

ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

METRİK UZAYLARDA P -BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI SABİT
NOKTA SONUÇLARI

Abdullah YETGİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Abdullah YETGİN tarafından hazırlanan “**Metrik uzaylarda P-büzölme Operatörleri**” adlı tez çalışması 01/11/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

Jüri Üyeleri :

Başkan : Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Hakan ŞAHİN
Matematik Anabilim Dalı
Bursa Teknik Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Gül UĞUR KAYMANLI
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Metrik Uzaylarda P- Büzülme Dönüşümleri ve Bazı Sabit Nokta Sonuçları**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (28/08/2023).

Abdullah YETGİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

METRİK UZAYLARDA P - BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

Abdullah YETGİN

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

Bu tez çalışmasında öncelikle sabit nokta teorisinin tarihsel süreci hakkında özet bir bilgi verilmiştir. Tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak için literatürde yer alan çalışmalar ile birlikte kendi sonuçlarımızı ifade ve ispat ederken kullanacağımız bazı önemli tanım, teorem ve örnekler verildi. Ardından metrik uzaylarda yeni olan P -büzülme dönüşümü kavramı verilmiştir. P -büzülme dönüşümlerinin metrik uzaylarda bağımsız olduğunu göstermek için bazı örneklerden faydalanılmıştır. Suzuki tipi P -büzülme dönüşümü kavramı verilip bu tür eşlemeler için kompakt metrik uzaylardaki ünlü Edelstein sabit nokta teoreminin daha genel bir sonucu elde edilmiştir.

2023, 29 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Büzülme dönüşümü, P -büzülme dönüşümü, Sabit nokta, Kompakt metrik uzay

ABSTRACT

Master of Science Thesis

P-CONTRACTIVE MAPPINGS ON METRIC SPACES AND SOME FIXED POINT

Abdullah YETGİN

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

In this thesis, firstly, a brief overview of the historical development of fixed-point theory is provided. To facilitate the understanding of the thesis, some important definitions, theorems, and examples that will be used to express and prove our results, along with studies in the literature, are given. Then, the concept of the new P -contraction transformation in metric spaces is introduced. Some examples are used to demonstrate the independence of P -contraction transformations in metric spaces. The concept of Suzuki-type P -contraction transformation is introduced, and a more general result of the famous Edelstein fixed-point theorem for such mappings on compact metric spaces is obtained.

2023, 29 pages

Keywords: Contractive mapping, P -contractive mapping, Fixed point, Compact metric space

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren, her türlü konuda yardımda bulunan, sürekli destekleyen ve anlayışından dolayı değerli hocam Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR'e teşekkür ederim.

Bu aşamaya gelmemde bana emeği geçen tüm hocalarıma, hakları hiçbir zaman ödenemeyecek olan annem ve babama, sevgili kardeşlerime, beni destekleyen tüm arkadaşlarıma şükranlarımı sunarım.

Abdullah YETGİN

Çankırı, Ağustos 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Genel Tanımlar Ve Teoremler	3
2.2 Büzülme Dönüşümü Ve Genelleştirmeleri.....	8
3. METRİK UZAYLARDA P-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI.....	16
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

SİMGELER DİZİNİ

$\{\omega_{n(k)}\}$	Alt dizi
$\emptyset$	Boş küme
$\{\omega_n\}$	Dizi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\in$	Eleman
$C(\Lambda)$	Kendinden kendine dönüşümlerin sınıfı
$N(\Lambda)$	Kendinden kendine genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı
(Λ, μ)	Metrik uzay
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$P(\Lambda)$	P-dönüşümlerin sınıfı
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$S(\Lambda)$	Suzuki tip dönüşümlerin sınıfı
$T^n \omega$	ω elemanının T dönüşümü altındaki n. inci iterasyonu (bileşkesi)

KISALTMALAR DİZİNİ

$\liminf$	Alt limit
$\inf$	En büyük alt sınır
$\sup$	En küçük üst sınır
m.u	Metrik uzay
o.ş.	Olacak şekilde
S.N.	Sabit nokta
$\limsup$	Üst limit



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 $C(\Lambda)$, $S(\Lambda)$, $P(\Lambda)$ ve $N(\Lambda)$ arasındaki ilişki (Altun <i>et al.</i> 2018)	20
---	----



1. GİRİŞ

Suzuki 2009 yılında yapmış olduğu bir çalışmada metrik sabit nokta teoremlerini, operatörlerin sabit noktasının tek olup olmadığı ve Picard dizisinin sabit bir noktaya yakınsayıp yakınsamadığı koşullarına göre dört tip sınıfta sınıflandırmıştır. (A, μ) bir metrik uzay ve T, A üzerinde kendinden kendine bir dönüşüm olmak üzere Suzuki aşağıdaki sınıflandırmayı yapmıştır(Suzuki 2009).

(T1) T 'nin tek bir sabit noktası ve her $\omega \in A$ için sabit noktaya yakınsayan $\{T^n \omega\}$ Picard dizisi vardır. Böyle bir dönüşüme literatürde Picard operatörü denir. Metrik sabit nokta teoremi bu koşulu sağlar ve bu tip dönüşümler Lider tip sınıfı olarak adlandırılır (Leader 1983). Sabit nokta teoremlerini birçoğu yani Banach, Ciric, Edelstein, Kannan, Kirk, Matkoswski ve Suzuki tip teoremler bu sınıftadır (Banach 1922, Ciric 1974, Edelstein 1962, Kannan 1969, Kirk 2003, Matkowski 1975, Suzuki 2001-2004).

(T2) T bir tek sabit noktaya sahiptir. (Yani $\{T^n \omega\}$ Picard dizisinin bu sabit noktaya yakınsaması gerekmez). Eğer metrik sabit nokta teoremi bu şartı sağlıyorsa bu tip dönüşümler Unnamed tip sınıf olarak adlandırılır. Suzuki'nin belirttiği gibi, Lider tip sınıfta olan bir teoremden Unnamed tip sınıfta olan bir sabit nokta teoremi oluşturabiliriz. Ancak bu anlamsız bir sonuç haline gelir. Elbette ki Suzuki 2009 da yapmış olduğu çalışmadaki Teorem 3 böyle bir teorem değildir.

(T3) T 'nin sabit bir noktası vardır (birden fazla olabilir) ve her $\omega \in A$ için $\{T^n \omega\}$ Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar. Bu tarz dönüşümlere literatürde zayıf Picard operatörü denir. Eğer metrik sabit nokta teoremi bu şartı sağlıyorsa bu tip dönüşümler Subrahmanyam tip sınıf olarak adlandırılır. Örneğin Subrahmanyam'ın sabit nokta teoremi bu sınıftadır (Subrahmanyam 1974). Ayrıca bu sınıf için birçok sonuç Rus et al.2005 ve Rus et al.2006 çalışmalarına bakılabilir.

(T4) T 'nin bir sabit noktası vardır (sabit nokta birden fazla olabilir ve $\{T^n \omega\}$ Picard dizisinin bu sabit noktaya yakınması gerekmez). Eğer metrik sabit nokta teoremi bu şartı sağlıyorsa bu tip dönüşümler Caristi tip sınıf olarak adlandırılır (Caristi 1976). Bae (Bae 2003), Bae, Cho ve Yeom (Bae *et al.* 1994), Caristi ve Kirik (Caristi and Kirk 1975) ve Suzuki (Suzuki 2005) nin teoremleri bu sınıfa aittir.

Bu çalışmada metrik uzaylarda yeni bir tür büzülme operatörleri olan P -büzülme operatörü tanıtılacaktır. Her alışılmış büzülme dönüşümünün zamanda P -büzülme olduğunu ancak tersi genel olarak doğru olmayabileceği gösterilecektir.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde genel metrik ve topolojik kavramlar verilirken lisans matematiğinde sıkça kullanılan kitaplardan yararlanılacaktır (Gamelin and Greene 1999, Koçak 2009, Kreyszig 1991, Nesin 2020 ve Soykan 2012). Bu kavramlar yardımıyla s.n. tanımı yapılarak hem tek değerli hem de küme değerli dönüşümler için s.n. sonuçları incelenecektir.

2.1 Genel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1 Λ boş olmayan bir küme ve $\mu: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu

μ_1) Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için $\mu(\omega, \gamma) \geq 0$ ve $\mu(\omega, \gamma) = 0 \Leftrightarrow \omega = \gamma$,

μ_2) Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için $\mu(\omega, \gamma) = \mu(\gamma, \omega)$,

μ_3) Her $\omega, \gamma, \varphi \in \Lambda$ için $\mu(\omega, \varphi) \leq \mu(\omega, \gamma) + \mu(\gamma, \varphi)$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna Λ kümesinde metrik ve (Λ, μ) sıralı ikilisine metrik uzay (kısaca m.u.)denir. Bu durumda Λ in elemanlarına noktalar ve $\mu(\omega, \gamma)$ değerine de Λ noktası ile γ noktası arasındaki uzaklık denir.

Tanım 2.1.2 (Λ, μ) bir m.u., $\gamma \in \Lambda$ ve $\beta > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B_{(\omega, \mu)}(\gamma, \beta) = \{\omega \in \Lambda: \mu(\omega, \gamma) < \beta\}$$

kümesine β -yarıçaplı γ merkezli açık yuvar,

$$S_{(\omega, \mu)}(\gamma, \beta) = \{\omega \in \Lambda: \mu(\omega, \gamma) = \beta\}$$

kümesine β -yarıçaplı $\mathcal{Z}$ merkezli yuvar yüzeyi ve

$$D_{(\omega, \mu)}(\mathcal{Z}, \beta) = \{\omega \in \Lambda: \mu(\omega, \mathcal{Z}) \leq \beta\}$$

kümesine β -yarıçaplı $\mathcal{Z}$ merkezli kapalı yuvar denir.

Tanım 2.1.3 $N \subseteq \Lambda$ olmak üzere (Λ, μ) bir m.u. olsun. Her $\omega \in N$ için $B(\omega, \varepsilon) \subseteq N$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı mevcutsa N kümesine ρ -açık küme veya açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Λ, μ) bir m.u. olmak üzere bu uzayda $\Lambda \setminus N$ kümesi açıksa N kümesine kapalı küme denir.

Önerme 2.1.1 (Λ, μ) m.u. olsun. Bu durumda “ (Λ, μ) içindeki her açık yuvar açıktır.” ve “ (Λ, μ) içindeki her kapalı yuvar kapalıdır.” önermeleri doğrudur.

Tanım 2.1.5 $\omega \in \Lambda$, (Λ, μ) bir m.u. ve $M, N \subseteq \Lambda$ olsun. Bu durumda

$$D(M, N) = \inf \{\mu(m, n): m \in M, n \in N\}$$

değerine M ve N kümeleri arasındaki uzaklık,

$$D(\omega, M) = \inf \{\mu(\omega, m): m \in M\}$$

değerine Λ noktasının M kümesine uzaklığı,

$$\mu(M) = \sup \{\mu(m, n) : m, n \in M\}$$

değerine M kümesinin çapı, eğer $\mu(M) = \infty$ ise M kümesine sınırsız küme, eğer $\mu(M) < \infty$ ise M kümesine sınırlı küme denir.

Tanım 2.1.6 Λ bir küme olsun. Her $f : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ fonksiyonuna Λ de bir dizi veya terimleri Λ in elemanlarından olusan bir dizi denir. $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = \omega_n$ ise bu dizi genellikle $\{\omega_n\}$ veya $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ şeklinde gösterilir. $n \in \mathbb{N}$ için ω_n değerine dizinin n . terimi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega_n = \omega$ ise $\{\omega_n\}$ dizisine ω değerli sabit dizi denir ve genellikle $\{\omega\}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 Bir $\{\omega_n\}$ dizisinin bazı elemanları atılarak, fakat geri kalanların sırası korunarak elde edilen $\{\omega_{n_i}\} = \{\omega_i\}$ dizisine $\{\omega_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir. Yani $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ şeklinde doğal sayılar var ve $i = 1, 2, 3, \dots$ için $m = \omega_i$ oluyorsa $\{\omega_{n_i}\}$ dizisine $\{\omega_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.1.8 $\{\omega_n\}$ elemanları Λ den alınarak oluşturulan bir dizi ve (Λ, μ) bir m.u. olsun.

- i. Her $\varepsilon > 0$ için $\omega_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\omega \geq \omega_0$ özelliğindeki her $\omega \in \mathbb{N}$ için $\mu(\omega_n, \omega) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{\omega_n\}$ dizisine $\omega \in \Lambda$ noktasına yakınsıyor denir. Bu durumda ω noktasına $\{\omega_n\}$ dizisinin limiti denir ve bu durum $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega$ veya $\omega_n \rightarrow \omega$ şeklinde gösterilir.
- ii. Her $\varepsilon > 0$ ve her $\omega_0 \in \mathbb{N}$ için $\rho(\omega_n, \omega) < \varepsilon$ ve $\omega \geq \omega_0$ olacak şekilde bir $\omega \in \mathbb{N}$ varsa $\omega \in \Lambda$ noktasına $\{\omega_n\}$ dizisinin bir yığılma noktası denir.
- iii. Her $\varepsilon > 0$ için bir $\omega_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n, m \geq \omega_0$ olduğunda $\rho(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{\omega_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Önerme 2.1.2 (Λ, μ) bir m.u. olmak üzere $\{\omega_n\}$ dizisi bu uzayda yakınsak ise her $\{\omega_{n_k}\}$ alt dizisi de bu uzayda yakınsaktır ve aynı noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.3 Herhangi bir (Λ, μ) metrik uzayında yakınsak bir dizi tek bir noktaya yakınsar.

Önerme 2.1.4 $A \subseteq \Lambda$ ve (Λ, μ) bir m.u. olsun. $\{\omega_n\} \subseteq A$ ve $\omega_n \rightarrow \omega$ olduğunda $\omega \in A$ olması için gerek ve yeter koşul A nın kapalı olmasıdır.

Tanım 2.1.9 $\{\omega_n\}$, Λ de bir dizi ve (Λ, μ) m.u. olsun. Eğer $m, n \geq n_0$ özelliğindeki her m, n doğal sayısı ve $\varepsilon > 0$ için $\mu(\omega_n, \omega_m) < \varepsilon$ o.ş. bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ise $\{\omega_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi, (Λ, μ) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktaya yakınsak ise (Λ, μ) ikilisine tam m.u. denir.

Tanım 2.1.10 (Λ, μ) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $\omega \in \Lambda$ ve $T: \Lambda \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere T fonksiyonunun ω noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul Λ içinde ω e yakınsayan her $\{\omega_n\}$ dizisi için, Y içindeki $\{T \omega_n\}$ dizisinin $T \omega$ e yakınsak olmasıdır.

Önerme 2.1.5

1. Metrik uzayda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.
2. $\{\omega_n\}$, Λ de bir dizi, (Λ, d) bir m.u. ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\omega_n, \omega_{n+1}) < \infty$ iken $\{\omega_n\}$ bir Cauchy dizisidir.
3. (Λ, μ) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi sınırlıdır.

Tanım 2.1.11 (Λ, μ) m.u. olmak üzere bu uzaydaki açık kümelerin bir ailesi $\{G_i: i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq \Lambda$ için

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i: i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. $G_i: i \in I$ kolaksiyonu A kümesinin bir (açık) örtüsü ve $J \subset I$ olmak üzere $\{G_i: i \in J\}$ koleksiyonu A nın bir örtüsü ise $\{G_i: i \in J\}$ örtüsüne $\{G_i: i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda J sonlu ise $\{G_i: i \in J\}$ örtüsüne $\{G_i: i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.12 $A \subseteq \Lambda$ ve (Λ, μ) bir m.u. olsun. Eğer A nın açık örtülerinin sonlu bir alt örtüsü varsa A kümesine kompaktır, eğer Λ kompakt bir küme ise (Λ, μ) uzayına kompakt m.u. denir.

Teorem 2.1.1 (Λ, μ) metrik uzayı kompaktır gerek ve yeter şart bu uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Teorem 2.1.2 (Λ, μ) m.u. ve $\omega \in \Lambda$ olsun. A, Λ 'in boş olmayan kompakt bir alt kümesi olmak üzere $\mu(\omega, a) = \mu(\omega, A)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır.

Tanım 2.1.13 (Λ, μ) m.u. ve $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\omega_0 \in \Lambda$ olsun. Eğer $f(\omega_0) \leq \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \inf f(\omega)$ ise f dönüşümüne ω_0 noktasında alt yarı sürekli bir fonksiyon, eğer $f(\omega_0) \geq \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \sup f(\omega)$ ise f dönüşümüne ω_0 noktasında üst yarı sürekli denir.

2.2 Büzölme Dönüşümü ve Genelleştirmeleri

Metrik uzaylarda tanımlanan büzölme dönüşümleri temelde kümeden alınan herhangi iki noktanın dönüşüm altındaki görüntüleri arasındaki mesafenin; bu iki nokta arasındaki mesafeden daha küçük olduğunu ifade etmektir. Temel olarak kullanacağımız tek değerli büzölme dönüşümlerinden birkaçının metrik uzaydaki ifade edilmiş halini aşağıda verebiliriz.

Tanım 2.2.1 Λ boştan farklı bir küme ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü olsun. Eğer $T\omega_0 = \omega_0$ olacak şekilde $\omega_0 \in \Lambda$ noktası bulunabiliyorsa bu noktaya T dönüşümünün bir sabit noktası denir.

Örnek 2.2.1 $\Lambda = [0, \infty)$ ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda, K: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümleri

$$T\omega = \frac{\omega+2}{3} \text{ ve } K\omega = \omega + 4$$

olsun. Bu durumda $T1 = 1$ ve $1 \in \Lambda$ olduğundan $\omega = 1$ noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Fakat K dönüşümünün Λ 'de sabit bir noktası yoktur.

Tanım 2.2.2 (Λ, μ) m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için $\mu(T\omega, T\gamma) \leq L\mu(\omega, \gamma)$ olacak şekilde $L \geq 0$ sayısı varsa T dönüşümüne Lipschitz dönüşümü, bu eşitsizliği sağlayan en küçük L sayısına Lipschitz sabiti denir. Eğer bir T dönüşümü için $L < 1$ ise T dönüşümüne bir büzölme dönüşümü, $L = 1$ ise T dönüşümüne genişlemeyen bir dönüşüm denir.

Ayrıca her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için $\omega \neq \gamma$ olacak biçimde $\mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma)$ ise T dönüşümüne büzülebilir dönüşüm denir.

Örnek 2.2.2 $\Lambda = [0, \infty)$ ve $(\mathbb{R}, \mu)$ alışılmış m.u. olsun. $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ ve $T\omega = \frac{\omega}{4}$ dönüşümüne göre T bir büzölme dönüşümdür.

(i) (Banach 1922) (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \varphi \mu(\omega, \gamma)$$

olacak şekilde $\varphi \in [0,1)$ var ise T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $\omega_0 \in \Lambda$ için $\{T^n \omega_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

İspat: $\omega_0 \in \Lambda$ keyfi bir nokta olsun.

$$\omega_1 = T\omega_0, \omega_2 = T\omega_1 = T^2\omega_0, \dots, \omega_n = T\omega_{n-1} = T^n\omega_0, \dots$$

biçiminde tanımlı $\{\omega_n\}$ dizisini ele alalım. Buradan her n doğal sayısı için

$$\mu(\omega_n, \omega_{n+1}) = \mu(T\omega_{n-1}, T\omega_n)$$

$$\leq \alpha \mu(\omega_{n-1}, \omega_n)$$

$\vdots$

$$\leq \alpha^n \mu(\omega_0, \omega_1)$$

olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\mu(\omega_n, \omega_m) \leq \mu(\omega_n, \omega_{n+1}) + \mu(\omega_{n+1}, \omega_{n+2}) + \dots + \mu(\omega_{m-1}, \omega_m)$$

$$\leq \alpha^n \mu(\omega_0, \omega_1) + \alpha^{n+1} \mu(\omega_0, \omega_1) + \dots + \alpha^{m-1} \mu(\omega_0, \omega_1)$$

$$\mu(\omega_n, \omega_m) = [\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}] \mu(\omega_0, \omega_1) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \mu(\omega_0, \omega_1)$$

bulunur. Bu durumda $\{\omega_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olup, Λ tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = z$ olacak şekilde bir $z \in \Lambda$ noktası vardır. Dahası, T sürekli olduğundan

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T\omega_n = T \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = Tz$$

olur. Bu durumda z , T nin bir sabit noktasıdır. $w \in \Lambda$ noktası T nin bir başka sabit noktası olsun. Bu durumda

$$0 < \mu(z, w) = \mu(Tz, Tw) \leq \alpha \mu(z, w) < \mu(z, w)$$

elde edilir bu bir çelişki olup T nin sabit noktası tekdir.

(ii) (Edelstein 1962) (Λ, μ) bir kompakt m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ büzülebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü Λ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

(iii) (Kannan 1968) (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \varphi [\mu(\omega, T\omega) + \mu(\gamma, T\gamma)]$$

olacak şekilde $\varphi \in [0, \frac{1}{2})$ var ise T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır. Ayrıca her $\omega_0 \in \Lambda$ için $\{T^n \omega_0\}$ dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsar.

(iv) (Chatterjea 1972) (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \varphi [\mu(\omega, T\gamma) + \mu(\gamma, T\omega)]$$

olacak şekilde $\varphi \in [0, \frac{1}{2})$ var ise T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır.

(v) (Zamfirescu 1972). (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$k_1) \mu(T\omega, T\gamma) \leq \varphi \mu(\omega, \gamma)$$

$$k_2) \mu(T\omega, T\gamma) \leq \delta [\mu(\omega, T\omega) + \mu(\gamma, T\gamma)]$$

$$k_3) \mu(T\omega, T\gamma) \leq \sigma [\mu(\omega, T\gamma) + \mu(\gamma, T\omega)]$$

koşullarından biri sağlanacak şekilde $0 \leq \varphi < 1$, $0 \leq \delta$, $\sigma < \frac{1}{2}$ sayıları var ise T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır.

(vi) (Bianchini 1972). (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq p \max\{\mu(\omega, T\omega) + \mu(\gamma, T\gamma)\}$$

olacak şekilde $p \in [0,1)$ var ise T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır.

(vii) (Reich 1971; Rus 1971). (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ ve $\varphi + 2\tau < 1$ olacak şekildeki $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \varphi \mu(\omega, \gamma) + \tau [\mu(\omega, T\omega) + \mu(\gamma, T\gamma)]$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümünün Λ de bir sabit noktası vardır.

(viii) (Hardy-Rogers 1973) (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ ve $k, r, s, t, u < 1$ olacak şekildeki $k, r, s, t, u \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq k. \mu(\omega, T\omega) + r. \mu(\gamma, T\gamma) + s. \mu(\omega, T\gamma) + t. \mu(\gamma, T\omega) + u. \mu(\omega, \gamma)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümünün Λ de bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 3.2.1 (Λ, μ) bir m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \vartheta. \max \{ \mu(\omega, \gamma), \mu(\omega, T\omega), \mu(\gamma, T\gamma), \mu(\omega, T\gamma), \mu(\gamma, T\omega) \}$$

olacak şekilde $0 \leq \vartheta < 1$ varsa, T ' ye quasi büzülme dönüşümü denir. (Ciric 1974).

(ix) (Ciric 1974) (Λ, μ) bir tam m.u. ve T dönüşümü bu uzayda tanımlı bir quasi büzülme olsun. Bu durumda T nin tek bir sabit noktası vardır.

(x) (Berinde 2004) (Λ, μ) bir tam m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) \leq \sigma. \mu(\omega, \gamma) + \tau. \mu(\gamma, T\omega)$$

olacak şekilde $\sigma \in (0,1)$ ve $\tau \geq 0$ sabitleri var ise T dönüşümünün Λ de bir sabit noktası vardır.

Berinde tip sabit nokta teoremlerinde sabit noktanın tek olması gerekmez. Örneğin $\Lambda = [0,1]$ kümesi üzerinde μ alışılmış metriğine göre $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$, $T\omega = \omega$ birim dönüşümü $L \geq 1 - \delta$ ile büzülme şartını sağlamasına rağmen Λ in her noktası bir sabit noktadır.

(xi) (Suzuki 2009) (Λ, μ) kompakt m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\frac{1}{2} \mu(\omega, T\omega) < \mu(\omega, \gamma) \Rightarrow \mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma) \quad (2.2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $\beta = \inf \{\mu(\omega, T\omega) : \omega \in \Lambda\}$ biçiminde tanımlanan β kümesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, T\omega_n) = \beta$ olacak şekilde $\{\omega_n\}$ dizisi seçelim. Λ kompakt olduğundan genelliği bozmaksızın $\{\omega_n\}$ ve $\{T\omega_n\}$ dizilerinin yakınsak olduğu sırasıyla $v, \vartheta \in \Lambda$ elemanları vardır. $\beta = 0$ olduğunu gösterelim. O halde aksini varsayacak olursak $\beta > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, \vartheta) = \mu(v, \vartheta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, T\omega_n) = \beta$$

elde edilir. $n \geq v$ olacak şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{2}{3}\beta < \mu(\omega_n, \vartheta) \text{ ve } \mu(\omega_n, T\omega_n) < \frac{4}{3}\beta$$

olacak şekilde $v \in \mathbb{N}$ seçebiliriz. Bu durumda $n \geq v$ için,

$$\frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) < \mu(\omega_n, \vartheta)$$

elde edilir. (2.2.1) eşitsizliğinden, $n \geq v$ için,

$$\mu(T\omega_n, T\vartheta) < \mu(\omega_n, \vartheta)$$

olacağından bu durum,

$$\mu(\vartheta, T\vartheta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T\omega_n, T\vartheta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, \vartheta) = \beta$$

olur. β kümesinin tanımından $\mu(\vartheta, T\vartheta) = \beta$ elde edilir. Ayrıca, $\frac{1}{2}\mu(\vartheta, T\vartheta) < \mu(\vartheta, T\vartheta)$ olduğundan

$$\mu(T\vartheta, T^2\vartheta) < \mu(\vartheta, T\vartheta) = \beta$$

olur ancak bu bir çelişkidir. O zaman $\beta = 0$ olmalıdır. Şimdi ise T dönüşümün sabit noktası olduğunu gösterelim. Bu durum için aksini varsayarak T dönüşümünün sabit noktası olmadığını kabul edelim. O zaman, $0 < \frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) < \mu(\omega_n, T\omega_n)$ olacağından her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(T\omega_n, T^2\omega_n) < \mu(\omega_n, T\omega_n)$ olması gerektiği göz önüne alınacak olursa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v, T\omega_n) = \mu(v, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, T\omega_n) = \beta = 0$$

olup bu durum $\{T\omega_n\}$ dizisinin v elemanına yakınsak olduğu anlamına gelir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(v, T^2\omega_n) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} ((\mu(v, T\omega_n) + \mu(T\omega_n, T^2\omega_n))) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} ((\mu(v, T\omega_n) + \mu(\omega_n, T\omega_n)) = 0 \end{aligned}$$

olup böylece $\{T^2\omega_n\}$ dizisi v elemanına yakınsaktır. Eğer,

$$\frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) \geq \mu(\omega_n, v) \text{ ve } \frac{1}{2}\mu(T\omega_n, T^2\omega_n) \geq \mu(T\omega_n, v)$$

ise o zaman üçgen eşitsizliği ile beraber,

$$\begin{aligned} \mu(\omega_n, T\omega_n) &\leq \mu(\omega_n, v) + \mu(T\omega_n, v) \\ &\leq \frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) + \frac{1}{2}\mu(T\omega_n, T^2\omega_n) \\ &< \frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) + \frac{1}{2}\mu(\omega_n, T\omega_n) \\ &= \mu(\omega_n, T\omega_n) \end{aligned}$$

olur ancak bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\mu(\omega_n, T\omega_n) < \mu(\omega_n, v)$ veya $\mu(T\omega_n, T^2\omega_n) < \mu(T\omega_n, v)$ eşitsizliklerinin biri sağlanır. Ayrıca (2.2.1) eşitsizliğinden

$$\mu(T\omega_n, Tv) < \mu(\omega_n, v) \text{ veya } \mu(T^2\omega_n, Tv) < \mu(T\omega_n, v)$$

eşitsizliklerinin biri sağlanır. Dolayısıyla aşağıdakilerden biri geçerlidir.

. Her $n \in I$ için $\mu(T\omega_n, Tv) < \mu(\omega_n, v)$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz bir I alt kümesi vardır.

. Her $n \in J$ için $\mu(T^2\omega_n, Tv) < \mu(T\omega_n, v)$ olacak şekilde $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz bir J alt kümesi vardır.

İlk durum sağlanırsa,

$$\mu(v, Tv) = \lim_{n \in I, n \rightarrow \infty} \mu(T\omega_n, Tv) \leq \lim_{n \in I, n \rightarrow \infty} \mu(\omega_n, v) = 0$$

olup dolayısıyla $Tv = v$. Eğer ikinci durum sağlanırsa,

$$\mu(v, Tv) = \lim_{n \in J, n \rightarrow \infty} \mu(T^2\omega_n, Tv) \leq \lim_{n \in J, n \rightarrow \infty} \mu(T\omega_n, v) = 0$$

olur ve dolayısıyla her iki durum da T dönüşümünün sabit noktası v elemanıdır. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $Tz = z$ olacak şekilde $z \in \Lambda$ olmalıdır. Şimdi $y \neq z$ iken $F\omega$ $y \in \Lambda$ ve olsun. O zaman, $\frac{1}{2}\mu(z, Tz) = 0 < \mu(z, y)$ için,

$$\mu(z, Ty) = \mu(Tz, Ty) < \mu(z, y)$$

elde edilir. Bu durum iki farklı sabit nokta olmadığını gösterir. Dolayısıyla T dönüşümünün sabit noktası bir tek $z \in \Lambda$ olmalıdır.

3 METRİK UZAYLARDA P-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMLERİ VE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu bölümde Altun *et al.* 2018 ve Altun 2023 tarafından elde edilen sonuçları detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Bu çalışmalarda metrik uzaylarda P -büzülme dönüşümü olarak verilen yeni bir kavram tanıtılmıştır. Her alışılmış büzülme dönüşümünün aynı zamanda P -büzülme dönüşümü olduğu, ancak genelde bu durumun tersinin doğru olmayabileceği gösterilmiştir. Bunu göstermek için bir örnek verilmiştir (Altun *et al.* 2018, Altun 2023).

Tanım 3.1 (A, μ) bir m.u. ve $T: A \rightarrow A$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\omega \neq \gamma$ olacak şekildeki her $\omega, \gamma \in A$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma) + |\mu(\omega, T\omega) - \mu(\gamma, T\gamma)| \quad (3.1)$$

şartı sağlanıyorsa T ye P -büzülme dönüşümü denir.

İlk olarak büzülme dönüşüm konseptlerini karşılaştırmak için vereceğimiz kümeleri adlandıralım. Kendineden kendine dönüşümlerin sınıfını $C(A)$, kendineden kendine genişlemeyen dönüşümlerin sınıfını $N(A)$, Suzuki tip dönüşümlerin sınıfını $S(A)$ ve P -dönüşümlerin sınıfını $P(A)$ ile göstereceğiz. Bu tanımlardan açıktır ki $C(A) \subseteq S(A), C(A) \subseteq P(A)$ ve $C(A) \subseteq N(A)$ dir. Aşağıdaki örnek $C(A)$ sınıfının $P(A)$ in bir uygun alt sınıfı olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.1. $A = \{(0,0), (3,4), (2,1), (0,1), (3,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ olmak üzere her

$$\omega = (\omega_1, \omega_2), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in A$$

için

$$\mu(\omega, \gamma) = \mu((\omega_1, \omega_2), (\gamma_1, \gamma_2)) = |\omega_1 - \gamma_1| + |\omega_2 - \gamma_2|$$

olsun. $T : \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü

$$T = \begin{pmatrix} (0,0) & (3,4) & (2,1) & (0,1) & (3,0) \\ (0,0) & (3,0) & (0,1) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix}$$

eklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\mu(T(3,4), T(2,1)) = 4 = \mu((3,4), (2,1))$$

olup buradan T bir büzülme dönüşümü değildir. Ayrıca $(\omega, \gamma) = ((3,4), (2,1))$ ve $(\omega, \gamma) = ((2,1), (3,4))$ olarak alınırsa

$$\mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma)$$

olduğu görülebilir. Ayrıca

$$\mu(T(3,4), T(2,1)) = 4 < 6 = \mu(\omega, \gamma) + |\mu(\omega, T\omega) - \mu(\gamma, T\gamma)|$$

olup T bir P büzülme dönüşümüdür. Buradan $T \in P(\Lambda) \setminus C(\Lambda)$.

Örnek 3.2. $\Lambda = [0,2]$ ve μ , alışılmış metrik olmak üzere $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü

$$T\omega = \begin{cases} 1, & \omega \leq 1 \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $T \in P(\Lambda) \setminus C(\Lambda)$.

Önerme 3.1 $P(\Lambda)$ ve $N(\Lambda)$ sınıfları metrik uzayda farklıdır.

Örnek 3.3 T, Λ metrik uzayında özdeşlik dönüşümü olduğunda T genişlemeyen bir dönüşüm olmasına rağmen bir P büzülme dönüşümüdür. Diğer taraftan $\Lambda = [0,1]$ ve μ , alışılmış metrik olmak üzere ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü

$$T\omega = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \omega = 0 \\ \frac{\omega}{2}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T sürekli olmadığından bir genişleme dönüşümü değildir. Genelliği bozmaksızın $\gamma < \omega$ olsun. $\gamma > 0$ için

$$\mu(T\omega, T\gamma) = \frac{1}{2}\mu(\omega, \gamma)$$

olur. Ayrıca

$$\mu(T0, T\omega) = \left| \frac{1-\omega}{2} \right| < \omega + \left| \frac{1-\omega}{2} \right| = \omega\mu(0, \omega) + |\mu(0, T0) - \mu(\omega, T\omega)|$$

olup, T bir P -büzülme dönüşümüdür.

Önerme 3.2 $P(\Lambda)$ ve $S(\Lambda)$ sınıfları metrik uzaylarda farklıdır.

Gerçekten, Örnek 3.1 (veya Örnek 3.2) deki T dönüşümü bir P -büzülme dönüşümü olmasına rağmen Suzuki büzülme değildir.

$$\Lambda = \{(0,0), (4,0), (0,4), (4,5), (5,4)\} \subset \mathbb{R}^2$$

ve $\omega = (\omega_1, \omega_2), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda$ için

$$\mu(\omega, \gamma) = \mu((\omega_1, \omega_2), (\gamma_1, \gamma_2)) = |\omega_1 - \gamma_1| + |\omega_2 - \gamma_2|$$

olsun. $T: A \rightarrow A$ dönüşümü

$$T = \begin{pmatrix} (0,0) & (4,0) & (0,4) & (4,5) & (5,4) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (4,0) & (0,4) \end{pmatrix}$$

tanımlansın. Bu durumda $\omega = (4,5)$ ve $\gamma = (5,4)$ için

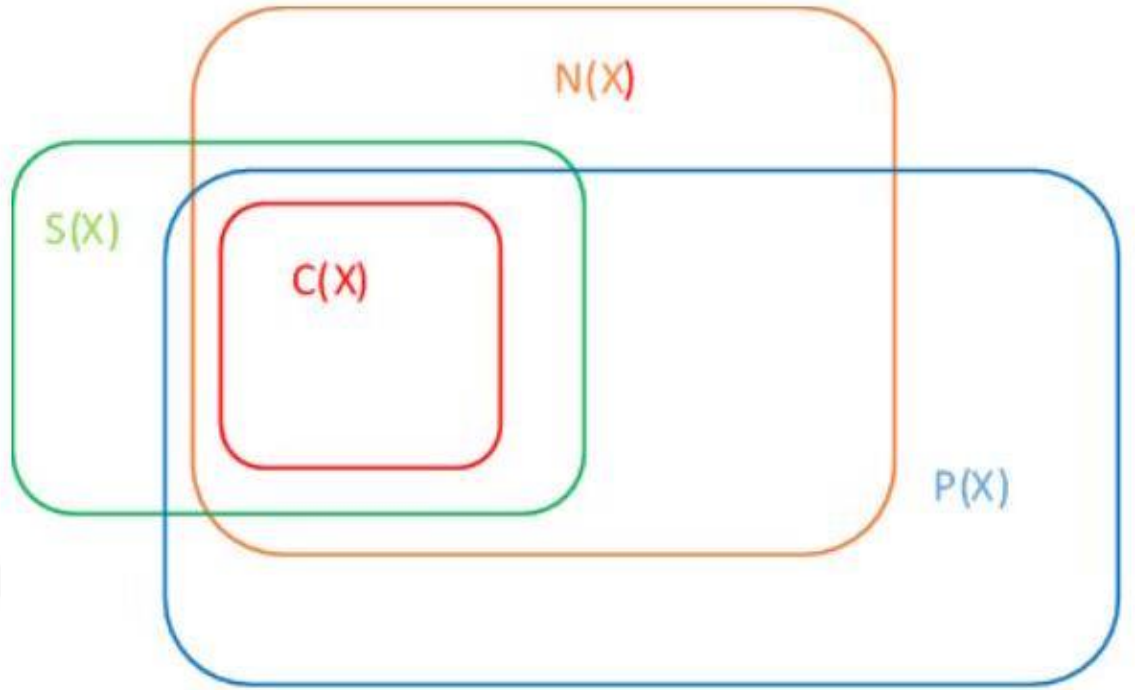
$$\mu(T\omega, T\gamma) = 8 > 2 = \mu(\omega, \gamma) + |\mu(\omega, T\omega) - \mu(\gamma, T\gamma)|$$

olup T, P -büzülme dönüşümü değildir. Öte yandan farklı ω, γ için $(\omega, \gamma) = ((4,5), (5,4))$ veya $(\omega, \gamma) = ((5,4), (4,5))$ alınırsa

$$\mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma)$$

elde edilir. Bu durumda (2.2.1) eşitsizliği sağlanır.

Önerme 3.3 Yukarıdaki örneklerden $S(A)$ ve $N(A)$ sınıflarının farklı oldukları görülebilir. Bundan dolayıda aşağıdaki şekili çizebiliriz.



Şekil 3.1 $C(\Lambda)$, $S(\Lambda)$, $P(\Lambda)$ ve $N(\Lambda)$ arasındaki ilişki (Altun et al. 2018)

Önerme 3.4 (Λ, μ) bir m.u. $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşüm olsun. Eğer T sürekli ise

$$\omega \rightarrow \mu(\omega, T\omega) \text{ sürekli}$$

(ve ayrıca alt yarı sürekli). Ancak eğer $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ alt yarı sürekli ise T sürekli olmayabilir.

Örnek 3.4 $(\mathbb{R}, \mu)$ alışılmış m.u. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$T\omega = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -1, & \omega < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$f(\omega) = \begin{cases} |\omega - 1|, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ |\omega + 1|, & \omega < 0 \end{cases}$$

olup f alt yarı sürekli, ancak T sürekli değildir.

P - büzülme dönüşümü tanımı aracılığıyla aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.1 (Λ, μ) bir m.u., T, Λ de bir P - büzülme dönüşümü ve $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $f(\omega_0) \leq f(T\omega_0)$ olacak şekilde bir $\omega_0 \in \Lambda$ varsa, T, Λ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Kabul edelim ki $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ şeklinde tanımlansın ve $f(\omega_0) \leq f(T\omega_0)$ olacak şekilde bir $\omega_0 \in \Lambda$ var olsun. O halde ω_0, f in sabit bir noktadır. Gerçekten, eğer $\omega_0 \neq T\omega_0$ ise T, P - büzülme dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} f(T\omega_0) &= \mu(T\omega_0, TT\omega_0) \\ &< \mu(\omega_0, T\omega_0) + |\mu(\omega_0, T\omega_0) - \mu(T\omega_0, TT\omega_0)| \\ &= f(\omega_0) + |f(\omega_0) - f(T\omega_0)| \\ &= f(\omega_0) + f(T\omega_0) - f(\omega_0) \\ &= f(T\omega_0) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\omega_0 = T\omega_0$ dır. (3.1) eşitsizliğini kullanarak sabit noktanın tekliğini de gösterebiliriz.

Önerme 3.5 Eğer $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ en küçük olarak seçilirse $f(\omega_0) = \inf f(\Lambda)$ olacak şekilde $\omega_0 \in \Lambda$ vardır. Bu durumda $f(\omega_0) \leq f(T\omega_0)$ olur. Bu durumda Teorem 3.1 den, ω_0, T 'nin bir sabit noktası olarak elde edilir.

Teorem 3.2 (Λ, μ) bir kompakt m.u., T, Λ de bir P - büzölme dönüşümü ve $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ şeklinde tanımlı alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda T, Λ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. Agarwal *et al.* 2019 çalışmasındaki Teorem 2.5.4'e göre, f en küçük elemandır. Teorem 3.1 ve Önerme 3.5ten, T dönüşümün sabit noktasının tek olduğu görülebilir.

Örnek 3.2 de ele alınan T hem P -büzölme dönüşümü ve hemde $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ alt yarı süreklidir. Teorem 3.2'den, T dönüşümün sabit noktasının tek olduğu görülebilir. Ayrıca, $\{T^n \omega\}$ Picard dizisi bu sabit noktaya yakınsar. Bununla birlikte aşağıdaki örnek Teorem 3.2 (ve ayrıca Teorem 3.1) nin isimlendirilmemiş tip sınıfa ait olduğunu göstermektedir.

Örnek 3.5 $\Lambda = [-2, -1] \cup \{0\} \cup [1, 2]$ olup μ , alışılmış metrik ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ dönüşümü

$$T\omega = \begin{cases} \frac{1-\omega}{2}, & \omega \in [-2, -1] \\ -\omega, & \omega \in (1, 2] \\ 0, & \omega \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

şeklde tanımlansın. Bu durumda T , bir P -büzölme dönüşümüdür. Ayrıca $T \in P(\Lambda) \setminus S(\Lambda)$ olduğu da görülebilir. Dahası

$$f(\omega) = \mu(\omega, T\omega) = \begin{cases} \frac{1-3\omega}{2}, & \omega \in [-2, -1], \\ 2\omega, & \omega \in (1, 2], \\ 1, & \omega \in \{-1, 1\}, \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Buradan Teorem 3.2 (ve ayrıca Teorem 3.1) aracılığıyla, T 'nin sabit bir noktaya sahip olduğunu söyleyebiliriz. Ancak başlangıç noktası $\omega_0 = 2$ olarak alınırsa Picard iterasyon dizisi T nin bu sabit noktasına yakınsamaz.

Önerme 3.6 Önerme 3.4 aracılığıyla Edelstein sabit nokta teoreminden daha genel olan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3 (Λ, μ) bir kompakt m.u., T, Λ de bir sürekli P - büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda T, Λ de bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. T sürekli olduğundan, $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ alt yarı sürekli'dir. Bu nedenle, Teorem 3.2'ye göre, T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Edelstein sabit nokta teoremini kullanarak literatürde birçok sabit nokta teoremi elde edilmiştir (Altun and Hancer 2019, Altun 2023). Altun, 2023 yılında yapmış olduğu çalışmasında Suzuki tipi P -büzülme dönüşümü yapmıştır. Ayrıca hem Edelstein hem de Suzuki sabit nokta teoreminden daha da genel olan aşağıdaki sonucu elde etmiştir (Altun 2023).

Tanım 3.2 (Λ, μ) bir m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $\omega, \gamma \in \Lambda$ için

$$\frac{1}{2}\mu(\omega, T\omega) < \mu(\omega, \gamma), \mu(T\omega, T\gamma) < \mu(\omega, \gamma) + |\mu(\omega, T\omega) - \mu(\gamma, T\gamma)| \quad (\text{SPC})$$

şartı sağlanıyorsa T ye bir Suzuki tip P - büzülme dönüşümü ($SP(\Lambda)$) denir. Bu durumda yukarıdaki verilen büzülme kavramlarıyla aşağıdaki diyagramı çizebiliriz:

$$C(\Lambda) \Rightarrow P(\Lambda)$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow$$

$$S(\Lambda) \Rightarrow SP(\Lambda)$$

Teorem 3.4 (Λ, μ) kompakt bir m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ sürekli Suzuki tip P - büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda, T 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat. Λ kompakt ve T sürekli olduğundan

$$\mu(u, Tu) = \inf\{\mu(\omega, T\omega) : \omega \in \Lambda\}.$$

olacak şekilde $u \in \Lambda$ vardır. $\mu(u, Tu) = 0$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksini varsayalım. Bu durumda, $0 < \frac{1}{2}\mu(u, Tu) < \mu(u, Tu)$ olup

$$\mu(Tu, T^2u) < \mu(u, Tu) + |\mu(u, Tu) - \mu(Tu, T^2u)|$$

$$= \mu(u, Tu) + \mu(Tu, T^2u) - \mu(u, Tu)$$

$$= \mu(Tu, T^2u),$$

olduğundan bu bir çelişkidir. Bu nedenle, $\mu(u, Tu) = 0$ ve dolayısıyla u, T 'nin bir sabit noktasıdır. Şimdi, v 'nin T 'nin başka bir sabit noktası olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 = \frac{1}{2}\mu(u, Tu) < \mu(u, v)$ olduğundan

$$\mu(u, v) = \mu(Tu, Tv)$$

$$< \mu(u, v) + |\mu(u, Tu) - \mu(v, Tv)|$$

$$= \mu(u, v),$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, T 'nin bir tek sabit noktası vardır.

Bu teoremdaki süreklilik koşulunun kaldırılamayacağını görmek için tekrar Örnek 1.2'ye bakılabilir. Ancak, T 'nin sürekliliği $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ ile tanımlanan f fonksiyonunun alt yarı sürekliliği varsayarak bir sonuç elde edilebilir. T sürekli ise f 'in de sürekli olduğu (ve dolayısıyla alt yarı sürekli olduğu) iyi bilinmektedir. Önerme 3.4 de de görülebileceği gibi eğer f alt yarı sürekli ise, T sürekli olmayabilir.

Teorem 3.5 (Λ, μ) kompakt bir m.u. ve $T: \Lambda \rightarrow \Lambda$ Suzuki tipi bir P -büzülebilir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(\omega) = \mu(\omega, T\omega)$ ile tanımlanan f fonksiyonu alttan yarı sürekli ise T 'nin Λ 'te tek bir sabit noktası vardır.

İspat. Λ kompakt ve $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ alttan yarı sürekli olduğundan $f(u) = \inf(\Lambda)$ olacak şekilde $u \in \Lambda$ vardır, yani

$$\mu(u, Tu) = \inf\{\mu(\omega, T\omega) : \omega \in \Lambda\}.$$

Dolayısıyla ispat, Teorem 3.4'ün ispatında olduğu gibi tamamlanabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde metrik uzaylarda P -büzölme aracılığıyla bazı sabit nokta sonuçları ele alınmıştır. Tezimizin birinci bölümünde sabit nokta teorisinin sınıflandırılmasından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezimizin anlaşılabilirliğini ve okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla temel tanım ve teoremlerimize yer verilmiştir. Son bölümümüzde ise tek değerli dönüşümler için P -büzölme tanımı verilerek alışılmış büzölme dönüşümünün aynı zamanda bir P -büzölme dönüşümü olduğunu fakat bunun tersinin doğru olmadığını göstermek için bir örnekten yararlanılmıştır. Dahası kompakt metrik uzayda sürekli P -büzölme dönüşümünün sabit noktasının varlığını ve tekliğini gösteriyoruz. Elde edilen bu sonuç ise Edelstein sabit nokta teoremini içermektedir. Ayrıca Suzuki P -büzölme tanımıyla yeni bir sabit nokta sonucu elde edilmiştir. Bu çalışmada elde edilen sabit nokta sonuçları daha da genelleştirilip bu sonuçlarının farklı uzaylarda da geçerli olup olmadığı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., Regan, D. O. and Sahu, D.R. 2009. Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings and Applications, Springer, New York.
- Altun, I. 2023. Suzuki Type P-Contractive Mappings, Proceedings of International Mathematical Sciences, Volume 5 Issue 1, Pages 1-4.
- Altun, I., Durmaz, G. and Olgun, M. 2018. P-contractive mappings on metric spaces, Journal of Nonlinear Functional Analysis, Article ID 43, pp. 1-7.
- Altun, I. and Hancer H.A. 2019. Almost Picard operators, AIP Conference Proceedings 2183, 060003; <https://doi.org/10.1063/1.5136158>
- Bae, J.S. 2003. Fixed point theorems for weakly contractive multivalued maps, J. Math. Anal. Appl. 284, 690-697.
- Bae, J.S., Cho, E.W. and Yeom, S.H. 1994. A generalization of the Caristi-Kirk fixed point theorem and its applications to mapping theorems, J. Korean Math. Soc. 31, 29-48.
- Banach, S. 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math. 3, 133-181.
- Caristi, J. 1976. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215, 241-251.
- Caristi, J. and Kirk W.A. 1975. Geometric fixed point theory and inwardness conditions, Lecture Notes in Math. 490, 74-83.
- Ćirić, Lj.B. 1974. A generalization of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 267-273.
- Edelstein, M. 1962. On fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37, 74-79.
- Gamelin, T.W. and Greene, R.E. 1999. Introduction to topology, Second Edition Dover publications, Inc. Mineola, New York.
- Kannan, R. 1969. Some results on fixed points-II, Amer. Math. Monthly 76, 405-408
- Kirk, W.A. 2003. Fixed points of asymptotic contractions, J. Math. Anal. Appl. 277, 645-650.
- Koçak, M. 2015. Genel Topolojiye Giriş ve Problem Çözümleri. Nisan Kitapevi Yayınları, 534 sayfa, Eskişehir.

- Kreyszig, E. 1991. Introductory functional analysis with applications, Wiley New York.
- Leader, S. 1983 Equivalent Cauchy sequences and contractive fixed points in metric spaces, *Studia Math.* 76, 63-67.
- Matkowski, J. 1975. Integrable solutions of functional equations, *Dissertationes Math.* 127, 1-68.
- Nesin, A. 2020. Analiz IV, 4.Basım, Nesin Yayıncılık, 320 sayfa, İstanbul.
- Rus, I.A., Mureşan A. S. and Mureşan, V. 2005. Weakly Picard operators on a set with two metrics, *Fixed Point Theory* 6, 323-331.
- Rus, I.A., Petruşel, A. and Şerban M.A. 2006. Weakly Picard operators: Equivalent definitions applications and open problems, *Fixed Point Theory* 7, 3-22.
- Soykan, Y. 2016. Fonksiyonel analiz, Genelleştirilmiş ve Yeniden Düzenlenmiş 3. Basım, Nobel Akademik Yayıncılık, 552 sayfa, Ankara.
- Subrahmanyam, P.V. 1974. Remarks on some fixed point theorems related to Banach's contraction principle, *J. Math. Phys. Sci.* 8, 445-457.
- Suzuki, T. 2001. Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 253, 440-458.
- Suzuki, T. 2004. Several, fixed point theorems concerning τ -distance, *Fixed Point Theory Appl.* 2004, 195-209.
- Suzuki, T. 2005. Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others, *J. Math. Anal. Appl.* 302, 502-508.
- Suzuki, T. 2009. A new type of fixed point theorem in metric spaces, *Nonlinear Anal.*, 71, 5313-5317.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Abdullah YETGİN

Eğitim

Yüksek Lisans Çankırı Karatekin Üniversitesi 2020-2023
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Lisans Gaziantep Üniversitesi 2014-2019
Nizip Eğitim Fakültesi
İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü