

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARIN
BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS

Ayda MURAT

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

ARALIK 2023

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARIN
BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

YÜKSEK LİSANS

Ayda MURAT
(36203614034)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

ARALIK 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans danışmanlığımı üstlenip ve bu tez çalışmasının her aşamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedi beni her konuda yönlendiren, her zorlukta beni destekleyen ve her zaman sabırla yanımda olan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet Yıldız’a,

Çalışmalarında ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışmalarım sürecinde benden her türlü desteklerini hissettiren anneme ve babama,

Bana gösterdiği saygı, sevgi, güven, beni bu yolda teşvik eden, maddi ve manevi desteklerini sakınmadan, her zorluğu aşmamda bana yardımcı olan sevgili eşim Mustafa Murat’a,

Ona ayırmam gereken zamandan fedakarlık gösteren canım oğlum Erdiç Murat’a,

Tezin uygulama aşamasında vermiş oldukları maddi ve manevi destekten dolayı, İnönü Üniversitesine,

sonsuzca teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “ (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldların Biharmonik Altmanifoldları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ayda Murat



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Ön Bilgiler	4
2.2 Türevlenebilir Manifoldlar ve Riemann Manifoldları	11
2.3 3-Boyutlu Manifoldlar Üzerinde Eğrilerin Frenet Denklemleri	16
3. HARMONİK VE BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER.....	20
3.1 Harmonik Dönüşümler	20
3.2 Biharmonik Dönüşümler	23
4. (κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARI.....	26
4.1 Paradeğme Manifoldları	26
4.2 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldlar	29
5. (κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI	32
5.1 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldların Biharmonik Eğrileri	32
5.2 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldların Biharmonik Hiperyüzeyleri.....	54
6. SONUÇ	62
KAYNAKLAR.....	63
ÖZGEÇMİŞ	66

TABLO DİZİNİ

Tablo 5.1.1 : 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu üzerinde zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri eğrilerin biharmonik denklemleri.....	50
---	-----------



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

η	: 1-form
ϕ	: (1.1) tipinde tensör alanı
τ_2	: Bitensiyon alanı
ϕ	: Diferensiyellenebilir dönüşüm
div	: Divergens
f_*	: f nin türev dönüşümü
$grad$	: Gradyent operatörü
V_g	: Hacim Elementi
ξ	: Karakteristik vektör alanı
Δ	: Laplasyan operatörü
∇	: Levi-Civita Koneksiyonu, Riemann Koneksiyonu
$\Gamma(TM)$	: M nin Vektör Alan Uzayı
M, N	: Manifold
g	: Metrik tensör
$C^\infty(M)$	: M üzerinde diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi
$\ \cdot \ $	: Norm
H	: Ortalama eğrilik
$T_p M$	: p noktasında tanjant uzay
f^*	: Pull-back dönüşüm
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
S	: Ricci eğriliği
Q	: Ricci operatörü
R	: Riemann eğrilik tensör alanı
r	: Skaler eğrilik
A	: Şekil operatörü
τ	: Tensiyon alanı
$W^\perp$	: W alt uzayında dik uzay
$\int_\Omega$	: Ω kompakt bölgesi üzerinde integral işlemi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

(κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

Ayda Murat

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

66+VII sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Yıldız

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde bu çalışmanın sonraki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde harmonik ve biharmonik dönüşümler incelenmiştir. Dördüncü bölüm (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldları incelenmeye ayrılmıştır. Beşinci bölümde (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların altmanifoldları için biharmonik olma şartları çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: (κ, μ) -paradeğme metrik manifold, paradeğme metrik manifold, harmonik dönüşüm, biharmonik dönüşüm

ABSTRACT

Master Thesis

BIHARMONICAL SUBMANIFOLDS OF (κ, μ) -PARACONTACT METRIC MANIFOLDS

Ayda Murat

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

66+VII pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Yıldız

This study, prepared as a masters thesis, consists of five chapters. The first part is the introduction. In the second section, definitions and concepts used in the subsequent sections of this study are given. In the third chapter, harmonic and biharmonic transformations are examined. The fourth chapter is devoted to examining (κ, μ) -paracontact metric manifolds. In the fifth chapter, the conditions of the biharmonic submanifolds of (κ, μ) -paracontact metric manifolds are examined.

Keywords: (κ, μ) -paracontact metric manifolds, paracontact metric manifolds, harmonic map, biharmonic map

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, şekillerin ve yüzeylerin incelenmesi ile ilgilenen bir matematik dalıdır ve genellikle eğrilerin ve yüzeylerin özelliklerinin incelenmesine odaklanır. Bu tür inceleme 17. yüzyılında Descartes ve Fermat tarafından ortaya atılan koordinat metodudur. Bundan sonra Leibniz çalışmalarında diferansiyel geometrinin anlamlarını ortaya çıkarmıştır [23]. Diferansiyel geometri, matematik dışında fizikteki birçok problemi de çözmek için kullanılır.

Diferansiyel geometrinin ana konularından bazıları eğriler, yüzeyler, manifoldlar olarak bilinir. Eğrilerin parametrik gösterimi Euler tarafından 18. Yüzyılında bulunmuştur ve bu konuda önemli sonuçlar elde etmiştir. 1795 yılında yüzeyler üzerinde ilk kitap Monge tarafından yazılmıştı ve 1827 yılında Gauss yüzeylerin eğriliği konusunda önemli buluşlar elde etmiştir. Riemann 1851 yılında Riemann Geometriyi tanımlamış ve Gaussun bulduğu eğrilik ölçüsüne karşılık Riemann eğrilik tensör alanını ortaya koymuştur [25]. Dolayısıyla 19. yüzyılı diferansiyel geometri için en önemli dönem olmuştur. Riemann tarafından tanımlanan manifold kavramı geniş bir alanda kullanmaya başladı. Riemann Gauss eğriliğini yüksek boyutlu manifoldların eğriliğini belirlemek için kullandı [25]. Diferansiyel geometrinin en aktif çalışma alanlarından biri Chen tarafından toplanan altmanifoldlar teorisidir [25]. Bir eğri, bir yüzeyin veya bir manifoldun parçası; bir yüzey bir manifoldun parçasından oluşur yani bir eğri ve bir yüzey bir manifoldun bir altmanifoldudur, dolayısıyla manifoldlar, eğriler ve yüzeylerin daha genel birleşimleridir ve genellikle daha yüksek boyutlarda oluşurlar. Diferansiyel geometrinin önemli bir parçası olan Riemannian manifoldlar, yerel olarak düzgün bir şekle benzetilebilen ve her bir noktada bir iç çarpımın tanımlandığı manifoldlardır. Bir Riemannian manifold üzerinde bir yolun uzunluğu iç çarpım sayesinde hesaplanabilir. Riemannian metriği, bir manifoldun "eğrilik" özelliklerini tanımlar. Ayrıca, bir Riemannian manifoldun 'eğrilik' niteliklerini belirlemek için eğrilik tensörüne başvurulabilir ve genellikle $R(X, Y)Z$ ile gösterilir.

Harmonik manifoldlar bir fonksiyonun Laplace operatörünün uygulanmasının sonucunda sıfır vermesidir yani f dönüşümü üzerinde $\Delta f = 0$ olmasıdır. Bir Riemannian manifold üzerinde altmanifoldunun harmonik olup olmadığını belirlemek için, genellikle altmanifoldunun tension alanını kullanırız. f dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(f)$ ile gösterilir ve eğer $\tau(f) = 0$ ise f dönüşümü harmoniktir denir ve $\tau(f) = 0$ denkleme harmonik denklemi denir. Harmonik dönüşümleri 1954 yılında Sampson ortaya koymuştur [25]. Bundan sonra çok-harmonik dönüşümleri 1983 yılında Eells ve Lemaire tarafından incelendi. Özel olarak 2-harmonik dönüşümler için Jiang birinci ve ikinci varyasyon denklemlerini elde etmiştir. 2-harmonik dönüşümler günümüzde biharmonik dönüşümü olarak tanımlanır [25].

Biharmonik bir fonksiyonun temel özelliği, Laplace operatörünün iki kez uygulanmasının sonucunda sıfır vermesidir, yani f dönüşümü üzerinde $\Delta^2 f = 0$ olmasıdır. Biharmonik altmanifoldlar, biharmonik haritalar aracılığıyla daha geniş bir biharmonik geometri bağlamında incelenir. Bir Riemannian manifold üzerinde bir altmanifoldun biharmonik olup olmadığını belirlemek için, genellikle dönüşümün bitension alanını $\tau_2(f)$ kullanırız. f dönüşümde $\tau_2(f) = 0$ ise f dönüşümü biharmonik dönüşümdür denir ve $\tau_2(f) = 0$ denklemi de biharmonik denklemi adını alır.

Değme geometri Huygens, Hamilton ve Jacobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından bundan iki yüzyıl önce, ortaya çıkmıştır [8]. Sato diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde hemen hemen paradeğme yapıyı 1976 yılında tanıtmıştır [15]. Paradeğme yapılar, bir dizi matematiksel nesneyi tanımlamak için kullanılan geometrik bir kavramdır. Bu yapılar genellikle $(2n + 1)$ -boyutlu gerçel manifoldlar üzerinde tanımlanır ve bir 1-form ile bu 1-formun bir vektör alanına göre tanımlanan Lie türevini belirtmek üzere bir $(1,1)$ -tensör alanıyla karakterize edilirler. Bu tür yapılar, özellikle modern diferensiyel geometri ve global analiz alanlarında önemli bir rol oynar. Hemen hemen paradeğme metrik manifoldların ve paradeğme metrik manifoldların özellikleri Zamkovoy tarafından incelenmiştir [31]. Paradeğme metrik manifoldlar, geometrik özellikleri ve çeşitli alanlardaki uygulamaları nedeniyle diferensiyel geometride kapsamlı bir şekilde incelenmektedir. Özellikle, (κ, μ) -paradeğme metrik manifold kavramı son yıllarda araştırılmaktadır. Bir (κ, μ) -paradeğme metrik manifold, belirli özellikleri karşılayan bir paradeğme metrik yapı ile donatılmış bir Riemann manifoldudur.

Bu tez çalışmasının temel amacı (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların biharmonik altmanifoldlarını incelemektir, dolayısıyla önce (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldları ve biharmonik manifoldlarını iyi kavramak için ilgili temel kavramları incelenip daha sonra (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların biharmonik altmanifoldları incelenecektir.

Geniş bir uygulama yelpazesi olan bu matematiksel yapıları daha iyi anlamak ve kullanmak, gelecekteki bilimsel ve teknolojik ilerlemeleri teşvik edecektir. Bu nedenle, bu çalışma, bu alanda daha derinlemesine anlayış ve daha geniş uygulama olanakları sağlamaya yönelik olarak tasarlanmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmuştur. İlk alt bölümde diferansiyel geometrinin temel bilgileri hatırlamak amacıyla bir takım tanımlar verilmiştir. İkinci alt bölümde diğer bölümleri daha kolay bir şekilde anlamak için diferansiyel manifoldlar üzerinde bazı temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü alt bölümde 3-boyutlu manifoldlar üzerinde eğrilerin frenet denklemlerine yer verilmiştir.

2.1 Ön Bilgiler

Tanım 2.1.1. F cismi üzerinde V boş olmayan bir kümeyi göz önüne alalım. V üzerinde

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad + (x, y) = x + y$$

ve

$$\cdot : F \times V \rightarrow V, \quad \cdot (\lambda, x) = \lambda x$$

işlemlerini tanımlandığında her $x, y, z \in V$ ve $\lambda, \mu \in F$ için

- i. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- ii. $x + y = y + x$
- iii. $x + 0 = x$
- iv. $\forall x \in V$ için $\exists (-x)$ $x + (-x) = 0$
- v. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vi. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- vii. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- viii. $1x = x$

şartları sağlansın o zaman V kümesine F cismi üzerinde vektör uzayıdır denir, burada V kümesinin elemanları yani x, y, z ler vektör ve F cisminin elemanları yani λ, μ ler skaler dir [25].

Tanım 2.1.2. F bir cisim olup ve V de bu cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

olacak şekilde bileşenlerin hepsi aynı anda sıfır olmayan $a_1, a_2, \dots, a_n$ skalerleri var ise o zaman $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektörlerine lineer bağımlıdır denir aksi taktirde $a_1, a_2, \dots, a_n$ hepsi aynı zamanda sıfır ise bu vektörlere F nin üzerinde lineer bağımsızdır denilmektedir. V vektör uzayı n adet vektöre sahip ve bu n vektör $e_1, e_2, \dots, e_n$ lineer bağımsız olsun. $v \in V$ için, $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörlerin bir lineer birleşimi, yani $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n$ oluyorsa $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesine V uzayının bir bazı denilmektedir ve bu uzayının bazıını n tane vektör oluşturduğundan V uzayı n -boyutludur ve V uzayın boyutunu $boy(V) = n$ şeklinde yazılır [25].

Tanım 2.1.3. V vektör uzayının üzerinde f dönüşümünü

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlayalım. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ olsun. Eğer f dönüşümü;

$$f(u, v) = f(v, u)$$

özellğe sahipse f dönüşümü simetriktir denir ve eğer simetrik f dönüşümü;

$$i. \quad f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$$

$$ii. \quad f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$$

özelliklerine sahip ise o zaman f dönüşüme simetrik bilineer formu adını alır [20].

Ayrıca f simetrik bilineer formunda $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için;

$$i. \quad f(v, v) > 0 \text{ şartı sağlanıyorsa } f \text{ simetrik bilineer form pozitif,}$$

$$ii. \quad f(v, v) \geq 0 \text{ şartı sağlanıyor ise } f \text{ simetrik bilineer form yarı pozitif,}$$

$$iii. \quad f(v, v) < 0 \text{ şartı sağlanıyor ise } f \text{ simetrik bilineer form negatif,}$$

$$iv. \quad f(v, v) \leq 0 \text{ şartı sağlanıyor ise } f \text{ simetrik bilineer form yarı negatif,}$$

olarak tanımlanır [20].

Diğer yandan;

$$i. \quad f \text{ nin nondejenere olması için } \forall w, v \in V \text{ için } f(v, w) = 0 \text{ olduğunda } v = 0 \text{ dir.}$$

$$ii. \quad f \text{ nin dejenere olması için } \forall w, v \in V \text{ için } f(v, w) = 0 \text{ olduğunda } v \neq 0 \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.4. V bir vektör uzayı olsun. V üzerinde nondejenere simetrik bilineer forma bir skaler çarpma denir. f dönüşümü V vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpma ise (V, f) ikilisine de skaler çarpımlı vektör uzayı denir [20].

Tanım 2.1.5. $v, w \in V$ için $v, w \neq 0$ olduğu zaman $\langle v, w \rangle = 0$ olursa v ile w vektörleri birbirine dik olur yani iki vektör birbirine ortogonaldır [20].

Tanım 2.1.6. W vektör uzayı V vektör uzayının bir altuzayı olsun. $v \in V$ için $v \perp W$ ise $W^\perp$ alt uzayı V vektör uzayına diktir denir [17].

Tanım 2.1.7. V vektör uzayında

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

bir simetrik bilinear formun ve V nin en büyük boylu altuzayı W için

$$f|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı ise W nin boyutuna f nin indeksi denir [20].

Tanım 2.1.8. F bir cisim olsun. F üzerinde bir V vektör uzayını ele alalım ve f dönüşümünü $f: V \rightarrow F$ şeklinde tanımlayalım eğer $\forall u, v \in V$

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v)$$

eşitliği sağlanıyorsa f dönüşümü lineerdir denir.

F cismi üzerinde Lineer dönüşümlerin kümesi

$$(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$

ve

$$(\lambda_1 f)(v) = \lambda_1 f(v)$$

işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı olur ve bu oluşan vektör uzayına V uzayın duali denir ve V^* ile gösterilir [25].

Tanım 2.1.9. V bir vektör uzayı ve bu vektör uzayın dual uzayı V^* olsun. Bu durumda f dönüşümü

$$f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_r \text{ tane} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_s \text{ tane} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlansın ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots, v_s \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \dots, v_r^* \in V^*$ olmak üzere f dönüşümü

$$f(v_1, \dots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v'_k, \dots) = \lambda_1 f(v_1, \dots, v_k, \dots) + \lambda_2 f(v_1, \dots, v'_k, \dots)$$

şartını sağlansın. O zaman f dönüşümüne r . mertebeden kovaryant ve s . mertebeden kontravaryant tensör alanına sahiptir denir ve T_s^r şeklinde gösterilir [25].

Tanım 2.1.10. Bir f dönüşümünü

$$f: E^n \rightarrow \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}^*(p)$$

ve π dönüşümü de

$$\pi: \bigcup_{p \in E^n} T_{E^n}^*(p) \rightarrow E^n$$

$$(f_p) \rightarrow f$$

şeklinde tanımlandığında

$$\pi \circ f = I : E^n \rightarrow E^n$$

bağlantısı mevcut ise f ye E^n öklid uzayı üzerinde bir 1-form denir [10].

Tanım 2.1.11. X kümesinin alt kümelerinin bir ailesi τ olsun. Eğer

- i. $\{X\} \in \tau$ ve $X \in \tau$,
- ii. τ kümesinin keyfi birleşimi τ ailesin elemanı,
- iii. τ kümesinin sonlu kesişimi τ ailesin elemanı,

şartları sağlanıyor ise (τ, X) ikilisine Topolojik uzayı denir [25].

Tanım 2.1.12. Bir topoloji uzayının iki farklı elemanlarının ayrık birer komşuluğu var ise bu topolojik uzayı bir hausdorff uzayıdır denir [25].

Tanım 2.1.13. Bir hausdorff uzayını göz önüne alalım. Eğer $p \in M$ noktası için, bir açık komşuluğu U homeomorfik ise M hausdorff uzayına bir manifold denir. Eğer M manifoldun üzerinde her mertebeden diferensiyellenebilir bir yapı var ise M manifolduna C^∞ manifold veya diferensiyellenebilir manifold denir [25].

Tanım 2.1.14. M bir manifold ve bu manifoldun her p noktasında V tanjant vektörü olsun. M manifold üzerinde S dönüşümünü

$$S_p(V) = -\nabla_V U$$

şeklinde tanımlanınca M nin p noktasındaki şekil operatörü (Weingarten dönüşümü) olur. Burada U , M nin p noktasındaki birim normalidir [20].

Tanım 2.1.15. M, N, L manifoldları C^∞ olsunlar ve bu manifoldlar üzerinde $\pi: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kümesi N nin açık bir örtüsü olmak üzere,

$$(\pi \circ \Psi_\alpha)(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, \quad y \in L$$

şeklinde olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha: U_\alpha \subset N \times L &\rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \subset M \xrightarrow{\pi} N \\ (x, y) &\rightarrow \Psi_\alpha(x, y) \rightarrow (\pi \circ \Psi_\alpha)(x) = x \end{aligned}$$

difeomorfizimlerin bir $\{\Psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kümesi var ise π nin L ye göre yerel çarpım özelliği vardır denir ve $D = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ sistemine π dönüşümün yerel ayrışma sistemi olarak tanımlanır [25].

Tanım 2.1.16. M, N, L, C^∞ manifoldları olsun ve $\pi: M \rightarrow N$ dönüşümde yerel çarpım özelliği mevcut olsun bu durumda $\zeta = (M, \pi, N, L)$ dörtlüsüne bir lif demeti denir [25].

Tanım 2.1.17. $\zeta = (M, \pi, N, L)$ dörtlüsü bir lif demeti olsun. Bu durumda M manifoldu total uzay (taban manifold), N manifolduna baz uzay ve L manifolduna da lif modeli adı verilir ve π dönüşümü de projeksiyon olarak adlandırılır [25].

Tanım 2.1.18. $\pi: M \rightarrow N$ dönüşümünde $\zeta = (M, \pi, N, L)$ bir lif demeti olsun.

$\forall p \in N$ için;

$$\pi^{-1}(p) = L_p = \{u \in M \mid \pi(u) = p\}$$

ailesine p üzerinde lif denilmektedir. Tüm L_p liflerinin ayrık birleşimi M taban manifolduna karşılık gelir, yani

$$M = \bigcup_{p \in N} L_p$$

dır [25].

Tanım 2.1.19. M ve N iki C^∞ manifoldları olsun ve $\pi: M \rightarrow N$ örten C^∞ dönüşümün üzerinde $\zeta = (M, \pi, N, L)$ bir lif demeti olsun. Bu durumda eğer $\forall p \in N$ olmak üzere $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayı ise ve bu vektör uzayın boyutu her zaman sabit ise $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayına vektör demetin lifi denir ve L_p ile gösterilir [25].

Tanım 2.1.20. M ve N iki C^∞ manifoldları olsun ve $\pi: M \rightarrow N$ örten C^∞ dönüşümün üzerinde $\zeta = (M, \pi, N, L)$ bir lif demeti olsun. Bu durumda eğer $\forall p \in N$ olmak üzere p nin bir komşuluğu $U, n \geq 0$ ve $h: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ difeomorfizimi vardır öyleki $\forall q \in U$ için

$$h_q: \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$y \rightarrow h(q, y)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmadır. Bu durumda $E(M, N, \pi)$ ye M üzerinde vektör demeti dir. Burada (U, h) ikilisine M nin koordinat haritası denir [25].

Tanım 2.1.21. F cismi üzerinde V ve W iki vektör uzayı olsun. V^* ve W^* sırasıyla V ve W nin dual uzayları olmak üzere $f: V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm tanımlansın

$$f^*: W^* \rightarrow V^*$$

$$T \rightarrow f^*(T): V \rightarrow W$$

$$f^*(T)(v) = T(f(v))$$

f^* bir lineer dönüşüm ve f nin pull-back (geri-çekme) dönüşümü denir [25].

Tanım 2.1.22. M, N ve S manifoldları C^∞ manifold ve f dönüşümü C^∞ olup ve

$$f: M \rightarrow N$$

olarak tanımlansın. $S \rightarrow N$ vektör demetinin pull-back (geri-çekme) demeti

$$\forall p \in M \quad (f^{-1}S)_p = S_{f(p)}$$

şeklinde tanımlanan liflere sahip olur ve

$$f^{-1}S \rightarrow N$$

şeklinde gösterilir [2].

Tanım 2.1.23. M ve N manifoldu üzerinde $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümünü göz önüne alalım, $V \in T_p M$ için, M de ki $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında V teğet vektörü olsun. Bu durumda $f(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde

$$f(p) = f(\alpha(t_0))$$

noktasında $f_*(V)$ vektörüne karşılık gelen $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ dönüşümüne türev dönüşümü denir ve df veya f_* ile gösterilir [25].

Tanım 2.1.24. M diferensiyellenebilir manifold ve bu manifoldun bir açık kümesi U olmak üzere;

$\forall V, W \in \chi(M)$, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[,]: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$[V, W]f = V(Wf) - W(Vf)$$

ile tanımlanan dönüşüme Lie operatörü denir [25].

$f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $\forall V$ ve $W \in \chi(M)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lie operatörü

$$\text{i. } [V, W](f + g) = [V, W](f) + [V, W](g)$$

$$\text{ii. } [V, W](\lambda f) = \lambda[V, W](f)$$

$$\text{iii. } [V, W](fg) = [V, W](f)g + [V, W](g)f$$

$$\text{iv. } [V, [W, Z]] + [W, [Z, V]] + [Z, [V, W]] = 0$$

özelliklerini sağlar [25].

Tanım 2.1.25. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda $V, W, Z \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ için

$$\nabla: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı ve

$$\text{i. } \nabla_{V+W}Z = \nabla_VZ + \nabla_WZ$$

$$\text{ii. } \nabla_V(W + Z) = \nabla_VW + \nabla_VZ$$

$$\text{iii. } \nabla_{fV}W = f\nabla_VW$$

$$\text{iv. } \nabla_V(fY) = V[f]Y + f\nabla_VY$$

şartlarını sağlayan ∇ koneksiyona Afin koneksiyon veya lineer koneksiyon denir [25].

Tanım 2.1.26. $C: I \rightarrow R^3$ eğrisinin her noktasında hız vektörü birim uzunlukta ise C eğrisine birim hızlı eğrisi veya yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğri dir denir [9].

Tanım 2.1.27. $C: I \rightarrow R^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisin de her p noktası için $C'_{(p)} = T_{(p)}$ eşitliğinde $T_{(p)}$ vektörüne p noktasındaki birim teğet vektörü denir. Burada T , C eğrisi üzerinde bir vektör alanı olduğundan T ye C eğrisinin birim teğet vektör alanı veya eğrilik vektör alanı denir ve $C' = T$ olur [22].

Tanım 2.1.28. $C: I \rightarrow R^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisinin eğrilik vektör alanının uzunluğu olan $\alpha = \|T'\|$ fonksiyonuna eğrilik fonksiyonu denir [9].

Tanım 2.1.29. $C: I \rightarrow R^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisinde her p noktası için $N_{(p)} = \frac{1}{\alpha_{(p)}} T'_{(p)}$ eşitliğinde $N_{(p)}$ vektörüne C eğrisinin p noktasındaki asli normali ve $N = \frac{1}{\alpha} T'$ vektör alanına da C eğrisinin asli normal vektör alanı denir [22].

Tanım 2.1.30. $C: I \rightarrow R^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisinde her p noktası için $B_{(p)} = T_{(p)} \times N_{(p)}$ eşitliğiyle tanımlı $B_{(p)}$ vektörüne C eğrisinin p noktasındaki binormali ve $B = T \times N$ vektör alanına da C eğrisinin binormal vektör alanı denir [22].

Tanım 2.1.31. $C: I \rightarrow R^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisinde her p noktası için $T_{(p)}, N_{(p)}, B_{(p)}$ vektörlerine C eğrisinin Frenet vektörleri, $\{T_{(p)}, N_{(p)}, B_{(p)}\}$ kümesine C eğrisinin Frenet çatısı ve T, N, B vektör alanlarına C eğrisinin Frenet vektör alanları denir [22].

Teorem 2.1.1. Yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş $C: I \rightarrow R^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$T' = \alpha N$$

$$N' = -\alpha T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

dır [22].

2.2 Türevlenebilir Manifoldlar ve Riemann Manifoldları

Tanım 2.2.1. g bir n -boyutlu vektör uzayın skaler çarpımı olsun. $v \neq 0$ olmak üzere $v \in V$ ve için

- i. $g(v, v) < 0$ ise v ye zaman benzer (timelike) vektörü,
- ii. $g(v, v) > 0$ ise v ye uzay benzer (spacelike) vektörü,
- iii. $g(v, v) = 0$ ise v ye ışık benzer (lightlike) vektörü,

denir [20].

Tanım 2.2.2. g bir simetrik bilineer form olsun ve n -boyutlu V vektör alanının g ye göre ortonormal bazı $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olduğunda $q, r \geq 0$ için

$$g(e_j, e_k) = 0 \quad (j \neq k)$$

ve

$$g(e_j, e_j) = \begin{cases} -1, & (1 \leq j \leq q), \\ 1, & (q+1 \leq j \leq q+r), \\ 0, & (q+r+1 \leq j \leq n), \end{cases}$$

olur [20].

Teorem 2.2.1. g bir simetrik bilineer form n -boyutlu V vektör alanı üzerinde non-dejenere olmasının gerek ve yeter şartı $\{e_1, \dots, e_q, \dots, e_r, \dots, e_n\}$ bazında

$$q + r = n$$

olmasıdır [20].

Tanım 2.2.3. M bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde g dönüşümü;

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

şeklinde tanımlansın. g bilineer formu

$\forall V, W \in \chi(M)$ için

- i. $g(V, W) = g(W, V)$
- ii. $g(V, V) \geq 0$ ve $\forall V$ için $g(V, V) = 0 \Leftrightarrow V = 0$

şartlarını taşıyorsa g ye Riemann metriği ve M ye de Riemann manifoldu denir [25].

Tanım 2.2.4. Bir M diferensiyellenebilir manifold üzerinde $(0,2)$ tipinde bir $g: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$ tensör alanı tanımlansın. $\forall p \in M$ için $\Gamma(TM)$ üzerinde g sabit indekse sahip ise (M, g) ikilisine yarı-Riemann manifoldu denir. g nin indeksi q olsun. $q = 0$ olduğu durumda M bir Riemann manifoldu ve $q = 1$ olduğunda M ye Lorentz manifoldu denir [20].

Tanım 2.2.5. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldunda; $\forall \xi \in \chi(M)$

$$L_{\xi}g = 0$$

yani g nin ξ yönüne göre Lie türevi sıfır ise ξ vektör alanına Killing vektör alanıdır denir [25].

Teorem 2.2.2. (M, g) bir Riemann manifoldunda torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu bir tek lineer koneksiyon mevcut olur ve $\forall V, W, Z \in \chi(M)$ için

$$g(\nabla_V W, Z) = \frac{1}{2} \{Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) + g(Z, [V, W]) + g(W, [Z, V]) - g(V, [W, Z])\}$$

şeklinde tanımlanır [25].

Tanım 2.2.6. M bir n -boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere $f: M \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ dönüşümünün Laplasyanı

$$\Delta f = -div(grad f) = -div(\nabla f) = \sum_{k=1}^n g(\nabla_{V_k} \nabla f, V_k) = iz \nabla df$$

olarak tanımlanır [2].

Tanım 2.2.7. (M^n, g) Riemann manifoldunda lokal ortonormal vektör alanları $\{e_k\}$ öyle ki $k = 1, \dots, n$ göz önüne alalım. $\forall V, W \in \chi(M)$;

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

$$(V, W) \quad S(V, W) = iz R(., V)W$$

(0,2) mertebeden tanımlanan dönüşüm

$$S(V, W) = \sum_{k=1}^n g(R(e_k, V)W, e_k)$$

tensör alanına M^n nin Ricci tensörü denir. Burada

$$Q = g(RicV, W) = S(V, W)$$

Ricci operatörü olarak tanımlanır. Ricci operatörü simetriktir, yani

$$S(V, W) = S(W, V)$$

dır [25].

Tanım 2.2.8. $(\tilde{M}, g)$ bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. $f: \tilde{M} \rightarrow M$ izometrik immersiyonunda ortalama eğrilik H ile gösterilir ve

$$H = \frac{1}{n} \text{iz}\sigma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(e_k, e_k)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Burada σ , $f(M)$ altmanifoldunun ikinci temel formunu göstermektedir.

Tanım 2.2.9. (M^n, g) Riemann manifoldu ve $T_p M$ de M nin p noktasındaki tanjant uzayı olsun. p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu alt uzaylarına göre kesit eğriliklerinin hepsine M nin skaler eğriliği denir. $\{e_j \mid j = 1, \dots, n\}$, $T_p M$ nin ortonormal bazı olsun. r skaler eğriliği

$$r = \sum_{j=1}^n S(e_j, e_j)$$

şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 2.2.10. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları üzerinde

$$f: M \rightarrow N$$

C^∞ dönüşüm olsun. f boyunca $\tilde{\nabla}$, koneksiyonunun pull-back koneksiyonu $\tilde{\nabla}^f$ olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

$$\nabla f_*: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma_f(TN)$$

ve

$$\nabla f_*(X, Y) = \tilde{\nabla}_X^f f_* Y - f_*(\bar{\nabla}_X Y)$$

şeklinde tanımlı ∇f_* dönüşümüne f dönüşümünün ikinci temel formu denir [25].

Burada $\bar{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M ve N manifoldların koneksiyonlarıdır.

Tanım 2.2.11. M ve N sırasıyla m ve n boyutlu diferensiyellenebilen manifoldlar olsun. M nin her p noktasında $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilen f fonksiyonun rankı f nin türev dönüşümü f_* ın rankına eşit yani

$$\text{rank}(f_p) = \text{rank}(f_{*p}) = m$$

ise f dönüşümü immersiyon dır denir [25].

Tanım 2.2.12. (M^m, g) Riemann manifoldu, N^n bir manifold ve M Riemann manifoldu N manifoldunun altmanifoldu olsun. N nin p noktasındaki tanjant uzayı $T_p N$ ve $T_p N$ uzayına dik olan uzayı da $T_p N^\perp$ ile gösterilsin. $i: N \rightarrow M$ immersiyonu olduğunda Riemann metriği indirger yani eğer g, M üzerinde simetrik pozitif tanımlı bilinear form ise i immersiyonu N üzerinde $i^* g$ ile tanımlı bilinear, simetrik ve pozitif tanımlı olur. O zaman i bir izometrik immersiyon olur bu durumda $T_p N$ de $T_p M$ nin tanjant altvektör uzayı olur. $T_p M^\perp$ uzayı $T_p N$ ve $T_p N^\perp$ den oluşur. Yani

$$T_p M^\perp = T_p N \oplus T_p N^\perp$$

olur.

$\forall V, W \in \Gamma(TN), U \in \Gamma(TN)^\perp$ olmak üzere $\tilde{\nabla}$, M manifoldunun üzerinde Levi-civita koneksiyonunu

$$(\tilde{\nabla}_V W)^\top = \nabla_V W, \quad (\tilde{\nabla}_V U)^\perp = \nabla_V^\perp U$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\top$ altmanifoldun teğet demeti ve $\perp$ da altmanifoldun dik vektör demetinin projeksiyonları gösterir.

Ayrıca;

$$(\tilde{\nabla}_V W)^\perp = \sigma(V, W)$$

$$(\tilde{\nabla}_V U)^\top = -A_U V$$

tanımlandığında;

$$\tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W + \sigma(V, W)$$

$$\tilde{\nabla}_V U = -A_U V + \nabla_V^\perp U$$

elde edilir ve bu denklemlere sırasıyla Gauss denklemi ve Weingarten denklemi denir [2].

Lemma 2.2.1. $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall V, W \in \Gamma(TM), U \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$g(A_U V, W) = g(\sigma(V, W), U)$$

dır [25].

Lemma 2.2.2. $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\{n_1, \dots, n_m\}$, M manifoldunun normal uzayının bir bazı olmak üzere,

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m (i_z A_{n_k}) n_k$$

olur [25].

Tanım 2.2.13. M ve N Riemann manifoldları arasındaki $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\tilde{\nabla}^f$, $f^{-1}(TN)$ pull-back koneksiyonu, M manifoldunun lokal ortonormal çatısı $\{e_1, \dots, e_k\}$ ve $V \in \Gamma(f^{-1}(TN))$ olmak üzere yalın Laplasyan $\bar{\Delta}_f$ ile gösterilir ve

$$\bar{\Delta}_f = - \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\nabla}_{e_k}^f \tilde{\nabla}_{e_k}^f - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k}^f}^f \right) V$$

şeklinde tanımlanır [25].

2.3 3-Boyutlu Manifoldlar Üzerinde Eğrilerin Frenet Denklemleri

Tanım 2.3.1. M bir yarı-Riemann manifoldu ve $C: I \rightarrow M$ bu manifold üzerinde bir diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer C eğrisinin $\forall p \in I$ hız vektörü $C'_{(p)}$, sırasıyla uzay benzeri (spacelike) vektörü, zaman benzeri (timelike) vektörü ve ışık benzeri (lightlike) vektörü ise C eğrisine sırasıyla uzay benzeri (spacelike), zaman benzeri (timelike) ve ışık benzeri (lightlike) eğrisi denir [17].

$C: I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş 3-boyutlu manifoldu üzerinde bir zaman benzeri (timelike), uzay benzeri (spacelike) ve ya ışık benzeri (lightlike) eğrisi olsun. Bu durumda

$$C' = \frac{dC}{dt} = T$$

teğet vektör alanı, N normal vektör alanı ve B binormal vektör alanı olur.

Tanım 2.3.2. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş zaman benzeri (timelike) eğrisi olsun. C eğrisinin eğriliği α , burulması τ ve Frenet çatı alanı $\{T, N, B\}$ olmak üzere T zaman benzeri (timelike) vektörü olur. Bu durumda N ve B uzay benzeri (spacelike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = \alpha T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

Tanım 2.3.3. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş uzay benzeri (spacelike) eğrisi olsun. C eğrisinin eğriliği α , burulması τ ve Frenet çatı alanı $\{T, N, B\}$ olmak üzere T uzay benzeri (spacelike) vektörü olur. Bu durumda N ve B uzay benzeri (spacelike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = -\alpha T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

Tanım 2.3.4. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş uzay benzeri (spacelike) eğrisi olsun. C eğrisinin eğriliği α , burulması τ ve Frenet çatı alanı

$\{T, N, B\}$ olmak üzere T uzay benzeri (spacelike) vektörü olur. Bu durumda N uzay benzeri (spacelike) vektörü ve B zaman benzeri (timelike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = -\alpha T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

Tanım 2.3.5. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş uzay benzeri (spacelike) eğrisi olsun. C eğrisinin eğriliği α , burulması τ ve Frenet çatı alanı $\{T, N, B\}$ olmak üzere T uzay benzeri (spacelike) vektörü olur. Bu durumda N zaman benzeri (timelike) vektörü ve B uzay benzeri (spacelike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = \alpha T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

Tanım 2.3.6. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş uzay benzeri (spacelike) eğrisi olsun. C eğrisinin eğriliği α , burulması τ ve Frenet çatı alanı

$\{T, N, B\}$ olmak üzere T uzay benzeri (spacelike) vektörü olur. Bu durumda N ve B ışık benzeri (lightlike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ 1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau N \\ B' = T - \tau B \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

Tanım 2.3.7. $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş ışık benzeri (lightlike) eğrisi olsun. bu eğrinin eğrilik α , burulması τ ve Frenet çatış alanı $\{T, N, B\}$ olmak üzere T ışık benzeri (lightlike) vektörü olur. Bu durumda N uzay benzeri (spacelike) vektörü ve B ışık benzeri (lightlike) vektörü ise C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

ve ya

$$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau T + B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

şeklinde dir [17].

3. HARMONİK VE BİHARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde Harmonik ve Biharmonik dönüşümlerin tanımları ve Harmonik ve Biharmonik dönüşümler ile ilgili bazı teoremler incelenmiştir.

3.1 Harmonik Dönüşümler

Tanım 3.1.1. $f: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\tilde{V}$, N üzerinde bir koneksiyon olmak üzere f boyunca $\tilde{V}^f$ koneksiyonuna $\tilde{V}$ koneksiyonun geri-çekme koneksiyonu (pull-back koneksiyonu) denir [2].

Tanım 3.1.2. M ve N Reimann manifoldları ve $p \in M$ olmak üzere f bir C^∞ dönüşümü $f: M \rightarrow N$ şeklinde olsun. $T_p M$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, \dots, e_m\}$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} |f_{*p}|^2 &= \sum_{k=1}^m h(f_{*p}(e_k), f_{*p}(e_k)) \\ &= \sum_{k=1}^m f^*h(e_k, e_k) \\ &= iz_g f^*h \end{aligned}$$

olur. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve $f: M \rightarrow N$ bir C^∞ dönüşüm olsun.

$p \in M$ için $e(f)$ fonksiyonu

$$e(f): M \rightarrow [0, \infty)$$

$$p \rightarrow e(f)_p = \frac{1}{2} |f_{*p}|^2$$

şeklinde tanımlandığında $e(f)$ ye f dönüşümünün enerji yoğunluğu denir [2].

Böylece p noktasında f dönüşümünün enerji yoğunluğu

$$e(f)_p = \frac{1}{2} iz_g f^*h = \frac{1}{2} \langle g, f^*h \rangle$$

dır [2].

Tanım 3.1.3. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. $f: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve M nin kompakt tanım kümesi Ω ile gösterilsin. Bu durumda f dönüşümünün enerji integrali

$$E(F; \Omega) = \int_{\Omega} e(f) dV_g = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f_*|^2 dV_g$$

şeklinde tanımlanır. Burada $E(f; \Omega) \geq 0$ olduğu görülür [2].

Tanım 3.1.4. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve f bir C^∞ dönüşümü

$$C^\infty(M, N) = \{f | f: M \rightarrow N\}$$

şeklinde tanımlansın ve Ω , f dönüşümünün kompakt bir bölge olsun.

$$E(., \Omega): C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise f dönüşümü bir harmonik dönüşümü olur [2].

Tanım 3.1.5. $f: M \rightarrow N$ dönüşümü (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları üzerinde bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\varepsilon > 0, p \in M$ ve $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ olmak üzere f dönüşümünün C^∞ varyasyonu,

$$f: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

$$(p, t) \rightarrow f_t(p)$$

$$f_0 = f$$

şeklinde tanımlanır ve f_t ile gösterilir [2].

C^∞ olan $\{f_t\}$ dönüşümlerini bir $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağlı C^∞ dönüşümlerin bir ailesi olduğu düşünülebilir [30].

Tanım 3.1.6. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve $p \in M$ olmak üzere

$$f: M \rightarrow N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Her p noktası için $t \rightarrow f_t(p)$ dönüşümü $f_{(p)} \in N$ noktasından geçen bir eğri tanımlar ki bu eğri bir regüler eğridir ve bu eğrinin hız vektörü v olmak üzere

$$v_{(p)} = \left. \frac{\partial f_t(p)}{\partial t} \right|_{t=0} \in T_{f(p)}N$$

şeklinde tanımlanır ve indirgenmiş $f^{-1}TN$ geri-çekme demetin bir kesiti olan v vektörüne f_t nin varyasyon vektör alanı denir [25].

Tanım 3.1.7. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. M nin bir kompakt bölgesi Ω olmak üzere $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşümünün bir $C^\infty\{f_t\}$ varyasyonunda, Ω° (kompakt bölgenin içi) ve $\forall t$ için $M \setminus \Omega^\circ$ üzerinde

$$f_t = f$$

ise $\{f_t\}$ varyasyonuna Ω içinde desteklenir denir [2].

Tanım 3.1.8. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları arasındaki $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm ve Ω , M nin kompakt bir bölgesi olsun. f dönüşümü M nin Ω bölgeleri hepsi ve Ω içinde desteklenen $C^\infty\{f_t\}$ varyasyonlarının hepsi için

$$\frac{\partial}{\partial t} E(f_t; \Omega)|_{t=0} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa f harmonik dönüşümdür denir [2].

Tanım 3.1.9. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları arasındaki $f: M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $p \in M$ olmak üzere $f^{-1}TN$ pull-back demeti üzerinde pull-back metrik $\forall x, y \in \Gamma(f^{-1}TN)$ için

$$\langle x, y \rangle_p = h_{f(p)}(x(p), y(p))$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 3.1.10. M ve N Riemann manifoldların arasındaki diferensiyellenebilir dönüşüm $f: M \rightarrow N$ olsun. f nin tensiyon alanı $\tau_1(f) \in f^{-1}TN$ ile gösterilir ve $\{e_k\}$, M üzerinde bir ortonormal baz olmak üzere

$$\tau_1(f) = \text{div} df = \text{iz}(\nabla^f df) = \sum_{k=1}^m \nabla^f df(e_k, e_k)$$

şeklinde tanımlanır [2].

Teorem 3.1.1. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve $f: M \rightarrow N$ bu manifoldların arasındaki diferensiyellenebilir dönüşüm ve $\Omega \subset M$ kompakt bir bölge olsun. f dönüşümünün Ω içinde desteklenen bir $C^\infty\{f_t\}$ varyasyonu olsun.

Bu durumda $v_p = \frac{\partial f_t(p)}{\partial t} \Big|_{t=0}$ varyasyon vektör alanı ve $\langle , \rangle$ pull-back demeti üzerindeki metrik olmak üzere;

$$\frac{\partial}{\partial t} E(f_t; \Omega)|_{t=0} = - \int_{\Omega} \langle v, \tau_1(f) \rangle dV_g$$

dır [2].

Teorem 3.1.2. M ve N Riemann manifoldları arasındaki $f: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve M nin bir kompakt altkümesi Ω olsun. Bu durumda f dönüşümü harmonik olması için gerek ve yeter koşul

$$\tau_1(f) = 0$$

dır [2].

Tanım 3.1.11. M ve N Riemann manifoldları arasındaki $f: M \rightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. f dönüşümünün harmonik olduğu durumda

$$\tau_1(f) = 0$$

eşitliğine tensiyon alanı denklemi veya harmonik denklemi denir [2].

Önerme 3.1.1. $\tilde{M}$ bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldu da $\tilde{M}$ nin altmanifoldu olsun. $f: M \rightarrow \tilde{M}$ izometrik immersiyonunda

$$\tau_1(f) = i\sigma = (boyMH) = nH$$

olur [2].

Önerme 3.1.2. $\tilde{M}$ bir n -boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldu da $\tilde{M}$ nin altmanifoldu olsun. $f: M \rightarrow \tilde{M}$ izometrik immersiyonu olsun o zaman f harmonik olması için gerek ve yeter koşul f nin minimal olmasıdır [2].

3.2 Biharmonik Dönüşümleri

Tanım 3.2.1. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları arasındaki C^∞ dönüşüm $f: M \rightarrow N$ ve $\Omega \subset M$ bir kompakt bölgesi olsun. f dönüşümünün üzerindeki bienerji (iki-enerjisi) integrali

$$E_{2,\Omega} = \frac{1}{2} \int \|\tau(f)\|^2 dV_g$$

şeklinde tanımlanır [2].

f dönüşümünün bienerji fonksiyonelin kritik noktası olduğunda f dönüşümüne biharmoniktir (iki-harmonik) denir [2].

Önerme 3.2.1. (M, g) ve (N, h) Reimann manifoldları arasındaki C^∞ dönüşüm $f: M \rightarrow N$ ve $\Omega \subset M$ bir kompakt bölgesi olsun. $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $\{f_t\}$, Ω bölgede desteklenen C^∞ varyasyonu ve V vektör alanı $\{f_t\}$ dönüşümünün varyasyon vektör alanı olmak üzere

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} E_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \langle \tau_2(f), V \rangle dV_g$$

dır [2].

Tanım 3.2.2. M ve N Riemann manifoldları arasındaki diferensiyellenebilir dönüşüm $f: M \rightarrow N$ şeklinde olsun. N manifoldu üzerindeki eğrilik tensörü

$$\tilde{R}(U, V) = [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U, V]}$$

şeklinde tanımlı ve f dönüşümün iki-gerilim (bitensiyon) alanı $\tau_2(f)$

$$\tau_2(f) = -\Delta^f(\tau_1(f)) - iz\tilde{R}(df, \tau_1(f))df$$

dir [2].

Tanım 3.2.3. M ve N Riemann manifoldları ve arasındaki diferensiyellenebilir dönüşüm $f: M \rightarrow N$ şeklinde olsun. f dönüşümün bitensiyon alanı $\tau_2(f)$

$$\tau_2(f) = -\Delta^f(\tau_1(f)) - iz\tilde{R}(df, \tau_1(f))df = 0$$

denklemine f nin biharmonik denklemi denir ve eğer f dönüşümü bu denklemi sağlıyorsa f dönüşümüne biharmonik (iki-harmonik) dönüşüm denir [2].

Önerme 3.2.2. M Riemann manifoldu üzerinde $C: I \rightarrow M$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir eğri olsun. C eğrisi boyunca birim teğet vektör alanı $T = C'$ ve eğrinin tensiyon alanı $T(c) = \nabla_T T$ ise $C: I \rightarrow M$ biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

olmasıdır [4].

Teorem 3.2.1. M ve N Reimann manifoldları ve arasındaki diferensiyellenebilir dönüşüm $f: M \rightarrow N$ olsun. Bu durumda f dönüşümünün biharmonik olması için gerek ve yeter şart $\tau_2(f) = 0$ olmasıdır [2].

Dolayısıyla harmonik olan dönüşümler biharmonik olmaları açıktır. Fakat tersi doğru olmayabilir yani harmonik olmayan biharmonik dönüşümleri vardır. Harmonik olmayan biharmonik dönüşümler özel bir öneme sahipler, bu dönüşümlere has biharmonik veya özgün biharmonik dönüşüm denir.



4. (κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde ilk olarak paradeğme manifoldlar ile ilgili bazı tanımlar ve bilgiler hatırlatılacak ve sonra (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldları ile ilgili bazı temel tanımlar ve bilgiler incelenecektir.

4.1 Paradeğme Manifoldları

Tanım 4.1.1. ϕ, η, ξ üçlüsünü sırasıyla bir tensör alanı, bir 1-form ve bir vektör alanı $(2n + 1)$ -boyutlu C^∞ manifoldu M üzerinde tanımlansın. M^{2n+1} manifoldu üzerinde ϕ, η, ξ üçlüsü için;

$$\text{i. } \eta(\xi) = 1, \quad (4.1.1)$$

$$\text{ii. } \phi^2 = Id - \eta \otimes \xi, \quad (4.1.2)$$

şartları sağlanıyor ise (ϕ, ξ, η) üçlüsüne hemen hemen paradeğme yapısı ve (M, ϕ, ξ, η) ye bir hemen hemen paradeğme manifoldu denir [31].

Teorem 4.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \eta, \xi)$ için hemen hemen paradeğme manifoldu

$$\text{i. } \phi(\xi) = 0, \quad (4.1.3)$$

$$\text{ii. } \eta \circ \phi = 0, \quad (4.1.4)$$

$$\text{iii. } \text{rank} \phi = 2n, \quad (4.1.5)$$

eşitliklerini sağlar [31].

Teorem 4.1.2. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, η, ξ) hemen hemen paradeğme manifoldun üzerinde bir g yarı-Riemann metrik tensör alanı vardır öyleki $\forall V \in \chi(M)$

$$g(V, \xi) = \eta(V)$$

dır [31].

Tanım 4.1.2. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu (M, ϕ, η, ξ) hemen hemen paradeğme manifoldunda

$$g(\phi V, \phi W) = -g(V, W) + \eta(V)\eta(W) \quad (4.1.6)$$

olacak şekilde g yarı-Riemann metriği mevcut ise g metriğine bağdaşabilir metrik ve M manifolduna da hemen hemen paradeğme metrik manifoldu denir [31].

Sonuç 4.1.1. $(2n + 1)$ -boyutlu bir (M, ϕ, η, ξ, g) hemen hemen paradeğme metrik manifoldunda $\forall V, W \in \chi(M)$ için

$$g(\phi V, W) = -g(V, \phi W) \quad (4.1.7)$$

dır [31].

Tanım 4.1.3. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu (M, ϕ, η, ξ, g) hemen hemen paradeğme metrik manifoldunda $\forall V, W \in \chi(M)$

$$\sigma(V, W) = g(V, \phi W) \quad (4.1.8)$$

şeklinde tanımlanan ters simetrik σ dönüşümüne (ϕ, η, ξ, g) yapının temel 2-formu denir [31].

Tanım 4.1.4. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu hemen hemen paradeğme M manifoldunda $\forall V, W \in \chi(M)$ için

$$d\eta(V, W) = \frac{1}{2}(V\eta(W) - W\eta(V) - \eta([V, W])) \quad (4.1.9)$$

olarak tanımlandığı zaman

$$\sigma(V, W) = g(V, \phi W) = d\eta(V, W) \quad (4.1.10)$$

eşitliği sağlanıyorsa (M, ϕ, ξ, η, g) beşlisine paradeğme metrik manifoldu denir [31].

Önerme 4.1.1. $(2n + 1)$ -boyutlu M yarı-Riemann manifoldunda σ temel 2-form ters simetriktir ve $\eta \wedge \sigma^n \neq 0$ dır [31].

Tanım 4.1.5. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu (M, ϕ, η, ξ, g) hemen hemen paradeğme metrik manifoldunda Lokal ortonormal bir baz inşa edilebilir. M manifoldun üzerinde koordinat komşuluğu U olduğunu kabul edelim. Bu komşulukta ξ ye ortogonal biçimde herhangi bir birim vektör alanı V_1 ve $|\phi(V_1)|^2 = -1$ olsun. Bu durumda $\phi(V_1)$ vektör alanı V_1 ve ξ ye dik olur. Benzer şekilde bir V_2 birim vektör alanı U komşuğu üzerinde $\phi(V_1)$, V_1 ve ξ ye ortogonal olacak biçimde alınırsa $|\phi(V_2)|^2 = -1$ olur. Bu şekilde devam edilirse U

komşuluğu üzerinde $\{V_k, \phi(V_k), \xi\}$, $(k = 1, \dots, 2n + 1)$ lokal ortonormal bazı oluşur ve bu baza ϕ -bazı denir [31].

Tanım 4.1.6. W bir reel vektör alanı ve $J: W \rightarrow W$ lineer dönüşümü $J^2 = I$ ise J ye W reel vektör alanı üzerinde bir para-kompleks yapıdır denir. Bir J para-kompleks yapı ile donatılmış manifolda para-kompleks manifoldu denir [31].

Tanım 4.1.7. M diferensiyellenebilir bir manifold ve J de M üzerinde bir para-kompleks yapı olsun. J tensör alanı için $\forall V, W \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} N_J(V, W) &= J^2[V, W] + [JV, JW] - J[JV, W] - J[V, JW] \\ &= [V, W] + [JV, JW] - J[JV, W] - J[V, JW] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan N_J tensör alanına J para-kompleks yapısının Nijenhuis tensör alanı denir [31].

Tanım 4.1.8. (M, J) bir hemen hemen para-kompleks manifold üzerinde Nijenhuis tensör alanı sıfır ise J ye bir integrallenebilir dönüşümdür denir [31].

Tanım 4.1.9. Bir (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen paradeğme manifoldunda J hemen hemen para-kompleks integrallenebilir oluyorsa (ϕ, ξ, η) yapısı normaldir denir [31].

Önerme 4.1.2. Bir (M, ϕ, ξ, η) hemen hemen paradeğme manifoldu olsun. (ϕ, ξ, η) hemen hemen paradeğme yapısı normal olmasının gerek ve yeter koşul

$$N_J - 2 d\eta \otimes \xi = 0$$

dır [31].

Tanım 4.1.10. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu M paradeğme metrik manifoldunda ξ vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise M manifolduna K-paradeğme manifold denir [31].

Önerme 4.1.3. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu M paradeğme metrik manifoldunun K-paradeğme manifoldu olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_V \xi = -\phi V \quad (4.1.11)$$

olmasıdır [31].

Önerme 4.1.4. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu M paradeğme metrik manifoldunda

$$\nabla_\xi \phi = 0 \quad (4.1.12)$$

dır [31].

Önerme 4.1.5. M^{2n+1} manifoldu üzerinde ξ yönündeki Lie türevi $\mathcal{L}_\xi$ olmak üzere; (1,1)-tipinde h tensör alanı

$$h: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$V \rightarrow h(V) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi(V) - \phi \mathcal{L}_\xi(V))$$

şeklinde tanımlansın. O zaman

$$h\xi = 0$$

$$h\phi + \phi h = 0$$

dır [31].

Önerme 4.1.6. Bir paradeğme metrik manifoldunda h simetrik operatörü olmak üzere

$$\nabla_V \xi = -\phi V + \phi hV \quad (4.1.13)$$

olur [31].

Önerme 4.1.7. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu M bir paradeğme metrik manifoldunda Q Ricci eğriliği

$$Q(\xi, \xi) = -2n + izh^2 \quad (4.1.14)$$

dır [31].

4.2 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldları

Tanım 4.2.1. Bir $(2n + 1)$ -boyutlu paradeğme metrik manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$, η 1-form ve reel sabitler κ ve μ için eğrilik tensör alanı

$$\tilde{R}(V, W)\xi = \kappa(\eta(V)W - \eta(W)V) + \mu(\eta(W)hV - \eta(V)hW),$$

sağlanıyor ise paradeğme metrik manifoldu, (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olarak adlandırılır [5].

Önerme 4.2.1. M bir $(2n + 1)$ -boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. $\forall V, W \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$i) \quad h^2 = (1 + \kappa)\phi^2 \quad (4.2.1)$$

$$\text{ii)} \quad Q\xi = 2n\kappa\xi \quad (4.2.2)$$

$$\text{iii)} \quad (\nabla_V \varphi)W = -g(V - hV, W)\xi + \eta(W)(V - hV), \quad \kappa \neq -1 \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad (\nabla_V h)W - (\nabla_W h)V = & -(1 + \kappa)(2g(V, \varphi Y)\xi + \eta(V)\varphi W - \eta(W)\varphi V) \\ & + (1 + \mu)(\eta(V)\varphi hW - \eta(W)\varphi hV) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$\text{v)} \quad \nabla_\xi h = \mu h \circ \varphi, \quad \nabla_\xi \varphi h = -\mu h \quad (4.2.5)$$

özelliklerini sağlar. Burada Q , (κ, μ) -paradeğme manifoldunun Ricci operatörüdür[6].

Önerme 4.2.2. M bir $(2n + 1)$ -boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. $\forall W \in \chi(M)$ olmak üzere;

$$S(W, \xi) = 2n\kappa\eta(W) \quad (4.2.6)$$

olur [16].

Teorem 4.2.1. M bir $(2n + 1)$ -boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ olmak üzere, $\forall V, Y, Z, W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R ;

$$\begin{aligned} g(R(V, Y)Z, W) = & \left(-1 + \frac{\mu}{2}\right) (g(Y, Z)g(V, W) - g(V, Z)g(Y, W)) \\ & + g(Y, Z)g(hV, W) - g(V, Z)g(hY, W) \\ & - g(Y, W)g(hV, Z) + g(V, W)g(hY, Z) \\ & + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} (g(hY, Z)g(hV, W) - g(hV, Z)g(hY, W)) \\ & - \frac{\mu}{2} (g(\phi Y, Z)g(\phi V, W) - g(\phi V, Z)g(\phi Y, W)) \\ & - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} (g(\phi hY, Z)g(\phi hV, W) - g(\phi hY, W)g(\phi hV, Z)) \\ & + \mu g(\phi V, Y)g(\phi Z, W) \\ & + \eta(V)\eta(W) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right) g(Y, Z) + (\mu - 1)g(hY, Z) \right) \\ & - \eta(V)\eta(Z) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right) g(Y, W) + (\mu - 1)g(hY, W) \right) \\ & + \eta(Y)\eta(Z) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right) g(V, W) + (\mu - 1)g(hV, Z) \right) \end{aligned}$$

$$-\eta(V)\eta(W)\left(\left(\kappa+1-\frac{\mu}{2}\right)g(V,Z)+(\mu-1)g(hV,Z)\right) \quad (4.2.7)$$

dir [6].

Tanım 4.2.2. (M, ϕ, ξ, η, g) bir 3-boyutlu hemen hemen paradeğme metrik manifoldu ve $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş $C: I \rightarrow (M, g)$ eğrisinde eğer $\eta(C') = 0$ ise o zaman C eğrisine bu manifoldun Legendre eğrisi denir [26].



5. (κ, μ) -PARADEĞME METRİK MANİFOLDLARIN BİHARMONİK ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde önce (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların zaman benzeri (timelike), uzay benzeri (spacelike), ışık benzeri (lightlike) eğrilerin biharmonik olmaları için gerek ve yeter şartları ve sonra spacelike veya timelike Legendre eğrilerinin biharmonik olması için gerek ve yeter şartları incelenmiştir. İkinci bölümde (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların hiperyüzeyleri için biharmonik olması koşulları incelenmiştir.

5.1 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldların Biharmonik Eğrileri

(M, ϕ, ξ, η, g) bir 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olmak üzere $C: I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş eğrisi olsun. Bu durumda

$$C' = \frac{dC}{dt} = T$$

$C: I \rightarrow M^3$ eğrisinin tensiyon alanı

$$\tau(C) = \nabla_T T$$

ve bitensiyon alanı

$$\tau_2(C) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T$$

şeklinde olur. Burada ∇ bu manifoldun Levi civita koneksiyonudur.

Teorem 5.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C: I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir zaman benzeri (timelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C: I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
& 3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 - \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) + \eta(T)\eta(N) \left(\kappa - \frac{\mu}{2} + 1 \right) \right) N \\
& + \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' + \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) + \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right) B = 0
\end{aligned}$$

dır.

İspat. M^3 , (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunda $C : I \rightarrow M$ bir zaman benzeri (timelike) eğrisi olduğundan T bir zaman benzeri (timelike) vektör alanıdır. M üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ise Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = \alpha T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(T, T) = -1, \\ g(B, B) = g(N, N) = 1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace operatörünü

$$\begin{aligned}
\Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\
&= \nabla_T \nabla_T (\alpha N) \\
&= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \\
&= T(T(\alpha))N + T(N)T(\alpha) + T(\alpha)T(N) + \alpha T(\alpha T + \tau B) \\
&= \alpha''N + \alpha\alpha'T + \tau\alpha'B + \alpha\alpha'T + \alpha'\tau + \alpha(\alpha'T + \alpha\alpha N + \tau'B + \tau(-\tau N)) \\
&= \alpha''N + 2\alpha\alpha'T + 2\alpha'\tau B + \alpha\alpha'T + \alpha^3 N + \alpha\tau'B - \alpha\tau^2 N
\end{aligned}$$

$$= \alpha''N + 3\alpha\alpha'T + \alpha^3N - \alpha\tau^2N + \alpha\tau'B + 2\alpha'\tau B$$

buradan

$$\nabla_T^3 T = 3\alpha\alpha'T + (\alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2)N + (2\tau\alpha' + \alpha\tau')B \quad (5.1.2)$$

elde edilir. Denklem (4.2.7) ve (5.1.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(R(T, N)T, N) &= \left(-1 + \frac{\mu}{2}\right) (g(N, T)g(T, N) - g(T, T)g(N, N)) \\ &\quad + g(N, T)g(hT, N) - g(T, T)g(hN, N) \\ &\quad - g(N, N)g(hT, T) + g(T, N)g(hN, T) \\ &\quad + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} (g(hN, T)g(hT, N) - g(hT, T)g(hN, N)) \\ &\quad - \frac{\mu}{2} (g(\phi N, T)g(\phi T, N) - g(\phi T, T)g(\phi N, N)) \\ &\quad - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} (g(\phi hN, T)g(\phi hT, N) - g(\phi hN, N)g(\phi hT, T)) \\ &\quad + \mu g(\phi T, N)g(\phi T, N) \\ &\quad + \eta(T)\eta(N) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2} \right) g(N, T) + (\mu - 1)g(hN, T) \right) \\ &\quad - \eta(T)\eta(T) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2} \right) g(N, N) + (\mu - 1)g(hN, N) \right) \\ &\quad + \eta(N)\eta(T) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2} \right) g(T, N) + (\mu - 1)g(hT, T) \right) \\ &\quad - \eta(T)\eta(N) \left(\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2} \right) g(T, T) + (\mu - 1)g(hT, T) \right) \end{aligned}$$

$$= \left(-1 + \frac{\mu}{2}\right) + 1 + 1 + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} - \frac{\mu}{2} - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1}$$

$$-\eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

burada

$$\left(-1 + \frac{\mu}{2}\right) + 1 + 1 + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} - \frac{\mu}{2} - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} = 0$$

olur ve

$$g(R(T, N)T, N) = -\eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right) \quad (5.1.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) + \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) \quad (5.1.4)$$

elde edilir. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

olduğundan, (5.1.2) , (5.1.3) ve (5.1.4) denklemlerinden

$$3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right)\right)N$$

$$+ \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) - \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right)\right)B = 0$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir zaman benzeri (timelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan

Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun.

Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha' = 0, \\ \alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2}\right) = 0, \\ 2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) - \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.2. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir zaman benzeri (timelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun.

Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{sabit}, \\ \tau = \text{sabit}, \\ \alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 = 0, \\ \kappa = -\frac{1}{2}, \\ \mu = 1, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.2. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N bir zaman benzeri (timelike) vektör alanı ve B bir

uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 - \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \right) N \\ + (2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right))B = 0$$

dır.

İspat. M^3 , (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunda $C : I \rightarrow M$ bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi olduğundan T bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanıdır. M^3 üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N zaman benzeri (timelike) vektör alanı ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ise Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = \alpha T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(T, T) = g(B, B) = 1, \\ g(N, N) = -1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0, \end{cases} \quad (5.1.5)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace operatörünü

$$\begin{aligned} \Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\ &= \nabla_T \nabla_T (\alpha N) \\ &= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T(T(\alpha))N + T(N)T(\alpha) + T(\alpha)T(N) + \alpha T(\alpha T + \tau B) \\
&= \alpha''N + \alpha\alpha'T + \tau\alpha'B + \alpha\alpha'T + \alpha'\tau B + \alpha(\alpha'T + \alpha\alpha N + \tau'B + \tau(\tau N)) \\
&= 3\alpha\alpha'T + (\alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2)N + (2\tau\alpha' + \alpha\tau')B
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

elde edilir. Denklem(4.2.7) ve (5.1.5) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
g(R(T, N)T, N) &= -1 + \frac{\mu}{2} + 1 + 1 + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} - \frac{\mu}{2} - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} \\
&\quad + \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$-1 + \frac{\mu}{2} + 1 + 1 + \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} - \frac{\mu}{2} - \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} = 0$$

olur ve

$$g(R(T, N)T, N) = \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \tag{5.1.7}$$

ede edilir. Benzer şekilde

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) - \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) \tag{5.1.8}$$

elde edilir. Bu durumda (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldun üzerinde $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi (5.1.6), (5.1.7) ve (5.1.8) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
&3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 - \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right)\right)N \\
&\quad + (2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right))B = 0
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 5.1.3. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N zaman benzeri (timelike) vektör alanı ve B bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha' = 0, \\ \alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 - \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) = 0, \\ 2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) + \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.4. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N zaman benzeri (timelike) vektör alanı ve B bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{sabit}, \\ \tau = \text{sabit}, \\ \alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 = 0, \\ \kappa = -\frac{1}{2}, \\ \mu = 1, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.3. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ve B bir zaman benzeri (timelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} -3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) - \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \right) N \\ + (2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right))B = 0 \end{aligned}$$

dır.

İspat. 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu üzerinde $C : I \rightarrow M$ bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi olduğundan T bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanıdır. M^3 üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ve B zaman benzeri (timelike) vektör alanı ise

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = -\alpha T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(T, T) = g(N, N) = 1, \\ g(B, B) = -1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0, \end{cases} \quad (5.1.9)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace Beltrami operatörünü

$$\begin{aligned}
\Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\
&= \nabla_T \nabla_T (\alpha N) \\
&= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \\
&= T(T(\alpha))N + T(N)T(\alpha) + T(\alpha)T(N) + \alpha T(-\alpha T + \tau B) \\
&= \alpha'' N + (-\alpha T + \tau B)\alpha' + (-\alpha T + \tau B)\alpha' + \alpha T(-\alpha T + \tau B) \\
&= \alpha'' N - \alpha\alpha'T + \tau\alpha'B - \alpha\alpha'T + \alpha'\tau B + \alpha(-\alpha'T - \alpha\alpha N + \tau'B + \tau(\tau N)) \\
&= \alpha'' N - 2\alpha\alpha'T + 2\alpha'\tau B - \alpha\alpha'T - \alpha^3 N + \alpha\tau'B + \alpha\tau^2 N \\
&= -3\alpha\alpha'T + (\alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2)N + (2\tau\alpha' + \alpha\tau')B
\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

elde edilir. Denklem (4.2.7) ve (5.1.9) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
g(R(T, N)T, N) &= 1 - \frac{\mu}{2} - 1 - 1 - \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} \\
&\quad - \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - 1 - \kappa\right)
\end{aligned}$$

burada

$$1 - \frac{\mu}{2} - 1 - 1 - \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} = 0$$

olur ve buradan

$$g(R(T, N)T, N) = -\eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(T)\eta(N)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \tag{5.1.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) - \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) \tag{5.1.12}$$

elde edilir.

Bu durumda (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldun üzerinde $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi (5.1.10) , (5.1.11) ve (5.1.12) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) - \eta(T)\eta(N) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right) \right) N \\ + (2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right)) B = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.5. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ve B bir zaman benzeri (timelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha' = 0, \\ \alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) - \eta(T)\eta(N) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right) = 0, \\ 2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.6. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ve B bir timelike vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{sabit}, \\ \tau = \text{sabit}, \\ \alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 = 0, \\ \mu = 1, \\ \kappa = -\frac{1}{2}, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.4. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} -3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) - \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \right) N \\ + \left(2\alpha'\tau + \alpha\tau' - \eta(T)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) \right) B = 0 \end{aligned}$$

dır.

İspat. 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu üzerinde $C : I \rightarrow M$ bir spacelike eğrisi olduğundan T bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanıdır. M^3 üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı ise

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = \alpha N \\ N' = -\alpha T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{array} \right.$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(T, T) = g(N, N) = g(B, B) = 1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0, \end{cases} \quad (5.1.13)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace Beltrami operatörünü

$$\begin{aligned} \Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\ &= \nabla_T \nabla_T (\alpha N) \\ &= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \\ &= T(T(\alpha))N + T(N)T(\alpha) + T(\alpha)T(N) + \alpha T(-\alpha T + \tau B) \\ &= \alpha''N - \alpha\alpha'T + \tau\alpha'B - \alpha\alpha'T + \alpha'\tau B + \alpha(-\alpha'T - \alpha\alpha N + \tau'B + \tau(-\tau N)) \\ &= \alpha''N - 2\alpha\alpha'T + 2\alpha'\tau B - \alpha\alpha'T - \alpha^3N + \alpha\tau'B - \alpha\tau^2N \\ &= -3\alpha\alpha'T + (\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2)N + (2\alpha'\tau + \alpha\tau')B \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

elde edilir. Denklem (4.2.7) ve (5.1.13) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} g(R(T, N)T, N) &= \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - 1 - 1 - \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} \\ &\quad - \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\left(\frac{\mu}{2} - 1 - \kappa\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) - 1 - 1 - \frac{-1 + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} + \frac{\mu}{2} + \frac{\kappa + \frac{\mu}{2}}{\kappa + 1} = 0$$

olur ve

$$g(R(T, N)T, N) = -\eta(T)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \quad (5.1.15)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) - \eta(T)\eta(B)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) \quad (5.1.16)$$

elde edilir. Bu durumda (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldun üzerinde $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi (5.1.14) , (5.1.15) ve (5.1.16) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -3\alpha\alpha'T + \left(\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) - \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \right) N \\ + \left(2\alpha'\tau + \alpha\tau' - \eta(T)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) \right) B = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.7. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha' = 0, \\ \alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) - \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) = 0, \\ 2\alpha'\tau + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) + \eta(T)\eta(B)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.8. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B uzay benzeri (spacelike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{sabit}, \\ \tau = \text{sabit}, \\ \alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 = 0, \\ \kappa = -\frac{1}{2}, \\ \mu = 1, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.5. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B bir ışık benzeri (lightlike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left(\alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2 - \eta(N)\eta(T) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right) \right) N = 0$$

dır.

İspat. M^3 , (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunda $C : I \rightarrow M$ bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi olduğundan T bir uzay benzeri (spacelike) vektör alanıdır. M^3 üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N ve B ışık benzeri (lightlike) vektör alanları ise

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = N \\ N' = \tau N \\ B' = T - \tau B \end{array} \right.$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$g(T, T) = 1,$$

$$g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = g(N, N) = g(B, B) = 0, \quad (5.1.17)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace Beltrami operatörünü

$$\begin{aligned} \Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\ &= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \\ &= T(T(\alpha))N + T(N)T(\alpha) + T(\alpha)T(N) + \alpha T(\tau N) \\ &= \alpha''N + \alpha'\tau N + \alpha'\tau N + \alpha\tau'N + \tau^2 N \\ &= (\alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2)N \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

elde edilir. Denklem (4.2.7)ve (5.1.17) eşitliklerinden

$$g(R(T, N)T, N) = \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \quad (5.1.19)$$

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) - \eta(T)\eta(B)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right) \quad (5.1.20)$$

elde edilir. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

olduğundan, (5.1.18) , (5.1.19) ve (5.1.20) denklemlerinden

$$\left(\alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2 - \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right)\right)N = 0$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.9. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir uzay benzeri (spacelike) eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B bir ışık benzeri (lightlike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2 = 0, \\ \mu = 2(\kappa + 1), \end{cases}$$

olmasıdır.

Teorem 5.1.6. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir ışık benzeri eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N uzay benzeri ve B bir ışık benzeri vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\tau'T + \left(2\tau + \eta(T)\eta(T)\left(\kappa + \frac{\mu}{2}\right)\right)N = 0$$

dır.

İspat. M^3 , (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunda $C : I \rightarrow M$ bir ışık benzeri (lightlike) eğrisi olduğundan T bir ışık benzeri (lightlike) vektör alanıdır. M^3 üzerinde C eğrisinin Frenet çatısında N bir uzay benzeri (spacelike) ve B ışık benzeri (lightlike) vektör alanı ise

$$\begin{cases} T' = N \\ N' = \tau T + B \\ B' = \tau N \end{cases}$$

olur. Bu durumda T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(N, N) = 1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = g(T, T) = g(B, B) = 0, \end{cases} \quad (5.1.21)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace Beltrami operatörünü

$$\begin{aligned}
\Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\
&= \nabla_T (\tau T + B) \\
&= \tau' T + \tau N + \tau N \\
&= \tau' T + 2\tau N
\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

elde edilir. Denklem (4.2.7) ve (5.1.21) eşitliklerinden

$$g(R(T, N)T, N) = -\eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \tag{5.1.23}$$

$$g(R(T, N)T, B) = 0 \tag{5.1.24}$$

elde edilir. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi

$$\nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0$$

olduğundan, (5.1.22) , (5.1.23) ve (5.1.24) denklemlerinden

$$\tau' T + \left(2\tau + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right) N = 0$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.10. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir ışık benzeri eğrisi (lightlike) ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N uzay benzeri (spacelike) ve B bir ışık benzeri (lightlike) vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{cases} \tau = 0, \\ \mu = -2\kappa, \end{cases}$$

olmasıdır.

3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu üzerinde zaman benzeri, uzay benzeri ve ışık benzeri eğrilerin biharmonik durumunu bir tabloda özet halinde göstermiş olursak;

$C : I \rightarrow M^3$	T	N	B	Biharmonik denklemi	Biharmonik olmasının gerek ve yeter şartlar
Zaman benzeri (timelike)	Zaman benzeri (timelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	$0 = 3\alpha\alpha'T$ $+ \left(\alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right) N$ $- \eta(T)\eta(N) \left(\kappa + 1 - \frac{\mu}{2} \right)$ $+ \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) \right) B$ $+ \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right)$	$\alpha, \tau = \text{sabit},$ $\alpha'' + \alpha^3 - \alpha\tau^2 = 0,$ $\kappa = -\frac{1}{2}, \quad \mu = 1$
Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Zaman benzeri (timelike)	Uzay benzeri (spacelike)	$0 = 3\alpha\alpha'T$ $+ \left(\alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 - \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right) N$ $- \eta(T)\eta(N) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right)$ $+ \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(1 - \mu) \right) B$ $+ \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right)$	$\alpha, \tau = \text{sabit},$ $\alpha'' + \alpha^3 + \alpha\tau^2 = 0,$ $\kappa = -\frac{1}{2}, \quad \mu = 1$

Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Zaman benzeri (timelike)	$0 = -3\alpha\alpha'T$ $+ \left(\alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right)_N$ $- \eta(T)\eta(N) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right)$ $+ \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) \right)_B$ $+ \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right)$	$\alpha, \tau = \text{sabit},$ $\alpha'' - \alpha^3 + \alpha\tau^2 = 0,$ $\kappa = -\frac{1}{2} \quad , \quad \mu = 1$
Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	$0 = -3\alpha\alpha'T$ $+ \left(\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 + \eta(T)\eta(T) \left(\frac{\mu}{2} + \kappa \right) \right)_N$ $+ \eta(N)\eta(T) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right)$ $+ \left(2\tau\alpha' + \alpha\tau' - \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) \right)_B$ $+ \eta(T)\eta(B) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right)$	$\alpha, \tau = \text{sabit},$ $\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2 = 0,$ $\kappa = -\frac{1}{2} \quad , \quad \mu = 1$
Uzay benzeri (spacelike)	Uzay benzeri (spacelike)	Işık benzeri (lightlike)	Işık benzeri (lightlike)	$0 = \left(\alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2 \right)_N$ $- \eta(N)\eta(T) \left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1 \right)$	$\alpha'' + 3\alpha'\tau + \tau^2 = 0$ $\mu = 2(1 + \kappa)$
Işık benzeri (lightlike)	Işık benzeri (lightlike)	Uzay benzeri (spacelike)	Işık benzeri (lightlike)	$0 = \tau'T + \left(2\tau + \eta(T)\eta(T) \left(\kappa + \frac{\mu}{2} \right) \right)_N$	$\tau = 0$ $\mu = -2\kappa$

Tablo (5.1.1)

Teorem 5.1.7. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisi ve C eğrisi boyunca M^3 e teğet olan Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere N ve B vektör alanı spacelike veya timelike vektör alanı olsun. Bu durumda $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$-3\alpha\alpha'T + (\alpha'' - \alpha^3 - \alpha\tau^2)N + (2\alpha'\tau + \alpha\tau')B = 0$$

dır.

İspat. 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu üzerinde $C : I \rightarrow M^3$ eğrisi bir spacelike veya timelike eğrisi olduğundan $g(T, T) = \pm 1 = \varepsilon_1$ ve $g(N, N) = \pm 1 = \varepsilon_2$ olur. Bu durumda C eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \alpha N \\ N' = -\varepsilon_1 \alpha T + \tau B \\ B' = -\varepsilon_2 \tau N \end{cases}$$

şeklinde dir. T, N, B ortogonal vektör alanları için

$$\begin{cases} g(T, T) = \varepsilon_1 = \pm 1, & g(N, N) = \varepsilon_2 = \pm 1, \\ g(T, N) = g(T, B) = g(N, B) = 0, \end{cases} \quad (5.1.25)$$

sağlanır. $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin Laplace Beltrami operatörünü

$$\begin{aligned} \Delta H &= \nabla_T^3 T = \nabla_T \nabla_T (\nabla_T T) \\ &= \nabla_T (T(\alpha)N + \alpha T(N)) \\ &= \alpha'' N + (-\varepsilon_1 \alpha T + \tau B)\alpha' + (-\varepsilon_1 \alpha T + \tau B)\alpha' + \alpha T(-\varepsilon_1 \alpha T + \tau B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha''N - \varepsilon_1\alpha\alpha'T + \alpha'\tau B - \varepsilon_1\alpha\alpha'T + \alpha'\tau B \\
&\quad + \alpha(-\varepsilon_1\alpha'T - \varepsilon_1\alpha\alpha N + \tau'B + \tau(-\varepsilon_2\tau N)) \\
&= \alpha''N - 2\varepsilon_1\alpha\alpha'T + 2\alpha'\tau B - \varepsilon_1\alpha\alpha'T - \varepsilon_1\alpha^3N + \alpha\tau'B - \varepsilon_2\alpha\tau^2N \\
&= -3\varepsilon_1\alpha\alpha'T + (\alpha'' - \varepsilon_1\alpha^3 - \varepsilon_2\alpha\tau^2)N + (2\alpha'\tau + \alpha\tau')B
\end{aligned} \tag{5.1.26}$$

elde edilir. Denklem (4.2.7) ve (5.1.25) eşitliklerini kullanarak

$$g(R(T, N)T, N) = -\eta(T)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) + \eta(N)\eta(T)\left(\frac{\mu}{2} - \kappa - 1\right) \tag{5.1.27}$$

$$g(R(T, N)T, B) = \eta(N)\eta(T)(\mu - 1) - \eta(T)\eta(B)\left(\frac{\mu}{2} + \kappa\right) \tag{5.1.28}$$

elde edilir. $C : I \rightarrow M$ bir Legendre eğrisi olduğundan

$$\eta(T) = \eta(N) = \eta(B) = 0$$

dır. O zaman denklem (5.1.27) ve (5.1.28) den

$$g(R(T, N)T, N) = 0 \tag{5.1.29}$$

$$g(R(T, N)T, B) = 0 \tag{5.1.30}$$

elde edilir. Bu durumda (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldun üzerinde $C : I \rightarrow M^3$ eğrisinin biharmonik denklemi (5.1.26) , (5.1.29) ve (5.1.30) denklemlerinden

$$-3\varepsilon_1\alpha\alpha'T + (\alpha'' - \varepsilon_1\alpha^3 - \varepsilon_2\alpha\tau^2)N + (2\alpha'\tau + \alpha\tau')B = 0$$

elde edilir.

Sonuç 5.1.11. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\alpha' = 0, \\ \alpha'' - \varepsilon_1\alpha^3 - \varepsilon_2\alpha\tau^2 = 0, \\ 2\alpha'\tau + \alpha\tau' = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

Sonuç 5.1.12. (M, ϕ, ξ, η, g) 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olsun. κ, μ reel sabitler ve $\kappa \neq -1$ için $C : I \rightarrow M^3$ yay uzunluğu parametresine göre parametrelenmiş bir spacelike veya timelike Legendre eğrisinin biharmonik olması için gerek ve yeter şart

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \text{sabit}, \\ \tau = \text{sabit}, \\ \varepsilon_1\alpha^3 + \varepsilon_2\alpha\tau^2 = 0, \end{array} \right.$$

olmasıdır.

5.2 (κ, μ) -Paradeğme Metrik Manifoldların Biharmonik Hiperyüzeyleri

Bu alt bölümde (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldun bir non-denejere hiperyüzeyini ele alıp biharmonik olma şartları incelenmiştir.

$\tilde{M}$ manifoldu $(\phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ yapısı ile beraber $(2n + 1)$ -boyutlu bir (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu ve M manifoldu da $\tilde{M}$ nin hiperyüzeyi olsun. M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı U olmak üzere Gauss-Weingarten denklemlerinden

$$B(V, Y) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V Y, U)U = -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_V U)U = g(A_V U, Y)U$$

ve

$$g(A_V U, Y)U = \tilde{g}(B(V, Y), U) = \tilde{g}(\sigma(V, Y), U)U = \sigma(V, Y)$$

yazılır [1]. Burada A şekil operatörü ve B ikinci temel formu belirtir.

Teorem 5.2.1. $(\tilde{M}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunun bir hiperyüzeyi M ve H bu hiperyüzeyin ortalama eğriliği olmak üzere $f: M \rightarrow \tilde{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu

$$\lambda = H\xi \quad (5.2.1)$$

tanımlansın. M altmanifoldunun üzerinde ξ bir karakteristik birim normal vektör alanı olsun yani, $\xi \in \Gamma(T^\perp M)$. Bu durumda M altmanifoldunun biharmonik olması için gerek ve yeter şartları;

$$2n\Delta H\xi - 2nH\|A\|^2\xi + \Delta H\xi - H\|A\|^2\xi + H2n\kappa\xi = 0, \quad (5.2.2)$$

$$2n\text{grad}H^2 + \text{grad}H^2 - 4nA\text{grad}H + 2A\text{grad}H + H2n\kappa(e_j) = 0 \quad (5.2.3)$$

olmasıdır.

İspat. (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu $\tilde{M}$ ve M hiperyüzeyide $\tilde{M}$ nin altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ ve M nin bir lokal ortonormal çatısını sırasıyla

$$\{df(e_1), df(e_2), \dots, df(e_{2n+1}), \xi\}$$

ve

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}\}$$

olarak tanımlansın. ∇ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla TM ve $T\tilde{M}$ nin koneksiyonları ve ∇^f de $f^{-1}T\tilde{M}$ üzerindeki indirgenmiş koneksiyon olsun. $\forall V \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(f^{-1}T\tilde{M})$ olmak üzere

$$df(V) = \tilde{\nabla}_{df(V)} df(Y) = \nabla_V^f Y \quad (5.2.4)$$

dir, burada $df(V)$ ile V ve $\nabla_V^f Y$ ile $\tilde{\nabla}_V Y$ özdeşleştirilmiştir. $f^{-1}T\tilde{M}$ tanjant demeti teğet ve normal vektörlerin birleşiminden ibarettir, yani

$$f^{-1}T\tilde{M} = \tan(TM) \oplus \text{nor}(TM).$$

dır. Dolayısıyla $f: M \rightarrow \tilde{M}$ izometrik immersiyona karşılık gelen tensiyon alanı

$$\begin{aligned}\tau(f) &= iz\nabla df \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \nabla df(e_k, e_k) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} B(e_k, e_k) \\ &= (BoyM)\lambda \\ &= (2n+1)H\xi\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

dır. Böylece $f: M \rightarrow \tilde{M}$ nin bitensiyon alanı

$$\begin{aligned}\tau_2(f) &= \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \nabla_{e_k}^f \nabla_{e_k}^f \tau(f) - \nabla_{\nabla_{e_k} e_k}^f \tau(f) - \tilde{R}(e_k, \tau(f))(e_k) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \nabla_{e_k}^f \nabla_{e_k}^f ((2n+1)H\xi) - \nabla_{\nabla_{e_k} e_k}^f ((2n+1)H\xi) \right. \\ &\quad \left. - \tilde{R}(e_k, (2n+1)H\xi)e_k \right\} \\ &= (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \nabla_{e_k}^f \nabla_{e_k}^f (H\xi) - \nabla_{\nabla_{e_k} e_k}^f (H\xi) - \tilde{R}(e_k, H\xi)e_k \right\} \\ &= (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} (H\xi) - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} (H\xi) - \tilde{R}(e_k, H\xi)e_k \right\} \\ &= (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \tilde{\nabla}_{e_k} (e_k(H)\xi + H\tilde{\nabla}_{e_k} \xi) - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} (H)\xi - \tilde{R}(e_k, H\xi)e_k \right\} \\ &= (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ e_k(e_k(H)\xi) + e_k(H)\tilde{\nabla}_{e_k} \xi + e_k(H)\tilde{\nabla}_{e_k} \xi + H\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \xi \right. \\ &\quad \left. - (\nabla_{e_k} e_k)(H)\xi - H\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \xi - H\tilde{R}(e_k, \xi)e_k \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ e_k(e_k(H)\xi) + 2e_k(H)\tilde{\nabla}_{e_k}\xi + H\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{\nabla}_{e_k}\xi - (\nabla_{e_k}e_k)(H)\xi \right. \\
&\quad \left. - H\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k}e_k}\xi \right\} - (2n+1)H \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{R}(e_k, \xi)e_k \\
&= (2n+1)(\Delta H)\xi - (2n+1)H\Delta^f\xi \\
&\quad + (2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ 2e_k(H)\tilde{\nabla}_{e_k}\xi + H\tilde{\nabla}_{e_k}\tilde{\nabla}_{e_k}\xi - H\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k}e_k}\xi \right\} \\
&\quad - (2n+1)H \sum_{k=1}^{2n+1} \varepsilon_k \tilde{R}(e_k, \xi)e_k \\
&= (2n+1)(\Delta H)\xi - (2n+1)H\Delta^f\xi \\
&\quad + 2(2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ \tilde{g}(df(gradH), df(e_k))(-A_{e_k}) \right\} \\
&\quad - (2n+1)H \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{R}(e_k, \xi)e_k \\
&= (2n+1)(\Delta H)\xi - (2n+1)H\Delta^f\xi \\
&\quad - 2(2n+1) \sum_{k=1}^{2n+1} \left\{ (A(\tilde{g}(df(e_k), df(gradH)))e_k \right\} \\
&\quad - (2n+1)H \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{R}(e_k, \xi)e_k
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
\tau_2(f) &= (2n+1)(\Delta H)\xi - (2n+1)H\Delta^f\xi - 2(2n+1)A(gradH) \\
&\quad - (2n+1)H \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{R}(e_k, \xi)e_k
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

şeklinde bulunur. Şimdi bitensiyon alanının normal ve teğetlerine ayırmak için $\Delta^f\xi$ ve bitensiyon denklemindeki eğrilik tensör alanının normal ve teğet bileşenlerini bulup ayırmamız gerekir.

$\tilde{R}$ eğrilik tensörünün normal ve teğet bileşenlerini

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{R}(df(e_k), \tau(f))df(e_k), \xi) = (2n+1)HRic(\xi, \xi) \quad (5.2.7)$$

ve

$$\sum_{k,j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{R}(df(e_k), \xi)df(e_k), df(e_j))e_j = (Ric(\xi))^T \quad (5.2.8)$$

şeklinde olur. $\tilde{M}$ manifoldunun bir (κ, μ) -paradeğme metrik manifold olarak göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\Delta^f \xi, \xi) &= - \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \xi - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \xi, \xi) \\ &= - \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \xi, \xi) \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, \tilde{\nabla}_{e_k} \xi) \\ &= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(-\varphi e_k + \varphi h e_k, -\varphi e_k + \varphi h e_k) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

bulunur.

$\tilde{M}$, (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunun ξ birim normal vektör alanı olduğundan A şekil operatörü ve B ikinci temel formu olmak üzere

$$\begin{aligned} B(V, Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V Y, \xi)\xi = -\tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X \xi)\xi = g(A_V \xi, Y)\xi, \\ g(A_V \xi, Y) &= \tilde{g}(B(V, Y), \xi) = \tilde{g}(\sigma(V, Y)\xi, \xi) = \sigma(V, Y), \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|A\|^2 = \sum_{k,j=1}^{2n+1} g(Ae_k, e_j)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, e_j)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g} \left(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, \sum_{j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, e_j), e_j \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, \tilde{\nabla}_{e_k} \xi) \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(-\varphi e_k + \varphi h e_k, -\varphi e_k + \varphi h e_k) \tag{5.2.10}
\end{aligned}$$

eşitlikleri vardır. Buradan $\Delta^f \xi$ nın normali $(\Delta^f \xi)^\perp$ için

$$\begin{aligned}
(\Delta^f \xi)^\perp &= \tilde{g}(\Delta^f \xi, \xi) \xi \\
&= \sum_{k=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \xi, \tilde{\nabla}_{e_k} \xi) \xi \\
&= \|A\|^2 \xi \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

ve $\Delta^f \xi$ teğeti $(\Delta^f \xi)^\top$ için

$$\begin{aligned}
(\Delta^f \xi)^\top &= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} \tilde{\nabla}_{e_k} \xi - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \xi, e_j) e_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} A e_k - A(\nabla_{e_k} e_k), e_j) e_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \{e_k \tilde{g}(A e_k, e_j) - \tilde{g}(A e_k, \nabla_{e_k} e_j) - \tilde{g}(A(\nabla_{e_k} e_k), e_j)\} e_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{e_k} A e_k - A(\nabla_{e_k} e_k), e_j) e_j \\
&= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \{e_k \sigma(e_k, e_j) - \sigma(e_k, \nabla_{e_k} e_j) - \sigma(\nabla_{e_k} e_k, e_j)\} e_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \{\nabla_{e_k} \sigma(e_j, e_k)\} e_j \quad (5.2.12)$$

elde edilir. Codazzi ve (5.2.12) denklemleri kullanarak

$$\begin{aligned} (\Delta^f \xi)^\top &= \sum_{k,j=1}^{2n+1} \{\nabla_{e_k} \sigma(e_k, e_j)\} e_j \\ &= \sum_{j=1}^{2n+1} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} (\nabla_{e_j} \sigma)(e_k, e_k) - S(\xi, e_j) \right) e_j \\ &= (2n+1) \sum_{j=1}^{2n+1} e_j(H) e_j - \sum_{j=1}^{2n+1} (S(\xi, e_j)) e_j \\ &= (2n+1) \text{grad}(H) - \sum_{j=1}^{2n+1} (S(\xi, e_j)) e_j \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

elde edilir.

$\tilde{M}$ bir (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldu olduğundan

$$S(\xi, e_j) = -2n\kappa\eta(e_j)$$

dır, buradan

$$(\Delta^f \xi)^\top = (2n+1) \text{grad}(H) + 2n\kappa\eta(e_j) \quad (5.2.14)$$

elde edilir ve $\tau_2(f)$ nin normal ve teğet bileşenlerini

$$(\tau_2(f))^\perp = 2n\Delta H\xi - 2nH\|A\|^2\xi + \Delta H\xi - H\|A\|^2\xi + 2n\kappa H\xi,$$

$$(\tau_2(f))^\top = 2n\text{grad}H^2 + \text{grad}H^2 - 4nA\text{grad}H + 2A\text{grad}H + 2n\kappa H\eta(e_j),$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.2.1. Bir nondejenere $(2n+1)$ -boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunun biharmonik olmasının gerek ve yeter şartı o manifoldun minimal olmasıdır

yani bir nondejenere $(2n + 1)$ -boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldunun biharmoniktir ancak ve ancak $H = 0$ dir.



SONUÇ

Bu yüksek lisans tez çalışması (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların biharmonik altmanifoldları üzerinde yapıldı ve bu manifoldların biharmonik olma durumları incelendi. 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların uzay benzeri (spacelike), zaman benzeri (timelike), ışık benzeri (lightlike) eğrilerin biharmonik denklemleri bulunup ve bu manifoldların biharmonik olmaları için gerek ve yeter şartlar incelenmiş ve bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Sonra 3-boyutlu (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldlar üzerinde spacelike ve timelike Legendre eğrileri üzerinde biharmonik olmaları için gerek ve yeter şartlar incelenmiştir. Ayrıca (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların biharmonik non-dejenere hiperyüzeyleri incelenip ve biharmonik olması için gerek ve yeter şartları üzerinde çalışılmıştır. (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldları daha geniş uygulamaya sahiptir. (κ, μ) -paradeğme metrik manifoldların fiziksel ve mühendislik problemlerinin çözümünde nasıl kullanılabileceğini incelemek de yararlı olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Atabay, A. (2019).** Biharmonik dönüşümler, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- [2] **Baird, P. & Wood, J.C. (2003).** Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds. Clarendon Press, Oxford.
- [3] **Blair, D.E. (2002).** Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, PM203, Birkhauser.
- [4] **Caddeo, R. Montaldo, S. Oniciuc, C. & Piu, P. (2006).** The Classification of Biharmonic Curves of Cartan-Vranceanu 3-Dimensional Spaces, Cluj University Press, 10p
- [5] **Cappelletti Montano, B. & Di Terlizzi, L. (2010).** Geometric structures associated to a contact metric (κ, μ) -space. Pacific J. Math. 246(2): 257-292.
- [6] **Cappelletti Montano, B., Küpeli Erken, İ. & Murathan, C. (2012).** Nullity Conditions in Paracontact Geometry. Differential Geometry and its applications. 30(6): 665-693.
- [7] **Eells, J. & Sampson, J. H. (1964).** Harmonic mappings of Riemannian manifolds. Amer.J. Math. 86: 109-160.
- [8] **ETNYRE, J.B. (2002).** Introductoryon Contact Geometry, arxiv:math.SG/0111118v2,11.
- [9] **Hacısalıhoğlu, H. H. & Sabuncuoğlu A. (1983).** Diferensiyel Geometri. Milli Eğitim Basımevi İstanbul.
- [10] **Hacısalıhoğlu, H. H. (1993).** Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi.
- [11] **Hacısalıhoğlu, H.H. (2006).** Yüksek Diferensiyel Geometri ve Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları.
- [12] **Jiang, G.Y. (1986).** 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds Chinese Ann. Math. Ser. A7,30-144.
- [13] **Jiang, G. Y. (1987).** Some non-existence theorems of 2-harmonic isometric immersions into Euclidean spaces. Chin. Ann. Math. Ser. 8A:376-383.

- [14] **Küveli, D.E. & Rio, E.G. (1999).** semi-Riemannian Maps and Their Application, Kluwer Academic Publishers.
- [15] **Küveli Erken, İ. (2010).** Paradeğme manifoldlar, Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- [16] **Küveli Erken, İ. (2016).** Paradeğme geometrisinde sıfırlık dağılımları, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- [17] **Lopez, R. (2014).** Differential Geometri of Curves and Surface in Lorentz-Minkowski Space, International Electronic Journal of Geometry Volume 7 No. 1 pp. 44-107
- [18] **Nakauchi, N. & Urakawa, H. (2011).** Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive Ricci curvature. Ann. Global Anal. Geom. 40: 125-131.
- [19] **O' Neill, B. (1983).** Elementary Differential Geometry, London.
- [20] **O'Neill, B. (1983).** Semi-Riemann Geometry. Academic Press, New York.
- [21] **Ozan Y. (2016).** Türevlenebilir Manifoldlara Giriş Orta Doğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü.
- [22] **Sabuncuoğlu A. (2014).** Diferensiyel Geometri. Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Dışmanlık.
- [23] **Salimov A. & Mağden A. (2008)** Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi
- [24] **Sharfuddin, A. & Hussain, S.I. (1977).** On Almost Paracontact Manifolds. Aligarh Bull. Math., 7:103-107.
- [25] **Şahin, B. (2012).** Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayıncılık.
- [26] **Welyczko, J. (2009).** On Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds, Results in Math., 54, 377-387.
- [27] **Yano, K. & Kon, M. (1984).** Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp, Singapore.
- [28] **Yıldız, M. (2019).** Para sasakian Manifoldların Biharmonik Altmanifoldları, Yüksek Lisans tezi, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

- [29] **Yüksel, S. (2005).** Harmonik Morfizimlerin Geometrisi Üzerinde, Yüksek Lisans tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [30] **Yüksel Perktas, S. (2011).** Lorentzian Hemen Hemen Parakontakt manifoldların altmanifoldları ve biharmoniklikleri”, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [31] **Zamkovoy, S. (2009).** Canonical Connections on Paracontact Manifolds, Ann Glob Anal Geom.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ayda Murat

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lise** : 2004, İran/Tebriz Negin Daneş Lisesi.
- **Lisans** : 2009, İran/Tebriz Azad İslami Üniversite, Fen Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü.
- **Yüksek Lisans** : _____, Malatya İnönü Üniversitesi, Matematik, Geometri.