + t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)
\end{aligned}$$

dır. $\lambda \in (0, 1)$, $\omega \leq A\omega$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \|\omega\| \leq \|A\omega\| \\
& \leq \|\omega\|^{q-1} \left(\frac{\left(1 + \sum_{i=1}^l a_i \right) t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha+1)} + t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$||\omega||^{q-2} \leq \left(\frac{\left(1 + \sum_{i=1}^l a_i\right) t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} (\psi(T) - \psi(T_0))^{\alpha+n-1}}{|\kappa| \Gamma(\alpha+1)} + t_1^{q-1} (T - T_0)^{q-1} \frac{(\psi(T) - \psi(T_0))^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right)$$

olduğu görülür. Böylece S sınırlıdır.

Schaefer sabit nokta teoreminin tüm koşulları sağlandığından, A operatörünün P içinde sabit bir ω noktası vardır. Bu ω sabit noktası, $[T_0, T]$ aralığında (1.1)-(1.4) sınır değer probleminin çözümüdür. Böylelikle ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki ψ -Caputo sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{cases} \left(\phi_{\frac{5}{2}} \left(D_{1+}^{\frac{4}{3}, \ln m} \omega(m) \right) \right)' = \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\sqrt{1 + \omega^2(m)} - 1 \right), & m \in [1, 2] \\ \omega^{(k)}(1) = 0, & k = 0, 1, \dots, n-2 \\ {}^C D_{1+}^{\frac{4}{3}, \ln m} \omega(1) = 0 \\ \omega(2) = \sum_{i=1}^4 \frac{3i-1}{4} \omega \left(1 + \frac{i}{5} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

(3.12) kesirli sınır değer problemine (1.1)-(1.4) gözüyle bakıldığında;

$$\alpha = \frac{4}{3}, \quad T_0 = 1, \quad T = 2, \quad \psi(m) = \ln m, \quad p = \frac{5}{2} > 2, \quad n-1 < \alpha \leq n = 2,$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{5}{4}, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = \frac{11}{4},$$

$$\xi_1 = \frac{6}{5}, \quad \xi_2 = \frac{7}{5}, \quad \xi_3 = \frac{8}{5}, \quad \xi_4 = \frac{9}{5},$$

$$\varphi(m, \omega(m)) = \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\sqrt{1 + \omega^2(m)} - 1 \right)$$

olur.

Problem (3.12)'de φ fonksiyonunun (H_2) koşulunu sağladığını gösterelim.

$$\sqrt{1 + \omega^2(m)} - 1 = \frac{\omega^2(m)}{\sqrt{1 + \omega^2(m)} + 1} \geq 0 \quad (3.13)$$

dir. $m \in [1, 2]$ için $\gamma = 1$ alırsak

$$3\beta(m-1)^2 \leq \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\sqrt{1 + \omega^2(m)} - 1 \right)$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır ki (3.13) eşitsizliğinden (H_2) koşulu sağlanır.

Problem (3.12)'de φ fonksiyonunun (H_3) koşulunu sağlandığını gösterelim.

$m \in [1, 2]$ ve $\omega \in \mathbb{R}$ olsun,

$$\begin{aligned} |\varphi(m, \omega(m))| &= \left| \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\sqrt{1 + \omega^2(m)} - 1 \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2(m+1)^2} \left(\frac{\omega^2(m)}{\sqrt{1 + \omega^2(m)} + 1} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2(m+1)^2} \left| \left(\frac{\omega^2(m)}{\sqrt{1 + \omega^2(m)}} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2(m+1)^2} |\omega(m)| \\ |\varphi(m, \omega(m))| &\leq \frac{1}{8} |\omega| \end{aligned}$$

Böylelikle (H_3) koşulu $t_1 = \frac{1}{8}$ için sağlanır.

Son olarak, açıkça görülüyor ki $T_0 < \xi_i < T$ ve $a_i > 0$, $i = 1, \dots, l$ dir. O halde

$$\begin{aligned} (\psi(T) - \psi(T_0))^{n-1} - \sum_{i=1}^l a_i (\psi(\xi_i) - \psi(T_0))^{n-1} &= \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{6}{5} \right) - \frac{5}{4} \ln \left(\frac{7}{5} \right) \\ &\quad - 2 \ln \left(\frac{8}{5} \right) - \frac{11}{4} \ln \left(\frac{9}{5} \right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan Teorem 3.2.2'nin tüm koşulları sağlanmıştır. Dolayısıyla (3.12) p -Laplasien kesirli sınır değer probleminin en az bir çözümü vardır.

4 SONUÇ

Bu tezde çok noktalı sınır koşullarıyla birlikte p -Laplasyen operatörü ve ψ -Caputo kesirli türevi içeren kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için (1.1)-(1.4) sınır değer problemi ele alınmıştır. (2.1) ψ -Riemann-Liouville kesirli integral tanımında sırasıyla $\psi(t) = t$ ve $\psi(t) = \ln t$ olduğunda Riemann-Liouville ve Hadamard kesirli integrallerine indirgenirken, (2.2) ψ -Caputo kesirli türev tanımındaki genellemede $\psi(t) = t$ olduğunda Caputo kesirli türev operatörünü verirken $\psi(t) = \ln t$ olduğunda da Caputo-Hadamard kesirli türevini vermektedir. Böylelikle bu tezde kullanılan, ψ -Riemann-Liouville kesirli integrali, Riemann-Liouville ve Hadamard tipi kesirli integralleri genelleyen bir integral olup, ψ -Caputo kesirli türev ise Caputo ve Caputo Hadamard tipi kesirli türevleri genelleyen bir türevdir. İlk olarak, ψ -Caputo kesirli türev ve ψ -Riemann-Liouville kesirli integralin tanımları ve ψ -Caputo kesirli türev ve ψ -kesirli integralin bazı temel özellikleri kullanılarak, (1.1)-(1.4) sınır değer problemimiz integral denklem olarak ifade edilmiştir. Daha sonra, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak (1.1)-(1.4) sınır değer problemimizin tek bir çözümünün varlığını garantileyen koşullar elde edilmiş ve bu sonucu destekleyen bir örnek verilmiştir. Son olarak, Schaefer sabit nokta teoreminden yararlanılarak (1.1)-(1.4) sınır değer problemimizin en az bir çözümünün varlığı için gerekli koşullar elde edilmiş ve bu sonucu destekleyen bir örnek verilerek tez tamamlanmıştır.

Kaynaklar

- Abdo, M. S., Panchal, S. K., Saeed, A. M. (2019). Fractional boundary value problem with ψ -caputo fractional derivative, Proc. Indian Acad. Sci. 129 (2019), no. 65, 64–78.
- Agarwal R. P., Hristova, S., O'Regan, D. (2016). A survey of Lyapunov functions, stability and impulsive Caputo fractional differential equations. Fract. Calc. Appl. Anal. 19:290-318. <https://doi.org/10.1515/fca-2016-0017>
- Agarwal, R. P., Ntouyas, S. K., Ahmad, B., Alzahrani, A. K. (2016). Hadamard-type fractional functional differential equations and inclusions with retarded and advanced arguments. Advances in Difference Equations 1:1-15. <https://doi.org/10.1186/s13662-016-0810-x>
- Agarwal, R. P., O'Regan, D., Papageorgiou, N. S. (2007). On the existence of two nontrivial solutions of periodic problems with operators of p -Laplacian type. Differ. Equ. 34(2):157-163.
- Agarwal, R. P., Zhou, Y., Wang, J., Luo, X. (2011). Fractional functional differential equations with causal operators in Banach spaces. Mathematical and Computer Modelling 2011; 54:1440-1452. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.04.016>
- Almeida, R. (2017). A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 44:460-481. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.09.006>
- Almeida, R., Malinowska, A. B., Monteiro, M. T. T. (2018). Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications. Mathematical Methods in the Applied Sciences 2018; 41(1):336-352. <https://doi.org/10.1002/mma.4617>
- Baitiche, Z., Derbazi, C., Benchohra, M. (2020). ψ -Caputo fractional differential equation with multi-point boundary conditions by Topological Degree Theory. Results in Nonlinear Analysis 2020; 3 (4):167-178.

- Baleanu, D., Jafari, H., Khan, H., Johnston, S. J. (2015). Results for mild solution of fractional coupled hybrid boundary value problems. *Open Math.* 2015; 13:601-608. <https://doi.org/10.1515/math-2015-0055>
- Baleanu, D., Khan, H., Jafari, H., Alipour, R. A. (2015). On existence results for solutions of a coupled system of hybrid boundary value problems with hybrid conditions. *Advances in Difference Equations* 2015: 11-14. <https://doi.org/10.1186/s13662-015-0651-z>
- Banach, S. (1922). Sur les op'érations dans les ensembles abstraits et leur application aux 'equations int'egrales, *Fund. Math.*, 3, 133—181.
- Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. *International Journal of Geographical Information Science* 1967; 13(5):529-539. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x>
- Celik, C., Duman, M. (2012). Crank-Nicholson method for the fractional equation with the Riezs fractional derivative. *Journal of computational physics* 231:1743-1750 (in Turkish). <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.11.008>
- Chai, G. (2011). Positive solutions for boundary value problem of fractional differential equation with p -Laplacian operator. *Boundary Value Problems* 2:1-20.
- Chang, X., Qiao, Y. (2013). Existence of periodic solutions for a class of p -Laplacian equations. *Boundary Value Problem* 2013; 1:1-11.
- Chen, T., Liu, W. (2012). An anti-periodic boundary value problem for the fractional differential equation with a p -Laplacian operator. *Applied Mathematics Letters* 2012; 25(11):1671-1675. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.01.035>
- Conway, J.B. (1990). A course in functional analysis, 2nd edition , Springer.
- Diethelm, K. (2010). The analysis of fractional differential equations. Springer-Verlag, Berlin.

- Erbaş, M. T., Çetin, E. (2023). On the existence of a solutions for ψ -Caputo fractional boundary value problems. V. International Turkic World Congress on Science and Engineering Kyrgystan Türkiye Manas University, Bishkek, KYRGYSTAN (TURK-COSE 2023)
- Gorial, I. I. (2011). Numerical methods for fractional reaction-dispersion equation with Riesz space fractional derivative. Engineering and Technology Journal, 29:709-715.
- Hilfer, R. (2000). Applications of fractional calculus in physics. Singapore.
- Hilfer, R. (2001). Application of fractional calculus in physics. New Jersey: World Scientific.
- Jafari, H., Gejii, V. D. Jafari, H. (2006). Solving linear and nonlinear fractional diffusion and wave equations by adomian decomposition. Applied Mathematics and Computation 180:488-497. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.12.031>
- Karatay, I., Bayramoglu, S. R., Sahin, A. (2011). Implicit difference approximation for the time fractional heat equation with the nonlocal condition. Applied Numerical Mathematics; 61:1281-1288. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2011.08.007>
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematical studies 204. Ed van Mill. Amsterdam.
- Kreyszing, E. (1978). Introductory functional analysis with application. Jonh Wiley and Sons, New York.
- Labade, M.B.,(2021). An overview of definitions of Riemann-Liouville's fractional derivative and Caputo's fractional derivative. International Journal of Science and Research (IJSR) ISSN: 2319-7064 SJIF (2019): 7.583

- Liang, S., Shi, S. (2012). Existence of multiple positive solutions for m -point fractional boundary value problems with p -Laplacian operator on infinite interval. *Journal of Applied Mathematics and Computing* 2012; 38(1):687-707. <https://doi.org/10.1155/2020/2327580>
- Luchko, Y., Trujillo, J. J. (2007). Caputo-type modification of the Erdelyi-Kober fractional derivative. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 10: 249-267.
- Mainardi, F. (1997). *Fractals and fractional calculus continuum mechanics*. Springer Verlag.
- Mfadel, A. E., Melliani, S., Elomari, M. (2022). Existence and uniqueness result for ψ -Caputo fractional boundary value problem involving the p -Laplacian operator. *U.P.B. Sci. Bull., Series A*, 84(1):37-46.
- Munkhammar, J. D. (2004). Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann. *U.U.D.M. Project Report* 2004:7
- Oldham, K. B. (2010). Fractional differential equations in electrochemistry. *Adv. Eng. Softw* 2010; 41(1):9-12. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2008.12.012>
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering*. Academic Press. New York.
- Pskhu, A. V., Ramazanov, M. I., Kosmakova, M. T. (2023). Boundary value problem for a loaded fractional diffusion equation. *Turkish Journal of Mathematics* ; 47:1585-1594. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3450>
- Sabatier, J., Agrawal, O. P., Machado, J. A. T. (2007). *Advances in fractional calculus-theoretical developments and applications in Pphysics and engineering*. Dordrecht: Springer.
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. 1993. *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and Breach, Yverdon

- Schaefer, H. (1955). Uber die methode der a priori-schranken, Math. Ann. 129-415–416.
- Su, L., Wang, W., Yang, Z. (2009). Finite difference approximations for the fractional advection-diffusion equation. Physics Letters A 373:4405-4408. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.10.004>
- Tadjeran, C., Meerschaert, M. M., Scheffler, H. P. (2006). A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation. Journal of Computational Physics 213:205-213. doi:10.1016/j.jcp.2005.08.008
- Tarasov, V. E. (2010). Fractional Dynamics: Application of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Springer, Heidelberg - Higher Education Press, Beijing.
- Verma, S. K., Vats, R. K., Kumar, A., Vijayakumar, V., Shukla, A. (2022). A discussion on the existence and uniqueness analysis for the coupled two-term fractional differential equations coupled two-term fractional differential equations. Turkish Journal of Mathematics 46:516-532. <https://doi.org/10.3906/mat-2107-30>
- Vivek, D., Elsayed, E. M., Kanagarajan, K. (2022). Existence results for hybrid stochastic differential equations involving ψ -Hilfer fractional derivative. Turk.J.Math.Comput.Sci. 14(1):138-144. <https://doi.org/10.47000/tjmcs.987414>
- Wang, J., Xiang, H., Liu, Z. (2010). Existence of concave positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation with p -Laplacian operator. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. <https://doi.org/10.1155/2010/495138>

TEŞEKKÜR

Öncelikle Yüksek Lisansa başlamama vesile olan, tez çalışmalarım boyunca, benimle özveriyle ilgilenen, her türlü desteğini, emeğini ve zamanını benden esirgemeyen, değerli görüşlerinden ve birikimlerinden faydalandığım, beni daima akademik ve psikolojik olarak destekleyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Erbil ÇETİN'e sonsuz teşekkür ederim.

Daha sonra yüksek lisans öğrenimim süresinde TÜBİTAK Bilim İnsanı Destek Programları Başkanlığı (BİDEB) 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında destek aldığım için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Son olarak maddi, manevi destek, yardım ve fedakarlıklarını esirgemeyip her zaman yanımda olduklarını hissettiren kıymetli annem, babam ve kardeşim Müberra ERBAŞ, Muammer ERBAŞ ve Gülay Hannan ERBAŞ'a yürekten teşekkür ederim.

29/12/2023

İmzası

Mürüvvet Tuva ERBAŞ

ÖZGEÇMİŞ

2008 yılında Ülkü İlköğretim okulundan, 2011 yılında Çağdaş Eğitim Koleji orta bölümünden ve 2015 yılında İzmir İmam Hatip Lisesinden mezun oldu. 2015 yılında başladığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulama Ağırlıklı Matematik Lisans öğretim programından 2020 yılında mezun oldu. Ayrıca 2018-2019 yılları arasında Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Fakültesi tarafından düzenlenen Pedagojik Formasyon sertifikasını aldı. Yine 2019 yılında İzmir Gürçeşme Kanuni Sultan Süleyman Anadolu Lisesinde matematik öğretmeni olarak staj yaptı. 2020-2022 yıllarında Anadolu Liselerinde matematik öğretmenliği yaptı. 2021 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2022 yılında TUBİTAK'ın BİDEB 2210 programı ile sunduğu bursu almaya hak kazandı. 2023 yılında V. International Turkic World Congress on Science and Engineering Kyrgystan Türkiye Manas University, Bishkek, KYRGYSTAN (TURK-COSE 2023) kongresine katıldı.