

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Keziban Nur DEMİR

ATANGANA- BALEANU KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA
FARKLI TÜRDE KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ YÖNETİCİSİ
Dr. Öğr. Üyesi Ebru YÜKSEL

AĞRI-2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ATANGANA- BALEANU KESİRLİ İNTEGRALLERİ YARDIMIYLA FARKLI TÜRDEN KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN EŞİTSİZLİKLER

Keziban Nur DEMİR

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ebru YÜKSEL

L'Hospital'in Leibniz'e yönelttiği kesirli mertebeden türevin var olması ihtimali sorusundan son 50 yıla kadar kesirli analiz uygulamaları çok fazla yapılmamıştır. Lokal olmayan problemlerin modellenmesinde literatürde var olan yöntemlere yeni bir bakış açısı getirmesi ve birçok zor gerçek dünya problemlerini modellemede kullanışlı olması, kesirli analiz konusu üzerine çalışmaları hızlandırmıştır. Böylece matematik, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve mühendislik gibi diğer disiplinlere daha gerçekçi hesaplamalarla yön vermiştir. Son yıllarda kesirli türev ve integraller eşitsizlik teorisi ile birlikte hızla çalışılmaya başlanmış, yapılan çeşitli integral eşitsizliklerin daha genel hallerinin bulunduğu ve bulunacağını gözler önüne sermiştir.

Sunulan bu tezde, 2016 yılında A. Atangana ve D. Baleanu tarafından literatüre kazandırılan lokal ve tekil olmayan kesirli türeve karşılık gelen integraller ele alınmıştır. Konuyla ilgili tanım, teorem ve kavramlar verilip, geniş literatür çalışması yapılarak bazı konveks fonksiyon türleri için Atangana-Baleanu kesirli integraller yardımıyla yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

2023, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard, Atangana-Baleanu kesirli integral, P-fonksiyon, Godunova-Levin fonksiyon, konvekslik

ABSTRACT

Master Thesis

INEQUALITIES FOR DIFFERENT TYPES OF CONVEX FUNCTIONS VIA ATANGANA-BALEANU FRACTIONAL INTEGRALS

Keziban Nur DEMİR

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Ebru YÜKSEL

The possibility of the existence of fractional-order derivatives, as posed by L'Hôpital to Leibniz, did not receive much attention in the application of fractional analysis until the last 50 years. However, it has gained momentum in recent years due to its potential to provide a new perspective on modeling non-local problems and its usefulness in addressing various challenging real-world problems. This has led to more realistic calculations in disciplines such as mathematics, physics, chemistry, biology, economics, and engineering. In recent years, fractional derivatives and integrals have been studied rapidly, particularly in conjunction with inequality theory. Various integral inequalities have been discovered and are expected to continue being explored in more general forms.

This thesis focuses on the integrals corresponding to local and non-singular fractional derivatives, which were introduced into the literature by A. Atangana and D. Baleanu in 2016. The thesis provides definitions, theorems, and concepts related to the topic, along with an extensive literature review. By utilizing Atangana-Baleanu fractional integrals, new Hermite-Hadamard type inequalities are derived for certain types of convex functions.

2023, 59 pages

Keywords: Hermite-Hadamard, Atangana-Baleanu fractional integral, P-function, Godunova-Levin function, convexity

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince kendisine ne zaman danışsam bana değerli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle elinden gelenin fazlasını yapan desteğini esirgemeyen kıymetli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebru YÜKSEL’e

Yüksek Lisans eğitimim boyunca değerli bilgileriyle ışık tutan, tecrübesini ve yardımlarını eksik etmeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN’a

Hayatımın her döneminde yanımda olan her kararında arkamda duran kıymetli annem Melike DEMİR ve babam Mehmet DEMİR’e

Berber başladığımız bu yolda bir an bile beni yalnız bırakmayan nişanlım Emre TÜRK’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2023

Keziban Nur DEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii

BİRİNCİ BÖLÜM

1.GİRİŞ	1
---------------	---

İKİNCİ BÖLÜM

2.KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Genel Kavramlar	4
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar	10
2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler	12

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler	15
3.2. Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler	17

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4.ARAŞTIRMA BULGULARI	30
-----------------------------	----

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	61

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
I	Reel sayılar kümesinin alt aralığı
I°	I 'nin içi
$\Gamma(\mu)$	Gama fonksiyonu
$\Gamma(\mu, \lambda)$	Tamamlanmamış gama fonksiyon
$\beta(\lambda, \mu)$	Beta Fonksiyonu
$\beta_\sigma(\lambda, \mu)$	Tamamlanmamış beta fonksiyon
$\mathbb{E}_\mu$	Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyon
${}_2F_1(x, y; z; t)$	Hipergeometrik fonksiyon
H_ϑ	ϑ . Harmonik sayı
$L[\theta_1, \theta_2]$	$[\theta_1, \theta_2]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{H}^1(\theta_1, \theta_2)$	(θ_1, θ_2) aralığında bir boyutlu Sobolev uzayı
${}^{RL}_{\theta_1}\mathcal{D}_t^\mu g(t)$	Riemann – Liouville kesirli türevi
${}^C_{\theta_1}\mathcal{D}_t^\mu g(t)$	Caputo kesirli türevi
${}^{CF}_{\theta_1}\mathcal{D}_t^\mu g(t)$	Caputo – Fabrizio kesirli türevi
${}^{ABC}_{\theta_1}\mathcal{D}_t^\mu g(t)$	Caputo anlamında Atangana – Baleanu kesirli türevi
${}^{ABR}_{\theta_1}\mathcal{D}_t^\mu g(t)$	Riemann anlamından Atangana – Baleanu kesirli türevi
${}^{AB}_{\theta_1}I_t^\mu g(t)$	Sol Atangana – Baleanu kesirli integrali
${}^{AB}_tI_{\theta_2}^\mu g(t)$	Sağ Atangana – Baleanu kesirli integral

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.1 Konveks fonksiyonun grafiği.....	5
--	---



BİRİNCİ BÖLÜM

1.GİRİŞ

Antik Yunan dönemine kadar uzantısı olan eşitsizlik teorisi matematiksel analiz, cebir, geometri ve optimizasyon gibi matematik dallarıyla yakından ilişkilidir. Teori denklem çözümlerinde, matematiksel modellerin oluşturulmasında, sınırlamaların, koşulların analizinde ve karar verme problemlerinde yaygın olarak kullanılır. Matematiğin çeşitli dallarının yanı sıra finansal planlama, ekonomi, mühendislik, istatistik, fizik gibi birçok alanda gerçek hayatta karşılaşılan durumları ifade ve analiz etme açısından önemli olan bu teori, hızla büyüyen bir disiplin haline gelmiştir. Bu süreçte Chebyshev, Grüss, Hölder, Minkowski, Hadamard, Cauchy-Schwarz, Stolz, Hilbert, Gronwall, Young, Opial, Jensen, Simpson, Ostrowski gibi birçok eşitsizlik literatürde yerini almıştır. Eşitsizlik teorisi açısından eser niteliğindeki benzer içerikli kaynaklar “Inequalities”; 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Pölya, 1961 yılında Beckenbach ve Bellman, 1970 yılında ise Mitrinović tarafından verilmiştir (Hardy *et al.* 1934; Beckenbach and Bellman 1961; Mitrinović 1970). Bu eserler ışığında eşitsizliklerin genelleştirilmeleri, geliştirmeleri ve yeni uygulamaları matematiğin çeşitli dallarındaki araştırmacılar tarafından verilmeye devam etmiştir.

İzlerine Eski Yunan, Mısır ve Babil dönemlerinde (M.Ö. 2000) rastlanan konvekslik kavramının ilk titiz çalışmaları küre ve silindir üzerinde yaptığı incelemelerle Archimedes (M.Ö 287-212) tarafından verilmiş, ayrıca konveks küme tanımının temelleri de onunla atılmıştır. Fakat bunun gibi çoğu varsayımlar Cauchy’e kadar (1789-1857) ispatsız kalmış, Cauchy’nin kapalı konveks bir eğrinin çevre hesaplama teoremleriyle önemi artmıştır. Tek başına çalışılmayı hak eden bir konu olarak tanınması 1905 ve 1906’da yaptığı iki makaleyle Jensen’e atfedilmiştir. Stolz, 1893 yılında (a,b) aralığında sürekli bir f fonksiyonunun

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [f(a) + f(b)]$$

eşitsizliğini sağladığını ispatlamış ve Jensen bu eşitsizliği kullanarak konveks fonksiyonları tanımlamıştır. Daha sonra konveks fonksiyonlar daha kapsamlı ve detaylı şekilde çalışılmış, matematiğin hemen hemen her alanında yerini almıştır. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu ele alan Pečarić'in 1987 yılında yayınladığı "Convex Functions: Inequalities" adlı kitabı ilk kaynak niteliği taşımaktadır (Pečarić 1987). Konveks fonksiyon ve çeşitli sınıflarının eşitsizlikler üzerindeki rolünün büyüklüğünden günümüzde de hala konu üzerinde çalışmalar yapılmaktadır.

1695 yılında L'Hopital'in Leibnitz'e gönderdiği mektupla ortaya atılan kesirli türev kavramı yarım asır öncesine kadar sadece matematiksel işlemler içeren soyut bir kavram olarak karşımıza çıkmaktadır. Fakat son 20 yılda matematik, fizik ve mühendisliğin hemen hemen her alanında kendisine yer bulmuştur. Gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde kullanılmış ve problemleri daha iyi anlamayı, daha hassas sonuçlar elde etmeyi amaçlamıştır. Literatürde tarihsel aşamalarla birlikte konu üzerinde yapılan ilk çalışma Oldham ve Spainer'in 1974 yılında yayınladığı kitap olmuştur (Oldham and Spainer 1974).

Kesirli türev ve integral kavramının muhtemelen en önemli gelişimi 1847 yılında Riemann tarafından olmuştur. Literatürde Riemann-Liouville olarak adlandırılan, verdiği kesirli türev ve integral tanımlarının ardından, Grünwald-Letnikov (1868), Weyl (1917), Marchaud (1927), Hadamard (1927), Erdélyi Kober (1940), Riezs (1952), Chen (1961) farklı türden kesirli türev ve integral tanımları vermişlerdir. Riemann-Liouville kesirli türevinin problemlerin fiziksel yorumlanmasında yetersiz kaldığını belirterek Caputo 1967 yılında yeni bir türev tanımı ortaya koymuştur. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türev tanımlarının içerdiği kuvvet fonksiyonu şeklindeki çekirdek fonksiyonu, tekil yapıda olduğundan matematiksel hesaplamalarda zorluk çıkarmaktadır. Tekilliği gidermek adına Caputo ve Fabrizio 2015 yılında, Caputo kesirli türevinin çekirdek yapısını değiştirerek eksponansiyel fonksiyon kullanmıştır. 2016 yılında ise Atangana-Baleanu, Caputo-Fabrizio kesirli türevindeki eksponansiyel fonksiyon yerine Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanarak daha genel bir kesirli türev tanımı elde etmişlerdir.

Günümüzde problemin türüne, tekillik ve lokal olup olmama durumlarına göre araştırmacılar yeni kesirli türev ve integral tanımları vermeye devam etmektedir.

Son 10 yılda yapılan çalışmalarda eşitsizlik teorisi ile kesirli türev ve integral operatörleri birlikte ele alınmış, klasik integral eşitsizliklerin daha genel hallerinin bulunması sağlanmıştır. Konu üzerine birçok makale ve tez çalışması mevcuttur ve bu çalışmalar günümüz matematikçileri Özdemir, Set, Akdemir, Kavurmacı, Sarıkaya, Abdeljawad, Jarad, Farid, Butt, Chen, Rashid, Noor gibi araştırmacılar tarafından literatüre kazandırılmıştır.

Sunulan bu tezin giriş bölümünde konvekslik, eşitsizlik, kesirli türev ve integral operatörlerinin önemi ve tarihsel akışı hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konvekslik kavramıyla ilgili temel tanım, teorem, kavramlar ve bazı konveks fonksiyon çeşitlerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Atangana-Baleanu kesirli türev ve integrallerinin tanım ve özellikleri verilip, önceki çalışmalarda yer alan ilgili eşitsizlikler sunulmuştur. Dördüncü bölümde bazı konveks fonksiyon türleri için Atangana-Baleanu kesirli integraller içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturacak bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Konveks Küme) : T bir lineer uzay $K \subseteq T$ olsun eğer $\eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$X = \{z \in T : z = \alpha\eta + (1 - \alpha)\theta\} \subseteq K$$

ise K kümesine konveks küme denir (Kreyszig 1978).

X kümesi, geometrik olarak uç noktaları η ve θ olan doğru parçasıdır. Öyleki, konveks küme boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren kümedir.

Tanım 2.1.2. (Konveks Fonksiyon) : $K, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) \leq \alpha g(\eta) + (1 - \alpha)g(\theta)$$

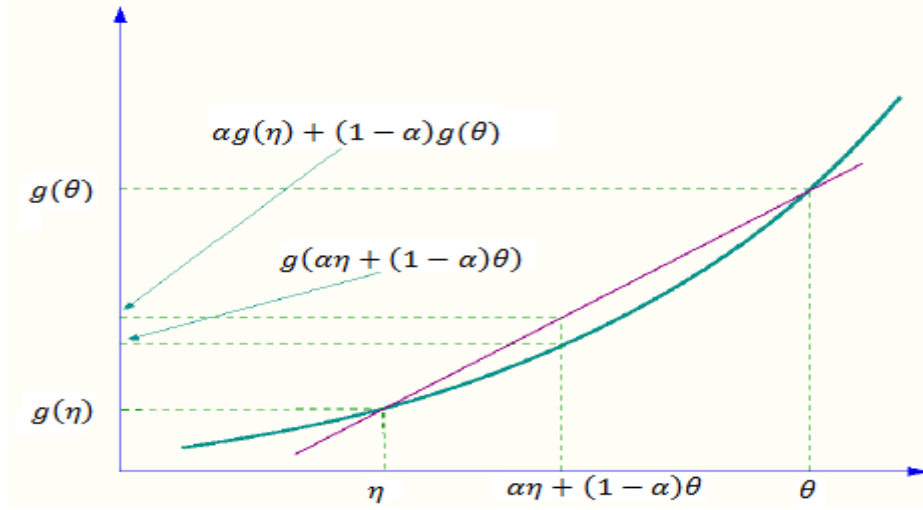
şartını sağlayan g fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Eğer $\eta \neq \theta$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) < \alpha g(\eta) + (1 - \alpha)g(\theta)$$

şartı sağlanıyorsa g fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir (Pecaric *et al.* 1992).

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1.1 Konveks fonksiyonun grafiği

$\eta < x < \theta$ olacak şekilde bir x noktası $x = \alpha\eta + (1 - \alpha)\theta$ olarak yazılırsa,

$\alpha = \frac{\theta - x}{\theta - \eta}$ ve $1 - \alpha = \frac{x - \eta}{\theta - \eta}$ olur. Bu durumda eşitsizlik

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \frac{\theta - x}{\theta - \eta} g(\eta) + \frac{x - \eta}{\theta - \eta} g(\theta) \\ &= \frac{g(\theta) - g(\eta)}{\theta - \eta} (x - \theta) + g(\theta) \end{aligned}$$

haline gelir. $y = \frac{g(\theta) - g(\eta)}{\theta - \eta} (x - \theta) + g(\theta)$ denkleminde $(\eta, g(\eta))$ ve $(\theta, g(\theta))$ noktalarından geçen doğru denklemdir. O halde eşitsizlik g fonksiyonunun $x = \eta$ ve $x = \theta$ noktaları arasındaki grafiğinin $(\eta, g(\eta))$ ve $(\theta, g(\theta))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının altında veya ona değiyor anlamına gelir.

Önerme 2.1.1. Konveks fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler doğrudur.

- i. Konveks iki fonksiyonun toplamı konvekstir ve eğer fonksiyonlardan biri kesin konveks ise toplamı kesin konvekstir.
- ii. Konveks bir fonksiyonun skalerle çarpımı konvekstir.

iii. Bir fonksiyon bir aralıkta konveks ise aralığın kısıtlanmış bir alt aralığında da konvekstir.

iv. $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) fonksiyon, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan (artan) konveks bir fonksiyon ise $f \circ g$ bileşke fonksiyonu konveks (kesin konveks) fonksiyondur (Niculescu and Person 2006).

Tanım 2.1.3. (Sınırlı Fonksiyon): g fonksiyonu $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $\eta \in K$ için $|g(\eta)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa g fonksiyonuna K kümesinde sınırlı fonksiyon denir (Musayev *et al.* 2007; Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.4. (Süreklilik): Boş olmayan $K \subset \mathbb{R}$, $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\eta \in K$ noktası verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x \in K$ için $|x - \eta| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(\eta)| < \varepsilon$ şeklinde ε ve η sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0$ sayısı varsa g fonksiyonu K kümesine göre $\eta \in K$ noktasında süreklidir denir (Musayev *et al.* 2007).

Tanım 2.1.5. (Lipschitz Koşulu): $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $\eta, \theta \in K$ çifti için $|g(\eta) - g(\theta)| \leq M|\eta - \theta|$ olacak şekilde $M > 0$ sabiti varsa g fonksiyonuna Lipschitz koşulunu sağlayan fonksiyon denir. M sayısına g fonksiyonunun bir Lipschitz sabiti denir (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.1: g fonksiyonu $[\eta, \theta]$ aralığında konveks olsun. O halde g fonksiyonu

i) $[\eta, \theta]$ kapalı aralığında Lipschitz koşulunu sağlar,

ii) (η, θ) aralığında süreklidir (Tiel 1984).

Teorem 2.1.2: $I, \mathbb{R}'$ 'de açık bir aralık ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart g' 'nin I aralığında artan olmasıdır (Tiel 1984 ; Musayev *et al.* 2007).

Teorem 2.1.3: $I, \mathbb{R}$ 'de açık bir aralık ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun I aralığında konveks olması için gerek ve yeter şart $g''(x) \geq 0$ olmasıdır (Tiel 1984; Musayev *et al.* 2007).

Tanım 2.1.6. (L_p Uzayı) : $p \geq 1$ için $[\theta_1, \theta_2]$ aralığında tanımlı

$$\|g\|_p = \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(v)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayına Lebesgue uzayı veya p .dereceden integrallenebilir fonksiyonların uzayı denir. $L_p[\theta_1, \theta_2]$ ile gösterilir.

$p = 1$ durumunda $L_1[\theta_1, \theta_2]$ uzayı

$$\|g\|_1 = \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} |g(v)| dv \right] < \infty$$

normunu sağlayan fonksiyonların uzayıdır (Soykan 2016).

Tanım 2.1.7. (Sobolev Uzayı): (θ_1, θ_2) aralığında bir boyutlu Sobolev uzayı

$$\mathcal{H}^1(\theta_1, \theta_2) = (\mu; \mu \text{ mutlak sürekli ve } \mu' \in L^2(\theta_1, \theta_2))$$

sağlayan fonksiyon uzayıdır (Djida *et al.* 2016).

Tanım 2.1.8. (Gama Fonksiyonu): $\mu > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v} dv$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gama fonksiyonu denir (Kannappan 2009).

2.1.9. (Tamamlanmamış Gama Fonksiyon): Tamamlanmamış gama fonksiyonları

$$\delta(\mu, \lambda) = \int_0^{\lambda} v^{\mu-1} e^{-v} dv \quad (Re(\mu) \geq 0; \lambda \geq 0)$$
$$\Gamma(\mu, \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} v^{\mu-1} e^{-v} dv \quad (\lambda \geq 0; \lambda = 0 \text{ için } Re(\mu) > 0)$$

integralleri ile tanımlanır. Ayrıca

$$\delta(\mu, \lambda) + \Gamma(\mu, \lambda) = \Gamma(\mu) \quad Re(\mu) > 0$$

eşitliği sağlanır (Erdelyi *et al.* 1953).

Tanım 2.1.10. (Beta Fonksiyonu): $\lambda, \mu > 0$ olmak üzere

$$\beta(\lambda, \mu) = \int_0^1 v^{\lambda-1} (1-v)^{\mu-1} dv$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir (Rainville 1971).

Beta ve Gama fonksiyonu arasındaki ilişki

$$\beta(\lambda, \mu) = \int_0^1 v^{\lambda-1} (1-v)^{\mu-1} dv = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.11. (Tamamlanmamış Beta Fonksiyon): Tamamlanmamış beta fonksiyonu $0 \leq \sigma < 1$ olmak üzere

$$\beta_{\sigma}(\lambda, \mu) = \int_0^{\sigma} v^{\lambda-1} (1-v)^{\mu-1} dv$$

şeklinde tanımlanır. $\beta_{\sigma}(\lambda, \mu)$ ve $\beta_{1-\sigma}(\mu, \lambda)$ fonksiyonları için

$$\beta_{\sigma}(\lambda, \mu) + \beta_{1-\sigma}(\mu, \lambda) = \beta(\lambda, \mu)$$

eşitliği tamamlanmamış beta fonksiyonu ve beta fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir (Chaudhry *et al.* 1997).

Tanım 2.1.12. (Tek Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu): $\mu > 0$ olmak üzere

$$\mathbb{E}_{\mu}(z) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{z^{\kappa}}{\Gamma(\mu\kappa + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Tanım 2.1.13. (Hipergeometrik Fonksiyon): $|t| < 1$, $x, y \in \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_0^-$ olmak üzere hipergeometrik fonksiyon;

$${}_2F_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)_k (y)_k}{(z)_k} \frac{t^k}{k!}$$

serisi ile tanımlanır. Burada $k \in \mathbb{N}$ için $(x)_k = (x)(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$ olmak üzere Pochhammer sembolüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Euler gösterimi

$${}_2F_1(x, y; z; t) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(y)\Gamma(z-y)} \int_0^1 v^{y-1} (1-v)^{z-y-1} (1-tv)^{-x} dv \quad (Re(z) > Re(x) > 0)$$

şeklinde tanımlanır (Kilbas *et al.* 2006).

Tanım 2.1.14. (Harmonik Sayı): ϑ pozitif tam sayı olmak üzere

$$H_{\vartheta} = \sum_{k=1}^{\vartheta} \frac{1}{k}$$

sonlu toplamına ϑ – inci harmonik sayı denir. Burada $H_0 = 0$ olarak tanımlanır (Graham *et al.* 1994).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1. (AG – Konveks Fonksiyon) : $K, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $g: K \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\forall \eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) \leq [g(\eta)]^\alpha [g(\theta)]^{1-\alpha}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna AG – konveks fonksiyon, denir (Pecaric *et al.* 1992).

Tanım 2.2.2. (J -Konveks Fonksiyon) : $K, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $\forall \eta, \theta \in K$ olmak üzere

$$g\left(\frac{\eta + \theta}{2}\right) \leq \frac{g(\eta) + g(\theta)}{2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna K üzerinde *Jensen* - konveks veya J - konveks fonksiyon denir (Mitrinovic 1970).

Tanım 2.2.3. (Quasi Konveks Fonksiyon) : $K \subset \mathbb{R}$ boş olmayan konveks bir küme $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) \leq \max\{g(\eta), g(\theta)\}$$

ise g 'ye *quasi – konveks* denir. Eğer

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) < \max\{g(\eta), g(\theta)\}$$

ise g 'ye kesin *quasi – konveks* denir (Drogomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. (*m*- Konveks Fonksiyon) : $g: [0, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ olsun. $\forall \eta, \theta \in [0, \sigma]$, $\alpha \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + m(1 - \alpha)\theta) \leq \alpha g(\eta) + m(1 - \alpha)g(\theta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna $m - konveks$ fonksiyon denir.

Burada $m = 1$ seçilirse tanım klasik konveks fonksiyon tanımına dönüşür (Toader 1988).

Tanım 2.2.5. (Godunova-Levin Fonksiyon) : $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall \eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) \leq \frac{g(\eta)}{\alpha} + \frac{g(\theta)}{1 - \alpha}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna *Godunova – Levin* fonksiyonu denir (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.6. (*P* - Fonksiyon) : $g: K \rightarrow \mathbb{R}'$ de negatif olmayan bir fonksiyon ve $\forall \eta, \theta \in K$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + (1 - \alpha)\theta) \leq g(\eta) + g(\theta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna $P -$ fonksiyon denir (Dragomir 1995).

Tanım 2.2.7. (Birinci Anlamda $s -$ Konveks Fonksiyon) : $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in (0, 1]$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için $\forall \eta, \theta \geq 0$ olmak üzere

$$g(\alpha\eta + \beta\theta) \leq \alpha^s g(\eta) + \beta^s g(\theta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna birinci anlamda $s - konveks$ fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.8. (İkinci Anlamda $s - Konveks$ Fonksiyon) : $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $s \in (0, 1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere tüm $\eta, \theta \in \mathbb{R}_+$ için

$$g(\alpha\eta + \beta\theta) \leq \alpha^s g(\eta) + \beta^s g(\theta)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna ikinci anlamda $s - konveks$ fonksiyon denir (Breckner 1978).

2.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde tezde yararlanılan, literatürde yer alan bazı önemli eşitsizliklere yer verilmiştir.

Teorem 2.3.1. (Hermite Hadamard Eşitsizliği) : $K, \mathbb{R}$ de bir aralık ve $\eta, \theta \in K$ ve $\eta < \theta$ olmak üzere $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$g\left(\frac{\eta + \theta}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta - \theta} \int_{\eta}^{\theta} g(v) dv \leq \frac{g(\eta) + g(\theta)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir and Pearce 2000).

Teorem 2.3.2. (Üçgen Eşitsizliği) : Herhangi η, θ reel sayıları için

$$|\eta + \theta| \leq |\eta| + |\theta|,$$

$$||\eta| - |\theta|| \leq |\eta| - |\theta|,$$

$$||\eta| - |\theta|| \leq |\eta| + |\theta|,$$

ve genel olarak

$$|\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n| \leq |\eta_1| + \dots + |\eta_n|$$

eşitsizlikleri sağlanır (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.3.3. (İntegraller İçin Üçgen Eşitsizliği): $g, [\rho, \sigma]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyon olmak üzere;

$$\left| \int_{\rho}^{\sigma} g(v) dv \right| \leq \int_{\rho}^{\sigma} |g(v)| dv \quad (\rho < \sigma)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.3.4. (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği): $\eta, \lambda > 1$ ve $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\lambda} = 1$ ve $f, g, |f|^{\eta}$ ve $|g|^{\lambda}$ $[\rho, \sigma]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\rho}^{\sigma} |f(v)g(v)| dv \leq \left(\int_{\rho}^{\sigma} |f(v)|^{\eta} dv \right)^{\frac{1}{\eta}} \left(\int_{\rho}^{\sigma} |g(v)|^{\lambda} dv \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitronovic 1970).

Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak power mean eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.1. (Power-Mean Eşitsizliği): $\eta \geq 1$ olsun. $f, |f|, g, |g|^{\eta}$ $[\rho, \sigma]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_{\rho}^{\sigma} |f(v)g(v)| dv \leq \left(\int_{\rho}^{\sigma} |f(v)| dv \right)^{1-\frac{1}{\eta}} \left(\int_{\rho}^{\sigma} |f(v)||g(v)|^{\eta} dv \right)^{\frac{1}{\eta}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.3.5. (Young Eşitsizliği): $\theta_1, \theta_2 > 0$ ve $\eta > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\lambda} = 1$ ise bu takdirde

$$\theta_1 \theta_2 \leq \frac{\theta_1^\eta}{\eta} + \frac{\theta_2^\lambda}{\lambda}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović 1970).



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Atangana-Baleanu kesirli türev ve integralleri tanıtılmış ve literatürde bu operatör yardımıyla elde edilen bazı eşitsizliklere yer verilmiştir.

3.1. Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler

Klasik analize göre daha geniş bir matematiksel kavram olan kesirli analiz ilk referansını 1695 yılında L'Hopital ve Leibnitz arasındaki bir mektuptan almıştır. Ortaya atılan kesirli hesap konusu diğer büyük matematikçilerin dikkatini çekmiş, birçoğu doğrudan veya dolaylı olarak gelişmesine katkıda bulunmuştur.

1819'da Lacroix kesirli mertebeden türevden bahseden ilk matematikçi olarak bir makale yayınlamıştır (Ross, 1977).

Lacroix χ^m fonksiyonunun η . mertebeden türevini

$$\frac{d^\eta \chi^m}{d\chi^\eta} = \frac{m!}{(m-\eta)!} \chi^{m-\eta}, \quad m \geq \eta, \quad (m \in \mathbb{Z}^+)$$

şeklinde yazıp daha sonra Gama fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{d^\eta \chi^m}{d\chi^\eta} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\eta+1)} \chi^{m-\eta}$$

eşitliğin sonucunda

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} \chi^{\frac{1}{2}}}{d\chi^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{\chi}}{\sqrt{\pi}}$$

elde etmiştir. Ancak kesirli işlemlerin ilk kullanımı Lacroix tarafından değil, Abel tarafından 1823 yılında olmuştur. Abel, kesirli hesaplamayı *tautochrone* problemi (eğrinin şeklinin belirlendiği bir durumda, düzgün bir yerçekimi altında kayan bir nesnenin iniş süresinin, nesnenin başlangıç noktasından bağımsız olduğu problem) formülasyonunda ortaya çıkan bir integral denklem çözümünde kullanmıştır.

Liouville'nin ilgisini çeken bu çözüm, Riemann-Liouville kesirli türevinin bulunmasına katkı sağlamıştır.

$${}^{RL}\mathcal{D}_t^\mu g(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta - \mu)} \left(\frac{d}{dt} \right)^\eta \int_{\theta_1}^t (t - v)^{\eta - \mu - 1} g(v) dv, \quad (\eta - 1 \leq \mu < \eta, \eta \in \mathbb{N})$$

Kesirli hesap dünyasında popülerleşen bu kesirli türevin ilginç bir noktası ise Lacroix tarafından verilen denklem ile elde edilen sonucun aynı olduğudur. Fakat verilen tanımda sabitin türevinin sıfır olmaması, başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklem problemleri için uygun bir tanım olmamasından ötürü M. Caputo 1967 yılında yeni bir kesirli türev tanımı vermiştir.

$${}^C\mathcal{D}_t^\mu g(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta - \mu)} \int_{\theta_1}^t (t - v)^{\eta - \mu - 1} \left(\frac{d}{dt} \right)^\eta g(v) dv, \quad (\eta - 1 \leq \mu < \eta, \eta \in \mathbb{N})$$

Caputo'nun verdiği tanımda $(t - v)^{\mu + 1 - \eta}$ çekirdeği $t = v$ olduğunda tekil olduğundan, tekilliği ortadan kaldırmak için 2015 yılında Caputo ve Fabrizio exponansiyel fonksiyon kullanmıştır.

$${}^{CF}\mathcal{D}_t^\mu g(t) = \frac{\mathcal{M}(\mu)}{(1 - \mu)} \int_{\theta_1}^t g'(v) \exp \left[-\frac{\mu(t - v)}{1 - \mu} \right] dv, \quad (0 \leq \mu < 1)$$

2016'da Atangana ve Baleanu, Caputo ve Fabrizio'nun verdiği tanımda çekirdeğindeki exponansiyel fonksiyon yerine Mittag-Leffler fonksiyonunu kullanarak daha genel bir tanım vermişlerdir.

Tanım 3.1.1. (Atangana–Baleanu Kesirli Türevler): $g \in \mathcal{H}^1(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_2 > \theta_1$, $\mu \in [0, 1]$ olmak üzere sırasıyla Caputo ve Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevleri

$${}^{ABC}_{\theta_1} \mathcal{D}_t^\mu g(t) = \frac{B(\mu)}{(1-\mu)} \int_{\theta_1}^t g'(v) \mathbb{E}_\mu \left[-\frac{\mu(t-v)}{1-\mu} \right] dv$$

$${}^{ABR}_{\theta_1} \mathcal{D}_t^\mu g(t) = \frac{B(\mu)}{(1-\mu)} \frac{d}{dt} \int_{\theta_1}^t g(v) \mathbb{E}_\mu \left[-\frac{\mu(t-v)}{1-\mu} \right] dv$$

olarak tanımlanır. Burada $B(\mu) > 0, B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016).

Tanım 3.1.2. (Atangana–Baleanu Kesirli İntegraller): $g \in \mathcal{H}^1(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_2 > \theta_1$, $\mu \in [0,1]$ olmak üzere sırasıyla sol ve sağ Atangana-Baleanu kesirli integralleri

$${}^{AB}_{\theta_1} I_t^\mu g(t) = \frac{1-\mu}{B(\mu)} g(t) + \frac{\mu}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \int_{\theta_1}^t g(v)(t-v)^{\mu-1} dv$$

$${}^{AB}_t I_{\theta_2}^\mu g(t) = \frac{1-\mu}{B(\mu)} g(t) + \frac{\mu}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \int_t^{\theta_2} g(v)(v-t)^{\mu-1} dv$$

şeklinde tanımlanır. Burada $B(\mu)$ normalizasyon fonksiyonu olup $B(\mu) > 0, B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016; Abdeljawad and Baleanu 2017).

3.2. Atangana–Baleanu Kesirli İntegral Operatörler için Eşitsizlikler

2021 yılında Kavurmacı ve arkadaşları, Atangana–Baleanu kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir. Aşağıda verilen teorem ikinci anlamda s – konveks fonksiyonlar için temel Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Atangana-Baleanu kesirli integralleri kullanılarak elde edilen ilk eşitsizlik niteliği taşımaktadır.

Teorem 3.2.1: $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ikinci anlamda s – konveks fonksiyon, $s \in (0,1]$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer $g \in L[\theta_1, \theta_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& 2^s \frac{g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} + \frac{1-\mu}{(\theta_2-\theta_1)^\mu} \left[\frac{g(\theta_1) + g(\theta_2)}{B(\mu)} \right] \\
& \leq \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^\mu} \left[{}^{AB}I_{\theta_1}^\mu \{g(\theta_2)\} + {}^{AB}I_{\theta_2}^\mu \{g(\theta_1)\} \right] \\
& \left[\frac{g(\theta_1) + g(\theta_2)}{B(\mu)} \right] \left[\frac{\mu}{\Gamma(\mu)(\mu+s)} + \frac{1-\mu}{(\theta_2-\theta_1)^\mu} + \frac{\mu\beta(\mu, s+1)}{\Gamma(\mu)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Kavurmacı ve arkadaşları teoremin ardından Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafı için Atangana-Baleanu kesirli integralleri içeren aşağıdaki lemmayı vermişlerdir.

Lemma 3.2.1: $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ olsun. Eğer $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\left({}^{AB}I_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^\mu \right) \{g(\theta_1)\} + \left({}^{AB}I_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^\mu \right) \{g(\theta_2)\} \right] \\
& - \frac{1-\mu}{(\theta_2-\theta_1)B(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \\
& - \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu-1}}{2^{\mu-1}B(\mu)\Gamma(\mu)} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \\
& = \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \int_0^1 t^\mu(v) [g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2) \\
& + g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)] dv
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$t^\mu(v) = \begin{cases} v^{\mu+1}, & v \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ (1-v)^{\mu+1}, & v \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

ve $\mu \in (0,1]$ olmak üzere $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Lemma 3.2.1'den hareketle gelecek teoremlerde kullanılmak üzere aşağıda bir kısaltma verilecektir

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \left[\left({}^{AB}I_{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}^\mu \right) \{g(\theta_1)\} + \left({}^{AB}I_{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}^\mu \right) \{g(\theta_2)\} \right] \\ & - \frac{1 - \mu}{(\theta_2 - \theta_1)B(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \\ & - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu-1}}{2^{\mu-1}B(\mu)\Gamma(\mu)} g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Yukarıda verilen Lemma 3.2.1. kullanılarak ikinci anlamda s – konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin yeni üst sınırlarını vermişlerdir.

Teorem 3.2.2 $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ ikinci anlamda s – konveks fonksiyon ve $s \in (0,1]$ olmak üzere

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+s+2}}{\mu + s + 2} + \beta_{\frac{1}{2}}(\mu + 2, s + 1) \right) (|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|),$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Teorem 3.2.3: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $s \in (0, 1]$ için $|g''|^q$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu p + p}}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{(s + 1)^{\frac{1}{q}}} (|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|).$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Teorem 3.2.4: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $s \in (0, 1]$ için $|g''|^q$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{2^{\mu+1}(\mu + 2)} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu+s+2}}{\mu + s + 2} + \beta_{\frac{1}{2}}(\mu + 2, S + 1) \right)^{\frac{1}{q}} (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q)^{\frac{1}{q}},$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Teorem 3.2.5: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $s \in (0, 1]$ için $|g''|^q$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $q \geq p > 1$ olmak üzere,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)\left(\frac{q-p}{q-1}\right)} (q - 1)}{(\mu + 1)(q - p) + q - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)p+s+1}}{(\mu+1)p+s+1} + \beta_{\frac{1}{2}}((\mu+1)p+1, s+1) \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Teorem 3.2.6: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $s \in (0,1]$ için $|g''|^q$ ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ve $q > 1$ olmak üzere,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(\mu+1)p}}{((\mu+1)p+1)p} + \frac{|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q}{(s+1)q} \right),$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

Teorem 3.2.7: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $s \in (0,1]$ için $|g''|^q$ ikinci anlamda s –konkav fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu p + p}}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{s-1}{q}} \left| g'' \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right|.$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Kavurmacı *et al.* 2021).

2021 yılında Set ve arkadaşları, aşağıdaki lemmayı verip ardından bu lemma yardımıyla Atangana–Baleanu kesirli integralleri içeren Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.2: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\theta_1 < \theta_2$ ise,

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}_{\theta_1}I_k^\mu\{g(k)\} + {}^{AB}_{\theta_2}I_k^\mu\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^\mu g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^\mu g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \\
&= \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} g'(\theta_1) + \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \int_0^1 (1 - v)^{\mu+1} g''(vk + (1 - v)\theta_1) dv \\
&\quad - \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+1}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} g'(\theta_2) + \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \int_0^1 v^{\mu+1} g''(v\theta_2 + (1 - v)k) dv
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.8: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ için $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}_{\theta_1}I_k^\mu\{g(k)\} + {}^{AB}_{\theta_2}I_k^\mu\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^\mu g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^\mu g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1} g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1} g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \\
& \leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\frac{|g''(k)|}{(\mu + 2)(\mu + 3)} + \frac{|g''(\theta_1)|}{(\mu + 3)} \right] \\
& \quad + \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\frac{|g''(\theta_2)|}{(\mu + 3)} + \frac{|g''(k)|}{(\mu + 2)(\mu + 3)} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.9: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu}\{g(k)\} + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu}\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^{\mu}g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^{\mu}g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1}g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1}g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(k)|^q + |g''(\theta_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad + \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q + |g''(k)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.10: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu}\{g(k)\} + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu}\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^{\mu}g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^{\mu}g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1}g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1}g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{p(\mu p + p + 1)} + \frac{|g''(k)|^q + |g''(\theta_1)|^q}{2q} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{p(\mu p + p + 1)} + \frac{|g''(\theta_2)|^q + |g''(k)|^q}{2q} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.11: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu}\{g(k)\} + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu}\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^{\mu}g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^{\mu}g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1}g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1}g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\left(\frac{1}{\mu + 2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(k)|^q}{(\mu + 2)(\mu + 3)} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{(\mu + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\left(\frac{1}{\mu + 2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{(\mu + 3)} + \frac{|g''(k)|^q}{(\mu + 2)(\mu + 3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.12: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konkav fonksiyon ve $q > 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu}\{g(k)\} + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu}\{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^{\mu}g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^{\mu}g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1}g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1}g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu + 2} \right) \left| g'' \left(\frac{1}{\mu + 3}k + \frac{\mu + 2}{\mu + 3}\theta_1 \right) \right| \\ &+ \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu + 2} \right) \left| g'' \left(\frac{\mu + 2}{\mu + 3}\theta_1 + \frac{1}{\mu + 3}k \right) \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$ ve $\mu \in [0,1]$ 'dir (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.13: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konkav fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\left| {}^{AB}_{\theta_1} I_k^\mu \{g(k)\} + {}^{AB}_{\theta_2} I_k^\mu \{g(k)\} - \frac{(k - \theta_1)^\mu g(\theta_1) + (\theta_2 - k)^\mu g(\theta_2)}{B(\mu)\Gamma(\mu)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(k - \theta_1)^{\mu+1} g'(\theta_1) - (\theta_2 - k)^{\mu+1} g'(\theta_2)}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} - \frac{2(1 - \mu)g(k)}{B(\mu)} \right| \\ &\leq \frac{(k - \theta_1)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| g'' \left(\frac{\theta_1 + k}{2} \right) \right| \\ &+ \frac{(\theta_2 - k)^{\mu+2}}{(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{1}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| g'' \left(\frac{\theta_2 + k}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$ ve $\mu \in [0,1]$ 'dir (Set *et al.* 2021).

Set ve arkadaşları aynı çalışmada Lemma 3.2.2. eşitliğinde fonksiyonun birinci türevini ortadan kaldırmak ve daha kullanışlı bulgular elde etmek adına aşağıdaki lemmayı vermişlerdir. Ardından bu lemma yardımıyla Atangana-Baleanu kesirli integrallerini içeren Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.3: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\theta_1 < \theta_2$ ise,

$$\begin{aligned}
& {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu}}{2^{\mu} B(\mu) \Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \\
& - \frac{2(1 - \mu) g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \\
& = \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2} (\mu + 1) B(\mu) \Gamma(\mu)} \int_0^1 ((1 - v)^{\mu+1} - 1) g''\left(v \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + (1 - v) \theta_1\right) dv \\
& + \int_0^1 (v^{\mu+1} - 1) g''\left(v \theta_2 + (1 - v) \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) dv
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0, 1]$ ve $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.14: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ konveks fonksiyon ise,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{\theta_1}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu}}{2^{\mu} B(\mu) \Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(1 - \mu) g\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\
& \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2} (\mu + 1) B(\mu) \Gamma(\mu)} \left[(|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|) \left(\frac{1}{\mu + 3} - \frac{1}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \left| g''\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right| \left(\frac{1}{(\mu + 3)(\mu + 2)} - \frac{1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.15: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}, (\theta_1, \theta_2)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu}}{2^{\mu} B(\mu) \Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2(1-\mu)g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2}(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\left(\frac{1}{\mu p + p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) \\ & \quad \times \left[\left(\frac{|g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q + |g''(\theta_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q + |g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.16: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}, (\theta_1, \theta_2)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu}}{2^{\mu} B(\mu) \Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2(1-\mu)g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2}(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\frac{2}{p(\mu p + p + 1)} - \frac{2}{p} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.17: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left| {}^{AB}I_{\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^\mu g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^\mu g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2-\theta_1)^\mu}{2^\mu B(\mu)\Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\ & \quad \left. - \frac{2(1-\mu)g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\ & \leq \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2}(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\left(\frac{1}{\mu+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q}{(\mu+2)(\mu+3)} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{(\mu+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{\mu+2}\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{(\mu+3)} + \frac{|g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q}{(\mu+2)(\mu+3)} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{|g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q + |g''(\theta_1)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} - \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q + |g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$, $\mu \in [0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Set et al. 2021).

Teorem 3.2.18: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}$, (θ_1, θ_2) üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konkav fonksiyon ve $q > 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu}}{2^{\mu}B(\mu)\Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(1-\mu)g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\
& \leq \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2}(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\left(\frac{1}{\mu+2}\right) \left| g''\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2(\mu+3)} + \frac{\mu+2}{\mu+3}\theta_1\right) \right| \right. \\
& \quad + \left(\frac{1}{\mu+2}\right) \left| g''\left(\frac{\mu+2}{\mu+3}\theta_2 + \frac{\theta_1+\theta_2}{2(\mu+3)}\right) \right| - \left| g''\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{4}\right) \right| \\
& \quad \left. - \left| g''\left(\frac{3\theta_2+\theta_1}{4}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$ ve $\mu \in [0,1]$ 'dir (Set *et al.* 2021).

Teorem 3.2.19: $g : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}, (\theta_1, \theta_2)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1 < \theta_2$ ve $g'' \in L_1[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ konkav fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \left| {}^{AB}I_{\theta_1, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) + {}^{AB}I_{\theta_2, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\mu} g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) - \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu}}{2^{\mu}B(\mu)\Gamma(\mu)} [g(\theta_1) + g(\theta_2)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(1-\mu)g\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}{B(\mu)} \right| \\
& \leq \frac{(\theta_2-\theta_1)^{\mu+2}}{2^{\mu+2}(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left[\left(\frac{1}{\mu p + p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} \left| g''\left(\frac{3\theta_2+\theta_1}{4}\right) \right| - \left| g''\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{4}\right) \right| \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{\mu p + p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} \left| g''\left(\frac{3\theta_2+\theta_1}{4}\right) \right| - \left| g''\left(\frac{3\theta_1+\theta_2}{4}\right) \right| \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $k \in [\theta_1, \theta_2]$ ve $\mu \in [0,1]$ 'dir (Set *et al.* 2021).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Atangana–Baleanu kesirli integral operatörleri yardımıyla literatürde bulunan farklı konveks fonksiyon sınıfları için yeni eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1. $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ P – fonksiyon ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-\mu-1}}{\mu+2} \right) (|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1’den ve $|g''|$ P – fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| [|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|] dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| [|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|] dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| [|g''(\theta_2)| + |g''(\theta_1)|] dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| [|g''(\theta_2)| + |g''(\theta_1)|] dv \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} [|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|] dv &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} [|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|] dv \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} [|g''(\theta_2)| + |g''(\theta_1)|] dv \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} [|g''(\theta_2)| + |g''(\theta_1)|] dv \\
&= \frac{2^{-\mu-2}}{\mu+2} \cdot [|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|]
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q P$ -fonksiyon ve $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\
&\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\times \left[\left(\int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

yazılır. $|g''|^q$, P – fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\times \left[\left(\int_0^1 (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q) dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 (|g''(\theta_2)|^q + |g''(\theta_1)|^q) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.3: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ P –fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(\mu+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2^{-\mu}}{(\mu+2)} (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q) \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılarak

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. $|g''|^q$, P – fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q) dv \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| (|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| (|g''(\theta_2)|^q + |g''(\theta_1)|^q) dv \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| (|g''(\theta_2)|^q + |g''(\theta_1)|^q) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. İntegral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.4: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ, \theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ P –fonksiyon ve $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left[\frac{1}{p} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p+1}}{1+p+\mu p} \right) + \frac{2}{q} [|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q] \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\
&\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right) \right)
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$, P – fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 [|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q] dv \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 [|g''(\theta_2)|^q + |g''(\theta_1)|^q] dv \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.5: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ *quasi* – konveks fonksiyon ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-\mu-1}}{\mu+2} \right) \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1'den ve $|g''|$ *quasi* –konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv &= \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} dv \\ &= \left(\frac{2^{-\mu-2}}{\mu+2} \right) \max\{|g''(\theta_1)|, |g''(\theta_2)|\} \end{aligned}$$

eşitliği yerine yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. : $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ *quasi* –konveks fonksiyon ve $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[\left(\int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$ *quasi* –konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad \times \left[\left(\int_0^1 \max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.7: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ, \theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ *quasi* –konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(\mu+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2^{-\mu}}{(\mu+2)} \max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |dv| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $|g''|^q$, *quasi* – konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |dv| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right) dv \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right) dv \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left(\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\} \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. İntegral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.8: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ, \theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ *quasi* –konveks fonksiyon ve $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left[\frac{1}{p} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p+1}}{1+p+\mu p} \right) + \frac{2}{q} (\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\}) \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right) \right) \end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$, *quasi* –konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 (\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\}) dv \right) \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 (\max\{|g''(\theta_1)|^q, |g''(\theta_2)|^q\}) dv \right)$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.9: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ Godunova – Levin fonksiyon ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\frac{2^{-\mu}}{\mu+1} + \beta_{\frac{1}{2}}(\mu+2, 0) + \frac{1}{2}(\mu+1)_3F_2 \left(1, 1, -\mu; 2, 2, -\frac{1}{2} \right) - H_{\mu+1} + \log 2 \right) \times (|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)|)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat: Lemma 3.2.1’den ve $|g''|$ Godunova – Levin fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \left[\frac{|g''(\theta_1)|}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|}{1-v} \right] dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left[\frac{|g''(\theta_1)|}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|}{1-v} \right] dv \right\} \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}} |v|^{\mu+1} \left[\frac{|g''(\theta_2)|}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|}{1-v} \right] dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left[\frac{|g''(\theta_2)|}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|}{1-v} \right] dv \Big\}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_1)|}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_1)|}{1-v} dv = \frac{2^{-\mu-1}}{\mu+1} |g''(\theta_1)|$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_2)|}{v} dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_2)|}{1-v} dv = \frac{2^{-\mu-1}}{\mu+1} |g''(\theta_2)|$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_1)|}{1-v} dv = \beta_{\frac{1}{2}}(\mu+2, 0) |g''(\theta_1)|$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_2)|}{1-v} dv = \beta_{\frac{1}{2}}(\mu+2, 0) |g''(\theta_2)|$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_1)|}{v} dv = \left(\frac{1}{2}(\mu+1) {}_3F_2 \left(1, 1, -\mu; 2, 2, \frac{1}{2} \right) - H_{\mu+1} + \log 2 \right) |g''(\theta_1)|$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \frac{|g''(\theta_2)|}{v} dv = \left(\frac{1}{2}(\mu+1) {}_3F_2 \left(1, 1, -\mu; 2, 2, \frac{1}{2} \right) - H_{\mu+1} + \log 2 \right) |g''(\theta_2)|$$

elde edilir ve sonuçlar yerine yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.10: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon ve $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \left[\left(\frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_1)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(1+q+\mu q, 0) |g''(\theta_2)|^q \right. \right. \\
& + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_2)|^q \\
& + \left(\frac{q(1+\mu)}{2} \times {}_3F_2 \left(1, 1, 1-q-\mu q; 2, 2; \frac{1}{2} \right) - H_{(\mu+1)q} + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_2)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(1+q+\mu q, 0) |g''(\theta_1)|^q \right. \\
& + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_1)|^q \\
& + \left(\frac{q(1+\mu)}{2} \times {}_3F_2 \left(1, 1, 1-q-\mu q; 2, 2; \frac{1}{2} \right) - H_{(\mu+1)q} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_2)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\int_0^1 1 \, dv \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q \, dv \right. \right. \\
& + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q \, dv \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q \, dv \right. \\
& \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q \, dv \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\mathcal{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\int_0^1 1 \, dv \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right) dv \right. \right. \\
& + \left. \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right) dv \right. \\
& + \left. \left. \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli integraller yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.11: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\mathcal{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-\mu-1}}{\mu+2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(1+\mu)} |g''(\theta_1)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(2+\mu, 0) |g''(\theta_2)|^q \right. \right. \\
& + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_2)|^q \\
& + \left(\frac{1}{2}(\mu+1) {}_3F_2 \left(1, 1, -\mu; 2, 2, -\frac{1}{2} \right) - H_{\mu+1} + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_1)|^q \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(1+\mu)} |g''(\theta_2)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(2+\mu, 0) |g''(\theta_1)|^q \right. \\
& + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_1)|^q \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2}(\mu+1) {}_3F_2 \left(1, 1, -\mu; 2, 2, -\frac{1}{2} \right) - H_{\mu+1} + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_2)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $\mathcal{B}(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur (Demir and Yüksel 2022).

İspat : Lemma 3.2.1 ve Power Mean eşitsizliğinden hareketle

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\mathcal{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon olduğundan,

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\mathcal{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left| \frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right| dv \right. \right. \\
& \quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left| \frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right| dv \Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left| \frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right| dv \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left| \frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right| dv \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ve gerekli integraller hesaplanarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.12: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \left(\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \left(\left(\frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_1)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(1+q+\mu q, 0) |g''(\theta_2)|^q \right. \right. \right. \right. \\
& \quad + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_2)|^q \\
& \quad + \left(\frac{q(1+\mu)}{2} \times {}_3F_2 \left(1, 1, 1-q-\mu q; 2, 2; \frac{1}{2} \right) - H_{(\mu+1)q} \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_1)|^q \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \left(\frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_2)|^q + \beta_{\frac{1}{2}}(1+q+\mu q, 0) |g''(\theta_1)|^q \right. \right. \\
& \quad + \frac{2^{-(1+\mu)q}}{(1+\mu)q} |g''(\theta_1)|^q \\
& \quad + \left(\frac{q(1+\mu)}{2} \times {}_3F_2 \left(1, 1, 1-q-\mu q; 2, 2; \frac{1}{2} \right) - H_{(\mu+1)q} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\ln 4}{2} \right) |g''(\theta_2)|^q \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 1 dv + \frac{1}{q} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 1 dv + \frac{1}{q} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right) \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$ Godunova – Levin fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 1 dv + \frac{1}{q} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right) dv \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_1)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_2)|^q}{1-v} \right) dv \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 1 dv + \frac{1}{q} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right) dv \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^q \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{v} + \frac{|g''(\theta_1)|^q}{1-v} \right) dv \right) \right) \Bigg)
\end{aligned}$$

elde edilir ve integral hesaplamaları yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.13: $g : I \subset [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$ ve $|g''|$ m – konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-2-\mu}}{2+\mu} \right) \\
& \quad \times \left[|g''(\theta_1)| + |g''(\theta_2)| + m \left(\left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right| + m \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right| \right) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1'den ve $|g''|$ m – konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left[v|g''(\theta_1)| + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right| \right] dv \right. \\
& + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left[v|g''(\theta_1)| + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right| \right] dv \\
& + \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left[v|g''(\theta_2)| + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right| \right] dv \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left[v|g''(\theta_2)| + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right| \right] dv \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamalarının ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.14: $g : I \subset [0, b) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$ ve $|g''|^q$ m -konveks fonksiyon, $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}} \left(\left[|g''(\theta_1)|^q + m \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left[|g''(\theta_2)|^q + m \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1'den ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|M| \leq & \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} |^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left[\left(\int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$ m – konveks fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left[\left(\int_0^1 v |g''(\theta_1)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 v |g''(\theta_2)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. İntegral işlemleri yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.15: $g : I \subset [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $m \in (0, 1]$ ve $|g''|^q$ m – konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(\mu+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{2^{-(2+\mu)}}{(\mu+2)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \left(\left[|g''(\theta_1)|^q + m \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left[|g''(\theta_2)|^q + m \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0, 1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1’den ve Power Mean eşitsizliğinden

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. $|g''|^q$ m – konveks fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\text{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left(v |g''(\theta_1)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q \right) dv \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left(v |g''(\theta_1)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left(v |g''(\theta_2)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q \right) dv \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left(v |g''(\theta_2)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q \right) dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. İntegral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.16: $g : I \subset [0, b) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. $|g''|^q$ m – konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left[\frac{2}{p} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2q} \left[|g''(\theta_1)|^q + |g''(\theta_2)|^q + m \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right| + m \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right| \right] \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| \left[|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)| \right] dv \right) \\
&\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right) \right)
\end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$, m – konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(v |g''(\theta_1)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_2}{m}\right) \right|^q \right) dv \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{q} \int_0^1 \left(v |g''(\theta_2)|^q + m(1-v) \left| g''\left(\frac{\theta_1}{m}\right) \right|^q \right) dv \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.17: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$ ve $\theta_1 < \theta_2$ için $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|$ AG – konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
|M| & \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
& \times \left\{ |g''(\theta_2)| \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{\ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|}{2} \right) \right) \left(-\ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \right. \\
& + \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right| \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{\ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|}{2} \right) \right) \left(\ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \left. \right\} \\
& + |g''(\theta_1)| \left\{ \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{\ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|}{2} \right) \right) \left(-\ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \right. \\
& + \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right| \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{\ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|}{2} \right) \right) \left(\ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1'den ve $|g''|$ AG – konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\
&\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^v |g''(\theta_2)| \right] dv \right. \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^v |g''(\theta_2)| \right] dv \\
&\quad + \int_0^{\frac{1}{2}} v^{\mu+1} \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^v |g''(\theta_1)| \right] dv \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-v)^{\mu+1} \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^v |g''(\theta_1)| \right] dv \right\}
\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli integral hesaplamalarının ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.18: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ, \theta_1 < \theta_2, |g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ ve $g''(\theta_1) \neq g''(\theta_2)$ olsun. Eğer $|g''|^q$ AG – konveks fonksiyon, $p, q > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$\begin{aligned}
|M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p}}{1+p+\mu p} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left\{ \left[|g''(\theta_2)|^q \left(\frac{|g''(\theta_1)|^q}{q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{q}} + \left[|g''(\theta_1)|^q \left(\frac{|g''(\theta_2)|^q}{q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1’den ve Hölder eşitsizliğinden

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\text{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left[\left(\int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

yazılır. $|g''|^q$ AG – konveks fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\text{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right)^{\frac{1}{p}} \\ \times \left[\left(\int_0^1 \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^{qv} |g''(\theta_2)|^q \right] dv \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^1 \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^{qv} |g''(\theta_1)|^q \right] dv \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. İntegral işlemleri yapılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.19: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$ ve $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ olsun. Eğer $|g''|^q$ AG – konveks fonksiyon ve $q \geq 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)\text{B}(\mu)\Gamma(\mu)} \left(\frac{2^{-(1+\mu)}}{(\mu+2)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ |g''(\theta_2)| \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|}{2} \right) \right) \left(-q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \right. \\ \left. + \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^q \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|}{2} \right) \right) \left(q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ + |g''(\theta_1)| \left\{ \left[\left(\Gamma(2+\mu) - \Gamma\left(2+\mu, -\frac{q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|}{2} \right) \right) \left(-q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right| \right)^{-2-\mu} \right] \right.$$

$$+ \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^q \left[\left(\Gamma(2 + \mu) - \Gamma \left(2 + \mu, -\frac{q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|}{2} \right) \right) \left(q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right| \right)^{-2-\mu} \right]^{\frac{1}{q}} \Bigg\}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1'den ve Power Mean eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $|g''|^q$ AG – konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu + 1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| dv \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ &\times \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^{qv} |g''(\theta_2)|^q \right] dv \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^{qv} |g''(\theta_2)|^q \right] dv \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\left. + \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}| \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^{qv} |g''(\theta_1)|^q \right] dv \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}| \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^{qv} |g''(\theta_1)|^q \right] dv \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. İntegral işlemlerinin ardından ispat tamamlanır.

Teorem 4.20: $g : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, I^\circ$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $\theta_1, \theta_2 \in I^\circ$, $\theta_1 < \theta_2$, $|g''| \in L[\theta_1, \theta_2]$ ve $g''(\theta_1) \neq g''(\theta_2)$ olsun. $|g''|^q$ AG –konveks fonksiyon ve $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \times \left[\frac{1}{p} \left(\frac{2^{-(1+\mu)p+1}}{1+p+\mu p} \right) + \frac{1}{q} \left[|g''(\theta_2)|^q \left(\frac{\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^q - 1}{q \ln \left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|} \right) + |g''(\theta_1)|^q \left(\frac{\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^q - 1}{q \ln \left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|} \right) \right] \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu \in (0,1]$ ve $B(\mu)$ normalleştirme fonksiyonudur.

İspat: Lemma 3.2.1 ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |M| &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\int_0^1 |t^\mu(v)| [|g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)| + |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|] dv \right) \\ &\leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)} \\ &\quad \times \left(\left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_1 + (1-v)\theta_2)|^q dv \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{p} \int_0^1 |t^\mu(v)|^p dv + \frac{1}{q} \int_0^1 |g''(v\theta_2 + (1-v)\theta_1)|^q dv \right) \right) \end{aligned}$$

yazılır. $|g''|^q$, AG – konveks fonksiyon olduğundan

$$|M| \leq \frac{(\theta_2 - \theta_1)^{\mu+1}}{2(\mu+1)B(\mu)\Gamma(\mu)}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left| \frac{g''(\theta_1)}{g''(\theta_2)} \right|^{qv} |g''(\theta_2)|^q \right] dv \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{p} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |v^{\mu+1}|^p dv + \int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-v)^{\mu+1}|^p dv \right) + \frac{1}{q} \int_0^1 \left[\left| \frac{g''(\theta_2)}{g''(\theta_1)} \right|^{qv} |g''(\theta_1)|^q \right] dv \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılarak ispat tamamlanır.



BEŞİNCİ BÖLÜM

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Hazırlanan bu tez çalışmasında Kavurmacı ve arkadaşlarının (2021) sunduğu çalışmadan yararlanılmıştır. Çalışmada verilen özdeşlik kullanılarak P –fonksiyon, *quasi* – konveks fonksiyon, *Godunavo – Levin* fonksiyon, m – konveks fonksiyon ve AG – konveks fonksiyon çeşitlerini içeren Atangana-Baleanu kesirli integraller yardımıyla Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler için yeni üst sınırlar elde edilmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar sunulan sonuçlar ışığında, yeni özdeşlikler verebilir ve eşitsizliklerin daha genel versiyonlarını, yeni üst sınırlar veren genişlemelerini kesirli integral operatörlerin genel formlarını kullanarak elde edebilirler.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. and Baleanu, D. 2017. Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel. J. Nonlinear Sci. Appl., 10, 1098-1107.
- Atangana, A. and Baleanu, D. 2016. New fractional derivatives with non-local and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, Thermal Science, 20 (2), 757-763.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, 656 s, Ankara.
- Beckenbach, E. F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 p, Heidelberg.
- Breckner, W.W. 1978. Stetigkeitsaussagen für eine klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen räumen. Publ. Inst. Math., 23(43), 13-20.
- Chaudhry, M. A., Qadir, A., Rafique, M. and Zubair, S. M. 1997. Extension of Euler's beta function. J. Comput. Appl. Math., 78 (1), 19-32.
- Demir, K. N., and Yüksel, E. 2022. Some Atangana – Baleanu fractional integral inequalities for convex functions. 5th International Conference on Life and Engineering Sciences, 19 – 22 May, Alanya, Turkey.
- Djida, J.D., Area, I. and Atangana, A. 2016. New numerical scheme of Atangana-Baleanu fractional integral: an application to groundwater flow within leaky aquifer. arXiv:1610.08681.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E. 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21(3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications. RGMIA, Monographs, Victoria University, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html>.
- Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P. 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.
- Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., 1953. Higher Transcendental Functions Vol. II. McGraw-Hill Book Company, 316 p, New York.

- Godunova, E.K. and Levin, V.I. 1985. Inequalities for functions of a broad class that contains convex, monotone and some other forms of functions. *Numerical Mathematics and Mathematical Physics* , 138-142.
- Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O., 1994. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2)*. Addison-Wesley Publishing Company, 672 p , Boston.
- Hardy, G.H., Littlewood, J. E. and Polya, G., 1934. *Inequalities*. Cambridge University Press, 324 p , United Kingdom.
- Kannappan, P., 2009. *Functional Equations and Inequalities with Applications*. Springer US., 810 p , New York.
- Kavurmacı Önalın, H., Akdemir, A.O., Avcı Ardıç, M. and Baleanu, D. 2021. On new general versions of Hermite–Hadamard type integral inequalities via fractional integral operators with Mittag-Leffler kernel. *J Inequal Appl*, 186.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, 540 p, Amsterdam.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis With Applications*. John Wiley&Sons. Inc., 704 p , New York.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, *Seminar on Functional Equations, Approx. And Convex*. Cluj-Napoca , Romania.
- Mitrinović, D. S. 1970. *Analytic Inequalities*. Springer-Verlag, 404 p , Berlin.
- Mitrinović, D.S, Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 740 p, UK.
- Musayev, B., Alp M., Mustafayev N. ve Ekincioğlu, İ., 2007. *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I*. Seçkin Yayıncılık, 629 s , Ankara.
- Niculescu, C. P. and Person, L.E., 2006. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach*. CMS Books in Mathematics 23, Springer, 255 p, New York.
- Oldham K. B. and Spanier, J. 1974. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. Academic Press Inc., London, 1-185.
- Orlicz, W. 1961. A note on modular spaces I. *Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy.*, 9, 157-162.
- Pečarić, J. E., 1987. *Convex Functions: Inequalities*. Serbo Croatian, 243 p, Beograd.
- Pečarić, J.E., Proschan, F., and Tong, Y.L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press, 467 p, London.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 337 p, San Diego.

- Rainville, E. D., 1971. Special Functions. Chelsea Pub Co., 365 p, New York.
- Ross, B. 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. *Historia Mathematica*, 4 (1), 75-89.
- Set, E., Butt, S. I., Akdemir, A. O., Karaoğlu, A. and Abdeljawad, T. 2021. New integral inequalities for differentiable convex functions via Atangana-Baleanu fractional integral operators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 143(1), 110554.
- Soykan, Y., 2016. Fonksiyonel Analiz. Nobel Akademik Yayıncılık, 600 s, Ankara.
- Tiel, J. V., 1984. Convex Analysis. Wiley, 134 p, Chicester.
- Toader, G. 1988. On generalization of the convexity. *Mathematica*, 30(53), 83-87.
- Varošanec, S. 2007. On h-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(1), 303-311.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	
Doğum Yeri ve Tarihi	
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	
Yüksek Lisans Öğrenimi	
Bildiği Yabancı Diller	
Bilimsel Faaliyetler	
İş Deneyimi	
Stajlar	
Projeler	
Çalıştığı Kurumlar	
İletişim	
E-posta Adresi	
Mezuniyet Tarihi	