

T.C.  
EGE ÜNİVERSİTESİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü

S-METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA BAZI SABİT  
NOKTA SONUÇLARI

Gizem TÜNAR

Danışman: Doç. Dr. Özgür EGE

Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Yüksek Lisans Programı

İzmir  
2023





# EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**S-METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI**” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

17/11/2023

İmzası

Gizem TÜNAR



**ÖZET****S-METRİK UZAYLAR VE BU UZAYLARDA BAZI SABİT  
NOKTA SONUÇLARI**

TÜNAR, Gizem

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Özgür EGE

17.11.2023, 37 sayfa

Bu tez çalışmasında, S-metrik uzaylarda bazı sabit nokta sonuçları ele alınmıştır.

Birinci bölüm, S-metrik uzaylar ile ilgili bazı tanım ve teoremleri içermektedir.

İkinci bölümde, S-metrik uzaylar baz alınarak oluşturulan  $S_b$ -metrik kavramına değinilmiş, bu uzay örnekler ve teoremlerle zenginleştirilmiştir.

Son bölümde, Branciari  $S_b$ -metrik uzay yapısı verilip bu kavramla ilgili bazı yeni sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve bir uygulaması verilmiştir. Ayrıca  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzay tanımlandıktan sonra bu uzayda Kannan tipi sabit nokta teoremi ispatlanmıştır.

**Anahtar sözcükler:** S-metrik uzay, sabit nokta,  $S_b$ -metrik uzay.



## ABSTRACT

S-METRIC SPACES AND SOME FIXED POINT RESULTS IN  
THESE SPACES

TÜNAR, Gizem

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Özgür EGE

17.11.2023, 37 pages

In this thesis, some fixed point results in S-metric spaces are discussed.

The first section contains some definitions and theorems related to S-metric spaces.

In the second section, the notion of  $S_b$ -metric, which is based on S-metric spaces, is mentioned and this space is enriched with examples and theorems.

In the last section, Branciari  $S_b$ -metric space structure is given and some fixed point theorems related to this concept are proved and an application is given. Moreover, after defining the C\*-algebra-valued extended  $S_b$ -metric space, Kannan type fixed point theorem is proven in this space.

**Keywords:** S-metric space, fixed point,  $S_b$ -metric space.



## ÖNSÖZ

Sabit nokta teorisi, fonksiyonel analiz, operatör teorisi, diferansiyel denklemler, istatistik gibi birçok alanda uygulamalarının olması nedeniyle matematik alanında çok önemli bir yere sahiptir. Sabit nokta teoremleri kullanılarak var olan problemlere çözüm bulunması veya alternatif daha kullanışlı çözümler oluşturulması, bu alandaki araştırmacıların temel amacıdır.

Birçok durumda, çözümlerin varlığını ve teklüğünü göstermek büyük önem arz etmektedir. Bu tez çalışmasında, Branciari  $S_b$ -metrik uzaylarda çözümlerin varlığını ve teklüğünü göstermek için kullanılan bazı sabit nokta teoremleri yer almaktadır. Ayrıca  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzay kavramı ilk kez tanımlanarak literatüre kazandırılmıştır. Bu uzay ile ilgili bir örnek verilmiş ve ispatlanan bir teoremle de yeni kavram teorik anlamda desteklenmiştir.

Bu tezimde danışman hocamın da yardımlarıyla ilgili konuda literatüre katkı sağlayacağını düşündüğüm bilgiler verdim.

İZMİR

17/11/2023

*Gizem TÜNAR*



## İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇ KAPAK . . . . .	ii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI . . . . .	v
ÖZET . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	ix
ÖNSÖZ . . . . .	xi
İÇİNDEKİLER . . . . .	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .	xiv
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 Ön Hazırlık ve Temel Kavramlar . . . . .	3
2.1 S-Metrik Uzay . . . . .	7
2.2 $S_b$ -Metrik Uzay . . . . .	11
3 Branciari $S_b$ -Metrik Uzay . . . . .	15
3.1 Branciari $S_b$ -Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri . . . . .	17
3.2 Lineer Denklem Sistemi Üzerine Bir Uygulama . . . . .	22
4 Araştırma Bulguları . . . . .	24
4.1 Uygulama . . . . .	29
5 SONUÇ . . . . .	32
KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . .	33
TEŞEKKÜR . . . . .	36
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	37

**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$C[a, b]$	$[a, b]$ kapalı aralığında reel değerli fonksiyonların kümesi
$\  \cdot \ $	Norm
$(\Upsilon, S)$	S-metrik ile donatılmış metrik uzay
$O_{\Gamma}(\iota, \infty)$	$\iota$ elemanının yörüngesi

# 1 GİRİŞ

G-metrik uzay ve D-metrik uzayın bir genellemesi olan S-metrik uzay kavramı ilk defa 2012 yılında ortaya atılmıştır (Sedghi, 2012). Bu makalede S-metrik uzayın bazı özellikleri ve kendine dönüşümler için bir ortak sabit nokta teoremi verilmiştir. 2014 yılında ise bu makalede bulunan Teorem 3.1'in genellemesi olan bir genel sabit nokta teoremi ispatlanmış ve uygulama olarak S-metrik uzaylar için metrik uzaylardaki sabit nokta teoremlerinin birçok benzeri elde edilmiştir (Sedghi, 2014).

İlerleyen zamanlarda S-metrik uzayda farklı dönüşümler için sabit nokta teoremleri kanıtlanmış ve örneklerle desteklenmiştir (Mojaradi, 2015),(Mlaiki, 2015),(Gupta, 2013),(Mlaiki, 2015),(Kim, 2016),(Prudhvi, 2016),(Singthong, 2017),(Phaneendra, 2017). S-metrik uzay yapısının içeriği zenginleştikten sonra b-metrik uzayın bir genellemesi olarak  $S_b$ -metrik uzay kavramı literatürdeki yerini almıştır (Souayah, 2016). Bu kavram üzerindeki çalışmalar önceki bilgilerden esinlenerek devam etmiştir. Bu çalışmalardan biri Yumnam Rohen, Tatjana Došenović ve Stojan Radenović tarafından yapılmıştır (Rohen, 2017). Bu çalışmada  $S_b$ -metrik yapısında değişiklik yapılmış ve tanımlanan uzay için bazı ortak sabit nokta çifti teoremleri ispatlanmıştır. Bir diğer çalışma, 2017 yılında bu alana kazandırılmıştır (Priyobarta, 2017). Yeni bir kavram olarak kompleks değerli  $S_b$ -metrik uzay verilmiştir. Burada ilginç sabit nokta teoremleri ispatlanmış ve örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra bu uzayın bazı temel özellikleri üzerinde çalışılmış ve bu uzay üzerinde sabit nokta sonuçları verilmiştir.

Yakın zamanda bu çalışmalara bir yenisi daha eklenmiştir. Bu çalışmada S-metrik uzay ve  $S_b$ -metrik uzayın bir genellemesi olan Branciari  $S_b$ -metrik uzay kavramı üzerinde durulmuştur (Roy, 2022). İki büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teoremlerine yer verilmiştir.  $S_b$ -metrik uzayda yapılan diğer çalışmalardan bazıları (Saleem, 2017),(Tas, 2018),(Mlaiki, 2018),(Singh, 2021) ve (Tas, 2021) şeklindedir.

Bu tez, giriş kısmı dışında dört bölümden oluşmaktadır. İlk kısımda, S-metrik ile ilgili temel bilgiler yer almaktadır. Bu bilgiler diğer kısımlarda kullanılmak amacıyla verilmiştir. İkinci kısımda,  $S_b$ -metrik uzay kavramına değinilip bu uzay ve bu uzayın genellemesi için bazı sabit nokta teoremleri

verilmiştir. Bu teoremler örneklerle desteklenmiştir. Üçüncü kısım, Branciari  $S_b$ -metrik uzaylar ve  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzaylara dair sabit nokta sonuçları içerir. Son kısımda ise tezde elde edilen bulgulardan varılan sonuçlara yer verilmiştir.



## 2 Ön Hazırlık ve Temel Kavramlar

Bu bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılması amacıyla gerekli olan temel kavramlar, bazı tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.0.1.** (Lipschutz, 1965)  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme olsun. Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için  $\varsigma : \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $\varsigma$  fonksiyonuna  $\Upsilon$  üzerinde bir metrik ve  $(\Upsilon, \varsigma)$  ikilisine de bir metrik uzay denir.

$$(\varsigma 1) \text{ Her } \iota, \kappa \in \Upsilon \text{ için } \varsigma(\iota, \kappa) \geq 0,$$

$$(\varsigma 2) \varsigma(\iota, \kappa) = 0 \Leftrightarrow \iota = \kappa,$$

$$(\varsigma 3) \text{ Her } \iota, \kappa \in \Upsilon \text{ için } \varsigma(\iota, \kappa) = \varsigma(\kappa, \iota),$$

$$(\varsigma 4) \text{ Her } \iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon \text{ için } \varsigma(\iota, \varrho) \leq \varsigma(\iota, \kappa) + \varsigma(\kappa, \varrho).$$

**Tanım 2.0.2.** (Lipschutz, 1965)

$(\Upsilon, \varsigma)$  bir metrik uzay olmak üzere  $\{\iota_n\}$ ,  $\Upsilon$  üzerinde bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için  $n > n_0$  olduğunda  $\varsigma(\iota_n, \iota) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  sayısı varsa  $\{\iota_n\}$  dizisi  $\iota \in \Upsilon$  noktasına yakınsıyor denir.

**Tanım 2.0.3.** (Lipschutz, 1965)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir metrik uzay ve  $\{\iota_n\}$ ,  $\Upsilon$  üzerinde bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_0$  olduğunda  $\varsigma(\iota_n, \iota_m) < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  sayısı varsa  $\{\iota_n\}$  dizisine  $(\Upsilon, \varsigma)$  metrik uzayında bir Cauchy dizisi denir.

**Tanım 2.0.4.** (Lipschutz, 1965)  $(\Upsilon, \varsigma)$  metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise  $(\Upsilon, \varsigma)$  metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Şimdi sabit nokta kavramını açıklayalım.

**Tanım 2.0.5.** (Lipschutz, 1965)  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir dönüşüm olsun. Eğer

$$\Gamma \iota = \iota$$

eşitliğini sağlayan bir  $\iota \in \Upsilon$  varsa bu  $\iota$  noktasına  $\Gamma$ 'nin sabit noktası denir.

**Tanım 2.0.6.** (Banach, 1922)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir Lipschitz dönüşüm olsun.  $\alpha \in [0, 1)$  olması durumunda  $\varsigma(\Gamma \iota, \Gamma \kappa) \leq \alpha \varsigma(\iota, \kappa)$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $\Gamma$  dönüşümüne daralma veya büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 2.0.1.** (Banach, 1922)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir tam metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda

(i)  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde bir tek  $\iota$  sabit noktasına sahiptir.

(ii) Herhangi bir  $x_0 \in \Upsilon$  için

$$\iota_{n+1} = \Gamma \iota_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen  $\{\iota_n\}_{n=1}^{\infty}$  iterasyon dizisi  $\iota$  noktasına yakınsar.

Banach sabit nokta teoremi, sabit noktanın varlığını, tekliğini göstermek ve bu noktanın nasıl bulunabileceği hakkında bilgi vermek için kullanılır.

**Teorem 2.0.2.** (Banach, 1922)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir tam metrik uzay olsun. Eğer  $\Gamma$  dönüşümü bir daraltan dönüşüm ise  $\Gamma$  dönüşümünün  $\Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktası vardır.

**Teorem 2.0.3.** (Kannan, 1968)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir tam metrik uzay olsun. Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümünün

$$\varsigma(\Gamma \iota, \Gamma \kappa) \leq \alpha(\varsigma(\iota, T\iota) + \varsigma(\kappa, T\kappa))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$  sabiti varsa  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

**Teorem 2.0.4.** (Reich, 1972)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir tam metrik uzay olsun.  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  ve  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  olması şartıyla

$$\varsigma(\Gamma \iota, \Gamma \kappa) \leq \alpha \varsigma(\iota, \kappa) + \beta \varsigma(\iota, \Gamma \iota) + \gamma \varsigma(\kappa, \Gamma \kappa)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

**Teorem 2.0.5.** (Chatterjea, 1972)  $(\Upsilon, \varsigma)$  bir tam metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü ele alınsın. Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\varsigma(\Gamma \iota, \Gamma \kappa) \leq \beta(\varsigma(\iota, \Gamma \kappa) + \varsigma(\kappa, \Gamma \iota))$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  sabiti varsa  $\Gamma$ , bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzayları tanımlarken kullanılacak olan bazı bilgiler verilmiştir.

$\mathbb{A}$  kümesi birimi  $I$  olan bir cebir olmak üzere  $\mathbb{A}$  üzerinde  $a \mapsto a^*$  şeklinde eşleme yapan bir eşlenik lineer dönüşüm tanımlı olsun öyle ki her  $a, b \in \mathbb{A}$  için

$$a^{**} = a \text{ ve } (ab)^* = b^*a^*$$

özellikleri sağlansın. Bu durumda  $(\mathbb{A}, *)$  ikilisi bir  $*$ -cebir olarak adlandırılır. Bir Banach  $*$ -cebir ise

$$\|a^*\| = \|a\| \quad (\forall a \in A)$$

özellğine sahip bir tam altçarpımsal norm ile birlikte bir  $*$ -cebirdir.  $C^*$ -cebir ise  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  özelliğinin sağlandığı özel bir Banach  $*$ -cebirdir.

Bir Banach  $*$ -cebir  $\mathbb{A}$  daki bir  $a$  elemanının spektrumu

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - a, \mathbb{A} \text{ da tersinir değil}\}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{A}_h = \{x \in \mathbb{A} : x = x^*\}$  şeklinde tanımlı kümede bir  $x$  elemanı ele alınsın.  $\sigma(x)$ ,  $x$  in spektrumu olmak üzere  $\sigma(x) \subset [0, \infty)$  ise  $x$  e bir pozitif eleman denir ve bu eleman  $x \succeq \theta$  ile ifade edilir.  $\mathbb{A}_h$  üzerinde bir kısmi sıralama  $\preceq$ , pozitif elemanlar aracılığıyla ve  $\theta$ ,  $\mathbb{A}$  daki sıfır eleman olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$x \preceq y \Leftrightarrow y - x \succeq \theta.$$

$\mathbb{A}_+$  kümesi ile  $\{x \in \mathbb{A} : x \succeq \theta\}$  kümesi gösterilecektir.

$I$ ,  $\mathbb{A}$  nın birimi olmak üzere herhangi bir  $x \in \mathbb{A}_+$  elemanı için

$$x \preceq I \Leftrightarrow \|x\| \leq 1$$

denkliği ve  $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$  eşitliği mevcuttur.

$C^*$ -cebir-değerli metrik uzay kavramı 2014 yılında Ma ve arkadaşları tarafından tanımlanmıştır (Ma, 2014). Aynı çalışmada  $C^*$ -cebir değerli büzülme dönüşümleri için bir sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. 2015 yılında ise Ma ve Jiang,  $C^*$ -cebir değerli b-metrik uzayları literatüre kazandırmış, operatör ve integral denklemler ile ilişkili bazı uygulamalar vermiştir (Ma,Z., 2015).

**Tanım 2.0.7.** (Ma, 2014)  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme olsun.  $\sigma : \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow \mathbb{A}$  dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlasın.

- (1) Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için  $\theta \preceq \sigma(\iota, \kappa)$  ve  $\sigma(\iota, \kappa) = \theta \Leftrightarrow \iota = \kappa$ ,
- (2) Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için  $\sigma(\iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \iota)$ ,
- (3) Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için  $\sigma(\iota, \kappa) \preceq \sigma(\iota, \varrho) + \sigma(\varrho, \kappa)$ .

Bu durumda  $\sigma$  ya  $\Upsilon$  üzerinde bir  $C^*$ -cebir değerli metrik ve  $(\Upsilon, \mathbb{A}, \sigma)$  ya bir  $C^*$ -cebir değerli metrik uzay denir.

**Tanım 2.0.8.** (Ma, 2014)  $(\Upsilon, \mathbb{A}, \sigma)$  bir  $C^*$ -cebir değerli metrik uzay,  $\{\iota_n\} \subset \Upsilon$  ve  $\iota \in \Upsilon$  olsun.

- (1) Her  $\varepsilon > 0$  için  $n > N$  özelliğine sahip tüm  $n$  sayıları düşünüldüğünde  $\|d(\iota_n, \iota)\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  sayısı varsa  $\{\iota_n\}$  dizisine  $\mathbb{A}$  ya göre yakınsak denir.
- (2) Her  $\varepsilon > 0$  için  $n, m > N$  özelliğine sahip tüm  $n, m$  sayıları için  $\|d(\iota_n, \iota_m)\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $N$  sayısı varsa  $\{\iota_n\}$  dizisine  $\mathbb{A}$  ya göre bir Cauchy dizisi denir.
- (3)  $(\Upsilon, \mathbb{A}, \sigma)$   $C^*$ -cebir değerli metrik uzayındaki her Cauchy dizisi  $\mathbb{A}$  ya göre yakınsak ise  $(\Upsilon, \mathbb{A}, \sigma)$  ya bir tam  $C^*$ -cebir değerli metrik uzay denir.

**Tanım 2.0.9.** (Ma, 2014)  $(\Upsilon, \mathbb{A}, \sigma)$ ,  $C^*$ -cebir-değerli metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir dönüşüm olsun. Her  $\iota, \kappa \in A$  için

$$\sigma(\Gamma\iota, \Gamma\kappa) \preceq A^*\sigma(\iota, \kappa)A$$

olacak şekilde  $\|A\| < 1$  özelliğine sahip bir  $A \in \mathbb{A}$  elemanı varsa  $\Gamma$  dönüşümüne  $C^*$ -cebir değerli büzülme dönüşümü denir.

**Örnek 2.0.1.** Ma (2014)  $\Upsilon = \mathbb{R}$  ve  $\mathbb{A} = M_2(\mathbb{R})$  ile ele alınsın.  $\iota, \kappa \in \mathbb{R}$  ve  $\varsigma \geq 0$  bir sabit olmak üzere

$$\sigma(\iota, \kappa) = \text{diag}(|\iota - \kappa|, \varsigma |\iota - \kappa|)$$

metriği ile tanımlansın.  $\sigma$  bir  $C^*$ -cebir değerli metriktir ve  $\mathbb{R}$  nin tamlığından dolayı  $(\Upsilon, M_2(\mathbb{R}), \sigma)$  bir tam  $C^*$ -cebir değerli metrik uzaydır.

Bu bölüm S-metrik uzay kavramını, bu kavramla ilgili bazı teoremleri ve örnekleri içermektedir.

## 2.1 S-Metrik Uzay

**Tanım 2.1.1.** (Sedghi, 2012)

$\Upsilon$  boştan farklı bir küme olsun. Her  $\iota, \kappa, \varrho, a \in \Upsilon$  için aşağıdaki koşulları sağlayan bir  $S : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu  $\Upsilon$  üzerinde bir S-metriktir.

1.  $S(\iota, \kappa, \varrho) \geq 0$ ,
2.  $S(\iota, \kappa, \varrho) = 0 \iff \iota = \kappa = \varrho$ ,
3.  $S(\iota, \kappa, \varrho) \leq S(\iota, \iota, a) + S(\kappa, \kappa, a) + S(\varrho, \varrho, a)$ .

Bu durumda  $(\Upsilon, S)$  bir ikilisine S-metrik uzay denir.

**Örnek 2.1.1.** (Sedghi, 2012)  $\Upsilon = \mathbb{R}^n$  ve  $\| \cdot \|$   $\Upsilon$  üzerinde bir norm olsun. Bu durumda

$$S(\iota, \kappa, \varrho) = \| \kappa + \varrho - 2\iota \| + \| \kappa - \varrho \|,$$

$\Upsilon$  üzerinde bir S-metriktir.

**Örnek 2.1.2.** (Sedghi, 2012)  $\Upsilon = \mathbb{R}^2$  ve  $\varsigma, \Upsilon$  üzerinde herhangi bir metrik olsun.

$$S(\iota, \kappa, \varrho) = \varsigma(\iota, \kappa) + \varsigma(\iota, \varrho) + \varsigma(\kappa, \varrho),$$

$\Upsilon$  üzerinde bir S-metriktir.

**Tanım 2.1.2.** (Sedghi, 2012)

1.  $n \rightarrow \infty$  iken  $S(\iota_n, \iota_n, \iota) \rightarrow 0$  oluyorsa  $\{\iota_n\} \subset \Upsilon$  dizisi  $\iota \in \Upsilon$  noktasına yakınsar denir. Yani her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyle ki her  $n \geq n_0$  için  $S(\iota_n, \iota_n, \iota) < \varepsilon$  sağlanır.
2.  $n, m \rightarrow \infty$  iken  $S(\iota_n, \iota_n, \iota_m) \rightarrow 0$  olması durumunda  $\{\iota_n\} \subset \Upsilon$  dizisi bir Cauchy dizisidir. Diğer bir deyişle, her  $\varepsilon > 0$  için bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyle ki her  $n, m \geq n_0$  için  $S(\iota_n, \iota_n, \iota) < \varepsilon$  ifade mevcuttur.
3. Her Cauchy dizisi yakınsak dizi ise  $(\Upsilon, S)$  S-metrik uzayı tamdır.

**Lemma 2.1.1.** (Sedghi, 2012)

Bir S-metrik uzayda  $S(\iota, \iota, \kappa) = S(\kappa, \kappa, \iota)$  eşitliği vardır.

**Tanım 2.1.3.** (Sedghi, 2012)  $(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay olsun.  $r > 0$  ve  $\iota \in \Upsilon$  için  $\iota$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı  $B_S(\iota, r)$  açık yuvarı ve  $B_S[\iota, r]$  kapalı yuvarı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B_S(\iota, r) = \{\kappa \in \Upsilon : S(\kappa, \kappa, \iota) < r\},$$

$$B_S[\iota, r] = \{\kappa \in \Upsilon : S(\kappa, \kappa, \iota) \leq r\}.$$

**Önerme 2.1.1.** (Sedghi, 2014)  $(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay olsun ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$d(\iota, \kappa) = S(\iota, \iota, \kappa)$$

eşitliği verilsin. Bu durumda

- (1)  $d$ ,  $\Upsilon$  üzerinde bir  $b$ -metriktir,
- (2)  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında  $\iota_n \rightarrow \iota$  noktasına yakınsaktır ancak ve ancak  $(\Upsilon, d)$   $d$ -metrik uzayında  $\iota_n \rightarrow \iota$  noktasına yakınsaktır.
- (3)  $\{\iota_n\}$  dizisi  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında Cauchy dizisidir ancak ve ancak  $\{\iota_n\}$  dizisi  $(\Upsilon, d)$   $d$ -metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

**Tanım 2.1.4.** (Sedghi, 2012)  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzay ve  $A \subset \Upsilon$  olsun.

- (1) Her  $\iota \in A$  için  $r > 0$  sayısı varsa ve  $B_S(\iota, r) \subset A$  oluyorsa  $A$  kümesi  $\Upsilon$  kümesinin bir açık alt kümesidir.
- (2)  $r > 0$  sayısı ve her  $\iota, \kappa \in A$  için  $S(\iota, \iota, \kappa) < r$  oluyorsa  $\Upsilon$  kümesinin bir alt kümesi  $A$ ,  $S$ -sınırlı olarak adlandırılır.
- (3)  $\Upsilon$  kümesinde bir  $\{\iota_n\}$  dizisi  $\iota$  noktasına yakınsaktır ancak ve ancak  $n \rightarrow \infty$  iken  $S(\iota_n, \iota_n, \iota) \rightarrow 0$  noktasına yakınsar.
- (4) Her  $\varepsilon > 0$  için  $n_0 \in \mathbb{N}$  sayısı varsa ve her  $n, m \geq n_0$  için  $S(\iota_n, \iota_n, \iota) < \varepsilon$  ise  $\{\iota_n\}$  dizisi  $\Upsilon$  kümesinde bir Cauchy dizisidir.
- (5) Her Cauchy dizisi yakınsaksa  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayı tamdır.

**Tanım 2.1.5.** (Sedghi, 2012)  $(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay ve  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir dönüşüm olsun. Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$S(\Gamma(\iota), \Gamma(\iota), \Gamma(\kappa)) \leq LS(\iota, \iota, \kappa)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir  $0 \leq L < 1$  sayısı varsa  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir büzülme dönüşümüdür.

Aşağıdaki teorem, Banach büzülme prensibinin  $S$ -metrik uzaylardaki karşılığıdır.

**Teorem 2.1.1.** (Sedghi, 2012)  $(\Upsilon, S)$  bir tam  $S$ -metrik uzay ve  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda  $\Gamma$  dönüşümü bir tek  $u \in \Upsilon$  sabit noktasına sahiptir. Üstelik herhangi bir  $\iota \in \Upsilon$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n(\iota) = u$  ve

$$S(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), u) \leq \frac{2\Gamma^n}{1 - \Gamma} S(\iota, \iota, \Gamma(\iota))$$

eşitsizliği mevcuttur.

Şimdi  $S$ -metrik uzaylarda farklı dönüşümler için birkaç tanım ve sabit nokta teoremine yer vereceğiz.

**Tanım 2.1.6.** Mlaiki (2015)

$\Gamma, (\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında kendine dönüşüm olsun.  $\psi \in \Psi$  dönüşümü ile bir  $\alpha: \Upsilon \times \Upsilon \times \Upsilon \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü varsa ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\alpha(\iota, \iota, \kappa) S(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq \psi(S(\iota, \iota, \kappa))$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\Gamma$  fonksiyonuna  $\alpha$ - $\psi$  büzülme dönüşümü denir.

**Teorem 2.1.2.** Mlaiki (2015)  $\Gamma, (\Upsilon, S)$  tam  $S$ -metrik uzayında  $\alpha - \psi$  büzülme dönüşümü olsun ve  $\psi \in \Psi$  olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın.

(i)  $\Gamma, \alpha$ -uygundur.

(ii)  $\iota_n \in \Upsilon$  elemanı vardır öyle ki  $\alpha(\iota_n, \iota_n, \Gamma\iota_n) \geq 1$  dir.

(iii)  $\Gamma$  süreklidir.

O zaman,  $\Gamma$  dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

**Tanım 2.1.7.** (Kesiraju, 2014)

$(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında  $\Gamma$  dönüşümü  $q, r, s$  ve  $t$  negatif olmayan fonksiyonları ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\lambda = \sup_{(\iota, \kappa) \in \Upsilon \times \Upsilon} \{q(\iota, \kappa) + r(\iota, \kappa) + s(\iota, \kappa) + 3t(\iota, \kappa)\} < 1$$

ile

$$S(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq q.S(\iota, \iota, \kappa) + r.S(\iota, \iota, \Gamma\iota) + s.S(\kappa, \kappa, \Gamma\kappa) + t\{S(\iota, \iota, \Gamma\kappa) + S(\kappa, \kappa, \Gamma\iota)\}$$

koşullarını sağlıyorsa bir  $\lambda$ -büzülme olarak adlandırılır.

**Tanım 2.1.8.** (Kesiraju, 2014)  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir dönüşüm ise herhangi bir  $\iota \in \Upsilon$  için  $\Gamma$  dönüşümüne  $\iota$  elemanının yörüngesi denir ve  $O_\Gamma(\iota, \infty)$  ile gösterilir. Ayrıca  $\Gamma^n, \Gamma$  dönüşümünün  $n$ . dereceden iterasyonu olmak üzere

$$O_\Gamma(\iota; \infty) = \{\iota, \Gamma\iota, \Gamma^2\iota, \dots, \Gamma^n\iota \dots\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 2.1.9.** (Kesiraju, 2014)  $\Gamma$ ,  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında bir kendine dönüşüm olsun. Bazı  $\iota_n \in \Upsilon$  için  $O_\Gamma(\iota; \infty)$  kümesindeki her Cauchy dizisi  $\Upsilon$ 'da bir noktaya yakınsak ise  $\Upsilon$ ,  $\Gamma$ -yörüngesel tam olarak adlandırılır.

**Teorem 2.1.3.** (Kesiraju, 2014)  $\Gamma$ ,  $(\Upsilon, S)$   $S$ -metrik uzayında  $\Gamma$ -yörüngesel tam kendine dönüşüm olsun.  $\Gamma$  bir  $\lambda$ -büzülme ise bir tek  $u \in \Upsilon$  sabit noktasına sahiptir. Ayrıca  $\iota_n \in \Upsilon$  olmak üzere  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n(\iota_0) = u$  ve

$$S(\Gamma^n \iota_0, \Gamma^n \iota_0, u) \leq 2 \cdot \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} S(\Gamma^n \iota_0, \Gamma^n \iota_0, \iota_0)$$

eşitsizliği vardır. Üstelik,  $O_\Gamma(\iota; \infty)$  kümesindeki her Cauchy dizisi  $\Upsilon$ 'da bir noktaya yakınsar.

Şimdi bazı ortak sabit nokta teoremlerine değinelim.

**Teorem 2.1.4.** (Chouhan, 2013)

$\Gamma$  ve  $P$ ,  $(\Upsilon, S)$  tam  $S$ -metrik uzayında iki örten kendine dönüşüm olsun ve  $\iota \neq \kappa$  ile  $a, b \geq 0$ ,  $c > 1$  olmak üzere

$$S(\Gamma \iota, \Gamma \iota, P \kappa) \geq \frac{aS(\iota, \iota, \Gamma \iota) + S(\kappa, \kappa, P \kappa)}{S(\iota, \iota, \kappa)} + b \left[ S(\iota, \iota, \Gamma \iota) + S(\kappa, \kappa, P \kappa) \right] + cS(\iota, \iota, \kappa)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman  $\Gamma$  ve  $P$  dönüşümleri  $\Upsilon$  kümesinde bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

**Tanım 2.1.10.** (Matkowski, 1977)  $\Phi$ , her  $t \in (0, \infty)$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0$  eşitliğini sağlayan  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  azalmayan fonksiyonların kümesi olsun.  $\phi \in \Phi$  ise  $\phi$  bir  $\Phi$ -dönüşüm olarak isimlendirilir. Ek olarak,  $\phi$  bir  $\Phi$ -dönüşüm ise

(i) her  $t \in (0, \infty)$  için  $\phi(t) < t$  dir,

(ii)  $\phi(0) = 0$  dir.

**Tanım 2.1.11.** (Sedghi, 2016)  $\Gamma$  ve  $P$  dönüşümleri  $\Upsilon$  kümesi üzerinde tek değerli kendine dönüşümler olsun.  $\iota \in \Upsilon$  için  $\Gamma \iota = P \iota$  eşitliği  $\Gamma P \iota = P \Gamma \iota$  eşitliğini gerektiriyorsa  $\Gamma$  ve  $P$ , zayıf-uygun olarak adlandırılır.

**Teorem 2.1.5.** (Sedghi, 2016)  $(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay olsun. Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için  $\Gamma, P : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümleri

$$S(\Gamma \iota, \Gamma \kappa, \Gamma \varrho) \leq \phi(\max\{S(P \iota, P \iota, \Gamma \iota), S(P \iota, P \iota, \Gamma \kappa), S(P \varrho, P \varrho, \Gamma \varrho)\})$$

eşitsizliğini sağlasın.  $P$  nin görüntüsü  $\Gamma$  nin görüntüsünü içeriyor ve  $\Gamma(\Upsilon)$  ya da  $P(\Upsilon)$  nun biri  $\Upsilon$  nun tam altuzayı ise  $\Gamma$  ve  $P$  dönüşümlerinin  $\Upsilon$  da tek bir çakışma noktası vardır. Dahası  $\Gamma$  ve  $P$  zayıf-uygun ise  $\Gamma$  ve  $P$  bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

## 2.2 $S_b$ -Metrik Uzay

Bu kısımda b-metrik uzay kavramı esas alınarak elde edilmiş olan  $S_b$ -metrik uzaya dair bazı kavramlara yer verilecektir.

**Tanım 2.2.1.** (Souayah, 2016)  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme ve  $\varsigma \geq 1$  olsun.  $S_b : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu  $\iota, \kappa, \varrho, \zeta \in \Upsilon$  için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa  $(\Upsilon, S_b)$  bir  $S_b$ -metrik uzaydır.

- (1)  $S_b(\iota, \kappa, \varrho) = 0 \Leftrightarrow \iota = \kappa = \varrho$ ,
- (2) her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için  $S_b(\iota, \iota, \kappa) = S_b(\kappa, \kappa, \iota)$ ,
- (3)  $S_b(\iota, \kappa, \varrho) \leq \varsigma[S_b(\iota, \iota, \zeta) + S_b(\kappa, \kappa, \zeta) + S_b(\varrho, \varrho, \zeta)]$ .

**Örnek 2.2.1.** (Souayah, 2016)  $\Upsilon$  boştan farklı ve kardinalitesi 5'den büyük veya eşit olan ( $\text{card}(\Upsilon) \geq 5$ ) bir küme olsun.  $\Upsilon = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2$ ,  $\Upsilon$  kümesinin bir bölüntüsü olduğunu varsayalım öyle ki  $\text{card}(\Upsilon_1) \geq 4$  ile tanımlansın.  $\varsigma \geq 1$  alınsın. Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için

$$S_b(\iota, \kappa, \varrho) = \begin{cases} 0, & \Leftrightarrow \iota = \kappa = \varrho, \\ 3\varsigma, & (\iota, \kappa, \varrho) \in \Upsilon_1^3, \\ 1, & (\iota, \kappa, \varrho) \notin \Upsilon_1^3 \end{cases}$$

mevcuttur.  $(\Upsilon, S_b)$  çifti  $\varsigma \geq 1$  katsayısı ile  $\Upsilon$  üzerinde bir  $S_b$ -metrik uzaydır.

**Hatırlatma 2.2.1.** Aşağıdaki örnek  $\Upsilon$  üzerindeki bir  $S_b$ -metrik uzayın her zaman bir  $S$ -metrik uzay olmadığını gösterir.

**Örnek 2.2.2.** (Sedghi, 2016)

$(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay ve  $p > 1$  bir reel sayı olmak üzere

$$S_b(\iota, \kappa, \varrho) = (S(\iota, \kappa, \varrho))^p$$

olsun.  $b = 2^{2(p-1)}$  durumunda  $S_b$  bir  $S_b$ -metrik uzaydır ama her  $S_b$ -metrik uzay bir  $S$ -metrik olmak zorunda değildir.

**Tanım 2.2.2.** (Souayah, 2016)

$(\Upsilon, S_b)$  bir  $S_b$ -metrik uzay ve  $\{\iota_n\}, \Upsilon$  da bir dizi olsun.

(i)  $\{\iota_n\}$  dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $\varrho \in \Upsilon$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $S_b(\iota_n, \iota_n, \varrho) \rightarrow 0$  olmasıdır. Bu durumda  $\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = \varrho$  yazılır.

(ii)  $\{\iota_n\}$  bir Cauchy dizisidir  $\Leftrightarrow n, m \rightarrow \infty$  iken  $S_b(\iota_n, \iota_n, \iota_m) \rightarrow 0$  olmasıdır.

(iii) Her  $\{\iota_n\}$  Cauchy dizisi bir  $\iota \in \Upsilon$  noktasına yakınsıyorsa  $(\Upsilon, S_b)$  bir tam  $S_b$ -metrik uzaydır ve

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} S_b(\iota_n, \iota_n, \iota_m) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} S_b(\iota_n, \iota_n, \iota) = S_b(\iota, \iota, \iota)$$

eşitlikleri vardır.

Şimdi bazı sabit nokta sonuçları ve farklı dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilecektir.

**Teorem 2.2.1.** (Souayah, 2016)  $(\Upsilon, S_b)$  bir tam  $S_b$ -metrik uzay olsun. Her  $t > 0$  sabiti için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 0$$

eşitliğini sağlayan  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu ile her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için

$$S_b(\Gamma\iota, \Gamma\kappa, \Gamma\varrho) \leq \psi[S_b(\iota, \kappa, \varrho)]$$

eşitsizliğini sağlayan  $\Gamma, \Upsilon$  da sürekli kendine bir dönüşüm olsun. Bu durumda  $\Gamma$  dönüşümünün  $\Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktası vardır.

Aşağıdaki teorem, Banach büzülme prensibinin  $S_b$ -metrik uzaylardaki karşılığıdır.

**Teorem 2.2.2.** (Tas, 2021)  $(\Upsilon, S_b)$ ,  $\varsigma \geq 1$  sayısı ile bir tam  $S_b$ -metrik uzay olsun.  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  fonksiyonu  $0 \leq h < \frac{1}{\varsigma^2}$  olması şartıyla her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için

$$S_b(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq hS_b(\iota, \iota, \kappa)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\Gamma$  dönüşümü  $\Upsilon$  kümesinde bir tek  $\iota$  sabit noktasına sahiptir.

**Örnek 2.2.3.** (Tas, 2021)  $\Upsilon = \mathbb{R}$  olsun ve  $\varsigma = 4$  olmak üzere  $S_b$  fonksiyonu her  $\iota, \kappa, \varrho \in \mathbb{R}$  için

$$S_b(\iota, \kappa, \varrho) = \frac{1}{16}(|\iota - \kappa| + |\kappa - \varrho| + |\iota - \varrho|)^2$$

ile tanımlansın. Her  $\iota \in \mathbb{R}$  için  $\Gamma$  kendine dönüşümü

$$\Gamma \iota = \frac{\iota}{6}$$

şeklinde verilmişse  $\Gamma$  dönüşümü Banach büzülme prensibini sağlar. Gerçekten  $h = \frac{1}{18}$  ve her  $\iota \in \mathbb{R}$  için

$$S_b(\Gamma \iota, \Gamma \kappa, \Gamma \varrho) = \frac{|\iota - \kappa|^2}{144} \leq h S_b(\iota, \iota, \kappa) = \frac{|\iota - \kappa|^2}{72}$$

sonucu elde edilir. Böylece  $\Gamma$  dönüşümü,  $\mathbb{R}$  de  $\iota = 0$  şeklinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Teorem 2.2.2 nin bir genellemesi verilecektir.

**Teorem 2.2.3.** (Tas, 2021)  $(\Upsilon, S_b)$ ,  $\varsigma \geq 1$  sayısı ile bir tam  $S_b$ -metrik uzay olsun ve  $\Gamma$  aşağıdaki koşulu sağlayan bir kendine dönüşüm olsun.  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  olmak üzere

$$\alpha_1 + (2\varsigma^2 + \varsigma)\alpha_2 < 1$$

koşulunu sağlayan  $\alpha_1, \alpha_2$  reel sayıları vardır ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$S_b(\Gamma \iota, \Gamma \iota, \Gamma \kappa) \leq \alpha_1 S_b(\iota, \iota, \kappa) + \alpha_2 \max\{S_b(\Gamma \iota, \Gamma \iota, \iota), S_b(\Gamma \iota, \Gamma \iota, \kappa) S_b(\Gamma \kappa, \Gamma \kappa, \iota)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Sırada  $S_b$ -metrik uzaylarda özel tanımlı dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri yer almaktadır.

**Tanım 2.2.3.** (Sastry, 2018)  $(\Upsilon, S_b)$  bir  $S_b$ -metrik uzay,  $\psi, \varphi \in \Psi$  ve  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$  olsun.  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü ele alınsın. Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\begin{aligned} \psi(3\varsigma^3 S_b(\Gamma \iota, \Gamma \iota, \Gamma \kappa)) &\leq \psi\left(\max\left\{S_b(\iota, \iota, \kappa), S_b(\iota, \iota, \Gamma \iota), S_b(\kappa, \kappa, \Gamma \kappa), S_b(\iota, \iota, \Gamma \kappa), \right. \right. \\ &\quad \left. \left. S_b(\kappa, \kappa, \Gamma \iota)\right\}\right) - \varphi\left(\max\left\{S_b(\iota, \iota, \kappa), \lambda(S_b(\iota, \iota, \Gamma \iota) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. S_b(\kappa, \kappa, \Gamma \kappa)), \lambda(S_b(\iota, \iota, \Gamma \kappa) + S_b(\kappa, \kappa, \Gamma \iota))\right\}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa  $\Gamma$  dönüşümü bir  $(\psi-\varphi-\lambda)$ -büzülmedir.

**Teorem 2.2.4.** (Sastry, 2018)  $(\Upsilon, S_b)$  bir  $S_b$ -metrik uzay,  $\psi, \varphi \in \Psi$ ,  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  bir fonksiyon ve  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$  olsun.  $\Gamma$  bir  $(\psi-\varphi-\lambda)$ -büzülme ise  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Şimdi  $S_b$ -metrik uzaylar için bir ortak sabit nokta teoremi ifade edilecektir.

**Teorem 2.2.5.** (Rohen, 2017)  $(\Upsilon, S_b)$ ,  $\varsigma \geq 1$  parametresiyle bir  $S_b$ -metrik uzay olsun.  $\Gamma$  ve  $P : \Upsilon^2 \rightarrow \Upsilon$  dönüşümleri, her  $\iota, \kappa, \varrho, \zeta \in \Upsilon$  ve  $\beta_1 + \beta_2 < 1$  ile

$$\varsigma < \frac{1 - \beta_2}{\beta_1}$$

eşitsizliklerini sağlayan  $\beta_1, \beta_2$  negatif sayıları için

$$S_b(\Gamma(\iota, \kappa), \Gamma(\iota, \kappa), P(\varrho, \zeta)) \leq \beta_1 \frac{S_b(\iota, \iota, \varrho) + S_b(\kappa, \kappa, \zeta)}{2} +$$

$$\beta_2 \frac{S_b(\iota, \iota, \Gamma(\iota, \kappa)) S_b(\varrho, \varrho, P(\varrho, \zeta))}{1 + \varsigma [S_b(\varrho, \varrho, P(\iota, \kappa)) + S_b(\varrho, \varrho, \Gamma(\varrho, \zeta)) + S_b(\iota, \iota, \varrho) + S_b(\kappa, \kappa, \zeta)]}$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\Gamma$  ve  $P$ , bir tek ortak sabit nokta çiftine sahiptir.

### 3 Branciari $S_b$ -Metrik Uzay

**Tanım 3.0.1.** (Roy, 2022)

$\Upsilon$  boştan farklı bir küme ve  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow R_0^+$  bir fonksiyon olsun.  $\sigma$  dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda Branciari  $S_b$ -metrik olarak adlandırılır.  $(\Upsilon, \sigma)$  çiftine de Branciari  $S_b$ -metrik uzay denir.

$$(i) \sigma(\iota, \kappa, \varrho) = 0 \Leftrightarrow \iota = \kappa = \varrho,$$

(ii) Herhangi bir  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  ve  $a, b \in \Upsilon \setminus \{\iota, \kappa, \varrho\}$  için  $a \neq b$  ve  $k \geq 1$  olması durumunda.

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) \leq k[\sigma(\iota, \iota, a) + \sigma(\kappa, \kappa, a) + \sigma(\varrho, \varrho, b) + \sigma(a, a, b)]$$

eşitsizliği mevcuttur.

**Tanım 3.0.2.** (Roy, 2022) Her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için  $\sigma(\iota, \iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \kappa, \iota)$  eşitliği sağlanıyorsa  $\sigma$  Branciari  $S_b$ -metrik boştan farklı  $\Upsilon$  kümesinde simetrik olarak adlandırılır.

**Önerme 3.0.1.** (Roy, 2022)

(i)  $(\Upsilon, S)$  bir  $S$ -metrik uzay olsun.  $k=2$  için  $\Upsilon$ , bir Branciari  $S_b$ -metriktir.

(ii)  $(\Upsilon, S_b)$ ,  $\varsigma \geq 1$  katsayısıyla bir  $S_b$ -metrik uzay olsun.  $\Upsilon$ ,  $k = 2\varsigma^2$  için bir Branciari  $S_b$ -metriktir.

Önerme 3.0.1, herhangi bir  $S$ -metrik uzayın ya da  $S_b$ -metrik uzayın aynı zamanda bir Branciari  $S_b$ -metrik uzay olduğunu ama bazı Branciari  $S_b$ -metrik uzayların ne  $S$ -metrik uzay ne de  $S_b$  metrik uzay olmadığını gösterir.

**Örnek 3.0.1.** (Roy, 2022)

$\Upsilon = \mathbb{N}$  alınsın ve  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = \begin{cases} 0, & \iota = \kappa = \varrho, \text{ ise,} \\ 5, & \iota = 1 = \kappa \text{ ve } \varrho = 2 \text{ ise,} \\ \frac{1}{n+1}, & \iota = 1 = \kappa \text{ ve } \varrho \geq 3 \text{ ise,} \\ \frac{1}{n+2}, & \iota = 2 = \kappa \text{ ve } \varrho \geq 3, \\ 3, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Ayrıca her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için  $\sigma(\iota, \iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \kappa, \iota)$  olsun. Bu durumda  $k = \frac{5}{3}$  için  $\sigma, \Upsilon$  üzerinde bir simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzaydır fakat ne bir  $S$ -metrik uzay ne de  $k \geq 1$  için  $S_b$ -metrik uzaydır.

**Tanım 3.0.3.** (Roy, 2022)  $(\Upsilon, \sigma)$  bir Branciari  $S_b$ -metrik uzay olsun.

- (i)  $\Upsilon$  kümesindeki bir  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\varrho \in \Upsilon$  noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart  $n \rightarrow \infty$  iken  $\sigma(\iota_n, \iota_n, \varrho) \rightarrow 0$  olmasıdır.
- (ii)  $\Upsilon$  kümesindeki bir  $\{\iota_n\}$  dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart  $n, m \rightarrow \infty$  iken  $\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_m) \rightarrow 0$  olmasıdır.
- (iii)  $\Upsilon$  uzayının tam olması için gerek ve yeter şart  $\Upsilon$ 'daki her Cauchy dizisinin  $\Upsilon$ 'daki bir elemana yakınsamasıdır.

**Lemma 3.0.1.** (Roy, 2022)  $(\Upsilon, \sigma)$  bir simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\{\iota_n\}$ ,  $\Upsilon$  'da  $n \neq m$  için  $\iota_n \neq \iota_m$  koşuluna sahip bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda  $\{\iota_n\}$  dizisi sadece bir noktaya yakınsar.

*Kanıt.* (Roy, 2022)  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\iota$  ve  $\kappa$  gibi iki farklı noktaya yakınsadığını varsayalım.  $\{\iota_n\}$  dizisinin tüm elemanları farklı olduğundan  $p \geq 1$  sayısının var olduğunu görürüz öyle ki  $\forall n > p$  için  $\{\iota_n\} \notin \{\iota, \kappa\}$ 'dir. Böylece her  $n > p$  için

$$\begin{aligned} \sigma(\iota, \iota, \kappa) &\leq k.[2\sigma(\iota, \iota, \iota_n) + \sigma(\kappa, \kappa, \iota_{n+1}) + \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] \\ &= k.[2\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \kappa) + \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] \end{aligned}$$

sonucuna varılır.  $n \rightarrow \infty$  alırsak  $\sigma(\iota, \iota, \kappa) = 0$  olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\{\iota_n\}$  dizisi  $\Upsilon$  kümesinde bir tek noktaya yakınsar.  $\square$

**Lemma 3.0.2.** (Roy, 2022)

$(\Upsilon, \sigma)$  bir simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\{\iota_n\}$ ,  $\Upsilon$  'da terimleri farklı yakınsak bir Cauchy dizisi olsun. O halde  $\{\iota_n\}$  dizisinin limiti tektir ve bu limit  $\iota$  noktasıdır. Dahası her  $\varrho \in \Upsilon$  için

$$\frac{1}{k}\sigma(\iota, \iota, \varrho) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma(\iota_n, \iota_n, \varrho) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma(\iota_n, \iota_n, \varrho) \leq k\sigma(\iota, \iota, \varrho)$$

eşitsizlikleri vardır.

**Hatırlatma 3.0.1.** (Roy, 2022)

- (i) Bir  $S$ -metrik uzayda yakınsak bir dizinin limiti daima tektir fakat Örnek 3.0.1'deki  $\{n\}_{n \geq 3}$  dizisinin hem 1 hem de 3 noktasına yakınsadığı açıktır.
- (ii)  $S$ -metrik uzayda herhangi bir yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir ancak Örnek 3.0.1'deki  $\{n\}_{n \geq 3}$  dizisi yakınsaktır ama her  $n, m \geq 3$  için  $\sigma(n, n, m) = 3$  olduğundan bir Cauchy dizisi değildir.

### 3.1 Branciari $S_b$ -Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

**Teorem 3.1.1.** (*Banach Tip Sabit Nokta Teoremi*) Roy (2022)

$(\Upsilon, \sigma)$  bir tam Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  ve  $\alpha \in (0, 1)$  için

$$\sigma(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq \alpha\sigma(\iota, \iota, \kappa) \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

*Kanıt.*  $\iota_0 \in \Upsilon$  elemanı keyfi seçilsin ve her  $n \geq 1$  için  $\iota_n = \Gamma\iota_{n-1}$  ile  $\{\iota_n\}$  dizisi oluşturulsun. Bazı  $p \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\iota_{p-1} = \iota_p$  ise  $\Gamma$  dönüşümünün  $\Upsilon$  üzerinde bir tek sabit noktaya sahip olduğu açıktır. Bu nedenle her  $n \geq 0$  için  $\iota_n \neq \iota_{n+1}$  olduğunu varsayalım.  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon$ 'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

**I.Durum:**  $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt{k}})$  durumunu ele alalım. Her  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned} S_n &= \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \\ &\leq \alpha\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) \\ &\leq \alpha^2\sigma(\iota_{n-2}, \iota_{n-2}, \iota_{n-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n\sigma(\iota_0, \iota_0, \iota_n) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Benzer şekilde her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$S_n^* = \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \leq \alpha^n\sigma(\iota_0, \iota_0, \iota_2) = \alpha^n S_0^*$$

ifadesi mevcuttur. Bazı  $m > n$  için  $\iota_n = \iota_m$  ise

$$0 < S_n = \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) = \sigma(\iota_m, \iota_m, \iota_{m+1}) = S_m$$

olur. Böylece

$$S_n = S_m \leq \alpha S_{m-1} \leq \dots \leq \alpha^{m-n} S_n < S_n$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Buradan herhangi bir  $n, m (n \neq m) \in \mathbb{N}$  için  $\iota_n \neq \iota_m$  sonucuna varılır. Böylece  $p = 2m + 1$  ve  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned}
\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+p}) &\leq k[2\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \sigma(\iota_{n+p}, \iota_{n+p}, \iota_{n+2}) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2})] \\
&= 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) + k\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+p}) \\
&\leq 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) \\
&\quad + k^2[2\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + \sigma(\iota_{n+p}, \iota_{n+p}, \iota_{n+4}) + \sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4})] \\
&= 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) \\
&\quad + 2k^2\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + k^2\sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4}) + k^2\sigma(\iota_{n+4}, \iota_{n+4}, \iota_{n+p}) \\
&\quad \vdots \\
&\leq 2k[\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2})] \\
&\quad + 2k^2[\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + \sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4})] + \dots \\
&\quad 2k^m[\sigma(\iota_{n+2m-2}, \iota_{n+2m-2}, \iota_{n+2m-1}) + \sigma(\iota_{n+2m-1}, \iota_{n+2m-1}, \iota_{n+2m})] \\
&\quad + k^m\sigma(\iota_{n+2m}, \iota_{n+2m}, \iota_{n+2m+1}) \\
&\leq 2[k(\alpha^n + \alpha^{n+1}) + k^2(\alpha^{n+2} + \alpha^{n+3}) + \dots + k^m(\alpha^{n+2m-2} + \alpha^{n+2m-1}) \\
&\quad + k^m\alpha^{n+2m}]\sigma(\iota_0, \iota_0, \iota_1) \\
&= 2k(1 + \alpha)\alpha^n[1 + k\alpha^2 + \dots + k^m\alpha^{2m}]S_0 \\
&\leq \frac{2k(1 + \alpha)}{1 - k\alpha^2}\alpha^n S_0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

sonucuna varılır.  $p = 2m$  alındığında her  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned}
\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+p}) &\leq k[2\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \sigma(\iota_{n+p}, \iota_{n+p}, \iota_{n+2}) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2})] \\
&= 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) + k\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+p}) \\
&\leq 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) \\
&\quad + k^2[2\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + \sigma(\iota_{n+p}, \iota_{n+p}, \iota_{n+4}) + \sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4})] \\
&= 2k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) \\
&\quad + 2k^2\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + k^2\sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4}) + k^2\sigma(\iota_{n+4}, \iota_{n+4}, \iota_{n+p}) \\
&\quad \vdots \\
&\leq 2k[\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + k\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2})] \\
&\quad + 2k^2[\sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+3}) + \sigma(\iota_{n+3}, \iota_{n+3}, \iota_{n+4})] + \dots \\
&\quad + 2k^{m-1}[\sigma(\iota_{n+2m-4}, \iota_{n+2m-4}, \iota_{n+2m-3}) + \sigma(\iota_{n+2m-3}, \iota_{n+2m-3}, \iota_{n+2m-2})] \\
&\quad + k^{m-1}\sigma(\iota_{n+2m-2}, \iota_{n+2m-2}, \iota_{n+2m}) \\
&\leq 2[k(\alpha^n + \alpha^{n+1}) + k^2(\alpha^{n+2} + \alpha^{n+3}) + \dots + k^{m-1}(\alpha^{n+2m-4} + \alpha^{n+2m-3})] \\
&\quad \sigma(\iota_0, \iota_0, \iota_1) + k^{m-1}\alpha^{n+2m-2}\sigma(\iota_0, \iota_0, \iota_2)] \\
&= 2k(1 + \alpha)\alpha^n[1 + k\alpha^2 + \dots + k^{m-2}\alpha^{2m-4}]S_0 + k^{m-1}\alpha^{n+2m-2}S_0^* \\
&\leq \frac{2k(1 + \alpha)}{1 - k\alpha^2}\alpha^n S_0 + \alpha^n(k\alpha^2)^{m-1}S_0^* \\
&= \frac{2k(1 + \alpha)}{1 - k\alpha^2}\alpha^n S_0 + \alpha^n S_0^* \tag{3.3}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.2) ve (3.3) ifadelerinden  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon$  kümesinde bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varırız.  $\Upsilon$  tam olduğundan Lemma 3.1 den dolayı  $\{\iota_n\}$  dizisi bir tek  $\varrho \in \Upsilon$  noktasına yakınsar. Buradan  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma\varrho) \leq \alpha\sigma(\iota_n, \iota_n, \varrho) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece  $\Gamma\varrho = \varrho$  ve  $\varrho, \Upsilon$  da  $\Gamma$ 'nin bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği açıktır.

**II. Durum:**  $\alpha \in [\frac{1}{\sqrt{k}}, 1)$  durumunu ele alalım. Burada bir  $N \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyle ki  $\alpha^N \in (0, \frac{1}{\sqrt{k}})$  aralığındadır. Büzülme şartı 3.1 den dolayı  $\Gamma^N$  Lipschitz sabiti  $\alpha^N$  için büzülme şartı 3.1 i sağlar. I. Durumdan dolayı  $\Gamma^N, \Upsilon$ 'da bir tek sabit noktaya sahiptir ve böylece  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.  $\square$

**Örnek 3.1.1.** Roy (2022)  $\Upsilon = \mathbb{N}$  ve  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$

için

$$\sigma(\iota, \iota, \iota) = 0 \text{ ve } \sigma(\iota, \iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \kappa, \iota)$$

olmak üzere

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = \begin{cases} 10, & \iota = 1 = \kappa \text{ ve } \varrho = 2 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2(n+1)}, & \iota = 1 = \kappa \text{ ve } \varrho \geq 3 \text{ ise,} \\ \frac{1}{n+2}, & \iota = 2 = \kappa \text{ ve } \varrho \geq 3 \text{ ise,} \\ 5, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı olsun.  $\sigma$  dönüşümü  $k=4$  için tam simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzaydır fakat ne  $S$ -metrik ne de bir  $S_b$ -metriktir.  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  fonksiyonu

$$\Gamma(\iota) = \begin{cases} 4, & \iota = 1, \\ 5, & \iota \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde ele alınsın.  $\Gamma^2$  dönüşümü  $\alpha \in (0, 1)$  için büzülme şartı 3.1'i sağlar ve  $\Gamma^2, \Upsilon$ 'da tek bir sabit noktaya sahiptir. Böylece  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde  $\iota = 5$  şeklinde bir tek sabit noktası vardır.

**Teorem 3.1.2.** (Kannan Tip Sabit Nokta Teoremi) Roy (2022)  $(\Upsilon, \sigma)$  bir tam simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\beta \in (0, \frac{1}{2})$  olmak üzere  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\sigma(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq \beta[\sigma(\iota, \iota, \Gamma\iota) + \sigma(\kappa, \kappa, \Gamma\kappa)] \quad (3.4)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\Gamma$  dönüşümünün  $\Upsilon$ 'da bir tek sabit noktası vardır.

*Kanıt.*  $\iota_n \in \Upsilon$  keyfi olarak alınsın. Her  $n \geq 1$  için  $\iota_n$  dizisini  $\iota_n = \Gamma\iota_{n-1}$  şeklinde oluşturalım. Bazı  $i \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\iota_{n-1} = \iota_n$  ise  $\Gamma, \Upsilon$ 'da bir sabit noktaya sahiptir. Bu yüzden her  $n \geq 0$  için  $\iota_n \neq \iota_{n+1}$  olduğunu varsayalım. Burada  $\iota_n$  dizisinin  $\Upsilon$ 'da Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz.

**I. Durum:**  $\beta \in (0, \frac{1}{k+1})$  durumunu ele alalım. Büzülme dönüşümü (3.4)'den her  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned} \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) &= \sigma(\Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_n) \\ &\leq \beta[\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta} < \frac{1}{k}$  olmak üzere

$$S_n = \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \leq \gamma\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) = \gamma S_{n-1} \leq \dots \leq \gamma^n S_0$$

olur. Ayrıca her  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned}
S_n^* &= \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \\
&= \sigma(\Gamma \iota_n, \Gamma \iota_n, \Gamma \iota_{n+1}) \\
&\leq \beta[\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2})] \\
&\leq \beta[\gamma^{n-1} + \gamma^{n+1}]S_0 \\
&= \beta(1 + \gamma)\gamma^{n-1}S_0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. Önceki teoreme benzer işlemler uygulanırsa  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon$ 'da bir Cauchy olduğu görülür.  $\Upsilon$ 'un tamlığından dolayı bir tek  $u \in \Upsilon$  noktası vardır öyle ki  $n \rightarrow \infty$  iken  $\iota_n \rightarrow u$  yakınsaması mevcuttur. Bu durumda her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}
\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) &= \sigma(\Gamma \iota_n, \Gamma \iota_n, \Gamma u) \\
&\leq \beta[\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \sigma(u, u, \Gamma u)] \\
&\leq \beta\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \beta k[2\sigma(u, u, \iota_n) + \sigma(\Gamma u, \Gamma u, \iota_{n+1}) + \\
&\quad \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Böylece  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) \leq \frac{\beta(1+k)\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + 2k\beta\sigma(\iota_n, \iota_n, u)}{1-\beta k} \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan  $\Gamma u = u$  sonucuna varılır ve  $u$ ,  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği açıktır.

**II. Durum:**  $\beta \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{2})$  durumunu inceleyelim. Bu durumda  $N \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyle ki  $\gamma = \frac{\beta}{1-\beta} < 1$  olmak üzere  $\beta\gamma^{N-1} \in (0, \frac{1}{k+1})$ 'dir. Büzülme şartı (3.4)'den dolayı  $\Gamma^N$  dönüşümünün Lipschitz sabiti  $\beta\gamma^{N-1}$  için büzülme koşulu (3.4)'ü sağladığı görülür. I. Durumdan dolayı  $\Gamma^N$  dönüşümünün  $\Upsilon$ 'da bir tek sabit noktası vardır ve böylece  $\Gamma$  bir tek sabit noktaya sahiptir.  $\square$

**Örnek 3.1.2.** Roy (2022)  $\Upsilon = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$  ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\sigma(\iota, \iota, \iota) = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma(\iota, \iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \kappa, \iota)$$

olmak üzere  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = \begin{cases} |n-m|, & \iota = \frac{1}{n} = \kappa, \varrho = \frac{1}{m} \text{ ve } |n-m| > 1, \\ \frac{1}{3}, & \iota = \frac{1}{n} = \kappa, \iota = \frac{1}{n} = \kappa, \varrho = \frac{1}{m} \text{ ve } |n-m| = 1, \\ 1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı olsun.  $\sigma$  dönüşümü  $k = 3$  için bir Branciari  $S_b$ -metriktir ama bir  $S$ -metrik değildir çünkü

$$\sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = 2 > 2\sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) + \sigma\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) = 1$$

eşitsizliği mevcuttur.  $\Gamma: \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü

$$\Gamma(\iota) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \iota = \frac{1}{2} \text{ ise,} \\ \frac{1}{5}, & \iota \leq \frac{1}{3} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilsin.  $\Gamma$  dönüşümü  $\beta = \frac{1}{6}$  için büzülme şartı (3.4)'ü sağlar ve  $\Gamma$  dönüşümünün  $\iota = \frac{1}{5}$  şeklinde  $\Upsilon$ 'da bir tek sabit noktası vardır.

### 3.2 Linear Denklem Sistemi Üzerine Bir Uygulama

Bu bölümde, bir lineer denklem sistemini çözmek için Teorem 3.1.1'in bir uygulaması verilecektir Roy (2022).

Her  $1 \leq i, j \leq n$  için  $p_{ij}, c_i \in \mathbb{R}$  ile birlikte  $n$  bilinmeyenli  $n$  tane lineer denklemler sistemi aşağıdaki gibi ele alınsın.

$$\begin{cases} p_{11}\iota_1 + p_{12}\iota_2 + \dots + p_{1n}\iota_n + c_1 = 0, \\ p_{21}\iota_1 + p_{22}\iota_2 + \dots + p_{2n}\iota_n + c_2 = 0, \\ \vdots \\ p_{n1}\iota_1 + p_{n2}\iota_2 + \dots + p_{nn}\iota_n + c_n = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Lineer denklem sisteminin matris gösteriminde  $P = (p_{ij})_{n \times n}$ ,  $\Upsilon = (\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n)$ ,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  ve  $O = (0, 0, \dots, 0)$  olmak üzere  $P\Upsilon + C = O$  olarak yazılsın. Lineer denklem sistemi (3.8)'in çözümünün bulunması için  $Q = P + I_n$  olmak üzere  $\Gamma\Upsilon = Q\Upsilon + C$  ile tanımlı  $\Gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dönüşümünün bir sabit noktası bulunmalıdır, yani her  $i = 1, \dots, n$  için  $i \neq j$  ve  $q_{ii} = p_{ii} + 1$  ise  $q_{ij} = p_{ij}$  ile  $Q = (q_{ij})_{n \times n}$  olmalıdır.

$\iota = (\iota_i)$ ,  $\kappa = (\kappa_i)$  ve  $\varrho = (\varrho_i)$  olmak üzere  $\sigma: (\mathbb{R}^n)^3 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = \max_{1 \leq i \leq n} [(\iota_i - \kappa_i)^2 + (\kappa_i - \varrho_i)^2]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $\sigma$  bir simetrik  $S_b$ -metrik ve  $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ ,  $k = 4$  için bir simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzaydır.

**Teorem 3.2.1.** Roy (2022) Her  $1 \leq i \leq n$  için

$$\sum_{j=1}^n |q_{ij}| \leq \sqrt{\alpha} < 1 \quad (3.9)$$

oluyorsa lineer denklem sistemi (3.8)'in  $(\mathbb{R}^n, \alpha)$  da tek bir çözümü vardır.

**Örnek 3.2.1.** Roy (2022) Aşağıdaki gibi üç değişkenli bir lineer denklem sistemi ele alınsın.

$$\begin{cases} 0.7\iota_1 + 0.2\iota_2 + 0.1\iota_3 + 1 = 0, \\ 0.1\iota_1 + 0.9\iota_2 + 0.4\iota_3 + 2 = 0, \\ 0.3\iota_1 + 0.1\iota_2 + 0.8\iota_3 + 3 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Bu durumda lineer denklem sistemi (3.10) 'un bir bir çözümü vardır.  $\Upsilon = \mathbb{R}^3$  simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay  $\Upsilon$  'daki her  $\iota = (\iota_i)$ ,  $\kappa = (\kappa_i)$ ,  $\varrho = (\varrho_i)$  için

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = \max_{1 \leq i \leq 3} [(\iota_i - \kappa_i)^2 + (\kappa_i - \varrho_i)^2]$$

ile tanımlı  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  metriğine sahip olsun. Yukarıdaki lineer denklem sistemi (3.10) 'u

$$\begin{aligned} -0.7\iota_1 + 0.2\iota_2 + 0.1\iota_3 - 1 &= 0, \\ -0.1\iota_1 - 0.9\iota_2 - 0.4\iota_3 - 2 &= 0, \\ -0.3\iota_1 - 0.1\iota_2 - 0.8\iota_3 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Burada  $p_{11} = -0.7, p_{12} = -0.2, p_{13} = -0.1; p_{21} = -0.1, p_{22} = -0.9, p_{23} = -0.4; p_{31} = -0.3, p_{32} = -0.1, p_{33} = -0.8; c_1 = -1, c_2 = -2$  ve  $c_3 = -3$  'dür. Böylece  $q_{11} = 0.3, q_{12} = -0.2, q_{13} = -0.1; q_{21} = -0.1, q_{22} = 0.1, q_{23} = -0.4; q_{31} = -0.3, q_{32} = -0.1$  ve  $q_{33} = 0.2$  şeklindedir. Her  $1 \leq i \leq 3$  için

$$\sum_{j=1}^3 |q_{ij}| = 0.6$$

olduğunu görülmektedir. Teorem (3.2.1) 'den lineer denklem sistemi (3.10) 'nun  $\mathbb{R}^3$  de bir tek çözümü vardır ve bu çözüm  $\iota_1 \simeq -0.792$  ,  $\iota_2 \simeq -0.656$  ve  $\iota_3 \simeq -3.507$  ile verilir.

## 4 Araştırma Bulguları

Bu bölümde, tam simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzayda yeni sabit nokta teoremleri ispatlayıp teoremlerden bir tanesinin bir uygulamasını vereceğiz.

**Teorem 4.0.1.** (*Reich Tip Sabit Nokta Teoremi*)

$(\Upsilon, \sigma)$  bir tam simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$  için  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  olmak üzere

$$\sigma(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq \alpha\sigma(\iota, \iota, \kappa) + \beta\sigma(\iota, \iota, \Gamma\iota) + \gamma\sigma(\kappa, \kappa, \Gamma\kappa) \quad (4.1)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

*Kanıt.*  $\iota_o \in \Upsilon, \Upsilon'$  da keyfi bir nokta olsun. Her  $n \geq 1$  için  $\{\iota_n\}$  dizisini  $\iota_n = \Gamma\iota_{n-1}$  ile tanımlayalım. Her  $n \geq 0$  için  $\iota_n \neq \iota_{n+1}$  durumunu ispatlayarak başlarız çünkü bazı  $p \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\iota_{p-1} = \iota_p$  olması durumunda  $\Upsilon'$ da bir tek sabit noktası vardır. Şimdi  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon'$ da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

**I.Durum:**  $\gamma \in (0, \frac{1}{1+k})$  durumunu inceleyelim. Büzülme şartı (4.1)'i kullanarak

$$\begin{aligned} \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) &= \sigma(\Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_n) \\ &\leq \alpha\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \beta\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \Gamma\iota_n) + \gamma\sigma(\iota_n, \iota_n, \Gamma\iota_n) \\ &= (\alpha + \beta)\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \gamma\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan her  $n \in \mathbb{N}$  için  $L = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha} < 1$  olmak üzere

$$S_n = \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \leq L\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) = LS_{n-1} \leq \dots \leq L^n S_0$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} S_n^* &= \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \\ &= \sigma(\Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n+1}) \\ &\leq \alpha\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_{n+1}) + \beta\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n+1}) + \gamma\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma\iota_{n+1}) \\ &\leq \alpha k [2\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) + \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2})] \\ &\quad + \beta\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n+1}) + \gamma\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma\iota_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} S_n^* &= (1 - \alpha k)\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \\ &\leq (2\alpha k + \beta)\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n+1}) + (\alpha k + \gamma)\sigma(\iota_n, \iota_n, \Gamma\iota_n) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan her  $n \geq 1$  için

$$\begin{aligned}\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) &\leq \frac{2\alpha k + \beta}{1 - \alpha k} \sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \frac{\alpha k + \gamma}{1 - \alpha k} \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n+2}) \\ &\leq \frac{2\alpha k + \beta}{1 - \alpha k} L^{n-1} S_0 + \frac{\alpha k + \gamma}{1 - \alpha k} L^{n+1} S_0\end{aligned}$$

sonucuna varırız. Teorem (3.1.1)'in ispatındaki benzer işlemleri uygulayarak  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon$ 'da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterebiliriz.  $\Upsilon$  tam olduğundan bir tek  $u \in \Upsilon$  noktası vardır ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $\iota_n \rightarrow u$  olur. Bu bilgiyi kullanarak  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\begin{aligned}\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) &= \sigma(\Gamma \iota_n, \Gamma \iota_n, \Gamma u) \\ &\leq \sigma(\iota_n, \iota_n, u) + \beta \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \gamma \sigma(u, u, \Gamma u) \\ &\leq \sigma(\iota_n, \iota_n, u) + \beta \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \gamma k [2\sigma(u, u, \iota_n) \\ &\quad + \sigma(\Gamma u, \Gamma u, \iota_{n+1})] \\ &= (\alpha + 2\gamma k) \sigma(\iota_n, \iota_n, u) + (\gamma k + \beta) \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \\ &\quad + \gamma k \sigma(\Gamma u, \Gamma u, \iota_{n+1})\end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu ifadeyi tekrar yazarsak  $n \rightarrow \infty$  iken

$$\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) \leq \frac{\alpha + 2\alpha k}{1 - \gamma k} \sigma(\iota_n, \iota_n, u) + \frac{\gamma k + \beta}{1 - \gamma k} \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \rightarrow 0$$

bulunur. Buradan  $\Gamma u = u$  olur ve  $u$ ,  $\Gamma$ 'nın bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın tekliği açıktır.

**II.Durum:**  $\gamma \in [\frac{1}{1+k}, 1)$  durumunu inceleyelim. Bir  $N \in \mathbb{N}$  sayısı vardır öyle ki  $\gamma^N \in [\frac{1}{1+k}, 1)$  bulunur. Bu yüzden Lipschitz sabiti  $\gamma^N$  ile  $\Gamma^N$  koşul (4.1)'i sağlar. I. Durumdan  $\Gamma^N$ ,  $\Upsilon$ 'da tek bir sabit noktaya sahiptir.  $\square$

**Örnek 4.0.1.**  $\Upsilon = [0, \infty)$  ve her  $\iota, \kappa \in \Upsilon$  için

$$\sigma(\iota, \iota, \kappa) = \sigma(\kappa, \kappa, \iota)$$

koşulu ile birlikte  $\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty)$  dönüşümü

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = (\max\{\iota, \kappa\} - \varrho)^2$$

şeklinde ele alınsın.  $\sigma$  bir tam simetrik Branciari  $S_b$ -metriktir ancak bir  $S$ -metrik uzay değildir çünkü  $\iota = 0, \kappa = 1, \varrho = 3, \zeta = 2$  alındığında  $\sigma(0, 1, 3) = 16 > 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$  bulunur.  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümünü  $\Gamma \iota = \frac{\iota}{2}$  şeklinde tanımlayalım.  $\Gamma$  dönüşümü, Teorem 4.1'in koşullarını sağladığından  $\iota = 0$  şeklinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

**Teorem 4.0.2.** (*Chatterjea Tip Sabit Nokta Teoremi*)  $(\Upsilon, \sigma)$  bir tam simetrik Branciari  $S_b$ -metrik uzay ve  $\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$  için

$$\sigma(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \Gamma\kappa) \leq \beta[\sigma(\iota, \iota, \Gamma\kappa) + \sigma(\kappa, \kappa, \Gamma\iota)] \quad (4.2)$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

*Kanıt.*  $\iota_o, \Upsilon$  kümesinde keyfi bir eleman olsun. Her  $n \geq 0$  için  $\{\iota_n\}$  dizisini  $\iota_n = \Gamma\iota_{n-1}$  şeklinde tanımlayalım. Bazı  $i \in \mathbb{N}$  sayıları için  $\iota_i = \iota_{i-1}$  olduğunda  $\Gamma$  nın,  $\Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktaya sahip olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle, herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $\iota_n \neq \iota_{n+1}$  olduğunu varsayalım.  $\{\iota_n\}$  dizisinin  $\Upsilon$  kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

**I.Durum:**  $\beta \in (0, \frac{1}{\zeta})$  durumunu ele alalım. Büzülme şartı (4.2) ve (Souayah, 2016) nolu çalışmada yer alan sonucu kullanarak

$$\begin{aligned} \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) &= \sigma(\Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_n) \\ &\leq \beta[\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_{n+1}) + \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_n)] \\ &= \beta\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_{n+1}) \\ &\leq \beta[\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1}) + \zeta\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece her  $n \in \mathbb{N}$  için  $M = \frac{\beta}{1-\beta\zeta} < 1$  olarak alındığında

$$\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \leq \frac{\beta}{1-\beta\zeta} \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1})$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} S_n &= \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \\ &\leq M\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) \\ &= MS_{n-1} \\ &\leq M^n S_0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini de yazabiliriz. Üstelik

$$\begin{aligned} S_n^* &= \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \\ &= (\sigma(\Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n-1}, \Gamma\iota_{n+1})) \\ &\leq \beta[\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_{n+2}) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_n)] \\ &\leq \beta k[2\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \sigma(\iota_{n+2}, \iota_{n+2}, \iota_{n+1}) \\ &\quad \sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] + \beta\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) \\ &\leq \beta k[2.M^n S_0 + M^{n+1} S_0] + \beta M^n S_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. (4.3) eşitsizliğinde  $n \rightarrow \infty$  şeklinde limit durumuna geçerse

$$\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+2}) \rightarrow 0$$

buluruz. O zaman  $\{\iota_n\}$ ,  $\Upsilon$ 'da bir Cauchy dizisidir.  $(\Upsilon, \alpha)$  tam olduğundan bir  $u \in \Upsilon$  elemanı vardır ve  $\{\iota_n\}$  dizisi bu noktaya yakınsar.

Şimdi  $\Gamma u = u$  eşitliğini gösterelim. (4.2) ve (Souayah, 2016) nolu çalışmadan yararlanarak

$$\begin{aligned} \sigma(x_{n-1}, x_{n-1}, \Gamma u) &= \sigma(\Gamma \iota_n, \Gamma \iota_n, \Gamma u) \\ &\leq \beta[\sigma(\iota_n, \iota_n, \Gamma u) + \sigma(u, u, \iota_{n+1})] \\ &\leq \beta k[2\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1}) + \sigma(\Gamma u, \Gamma u, \iota_{n+1}) + \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \iota_{n-1}) \\ &\quad + \beta\sigma(u, u, \iota_{n+1})] \\ &\leq 2\beta k\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1}) + \beta k\sigma(\Gamma u, \Gamma u, \iota_{n+1}) + \beta[2\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1}) \\ &\quad + \varsigma\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1})] + \beta\sigma(u, u, \iota_{n+1}) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) &\leq \frac{2\beta k}{1 - \beta k}\sigma(\iota_{n-1}, \iota_{n-1}, \iota_n) + \frac{2\beta}{1 - \beta k}\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n-1}) \\ &\quad + \frac{\beta\varsigma}{1 - \beta k}\sigma(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) + \frac{\beta}{1 - \beta k}\sigma(u, u, \iota_{n+1}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki  $n \rightarrow \infty$  şeklinde limite geçilirse

$$\sigma(\iota_{n+1}, \iota_{n+1}, \Gamma u) \rightarrow 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece  $\Gamma u = u$  bulunur yani  $u$  noktası,  $\Gamma$ 'nın bir sabit noktasıdır.

**II.Durum:**  $\beta \in [\frac{1}{s}, \frac{1}{2})$  durumunu inceleyelim.  $N \in \mathbb{N}$  sayısı ile  $M = \frac{\beta}{1-\beta\varsigma} < 1$  alındığında  $\beta M^{N-1} \in (0, \frac{1}{\varsigma})$  olur.  $\Gamma^N$  fonksiyonu  $\beta M^{N-1}$  katsayısıyla büzülme koşulu (4.2)'yi sağlar. I. Durumdan dolayı,  $\Gamma^N$  fonksiyonunun,  $\Upsilon$  kümesinde bir tek sabit noktası vardır ve böylece  $\Gamma$  fonksiyonunun da bir tek sabit noktası mevcut olur.  $\square$

**Örnek 4.0.2.**  $\Upsilon = R$  alınsın. Her  $\iota, \kappa, \varrho \in \Upsilon$  için

$$\sigma(\iota, \kappa, \varrho) = |\iota - \varrho| + |\iota + \varrho - 2\kappa|$$

ile tanımlansın. İlk olarak  $\sigma$  dönüşümünün bir Branciari  $S_b$ -metrik uzay olduğunu gösterelim.  $\sigma$ , Tanım 3.0.1 'in ilk koşulunu açıkça sağlar. İkinci

koşulu ele alalım. Her  $\iota, \kappa, \varrho, a \in \Upsilon$  için

$$\begin{aligned}
|\iota - \varrho| + |\iota + \varrho - 2\kappa| &\leq |\iota - \varrho| + |\iota - \kappa| + |\varrho - \kappa| \\
&= |\iota - \varrho + a - a| + |\iota - \kappa + a - a| + |\varrho - \kappa| \\
&\leq |\iota - a| + |\varrho - a| + |\iota - a| + |\kappa - a| + |\varrho - \kappa| \\
&= 2|\iota - a| + |\kappa - a| + |\varrho - a + b - b| + |\varrho - \kappa| \\
&\leq 2|\iota - a| + |\kappa - a| + |\varrho - b| + |a - b| + |\varrho - \kappa| \\
&\vdots \\
&= 2\{|\iota - a| + |\kappa - a| + |\varrho - b| + |a - b|\} \\
&\leq 2.k\{|\iota - a| + |\kappa - a| + |\varrho - b| + |a - b|\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece  $\sigma$  bir Branciari  $S_b$ -metrik uzaydır.

$\Gamma : \Upsilon \rightarrow \Upsilon$  dönüşümü

$$\Gamma(\iota) = \begin{cases} \iota + 50, & |\iota - 1| = 1 \\ 45, & |\iota - 1| \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.  $\Gamma$  fonksiyonunun büzülme koşulu (4.2) 'yi sağladığını gösterelim.

**I. Durum:**  $|\iota - 1| = 1$  durumunda

$$\begin{aligned}
\sigma(\iota + 50, \iota + 50, \kappa + 50) &\leq \beta[\sigma(\iota, \iota, \kappa + 50) + \sigma(\kappa, \kappa, \iota + 50)] \\
&= \beta[2|\kappa - \iota + 50| + 2.|\iota + 50 - \kappa|]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
|\iota - \kappa| + |\iota - \kappa| &\leq 2\beta[|\kappa - \iota + 50| + |\iota - \kappa + 50|] \\
2|\iota - \kappa| &\leq 2\beta[|\kappa - \iota + 50| + |\iota - \kappa + 50|] \\
|\iota - \kappa| &\leq \beta[|\iota - \kappa| + 50 + |\iota - \kappa| + 50] \\
&= \beta[2|\iota - \kappa| + 100] \\
|\iota - \kappa| &\leq 2\beta[|\iota - \kappa| + 50]
\end{aligned}$$

bulunur.

**II. Durum:**  $|\iota - 1| \neq 1$  olması durumunda

$$\begin{aligned}
\sigma(45, 45, 45) &\leq \beta[\sigma(\iota, \iota, 45) + \sigma(\kappa, \kappa, 45)] \\
0 &\leq \beta[2|45 - \iota| + 2|45 - \kappa|]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $\Gamma$  dönüşümü, (4.2)'de yer alan büzülme şartını sağlamış olur. O halde  $\Gamma, \Upsilon$  kümesinde  $\iota = 45$  şeklinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

## 4.1 Uygulama

Bu bölümde, Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığını ispatlamak için Teorem 4.0.2'nin bir uygulaması verilecektir.  $\Upsilon = C[a, b]$  kapalı aralıkta reel değerli tüm fonksiyonların kümesi olsun.

$$\sigma : \Upsilon^3 \rightarrow [0, \infty); \quad \sigma(\iota(\zeta), \kappa(\zeta), \varrho(\zeta)) = \sup_{\zeta \in [a, b]} (|\max\{\iota(\zeta), \kappa(\zeta)\} - \varrho(\zeta)|)^2$$

dönüşümü ele alınsın.  $(\Upsilon, \sigma)$  bir simetrik tam Branciari  $S_b$ -metrik uzaydır.  $g : [a, b] \rightarrow (-\infty, \infty)$  ve  $M : [a, b] \times [a, b] \times (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$  sürekli fonksiyonlar olmak üzere  $\zeta, \varsigma \in [a, b]$  için aşağıdaki Fredholm integral denklemi göz önünde bulundursun.  $\Gamma$  fonksiyonu

$$\Gamma\iota(\zeta) = \int_a^b M(\zeta, \varsigma, \iota(\varsigma)) d\varsigma + g(\zeta)$$

ile verilsin. Ayrıca  $\Gamma$  dönüşümü, her  $\zeta, \varsigma \in [a, b]$  için aşağıdaki koşulu sağlasın.

$$|M(\zeta, \varsigma, \iota(\varsigma)) - M(\zeta, \varsigma, \Gamma\iota(\varsigma))| \leq \frac{1}{2} |\iota(\varsigma) - \Gamma\iota(\varsigma)|.$$

Yukarıda verilen ifadeler göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned} \sigma(\Gamma\iota(\zeta), \Gamma\iota(\zeta), \Gamma\kappa(\zeta)) &= |\Gamma\iota(\zeta) - \Gamma\kappa(\zeta)|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \int_a^b |M(\zeta, \varsigma, \iota(\varsigma)) - M(\zeta, \varsigma, \Gamma\kappa(\varsigma))| d\varsigma\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \int_a^b |M(\zeta, \varsigma, \iota(\varsigma)) - M(\zeta, \varsigma, \Gamma\kappa(\varsigma))|^2 d\varsigma \\ &\leq \frac{1}{4} \int_a^b |M(\zeta, \varsigma, \iota(\varsigma)) - M(\zeta, \varsigma, \Gamma\kappa(\varsigma))|^2 d\varsigma \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_a^b |M(\zeta, \varsigma, \kappa(\varsigma)) - M(\zeta, \varsigma, \Gamma\iota(\varsigma))|^2 d\varsigma \\ &= \frac{1}{4} [\sigma(\iota(\zeta), \iota(\zeta), \Gamma\kappa(\zeta)) + \sigma(\kappa(\zeta), \kappa(\zeta), \Gamma\iota(\zeta))] \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.0.2'nin tüm koşulları sağlandığı için  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Böylece Fredholm integral denkleminin bir tek çözümü vardır.

Şimdi  $C^*$ -cebiri değerli genişletilmiş  $b$ -metrikten hareketle elde edilmiş yeni bir metrik uzay tanımlayacağız.

**Tanım 4.1.1.**  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme ve  $\alpha : \Upsilon^3 \rightarrow [1, \infty)$  ile tanımlı bir fonksiyon olsun.  $S_\alpha : \Upsilon^3 \rightarrow \mathbb{A}$  dönüşümü her  $\iota, \kappa, \varrho, a \in \Upsilon$  için aşağıdaki koşulları sağlasın.

$$(i) S_\alpha(\iota, \kappa, \varrho) \succeq \theta,$$

$$(ii) S_\alpha(\iota, \kappa, \varrho) = \theta \Leftrightarrow \iota = \kappa = \varrho,$$

$$(iii) S_\alpha(\iota, \kappa, \varrho) \preceq \alpha(\iota, \kappa, \varrho)S_\alpha(\iota, \iota, a) + S_\alpha(\kappa, \kappa, a) + S_\alpha(\varrho, \varrho, a).$$

O halde  $S_\alpha$ ,  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik ve  $(\Upsilon, \mathbb{A}, S_\alpha)$ ,  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzay olarak adlandırılır.

**Örnek 4.1.1.**  $\Upsilon = [0, \infty)$ ,  $\mathbb{A} = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$  ve  $S_\alpha : \Upsilon^3 \rightarrow \mathbb{A}$  dönüşümü

$$S_\alpha(\iota, \kappa, \varrho) = (\max\{\iota, \kappa\} - \varrho)^2$$

ile tanımlı iken  $\alpha : \Upsilon^3 \rightarrow [1, \infty)$  fonksiyonu

$$\alpha(\iota, \kappa, \varrho) = \max\{\iota, \kappa\} + \varrho + 1$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda  $(\Upsilon, \mathbb{A}, S_\alpha)$  bir  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzaydır.

Aşağıda  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzayda Kannan tipi sabit nokta teoremi verilecektir.

**Teorem 4.1.1.**  $(\Upsilon, \mathbb{A}, S_\alpha)$  bir tam  $C^*$ -cebir-değerli genişletilmiş  $S_b$ -metrik uzay olsun.  $\alpha(\iota, \kappa, \varrho) : \Upsilon^3 \rightarrow [1, \infty)$  fonksiyonu

$$\alpha(\iota, \kappa, \varrho) = \max\{\iota, \kappa\} + \varrho + 1$$

ile tanımlı iken  $\Gamma$  dönüşümü aşağıdaki eşitsizliği sağlasın.

$$S_\alpha(\Gamma\iota, \Gamma\kappa, \Gamma\varrho) \preceq \alpha(\iota, \kappa, \varrho)(S_\alpha(\Gamma\iota, \Gamma\iota, \iota) + S_\alpha(\Gamma\kappa, \Gamma\kappa, \kappa) + S_\alpha(\Gamma\varrho, \Gamma\varrho, \varrho)) \quad (4.4)$$

Bu durumda,  $\Gamma$  dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

*Kanıt.*  $\Upsilon$  boştan farklı bir küme ve  $\iota \in \Upsilon$  olsun. Her  $\iota_0 \in \Upsilon$  için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \theta(\Gamma^n \iota_0, \Gamma^n \iota_0, \Gamma^m \iota_0) < 1$$

elde edilir. Şimdi  $\{\Gamma^n(\iota)\}$  dizisinin  $\mathbb{A}$  ya göre bir Cauchy dizisi olduğunu

gösterelim. (4.4) deki eşitsizlik kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
S_\alpha(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) &= S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n+1}(\iota)) \\
&\preceq \alpha(\Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^n(\iota)) [S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) \\
&\quad + S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) + S_\alpha(\Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^n(\iota))] \\
&= \alpha(\Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^n(\iota)) [2S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) \\
&\quad + [S_\alpha(\Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^n(\iota))] \\
&\preceq \alpha(\Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^n(\iota)) [2\alpha(\Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-2}(\iota)) \\
&\quad [2S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) + S_\alpha(\Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota), \Gamma^{n-2}(\iota))] \\
&\quad + \alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) [2S_\alpha(\Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^{n+1}(\iota), \Gamma^n(\iota)) \\
&\quad + S_\alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota))].
\end{aligned}$$

$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \alpha(\Gamma^n(\iota), \Gamma^n(\iota), \Gamma^{n-1}(\iota)) < 1$  olduğundan  $S_\alpha(\iota_n, \iota_n, \iota_{n+1}) = \theta$  bulunur. Bu durumda  $\{\Gamma^n(\iota)\}$ ,  $\mathbb{A}$  ya göre bir Cauchy dizisidir.  $(\Upsilon, \mathbb{A}, S_\alpha)$  uzayı tam olduğundan  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma^n(\iota) = \iota$  olacak şekilde bir  $\iota_0 \in \Upsilon$  sabit noktası vardır.  $\square$

## 5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında, S-metrik uzaylar ve bu uzaylardaki bazı sabit nokta sonuçları ele alınmıştır. Literatürde var olan birkaç sabit nokta teoreminden yararlanarak yeni tanımlanan Branciari  $S_b$ -metrik uzaylarda bazı yeni sabit nokta teoremleri ve uygulamaları elde edilmiştir. Bu yeni metrik uzayda ele alınabilecek birçok yeni sabit nokta teoreminin olması tez konusunun potansiyelini ortaya koymakta olup tez çalışmasının bu alandaki araştırmacılar için birçok açık problem barındırdığı görülmektedir.



## Kaynaklar

- Afra, J. M. (2015). Fixed point type theorem for weak contraction in S-metric spaces. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 22, 11–14.
- Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. *Fundamenta Mathematicae*, 2, 133-181.
- Chatterjea, S. K. (1972) Fixed point theorems. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 25, 727-730.
- Chouchan, P., and Malviya N. A. (2013). Common unique fixed point theorem for expansive type mappings in S-metric spaces. *International Mathematical Forum*, 8(26), 1287-1293.
- Ege, M. E., and Alaca, C. (2018). C\*-algebra-valued S-metric space. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 67(2), 165-177.
- Gupta, A. (2013). Cyclic contraction on S-metric space. *International Journal of Analysis and Applications*, 3(2) 119-130.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 10, 71-76.
- Kesiraju, S., and Rani, V. J. (2014). Fixed point theorems for generalized contractions on S-metric spaces. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics*, 3(2), 59-61.
- Kim, J. K., Sedghi, S., Gholidahneh, A., and Rezaee, M. M. (2016). Fixed point theorems in S-metric spaces. *East Asian Mathematical Journal*, 32(5), 667-684.
- Lipschutz, S. (1965). *General Topology*, Schaum's Outlines.
- Matkowski, J. (1977). Fixed point teorems for mapping with a contractive iterate at a point. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 62, 344-348.

- Ma, Z., and Jiang, L. (2015).  $C^*$ -algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(222), 1-12.
- Ma, Z., Jiang, L., and Sun, H. (2014).  $C^*$ -algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2014(206), 1-12.
- Mlaiki, N. (2015).  $\alpha - \psi$  contractive mapping on S-metric space, *Mathematical Science Letters*, 4(1), 9-12.
- Mlaiki, N. (2018). Extended  $S_b$ -metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis*, 9(1), 124-135.
- Phaneendra, T., and Swamy, K. K. (2017). Fixed points of Chatterjea and Ciric contractions on an S-metric space. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 115(2), 361-367.
- Priyobarta, N., Rohen, Y., and Mlaiki, N. (2017). Complex valued  $S_b$ -metric spaces. 8, 13-24.
- Prudhvi, K. (2016). Some fixed point results in S-metric spaces. *Journal of Mathematical Sciences and Applications*, 4(1), 1-3.
- Reich, S. (1972). Fixed points of contractive functions. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 5, 26-42.
- Rohen, Y., Došenović, T., and Radenović, S. (2017). A note on the paper "A fixed point theorems in  $S_b$ -metric spaces". *Filomat*, 31(11), 3335-3346.
- Roy, K., and Saha, M. (2022). Branciari  $S_b$ -metric space and related fixed point theorems with an application. *Applied Mathematics E-Notes*, 22, 8-17.
- Saleem, N., Ansari, A. H., Pavlović, M., and Radenović, S. (2017). Some new results in the framework of  $S_b$ -metric spaces. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar Series A: Applied Mathematics, Informatics and Mechanics*, 9, 151-165.
- Sastry, K. P. R., Sarma, K. K. M., Kumari, K. P. (2018). Fixed point theorems for  $(\psi - \varphi - \lambda)$  contractions in  $S_b$ -metric spaces. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 56(1), 28-39.

- Sedghi, S., Mahdi, R. M., Došenović, T., and Radenović, S. (2016). Common fixed point theorems for contractive mappings satisfying  $\Phi$ -maps in S-metric spaces. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 8(2), 298-311.
- Sedghi, S., Shobe, N., and Aliouche, A. (2012). A generalization of fixed point theorem in S-metric spaces. *Matematicki Vesnik*, 64, 258-266.
- Sedghi, S., and Dung, N. V. (2012). Fixed point theorems on S-metric spaces. *Matematicki Vesnik*, 66, 113-124.
- Sedghi, S., Gholidahneh, A., Došenović, T., Esfahani, J., and Radenović, S. (2016) Common fixed point of four maps in  $S_b$ -metric spaces. *Journal of Linear and Topological Algebra*, 5, 93-104.
- Singh, M. R., and Singh, T. B. (2021). Some fixed theorems for  $\alpha$ -admissible mappings in  $S_b$ -metric spaces. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 11(2), 1584-1600.
- Singthong, U., and Kingkam, W. (2017). Some property of fixed point theorems in S-metric spaces. *The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)*, 1-5.
- Souayah, N., and Mlaiki, N. (2016). A fixed point theorem in Sb-metric spaces. *Journal of Mathematics and Computer Science* 16, 131-139).
- Taş, N., Özgür, N. Y., and Mlaiki, N. (2018). Some fixed point results on complex valued  $S_b$ -metric spaces. *Mathematical Sciences And Application E-Notes*, 6(2), 10-21.
- Taş, N., Özgür, N. (2021). New generalized fixed point results on  $S_b$ -metric spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 24-32.

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma sűresince desteęini esirgemeyen, zellikle kıymetli grűŐlerinden yararlandıęım ve yakın ilgisini esirgemeyen DanıŐmanım Sayın Doę. Dr. zgűr EGE'ye ve tez sűresi boyunca desteęini esirgemeyen aileme teŐekkűrű bir borę bilirim.

17/11/2023

İmzası

Gizem TŪNAR

## Bildirileri

### Uluslararası Konferanslarda Sunulan Bildirileri

1- Gizem TÜNAR and Özgür EGE, Some Fixed Point Theorems in  $C^*$ -Algebra-Valued Extended  $S_b$ -Metric Spaces, 1st International Symposium on Recent Advances in Fundamental and Applied Sciences (ISFAS2021), Atatürk University, Erzurum, TURKEY, 10-12 September 2021, pp. 167.

### Ulusal Konferanslarda Sunulan Bildirileri

1- Gizem TÜNAR and Özgür EGE,  $C^*$ -Cebir-Değerli Genişletilmiş  $S_b$ -Metrik Uzaylar, 33. Ulusal Matematik Sempozyumu, 31 Ağustos – 3 Eylül 2021, p.84, İstanbul Üniversitesi, İstanbul.